

УДК 539.4

**ОСОБЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ  
В СПЛАВЕ Ni<sub>2</sub>MnGa В СИСТЕМЕ «ПОЛУБЕСКОНЕЧНАЯ ТРЕЩИНА  
НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА – ЛИНЗОВИДНЫЙ МЕХАНИЧЕСКИЙ ДВОЙНИК»**

*Е.В. ШМАТОК, канд. техн. наук, доц. О.М. ОСТРИКОВ  
(Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого)*

*На основе принципа суперпозиции напряжений у вершины полубесконечной трещины нормального отрыва и у единичного линзовидного остаточного двойника выполнен расчет картины распределения напряжений образовавшейся системы. Определены области локализации напряжений и характер их распределения в окрестностях вершины трещины и линзовидного двойника.*

**Введение.** Исследование вопросов прочности и разрушения твердых тел представляется важной задачей как в теоретическом, так и в практическом ключе. Образование трещин в сплавах группы Гейслера Ni<sub>2</sub>MnGa сопровождается интенсивным скольжением и двойникованием [1], кроме этого, скольжение предшествует зарождению двойников, а также является адаптивным механизмом релаксации (аккомодации) напряжений у уже сформировавшихся границ.

Выделяют три типа трещин, обусловленных характером деформирования твердого тела [2]. Рассматриваемый дефект – это одна из причин появления упругих и остаточных двойников, а возможность проанализировать картину напряжений при взаимодействии в системе «двойник – трещина» является актуальной задачей с позиции фундаментальных и прикладных направлений научных исследований.

Исходя из сказанного выше, представляется актуальной целью данной работы – расчет полей напряжений, возникающих в системе «полубесконечная трещина нормального отрыва – линзовидный механический двойник», находящейся в монокристаллическом Ni<sub>2</sub>MnGa.

**Постановка задачи.** Рассмотрим напряжения у вершины раскрывающейся трещины нормального отрыва, или трещины типа I (рис. 1) [2]. На рисунке 2 представлена расчетная схема моделируемой системы, на которой изображены полубесконечная трещина и единичный механический линзовидный двойник, образованный параллельно направлению развития трещины, при условиях, описанных в [3]. Двойник образовался вблизи трещины и обладает собственным полем напряжений. Используя принцип суперпозиции полей напряжений, имеем

$$\sigma_{ij}(x, y) = \sigma_{ij}^{tw}(x, y) + \sigma_{ij}^{cr}(x, y),$$

где  $\sigma_{ij}^{tw}(x, y)$  – напряжения, создаваемые единичным механическим линзовидным двойником;

$\sigma_{ij}^{cr}(x, y)$  – напряжения вершины полубесконечной трещины;

$i, j$  – принимают значения  $x$  и  $y$ , соответствующих компонент тензора напряжений.

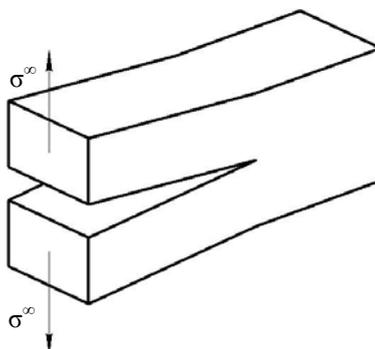


Рисунок 1 – Схематическое изображение трещины нормального отрыва

Для расчета напряжений двойника  $\sigma_{ij}^{tw}(x, y)$  проводится расчет отдельных компонент матрицы тензора напряжений, индексно соответствующих расчетным формулам напряжений у вершины трещины

$\sigma_{ij}^{cr}(x, y)$  [2]. Компоненты напряжений двойника  $\sigma_{xx}^{tw}(x, y)$ ,  $\sigma_{yy}^{tw}(x, y)$ ,  $\sigma_{xy}^{tw}(x, y)$ , используя приближение непрерывного распределения двойникующих дислокаций на двойниковых границах [4–6], определяются как

$$\sigma_{ij}^{tw}(x, y) = \sum^m \sigma_{ij}^{tw(m)}(x, y)$$

где  $m$  – число границ линзовидного двойника;

