МАТЕМАТИКА

УДК 517.958:519.6

СОГЛАСОВАНИЕ ПОРЯДКОВ АППРОКСИМАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ГРАНИЧНОГО ОПЕРАТОРОВ В КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А.Ю. ГЕРЕЦ, А.А. ЗЕЛЕНКЕВИЧ, канд. физ.-мат. наук, доц. Н.А. ГУРЬЕВА, канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ (Полоцкий государственный университет)

Численными методами показано, что разностная схема аппроксимирует задачу математической физики параболического типа с четвертым порядком для приведенного примера относительно шага сетки при условии, что разностные дифференциальный и граничный (граничное условие Неймана) операторы построены с одинаковым четвертым порядком аппроксимации. Приведен контрпример, когда граничный оператор имеет первый порядок аппроксимации, а дифференциальный – четвертый порядок, сходимость разностного решения к точному решению дифференциальной задачи не имеет места. Теоретически обоснована сходимость или расходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи в указанных примерах. Получены формулы с аппроксимацией четвертым порядком для граничного оператора с однородным и неоднородным условием Неймана для одномерных уравнений в частных производных эллиптического, параболического и гиперболического типов, а также при аппроксимации краевых задач.

Введение. Рассмотрим в области D с границей G краевую дифференциальную задачу:

$$Lu = f \quad \text{в } D \tag{1}$$

с граничным условием

$$lu = \varphi \quad \text{на } G \tag{2}$$

Здесь L и l – дифференциальные операторы; f, φ – заданные, u – искомый элементы некоторых линейных нормированных функциональных пространств F, Φ, U соответственно [1].

Разностную схему определяют как семейство сеточных задач, зависящих от параметра (шага) h:

$$L_h u_h = f_h \quad \text{на сетке в области } D_h, \tag{3}$$

$$l_h u_h = \varphi_h \quad \text{на граничной сетке } G_h. \tag{4}$$

Говорят, что разностная схема (3), (4) аппроксимирует на решении u с порядком аппроксимации $p = \min(p_1, p_2)$ дифференциальную задачу (1), (2), если существуют такие положительные постоянные h_0, c_1, p_1, c_2, p_2, не зависящие от h, что при всех $h \le h_0$, справедливы неравенства:

$$\left\| L_h(u) - f_h \right\|_{F_h} \le c_1 h^{p_1}, \qquad \left\| l_h(u) - \varphi_h \right\|_{\Phi_p} \le c_2 h^{p_2}.$$

Из определения порядка аппроксимации следует, что для максимальной точности аппроксимации разностной задачи (3), (4) и экономии машинного времени необходимо соблюдение равенства

$$p_1 = p_2 = p. \tag{5}$$

Постановка задачи. Для обоснования условия (5) рассмотрим численное решение начально-краевой задачи параболического типа [2, с. 193]:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \ 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x,0) = \cos(2x), \ 0 \le x \le \pi, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,0), \ t \ge 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Система уравнений (6) имеет точное аналитическое решение: $u(x,t) = e^{-4t}\cos(2x)$. Действительно,

$$u(x,t)_t = u(x,t)_{xx} = -4\cos(2x)e^{-4t}, \ 0 < x < \pi, \ t > 0,$$

$$u(x,0) = \cos(2x), \ 0 \le x \le \pi, \ u_x(x,t) = -2e^{-4t}\sin(2x), \ u_x(0,t) = u_x(\pi,0) = 0, \ t \ge 0.$$

Используем задачу (6), в которой третье уравнение представляет собой граничное условие Неймана, в качестве теста при составлении программы. В задаче (6) первое уравнение соответствует дифференциальной задаче (1) в полуполосе $0 < x < \pi, \ t > 0.$ Третье уравнение является граничным оператором (2) на лучах: $t \ge 0, \ x = 0, \ x = \pi$. Рассмотрим разностное уравнение (3) для задачи (6):

$$\frac{(u_m^{n+1} - u_m^n)}{\tau} = \frac{(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n)}{h^2}, \ m = 1, 2, 3, \ldots N, \ n = 1, 2, 3\,. \qquad (7)$$

