УДК 517.544, 517.548

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О СКАЧКЕ С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ И СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

канд. физ.-мат. наук Т.М. УРБАНОВИЧ, С.В. БЕЛЯЙ
(Полоцкий государственный университет)

Исследуется краевая задача о скачке, правая часть которой представляет собой произведение логарифмических множителей, а также краевая задача о скачке, правая часть которой является произведением степенных и логарифмических множителей. Для решения задачи применяется новый подход – метод формального умножения гиперфункций.

1. Краевая задача о скачке с логарифмической правой частью

Рассмотрим в классе гиперфункций Сато $H.F.\{\Phi^+(z),\Phi^-(z)\}$ краевую задачу Римана о скачке:

$$\Phi^+(x)-\Phi^-(x)=\prod_{k=1}^{n}\ln(x-b_k),-\infty<x<+\infty, \tag{1}$$

где b_k точки, принадлежащие действительной прямой, $b_1<b_2<...<b_n, k=\overline{1,n}$.

Начнем рассматривать в классе гиперфункций Сато простейшую неоднородную краевую задачу Римана (1) с частного случая $n=1$, то есть решим в классе гиперфункций задачу

$$\Phi^+(x)-\Phi^-(x)=\ln(x-b),-\infty<x<+\infty. \tag{2}$$

Для того чтобы решить задачу (2), надо реинтерпретировать обыкновенную функцию $f_b(x)=\ln(x-b)$ в виде гиперфункции.

Воспользуемся схемой Юрова (см. [1–6]) для определения гиперфункции $H.F.\{F_{1,b}{}^+(z),F_{1,b}{}^-(z)\}$, соответствующей обыкновенной функции $f_b(x)=\ln(x-b), b<x<+\infty.$

Приведем, следуя [7], некоторые сведения из теории ортогональных многочленов. Напомним, что многочлены Бернулли определяются равенством

$$B(\omega)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k B_k\omega^{n-k}, \tag{3}$$

в котором C_n^k – биномиальные коэффициенты, B_k – числа Бернулли:

$$B_0=1,\ B_1=-0{,}5,\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ B_4=-\frac{1}{30},\ \ldots \tag{4}$$

Для удобства (см. [7]) вводятся многочлены:

$$\tilde{B}_n(\omega)=B_n(\omega)-B_n, \tag{5}$$

для которых $\tilde{B}_n(0)=0$.

Лемма 1. *Гиперфункция* $H.F.\{F_{1,b}{}^+(z),F_{1,b}{}^-(z)\}$, *соответствующая обыкновенной функции* $f_b(x)=\ln(x-b)$, $b<x<+\infty$, *имеет вид*

$$H.F.\left\{F_{1,b}{}^+(z),F_{1,b}{}^-(z)\right\}=H.F.\left\{\left[-\pi i\tilde{B}_2\left[\frac{\ln^*(z-b)}{2\pi i}\right]\right]_+,\left[-\pi i\tilde{B}_2\left[\frac{\ln^*(z-b)}{2\pi i}\right]\right]_-\right\}, \tag{6}$$

где $\ln^*(z-b)$– *фиксированная непрерывная ветвь многозначной функции* $f_b(x)=\ln(x-b)$ *с разрезом* $b<x<+\infty$; *контурное значение* $\ln(x-b)$, *которое совпадает с граничным значением* $\ln^*(z-b)$ *на верхнем берегу разреза;* $[...]_+,[...]_-$ *означает в (6) соответственно верхнюю и нижнюю компоненту гиперфункции, соответствующей обыкновенной функции* $f_b(x)=\ln(x-b), b<x<+\infty$.

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить, что разность предельных значений функции $F_{1,b}(z)=-\pi i\tilde{B}_2\left[\dfrac{\ln^*(z-b)}{2\pi i}\right]$ при $b<x<+\infty$ равна $\ln(x-b)$.

