

УДК 658.5:519.8

DOI 10.52928/2070-1624-2025-44-1-32-38

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОМЫШЛЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

канд. техн. наук, доц. В. А. ШИРОЧЕНКО, Н. П. СКРЫЛЕВ, В. А. НЕДЮХИН
(Белорусско-Российский университет, Могилев)

Проведен анализ постановки и решения задачи повышения эффективности производственного процесса многономенклатурного серийного производства машиностроительного предприятия. Рассмотрены особенности разработки математической модели на основе методов линейного программирования. Разработаны алгоритмы построения двойственной задачи для анализа дефицитности ресурсов на основе применения механизмов агрегирования и приведения. Показаны результаты исследований, проведенные на тестовом примере, который, несмотря на малые размерности, демонстрирует все особенности решения поставленной задачи. Результаты исследований воплощены в разработанной на кафедре АСУ Белорусско-Российского университета программной системе, которая проходит стадию испытаний, после чего будет готова к использованию на промышленном предприятии.

Ключевые слова: многономенклатурное производство, серийное производство, производственная мощность, задача линейного программирования, двойственная задача, анализ задачи линейного программирования, эффективность производства, программная система.

Введение. В современных экономических условиях для выживания и процветания предприятий очень важно обеспечивать и поддерживать их эффективность. Одним из путей повышения эффективности предприятий является оптимизация промышленного производства. Данная процедура является не разовым мероприятием, а представляет собой непрерывный процесс улучшения, направленный на повышение объемов производства, снижение затрат, улучшение качества, обеспечение безопасности и экологической устойчивости, а также укрепление конкурентоспособности.

Одним из важнейших условий высокой эффективности многономенклатурного серийного производства является обеспечение полной загрузки имеющегося оборудования, которая позволяет осуществлять выпуск максимального объема продукции при максимальном использовании имеющихся производственных мощностей [1].

Такая задача может быть поставлена и решена на основе применения методов линейного программирования (ЛП) [2; 3], когда в качестве целевой функции используется зависимость объемов производства от загрузки оборудования при ограничениях по фондам времени работы имеющегося на предприятии оборудования.

Кроме значений управляемых параметров в качестве решения задачи ЛП исследователя интересует анализ рассматриваемой ситуации, который может быть выполнен путем решения двойственной задачи [2]. Получаемые значения двойственной задачи представляют собой частные производные целевой функции по ресурсам прямой задачи и позволяют оценить степень влияния изменения их величин на эффективность производственного процесса.

Основная часть. Известно, что условием правильности построения двойственной задачи является равенство значений целевой функции прямой и двойственной задач [2]. Точка решения задачи ЛП расположена на пересечении дефицитных ресурсов. Однако если прямая задача является целочисленной, т. е. на управляемые параметры накладываются условия целочисленности, то точка решения может находиться внутри области допустимых решений и не будет соответствовать значению целевой функции двойственной задачи.

Между тем целочисленность задачи линейного программирования несколько не искажает положение плоскости (или гиперплоскости) целевой функции, а лишь делает ее состоящей из отдельных точек. Отсюда следует, что для проверки правильности построения двойственной задачи к целочисленной задаче ЛП необходимо снять ограничения целочисленности, решить ее и сравнить значения целевых функций. Если они совпадут, то двойственная задача построена правильно и ее решение соответствует искомым значениям.

Таким образом, можно однозначно утверждать, что целочисленность задачи линейного программирования несколько не усложняют процедуру ее анализа. В том случае, когда прямая задача построена как параметрическая, т. е. когда ресурсы или коэффициенты целевой функции ставятся в линейную зависимость от некоего параметра из внешней среды, возникают определенные сложности при построении двойственной задачи. Разберем их подробно.

При решении параметрической задачи, кроме того, что необходимо найти значения управляемых параметров, обеспечивающих экстремум целевой функции, дополнительно требуется найти значение внешнего параметра, при котором найденный экстремум имеет наибольшее или наименьшее значение. Достижение

данной цели требует проведения процедуры сканирования всех возможных решений в зависимости от значения внешнего параметра.

В том случае, когда внешний параметр влияет на величины ресурсов, его можно включить в список искомых параметров и решить задачу оптимизации без перебора его значений. Если же внешний параметр влияет на коэффициенты целевой функции или на значения коэффициентов в ограничениях, то включение его в список управляемых параметров делает задачу нелинейной. Это обстоятельство требует применения других методов решения и лишает нас возможности провести анализ задачи на основе двойственности.

