УДК 517.983 **DOI 10.52928/2070-1624-2025-44-1-81-87**

РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ФУНКЦИЕЙ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА В ЯДРАХ

д-р физ.-мат. наук, проф. С. М. СИТНИК
(Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ БелГУ), Россия)

канд. физ.-мат. наук, доц. О. В. СКОРОМНИК, М. В. ПАПКОВИЧ
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

Рассматривается один класс многомерных интегральных уравнений первого рода с функцией Миттаг-Леффлера в ядрах по ограниченной пирамидальной области специального вида. Следуя методике Я. Тамаркина, выводятся явные формулы решения рассматриваемых многомерных интегральных уравнений. Устанавливаются необходимые и достаточные условия разрешимости таких уравнений в пространствах суммируемых функций.

Ключевые слова: *многомерные интегральные уравнения первого рода, функция Миттаг-Леффлера, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.*

Введение. Одномерные интегральные уравнения первого рода, которые обобщают классическое интегральное уравнение Абеля и содержат специальные функции в ядрах, изучены многими авторами (см. обзор результатов и библиографию в [1, § 35.1, 35.2, 37.1, 39.1, 39.2; 2]). Такие уравнения возникают, например, при изучении краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типа с краевыми условиями, содержащими обобщенные дробные интегралы и производные [3]. Исследование необходимых и достаточных условий разрешимости вышеуказанных уравнений является более сложной задачей. Хорошо известен классический результат Я. Тамаркина о разрешимости интегрального уравнения Абеля в пространстве $L_1(a,b)$ суммируемых функций на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси [1, теорема 2.1]. В работе [4] аналогичный результат был получен для многомерного интегрального уравнения типа Абеля по ограниченной пирамидальной области евклидова пространства специального вида. Интерес к исследованию таких уравнений вызван их приложениями в задачах исследования отражения волн от прямолинейной границы [5, с. 48; 6] и в задачах сверхзвукового обтекания пространственных углов [7] (см. также [1, § 24.1, 28.4]).

Используя методику Я. Тамаркина, в работах [8; 9] были установлены необходимые и достаточные условия разрешимости в $L_1(a,b)$ одного класса интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса и его многомерного аналога по пирамидальным областям. В [10–17] приводятся решения в замкнутой форме отдельных классов многомерных интегральных уравнений первого рода с такими специальными функциями, как гипергеометрическая функция Гаусса, функция Лежандра, вырожденная гипергеометрическая функция Куммера, функция Бесселя – Клиффорда, функция гиперболического синуса в ядрах по пирамидальным областям, и изучается вопрос разрешимости указанных уравнений в пространствах интегрируемых функций.

Целью настоящей работы является продолжение этих исследований. Мы даем решение в замкнутой форме еще одного класса многомерных интегральных уравнений с функцией Миттаг-Леффлера в ядрах по пирамидальной области специального вида и устанавливаем необходимые и достаточные условия их разрешимости в пространствах интегрируемых функций. Нами приводятся вспомогательные сведения, решения рассматриваемых уравнений в квадратурах, а также необходимые и достаточные условия их разрешимости.

1. Предварительные сведения. Будем использовать обозначения (см., например, [1, § 28.4; 10–17]). Пусть $\mathrm{N}=\{1,2,...\}$ – множество натуральных чисел, $\mathrm{N}_0=\mathrm{N}\bigcup\{0\}$, R^n – n-мерное евклидово пространство. Для $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathrm{R}^n$ и $\mathbf{t}=(t_1,t_2,...,t_n)\in\mathrm{R}^n$ через $\mathbf{x}\cdot\mathbf{t}=\sum_{k=1}^{n}x_kt_k$ обозначим их скалярное произведение. Заметим, что $\mathbf{x}\cdot\mathbf{1}=\sum_{k=1}^{n}x_k$ для $\mathbf{1}=(1,1,...,1)$; под выражением $\mathbf{x}>\mathbf{t}$ понимаем $x_1>t_1$, $x_2>t_2$, ..., $x_n>t_n$ и аналогично для знака $\geq$; $\mathrm{R}^n_+=\{\mathbf{x}\in\mathrm{R}^n:\mathbf{x}>0\}$; $\mathbf{k}=(k_1,k_2,...,k_n)\in\mathrm{N}^n_0=\mathrm{N}_0\times\mathrm{N}_0\times...\times\mathrm{N}_0$, где $(k_i\in\mathrm{N}_0$, $i=1,2,...,n)$ – мультииндекс, $\mathbf{k}!=k_1!k_2!\cdots k_n!$ и $|\mathbf{k}|=k_1+k_2+...+k_n$. Для $\mathbf{x}\in\mathrm{R}^n$, $\mathbf{k}\in\mathrm{N}^n_0$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in\mathrm{R}^n_+$