Уравнение (7) представляет явную разностную схему однородного уравнения теплопроводности на сетке с равномерным шагом по времени τ и по координате $h = \pi / N$. Обозначив параметр $z = \tau / h^2$, уравнение (7) преобразуем к виду

$$u_m^{n+1} = u_m^n + z(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n)\,. \qquad (8)$$

Разложим узловые значения $u_m^{n+1}, u_{m+1}^n, u_{m-1}^n$ в формуле (8) в ряд Тейлора для получения максимального порядка аппроксимации с центром разложения u_m^n:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau\frac{\partial(u_m^n)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial t^2} + o(\tau^2)\,,$$

$$u_{m+1}^n = u_m^n + h\frac{\partial(u_m^n)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3(u_m^n)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4(u_m^n)}{\partial x^4} + o(h^4)\,,$$

$$u_{m-1}^n = u_m^n - h\frac{\partial(u_m^n)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3(u_m^n)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4(u_m^n)}{\partial x^4} + o(h^4)\,.$$

Подставляя разложения для $u_m^{n+1}, u_{m+1}^n, u_{m-1}^n$ в формулу (8), получим

$$\tau\frac{\partial(u_m^n)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial t^2} = z\left(h^2\frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4(u_m^n)}{\partial x^4}\right) + o(\tau^2 + h^4)\,. \qquad (9)$$

Потребуем по отдельности равенства первых и вторых слагаемых в формуле (9): $\tau\frac{\partial(u_m^n)}{\partial t} = zh^2\frac{\partial(u_m^n)}{\partial x^2}$, тогда, используя первое уравнение системы (6) $\frac{\partial(u_m^n)}{\partial t} = \frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial x^2}$, получим равенство $\tau = zh^2$, которое справедливо для любого z. Преобразуем вторую производную во времени, считая функцию $u(x,t)$ дважды по t и четырежды по x непрерывно дифференцируемой:

$$\frac{\partial(u_m^n)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}u_m^n\right) = \frac{\partial}{\partial}\left(\frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}(u_m^n) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_m^n) = \frac{\partial^4}{\partial x^4}(u_m^n)\,.$$

Учитывая последнее равенство и требование, имеем

$$\frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial t^2} = z\frac{h^4}{12}\frac{\partial^4(u_m^n)}{\partial x^4} \Leftrightarrow \frac{\tau^2}{2} = z\frac{h^4}{12} = \frac{\tau}{h^2}\frac{h^4}{12} = \tau\frac{h^2}{12} \Leftrightarrow \tau = \frac{h^2}{6} \Leftrightarrow z = \frac{1}{6}. \qquad (10)$$

Итак, максимальный порядок аппроксимации дифференциального оператора (1) по h $p_1 = 4$ с параметром $z = \frac{1}{6}$. Тогда уравнение (8) перепишем в виде

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{1}{6}(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n) + o(\tau^2 + h^4) = \frac{1}{6}(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n + 4u_m^n) + o(\tau^2 + h^4). \quad (11)$$

Разностное уравнение (8) необходимо исследовать на устойчивость. Используем признак спектральной устойчивости по Н.С. Бахвалову [1, с. 125, 223].

В качестве возмущающих функций [1] для разностной схемы (8) выберем $u_m^n = (\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi}$.

Определение 1 *(спектральный признак устойчивости разностной схемы)*. Если при заданном законе стремления τ и h к нулю для всех $0 \le \varphi \le 2\pi$ справедливо неравенство $|\lambda(\varphi)| \le 1$ ($\lambda(\varphi)$ – комплексное число, описывающее замкнутую кривую на комплексной плоскости для всех указанных φ), то спектральный признак выполнен, и численная схема может быть использована для решения уравнения $Lu = f$.