В качестве примера рассмотрим производство двух достаточно простых изделий, технология изготовления которых представлена на рисунке 1.

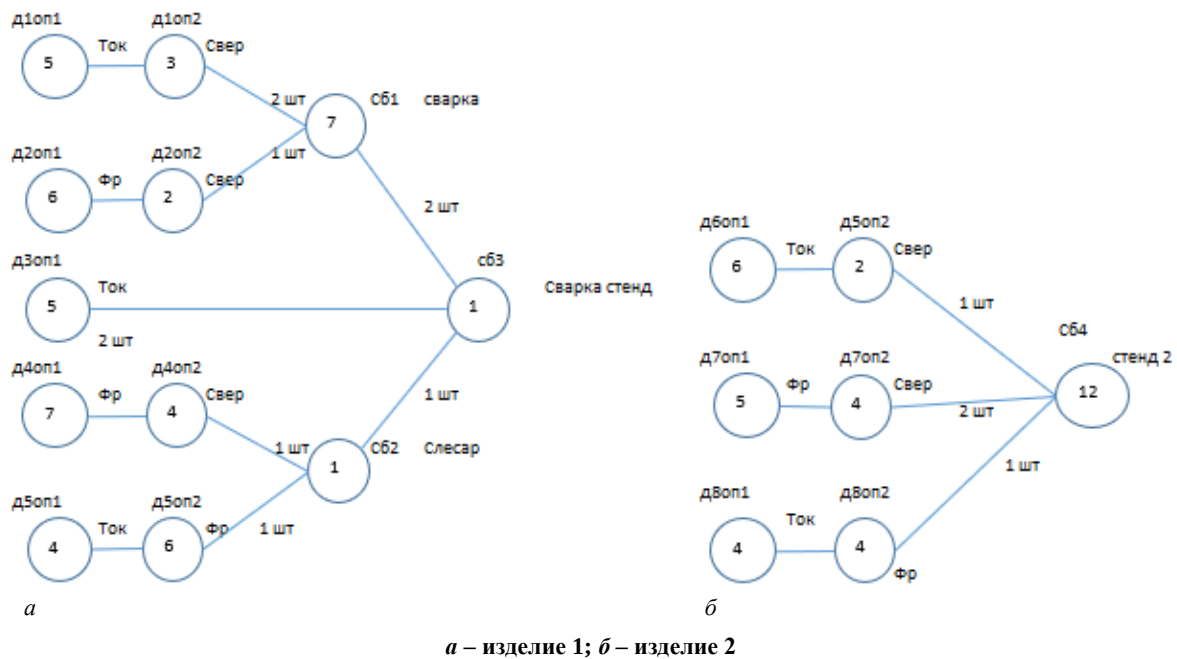


Рисунок 1. – Схема технологических маршрутов производства двух изделий

Первое изделие (см. рисунок 1, а) состоит из двух сборочных единиц Сб1 и Сб2 и одной детали Д3. Каждая сборочная единица состоит из двух деталей: первая – из деталей Д1 и Д2, вторая – из деталей Д4 и Д5. Технологические операции, выполняемые при изготовлении этих деталей, изображены кружками, внутри которых цифрой отмечена их длительность, а рядом приведены их обозначения: Ток – токарная операция, Фр – фрезерная, Свер – сверлильная, Слесар – сборочно-слесарная, Сварка – сборочно-сварочная, Сварка стенд – сборка конечного изделия на специальном стенде. Иерархию подчиненности конструктивных элементов показывают соединительные линии, рядом с которыми отображено количество составляющих. Второе изделие состоит из трех деталей: Д6, Д7 и Д8, сборка которых в готовое изделие осуществляется на стенде 2.

Необходимо распределить выполняемые операции по оборудованию таким образом, чтобы обеспечить максимальный суммарный выпуск продукции. Математически такая постановка задачи может быть записана следующим образом:

$$\sum_{j=1}^m t_{ij} x_{ij} \leq \Phi_j \text{ при } i = \overline{1, n}; \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq N_k n_k \text{ при } i = \overline{1, n}; \quad (2)$$

$$x_{ij} - \text{целые}; \quad (3)$$

$$F(x_{ij}) = \sum_{k=1}^K c_k N_k \rightarrow \max, \quad (4)$$

где n – количество технологических операций;
 m – количество единиц оборудования;
 t_{ij} – длительность i -й операции, выполняемой на j -м оборудовании;

Φ_j – фонд времени j -го оборудования;

N_k – количество произведенных k -х изделий;

x_{ij} – количество выполняемых i -х операций, закрепленных за j -м оборудованием;

$F(x_{ij})$ – аддитивная целевая функция;

c_k – коэффициенты целевой функции.