Найдем предельные значения функции $F_{1,b}(z)$:

$$F_{1,b}{}^{+}(x) = -\pi i \tilde{B}_2\left[\frac{\ln(x-b)}{2\pi i}\right],\ F_{1,b}{}^{-}(x) = -\pi i \tilde{B}_2\left[\frac{\ln(x-b)}{2\pi i}+1\right].$$

Выполнив преобразования (см. (3) – (5)), получим

$$F_{1,b}{}^{+}(x) = -\pi i\left(-\frac{\ln^2(x-b)}{4\pi^2}-\frac{\ln(x-b)}{2\pi i}\right),\ F_{1,b}{}^{-}(x) = -\pi i\left(-\frac{\ln^2(x-b)}{4\pi^2}+\frac{\ln(x-b)}{2\pi i}\right).$$

Отсюда

$$F_{1,b}{}^{+}(x) - F_{1,b}{}^{-}(x) = \ln(x-b),\ b < x < +\infty,$$

и

$$F_{1,b}{}^{+}(x) - F_{1,b}{}^{-}(x) = 0,\ -\infty < x < b,$$

что завершает доказательство.

Аналогично можно определить гиперфункцию, соответствующую обыкновенной функции $f_b(x) = \ln(x-b),\ -\infty < x < b.$

Лемма 2. *Гиперфункция* $H.F.\{F_{2,b}{}^{+}(z), F_{2,b}{}^{-}(z)\}$, *соответствующая обыкновенной функции* $f_b(x) = \ln(x-b),\ -\infty < x < b$, *имеет вид*

$$H.F.\{F_{2,b}{}^{+}(z), F_{2,b}{}^{-}(z)\} = H.F.\left\{\left[\pi i \tilde{B}_2\left[\frac{\ln^{**}(b-z)}{2\pi i}\right]\right]_+,\ \left[\pi i \tilde{B}_2\left[\frac{\ln^{**}(b-z)}{2\pi i}\right]\right]_-\right\}, \tag{7}$$

где $\ln^{**}(b-z)$ *– фиксированная непрерывная ветвь многозначной функции* $f_b(x) = \ln(b-z)$ *с разрезом* $-\infty < x < b$, *причем контурное значение* $\ln(x-b)+2\pi i$ *выбранной ветви* $\ln^{**}(b-z)$ *совпадает с граничным значением её на верхнем берегу разреза;* $[...]_+, [...]_-$ *означают в (7) соответственно верхнюю и нижнюю компоненту гиперфункции, соответствующей обыкновенной функции* $f_b(x) = \ln(x-b), -\infty < x < b$.

Доказательство. Найдем предельные значения функции $F_{2,b}(z) = \pi i \tilde{B}_2\left[\frac{\ln^{**}(b-z)}{2\pi i}\right]$:

$$F_{2,b}{}^{+}(x) = \pi i \tilde{B}_2\left[\frac{\ln(x-b)}{2\pi i}+1\right],\ F_{2,b}{}^{-}(x) = \pi i \tilde{B}_2\left[\frac{\ln(x-b)}{2\pi i}\right].$$

Выполним преобразования:

$$F_{2,b}{}^{+}(x) = \pi i\left(-\frac{\ln^2(x-b)}{4\pi^2}+\frac{\ln(x-b)}{2\pi i}\right),\ F_{2,b}{}^{-}(x) = \pi i\left(-\frac{\ln^2(x-b)}{4\pi^2}-\frac{\ln(x-b)}{2\pi i}\right).$$

Разность предельных значений равна

$$F_{2,b}{}^{+}(x) - F_{2,b}{}^{-}(x) = \ln(x-b),\ -\infty < x < b,$$

и

$$F_{2,b}{}^{+}(x) - F_{2,b}{}^{-}(x) = 0,\ b < x < +\infty,$$

что завершает доказательство.

