УДК 517.983

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ И НОРМИРОВАННОЙ ФУНКЦИЕЙ БЕССЕЛЯ В ЯДРАХ В КЛАССЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. СКОРОМНИК
(Полоцкий государственный университет)

Рассмотрены два интегральных уравнения первого рода с вырожденной гипергеометрической функцией и нормированной функцией Бесселя в ядрах. Хорошо известен классический результат Я. Тамаркина о разрешимости интегрального уравнения Абеля в пространстве $L_1(a,b)$ суммируемых функций на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси. Следуя методике Я. Тамаркина, получены формулы решения исследуемых уравнений в замкнутой форме, доказаны необходимые и достаточные условия их разрешимости в пространстве интегрируемых функций.

1. Предварительные сведения. Одномерные интегральные уравнения первого рода, обобщающие классическое интегральное уравнение Абеля и содержащие в ядрах гипергеометрическую функцию Гаусса, функцию Лежандра, вырожденную гипергеометрическую функцию (функцию Куммера), нормированную функцию Бесселя (функцию Бесселя – Клиффорда), другие специальные функции, изучены многими авторами (см. обзор результатов и библиографию в [1, § 39]). Такие уравнения возникают при изучении краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типа с краевыми условиями, содержащими обобщенные дробные интегралы и производные [2]. В большинстве работ метод исследования уравнений типа Абеля с гипергеометрическими функциями, функцией Лежандра в ядрах основывался на представлении интегральных операторов этих уравнений в виде композиции операторов дробного интегрирования Римана – Лиувилля со степенными или экспоненциальными весами и на использовании известных свойств дробных интегралов. На этом пути были даны достаточные условия разрешимости рассматриваемых интегральных уравнений в некоторых классах функций и получены их решения в квадратурах [1, §§ 35.1, 35.2, 37.1].

Исследование необходимых и достаточных условий разрешимости выше указанных уравнений является более сложной задачей. Хорошо известен классический результат Я. Тамаркина о разрешимости интегрального уравнения Абеля в пространстве $L_1(a,b)$ суммируемых функций на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси [1, теорема 2.1]. Следуя методике Я. Тамаркина, в работе получены решения в замкнутой форме двух интегральных уравнений первого рода: с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера и нормированной функцией Бесселя ядрах; установлены необходимые и достаточные условия разрешимости указанных уравнений в пространстве интегрируемых функций.

Рассматриваются интегральные уравнения:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{\alpha-1} {}_1F_1\left(\beta;\alpha;\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right) f(t)dt = g(x), \quad x > a, \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}\right) f(t)dt = g(x), \quad x > a, \tag{1.2}$$

где $\sigma > 0$; $0 < \alpha < 1$; $\lambda > 0$ – некоторый действительный параметр;

${}_1F_1(a;c;z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция (функция Куммера), определяемая по формуле [1, §1; 3, §1.6]

$${}_1F_1(a;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!} = \lim_{b\to\infty} {}_2F_1\left(a,b;c;\frac{z}{b}\right), \quad |z| < \infty, \tag{1.3}$$

здесь $(l)_n$ – символ Похгаммера: $(l)_0 \equiv 1$, $(l)_n = l(l+1)...(l+n-1)$ $(l \in C; n \in \mathrm{N})$;

${}_2F_1(a,b;c;z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, определяемая при комплексных $a,b,c \in C$ и $|z|<1$ гипергеометрическим рядом

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}$$

с соответствующим аналитическим продолжением

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\, dt$$

для $z \in C$, $0 < \operatorname{Re} b < \operatorname{Re} c$, $(|\arg(1-z)| < \pi,\ z \neq 1)$ (см. [4, п. 2.1, формулы (2) и (10)]);

$\bar{J}_\nu(z)$ – нормированная функция Бесселя (функция Бесселя – Клиффорда), определяемая по формуле [1, § 37.1]

$$\bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu+1)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(z), \quad |z| < \infty; \tag{1.4}$$

где $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода [1, §1.3; 5]

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(\nu+k+1)k!}. \tag{1.5}$$

Будем считать, что $a > -\infty$ и уравнения (1.1), (1.2) рассматриваются на конечном отрезке $[a,b]$.

