УДК 514

ИНВАРИАНТЫ В РАССЛОЕНИЯХ СКОРОСТЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ,
канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. ГОЛУБЕВА
(Полоцкий государственный университет)

Введено инвариантное обобщение преобразования Остроградского из $\Re^{2n}$ в расслоении скоростей произвольного нечетного порядка $T^{2n-1}X_m$ $F_L(x): T^{2n-1}X_m \to T^{2n-1}X_m$, индуцированного невырожденной функцией Лагранжа $L: T^n X_m \to \Re$. Исследован закон преобразования импульсов произвольного порядка при замене координат в базе X_m расслоения $T^n X_m$. Они преобразуются как тензоры типа (0,1) (ковекторы). Обобщено свойство, являющееся аналогом известного результата в классической механике, – на экстремалях этого лагранжиана имеет место закон сохранения импульса первого порядка $p_i^1(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-1)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ вдоль поля $X^i(x) = \frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$, $i = \overline{1,m}$, S_τ – однопараметрическая группа преобразований, $S: \Re \times X_m \to X_m$ $S_\tau: X_m \to X_m, \forall \tau \in \Re$ сохраняет лагранжиан $L: T^n X_m \to \Re$:

$$D_t(X^i \cdot p_i^1) = D_t\left(\sum_{i=1}^{m} X_i(x) \cdot \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)\right) = 0 .$$

Введение. Все физические процессы протекают в пространстве и времени, поэтому изучение геометрии пространства-времени и выяснение всех ее свойств играет важную роль в физике. Наиболее ярко связь геометрии с физикой проявляется при анализе таких вопросов, как определение естественной геометрии для того или иного физического поля, выяснение возможностей для получения законов сохранения в теории, нахождения систем отсчета, неотличимых от некоторой заданной системы с точки зрения любого физического эксперимента. Решение всех этих вопросов существенно зависит от характера геометрии. Физические законы (и объекты дифференциальной геометрии) не должны зависеть от выбора системы координат, поэтому они должны записываться посредством величин, не зависящих от преобразований координат. Такими величинами являются тензоры. Следовательно, физические величины должны выражаться в виде соотношений между тензорами [1–9].

Отметим, что к вариационной задаче сводятся задачи математической физики с уравнениями второго порядка эллиптического типа.

Математическая постановка задачи: исследовать закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе расслоения X_m и исследовать свойства преобразования Остроградского $F_L: T^{2n-1}X_m \to T^{2n-1}X_m$, индуцированного $L: T^n X_m \to \Re$.

Основные определения и математические объекты. Пусть на гладком многообразии X_m размерности m задана локальная однопараметрическая группа преобразований диффеоморфизмов S_τ, $-\infty < \tau < \infty$:

$$S_{\tau_1+\tau_2}(x) = S_{\tau_1}(S_{\tau_2}(x) \quad S_{-\tau}(x) = S_\tau^{-1}(x) \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in \Re, x \in X_m$$

$$S: \Re \times X_m \to X_m \quad S(\tau, x) = S_\tau(x) .$$

С каждой локальной однопараметрической группой преобразований связывается векторное поле, касающееся траекторий $S_\tau(x)$: $(X^i) = X(x) = \frac{d}{d\tau} S_\tau(x)|_{\tau=0}$, $i = \overline{1,m}$.

Определение 1. Гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$ называется невырожденной в точке $v_x^n \in T^n X_m$, если в некоторой системе координат (x) базы расслоения X_m $T^n X_m$ [10]:

$$\det\left(\frac{\partial^2 L(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x} \, \partial \overset{(n)i}{x}}\right) \neq 0,$$

$$\varphi : U_{v_x^n} \to \Re^{(n+1)m},$$

где $\varphi(v_x^n) = (x, \dot{x}, \ldots, \overset{(n)}{x}) \in \Re^{(n+1)m}$ – координатный гомеоморфизм; $(U_{v_x^n}, \varphi)$ – локальная карта $v_x^n \in T^n X_m$; $L(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(n)}{x})$ – локальная запись функции $L: T^n X_m \to \Re$ в системе координат (x): $L(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(n)}{x}) = L(\varphi^{-1}(v_x^n))$.

Замечание. По теореме о неявной функции гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$, невырожденная в точке $v_x^n \in T^n X_m$, является невырожденной в некоторой окрестности $U(v_x^n)$ [1, 10].