$\sigma_{ij}^{tw(m)}(x, y)$  – суммарные напряжения, образуемые верхней и нижней границами двойника, которые в соответствии с [4] рассчитываются из выражений:

$$\sigma_{ij}^{tw(1)}(x, y) = \int_{-L}^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{ij}^{tw(1,0)}(x, y, \xi) d\xi,$$

$$\sigma_{ij}^{tw(2)}(x, y) = \int_{-L}^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{ij}^{tw(2,0)}(x, y, \xi) d\xi.$$

где  $L$  – половина длины двойника;

$\rho_1(\xi)$  и  $\rho_2(\xi)$  – линейные плотности распределения двойникующих дислокаций на двойниковых границах;

$f_1(\xi)$  и  $f_2(\xi)$  – функции описывающие форму двойниковых границ;

$\xi$  – параметр интегрирования;

$\sigma_{ij}^{tw(m,0)}(x, y, \xi)$  – напряжения, вызванные единичной двойникующей дислокацией, находящейся на границе двойника, определяемые по формулам [4]:

$$\sigma_{xx}^{tw(m,0)}(x, y, \xi) = -\frac{\mu b_{кр}}{2\pi(1-\nu)} \left[ (y - f_m(\xi)) - B \right] \frac{\left[ 3((x - \xi) - A)^2 + ((y - f_m(\xi)) - B)^2 \right]}{\left[ ((x - \xi) - A)^2 + ((y - f_m(\xi)) - B)^2 \right]^2},$$

$$\sigma_{yy}^{tw(m,0)}(x, y, \xi) = \frac{\mu b_{кр}}{2\pi(1-\nu)} \left[ (y - f_m(\xi)) - B \right] \frac{\left[ ((x - \xi) - A)^2 - ((y - f_m(\xi)) - B)^2 \right]}{\left[ ((x - \xi) - A)^2 + ((y - f_m(\xi)) - B)^2 \right]^2},$$

$$\sigma_{xy}^{tw(m,0)}(x, y, \xi) = \frac{\mu b_{кр}}{2\pi(1-\nu)} \left[ (x - \xi) - A \right] \frac{\left[ ((x - \xi) - A)^2 - ((y - f_m(\xi)) - B)^2 \right]}{\left[ ((x - \xi) - A)^2 + ((y - f_m(\xi)) - B)^2 \right]^2},$$

где  $\mu$  – модуль сдвига;

$\nu$  – коэффициент Пуассона;

$A, B$  – константы позиционирования двойника по осям  $OX$  и  $OY$  соответственно;

$b_{кр}$  – модуль краевой составляющей вектора Бюргера частичной двойникующей дислокации.

Для исследования напряжений в линейно упругих телах в механике разрушения деформируемого твердого тела обычно используется три метода [2]:

- метод комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили [7];
- метод интегральных преобразований [8];
- метод разложения по собственным функциям [9].

Каждый из них имеет свои достоинства и недостатки [2].

Решение поставленной задачи будет осуществляться посредством метода комплексных потенциалов. Такой способ решения пригоден для анализа плоских задач, и в соответствии с [2] напряжения у вершины полубесконечной трещины нормального отрыва определяются из соотношений:

$$\sigma_{xx}^{cr}(x, y) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(1 - \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2}\right),$$

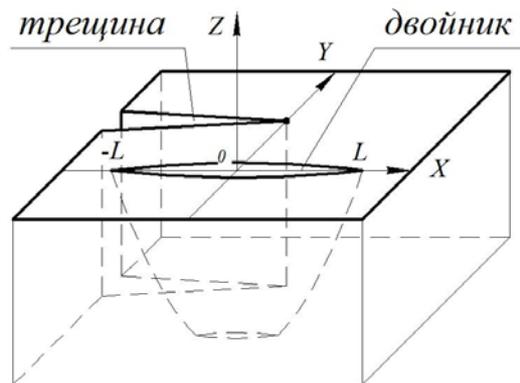
$$\sigma_{yy}^{cr}(x, y) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(1 + \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2}\right),$$

$$\sigma_{xy}^{cr}(x, y) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(\sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2}\right),$$

где  $K_I$  – коэффициент интенсивности напряжений для трещины нормального отрыва,  $K_I = \text{const}$  ;

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} ; \theta = \arctg\left(\frac{x}{y}\right).$$

**Результаты расчетов и их обсуждение.** Следует отметить, что образовавшийся у трещины двойник (рис. 2) может быть как упругим, так и остаточным. Существование упругого двойника обеспечивается полем напряжений трещины.



