УДК 517.983+517.444 **DOI 10.52928/2070-1624-2024-43-2-67-71**

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ С ФУНКЦИЕЙ МИТТАГ – ЛЕФФЛЕРА В ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ПО ЛЕБЕГУ ФУНКЦИЙ

д-р физ.-мат. наук, доц. С. М. СИТНИК
(Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Россия);
канд. физ.-мат. наук, доц. О. В. СКОРОМНИК, А. А. КУРОХТИНА
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

Рассматривается одно интегральное преобразование со специальной функцией Миттаг – Леффлера в ядре. Применяя технику преобразования Меллина, показываем, что оно является частным случаем одномерного Н-*преобразования. На основании теории* Н-*преобразования в работе исследованы свойства рассматриваемого интегрального преобразования в пространствах интегрируемых функций с весом на полуоси.*

Ключевые слова: *интегральное* Н-*преобразование, функция Миттаг – Леффлера, Н-функция Фокса, преобразование Меллина, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.*

Введение. Рассматривается интегральное преобразование, содержащие функцию Миттаг – Леффлера $E_\alpha(z)$ в ядре:

$$\left(\mathrm{H}_{1,1;1,2} f\right)(x)=\int_0^\infty E_\alpha(-xt)\,f(t)\,dt \quad (x>0). \tag{1}$$

Функцией Миттаг – Леффлера называется целая функция, определяемая рядом (см., например, [1, формулы 1.90 и 1.91; 2; 3])

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad \alpha>0, \tag{2}$$

где гамма-функция $\Gamma(z)$ представляется интегралом Эйлера второго рода (см., например, [1, формула (1.54)])

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty x^{z-1}e^{-z}dx, \quad \mathrm{Re}(z)>0.$$

В настоящей работе преобразование (1) изучено в весовых пространствах $L_{\nu,r}$ измеримых по Лебегу функций *f* на действительной полуоси $R_+=(0,\infty)$, для которых норма определяется следующим образом:

$$\|f\|_{\nu,r}<\infty, \text{ где } \|f\|_{\nu,r}=\left(\int_0^\infty \left|t^\nu f(t)\right|^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} \ (1\le r<\infty, \nu\in R). \tag{3}$$

$$\|f\|_{\nu,\infty}=ess\sup_{t>0}\left[t^\nu\,|f(t)|\right] \ (r=\infty).$$

Получены условия ограниченности и взаимной однозначности оператора преобразования (1) из одних пространств вида (3) в другие, выведены различные интегральные формы представления, получен аналог формулы интегрирования по частям, дано описание образа для рассматриваемого преобразования.

Предварительные сведения. *Н*-функцией Фокса порядка (m,n,p,q), где $0\le m\le q$, $0\le n\le p$, называется функция, определяемая интегралом Меллина – Барнса

$$H_{p,q}^{m,n}[z]\equiv H_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}(a_i,\ \alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\ \beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s)z^{-s}ds,\ z\ne 0, \tag{4}$$

где

$$\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) \equiv \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}\left[\begin{matrix}(a_i,\ \alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\ \beta_j)_{1,q}\end{matrix}\middle| s\right] = \frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+\beta_j s)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i-\alpha_i s)}{\prod\limits_{i=n+1}^{p}\Gamma(a_i+\alpha_i s)\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-\beta_j s)}. \tag{5}$$

Здесь L – специально выбранный бесконечный контур, а пустые произведения, если таковые имеются, считаются равными единице. Более подробно с теорией H-функции (4) можно ознакомиться в [4, гл. 1–2].

Н-*преобразованием* называют интегральное преобразование [4]

$$(\mathrm{H}\, f)(x) = \int\limits_0^\infty H_{p,q}^{m,n}\left[xt\middle|\begin{matrix}(a_i,\ \alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\ \beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right] f(t)dt, \tag{6}$$

содержащее H-функцию (4) в ядре.