Определение 2. Гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$ называется невырожденной, если она невырождена в каждой точке $v_x^n \in T^n X_m$.

Определение 3. Гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$, невырожденная в точке $v_x^n \in T^n X_m$, называется функцией Лагранжа (лагранжианом) в расслоении скоростей $T^n X_m$ порядка *n*, невырожденной (или локально невырожденной) в точке $v_x^n \in T^n X_m$ и невырожденной (глобально), если $L: T^n X_m \to \Re$ невырождена в каждой точке $v_x^n \in T^n X_m$ [11].

Лемма 1. Определение невырожденности функции $L: T^n X_m \to \Re$ в точке $v_x^n \in T^n X_m$ корректно, то есть инвариантно относительно выбора локальной системы координат (x) базы X_m расслоения $T^n X_m$ [11].

Определение 4 *(корректность)*. Пусть $L: T^n X_m \to \Re$ – невырожденная функция Лагранжа. Отображение $F_L(x): T^{2n-1} X_m \to T^{2n-1} X_m$ (индуцированное $L: T^n X_m \to \Re$), которое в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^{2n-1} X_m$ задается функцией вида

$$F_L(x): (x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i, \ldots, \overset{(2n-1)i}{x}) \to (x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i, \ldots, x^{(n-1)i}, p_i^n, p_i^{n-1}, \ldots, p_i^1), \; i = \overline{1, m},$$

где $\overset{(k)i}{x} = D_t^k x^i$; D_t^k – оператор *k*-кратного полного дифференцирования по переменной *t*; функции $p_i^k(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2n-k)}{x})$ – импульсы порядка k по i-й координате, зависят от производных координат не более $(2n-k)$-порядка, верхний индекс – номер порядка импульса, нижний – номер координаты,

и называется преобразованием Остроградского в расслоении скоростей $T^{2n-1} X_m$ [1, 10].

Импульс k-порядка по i-й координате в системе координат (x) в базе X_m расслоения $T^{2n-1}X_m$ имеет вид

$$p_i^k(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right),\ k=\overline{1,n},\ i=\overline{1,m}.$$

В любой другой системе локальных координат $x(\bar{x})$ в базе X_m:

$$\overline{p_i^k}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{n} p_j^k(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = p_j^k(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} \text{ (свертка)},$$

где $i,j=\overline{1,m}$ [11].

Теорема 1. *Пусть $L:T^nX_m\to\Re$ – невырожденная функция Лагранжа, тогда преобразование Остроградского, индуцированное L, $F_L:T^{2n-1}X_m\to T^{2n-1}X_m$, также является невырожденным [11].*

Замечание 1. Слоевые координаты вектора $\overset{(k)i}{x}=D_t^k x_i, i=\overline{1,m}$ в $T^{2n-1}X_m$ могут быть названы по аналогии с физическими величинами координатами вектора скорости k-го порядка, $k=\overline{1,2n-1}$ (скорость в физике – скорость 1-го порядка, ускорение в физике – скорость 2-го порядка), а оператор D_t^k – оператор k-кратного полного дифференцирования по времени t.

Замечание 2. Функционал в уравнении Эйлера – Лагранжа может быть интерпретирован как импульс 0-го порядка:

$$p_i^0(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right),\ i=\overline{1,m},$$

вектор импульса n-го порядка имеет вид

$$p_i^n(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x}) = \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}.$$

Утверждение 1. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2 *(закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе X_m расслоения $T^{2n-1}X_m$).*

*При замене $(\bar{x})\to(x(\bar{x}))$ происходит следующее: в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n-1}X_m$ вектор импульса k-го порядка $\overline{p_i^k}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})$, $i=\overline{1,m}$, преобразуется как **тензор** типа (0,1) (ковектор):*

$$\boldsymbol{\overline{p_i^k}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{n} p_j^k(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_j^k(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j},\ k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}},$$

*что позволяет называть функции $p_i^k(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})$, $i=\overline{1,m}$, **тензором импульса k-го порядка** ($k=\overline{1,n}$) в расслоении скоростей $T^{2n-1}X_m$.*

Именно этот результат позволяет корректно определить преобразование Остроградского $F_L:T^{2n-1}X_m\to T^{2n-1}X_m$, индуцированное отображением $L:T^nX_m\to\Re$ при условии невырожденности $L:T^nX_m\to\Re$.

