МАТЕМАТИКА

УДК 517.926, 517.977 **DOI 10.52928/2070-1624-2024-43-2-62-66**

О СВОЙСТВЕ РАВНОМЕРНОЙ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

канд. физ.-мат. наук, доц. А. А. КОЗЛОВ
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

В данной работе введено свойство равномерной полной управляемости для линейных систем с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами (определение 3). Наличие у таких систем изучаемого свойства позволяет решать задачи как локального, так и глобального управления их асимптотическими характеристиками, т. е. управления асимптотикой решений этих динамических систем (более подробно об этом см. в монографии [3]). Последний факт подтверждает актуальность настоящих исследований.

Ключевые слова: *равномерная полная управляемость, локально интегрируемые и интегрально ограниченные коэффициенты, линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Пусть $\mathbb{R}^n$ – *n*-мерное евклидово векторное пространства с нормой $\|x\|=\sqrt{x^T x}$ (здесь символ T означает операцию транспонирования вектора или матрицы); $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – векторы (столбцы) канонического ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$; M_{mn} – пространство вещественных матриц размерности $m\times n$ со спектральной (операторной) нормой $\|A\|=\max\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$, т. е. нормой, индуцируемой на M_{mn} евклидовой нормой в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$; $M_{nn}:=M_n$; $L_p(\Delta)=L_p(\Delta,V)$ – пространство Лебега измеримых функций $G{:}\Delta\to V$, где $p=1,2$, $\Delta=[\alpha,\beta]\subset[0,+\infty)$, $V=M_{mn}$ или $V=\mathbb{R}^n$, таких, что $\int_\alpha^\beta \|G(t)\|^p\,dt<\infty$; $L_p^{loc}(\Delta,V)$ – пространство локально интегрируемых функций на $\Omega\subset[0,+\infty)$ со степенью p $(p=1,2)$.

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad u\in\mathbb{R}^m,\quad t\geqslant 0. \tag{1}$$

Предполагаем, что для коэффициентов $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ этой системы выполняются включения $A\in L_1^{loc}([0,+\infty),M_n)$ и $B\in L_1^{loc}([0,+\infty),M_{nm})$, а также условие интегральной ограниченности [1, с. 252]

$$\sup_{t\geq 0}\int_t^{t+1}\|A(\tau)\|d\tau<+\infty,\quad \sup_{t\geq 0}\int_t^{t+1}\|B(\tau)\|d\tau<+\infty.$$

В качестве управлений в системе (1) будем рассматривать измеримые по Лебегу и ограниченные функции $u:\Omega\to\mathbb{R}^m$, где $\Omega\subset[0,+\infty)$.

Обозначим через $X(t,s)\in M_n$, $t,s\geqslant 0$ матрицу Коши системы (1) с нулевым управлением. При любом фиксированном $t_0\geqslant 0$ рассмотрим следующие матрицы-функции:

$$Q(t_0,s)=(q_{ij}(t_0,s))_{i=\overline{1,n},\,j=\overline{1,m}}:=X(t_0,s)B(s);$$

$$\operatorname{sign} Q^T(t_0,s)=(\operatorname{sign} q_{ji}(t_0,s))_{j=\overline{1,m},i=\overline{1,n}},$$

где функция $\operatorname{sign}:[0,+\infty)\to\{-1,0,1\}$, стоящая в правой части последнего равенства, обозначает сигнум-функцию, т. е. функцию вида

$$\operatorname{sign} f(s)=\begin{cases}1, \text{ при всех s таких, что } f(s)>0,\\ 0, \text{ при всех s таких, что } f(s)=0,\\ -1, \text{ при всех s таких, что } f(s)<0.\end{cases} \tag{2}$$

Установим, каким функциональным классам принадлежат эти матрицы. Очевидно, что для любого $p=1,2$ и всякого фиксированного $t_0 \geqslant 0$ выполняются включение $(\operatorname{sign} Q^T(t_0,s)) \in L_p^{loc}([0,+\infty), M_{mn})$ и вытекающая из верного для всякой матрицы $A \in \mathrm{M}_{nm}$ неравенства $\operatorname{sign} A \leqslant \sqrt{n}$ оценка

$$\|\operatorname{sign} Q^T(t_0,s)\| \leqslant \sqrt{n}, \quad s \geqslant 0. \tag{3}$$

Поскольку же матрица Коши $X(t,s),\ t,s \geqslant 0,$ является абсолютно непрерывной функцией по каждой переменной вне зависимости от принадлежности матрицы A к классу функций $L_1^{loc}([0,+\infty), M_{nm})$ или $L_2^{loc}([0,+\infty), M_{nm})$, то принадлежность функции $Q(t_0,s)$ к какому-либо из этих классов зависит от соответствующей принадлежности матричной функции $B(s)$.