и $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\in R_+^n$ полагаем $\mathbf{x}^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$, $\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_n)$, $(\mathbf{x})_\mathbf{k}=(x_1)_{k_1}(x_2)_{k_2}\cdots(x_n)_{k_n}$, $\mathbf{D}^\alpha=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x_1)^{\alpha_1}(\partial x_2)^{\alpha_2}...(\partial x_n)^{\alpha_n}}$, $\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma=\left(x_1^{\sigma_1}-t_1^{\sigma_1}\right)\left(x_1^{\sigma_1}-t_1^{\sigma_1}\right)\cdots\left(x_n^{\sigma_n}-t_n^{\sigma_n}\right)$, где $(z)_n$ – символ Похгаммера:

$$(z)_0\equiv 1,\ (z)_k=z(z+1)...(z+k-1)=\Gamma(z+n)/\Gamma(z)\ \ (z\in C; n\in \mathrm{N}),\ \ \lambda=(\lambda,...,\lambda)\in R_+^n.$$

Пусть $A=\|a_{jk}\|$ $(a_{jk}\in R^1)$ – матрица порядка $n\times n$ с определителем $|A|=\det A$, вектор-строки которой обозначим через $\mathbf{a}_j=(a_{j1},...,a_{jn})$, элементы обратной матрицы A^{-1} обозначим через a_{jk}. Без ограничения общности будем считать $|A|=1$. Пусть [1, §28.4; 10–17]

$$A\cdot\mathbf{x}=(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{x},\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{x},...,\mathbf{a}_n\cdot\mathbf{x}),\ \ (A\cdot\mathbf{x})^\alpha=(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{x})^{\alpha_1}(\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{x})^{\alpha_2}\cdots(\mathbf{a}_n\cdot\mathbf{x})^{\alpha_n}.$$

Для $\mathbf{b}=(b_1,b_2,...,b_n)\in R^n$, $\mathbf{c}=(c_1,c_2,...,c_n)\in R^n$ и $r\in R^1$ обозначим через

$$A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})=\{\mathbf{t}\in R^n : A\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})\ge 0,\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{t}+r\ge 0\} \tag{1}$$

n-мерную ограниченную в R^n пирамиду с вершиной в точке $\mathbf{b}$, основанием на гиперплоскости $\mathbf{c}\cdot\mathbf{t}+r=0$ и боковыми гранями, лежащими на гиперплоскостях $\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})=0$ $(j=1,2,...,n)$. В частном случае, когда $A=E=\|\delta_{jk}\|$ – единичная матрица, $\mathbf{c}=(1,...,1)$ и $r=0$, $E_1(\mathbf{b})$ является модельной пирамидой:

$$E_1(\mathbf{b})=\{\mathbf{t}\in R^n : \mathbf{t}\le\mathbf{b},\mathbf{1}\cdot\mathbf{t}\ge 0\}. \tag{2}$$

Известно [1, лемма 28.2], что для ограниченности пирамиды (1) необходимо и достаточно выполнения условия $A^{-1}\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}>0$ (соответственно для модельной пирамиды $A^{-1}\mathbf{c}>0$).