Обоснование корректности определения 1.

$$|u_m^n| = |\lambda(\varphi)|^n \cdot 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0, \text{ если } |\lambda(\varphi)| < 1, \\ 1, \text{ если } |\lambda(\varphi)| = 1, \\ +\infty, \text{ если } |\lambda(\varphi)| > 1, \end{cases}$$ то есть ограниченность $|u_m^n|$ возникает при $|\lambda(\varphi)| \le 1$.

Уравнение (8) – уравнение с постоянными коэффициентами, линейное и однородное относительно функции u_m^n, которое допускает решение в виде $u_m^n = (\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi}$ [1]. Подставим функцию u_m^n в уравнение (8):

$$(\lambda(\varphi))^{n+1} e^{im\varphi} - (\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi} = z(\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} - 2).$$

Разделим последнее уравнение на $(\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi}$:

$$(\lambda(\varphi) - 1) = 2z(\cos(\varphi) - 1) = -4z\left(\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 \Leftrightarrow \lambda(\varphi) = 1 - 4z\left(\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2. \quad (12)$$

Если параметр $0 \le z \le \frac{1}{2}$ (искомый спектр устойчивости схемы (8)), то справедливо из (12), что

$$-1 \le \lambda(\varphi) \le 1 \Leftrightarrow |\lambda(\varphi)| \le 1.$$

Таким образом, при $z = \frac{1}{6}$ численная схема (11) имеет не только максимальный порядок аппроксимации, но и является устойчивой.

Построим схему граничного оператора $l_h u_h = \varphi_h$ для граничного условия $lu = \varphi$ – третьего уравнения системы (6): $u_x(0,t) = u_x(\pi,0)$ с тем же порядком точности: $p_2 = p_1 = 4$. Составим квадратурную формулу для граничного оператора (производной функции в нуле $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)$) методом неопределенных коэффициентов [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{1}{h}\left(au_0^n + bu_1^n + cu_2^n + du_3^n + eu_4^n\right) + r(x), \quad (13)$$

где a,b,c,d,e – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению; h – шаг равномерной сетки; $u_0^n, u_1^n, u_2^n, u_3^n, u_4^n$ – значения функции u_m^n в пяти ближайших узлах к левой границе отрезка $[0,\pi]$; $r(x)$ – невязка квадратуры.

Потребуем равенства нулю остатка $r(x)$ в формуле (13) для многочленов максимально высокой степени:

a) $u(x,t) = 1,\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 = \frac{1}{h}(a+b+c+d+e) \Leftrightarrow a+b+c+d+e = 0$;

b) $u(x,t) = x,\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 1 = \frac{1}{h}(a\cdot 0 + bh + 2hc + 3dh + 4eh) \Leftrightarrow b + 2c + 3d + 4e = 1$;

c) $u(x,t)=x^2,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0=\dfrac{1}{h}(a\cdot 0+bh^2+c(2h)^2+d(3h)^2+e(4h)^2)\Leftrightarrow b+4c+9d+16e=0$;

d) $u(x,t)=x^3,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0=\dfrac{1}{h}(a\cdot 0+bh^3+c(2h)^3+d(3h)^3+e(4h)^3)\Leftrightarrow b+8c+27d+64e=0$;

e) $u(x,t)=x^4,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0=\dfrac{1}{h}(a\cdot 0+bh^4+c(2h)^4+d(3h)^4+e(4h)^4)\Leftrightarrow b+16c+81d+256e=0.$

Решаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=0 \\ b+2c+3d+4e=1 \\ b+4c+9d+16e=0 \\ b+8c+27d+64e=0 \\ b+16c+81d+256e=0 \end{cases} \tag{14}$$