Решение задачи в исходном виде дает информацию о загрузке оборудования при максимальном объеме выпуска изделий (рисунок 2). В представленной на рисунке 2 таблице указано время, которое потрачено каждой единицей оборудования на производство максимального количества продукции. Для выполнения некоторых операций использовано несколько единиц оборудования, указанного в технологических картах как альтернативное.

			Фрезерный		Сверлильный		Токарный			Сварка	Слесарный	Стенд 1	Стенд 2	
			Ф1	Ф2	Св1	Св2	Ток1	Ток2	Ток3	Свар1	Сл1	Ст1	Ст2	
С63	1	17	С63									255		
С62	1	17	С62								170			
С61	2	34	С61							238				
Дет 1	2	68	Оп1д1				30	310						
		68	Оп2д1		0	204								
Дет 2	1	34	Оп1д2	0	204									
		34	Оп2д2		68	0								
Дет 3	2	34	Оп1д3					170	0					
Дет 4	1	17	Оп1д4	85	0									
		17	Оп2д4			68	0							
Дет 5	1	17	Оп1д5				0	0	68					
		17	Оп2д5	0	102									
С64	1	40	С64										480	
Дет 6	1	40	Оп1д6				240	0						
		40	Оп2д6		80	0								
Дет 7	2	80	Оп1д7	230	170									
		80	Оп2д7			44	276							
Дет 8	1	40	Оп1д8					0	160					
		40	Оп2д8	156	4									
Затраты времени по оборудованию				471	480	260	480	270	480	228	238	170	255	480
				<=	<=	<=	<=	<=	<=	<=	<=	<=	<=	<=
Фонд времени по оборудованию				480	480	480	480	480	480	480	480	480	480	480

Рисунок 2. – Результаты решения оптимизационной задачи

Пересчитаем эти затраты таким образом, чтобы получить значения временных затрат по каждому изделию на соответствующих группах оборудования, на которых могут выполняться технологические операции при изготовлении этих деталей. Полученные данные приведены на рисунке 3.

		Фрезерный		Сверлильный		Токарный		Сварка	Слесарный	Стенд 1	Стенд 2
Изделие 1	С63									255	
	С62								170		
	С61							238			
	Дет 1			204		340					
	Дет 2	204		68							
	Дет 3					170					
	Дет 4	85		68							
	Дет 5	102				68					
	ΣТоп	391		340		578		238	170	255	0
	ΣТоп/И1	23		20		34		14	10	15	0
Изделие 2	С64										480
	Дет 6			80		240					
	Дет 7	400		320							
	Дет 8	160				160					
	ΣТоп	560		400		400		0	0	0	480
	ΣТоп/И2	14		10		10		0	0	0	12

Рисунок 3. – Пересчет временных затрат на изготовление одного изделия по группам оборудования

Используя полученные данные, можно составить упрощенную модель, в которой в качестве управляемых параметров используются значения объемов выпуска по изделиям, коэффициенты целевой функции приняты равными единице, а в качестве коэффициентов матрицы ограничений используются значения из таблицы на рисунке 3, представляющие собой приведенные затраты соответствующего оборудования на одно изделие. Полученная модель представлена уравнениями (5) и (6), решение задачи показано на рисунке 4.

$$F(N_k) = \sum_{k=1}^K c_k N_k \rightarrow \max, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n T_{\text{обор } i} N_k \leq \Phi_i \text{ при } i = \overline{1, n}; \quad (6)$$

N_k – целые,

где k – количество видов изготавливаемых изделий;

n – количество типов оборудования;

$T_{\text{обор } i}$ – суммарная длительность операций, выполняемых на оборудовании i -го типа при изготовлении изделий k -го вида;

Φ_i – суммарный фонд времени i -го оборудования;

N_k – количество произведенных k -х изделий;

$F(N_k)$ – аддитивная целевая функция;

c_k – коэффициенты целевой функции.