Для $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in R_+^n$ и $\beta=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)\in R_+^n$, введем функцию

$$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}[\mathbf{x}]=\prod_{j=1}^{n}\mathrm{E}_{\alpha_j,\beta_j}[x_j], \tag{3}$$

представляющую собой произведение двухпараметрических функций Миттаг-Леффлера, определяемых по формуле [1, § 1.3; 18, глава 4]

$$\mathrm{E}_{\delta,\eta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z)^k}{\Gamma(\delta k+\eta)},\quad \delta>0,\eta>0. \tag{4}$$

Нам понадобится интегральное соотношение, содержащее функцию (4) [18, формула 4.4.5]

$$\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^z(z-t)^{\gamma-1}\mathrm{E}_{\delta,\eta}(\lambda t^\delta)t^{\eta-1}dt=z^{\gamma+\eta-1}\mathrm{E}_{\delta,\gamma+\eta}(\lambda z^\delta),\quad \gamma>0,\quad \eta>0, \tag{5}$$

а также вспомогательное утверждение.

Лемма 1 [1; § 28]. *Если функция $f(\mathbf{t},\boldsymbol{\tau})$, определенная на $A_\mathbf{c}(\mathbf{b})\times A_\mathbf{c}(\mathbf{b})$, измерима, то верна следующая формула перестановки порядка интегрирования:*

$$\int_{A_\mathbf{c}(\mathbf{b})}d\mathbf{t}\int_{A_\mathbf{c}(\mathbf{t})}f(\mathbf{t},\boldsymbol{\tau})d\boldsymbol{\tau}=\int_{A_\mathbf{c}(\mathbf{b})}d\boldsymbol{\tau}\int_{\sigma(\mathbf{b},\boldsymbol{\tau})}f(\mathbf{t},\boldsymbol{\tau})d\mathbf{t}, \tag{6}$$

$$\sigma(\mathbf{b},\boldsymbol{\tau})=\{\mathbf{t}\in R^n : A\cdot\boldsymbol{\tau}\le A\cdot\mathbf{t}\le A\cdot\mathbf{b}\},$$

в предположении, что один из повторных интегралов в (6) сходится абсолютно.

Нами рассматривается интегральное уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma}))^{\beta-1}\,\mathrm{E}_{\alpha,\beta}[\lambda(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma}))^{\alpha}]\,f(\mathbf{t})d\mathbf{t}=g(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}), \tag{7}$$

где $\mathbf{x}\in A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ и $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\,(\mathbf{c},\mathbf{b}\in \mathrm{R}^n, r\in \mathrm{R}^1)$ – пирамида (1);

$\mathbf{x},\mathbf{t},\alpha,\beta\in \mathrm{R}^n$, $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)\in \mathrm{R}^n_+$, $\mathrm{E}_{\alpha,\beta}[\lambda(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma}))^{\alpha}]$ – функция вида (3).

2. Решение в замкнутой форме. Выведем формулу решения уравнения (7). Заменяем в (7) $\mathbf{x}$ на $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}$ на $\mathbf{u}$, умножаем обе части полученного равенства на $(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma}))^{-\beta}\sigma^{1}\mathbf{t}^{\sigma-1}$, где $\sigma^{\mathbf{1}}=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$, $\mathbf{t}^{\sigma-1}=t_1^{\sigma_1-1}t_2^{\sigma_2-1}\cdots t_n^{\sigma_n-1}$, далее интегрируем по пирамиде $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})$, получаем

$$\begin{gathered}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma}))^{-\beta}\sigma^{1}\mathbf{t}^{\sigma-1}d\mathbf{t}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{t})}(A\cdot(\mathbf{t}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma}))^{\beta-1}\,\mathrm{E}_{\alpha,\beta}[\lambda(A\cdot(\mathbf{t}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma}))^{\alpha}]\,f(\mathbf{u})d\mathbf{u}=\\=\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma}))^{-\beta}\sigma^{1}\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t},\quad \mathbf{x}\in A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}).\end{gathered} \tag{8}$$