Теорема 3. *Пусть* $L: T^n X_m \to \Re -$ *невырожденная функция Лагранжа, тогда определение преобразования Остроградского, индуцированное функцией* L, $F_L : T^{2n-1}X_m \to T^{2n-1}X_m$, *корректно, т.е. инвариантно относительно выбора локальной системы координат* (x) *в базе многообразия* X_m *расслоения* $T^{2n-1}X_m$. *Это позволяет не указывать локальную систему координат* (x) *в базе* X_m *расслоения* $T^{2n-1}X_m$ *при рассмотрении отображения* $F_L(x): T^{2n-1}X_m \to T^{2n-1}X_m$ *и писать просто* $F_L : T^{2n-1}X_m \to T^{2n-1}X_m$ *[11].*

Действительно, при переходе от координат x к $\bar{x}$ $((x) \to (\bar{x}))$ в базе X_m расслоения $T^n X_m$ импульсы преобразуются по закону

$$\overline{p_i^k}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(2n-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{n} p_j^k(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = p_j^k(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}.$$

Обратный переход от координат $\bar{x}$ к x $((\bar{x}) \to (x))$, по определению, при обратном переходе в базе X_m расслоения $T^n X_m$ от координат $(\bar{x}) \to (x)$ имеет вид

Поскольку $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \overline{p_i^k}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(2n-k)}{\bar{x}}) \cdot \frac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^m} = \overline{p_i^k}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(2n-k)}{\bar{x}}) \cdot \frac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^m} =$

$$= p_j^k(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^m} = p_j^k(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \delta_m^j = \boldsymbol{p_m^k(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x})},$$

где $\delta_m^j = \begin{cases} 1, & j = m \\ 0, & j \neq m \end{cases}$ – символ Кронеккера.

То есть функции $p_m^k(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x})$, определенные в системе координат (x) и $(\bar{x})$ в базе X_m расслоения $T^n X_m$, совпадают.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $L: T^n X_m \to \Re -$ невырожденная функция Лагранжа, тогда преобразование Остроградского $F_L : T^{2n-1}X_m \to T^{2n-1}X_m$, индуцированное функцией L, можно выразить следующим образом [11]:

$$D_t p_i^k(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_i^{k-1}(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k+1)}{x}).$$

Доказательство. Пусть $\bar{x}_\tau^i = S_\tau^i(x)$ $i = \overline{1, m}$, $S_\tau : (x) \to (\bar{x}) = S_\tau(x)$ – невырожденное преобразование координат (в окрестности каждой точки $x \in X_m$, $(U_1(x), \varphi_1)$, $(U_2(x), \varphi_2)$, $x \in U_1 \cap U_2$, $S = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1^{-1} : \Re^m \to \Re^m$, где $U_1(x), \varphi_1)$, $(U_2(x), \varphi_2)$ – локальные карты многообразия X_m) в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей $(2n-1)$-порядка $T^{2n-1}X_m$, то есть

$$\det\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right) \neq 0, \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Тогда оно индуцирует невырожденное преобразование слоевых координат:

$$\dot{\bar{x}}^i(x,\dot{x}) = D_t\,\overline{x^i_\tau} = \frac{\partial S^i_\tau}{\partial x^k}\cdot \dot{x}^k = D_t S^i_\tau(x)\ ,$$

$$\ddot{\bar{x}}^i(x,\dot{x},\ddot{x}) = D_t^2\,\overline{x^i_\tau} = \frac{\partial^2 S^i_\tau}{\partial x^k\partial x^l}\cdot \dot{x}^k\cdot \dot{x}^l + \frac{\partial S^i_\tau}{\partial x^k}\cdot \ddot{x}^k = D_t^2 S^i_\tau(x)$$

$$\dddot{\bar{x}}^i(x,\dot{x},\ddot{x},\dddot{x}) = D_t^3\,\overline{x^i_\tau} = \frac{\partial^3 S^i_\tau}{\partial x^k\partial x^l\partial x^j}\cdot \dot{x}^k\cdot \dot{x}^l\cdot \dot{x}^j + 3\frac{\partial^2 S^i_\tau}{\partial x^k\partial x^l}\cdot \ddot{x}^k\cdot \dot{x}^l + \frac{\partial S^i_\tau}{\partial x^k}\cdot \dddot{x}^k = D_t^3 S^i_\tau(x)$$