	И1	И2		
Управляемые параметры	17	40		
Коэффициенты целевой функции	1	1	57	Значение целевой функции
	Матрица коэффициентов			Фонд времени
Фрезерный	23	14	951	<= 960
Сверлильный	20	10	740	<= 960
Токарный	34	10	978	<= 1440
Сварка	14	0	238	<= 480
Слесарный	10	0	170	<= 480
Стенд 1	15	0	255	<= 480
Стенд 2	0	12	480	<= 480

Рисунок 4. – Постановка упрощенной задачи

В приведенном решении для каждой строки матрицы коэффициентов ограничений указано значение времени, затрачиваемого на изготовление одного изделия соответствующей группой станков. Справа от матрицы коэффициентов записаны вычисленные значения затрат на полный объем производства изделий, еще правее – фонд времени по данным группам оборудования.

На рисунке 5 полученное решение показано графически: в качестве осей графика приняты значения выпускаемых изделий, а в качестве ограничений – ресурсы времени работы оборудования, т. е. его фонды времени, область допустимых решений, ограниченная точками А, С, D, E, G, и вектор градиент F.

Для анализа результатов решения построим двойственную задачу ЛП, правила построения которой хорошо известны [3]. Решение двойственной задачи представлено на рисунке 6.

Из результатов видно, что значение целевой функции, которое в этой задаче минимизируется, несколько отличается от значения целевой функции прямой задачи. Это обусловлено целочисленностью прямой задачи и не свидетельствует о некорректности ее построения.

Полученное решение в виде частных производных целевой функции прямой задачи по ресурсам говорит о том, что изменение только двух ресурсов оказывает влияние на значение целевой функции. Это фонд времени работы фрезерного оборудования и стенда 2, на котором осуществляется сборка изделия 2. Однако, как видно из рисунка 5, точка решения прямой задачи линейного программирования, строго говоря, ограничивается только одним из них.

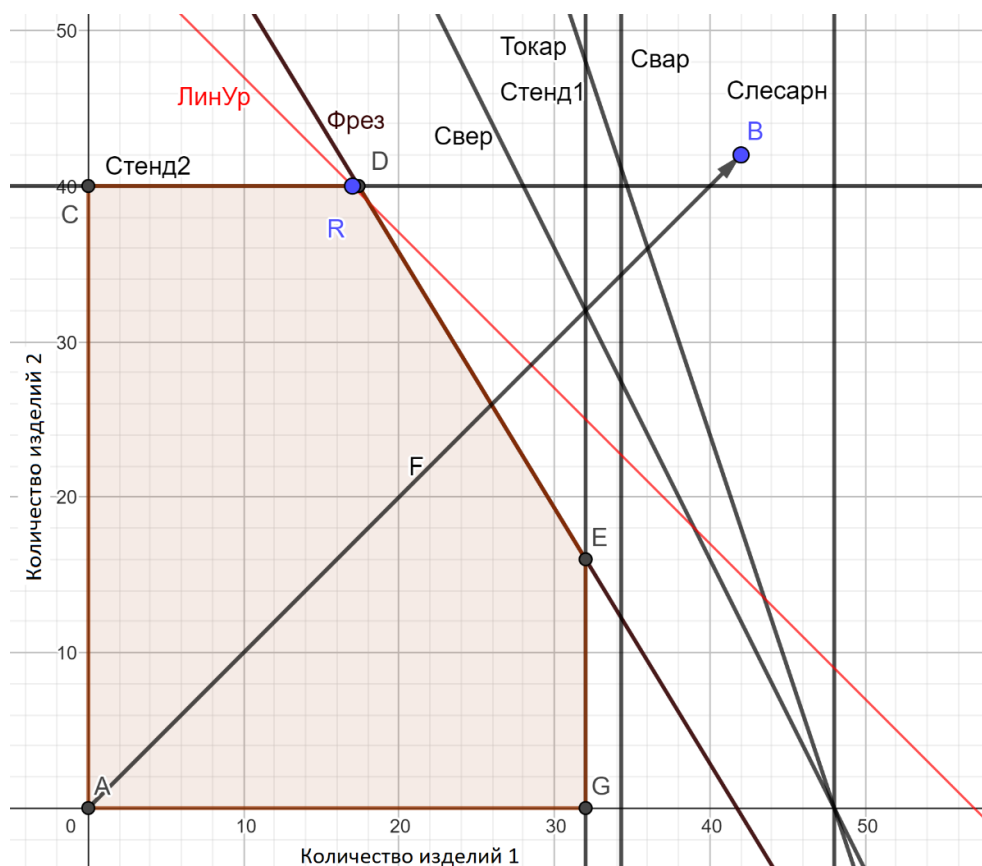


Рисунок 5. – Графическое представление задачи максимизации объемов производства

	Фрезерный	Сверлильный	Токарный	Сварка	Слесарный	Стенд 1	Стенд 2	
Решения	0,043	0	0	0	0	0	0,033	
Ресурсы	960	960	1440	480	480	480	480	Целевая функция
								57,3913
Транспонированная матрица коэффициентов								
	23	20	34	14	10	15	0	1 >= 1
	14	10	10	0	0	0	12	1 >= 1