Уравнения (1.1) и (1.2) обобщают уравнения [1, формулы (37.1) и (37.4)], получающиеся из (1.1) и (1.2) при $\sigma = 1$ соответственно.

Нам понадобятся интегральная теорема сложения для функции Куммера (1.3) [4, п. 6.10, формула (15)]

$$\int_0^t \frac{u^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_1F_1(a;c;u) \frac{(t-u)^{c'-1}}{\Gamma(c')} {}_1F_1\left(a';c';t-u\right) du = \frac{t^{c+c'-1}}{\Gamma(c+c')} {}_1F_1\left(a+a';c+c';t\right), \quad \operatorname{Re}(c) > 0,\ \operatorname{Re}(c') > 0, \tag{1.6}$$

второй интеграл Сонина для функции Бесселя (1.5) [5, п. 7.7 формула (4)]

$$\int_0^t \sqrt{\tau^\mu (t-\tau)^\nu}\, J_\mu(\alpha\sqrt{\tau}) J_\nu(\beta\sqrt{t-\tau})\, d\tau = 2\alpha^\mu \beta^\nu \sqrt{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^{-(\nu+\mu=1)}}\, J_{\nu+\mu+1}\left(t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right), \tag{1.7}$$

$$\operatorname{Re}(\mu) > -1,\ \operatorname{Re}(\nu) > -1;$$

а также формула Дирихле [1, формула (1.32)]

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)dx \tag{1.8}$$

в предположении, что абсолютно сходится один из этих интегралов.

2. Решение в замкнутой форме. Сначала дадим формальное решение уравнения (1.1). Заменяя в (1.1) x на t и t на u, умножая обе части полученного равенства на

$$\left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha} {}_1F_1\left(-\beta;1-\alpha;\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right)\sigma t^{\sigma-1}$$

и интегрируя, получаем

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha} {}_1F_1\left(-\beta;1-\alpha;\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right)\sigma t^{\sigma-1} dt \int_a^t \left(t^\sigma - u^\sigma\right)^{\alpha-1} {}_1F_1\left(\beta;\alpha;\lambda(t^\sigma - u^\sigma)\right) f(u)du =$$

$$= \int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha} {}_1F_1\left(-\beta;1-\alpha;\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right)\sigma t^{\sigma-1} g(t)dt;\ x > a. \tag{2.1}$$

Изменяя порядок интегрирования в левой части равенства (2.1) согласно формуле (1.8), представляем его в виде

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f(u)du\int_u^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha}\left(t^\sigma - u^\sigma\right)^{\alpha-1} {}_1F_1\left(\beta;\alpha;\lambda(t^\sigma - u^\sigma)\right) {}_1F_1\left(-\beta;1-\alpha;\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right)\sigma\, t^{\sigma-1}dt =$$

$$= \int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha} {}_1F_1\left(-\beta;1-\alpha;\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right)\sigma t^{\sigma-1} g(t)dt. \tag{2.2}$$

Для вычисления внутреннего интеграла в соотношении (2.2) вводим новые переменные

$$s = \lambda(x^\sigma - t^\sigma),$$

используем формулу (1.6) и последовательно получаем

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_u^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha}\left(t^\sigma - u^\sigma\right)^{\alpha-1} {}_1F_1\left(\beta;\alpha;\lambda(t^\sigma - u^\sigma)\right) {}_1F_1\left(-\beta;1-\alpha;\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right)\sigma t^{\sigma-1}dt =$$

$$= \Gamma(1-\alpha)\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\lambda(x^\sigma - u^\sigma)} s^{(1-\alpha)-1} {}_1F_1(-\beta;\, 1-\alpha; s)\times$$

$$\times\left(\lambda(x^\sigma - u^\sigma) - s\right)^{\alpha-1} {}_1F_1\left(\beta;\ \alpha;\lambda(x^\sigma - u^\sigma) - s\right)ds = \Gamma(1-\alpha)\, {}_1F_1\left(0;1;\lambda(x^\sigma - u^\sigma)\right) = \Gamma(1-\alpha).$$

На основании этого равенство (2.2) принимает вид

$$\int_a^x f(u)du = f_{\lambda,\alpha,\beta}(x), \tag{2.3}$$

где

$$f_{\lambda,\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha} {}_1F_1\left(-\beta;1-\alpha;\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right)\sigma t^{\sigma-1} g(t)dt. \tag{2.4}$$

После дифференцирования обеих частей равенства (2.3) получаем следующую формулу решения уравнения (1.1):

$$f(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha} {}_1F_1\left(-\beta;1-\alpha;\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right) t^{\sigma-1} g(t)dt. \tag{2.5}$$

Таким образом, мы доказали, что если уравнение (1.1) разрешимо, то его решение необходимо имеет вид (2.5).