**Рисунок 2 – Расчетная схема системы «линзовидный механический двойник – полубесконечная трещина нормального отрыва»**

Результаты расчетов полей напряжений в рассматриваемой плоскости монокристалла  $\text{Ni}_2\text{MnGa}$  в случае, когда параллельно направлению роста трещины образовался линзовидный двойник, приведены на рисунках 3 и 4. В качестве исходных данных для расчетов принималось:  $L = 60$  мкм;  $H = 15$  мкм;  $\rho(\xi) = \text{const} = \rho = 0,02 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}$ ;  $\nu = 0,33$ ;  $\mu = 19,231$  ГПа;  $b_{\text{кр}} = 2,91 \text{ \AA}$ ;  $K_I = 10 \text{ ГПа} \sqrt{\text{м}}$ .

Результат расчетов полей напряжений, рассматриваемой системы, для нормальной компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}(x, y)$  представлен на рисунке 3, а. Характер их распределения у вершины трещины и у двойника симметричен относительно осей  $OX$  и  $OY$ . Напряжения границ двойника данной компоненты тензора обладают более высокими численными значениями в сравнении с другими рассматриваемыми компонентами. Эти напряжения имеют противоположный друг другу знак и распределены вдоль верхней и нижней границ двойника [10]. Поля напряжений вершины трещины компоненты  $\sigma_{xx}(x, y)$  представлены максимальным пиковым значением, превышающим уровень напряжений границ двойника в 3...3,5 раза.

Результат решения задачи для сдвиговой компоненты  $\sigma_{xy}(x, y)$  матрицы тензора напряжений показан на рисунке 3, б. Здесь, подобно другим рассчитанным компонентам тензора, наблюдается симметрия распределения величин напряженности полей, взятых по модулю, в плоскости расчета относительно  $OY$ . Однако отличительной особенностью распределения данных напряжений является наличие значительных их значений по краям двойника, на порядок превышающих напряжения его границ и имеющих отличные друг от друга знаки. Близлежащие области вокруг трещины, а также и сама ее вершина имеют пониженный уровень напряжений без значительных возмущений в сравнении с двойником и другими рассчитываемыми компонентами.