Изменяем порядок интегрирования в левой части (8) согласно формуле (6):

$$\begin{gathered}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}f(\mathbf{u})d\mathbf{u}\int\limits_{\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})}(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma}))^{-\beta}(A\cdot(\mathbf{t}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma}))^{\beta-1}\,\mathrm{E}_{\alpha,\beta}[\lambda(A\cdot(\mathbf{t}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma}))^{\alpha}]\sigma^{1}\mathbf{t}^{\sigma-1}d\mathbf{t}=\\=\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma}))^{-\beta}\sigma^{1}\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t},\end{gathered} \tag{9}$$

где $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})=\left\{\mathbf{t}\in \mathrm{R}^n : A\cdot\mathbf{u}\le A\cdot\mathbf{t}\le A\cdot\mathbf{x}\right\}$.

Для вычисления внутреннего интеграла в левой части (9) вводим новые переменные

$$\tau_j=\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{t}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma}),\ \ \mathbf{a}_j=(a_{j1},...,a_{jn})\quad (j=1,...,n).$$

Далее используем формулу (5) для внутреннего интеграла в левой части (9), получаем

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})}(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma}))^{-\beta}(A\cdot(\mathbf{t}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma}))^{\beta-1}\,\mathrm{E}_{\alpha,\beta}[\lambda(A\cdot(\mathbf{t}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma}))^{\alpha}]\sigma^{1}\mathbf{t}^{\sigma-1}d\mathbf{t}=$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_j)}\int\limits_{0}^{\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma})}\tau_j^{\beta_j-1}(\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma})-\tau_j)^{1-\beta_j-1}\,\mathrm{E}_{\alpha_j,\beta_j}[\lambda\tau_j^{\alpha_j}]d\tau_j\right]=$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\left[(\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma}))^{1-\beta_j+\beta_j-1}\,\mathrm{E}_{\alpha_j,1-\beta_j+\beta_j}[\lambda(\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma}))^{\alpha_j}]\right]=\mathrm{E}_{\alpha,1}[\lambda(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma}))^{\alpha}].$$

Таким образом равенство (9) принимает вид

$$\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\mathrm{E}_{\alpha,1}[\lambda(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma}))^{\alpha}]\,f(\mathbf{u})d\mathbf{u}=\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma}))^{-\beta}\sigma^{1}\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t},$$

или

$$\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}f^{*}(\mathbf{t})d\mathbf{t}=f^{*}_{A_{\mathbf{c},r}}(\mathbf{x}), \tag{10}$$

где

$$f^{*}(\mathbf{t})=\mathrm{E}_{\alpha,1}[\lambda(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma}))^{\alpha}]\,f(\mathbf{t}),\quad f^{*}_{A_{\mathbf{c},r}}(\mathbf{x})=\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma}))^{-\beta}\sigma^{1}\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}.$$

Совершаем замену переменных

$$\mathbf{x}+\frac{r}{n\mathbf{c}}=A^{-1}\cdot\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}},\ \ \mathbf{t}+\frac{r}{n\mathbf{c}}=A^{-1}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}}\right), \tag{11}$$

где $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}=\left(\frac{y_1}{d_1},...,\frac{y_n}{d_n}\right)\in\mathrm{R}^n$, $\mathbf{d}=A^{-1}\cdot\mathbf{c}$, переписываем (10) в виде

$$\int\limits_{E_1(\mathbf{y})}\psi(\boldsymbol{\tau})d\boldsymbol{\tau}=\varphi(\mathbf{y}), \tag{12}$$

где $E_1(\mathbf{y})$ – модельная пирамида (2),

$$\psi(\boldsymbol{\tau})=f^*\left(A^{-1}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}}\right)-\frac{r}{n\mathbf{c}}\right),\ \ \varphi(\mathbf{y})=f^{\sigma,\alpha}_{A_{\mathbf{c},r}}\left(A^{-1}\cdot\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}\right)-\frac{r}{n\mathbf{c}}\right)\prod_{j=1}^{n}d_j.$$

