МАТЕМАТИКА

УДК 517. 0(075.8); 517. 9(075.8) **DOI 10.52928/2070-1624-2025-44-1-77-80**

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ И ТОЖДЕСТВЕННЫЕ СВЯЗИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

д-р техн. наук, проф. С. Г. ЕХИЛЕВСКИЙ,
канд. физ.-мат. наук, доц. О. В. ГОЛУБЕВА, О. Н. ЗАБЕЛЕНДИК
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

Обоснована корректность единого подхода к интегрированию рациональных дробей при наличии в знаменателе линейных комплексно сопряженных множителей. На его основе реализована процедура, позволившая выразить через элементарные функции двух переменных реальную и мнимую части натурального логарифма комплексного аргумента. Это дало возможность доказать формулу Эйлера без использования теории степенных рядов.

Ключевые слова: *интегрирование рациональной дроби, натуральный логарифм комплексного аргумента, формула Эйлера.*

Введение. Обычно методы интегрирования правильной рациональной дроби варьируют в зависимости от наличия (или отсутствия) в знаменателе квадратного трехчлена с отрицательным дискриминантом [1]. При этом никак не объясняется, почему нельзя применять единый алгоритм, связанный с разложением знаменателя на множители первой степени относительно аргумента. Целью данной публикации является доказательство корректности такого подхода и обосновывание процедуры, позволяющей выразить через элементарные функции двух переменных реальную и мнимую части натурального логарифма комплексного аргумента.

Интегрирование рациональной дроби при наличии в знаменателе квадратного трехчлена с отрицательным дискриминантом. Покажем, что в этом случае интегрирование правильной рациональной дроби

$$I=\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx \tag{1}$$

можно производить с помощью стандартной процедуры, раскладывая трехчлен на линейные множители [1]

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)=0, \tag{2}$$

но уже с комплексно сопряженными корнями

$$x_{1,2}=\alpha\pm i\beta=-\frac{b}{2a}\pm i\frac{\sqrt{-D}}{2a}, \tag{3}$$

где

$$D=b^2-4ac<0 \tag{4}$$

– отрицательный дискриминант уравнения (2).

Разложим в новых обстоятельствах рациональную дробь на сумму простейших

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\frac{mx+n}{a(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)}=\frac{1}{a}\left[\frac{A}{x-\alpha-i\beta}+\frac{B}{x-\alpha+i\beta}\right], \tag{5}$$

выполним сложение дробей в квадратных скобках и, приравняв числители в последнем равенстве (5)

$$mx+n=A(x-\alpha+i\beta)+B(x-\alpha-i\beta), \tag{6}$$

определим коэффициенты разложения

$$x = \alpha + i\beta \quad \Rightarrow \quad m(\alpha + i\beta) + n = 2i\beta A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{m}{2} - \frac{i}{2\beta}(m\alpha + n), \tag{7}$$

$$x = \alpha - i\beta \quad \Rightarrow \quad m(\alpha - i\beta) + n = -2i\beta B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{m}{2} + \frac{i}{2\beta}(m\alpha + n) = A^*, \tag{8}$$

где * – знак комплексного сопряжения.

Таким образом, из (1), (5) – (8) следует

$$I = \frac{1}{a}\left[A\ln(x - \alpha - i\beta) + A^*\ln(x - \alpha + i\beta)\right] + C, \tag{9}$$

где C – константа интегрирования.

Реальная и мнимая части натурального логарифма комплексного аргумента. Согласно (1) мнимая часть I равна нулю, из чего согласно (9) следует нетривиальное свойство

$$\ln^*(x + iy) = \ln(x - iy), \tag{10}$$

подтверждаемое вещественностью выражения

$$(p + iq)(\gamma - i\delta) + (p - iq)(\gamma + i\delta) = 2(p\gamma + q\delta), \tag{11}$$

в котором

$$A = p + iq, \qquad \ln(x - \alpha + i\beta) = \gamma + i\delta. \tag{12}$$

Подстановка (12) в (9), с учетом (7) и (11), дает

$$I = \frac{2}{a}\left[\frac{m}{2}\gamma - \frac{m\alpha + n}{2\beta}\delta\right] + C. \tag{13}$$