ТЕОРЕМА 1. *Решение задачи (2) в классе гиперфункций Сато имеет вид*

$$H.F.\{\Phi^{+}(z), \Phi^{-}(z)\} = H.F.\{F_{1,b}{}^{+}(z)+F_{2,b}{}^{+}(z), F_{1,b}{}^{-}(z)+F_{2,b}{}^{-}(z)\} =$$

$$= H.F.\left\{\left[\pi i\left[\tilde{B}_2\left[\frac{\ln^{**}(b-z)}{2\pi i}\right]-\tilde{B}_2\left[\frac{\ln^{*}(z-b)}{2\pi i}\right]\right]\right]_+, \left[\pi i\left[\tilde{B}_2\left[\frac{\ln^{**}(b-z)}{2\pi i}\right]-\tilde{B}_2\left[\frac{\ln^{*}(z-b)}{2\pi i}\right]\right]\right]_-\right\}.$$

Доказательство теоремы 1 базируются на утверждениях лемм 1 и 2.

Рассмотрим теперь задачу (1) в случае *n* логарифмических множителей в правой части. Применим к её решению метод формального произведения гиперфункций

$$f_{b_k}(x) = H.F.\{\ F_{1,b_k}{}^{+}(z)+F_{2,b_k}{}^{+}(z), F_{1,b_k}{}^{-}(z)+F_{2,b_k}{}^{-}(z)\},\ k = \overline{1,n}.$$

Формальное произведение построим следующим образом:

$$\prod_{k=1}^{n} f_{b_k}(x) = H.F.\{V^{+}_{b_1,b_2,\dots,b_n}(z), V^{-}_{b_1,b_2,\dots,b_n}(z)\},$$

где

$$V^{+}_{b_1,b_2,\dots,b_n}(z) = \prod_{k=1}^{n} F^{+}_{1,b_k}(z) + F^{+}_{2,b_n}(z)\prod_{k=1}^{n-1} F^{+}_{1,b_k}(z) + F^{+}_{2,b_{n-1}}(z)F^{+}_{2,b_n}(z)*$$
$$*\prod_{k=1}^{n-2} F^{+}_{1,b_k}(z) + \dots + F^{+}_{1,b_1}(z)\prod_{k=2}^{n} F^{+}_{2,b_k}(z) + \prod_{k=1}^{n} F^{+}_{2,b_k}(z),$$
$$V^{-}_{b_1,b_2,\dots,b_n}(z) = \prod_{k=1}^{n} F^{-}_{1,b_k}(z) + F^{-}_{2,b_n}(z)\prod_{k=1}^{n-1} F^{-}_{1,b_k}(z) + F^{-}_{2,b_{n-1}}(z)F^{-}_{2,b_n}(z)*$$
$$*\prod_{k=1}^{n-2} F^{-}_{1,b_k}(z) + \dots + F^{-}_{1,b_1}(z)\prod_{k=2}^{n} F^{-}_{2,b_k}(z) + \prod_{k=1}^{n} F^{-}_{2,b_k}(z).$$

ТЕОРЕМА 2. *Решение задачи (1) в классе гиперфункций Сато имеет вид:*

$$H.F.\{\Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x)\} = H.F.\{V^{+}_{b_1,b_2,\dots,b_n}(z), V^{-}_{b_1,b_2,\dots,b_n}(z)\}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы проверяется непосредственно.

При $n=1$ теорема совпадает с теоремой 1.

Для $n=2$ равенство (1) проверяется непосредственно, для чего находится разность предельных значений

$$\lim_{\substack{z\to x,\\ \operatorname{Im} z>0\\ x\in R\setminus\{b_1,b_2\}}} V^{+}_{b_1,b_2} - \lim_{\substack{z\to x,\\ \operatorname{Im} z<0\\ x\in R\setminus\{b_1,b_2\}}} V^{-}_{b_1,b_2} = (F^{+}_{1,b_1}(x)F^{+}_{1,b_2}(x) + F^{+}_{1,b_1}(x)F^{+}_{2,b_2}(x) + F^{+}_{2,b_1}(x)F^{+}_{1,b_2}(x) +$$
$$+F^{+}_{2,b_1}(x)F^{+}_{2,b_2}(x)) - (F^{-}_{1,b_1}(x)F^{-}_{1,b_2}(x) + F^{-}_{1,b_1}(x)F^{-}_{2,b_2}(x) + F^{-}_{2,b_1}(x)F^{-}_{1,b_2}(x) + F^{-}_{2,b_1}(x)F^{-}_{2,b_2}(x))$$

в тех точках, в которых таковая существует.