Рисунок 6. – Решение двойственной задачи линейного программирования

Фонд времени функционирования станка 2 действительно использован полностью, но фонд времени работы фрезерного оборудования остается недоиспользованным. Однако оставшегося недоиспользованного времени все же недостаточно для увеличения объема производства, что объясняется дискретностью задачи. С этой точки зрения данный ресурс является дефицитным, как и показало решение двойственной задачи.

Рассмотренная ситуация говорит о том, что простой анализ использования фондов времени работы оборудования не позволяет выделить все дефицитные ресурсы и что применение двойственной задачи оказывается весьма полезным.

Таким образом, проведенными исследованиями выявлены два узких места производства. Если мы захотим увеличить объем производства, то необходимо указанные фонды времени увеличить, например, за счет сверхурочных часов работы оборудования или путем увеличения его количества. Причем из результатов видно, что увеличение фонда времени работы фрезерного оборудования дает больший эффект, чем увеличение фонда времени станка 2. Из сопоставления полученных значений (0,043 и 0,033) понятно, что увеличивать фонд времени фрезерного оборудования несколько выгоднее, чем фонд времени станка 2.

Остается только узнать, до каких пределов изменения указанных фондов времени и в каком объеме будут оказывать влияние на объем продукции. Для этого проведем вычислительный эксперимент. В результате мы увидим, что первый ресурс после увеличения его в 1,25 раза, т. е. со значения 960 до значения 1204, перестает быть дефицитным и более не оказывает влияния на объем выпуска. Второй ресурс можно увеличить в 1,7 раза, т. е. со значения 480 до значения 816. В обоих случаях суммарный выпуск продукции увеличится, но происходит это по-разному. Различия можно проследить по таблице, в которой представлены результаты при исходных значениях ресурсов и при их увеличении до предельных значений.

Таблица. – Результаты влияния дефицитных ресурсов

	Изделие 1	Изделие 2	Суммарный выпуск
Исходные ресурсы	17	40	57
Увеличение первого ресурса	28	40	68
Увеличение второго ресурса	0	68	68

Чтобы понять величину необходимой дискретности, изменение на которую будет приводить к изменению объема продукции на единицу, проведем простейшие вычисления: разделим прирост использованного фонда времени оборудования на величину изменения объема производства соответствующего изделия. Для первого ресурса $(1204 - 951) / (68 - 57) = 23$ и для второго $(816 - 480) / (68 - 57) = 30,5$.

Таким образом, для увеличения суммарного объема производства на единицу необходимо фонд времени работы фрезерного оборудования изменять на первом шаге до значения 974 мин и далее наращивать с шагом 23 мин. Фонд времени работы станка 2 для достижения того же результата необходимо увеличивать с шагом 30,5 мин. Фонды времени остальных единиц оборудования являются избыточными. Для них можно сократить необходимые ресурсы времени, что в конечном счете позволит сократить производственные затраты.

Закключение. В результате проведенных исследований можно сделать следующие выводы и предложения:

1. Анализ влияния фондов времени работы оборудования на объемы выпускаемой продукции целесообразно осуществлять на основе построения двойственной задачи к агрегированной модели прямой задачи. Последняя представляет собой обобщенную модель, записанную относительно управляемых параметров, которыми являются объемы производства по принятой номенклатуре продукции, а коэффициентами матрицы ограничений – приведенные затраты времени соответствующего оборудования на производство одного изделия.

2. Если производительность альтернативного оборудования не различается, т. е. время выполнения операции на альтернативном оборудовании одинаково по всему проекту, то все описанное ранее полностью справедливо. Если это условие не выполняется, то двойственную задачу можно построить и, соответственно, провести анализ влияния ресурсов на целевую функцию, только при принятом закреплении операций за группами альтернативного оборудования. Для получения такого закрепления нужно решить задачу в развернутом виде и провести ее анализ с точки зрения количества переналадок оборудования. Управлять коэффициентом закрепления операций можно с помощью дополнительных ограничений при решении задачи в развернутом виде: либо ограничивая его среднее значение по всему проекту, либо ограничивая (приравнявая к нулю) количество операций на одной из единиц альтернативного оборудования.