Преобразование Меллина $\mathfrak{M}f$ определяется равенством [5]

$$(\mathfrak{M}f)(s) = f^*(s) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)t^{s-1}dt. \tag{7}$$

Формула преобразования Меллина от функции Миттаг – Леффлера [6, формула (1.8.15)]:

$$\mathfrak{M}(E_\alpha(-t))(s) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-\alpha s)}. \tag{8}$$

Известно, что формула преобразования Меллина от Н-преобразования (6) имеет вид [4, (3.1.5)]

$$(\mathfrak{M}\,\mathrm{H}\, f)(s) = \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}\left[\begin{matrix}(a_i,\ \alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\ \beta_j)_{1,q}\end{matrix}\middle| s\right](\mathfrak{M}f)(1-s), \tag{9}$$

где $\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s)$ определяется формулой (5).

Нам понадобятся следующие числа, определяемые через параметры H-функции (4) [4; 7]:

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} -\min\limits_{1\le j\le m}\left[\dfrac{\mathrm{Re}(b_j)}{\beta_j}\right], & m>0,\\ -\infty, & m=0;\end{cases} \qquad \bar{\beta} = \begin{cases} \min\limits_{1\le i\le n}\left[\dfrac{1-\mathrm{Re}(a_i)}{\alpha_i}\right], & n>0,\\ \infty, & n=0,\end{cases} \tag{10}$$

$$a_1^* = \sum_{j=1}^{m}\beta_j - \sum_{i=n+1}^{p}\alpha_i, \quad a_2^* = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i - \sum_{j=m+1}^{q}\beta_j\ , \tag{11}$$

$$a^* = a_1^* + a_2^* = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i - \sum_{i=n+1}^{p}\alpha_i + \sum_{j=1}^{m}\beta_j - \sum_{j=m+1}^{q}\beta_j, \quad \Delta = a_1^* - a_2^* = \sum_{j=1}^{q}\beta_j - \sum_{i=1}^{p}\alpha_i, \tag{12}$$

$$\mu = \sum_{j=1}^{q}b_j - \sum_{i=1}^{p}a_i + \frac{p-q}{2}. \tag{13}$$

Исключительным множеством $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ функции $\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s)$, определенной в (5), называется множество вещественных чисел ν таких, что $\bar{\alpha} < 1-\nu < \bar{\beta}$ и $\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s)$ имеет нули на прямой $\mathrm{Re}(s) = 1-\nu$.

Дробные интегралы типа Эрдейи – Кобера $\mathrm{I}^{\lambda}_{0+;\sigma,\eta} f$ и $\mathrm{I}^{\lambda}_{-;\sigma,\eta} f$ порядка $\lambda \in \mathrm{C}$, $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, определяются для $\sigma > 0$, $\eta \in \mathrm{C}$ при $x > 0$ равенствами [1, (18.1), (18.3)]

$$\mathrm{I}^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta} f(x) = \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(x^{\sigma} - t^{\sigma}\right)^{\alpha-1} t^{\sigma\eta+\sigma-1} f(t)dt,$$

$$\mathrm{I}^{\alpha}_{-;\sigma,\eta} f(x) = \frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \left(t^{\sigma} - x^{\sigma}\right)^{\alpha-1} t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(t)dt.$$

Обобщенное преобразование Лапласа определяется формулой [4, формула (3.3.3)]

$$\left(\mathrm{L}_{k,\lambda} f\right)(x) = \int_0^{\infty} (xt)^{-\lambda} e^{-|k|(xt)^{1/k}} f(t)dt, \quad k \in \mathrm{R} \setminus \{0\}, \lambda \in \mathrm{C}, x \in \mathrm{R}_+.$$

Свойства интегрального преобразования с функцией Миттаг – Леффлера. Найдем преобразование Меллина (7) от преобразования (1).