Таким образом, можно построить решение задачи (1) при $n=2$ по известным решениям задач:

$$\Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x) = \ln(x-b_1),\ -\infty < x < +\infty,$$

$$\Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x) = \ln(x-b_2),\ -\infty < x < +\infty.$$

Этим же способом доказывается справедливость утверждения теоремы для $n \ge 3$.

Теорема доказана.

2. Краевая задача о скачке со степенно-логарифмической правой частью

Рассмотрим в гласе гиперфункций $H.F.\{\Phi^{+}(z), \Phi^{-}(z)\}$ решение краевой задачи Римана о скачке:

$$\Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x) = \prod_{j=1}^{m}(x-a_j)^{\alpha_j} \cdot \prod_{k=1}^{n}\ln(x-b_k),\ -\infty < x < +\infty, \tag{8}$$

где a_j, b_k точки, принадлежащие действительной прямой, $a_1 < a_2 < \dots < a_m$, $b_1 < b_2 < \dots < b_n$, $\alpha_j \in R$, $j = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,n}$.

Начнем рассматривать в классе гиперфункций простейшую неоднородную задачу Римана (8) с частного случая $m=1$, $n=1$, то есть решим в классе гиперфункций следующую задачу:

$$\Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x) = (x-a)^{\alpha} \cdot \ln(x-b),\ -\infty < x < +\infty, \tag{9}$$

где $\alpha \in R$.

Для решения задачи (9) применим метод формального произведения гиперфункций:

$$f_{a,\alpha}(x) = H.F.\{F^{+}_{1,a,\alpha}(z) + F^{+}_{2,a,\alpha}(z), F^{-}_{1,a,\alpha}(z) + F^{-}_{2,a,\alpha}(z)\}$$

$$f_{b}(x) = H.F.\{F^{+}_{1,b}(z) + F^{+}_{2,b}(z), F^{-}_{1,b}(z) + F^{-}_{2,b}(z)\}.$$

Формальное произведение построим следующим образом:

$$f_{a,\alpha}(x)\circ f_b(x)=H.F.\{F^+_{1,a,\alpha}(z)F^+_{1,b}(z)+F^+_{1,a,\alpha}(z)F^+_{2,b}(z)+F^+_{2,a,\alpha}(z)F^+_{1,b}(z)+F^+_{2,a,\alpha}(z)F^+_{2,b}(z),$$

$$F^-_{1,a,\alpha}(z)F^-_{1,b}(z)+F^-_{1,a,\alpha}(z)F^-_{2,b}(z)+F^-_{2,a,\alpha}(z)F^-_{1,b}(z)+F^-_{2,a,\alpha}(z)F^-_{2,b}(z)\},$$

где

$$F_{1,a,\alpha}(z)=-\frac{i(-1)^\alpha}{2\sin\pi\alpha}(z-a)^\alpha,$$

$$F_{2,a,\alpha}(z)=\frac{i}{2\sin\pi\alpha}(a-z)^\alpha,$$

$$F_{1,b}(z)=-\pi i\tilde{B}_2\left[\frac{\ln^*(z-b)}{2\pi i}\right],$$

$$F_{2,b}(z)=\pi i\tilde{B}_2\left[\frac{\ln^{**}(b-z)}{2\pi i}\right].$$

Найдем предельные значения этих функций:

$$F^+_{1,a,\alpha}(x)=\begin{cases}-\dfrac{i(-1)^\alpha}{2\sin\pi\alpha}(a-x)^\alpha e^{i\pi\alpha}, & x<a,\\ -\dfrac{i(-1)^\alpha}{2\sin\pi\alpha}(a-x)^\alpha, & x>a;\end{cases}$$