$$\ddddot{\bar{x}}^i(x,\dot{x},\ddot{x},\dddot{x},\ddddot{x}) = D_t^4\,\overline{x^i_\tau} = \frac{\partial^4 S^i_\tau}{\partial x^k\partial x^l\partial x^j\partial x^n}\cdot \dot{x}^k\cdot \dot{x}^l\cdot \dot{x}^j\cdot \dot{x}^j + 6\frac{\partial^3 S^i_\tau}{\partial x^k\partial x^l\partial x^j}\cdot \ddot{x}^k\cdot \dot{x}^l\cdot \dot{x}^j + 4\frac{\partial^2 S^i_\tau}{\partial x^k\partial x^l}\cdot \dddot{x}^k\cdot \dot{x}^l + \frac{\partial S^i_\tau}{\partial x^k}\cdot \ddddot{x}^k = D_t^4 S^i_\tau(x)$$

и т. д.

Обозначим $x = \bar{x}(x)$, $\dot{x} = \dot{\bar{x}}(x,\dot{x})$, $\ddot{x} = \ddot{\bar{x}}(x,\dot{x},\ddot{x})$, а также преобразование импульсов:

$$\overline{p_i^k}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}}) = p_i^k(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x},\dot{\bar{x}}),\ldots,\overset{(2n-k)}{x}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}}))\,.$$

Определение 5. Пусть $\bar{x}^i = S^i(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, $i=\overline{1,m}$, $S:(x)\to(\bar{x}=S(x))$ – невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей $(2n-1)$-порядка $T^{2n-1}X_m$. Кроме того, $L:T^nX_m\to\Re$ – невырожденная функция Лагранжа, $F_L:T^{2n-1}X_m\to\ T^{2n-1}X_m$ – преобразование Остроградского, индуцированное функцией Лагранжа $L:T^nX_m\to\Re$, тогда отображение

$$G(L,\bar{x}(x)):(x^i,\dot{x}^i,\ddot{x}^i,\ldots,x^{(n-1)i},p_i^n,p_i^{n-1},\ldots,p_i^1)\to(\bar{x}^i,\dot{\bar{x}}^i,\ddot{\bar{x}}^i,\ldots,\overset{(n-1)i}{\bar{x}},\overline{p_i^n},\overline{p_i^{n-1}},\ldots,\overline{p_i^1})$$

называется преобразованием координат-импульсов, индуцированным функцией Лагранжа $L:T^nX_m\to\Re$, и преобразованием координат $\bar{x}(x)$.

Теорема 4. *Пусть $L:T^nX_m\to\Re$ – невырожденная функция Лагранжа, $S:(x)\to(\bar{x}=S(x))$, – невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей $(2n-1)$-порядка $T^{2n-1}X_m$, тогда индуцированное преобразование координат-импульсов также невырождено.*

Лемма 3. Пусть $\bar{x}^i = S^i(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, $i=\overline{1,m}$, $S:(x)\to(\bar{x})$ – невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей $(2n-1)$-порядка $T^{2n-1}X_m$, тогда

$$\frac{\partial x^{(l)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(l)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(s)}{\bar{x}}{}^{j}} = \begin{cases} C_l^s\cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right),\ C_l^s = \dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!},\ l! = \prod\limits_{k=1}^{l} k, l\ge s,\\ 0, l<s.\end{cases}$$

Определение 6. Однопараметрическая группа преобразований

$$S:\Re\times X_m\to X_m \qquad S_\tau : X_m \to X_m, \forall\tau\in\Re$$

сохраняет лагранжиан $L:T^n X_m\to\Re$, если

$$\frac{dL(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x),\dots, D_t^{(n)} S_\tau(x))}{d\tau}=0\,,\ \forall x\in X_m\,,$$

где D_t^k – оператор *k*-кратного полного дифференцирования по переменной t.

Утверждение 2. Имеет место следующая теорема [11].

Теорема 5. *Пусть* $S:\Re\times X_m\to X_m$ $S_\tau : X_m\to X_m$, $\forall\tau\in\Re$, *сохраняет лагранжиан* $L:T^n X_m\to\Re$. ***Тогда на экстремалях этого лагранжиана имеет место закон сохранения импульса первого порядка***

$$\boldsymbol{p_i^1(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})=\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}}\Big)\,,\ i=\overline{1,m}}\,,$$

вдоль поля $\boldsymbol{X^i(x)=\dfrac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}\Big|_{\tau=0}\,,\ i=\overline{1,m}}$,

$$\boldsymbol{D_t(X^i\cdot p_i^1)=D_t\Big(\sum_{i=0}^{m}X_i(x)\cdot\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}}\Big)\Big)=0}\,.$$

Отсюда, как частный случай, при n = 1 получаем результат сохранения импульса первого порядка [1, с. 294].