Чтобы выполнить обращение уравнения (11), перепишем его в виде

$$\int\limits_{-(y_1+...+y_{n-1})}^{y_n}d\tau_n\int\limits_{-(y_1+...+y_{n-2}+\tau_n)}^{y_{n-1}}d\tau_{n-1}...\int\limits_{-(\tau_2+...+\tau_n)}^{y_1}\psi(\boldsymbol{\tau})d\tau_1=\varphi(\mathbf{y}). \tag{13}$$

Далее, произведя последовательное дифференцирование по переменным $y_n, y_{n-1}, ..., y_1$, возвращаемся опять к переменной $\mathbf{x}=A^{-1}\cdot\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}-\frac{r}{n\mathbf{c}}$ и, учитывая

$$\frac{\partial}{\partial y_k}=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{jk}}{d_k}\frac{\partial}{\partial y_j}\ \ (k=1,...,n), \tag{14}$$

где a_{jk} $(j,k=1,...,n)$ – элементы обратной матрицы A^{-1}, получаем формулу решения уравнения (7)

$$f(\mathbf{x})=\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left\{\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma}))^{-\beta}\sigma^{1}\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}\right\}. \tag{15}$$

3. Необходимые и достаточные условия разрешимости. Приведем необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (7) в пространстве $L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)$:

$$L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)=\left\{f(\mathbf{x}):\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}|f(\mathbf{t})|d\mathbf{t}<\infty\right\}. \tag{16}$$

Введем пространство (см., например, [1, § 28.4; 10–17])

$$I_{A_{\mathbf{c},r}}(L_1)=\left\{\varphi\ :\varphi(\mathbf{x})=\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x}),A\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})\geq A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{t})}h(\mathbf{t})d\mathbf{t},\ h(\mathbf{t})\in L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)\right\}. \tag{17}$$

Пространство $I_{A_{\mathbf{c},r}}(L_1)$ играет ту же роль для уравнения (7), что и пространство $AC([a,b])$ абсолютно непрерывных функций для классического интегрального уравнения Абеля [1, §2.2]. Известно, что если $\varphi\in I_{A_{\mathbf{c},r}}(L_1)$, то почти всюду на $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ существуют ее частные производные и

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\varphi(\mathbf{x})=h(\mathbf{x}).$$

Если матрица $A = E$ – единичной матрице, $\mathbf{c}=(1,...,1)$ и $r=0,$ то пространства (16) и (17) принимают соответственно вид

$$L_1\left(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})\right)=\left\{f(\mathbf{x}):\int\limits_{E_1(\mathbf{x})}|f(\mathbf{t})|d\mathbf{t}<\infty\right\},$$

$$I_{E_1}\left(L_1\right)=\left\{\varphi:\ \varphi(\mathbf{x})=\int\limits_{E_1(\mathbf{x}),(\mathbf{b}-\mathbf{t})\geq(\mathbf{x}-\mathbf{t})}h(\mathbf{t})d\mathbf{t},\, h(\mathbf{t})\in L_1\left(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})\right)\right\},$$

где $h(\mathbf{x})=\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x})\equiv\dfrac{\partial}{\partial x_1}\dfrac{\partial}{\partial x_2}\ldots\dfrac{\partial}{\partial x_n}\varphi(\mathbf{x}).$

Справедливы следующие два утверждения, которые являются аналогами классической теоремы Тамаркина о разрешимости одномерного интегрального уравнения Абеля в пространстве $L_1(a,b)$.

Теорема 1. Для разрешимости многомерного интегрального уравнения (7) с $\beta\in\mathrm{R}^n$ $(0<\beta<1)$ и $\sigma\in\mathrm{R}^n_+$ в пространстве $L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$f^*_{A_{\mathbf{c},r}}(\mathbf{x})=\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}(A\cdot(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma))^{-\beta}\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}\in I_{A_{\mathbf{c},r}}\left(L_1\right)$$

и

$$\left[f^*_{A_{\mathbf{c},r}}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}+r=0}=\left[\sum_{j=1}^n\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}f^*_{A_{\mathbf{c},r}}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}+r=0}=\ldots=\left[\prod_{k=2}^n\sum_{j=1}^n\left(\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)f^*_{A_{\mathbf{c},r}}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}+r=0}=0.$$

При выполнении этих условий уравнение (7) разрешимо в $L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)$ и его единственное решение выражается формулой (14).