Линейная система уравнений (14) имеет единственное решение:

$$a=-\frac{25}{12},\ b=4,\ c=-3,\ d=\frac{4}{3},\ e=-\frac{1}{4}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в (13), получим квадратуру, точную для многочленов степени не выше четырех, то есть порядок сходимости граничного оператора в поставленной задаче также $p_2=4=p_1$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{1}{12h}(-25u_0^n+48u_1^n-36u_2^n+16u_3^n-u_4^n). \tag{15}$$

По условию задачи (6) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$, поэтому выразим из (15) u_0^n:

$$u_0^n=\frac{1}{25}(48u_1^n-36u_2^n+16u_3^n-3u_4^n). \tag{16}$$

В силу симметрии задачи для граничного оператора на правой границе в точке $x=\pi$

$$u_N^n=\frac{1}{25}(48u_{N-1}^n-36u_{N-2}^n+16u_{N-3}^n-3u_{N-4}^n). \tag{17}$$

Учитывая связь $\tau=zh^2=\dfrac{1}{6}h^2$, видим, что $\tau<<h$ при малых h. Выберем временной отрезок $T=M\tau$ таким образом, чтобы по порядку величины $T\approx X=Nh$ (исходная задача рассматривается на прямоугольнике с соизмеримыми сторонами). Положим $M\approx N^2\Rightarrow T=M\tau=N^2\tau=\dfrac{N^2h^2}{6}=\dfrac{\pi^2}{6}\approx 1$ (по порядку величины). Окончательно выпишем разностные уравнения численной схемы, соответствующей дифференциальной задаче (6):

$$\begin{cases} u_m^0=\cos(2mh),\ m=0,1,2,...,N, \\ u_m^n=\dfrac{\left(u_{m+1}^{n-1}+u_{m-1}^{n-1}+4u_m^{n-1}\right)}{6},\ m=1,2,...N-1,\ n=1,2,...,N^2, \\ u_0^n=\dfrac{1}{25}(48u_1^n-36u_2^n+16u_3^n-3u_4^n),\ n=1,2,...,N^2, \\ u_N^n=\dfrac{1}{25}(48u_{N-1}^n-36u_{N-2}^n+16u_{N-3}^n-3u_{N-4}^n),\ n=1,2,...N^2. \end{cases} \tag{18}$$

Первое уравнение в численной схеме (18) представляет собой начальное условие задачи (6) . Тогда точное решение $u(x,T)$ в узлах равномерной сетки в последнем временном слое $n = N^2$:

$$u_m^{N^2} = \cos(2mh)e^{-4T} = \cos(2mh)e^{-\frac{4}{6}h^2N^2} = \cos(2mh)e^{-2\frac{\pi^2}{3}},\ m = 0,1,2,...N\ . \qquad (19)$$

Описание программы. Для численной схемы (18) и теста (19) напишем программу на языке С.

Следующая ниже программа написана с двойной точностью:

```
#include < stdio.h >
#include < math.h >
int N = 100, N1 = N * N;
int main(){
int k, j;
double res[N+1][N1+1], x[N+1];
double pi, h, dt;
pi = 2.0 * asin(1.0);
h = pi / double(N);
dt = (h*h)/(6.0);
for(k = 0; k < N; k++){
res[k][0] = cos(2.0 * h * double(k));
x[k] = res[k][0] * exp(-4.0 * dt * double(N1));}
for( j = 1; j <= N1; j++)
{
for(k = 1; k <= N-1; k++)
{
res[k][j] = (1.0/6.0) * (res[k+1][j-1] + res[k-1][j-1] + 4.0 * res[k][j-1]);
} }
res[0][j] = (1.0/25.0)(48.0 * res[1][j] - 36.0 * res[2][j] + 16.0 * res[3][j] - 3.0 * res[4][j]);          (20)
res[N][j] = (1.0/25.0)(48.0 * res[N-1][j] - 36.0 * res[N-2][j] + 16.0 * res[N-3][j] - 3.0 * res[N-4][j]);  (21)
printf("x          axact          resolve \n");
for(k = 0;   k <= N; k++)    {
if (k - 10 * int(double(k) / double(10)) == 0)
{
printf("x = %lf   axact = %.14lf    res =  %.14lf   \n", h * double(k), x(k), res[k][N1])
}}
printf("h = %lf  h*h*h*h = %lf \n", h, h*h*h*h); }
```