Переставляем порядок интегрирования в повторном интеграле, используем формулы (7) и (8), с учетом формулы (5) окончательно получаем

$$\begin{aligned} \left(\mathfrak{M}\mathrm{H}_{1,1;1,2} f\right)(s) &= \int_0^{\infty} x^{s-1}dx \int_0^{\infty} E_{\alpha}(-xt) f(t)dt = \int_0^{\infty} t^{1-s-1} f(t)dt \int_0^{\infty} (xt)^{s-1} E_{\alpha}(-xt)d(xt) = \\ &= \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-\alpha s)} (\mathfrak{M} f)(s) = \mathcal{H}^{1,1}_{1,2}\left[\begin{matrix} (0,\ 1) \\ (0,\ 1)\,(0,\alpha) \end{matrix}\middle| s\right] (\mathfrak{M} f)(s). \end{aligned} \tag{14}$$

Из (14) следует представление преобразования (1) в виде H-преобразования вида (6):

$$(\mathrm{H}f)(x) = \left(\mathrm{H}_{1,1;1,2} f\right)(x) = \int_0^{\infty} H^{1,1}_{1,2}\left[xt \middle| \begin{matrix} (0,\ 1) \\ (0,\ 1)\,(0,\alpha) \end{matrix}\right] f(t)dt \quad (x > 0). \tag{15}$$

Параметры (10) – (13) для преобразования (15) соответственно равны:

$$\overline{\alpha} = 0,\ \overline{\beta} = 1;\ a_1^* = 1,\ a_2^* = 1-\alpha,\ a^* = 2-\alpha,\ \Delta = \alpha;\ \mu = -\frac{1}{2};\ \alpha_0 = 1 + \max\left[-1, -\frac{1}{\alpha}\right],\ \beta_0 = 1. \tag{16}$$

Введем обозначение. Пусть $[X, Y]$ означает множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y.

Учитывая, что (1) и (15) являются частным случаем преобразования (6) с параметрами (16), на основании утверждений, представленных в [4, теорема 3.6], получаем следующие свойства преобразования (1) и (15) в пространствах $\mathfrak{L}_{\nu,2}$. Отметим, что все результаты, полученные для преобразования (1) и (15), получены для значений $0 < \alpha < 1$ в (2).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$0 < 1-\nu < 1, \quad a^* = 2-\alpha > 0. \tag{17}$$

Верны следующие утверждения:

A. Существует инъективное преобразование $\mathrm{H}_{1,1;1,2} \in [\mathfrak{L}_{\nu,2}, \mathfrak{L}_{1-\nu,2}]$ *такое, что равенство (14) выполняется для* $f \in \mathfrak{L}_{\nu,2}$ *и* $\mathrm{Re}(s) = 1-\nu$.

Если $a^* = 0$, $\alpha(1-\nu) - \frac{1}{2} = 0$ *и* $\nu \notin \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$, *тогда оператор* $\mathrm{H}_{1,1;1,2}$ *биективно отображает пространство* $\mathfrak{L}_{\nu,2}$ *на* $\mathfrak{L}_{1-\nu,2}$.

B. Если $f \in \mathfrak{L}_{\nu,2}$ *и* $g \in \mathfrak{L}_{\nu,2}$, *тогда справедлива формула*

$$\int_0^{\infty} f(x)\left(\mathrm{H}_{1,1;1,2} g\right)(x)dx = \int_0^{\infty} \left(\mathrm{H}_{1,1;1,2} f\right)(x) g(x)dx. \tag{18}$$

C. Пусть $\lambda \in \mathrm{C}$, $h > 0$ *и* $f \in \mathfrak{L}_{\nu,\,2}$. *Если* $\mathrm{Re}(\lambda) > (1-\nu)h - 1$, *тогда преобразование вида (15)* $\mathrm{H}_{1,1;1,2}\, f$ *может быть представлено как*

$$(\mathrm{H}_{1,1;1,2}\, f)(x) = hx^{1-(\lambda+1)/h} \frac{d}{dx} x^{(\lambda+1)/h} \int_0^\infty H_{2,\,3}^{1,\,2}\left[xt \middle| \begin{matrix} (-\lambda,\ h), \quad (0,\ 1) \\ (0,\ 1), (0, \alpha),\ (-\lambda-1,\ h) \end{matrix} \right] f(t)dt, \tag{19}$$