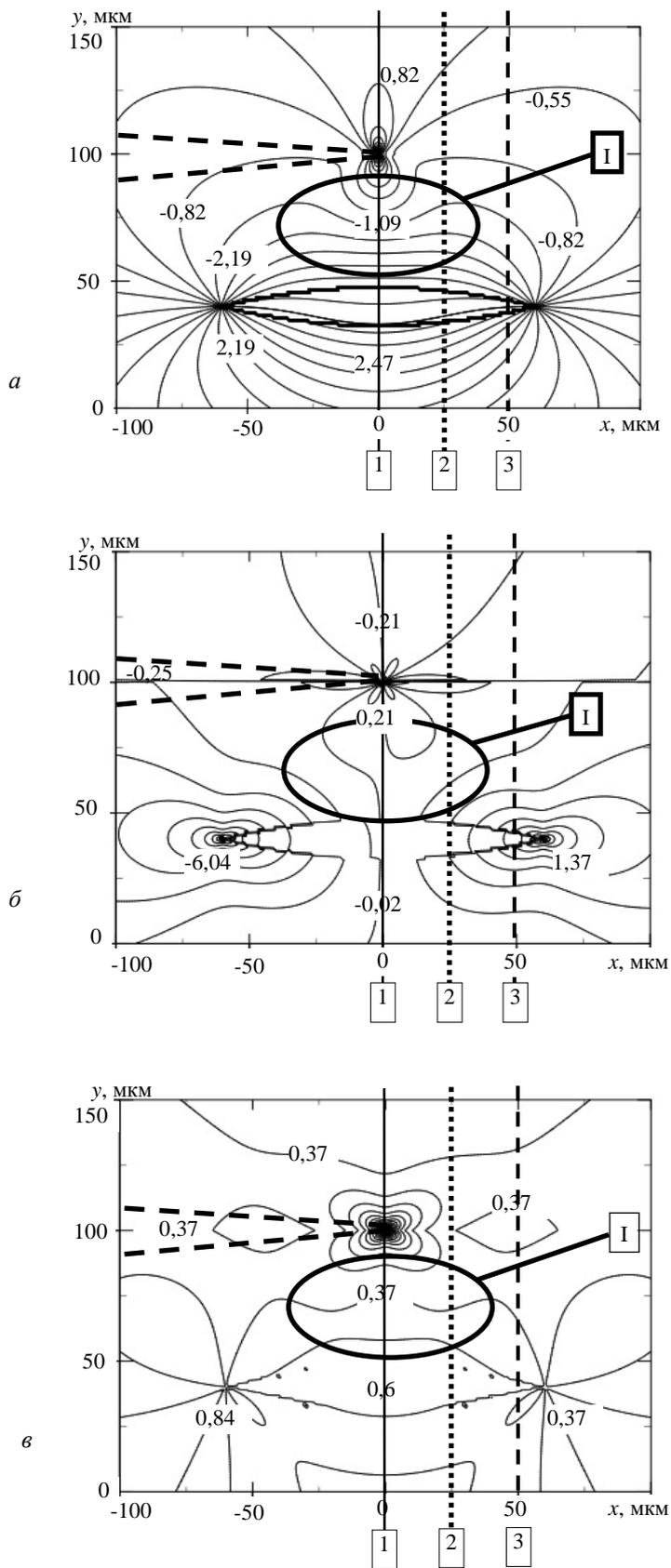


Рисунок 3 – Результаты расчетов полей напряжений в системе «линзовидный механический двойник – полубесконечная трещина нормального отрыва»: 1, 2, 3 – сечения расчетной плоскости напряжений (см. также рис. 4); а –  $\sigma_{xx}(x, y)$ ; б –  $\sigma_{xy}(x, y)$ ; в –  $\sigma_{yy}(x, y)$  (ГПа)

Расчетная плоскость полей напряжений для нормальной компоненты  $\sigma_{yy}(x, y)$  изображена на рисунке 3, в. В данном случае наблюдается пониженный, в сравнении с другими компонентами, средний уровень напряжений во всей расчетной плоскости. Помимо этого, виден сложный, но симметричный (относительно  $OY$ ) рельеф линий равных величин напряжений как по знаку, так и по численным значениям. Поле напряжений участков, окружающих вершину полубесконечной трещины, подобно  $\sigma_{xx}(x, y)$ , не имеет значительных возмущений. Однако вершина трещины обладает максимальным пиковым значением напряжений, близким по результату компоненте  $\sigma_{xx}(x, y)$ .

Как видно из рисунка 3, участки с наибольшей напряженностью главным образом сосредоточены у вершины трещины, на границах двойника и по его краям. Напряжения вершины трещины имеют максимальные значения. Это связано с тем, что в процессе разрушения образца двойникованием компенсируется часть напряжений трещины.

На рисунке 4 показано, что при встрече фронта напряжений трещины и собственных напряжений двойника образуется участок «усредняющих» напряжений (область I, рис. 3).