Результаты численного решения. Покажем насколько важно требовать согласование порядков аппроксимации $p_2 = p_1$ дифференциального и граничного операторов в задачах математической физики. Для этого аппроксимируем сначала граничный оператор первым порядком сходимости $p_1 = 1$, а дифференциальный оператор (11) – по-прежнему, четвертым порядком $p_2 = 4$. То есть в формулах (16), (17) положим $u_0^n = u_1^n, u_N^n = u_{N-1}^n$ и в программе в формулах (20), (21)

$$res[0][j] = res[1][j], res[N][j] = res[N-1][j].$$

Программа возвращает таблицу значений x, *axact*, *resolve*, *delta* (координату, точное решение, численное решение, разность между численным и точным решениями $delta = resolve - axact$) с шагом равномерной сетки *h*:

Таблица 1 – Решение численной схемы (18) при N = 400

x	*axact*	*resolve*	*delta*
0.00000000	0.00138821536422	-0.00116477704469	-0.00255299240891
0.31415927	0.00112308982151	-0.00141598028627	-0.00255282114823
0.62831853	0.00042898213940	-0.00208561646036	-0.00255264003627
0.94247780	-0.00042898213940	-0.00291666632857	-0.00255244911732
1.25663706	-0.00112308982151	-0.00359015697326	-0.00255224843765
1.57079633	-0.00138821536422	-0.00384758973613	-0.00255203804554
1.88495559	-0.00112308982151	-0.00359015697326	-0.00255181799127
2.19911486	-0.00042898213940	-0.00359015697326	-0.00255158832706
2.51327412	0.00042898213940	-0.00208561646036	-0.00255134910711
2.82743339	0.00112308982151	-0.00141598028627	-0.00255110038758
3.14159265	0.00138821536422	-0.00116477704469	-0.00255084222654

$$h = 7.853981633974483 \cdot 10^{-3}, \qquad h^4 = 3.805042618515720 \cdot 10^{-9}$$

Сравнивая значения *axact* и *resolve* в таблице 1, видим, что приближенное решение даже не сходится к точному, так как приближенное решение всегда отрицательно, в то время как точное – $u_m^{N^2} = \cos(2mh)e^{-2\frac{\pi^2}{3}}$, $m = 0,12,...,N$, дважды меняет знак при $h \to 0 (\Leftrightarrow N \to \infty)$; $o(1) \sim \dfrac{1}{\ln N}$ (здесь $o(x)$ – символика «*o* малое от *x*»).

Пусть теперь $h^4 > 6\,10^{-8}$ формулы (16), (17), (20), (21) написаны с четвертым порядком аппроксимации. В таблицах 2 и 3 также указаны полученные программой значения x, *axact*, *resolve*, *delta*.

Таблица 2 – Решение численной схемы (18) при N = 200

x	*axact*	*resolve*	*delta*
0.00000000	0.00138821536422	0.00138821868693	0.00000000332271
0.31415927	0.00112308982151	0.00112309312266	0.00000000332223
0.62831853	0.00042898213940	0.00042898540013	0.00000000332168
0.94247780	-0.00042898213940	-0.00042897892418	0.00000000332107
1.25663706	-0.00112308982151	-0.00112308664158	0.00000000332039
1.57079633	-0.00138821536422	-0.00138821219752	0.00000000331964
1.88495559	-0.00112308982151	-0.00112308664158	0.00000000331883
2.19911486	-0.00042898213940	-0.00042897892418	0.00000000331796
2.51327412	0.00042898213940	0.00042898540013	0.00000000331702
2.82743339	0.00112308982151	0.00112309312266	0.00000000331602
3.14159265	0.00138821536422	0.00138821868693	0.00000000331495

$$h = 1.570796326794897\text{E} \cdot 10^{-2}, \qquad h^4 = 6.088068189625153 \cdot 10^{-8}$$