Дадим теперь формальное решение уравнения (1.2). Заменяя в нем x на t и t на u, умножая обе части полученного равенства на $\left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}\left(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}\right)\sigma t^{\sigma-1}$ и интегрируя, имеем

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}\left(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}\right)\sigma t^{\sigma-1}dt\int_a^t \left(t^\sigma - u^\sigma\right)^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{t^\sigma - u^\sigma}\right) f(u)du =$$

$$= \int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}\left(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}\right)\sigma\, t^{\sigma-1} g(t)dt, \quad x > a. \tag{2.6}$$

Изменяя порядок интегрирования в левой части равенства (2.6) согласно формуле (1.8), представляем его в виде

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f(u)du\int_u^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha}\left(t^\sigma - u^\sigma\right)^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{t^\sigma - u^\sigma}\right) \bar{J}_{-\alpha}\left(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}\right)\sigma t^{\sigma-1}dt =$$

$$= \int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}\left(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}\right)\sigma t^{\sigma-1} g(t)dt, \quad x > a. \tag{2.7}$$

Для вычисления внутреннего интеграла в левой части (2.7) делаем замену $s=\lambda(x^{\sigma}-t^{\sigma})$. Далее по формуле (1.4) выражаем функцию Бесселя – Клиффорда $\bar{J}_{\nu}(z)$ через функцию Бесселя первого рода $J_{\nu}(z)$ (1.5), используем формулу (1.7) и окончательно получаем

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_u^x\left(x^{\sigma}-t^{\sigma}\right)^{-\alpha}\left(t^{\sigma}-u^{\sigma}\right)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{t^{\sigma}-u^{\sigma}}\right)\bar{J}_{-\alpha}\left(\lambda\sqrt{x^{\sigma}-t^{\sigma}}\right)\sigma t^{\sigma-1}dt=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\sqrt{\lambda}}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^{\lambda\left(x^{\sigma}-u^{\sigma}\right)}\sqrt{s^{-\alpha}\left(\lambda(x^{\sigma}-u^{\sigma})-s\right)^{\alpha-1}}\,J_{-\alpha}\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{s}\right)\times$$

$$\times J_{\alpha-1}\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda(x^{\sigma}-u^{\sigma})-s}\right)ds=\Gamma(1-\alpha)J_0\left(\sqrt{2\lambda}\,\lambda(x^{\sigma}-u^{\sigma})\right).$$

На основании этого равенство (2.7) принимает вид

$$\int_a^x J_0\left(\sqrt{2\lambda}\,\lambda(x^{\sigma}-u^{\sigma})\right)f(u)du\;=\;f_{\lambda,\alpha}(x), \tag{2.8}$$

где

$$f_{\lambda,\alpha}(x)=\frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x\left(x^{\sigma}-t^{\sigma}\right)^{-\alpha}\bar{J}_{-\alpha}\left(\lambda\sqrt{x^{\sigma}-t^{\sigma}}\right)\sigma t^{\sigma-1}g(t)dt\,. \tag{2.9}$$

После дифференцирования обеих частей уравнения (2.8), учитывая, что $J_0(z)\to 1$ при $z\to 0$, получаем

$$f(x)=\frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x\left(x^{\sigma}-t^{\sigma}\right)^{-\alpha}\bar{J}_{-\alpha}\left(\lambda\sqrt{x^{\sigma}-t^{\sigma}}\right)\sigma t^{\sigma-1}g(t)dt\,. \tag{2.10}$$

Таким образом, если уравнение (1.2) имеет решение, то это решение необходимо имеет вид (2.10).