Теорема 6. *Если однопараметрическая группа преобразований* S_τ *сохраняет лагранжиан* L *, то имеет место закон сохранения компоненты импульса вдоль поля:*

$$\frac{d}{dt}\Big(X^i\frac{\partial L}{\partial x^i}\Big)=\frac{d}{dt}(X^i p_i)=0\,,$$

где X^i *– векторное поле, определяемое однопараметрической группой преобразований* $X(x)=\dfrac{d}{d\tau}S_\tau(x)\big|_{\tau=0}$.

Выводы.

1. Исследован закон преобразования импульсов произвольного порядка при замене координат в базе X_m расслоения $T^n X_m$, они преобразуются как тензоры типа (0,1) (ковекторы):

$$\overline{p_i^k}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})=\sum_{j=1}^{n}p_j^k(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}=p_j^k(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\,,$$

где $k=\overline{1,n},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,m}$,

что позволяет называть функции $p_i^k(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})$, $i=\overline{1,m}$, тензором импульса *k*-го порядка, $k=\overline{1,n}$, в расслоении скоростей $T^{2n-1}X_m$.

2. Доказан закон сохранения импульса первого порядка:

$$p_i^1(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-1)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right),\ i=\overline{1,m},$$

вдоль поля $X^i(x) = \frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$, $i=\overline{1,m}$,

$$D_t(X^i\cdot p_i^1) = D_t\left(\sum_{i=0}^{m} X_i(x)\cdot\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)\right) = 0,$$

где $S:\mathfrak{R}\times X_m \to X_m$ $S_\tau : X_m \to X_m$, $\forall\tau\in\mathfrak{R}$ – однопараметрическая группа преобразований, сохраняющая лагранжиан $L:T^n X_m \to \mathfrak{R}$.

Авторы благодарят профессора Евтушика Леонида Евгеньевича, специалиста по дифференциальной геометрии, за разработку постановки задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин, В.А. Современная геометрия. Методы и приложения / В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М. : УРСС, 1994.
2. Рашевский, П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов, А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд, В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
5. Годбийон, К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика / К. Годбийон. – М. : Мир, 1973.
6. Дирак, П. Обобщенная гамильтонова динамика / П. Дирак // Вариационные принципы механики : сб. – М. : Физматгиз, 1959.
7. Дирак, П. Принципы квантовой механики / П. Дирак. – М. : Мир, 1979.
8. Дирак П. Лекции по квантовой механике / П. Дирак. – М. : Мир, 1968.
9. Трофимов, В.В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В.В.Трофимов, А.Т. Фоменко. – М. : Факториал, 1995.
10. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981.
11. Пастухов, Ю.Ф. Исследование решения обратной вариационной задачи : автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук : 01.01.04 (геометрия и топология) / Ю.Ф. Пастухов. – М., 1996. – 9с.

Поступила 21.09.2015

INVARIANTS IN STRATIFICATIONS OF SPEEDS OF ANY ORDER

Y. PASTUHOV, D. PASTUHOV, O. GOLUBEVA

In work synthesis of transformation of Ostrogradsky in velocity stratification of any odd order induced by non degenerate Lagrange function. The law of transformation of impulses of any order when replacing coordinates in base of stratification is investigated. They will be transformed as tensors of type (0,1) (covector). The property which is analog of known result in classical mechanics is generalized – on extremals of this lagranzhian law of conservation of momentum of the first order takes place $p_i^1(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-1)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ *across field* $X^i(x) = \frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$, $i=\overline{1,m}$, S_τ – *one parametric group of the transformations,* $S:\mathfrak{R}\times X_m \to X_m$ $S_\tau : X_m \to X_m, \forall\tau\in\mathfrak{R}$ *conserve the lagranzhian* $L:T^n X_m \to \mathfrak{R}$*:*

$$D_t(X^i\cdot p_i^1) = D_t\left(\sum_{i=1}^{m} X_i(x)\cdot\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)\right) = 0.$$