а при $\mathrm{Re}(\lambda) > (1-\nu)h - 1$ *дается формулой*

$$(\mathrm{H}_{1,1;1,2}\, f)(x) = -hx^{1-(\lambda+1)/h} \frac{d}{dx} x^{(\lambda+1)/h} \int_0^\infty H_{2,\,3}^{2,\,1}\left[\frac{x}{t} \middle| \begin{matrix} (0,\ 1), \quad (-\lambda, h) \\ (-\lambda-1,\ h), (0,\ 1), (0, \alpha) \end{matrix} \right] f(t)dt. \tag{20}$$

D. Преобразование $\mathrm{H}_{1,1;1,2}\, f$ *не зависит от* ν *в том смысле, что если* ν *и* $\tilde{\nu}$ *удовлетворяют условиям (17) и если преобразования* $\mathrm{H}_{1,1;1,2}\, f$ *и* $\tilde{\mathrm{H}}_{1,1;1,2}\, f$ *определены соответственно в пространствах* $\mathfrak{L}_{\nu,\,2}$ *и* $\mathfrak{L}_{\nu,\,2}$ *равенством (14), то равенство* $\mathrm{H}_{1,1;1,2}\, f = \tilde{\mathrm{H}}_{1,1;1,2}\, f$ *выполняется для функций* $f \in \mathfrak{L}_{\nu,\,2} \cap \mathfrak{L}_{\nu,\,2}$.

Функциональные свойства преобразования (1) и (15) в пространствах $\mathfrak{L}_{\nu,\,r}$ представлены в следующих двух теоремах, которые получены из утверждений [4, теоремы 4.5 и 4.6].

Теорема 2. *Пусть*

$$a^* = 2 - \alpha > 0,\ 0 < 1-\nu < 1 \text{ и } 1 \le r \le s \le \infty.$$

Верны следующие утверждения:

A. Преобразование $\mathrm{H}_{1,1;1,2}\, f$, *определенное на* $\mathfrak{L}_{\nu,\,2}$, *может быть продолжено на* $\mathfrak{L}_{\nu,\,r}$ *до элемента* $\mathrm{H}_{1,1;1,2} \in [\mathfrak{L}_{\nu,r}; \mathfrak{L}_{1-\nu,\,s}]$. *Если* $1 \le r \le 2$, *то преобразование* $\mathrm{H}_{1,1;1,2}\, f$ *взаимно однозначно отображает пространство* $\mathfrak{L}_{\nu,\,2}$ *на* $\mathfrak{L}_{1-\nu,\,s}$.

Теорема 3. *Пусть* $a_1^* = 1$, $a_2^* = 1-\alpha > 0$, $0 < 1-\nu < 1$, $\omega = \alpha - \dfrac{1}{2}$ *и* $1 < r < \infty$.

A. Если $\nu \notin \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ *или* $1 \le r \le 2$, *то преобразование* $\mathrm{H}_{1,1;1,2}\, f$ *взаимно однозначно на* $\mathfrak{L}_{\nu,\,r}$ *и его образ описывается равенством*

$$\mathrm{H}_{1,1;1,2}\,(\mathfrak{L}_{\nu,\,r}) = \left(\mathrm{L}_{1,0}\,\mathrm{L}_{1-\alpha,-\omega/(1-\alpha)}\right)(\mathfrak{L}_{1-\nu,\,r}). \tag{21}$$

Когда $\nu \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$, *то* $\mathrm{H}_{1,1;1,2}\,(\mathfrak{L}_{\nu,\,r})$ *является подмножеством множества в правой части (21).*