Правая часть (13) позволяет выразить через элементарные функции действительную и мнимую части фигурирующего в (12) натурального логарифма комплексного аргумента. Для этого вычислим интеграл (1), не раскладывая квадратный трехчлен на множители [1]:

$$I = \int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c}dx = \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax + b) - \frac{mb}{2a} + n}{ax^2 + bx + c}dx = \frac{m}{2a}I_1 + \left(n - \frac{mb}{2a}\right)I_2, \tag{14}$$

$$I_1 = \ln(ax^2 + bx + c) + C_1 = \text{(см. (3))} = \frac{1}{2}\ln\left((x - \alpha)^2 + \beta^2\right) + \frac{1}{2}\ln a + C_1, \tag{15}$$

$$I_2 = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}} = \text{(см. (4))} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-D}{4a^2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-D}}\,arctg\,\frac{x + \frac{b}{2a}}{\frac{1}{2a}\sqrt{-D}} + C_2 = \frac{2}{\sqrt{-D}}\left(\frac{\pi}{2} - arctg\,\frac{\frac{1}{2a}\sqrt{-D}}{x + \frac{b}{2a}}\right) + C_2. \tag{16}$$

Заметим, что $\frac{1}{2}\ln a$ в (15) и $\frac{\pi}{2}$ в (16) можно опустить, т. к. C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

После этого, сравнив (14) с (13), с учетом (12), (15), (16), получим

$$\operatorname{Re}\ln(x-\alpha+i\beta)=\gamma=\frac{1}{2}\ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right), \tag{17}$$

$$\operatorname{Im}\ln(x-\alpha+i\beta)=\delta=arctg\frac{\frac{1}{2a}\sqrt{-D}}{x+\frac{b}{2a}}=\text{ (см. (3)) }=arctg\frac{\beta}{x-\alpha}. \tag{18}$$

Поскольку в (13), (15) и (16) фигурируют произвольные постоянные, в справедливости (17), (18) легко убедиться при $\beta=0$.

Формулы (17), (18) позволяют, абстрагируясь от интегрирования рациональной дроби, в общем виде записать итоговый результат

$$\ln(x+iy)\equiv\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+i\,arctg\frac{y}{x}, \tag{19}$$

связывающий реальную и мнимую части логарифма комплексного аргумента с элементарными функциями двух действительных переменных.

Подчеркнем, что для получения (19) не потребовалась теория степенных рядов, хотя в совпадении первых (а значит и всех остальных) частных производных от левой и правой части (19) легко убедиться непосредственно:

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln(x+iy)=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+i\,arctg\frac{y}{x}\right]=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{x-iy}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\ln(x+iy)=\frac{i}{x+iy}=\frac{ix+y}{x^2+y^2}\equiv\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+i\,arctg\frac{y}{x}\right]=\frac{y}{x^2+y^2}+i\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{ix+y}{x^2+y^2}.$$

И завершая рассмотрение, заметим, что в полярной системе координат

$$x=\rho\cos\varphi,\qquad y=\rho\sin\varphi$$

из (19) следует формула Эйлера

$$\ln\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\ln\rho+\ln(\cos\varphi+i\sin\varphi)\equiv\frac{1}{2}\ln\left(\rho^2\right)+i\,arctg\left(tg\varphi\right)=\ln\rho+i\varphi\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad i\varphi\equiv\ln(\cos\varphi+i\sin\varphi)\quad\Rightarrow\quad e^{i\varphi}\cong\cos\varphi+i\sin\varphi,$$

вводимая некоторыми авторами по определению [2] (без доказательства).

Заключение. Таким образом, в работе доказана корректность единого подхода к интегрированию рациональных дробей при наличии в знаменателе линейных относительно аргумента комплексно сопряженных множителей. На его основе реализована процедура, позволившая выразить через элементарные функции двух переменных реальную и мнимую части натурального логарифма комплексного аргумента. Это дало возможность доказать формулу Эйлера без использования теории степенных рядов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, т. 1 – М.: Наука, 1968. – 440 с.
2. Шабунин М. И., Сидоров Ю. В. Теория функций комплексного переменного. – М.: Лаборатория знаний, 2016. – 330 с.

REFERENCES

1. Fikhtengol'ts, G. M. (1968). *Osnovy matematicheskogo analiza, t. 1.* Moscow: Nauka. (In Russ.).
2. Shabunin, M. I., & Sidorov, Yu. V. (2016). *Teoriya funktsii kompleksnogo peremennogo.* Moscow: Laboratoriya znanii. (In Russ.).

Поступила 20.01.2025

INTEGRATION OF RATIONAL FRACTION AND IDENTICAL RELATIONS OF ELEMENTARY FUNCTIONS OF COMPLEX ARGUMENT

S. EKHILEVSKIY, O. GOLUBEVA, O. ZABELENDIK
(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

The correctness of the unified approach to integration of rational fractions is justified if there is a product of linear complex conjugate polynomials in the denominator. On its basis, a procedure has been implemented that made it possible to express the real and imaginary parts of the natural logarithm of a complex argument through elementary functions of two variables. This made it possible to prove Euler's formula without using power series theory.

Keywords: *rational fraction integration, natural logarithm of the complex argument, Euler's formula*.