Таблица 3 (N = 400)

x	$axact$	$resolve$	$delta$
0.00000000	0.00138821536422	0.00138821868693	0.00000000010439
0.31415927	0.00112308982151	0.00112308992513	0.00000000010439
0.62831853	0.00042898213940	0.00042898224150	0.00000000010438
0.94247780	-0.00042898213940	-0.00042898203902	0.00000000010437
1.25663706	-0.00112308982151	-0.00112308972249	0.00000000010436
1.57079633	-0.00138821536422	-0.00138821526571	0.00000000010435
1.88495559	-0.00112308982151	-0.00112308972249	0.00000000010434
2.19911486	-0.00042898213940	-0.00042898203902	0.00000000010433
2.51327412	0.00042898213940	0.00042898224150	0.00000000010432
2.82743339	0.00112308982151	0.00112308992513	0.00000000010430
3.14159265	0.00138821536422	0.00138821546861	0.00000000010429

$$h = 7.853981633974483 \cdot 10^{-3}, \qquad h^4 = 3.805042618515720 \cdot 10^{-9}$$

В пространстве C непрерывных на отрезке $[0, \pi]$ функций с нормой Чебышева $\|x\|_C = \max_{t\in[0,\pi]} |x(t)|$ норма разности приближенного и точного решений, заданной на равномерной сетке, равна

$$\|delta\| = \left\|u_m^{N^2}(resolve) - u_m^{N^2}(axact)\right\|_C = \max_{[m=0,\dots N]} \left|delta_m^{N^2}\right|.$$

Из таблицы 2 видно при N = 200, что $\|delta\|_C < 4 \cdot 10^{-9}$, в то время как $h^4 > 6 \cdot 10^{-8}$. Другими словами, равномерная норма разности не превышает четвертой степени шага равномерной сетки h.

Аналогично, из таблицы 3 видно, что при $N = 400$ $\|delta\|_C < 2 \cdot 10^{-10}$, в тогда как $h^4 > 3 \cdot 10^{-9}$, и равномерная норма разности также не превышает четвертого порядка степени шага сетки h.

В общем случае для определения (оценки) порядка сходимости разностной схемы, как определяет А.А. Самарский [3, с. 57], необходимо требовать уменьшение погрешности (нормы разности приближенного и точного решений) в 16 раз при уменьшении шага сетки h в 2 раза (при увеличении N в 2 раза) – для сходимости с четвертым порядком. В данной разностной схеме при увеличении N в 2 раза (с 200 до 400) погрешность по норме Чебышева уменьшается примерно в $\dfrac{3\,10^{-9}}{10^{-10}} = 30 > 16$ раз.

Необходимо выбирать большие N, так как указанное требование может проявляться на практике только в асимптотике $[3]$.

Другими словами, численная схема (18) аппроксимирует задачу (6) и ее решение на последнем временном слое (19) с четвертым порядком. Легко видеть, что в общем случае от формулы (11) на конечном временном слое достаточно требовать меньшей точности – второй порядок сходимости:

$$\Delta u_m^{N^2} \sim N^2\, o(\tau^2 + h^4) \sim N^2\, o(h^4) \sim o(N^2 h^4) \sim o\left(\left(\frac{\pi}{h}\right)^2 h^4\right) \sim o\,(h^2), \tag{22}$$

здесь $o(x)$ – символика «o малое от x».

Используя формулу (22), можно теоретически обосновать сходимость (расходимость) дифференциальной задачи с порядком аппроксимации p_2 и порядком граничного условия p_1. Действительно, в случае равенства $p_2 = p_1 = 4$ порядок аппроксимации общей задачи $p = \min(p_1, p_2) = 4$ и согласно (22) на последнем временном слое разностное решение $u_h(x,t)$ (18) сходится при $h \to 0$ к решению дифференциальной задачи $u(x,t)$ (6) не хуже, чем со вторым порядком.