B. Если $\omega = \alpha - \dfrac{1}{2} < 0$ *и* $\nu \notin \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$, *тогда*

$$\mathrm{H}_{1,1;1,2}\,(\mathfrak{L}_{\nu,\,r}) = \left(\mathrm{I}_{-;\,1,\,0}^{-\omega}\,\mathrm{L}_{1,0}\,\mathrm{L}_{1-\alpha,0}\right)(\mathfrak{L}_{1-\nu,\,r}). \tag{22}$$

Когда $\nu \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$, *то* $\mathrm{H}_{1,1;1,2}\,(\mathfrak{L}_{\nu,\,r})$ *является подмножеством множества в правой части (22).*

Заключение. В работе получены условия ограниченности и взаимной однозначности оператора преобразования (1), (15) из одних пространств интегрируемых функций в другие, получен аналог формулы интегрирования по частям. Для такого преобразования установлены различные интегральные представления.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция – 2025», подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.2.01. (№ регистрации 20211316 от 15.05.2021 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Paneva-Konovska J. From Bessel to multi-index Mittag-Leffler functions: enumerable families, series in them and convergence. – World Scientific, 2017. – 229 p.

3. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications / R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi et al. – 2th ed. – Springer, 2020. – 548 p. – DOI: 10.1007/978-3-662-61550-8.
4. Kilbas A. A., Saigo M. H. H-Transforms. Theory and Applications. – London [etc.]: Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
5. Rooney P. G. On integral transformations with G-function kernels // Proc. Royal Soc. Edinburgh. Sect. A. – 1983. – Vol. 93. – P. 265–297.
6. Theory and applications of fractional differential equations // North–Holland Mathematics Studies; ed.: A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. – Amsterdam: Elsevier.xv, 2006. – Vol. 204. – 523 p.
7. Скоромник О. В. Интегральные преобразования с функциями Гаусса и Лежандра в ядрах и интегральные уравнения первого рода. – Новополоцк: ПГУ, 2019. – 180 с.

REFERENCES

1. Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1987). *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]*. Minsk: Nauka i tekhnika. (In Russ.).
2. Paneva-Konovska, J. (2017). *From Bessel to multi-index Mittag-Leffler functions: enumerable families, series in them and convergence*. World Scientific.
3. Gorenflo, R., Kilbas, A. A, Mainardi, F., & Rogosin, S. (2020). *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications.* Springer. DOI: 10.1007/978-3-662-61550-8.
4. Kilbas, A. A., & Saigo, M. H. (2004). *H-Transforms. Theory and Applications.* London [etc.]: Chapman and Hall. CRC Press.
5. Rooney, P. G. (1983). On integral transformations with G-function kernels. *Proc. Royal Soc. Edinburgh. Sect. A.*, *93*, 265–297.
6. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (Ed.). (2006). *Theory and applications of fractional differential equations. North–Holland Mathematics Studies* (Vol. 204). Amsterdam: Elsevier.xv.
7. Skoromnik, O. V. (2019). *Integral'nye preobrazovaniya s funktsiyami Gaussa i Lezhandra v yadrakh i integral'nye uravneniya pervogo roda*. – Novopolock: PGU. (In Russ.).

Поступила 11.11.2024

INTEGRAL TRANSFORMATION WITH THE MITTAG–LEFFLER FUNCTION IN SPACES OF LEBESGUE-MEASURABLE FUNCTIONS

S. SITNIK
(The National Research University "Belgorod State University" (BelSU), Russia);

O. SKOROMNIK, A. KUROKHTINA
(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

One integral transformation with a special Mittag – Leffler function in the kernel is considered. Using the Mellin transformation technique, we show that it is a special case of the one-dimensional H-*transformation. Based on the theory of the* H-*transformation, the properties of the considered integral transformation in the spaces of integrable functions with a weight on the semiaxis are investigated.*

Keywords: *integral* H-*transformation, Mittag – Leffler function, Fox H-function, Mellin transform, space of integrable functions, fractional integrals and derivatives.*