Предположим, что матрица B принадлежит также и пространству $L_2^{loc}([0,+\infty), M_{nm})$. Тогда корректно определена симметрическая $(n \times n)$-матрица

$$W(t_0,t_1) := \int_{t_0}^{t_1} Q(t_0,\tau) Q^T(t_0,\tau)\, d\tau,$$

носящая название *матрицы Калмана* или *матрицы управляемости* [1] системы (1) на отрезке $[t_0,t_1]$, и справедлива

Лемма. *Если существуют величины* $\sigma > 0$ *и* $\beta > 0$, *при которых для любого числа* $t_0 \geqslant 0$ *и всякого ненулевого вектора* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *выполняется соотношение*

$$\int_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0,\tau)(\operatorname{sign} Q^T(t_0,\tau))\, d\tau\, \xi \geqslant \beta \|\xi\|^2, \tag{4}$$

то найдется такое число $\alpha > 0$, *что при произвольных числе* $t_0 \geqslant 0$ *и векторе* $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *для матрицы Калмана системы (1) на отрезке* $[t_0, t_0+\sigma]$ *будет справедливо неравенство*

$$\xi^T W(t_0, t_0+\sigma)\xi = \xi^T \int_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0,\tau) Q^T(t_0,\tau)\, d\tau\, \xi \geqslant \alpha \|\xi\|^2 . \tag{5}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $t_0 \geqslant 0$. Известно, что матрица Калмана $W(t_0,t_1)$ неотрицательно определенная при всех $t_1 \geqslant t_0$, тогда для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство $\xi^T W(t_0,t_0+\sigma)\xi \geqslant 0$ и поэтому $(\xi^T W(t_0,t_0+\sigma)\xi)^{1/2}$ существует и является неотрицательным числом. Тогда, последовательно используя определение матрицы управляемости на отрезке $[t_0, t_0+\sigma]$, свойство евклидовой нормы вектора, вторую из оценок в формуле (3), кольцевое свойство спектральной нормы матриц, неравенство Коши – Буняковского, вновь кольцевое свойство нормы, неравенство между интегралом от модуля и модулем от интеграла, положительность интеграла $\int_{t_0}^{t_0+\sigma} \xi^T Q(t_0,\tau)(\operatorname{sign} Q^T(t_0,\tau))\, \xi\, d\tau$, вытекающую из формулы (4), и, наконец, саму формулу (4), при любом ненулевом векторе $\xi \in \mathbb{R}^n$ получим цепочку соотношений

$$(n\sqrt{\sigma}) \cdot (\xi^T W(t_0,t_0+\sigma)\xi)^{1/2} = (n\sqrt{\sigma}) \cdot \Big(\int_{t_0}^{t_0+\sigma} \xi^T Q(t_0,\tau) Q^T(t_0,\tau)\xi\, d\tau\Big)^{1/2} =$$

$$= \Big(\sigma \cdot \int_{t_0}^{t_0+\sigma} \|\xi^T Q(t_0,\tau)\|^2 \cdot (\sqrt{n})^2\, d\tau\Big)^{1/2} \geqslant \Big(\sigma \cdot \int_{t_0}^{t_0+\sigma} \|\xi^T Q(t_0,\tau)\|^2 \cdot \|\operatorname{sign} Q^T(t_0,\tau)\|^2\, d\tau\Big)^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant \Big(\int_{t_0}^{t_0+\sigma} 1^2\, d\tau \cdot \int_{t_0}^{t_0+\sigma} \|\xi^T Q(t_0,\tau) \operatorname{sign} Q^T(t_0,\tau)\|^2\, d\tau\Big)^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant \int_{t_0}^{t_0+\sigma} (1 \cdot \|\xi^T Q(t_0,\tau) \operatorname{sign} Q^T(t_0,\tau)\|)\, d\tau = \int_{t_0}^{t_0+\sigma} (1 \cdot \|\xi^T Q(t_0,\tau) \operatorname{sign} Q^T(t_0,\tau)\|)\, d\tau \cdot \|\xi\| / \|\xi\| \geqslant$$