Если $p_2 = 1;\ p_1 = 4$, то $p = \min(p_1, p_2) = 1$, то есть на конечном временном слое невязка между решениями разностной и дифференциальной задачами имеет асимптотику:

$$N^2\, o(h) \sim N^2\, h\, o(1) = N^2 \left(\frac{\pi}{N}\right) o(1) \sim N\, o(1).$$

Поскольку $o(1)$ может иметь слабую сходимость, например, при $h \to 0 (\Leftrightarrow N \to \infty)$; $o(1) \sim \frac{1}{\ln N}$, то $|u(x,t) - u_h(x,t)| \sim N / \ln N \to \infty$, $N \to \infty$.

Что доказывает расходимость задачи в случае $x, axact, resolve,$ $delta.$

Замечание. Массивы данных при $N = 400$, $N_1 = 400^2$ получены на FORTRAN, так как язык С, в котором написана программа, поддерживает только массив данных $N = 100$, $N_1 = 100^2$.

Выводы.

1. В работе численными методами показано, что разностная схема (18) аппроксимирует задачу математической физики (6) с уравнением параболического типа четвертым порядком относительно шага сетки при условии, что разностные дифференциальный и граничный (граничное условие Неймана) операторы построены с одинаковым четвертым порядком аппроксимации.
2. Приведен контрпример, в котором дифференциальный оператор имеет четвертый порядок аппроксимации, а граничный оператор первый порядок аппроксимации. В этом случае сходимость разностной задачи к решению дифференциальной задачи при больших N не имеет места.
3. Теоретически обоснована сходимость или расходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи в указанных примерах.
4. Из таблиц 2 и 3 видно, что невязка $delta$ точного $axact$ и численного $resolve$ решений в уравнениях параболического типа с диффузионным членом u_{xx} (одномерный случай оператора Лапласа) при больших N как уменьшается на всей области отрезка $[0, \pi]$, так и равномерно распределяется по всему отрезку. Это равномерное распределение невязки можно объяснить диффузией случайной величины машинной ошибки округления.
5. Получены формулы с аппроксимацией четвертым порядком для граничного оператора с однородным условием Неймана (формулы (16), (17)) и для неоднородного условия Неймана на границе (формула (15)). Данные формулы применимы для уравнений в частных производных эллиптического, параболического и гиперболического типов, а также при аппроксимации краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов, Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – М. : БИНОМ, Лаборатория знаний, 2010.
2. Пикулин, В.П. Практический курс по уравнениям математической физики / В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. – М. : Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1995.
3. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики : учеб. пособие / А.А. Самарский, П.Н. Вабишевич. – М. : Изд-во ЛКИ, 2014. – 480 с.

Поступила 05.09.2015

CO-ORDINATION ORDER TO APROXIMATIONS DIFFERENTIAL AND BORDER OPERATOR IN MARGINAL PROBLEM AND EQUATIONS IN QUOTIENT DERIVED

A. HERTZ, A. ZELENKEVICH, N. GUREVA, Y. PASTUHOV, D. PASTUHOV

In the article by numerical methods is shown that numerical scheme approximates the problem mathematical physicists of parabolic type with 4 rather for cites an instance for step of the net provided that differential and border (the border condition of Neyman) operators are built with alike rather approximations. The brought rebels example, when border operator has a first order to approximations, but differential 4 orders, convergence decisions to exact decision of the differential problem has a no place. It is theoretically motivated convergence or decisions problems to decision of the differential problem in specified example. Formulas are received with approximation rather for border operator with uniform and lumpy condition of Neyman for unvaried equations in quotient derived elliptical, parabolic and hyperbolic types, as well as at approximations of the marginal problems.