Доказательство.

В модельном случае $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})=E_1(\mathbf{b})$ утверждение теоремы следует из (12), (13). В случае произвольной пирамиды $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ оно выводится из (12), (13) после замены переменных (11) с учетом (14).

Следствие 1. *Многомерное модельное интегральное уравнение типа Абеля*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{E_1(\mathbf{x})}(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)^{\beta-1}\,\mathrm{E}_{\alpha,\beta}[\lambda(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)^\alpha]f(\mathbf{t})d\mathbf{t}=g(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in E_1(\mathbf{b}),\tag{18}$$

с $\beta\in\mathrm{R}^n$ $(0<\beta<1)$ *и* $\sigma\in\mathrm{R}^n_+$ *разрешимо в пространстве* $L_1\left(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})\right)$ *тогда и только тогда, когда*

$$f^*_{E_1}(\mathbf{x})=\int\limits_{E_1(\mathbf{x})}(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)^{-\beta}\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}\in I_{E_1}\left(L_1\right)$$

и

$$\left[f^*_{E_1}(\mathbf{x})\right]_{1\cdot\mathbf{x}=0}=\left[\frac{\partial}{\partial x_n}f^*_{E_1}(\mathbf{x})\right]_{1\cdot\mathbf{x}=0}=\ldots=\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}f^*_{E_1}(\mathbf{x})\right]_{1\cdot\mathbf{x}=0}=0.$$

При выполнении этих условий уравнение (18) разрешимо в $L_1\left(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})\right)$ *и его единственное решение выражается формулой*

$$f(\mathbf{x})=\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}f^*_{E_1}(\mathbf{x})=\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left\{\int\limits_{E_1(\mathbf{x})}(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)^{-\beta}\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}\right\}.$$

Работа выполнена в рамках задания 1.2.01 ГПНИ «Конвергенция–2025», подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.2.01 (№ регистрации 20211316 от 15.05.2021 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Скоромник О. В. Интегральные преобразования с функциями Гаусса и Лежандра в ядрах и интегральные уравнения первого рода. – Новополоцк: ПГУ, 2019. – 180 с.
3. Репин О. А. Краевые задачи со сдвигом для уравнений гиперболического и смешанного типов. – Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 1992. – 183 с.
4. Kilbas A. A., Saigo M., Takushima H. On integrable solution of a multidimensional Abel-type integral equation // Fukuoka Univ. Sci. Rep. – 1995. – Vol. 25. iss. 1. – P. 1–9.
5. Михлин С. Г. Лекции по интегральным уравнениям. – М.: Физматгиз, 1959. – 232 с.
6. Преображенский Н. Г. Абелева инверсия в физических задачах: Инверсия Абеля и ее обобщения. – Новосибирск: Ин-т. теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – С. 6–24.
7. Федосов В. П. О некоторых обобщенных уравнениях Абеля. – Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – С. 106.
8. Решение многомерных гипергеометрических уравнений типа Абеля / А. А. Килбас, Р. К. Райна, М. Сайго и др. // Доклады НАН Беларуси. – 1995. – Т. 43. № 2. – С. 23–26.
9. Solvability of some Abel-type integral equations involving the Gauss hypergeometry Function as kernels in the space of summable functions / K. L. Raina, T. M. Srivastava, A. A. Kilbas et al. // ANZIAM J. – 2001. – Vol. 43. iss. 2. – P. 291–320.
10. Килбас А. А., Скоромник О. В. Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Лежандра в ядре по пирамидальной области // Доклады академии наук (Российская Академия наук). – 2009. – Т. 429, № 4. – С. 442–446.
11. Килбас А. А., Скоромник О. В. Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области // Труды Ин-та математики НАН Беларуси. – 2009. – Т. 17, № 1. – С. 71–78.
12. Скоромник О. В. Решение многомерных гипергеометрических интегральных уравнений типа Абеля // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2011. – № 4. – С. 64–70.
13. Скоромник О. В., Мателенок А. П. Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2011. – № 2(62). – С. 22–27.
14. Скоромник О. В., Шлапаков С. А. Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Куммера в ядре по пирамидальной области // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2014. – № 1(79). – С. 12–17.
15. Скоромник О. В., Шлапаков С. А. Решение многомерного интегрального уравнения типа Абеля с функцией Бесселя–Клиффорда в ядре по пирамидальной области // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2018. – № 2(99). – С. 5–13.
16. Папкович М. В., Скоромник О. В. Решение многомерного интегрального уравнения типа Абеля с функцией гиперболического синуса в ядре по пирамидальной области // Актуальные проблемы математики и информационных технологий: материалы II Всерос. конф., приуроч. к 90-лет. Дагестанского гос. ун-та, Махачкала, 5–7 февраля 2021 г. / ДГУ; редкол.: А. М. Магомедов (гл. ред.) [и др.]. – Махачкала, 2021. – С. 124–127.
17. Папкович М. В., Скоромник О. В., Шлапаков С. А. Решение одного класса многомерных интегральных уравнений первого рода с функцией гиперболического синуса в ядрах // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2021. – № 12. – С. 77–83.
18. Mittag-Ltffler Functions, Related Topics and Applications / R. Corenflo, A Kilbas, F. Mainardi et al. – 2nd ed. – Berlin: Springer Verlag, 2020. – URL: link.springer.com›book/10.1007/978-3-662-61550-8 (дата обращения 15.03.2025).