$$\geqslant\int_{t_0}^{t_0+\sigma}|\xi^T Q(t_0,\tau)(\operatorname{sign} Q^T(t_0,\tau))\xi|\,d\tau/\|\xi\|\geqslant\Big|\int_{t_0}^{t_0+\sigma}\xi^T Q(t_0,\tau)(\operatorname{sign} Q^T(t_0,\tau))\xi d\tau\Big|/\|\xi\|=$$

$$=\int_{t_0}^{t_0+\sigma}\xi^T Q(t_0,\tau)(\operatorname{sign} Q^T(t_0,\tau))\xi d\tau/\|\xi\|\geqslant\beta\|\xi\|^2/\|\xi\|=\beta\|\xi\|,$$

откуда следует неравенство

$$(n\sqrt{\sigma})\cdot\Big(\int_{t_0}^{t_0+\sigma}\xi^T Q(t_0,\tau)Q^T(t_0,\tau)\xi d\tau\Big)^{1/2}\geqslant\beta\|\xi\|,$$

и поэтому

$$\int_{t_0}^{t_0+\sigma}\xi^T Q(t_0,\tau)Q^T(t_0,\tau)\xi d\tau\geqslant\frac{\beta^2}{n^2\sigma}\cdot\|\xi\|^2 .$$

Полагая $\alpha:=\beta^2/(n^2\sigma)$, получим требуемое соотношение. Лемма доказана.

Определение 1 [1, см. также 3; 4]. Система (1) называется *равномерно вполне управляемой (по Калману)*, если найдутся такие числа $\sigma>0$ и $\alpha>0$, что при всяких $t_0\geqslant 0$ и $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ для матрицы Калмана $W(t_0,t_0+\sigma)$ системы (1) выполнено неравенство

$$\xi^T W(t_0,t_0+\sigma)\xi\geqslant\alpha\|\xi\|^2 .$$

Из этого определения 1 и леммы очевидным образом следует

Теорема 1. *Пусть $B\in L_2^{loc}([0,+\infty),M_{nm})$. Если существуют такие величины $\sigma>0$ и $\beta>0$, что для произвольных числа $t_0\geqslant 0$ и ненулевого вектора $\xi\in\mathbb{R}^n$ выполняется соотношение (4), то система (1) равномерно вполне управляема (по Калману).*

Поскольку свойство равномерной полной управляемости (по Калману) может быть выполнено лишь для систем (1), коэффициенты которых удовлетворяют (см. [4]) одному из следующих условий:

– либо

$$\sup_{t\geqslant 0}\int_t^{t+1}\|A(\tau)\|d\tau\leqslant a_1<\infty,\quad \sup_{t\geqslant 0}\|B(t)\|\leqslant b_1<\infty,$$

– либо

$$\sup_{t\geqslant 0}\int_t^{t+1}\|A(\tau)\|d\tau\leqslant a_1<\infty,\quad \sup_{t\geqslant 0}\int_t^{t+1}\|B(\tau)\|^2 d\tau\leqslant b_2<\infty,$$

то возникает вопрос, является ли соотношение (4) критерием или хотя бы достаточным условием равномерной полной управляемости для систем, коэффициенты которых лишь локально интегрируемы и интегрально ограничены. Оказывается, в таком случае справедлива теорема, аналогичная теореме 1. Однако в этом случае необходимо пользоваться иным определением равномерной полной управляемости, которое справедливо и для таких классов систем.

Определение 2 [2, см. также 3; 4]. Система (1) называется *равномерно вполне управляемой (по Тонкову)*, если существуют такие числа $\sigma>0$ и $\gamma>0$, что при любых $t_0\geqslant 0$ и $x_0\in\mathbb{R}^n$ найдется измеримое и ограниченное управление $u:[t_0,t_0+\sigma]\to\mathbb{R}^m$, при всех $t\in[t_0,t_0+\sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\|u(t)\|\leqslant\gamma\|x_0\|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0)=x_0$ системы (1) в ноль на этом отрезке.