3. Упрощенную задачу линейного программирования с количеством управляемых параметров, равным количеству изделий, можно построить, введя параметры распределения количества повторений операций между альтернативным оборудованием, другими словами, сделав задачу параметрической. Но таких параметров будет много, т. е. столько, сколько альтернативных групп предусмотрено в технологии. Проводить анализ и выбор их наилучших значений вручную не представляется возможным. Однако ее можно решить путем введения этих параметров в число управляемых. Задача не перестанет быть линейной и ее можно будет решать линейными методами.

4. Результаты анализа можно использовать как обоснование переноса операций из группы безальтернативных, представляющих собой узкое место производства, в альтернативную группу, где операции могут выполняться на разных единицах оборудования.

5. Если производительность альтернативного оборудования различна, то коэффициенты матрицы ограничений вычисляются по менее производительному оборудованию. При этом общий ресурс времени на группу альтернативного оборудования вычисляется как сумма ресурса менее производительного и более производительного, увеличенного на коэффициент повышения производительности другого оборудования.

6. Если часть операций может выполняться только на одном станке, а другая часть представляет собой альтернативные операции, которые могут выполняться на одном из группы станков, то такое оборудование необходимо разделить на две группы. В первую группу необходимо выделить оборудование, на котором будут выполняться безальтернативные операции. Во вторую – альтернативное оборудование. Таким образом оборудование, задействованное в альтернативных и безальтернативных операциях,

будет входить в две разные группы. Ресурс времени на безальтернативное оборудование будет равняться всему периоду работы оборудования, а для этого же станка, входящего в альтернативную группу, ресурс времени будет равен времени периода работы минус время, занятое работой безальтернативного оборудования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Экономика организации (предприятия) / Т. К. Руткаuskас, В. В. Криворотов, М. Г. Лордкипанидзе и др.; под общ. ред. д-ра экон. наук, проф. Т. К. Руткаuskас. – 2-е изд., перераб. и доп. – Екатеринбург: Изд-во УМЦ УПИ, 2018. – 260 с.
2. Богданова, Е. Л. Соловейчик К. А., Аркина К. Г. Оптимизация в проектном менеджменте: линейное программирование. – СПб.: Ун-т ИТМО, 2017. – 165 с.
3. Шевченко А. С. Линейное программирование. – Рубцовск: Рубцовский индустриальный ин-т, 2021. – 150 с.

REFERENCES

1. Rutkauskas, T. K., Krivorotov, V. V., Lordkipanidze, M. G., Kondyukova, A. S., Shershneva, E. G., Zhurukhin, G. I., & Domnikova, L. V. (2018). *Ekonomika organizatsii (predpriyatiya)* (2st ed.). Ekaterinburg: Publ. UMTs UPI. (In Russ.).
2. Bogdanova, E. L. Soloveichik, K. A., & Arkina, K. G. (2017). *Optimizatsiya v proektnom menedzhmente: lineinoe programmirovaniye*. St. Petersburg: Un-t ITMO. (In Russ.).
3. Shevchenko, A. S. (2021). *Lineinoe programmirovaniye*. Rubtsovsk: Rubtsovskii industrial'nyi in-t. (In Russ.).

Поступила 28.02.2025

INDUSTRIAL PRODUCTION EFFICIENCY ANALYSIS BASED ON SOLVING A DUAL LINEAR PROGRAMMING PROBLEM

V. SHIROCHENKO, N. SKRILEV, V. NEDUHIN
(Belarusian-Russian University, Mogilev)

The analysis of the formulation and solution of the problem of increasing the efficiency of the production process of a multi-nomenclature serial production of a machine-building enterprise is carried out. The features of the development of a mathematical model based on linear programming methods are considered. Algorithms for constructing a dual task for analyzing resource scarcity based on the use of aggregation and reduction mechanisms have been developed. The results of the research conducted on a test example are shown, which, despite its small dimensions, demonstrates all the features of solving the problem. The research results are embodied in the automated control system developed at the Department of the Belarusian-Russian University, which is undergoing testing, after which it will be ready for use at an industrial enterprise.

Keywords: multi-nomenclature production, serial production, production capacity, linear programming task, dual task, linear programming task analysis, production efficiency, software system.