REFERENCES

1. Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1987). *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]*. Minsk: Nauka i tekhnika. (In Russ.).
2. Skoromnik O. V. (2019). *Integral'nye preobrazovanija s funkcijami Gaussa i Lezhandra v jadrah i integral'nye uravnenija pervogo roda.* Novopolock: PSU. (In Russ.).
3. Repin, O. A. (1992). *Kraevye zadachi so sdvigom dlya uravnenii giperbolicheskogo i smeshannogo tipov.* Saratov: izd-vo Saratovskogo un-ta. (In Russ.).
4. Kilbas, A. A., Saigo, M., & Takushima, H. (1995). On integrable solution of a multidimensional Abel-type integral equation. *Fukuoka Univ. Sci. Rep.*, *25*(1), 1–9.
5. Mikhlin, S. G. (1959). *Lektsii po integral'nym uravneniyam.* Moscow: Fizmatgiz. (In Russ.).
6. Preobrazhenskii, N. G. (1978). *Abeleva inversiya v fizicheskikh zadachakh: Inversiya Abelya i ee obobshcheniya.* Novosibirsk: In-t. teor. i prikl. mekhaniki SO AN SSSR. (In Russ.).
7. Fedosov, V. P. (1978). *O nekotorykh obobshchennykh uravneniyakh Abelya.* Novosibirsk: In-t teor. i prikl. mekhaniki SO AN SSSR. (In Russ.).
8. Kilbas, A. A., Raina, R. K., Saigo, M., & Srivastava, G. M. (1995). Reshenie mnogomernykh gipergeometricheskikh uravnenii tipa Abelya. *Doklady NAN Belarusi*, *43*(2), 23–26. (In Russ.).
9. Raina, K. L., Srivastava, T. M., Kilbas, A. A., & Saigo, M. (2001). Solvability of some Abel-type integral equations involving the Gauss hypergeometry Function as kernels in the space of summable functions. *ANZIAM J.*, *43*(2), 291–320.
10. Kilbas, A. A., & Skoromnik, O. V. (2009). Solution of a multidimensional integral equation of the first kind with the Legendre function in the kernel over a pyramidal domain. *Doklady Mathematics*, *80*(3), 847–851. DOI: 10.1134/S1064562409060179.