Для систем (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами легко доказать следующий критерий равномерной полной управляемости.

Теорема 2. *Система (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда существуют такие величины $\sigma>0$ и $\alpha>0$, что при всяком числе $t_0\geqslant 0$ и любом векторе $\xi\in\mathbb{R}^n$ выполняется неравенство $\int_t^{t+\sigma}\xi^T Q(t_0,\tau)\operatorname{sign}(Q^T(t_0,\tau)\xi)d\tau\geqslant\alpha\|\xi\|$.*

Этот критерий позволяет ввести следующее определение равномерной полной управляемости системы (1), справедливое и для систем с локально интегрируемыми коэффициентами.

Определение 3. Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если найдутся такие величины $\sigma > 0$ и $\alpha > 0$, при которых для произвольного числа $t_0 \geqslant 0$ и любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполняется неравенство

$$\int_{t_0}^{t_0+\sigma} \xi^T Q(t_0,\tau)\operatorname{sign}(Q^T(t_0,\tau)\xi)\,d\tau \geqslant \alpha \|\xi\|.$$

Замечание 1. Установим связь между введенным определением и определением 1 равномерной полной управляемости (по Калману). Для этого рассмотрим систему (1), у которой $A(t) \equiv 0$ и $B(t) \equiv E$ для всех $t \geqslant 0$. Тогда для матрицы $Q(t,s) = X(t,s)B(s)$ при любых $t,s \geqslant 0$ будет выполняться тождество $Q(t,s) \equiv E$. Очевидно, что система (1) равномерно вполне управляема как по определению 2, так и по определению 3. При этом для рассматриваемой равномерно вполне управляемой системы условия Калмана будут выглядеть так:

$$\alpha_1 \cdot \|\xi\|^2 \leqslant \xi^T W(t_0, t_0+\sigma)\xi = \xi^T \int_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0,\tau)Q^T(t_0,\tau)\,d\tau\,\xi =$$

$$= \xi^T \int_{t_0}^{t_0+\sigma} E \cdot E^T\,d\tau\,\xi = \int_{t_0}^{t_0+\sigma} \|\xi\|^2\,d\tau$$

при некотором $\alpha_1 > 0$ и всяком $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Заметим, что в данном условии под знаком интеграла (а также в левой части условия) стоит квадрат евклидовой нормы вектора ξ.

В случае же определения 3 условия равномерной полной управляемости рассматриваемой системы окажутся несколько иными:

$$\alpha_2 \cdot \|\xi\| \leqslant \int_t^{t+\sigma} \xi^T Q(t_0,\tau)\operatorname{sign}(Q^T(t_0,\tau)\xi)\,d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+\sigma} \xi^T \cdot E \cdot sign(E \cdot \xi)\,d\tau = \int_{t_0}^{t_0+\sigma} \xi^T \cdot \operatorname{sign}\xi\,d\tau = \int_{t_0}^{t_0+\sigma} \|\xi\|\,d\tau.$$

при некотором $\alpha_2 > 0$ и всяком $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Однако, как легко заметить, в данном случае под знаком интеграла (как и в левой части этих условий) уже стоит не квадрат евклидовой нормы вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$, а сама норма этого вектора, причем его l_1-норма.

Аналогичным образом можно изучить условия равномерной полной управляемости для системы (1) при $n = m = 1$, у которой $A(t) \equiv 0$ и $B(t) \equiv b(t) \in \mathbb{R}$ для всех $t \geqslant 0$. Тогда для рассматриваемой системы такими условиями, вытекающими из определений 2 и 3, будут соответственно

$$\int_{t_0}^{t_0+\sigma} (\xi \cdot b(\tau))^2\,d\tau \geqslant \alpha_3 \cdot \xi^2, \quad \int_{t_0}^{t_0+\sigma} |\xi \cdot b(\tau)|\,d\tau \geqslant \alpha_4 \cdot |\xi|$$