3. Обоснование решений уравнений (1.1) и (1.2) в классе интегрируемых функций. Доказывается теорема, которая дает необходимые и достаточные условия разрешимости уравнений (1.1) и (1.2) в пространстве $L_1(a,b)=\left\{f(x):\int_a^b|f(t)|dt<\infty\right\}$ в терминах вспомогательных функций $f_{\lambda,\alpha,\beta}(x)$ и $f_{\lambda,\alpha}(x)$ соответственно. При доказательстве используем тот факт, что класс $AC([a,b])$ абсолютно непрерывных функций совпадает с классом первообразных от суммируемых по Лебегу функций [6, с. 338; 7, с. 368–369]:

$$g(x)\in AC([a,b])\Leftrightarrow g(x)=c+\int_a^x f(t)dt,\ \int_a^b|f(t)|dt<\infty\ , \tag{3.1}$$

поэтому абсолютно непрерывные функции имеют почти всюду суммируемую производную $g'(x)$.

Теорема 1. *Для разрешимости уравнения (1.1) с* $0<\alpha<1$, $\sigma>0$, $\lambda>0$ *в пространстве* $L_1(a,b)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$f_{\lambda,\alpha,\beta}(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x\left(x^{\sigma}-t^{\sigma}\right)^{-\alpha}{}_1F_1\left[-\beta;1-\alpha;\lambda(x^{\sigma}-t^{\sigma})\right]\sigma t^{\sigma-1}g(t)dt\in AC([a,b])\ \text{и}\ f_{\lambda,\alpha,\beta}(a)=0\,. \tag{3.2}$$

При выполнении условий (3.2) уравнение (1.1) разрешимо в $L_1(a,b)$ *и его единственное решение дается формулой (2.5).*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть уравнение (1.1) разрешимо в $L_1(a,b)$. Тогда справедливы все рассуждения предыдущего пункта (при этом возможность перестановки порядка интегрирования в (2.1) обосновывается с помощью теоремы Фубини (1.8)) и, следовательно, справедливо (2.3). Отсюда в силу (3.1) следуют условия (3.2).

Достаточность. Так как $f_{\lambda,\alpha,\beta}(x) \in AC([a,b])$, то $f'_{\lambda,\alpha,\beta}(x) = \frac{d}{dx} f_{\lambda,\alpha,\beta}(x) \in L_1(a,b)$. Поэтому функция, представляемая формулой (2.5), существует почти всюду и принадлежит $L_1(a,b)$. Покажем, что она дает решение уравнения (1.1). Для этого подставим ее в левую часть уравнения (1.1) и результат обозначим через $\varphi(x)$:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{\alpha-1} {}_1F_1\left(\beta;\alpha;\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right) f'_{\lambda,\alpha,\beta}(t)dt = \varphi(x). \tag{3.3}$$

Покажем, что почти всюду $\varphi(x) = g(x)$, что и докажет теорему. Равенство (3.3) есть уравнение (1.1) относительно $f'_{\lambda,\alpha,\beta}(t)$. Оно заведомо разрешимо, поэтому в силу (2.5) $f'_{\lambda,\alpha,\beta}(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \times$ $\times \frac{d}{dx} \int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha} {}_1F_1\left(-\beta;1-\alpha;\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right) t^{\sigma-1}\varphi(t)dt$, т.е. $f'_{\lambda,\alpha,\beta}(x) = \varphi'_{\lambda,\alpha,\beta}(x)$. Функции $f_{\lambda,\alpha,\beta}(x)$ и $\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(x)$ абсолютно непрерывны: первая по предположению, вторая в силу равенства (2.3) с $\varphi(x)$ в правой части. Поэтому $f_{\lambda,\alpha,\beta}(x) - \varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(x) = c$. По предположению $f_{\lambda,\alpha,\beta}(a) = 0$, $\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(a) = 0$, потому что (3.3) – разрешимое уравнение. Отсюда $c = 0$, так что

$$\frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha} {}_1F_1\left(\beta;\alpha;\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right) t^{\sigma-1}(g(t) - \varphi(t))dt = 0.$$

Последнее равенство есть уравнение вида (1.1). В силу единственности решения $g(t) - \varphi(t) \equiv 0$. Теорема доказана.

Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (1.1) сформулированы в терминах вспомогательной функции $f_{\lambda,\alpha,\beta}(x)$. Следующая лемма и следствие из нее дают достаточное условие в терминах самой функции $g(x)$.