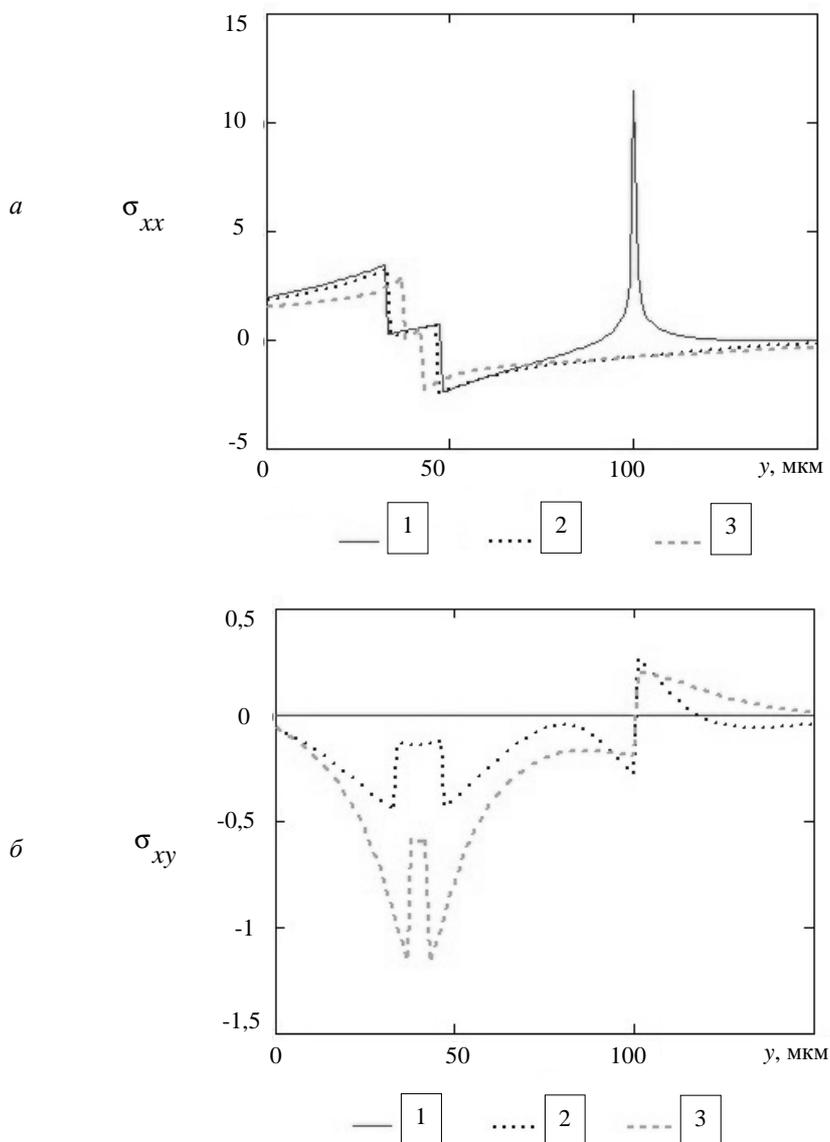


Рисунок 4 – Графики напряжений компонент:  $a - \sigma_{xx}$ ;  $b - \sigma_{xy}$ ;  $- \sigma_{yy}$  (ГПа).

Получены сечением области координатами: 1 –  $A = 0$  мкм,  $B = 0$  мкм;  
2 –  $A = 25$  мкм,  $B = 0$  мкм; 3 –  $A = 50$  мкм,  $B = 0$  мкм (см. также с. 59)

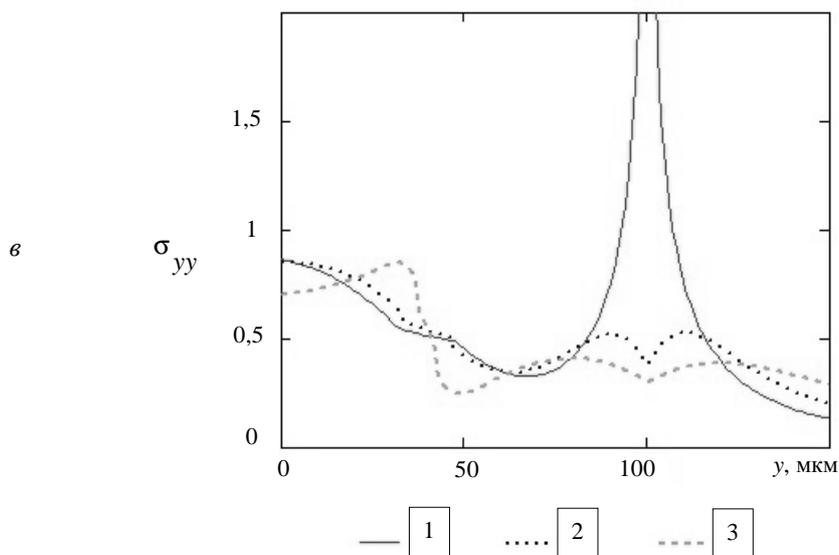


Рисунок 4 – Окончание

Напряжения выделенной области I разместились на одной расчетной поверхности в области противоположных значений осей X и Y, а также имеют близкие уровни напряжений по всей поверхности.