11. Kilbas, A. A., & Skoromnik, O. V. (2009). Reshenie mnogomernykh integral'nykh uravnenii tipa Abelya s gipergeometricheskoi funktsiei Gaussa v yadrakh po piramidal'noi oblasti [The solution of multidimensional integral Abel type equations with the Gauss hypergeometric function in kernels over pyramidal domain]. *Trudy In-ta matematiki NAN Belarusi [Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus]*, *17*(1), 71–78. (In Russ., abstr. in Engl.).
12. Skoromnik, O. V. (2011). Reshenie mnogomernykh gipergeometricheskikh integral'nykh uravnenii tipa Abelya [Solution of a multidimensional hypergeometric abel-type integral equations]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (4), 64–70. (In Russ., abstr. in Engl.).
13. Skoromnik, O. V., & Matelenok, A. P. (2011). Reshenie mnogomernykh integral'nykh uravnenii tipa Abelya s gipergeometricheskoi funktsiei Gaussa v yadrakh po piramidal'noi oblasti [Solution of multidimensional Abel-type integral equations with the Gauss hypergeometric function in the kernels over pyramidal domain]. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhaunaga universiteta*, *2*(62), 22–27. (In Russ., abstr. in Engl.).
14. Skoromnik, O. V., & Shlapakov, S. A. (2014). Reshenie mnogomernogo integral'nogo uravneniya pervogo roda s funktsiei Kummera v yadre po piramidal'noi oblasti [Solution of a Multidimensional Integral Equation of the First Kind with Kummer Function in the Kernel over a Pyramidal Domain]. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhaunaga universiteta*, *1*(79), 12–17. (In Russ., abstr. in Engl.).
15. Skoromnik, O. V., & Shlapakov, S. A. (2018). Reshenie mnogomernogo integral'nogo uravneniya tipa Abelya s funktsiei Besselya–Klifforda v yadre po piramidal'noi oblasti [Solution of a multidimensional integral abel type equation with the Bessel–Klifford function in the kernel over a pyramidal domain]. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhaunaga universiteta*, *2*(99), 5–13. (In Russ., abstr. in Engl.).
16. Papkovich, M. V., Skoromnik, O. V. (2021). Reshenie mnogomernogo integral'nogo uravneniya tipa Abelya s funktsiei giperbolicheskogo sinusa v yadre po piramidal'noi oblasti. In A. M. Magomedov et al. (Eds.), *Aktual'nye problemy matematiki i informatsionnykh tekhnologii* (124–127). Makhachkala: DGU. (In Russ.).
17. Papkovich, M. V., Skoromnik, O. V., & Shlapakov, S. A. (2021). Reshenie odnogo klassa mnogomernykh integral'nykh uravnenii pervogo roda s funktsiei giperbolicheskogo sinusa v yadrakh [Solution of one class of multi-dimensional integral equations of the first kind with hyperbolic sine function in kernels]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (12), 77–83.
18. Corenflo, R., Kilbas, A., Mainardi, F., & Rogosin, S. (2020). *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications* (2nd ed.). Berlin: Springer Verlag. URL: link.springer.com›book/10.1007/978-3-662-61550-8.

Поступила 15.04.2025

SOLUTION OF ONE CLASS OF MULTI-DIMENSIONAL INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH MITTAG-LEFFLER FUNCTION IN KERNELS

S. SITNIK
(The National Research University «Belgorod State University» (BelSU), Russia)

O. SKOROMNIK, M. PAPKOVICH
(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

One class of multidimensional integral equations of the first kind with Mittag-Leffler function in kernels over a bounded pyramidal domain of a special form is considered. Following the technique of Ya. Tamarkin, explicit formulas for the solution of the considered multidimensional integral equations are derived. Necessary and sufficient conditions for the solvability of such equations in spaces of summable functions are established.

Keywords: *multidimensional integral equations of the first kind, Mittag-Leffler function, space of integrable functions, fractional integrals and derivatives.*