Лемма 1. Если $g(x) \in AC([a,b])$, то и $f_{\lambda,\alpha,\beta}(x) \in AC([a,b])$, при этом справедливо представление

$$f_{\lambda,\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(g(a)\left(x^\sigma - a^\sigma\right)^{1-\alpha} {}_1F_1\left(-\beta;2-\alpha;\lambda(x^\sigma - a^\sigma)\right) + \right.$$
$$\left. + \int_a^x g'(t)\left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{1-\alpha} {}_1F_1\left(-\beta;2-\alpha;\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right)dt \right). \tag{3.4}$$

Доказательство. Подставляем на основании (3.1) функцию $g(t) = g(a) + \int_a^t g'(s)ds$ в формулу (2.4), имеем

$$f_{\lambda,\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha} {}_1F_1\left(-\beta;1-\alpha;\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right) \sigma t^{\sigma-1} \left(g(a) + \int_a^t g'(s)ds \right) dt =$$

$$= \frac{g(a)}{\Gamma(2-\alpha)} \left(x^\sigma - a^\sigma\right)^{1-\alpha} {}_1F_1\left(-\beta;2-\alpha;\lambda(x^\sigma - a^\sigma)\right) + \tag{3.5}$$

$$+ \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha} {}_1F_1\left(-\beta;1-\alpha;\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right) t^{\sigma-1}dt \int_a^t g'(s)ds.$$

Здесь первое слагаемое – абсолютно непрерывная функция, так как выполняется равенство

$$\left(x^{\sigma}-a^{\sigma}\right)^{1-\alpha}{}_1F_1\left(-\beta;2-\alpha;\lambda(x^{\sigma}-a^{\sigma})\right)=\sigma(1-\alpha)\int_a^x\left(t^{\sigma}-a^{\sigma}\right)^{-\alpha}{}_1F_1\left(-\beta;1-\alpha;\lambda(t^{\sigma}-a^{\sigma})\right)t^{\sigma-1}dt\,.$$

Поскольку имеет место соотношение

$$\int_a^x\left(x^{\sigma}-t^{\sigma}\right)^{-\alpha}{}_1F_1\left(-\beta;1-\alpha;\lambda(x^{\sigma}-t^{\sigma})\right)\sigma t^{\sigma-1}dt\int_a^t g'(s)ds=$$
$$=\int_a^x\left[\int_a^t\left(t^{\sigma}-s^{\sigma}\right)^{-\alpha}{}_1F_1\left(-\beta;1-\alpha;\lambda(t^{\sigma}-s^{\sigma})\right)\sigma s^{\sigma-1}g'(s)ds\right]dt \tag{3.6}$$

(что проверяется непосредственной перестановкой порядка интегрирования в обеих его частях), то и второе слагаемое в (3.5) является первообразной от суммируемой функции и, следовательно, абсолютно непрерывно. Представление (3.4) следует из (3.5) после перестановки порядка интегрирования. Лемма доказана.

Следствие 1. *Если* $g(x)\in AC([a,b])$, *то уравнение типа Абеля (1.1) разрешимо при* $0<\alpha<1$, $\sigma>0,\ \lambda>0$ *в* $L_1(a,b)$, *при этом решение (2.5) можно представить в виде*

$$f(x)=\frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)}\Bigg(g(a)\left(x^{\sigma}-a^{\sigma}\right)^{-\alpha}{}_1F_1\left(-\beta;1-\alpha;\lambda(x^{\sigma}-a^{\sigma})\right)x^{\sigma-1}+$$
$$+\int_a^x\left(x^{\sigma}-s^{\sigma}\right)^{-\alpha}{}_1F_1\left(-\beta;1-\alpha;\lambda(x^{\sigma}-s^{\sigma})\right)s^{\sigma-1}g'(s)ds\Bigg). \tag{3.7}$$

Доказательство. Действительно, условия разрешимости $g(x)\in AC([a,b])$ и $f_{\lambda,\alpha,\beta}(a)=0$ выполнены в силу леммы 1 и формул (3.5), (3.6). Так как выполняется соотношение $f(x)=\frac{d}{dx}f_{\lambda,\alpha,\beta}(x)$, то формула (3.7) получается дифференцированием равенства (3.4), что возможно в силу (3.6).