Представленные на рисунке 4 графики демонстрируют уровень напряжений рассматриваемой системы. Напряжения у границ и внутри двойника компонент  $\sigma_{xx}(x, y)$  и  $\sigma_{yy}(x, y)$  (рис. 4, а и в) сохраняют свою симметричность относительно OX, однако противоположны по знаку. Экстремум напряжений, вызванный вершиной трещины, имеет единичный пик величины без искажений.

Уровень напряжений трещины и двойника компоненты  $\sigma_{xy}(x, y)$  (рис. 4, б) имеет значения, симметричные OX лишь у вершины трещины. Напряжения двойника симметричны относительно OY и имеют экстремумы у границ и вершин, расположившиеся в области отрицательных значений.

**Заключение.** Таким образом, используя методы расчетов напряженно-деформированного состояния у двойника и вершины трещины (метод комплексных потенциалов), разработан способ моделирования полей напряжений в системе «механический линзовидный двойник – полубесконечная трещина нормального отрыва». Установлено, что вершина трещины является концентратором больших напряжений, способных значительно превысить уровень напряжений на границе двойника.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев, Ф.Ф. Взаимодействие дислокаций в цинке, висмуте и сурьме при двойниковании / Ф.Ф. Лаврентьев // Физика металлов и металловедение. – 1964. – Т. 18, № 3. – С. 428–436.
2. Астафьев, В.И. Нелинейная механика разрушения / В.И. Астафьев, Ю.Н. Радаев, Л.В. Степанова. – Самара : Самар. ун-т. – 2001. – С. 57–60.
3. Классен-Неклюдова, М.В. Механическое двойникование кристаллов / М.В. Классен-Неклюдова. – М. : Изд-во АН СССР. – 1960. – С. 262.
4. Остриков, О.М. Метод расчета полей напряжений в системе параллельных остаточных линзовидных двойников в сплаве Гейслера Ni<sub>2</sub>MnGa / О.М. Остриков, Е.В. Шматок // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, № 4 (ч. 2). – С. 1920–1921.
5. Остриков, О.М. Напряженное состояние у поверхности кристалла, деформируемой сосредоточенной нагрузкой, при наличии клиновидного двойника / О.М. Остриков // Журнал технической физики. – 2009. – Т. 79, № 5. – С. 137–139.
6. Остриков, О.М. Метод расчета распределения деформаций у клиновидного двойника с использованием подходов макроскопической дислокационной модели / О.М. Остриков // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 4. – С. 52–58.

7. Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М. : Изд-во АН СССР. – 1954. – С. 648.
8. Уфлянд, Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд. – Л. : Наука. Ленингр. отд. – 1967. – С. 402.
9. Williams, M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack / M.L. Williams // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1975. – V. 24. – P. 109–114.
10. Остриков, О.М. Метод расчета полей напряжений в системе параллельных остаточных линзовидных двойников в сплаве  $\text{Ni}_2\text{MnGa}$  / О.М. Остриков, Е.В. Шматок // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, Вып. 3. – С. 1920–1921.

*Поступила 04.06.2015*

**FEATURES OF DISTRIBUTION OF STRESSES IN THE ALLOY  $\text{Ni}_2\text{MnGa}$   
IN THE «SEMI-INFINITE CRACK GROWTH – LENTICULAR MECHANICAL TWIN»**

***E. SHMATOK, O. OSTRIKOV***

*On the basis of the principle of superposition of stress at the tip of a semi-infinite crack growth and residual twin lenticular unit, calculated the distribution pattern of stresses resulting from the system. The regions of localization of stresses and their distribution in the vicinity of the crack tip and lenticular twin.*