$$F^-_{1,a,\alpha}(x)=\begin{cases}-\dfrac{i(-1)^\alpha}{2\sin\pi\alpha}(a-x)^\alpha e^{-i\pi\alpha}, & x<a,\\ -\dfrac{i(-1)^\alpha}{2\sin\pi\alpha}(a-x)^\alpha, & x>a;\end{cases}$$

$$F^+_{2,a,\alpha}(x)=\begin{cases}\dfrac{i}{2\sin\pi\alpha}(a-x)^\alpha, & x<a,\\ \dfrac{i}{2\sin\pi\alpha}(a-x)^\alpha e^{-i\pi\alpha}, & x>a;\end{cases}$$

$$F^-_{2,a,\alpha}(x)=\begin{cases}\dfrac{i}{2\sin\pi\alpha}(a-x)^\alpha, & x<a,\\ \dfrac{i}{2\sin\pi\alpha}(a-x)^\alpha e^{i\pi\alpha}, & x>a;\end{cases}$$

$$F^+_{1,b}(x)=\begin{cases}-\pi i\tilde{B}_2\left[\dfrac{\ln(x-b)}{2\pi i}\right], & x<b,\\ -\pi i\tilde{B}_2\left[\dfrac{\ln(x-b)}{2\pi i}\right], & x>b;\end{cases}$$

$$F^-_{1,b}(x)=\begin{cases}-\pi i\tilde{B}_2\left[\dfrac{\ln(x-b)}{2\pi i}\right], & x<b,\\ -\pi i\tilde{B}_2\left[\dfrac{\ln(x-b)}{2\pi i}+1\right], & x>b;\end{cases}$$

$$F^+_{2,b}(x)=\begin{cases}\pi i\tilde{B}_2\left[\dfrac{\ln(x-b)}{2\pi i}+1\right], & x<b,\\ \pi i\tilde{B}_2\left[\dfrac{\ln(x-b)}{2\pi i}+1\right], & x>b;\end{cases}$$

$$F_{2,b}^{-}(x)=\begin{cases}\pi i\tilde{B}_2\left[\dfrac{\ln(x-b)}{2\pi i}\right], & x<b,\\ \pi i\tilde{B}_2\left[\dfrac{\ln(x-b)}{2\pi i}+1\right], & x>b.\end{cases}$$

Построенное формальное произведение гиперфункций решает задачу (9).

Для того чтобы убедиться в этом, найдем разность предельных значений

$$(F_{1,a,\alpha}^{+}(z)F_{1,b}^{+}(z)+F_{1,a,\alpha}^{+}(z)F_{2,b}^{+}(z)+F_{2,a,\alpha}^{+}(z)F_{1,b}^{+}(z)+F_{2,a,\alpha}^{+}(z)F_{2,b}^{+}(z))-$$
$$-(F_{1,a,\alpha}^{-}(z)F_{1,b}^{-}(z)+F_{1,a,\alpha}^{-}(z)F_{2,b}^{-}(z)+F_{2,a,\alpha}^{-}(z)F_{1,b}^{-}(z)+F_{2,a,\alpha}^{-}(z)F_{2,b}^{-}(z))$$

в тех точках, в которых таковая существует.

Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Решение задачи (9) в классе гиперфункций Сато имеет вид:*

$$\{\Phi^{+}(x),\Phi^{-}(x)\}=H.F.\{F_{1,a,\alpha}^{+}(z)F_{1,b}^{+}(z)+F_{1,a,\alpha}^{+}(z)F_{2,b}^{+}(z)+F_{2,a,\alpha}^{+}(z)F_{1,b}^{+}(z)+F_{2,a,\alpha}^{+}(z)F_{2,b}^{+}(z),$$
$$F_{1,a,\alpha}^{-}(z)F_{1,b}^{-}(z)+F_{1,a,\alpha}^{-}(z)F_{2,b}^{-}(z)+F_{2,a,\alpha}^{-}(z)F_{1,b}^{-}(z)+F_{2,a,\alpha}^{-}(z)F_{2,b}^{-}(z)\}.$$