Аналогично доказательству теоремы 1 для уравнения (1.2) устанавливаем следующую теорему.

Теорема 2. *Для разрешимости уравнения (1.2) с* $0<\alpha<1$, $\sigma>0$, $\lambda>0$ *в пространстве* $L_1(a,b)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$f_{\lambda,\alpha}(x)=\frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x\left(x^{\sigma}-t^{\sigma}\right)^{-\alpha}\bar{J}_{-\alpha}\left(\lambda\sqrt{x^{\sigma}-t^{\sigma}}\right)\sigma t^{\sigma-1}g(t)dt\in AC([a,b])\ \text{и}\ f_{\lambda,\alpha}(a)=0\,. \tag{3.8}$$

При выполнении условий (3.8) уравнение (1.2) разрешимо в $L_1(a,b)$ *и его единственное решение дается формулой (2.10).*

Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (1.2) сформулированы в терминах вспомогательной функции $f_{\lambda,\alpha}(x)$. Аналогично доказательству леммы 1 и следствия 1 доказываются соответственно лемма 2 и следствие 2, которые дают достаточные условия задачи разрешимости уравнения (1.2) в терминах самой функции $g(x)$.

Лемма 2. Если $g(x)\in AC([a,b])$, то и $f_{\lambda,\alpha}(x)\in AC([a,b])$, при этом справедливо представление

$$f_{\lambda,\alpha}(x)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\Bigg(g(a)\left(x^{\sigma}-a^{\sigma}\right)^{1-\alpha}\bar{J}_{1-\alpha}\left(\lambda\sqrt{x^{\sigma}-a^{\sigma}}\right)+$$
$$+\int_a^x g'(t)\left(x^{\sigma}-t^{\sigma}\right)^{1-\alpha}\bar{J}_{1-\alpha}\left(\lambda\sqrt{x^{\sigma}-t^{\sigma}}\right)dt\Bigg). \tag{3.8}$$

Следствие 2. *Если* $g(x) \in AC([a,b])$, *то уравнение типа Абеля (1.2) разрешимо при* $0 < \alpha < 1$, $\sigma > 0$, $\lambda > 0$ *в* $L_1(a,b)$, *при этом решение (2.10) можно представить в виде*

$$f(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \left(g(a) \left(x^{\sigma} - a^{\sigma} \right)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha} \left(\lambda \sqrt{x^{\sigma} - a^{\sigma}} \right) x^{\sigma-1} + \right.$$
$$\left. + \int_a^x \left(x^{\sigma} - s^{\sigma} \right)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha} \left(\lambda \sqrt{x^{\sigma} - s^{\sigma}} \right) s^{\sigma-1} g'(s) ds \right). \tag{3.9}$$

Таким образом, получены еще две формы (3.7) и (3.9) обращения уравнений (1.1) и (1.2) соответственно, применимые к абсолютно непрерывным правым частям $g(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Репин, О.А. Краевые задачи со сдвигом для уравнений гиперболического и смешанного типов / О.А. Репин. – Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1992. – 183 с.
3. Kilbas, A.A. Theory and applications of fractional differential equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo // North-Holland Mathematics Studies 204. – Amsterdam : Elsevier B.V., 2006. – 523 p.
4. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1973. – Т. 1 : Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра. – 294 с.
5. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1973. – Т. 2 : Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – 296 с.
6. Колмогоров, А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : Наука, 1968. – 496 с.
7. Никольский, С.М. Курс математического анализа / С.М. Никольский. – М. : Наука, 1983. – Т. 2. – 448 с.

Поступила 15.09.2015

SOLUTION OF INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH THE CONFLUENT HYPERDEOMETRIC FUNCTION AND NORMALIZED BESSEL FUNCTION IN THE KERNELS IN THE KLASS OF INTERGRABLE FUNCTIONS

O. SKOROMNIK

Two integral equations of the first kind with the confluent hyperdeometric function and the normalized Bessel function in the kernels are considered. Y. Tamarkin obtained a well-known classical result on the solvability of the Abel integral equation in the space $L_1(a,b)$ *of integrable functions on a finite interval* $[a,b]$ *of the real line. By Tamarkin's method the solutions of the investigating equations in the closed form are obtained, and necessary and sufficient conditions for its solvability in the space of summable functions are given.*