при некоторых $\alpha_i > 0$, $i = 3,4$, и всяком $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. При этом очевидно, что в случае лишь локальной интегрируемости и интегральной ограниченности функции $b(t)$, $t \geqslant 0$, можно пользоваться лишь вторым условием. Так, например, пользуясь вторым условием, можно показать, что уравнение

$$\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{t}}u, \quad t \geqslant 0,$$

вполне управляемо на отрезке $[0,1]$ (но не равномерно!). Очевидно, что определение Калмана для данного уравнения применить нельзя. Воспользуемся в этом случае определением 3. Тогда при любом $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ для системы (1) имеем равенство $\int_0^1 |\xi \cdot \frac{1}{\sqrt{\tau}}|\,d\tau = |\xi|$, означающее, что рассматриваемое уравнение управляемо на интервале $[0,1]$. Действительно, зафиксировав произвольное $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и взяв в качестве управления u функцию вида

$$u(t) = \begin{cases} -x_0 \cdot \operatorname{sign}(1/\sqrt{t}), & \text{где} \quad t \in (0,1], \\ -x_0, & \text{где} \quad t = 0, \end{cases}$$

которая, очевидно, при всех $t \in [0,1]$ удовлетворяет оценке $|u(t)| \leqslant \gamma |x_0|$ при $\gamma = 1$, для решения $x = x(t)$, $t \in [0,1]$, этого уравнения с начальным условием $x(0) = x_0$ и выбранным управлением $u = u(t)$ в точке $t = 1$ получим равенства, устанавливающие полную управляемость на отрезке $[0,1]$ рассматриваемого уравнения

$$x(1) = x(0) + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot u(\tau) d\tau = x_0 - x_0 \cdot \int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right| d\tau = x_0 - x_0 \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\tau}} d\tau = x_0 - x_0 = 0.$$

Замечание 2. Легко доказать, что введенное в данной работе определение 3 равномерной полной управляемости для линейных систем (1) с локально интегрируемыми коэффициентами эквивалентно рассмотренному в статье [4] В. А. Зайцевым определению 4 (последнее свойство В. А. Зайцев называет *Н-свойством* системы (1)).

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция – 2025», подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.2.01. (№ регистрации 20211316 от 15.05.2021 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kalman R. E. Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. – 1960. – Vol. 5, iss. 1. – P. 102–119.
2. Тонков Е. Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 10. – С. 1804–1813.
3. Макаров Е. К., Попова С. Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. – Минск: Беларус. навука, 2012. – 408 с.
4. Зайцев В. А. Критерии равномерной управляемости линейной системы // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2015. – Т. 25, вып. 2. – С. 157–179.

REFERENCES

1. Kalman, R. E. (1960). Contribution to the theory of optimal control. *Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana*, *5*(1), 102–119.
2. Tonkov, E. L. (1979). Kriterij ravnomernoj upravljaemosti i stabilizacija linejnoj rekurrentnoj sistemy. *Differencial'nye uravnenija*, *15*(10), 1804–1813. (In Russ.).
3. Makarov, E. K., & Popova, S. N. (2012). *Upravljaemost' asimptoticheskih invariantov nestacionarnyh linejnyh sistem.* Minsk: Belaruskaja navuka. (In Russ.).
4. Zajcev, V. A. (2015). Kriterii ravnomernoi upravlyaemosti lineinoi sistemy [Criteria for uniform controllability of a linear system]. Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mehanika. *Komp'juternye nauki [The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science]*, *25*(2), 157–179. (In Russ., abstr. in Engl.).

Поступила 11.11.2024

ON THE PROPERTY OF UNIFORM COMPLETE CONTROLLABILITY FOR A LINEAR SYSTEM WITH LOCAL INTEGRABLE COEFFICIENTS

A. KOZLOV
(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

In this paper, the property of uniform complete controllability for linear systems with locally integrable and integral coefficients is introduced (definition 3). The presence of the studied property in such systems allows solving problems of both local and global control of their asymptotic characteristics, i. e. control of the asymptotics of solutions of these dynamic systems (for more details, see the monograph [3]). The latter fact confirms the relevance of the present research.

Keywords: *uniform complete controllability, local integrable and integrally bounded coefficients, linear system of ordinary differential equations.*