Рассмотрим теперь задачу (8) в случае m степенных и n логарифмических множителей в правой части. Применим к её решению метод формального произведения гиперфункций:

$$f_{a_j,\alpha_j}(x)=H.F.\{F_{1,a_j,\alpha_j}^{+}(z)+F_{2,a_j,\alpha_j}^{+}(z),F_{1,a_j,\alpha_j}^{-}(z)+F_{2,a_j,\alpha_j}^{-}(z)\}\,,\ j=\overline{1,m}$$

и

$$f_{b_k}(x)=H.F.\{F_{1,b_k}^{+}+F_{2,b_k}^{+},F_{1,b_k}^{-}+F_{2,b_k}^{-}\}\,,\ k=\overline{1,n}\,.$$

Формальное произведение построим следующим образом:

$$\prod_{j=1}^{m}f_{a_j,\alpha_j}(x)\circ\prod_{k=1}^{n}f_{b_k}(x)=H.F.\{W_{a_1,a_2,\dots,a_m;\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m;b_1,b_2,\dots,b_n}^{+}(z),W_{a_1,a_2,\dots,a_m;\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m;b_1,b_2,\dots,b_n}^{-}(z)\}$$

где

$$W_{a_1,a_2,\dots,a_m;\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m;b_1,b_2,\dots,b_n}^{+}(z)=U_{a_1,a_2,\dots,a_m;\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m}^{+}(z)V_{b_1,b_2,\dots,b_n}^{+}(z)\,,$$
$$W_{a_1,a_2,\dots,a_m;\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m;b_1,b_2,\dots,b_n}^{-}(z)=U_{a_1,a_2,\dots,a_m;\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m}^{-}(z)V_{b_1,b_2,\dots,b_n}^{-}(z)\,.$$

ТЕОРЕМА 4. Решение *задачи (8) в классе гиперфункций Сато имеет вид:*

$$\{\Phi^{+}(z),\Phi^{-}(z)\}=\{W_{a_1,a_2,\dots,a_m;\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m;b_1,b_2,\dots,b_n}^{+}(z),W_{a_1,a_2,\dots,a_m;\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m;b_1,b_2,\dots,b_n}^{-}(z)\}$$

Доказательство. Утверждение теоремы проверяется непосредственно.

При $m=1,\ n=1$ теорема совпадает с теоремой 3.

Для $m=1,\ n=2$ равенство (8) проверяется непосредственно, для чего находится разность предельных значений

$$\lim_{\substack{z\to x,\\ \operatorname{Im}z>0\\ x\in R\setminus\{a_1,b_1,b_2\}}}W_{a_1;\alpha_1;b_1,b_2}^{+}(z)-\lim_{\substack{z\to x,\\ \operatorname{Im}z<0\\ x\in R\setminus\{a_1,b_1,b_2\}}}W_{a_1;\alpha_1;b_1,b_2}^{-}(z)=\lim_{\substack{z\to x,\\ \operatorname{Im}z>0\\ x\in R\setminus\{a_1,b_1,b_2\}}}U_{a_1;\alpha_1}^{+}(z)V_{b_1,b_2}^{+}(z)-\lim_{\substack{z\to x,\\ \operatorname{Im}z>0\\ x\in R\setminus\{a_1,b_1,b_2\}}}U_{a_1;\alpha_1}^{-}(z)V_{b_1,b_2}^{-}(z)=$$
$$=(F_{1,a_1,\alpha_1}^{+}(x)F_{1,b_1}^{+}(x)F_{1,b_2}^{+}(x)+F_{1,a_1,\alpha_1}^{+}(x)F_{1,b_2}^{+}(x)F_{2,b_2}^{+}(x)+F_{1,a_1,\alpha_1}^{+}(x)F_{2,b_1}^{+}(x)F_{1,b_2}^{+}(x)+F_{1,a_1,\alpha_1}^{+}(x)F_{2,b_1}^{+}(x)F_{2,b_2}^{+}(x)+$$
$$+F_{2,a_1,\alpha_1}^{+}(x)F_{1,b_1}^{+}(x)F_{1,b_2}^{+}(x)+F_{2,a_1,\alpha_1}^{+}(x)F_{1,b_1}^{+}(x)F_{2,b_2}^{+}(x)+F_{2,a_1,\alpha_1}^{+}(x)F_{2,b_1}^{+}(x)F_{1,b_2}^{+}(x)+F_{2,a_1,\alpha_1}^{+}(x)F_{2,b_1}^{+}(x)F_{2,b_2}^{+}(x))-$$
$$-(F_{1,a_1,\alpha_1}^{-}(x)F_{1,b_1}^{-}(x)F_{1,b_2}^{-}(x)+F_{1,a_1,\alpha_1}^{-}(x)F_{1,b_2}^{-}(x)F_{2,b_2}^{-}(x)+F_{1,a_1,\alpha_1}^{-}(x)F_{2,b_1}^{-}(x)F_{1,b_2}^{-}(x)+F_{1,a_1,\alpha_1}^{-}(x)F_{2,b_1}^{-}(x)F_{2,b_2}^{-}(x)+$$
$$+F_{2,a_1,\alpha_1}^{-}(x)F_{1,b_1}^{-}(x)F_{1,b_2}^{-}(x)+F_{2,a_1,\alpha_1}^{-}(x)F_{1,b_1}^{-}(x)F_{2,b_2}^{-}(x)+F_{2,a_1,\alpha_1}^{-}(x)F_{2,b_1}^{-}(x)F_{1,b_2}^{-}(x)+F_{2,a_1,\alpha_1}^{-}(x)F_{2,b_1}^{-}(x)F_{2,b_2}^{-}(x))$$

в тех точках, в которых таковая существует.

Таким образом, можно построить решение задачи (8) при $m=1,\ n=2$ по известным решениям следующих задач:

$$\Phi^{+}(x)-\Phi^{-}(x)=(x-a_1)^{\alpha_1},\ -\infty<x<+\infty,$$

$$\Phi^{+}(x)-\Phi^{-}(x)=\ln(x-b_1),\ -\infty<x<+\infty,$$

$$\Phi^{+}(x)-\Phi^{-}(x)=\ln(x-b_2),\ -\infty<x<+\infty.$$

Этим же способом доказывается справедливость утверждения теоремы для $m=2,\ n=1,\ m=2,\ n=2$, а также для всех случаев $m\geq 3,\ n\geq 3$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юров, П.Г. Интеграл типа Коши по разомкнутому контуру / П.Г. Юров // Изв. высших учебных заведений. Математика. – 1989. – № 8 (327). – С. 90–92.
2. Юров, П.Г. Интегралы типа Коши и уравнения в конечных разностях / П.Г. Юров // Изв. Акад. наук БССР. Серия физ.-мат. наук. – 1967. – № 3. – С. 67–74.
3. Юров, П.Г. Один из случаев краевой задачи Римана с бесконечным индексом / П.Г. Юров // Докл. Акад. наук БССР. – 1968. – Т. 12, № 6. – С. 489–491.
4. Юров, П.Г. Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического типа / П.Г. Юров // Изв. высших учебных заведений. Математика. – 1966. – № 2 (51). – С. 158–163.
5. Юров, П.Г. О представлении интегралов типа Коши / П.Г. Юров // Математические заметки. – 1969. – Т. 6, № 1. – С. 55–63.
6. Юров, П.Г. Сингулярный интеграл с логарифмическим весом / П.Г. Юров // Математические заметки. – 1979. – Т. 26, № 1. – С. 61–70.
7. Гельфонд, А.О. Исчисление конечных разностей / А.О. Гельфонд. – М.: Наука, 1967. – 375 с.

Поступила 04.09.2014

THE JUMP BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH LOGARITHMIC AND POWER-LOGARITHMIC RIGHT-HAND SIDE

T. URBANOVICH, S. BELYAI

The jump boundary value problem in the case when the right-hand side is a product of the logarithmic factors and in the case when the right-hand side is a product of the power and logarithmic factors is investigated in the work. A new approach to solve the problem is applied. It is the method of the formal multiplication of hyperfunctions.