

МАТЕМАТИКА

УДК 517.983

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ФУНКЦИЕЙ ЛЕЖАНДРА В ЯДРАХ В $\mathcal{L}_{\nu,r}$ -ПРОСТРАНСТВАХканд. физ.-мат. наук, доц. О.В. СКОРОМНИК; Ю.В. ЖАВОРОНОК
(Полоцкий государственный университет)

Рассматриваются четыре интегральных уравнения первого рода на положительной полуоси, содержащие функцию Лежандра в ядрах. С использованием представлений интегральных операторов левых частей рассматриваемых уравнений в виде композиции двух операторов дробного интегрирования со степенными весами ранее были установлены условия их ограниченности из одних весовых пространств суммируемых функций в другие. Эти результаты применяются для вывода явных формул решений изучаемых в работе интегральных уравнений в рассматриваемых пространствах.

Вспомогательные сведения

Гамма-функцией $\Gamma(z)$ [1, § 1] называется интеграл Эйлера второго рода

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad (1)$$

который сходится при всех $z \in \mathbb{C}$, для которых $\operatorname{Re}(z) > 0$. Здесь $x^{z-1} = e^{(z-1)\ln x}$, $x > 0$. На полуплоскость $\operatorname{Re}(z) \leq 0$, $z \neq 0, -1, -2, -3, \dots$, гамма-функция доопределяется с помощью аналитического продолжения этого интеграла. Так, получаемая из (1) интегрированием по частям формула понижения $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\operatorname{Re}(z) > 0$, после многократного применения приводит к равенству

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)}, \quad \operatorname{Re}(z) > -n, \quad n=1, 2, \dots, z \neq 0, -1, -2, \dots, \quad (2)$$

$(z)_n = z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)$, $n=1, 2, 3, \dots$, $(z)_0 \equiv 1$ – символ Похгаммера,

позволяющему осуществить такое аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Re}(z) > -n$ при любом n .

Бета-функцией называется интеграл [1, § 1]

$$B(z, \omega) = \int_0^1 x^{z-1} (1-x)^{\omega-1} dx, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(\omega) > 0 \quad (3)$$

(интеграл Эйлера первого рода). Он выражается через гамма-функцию по формуле

$$B(z, \omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}. \quad (4)$$

Гипергеометрическая функция Гаусса определяется при $|z| < 1$ как сумма гипергеометрического ряда

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \cdot \frac{z^k}{k!}. \quad (5)$$

Его параметры a , b , c и переменная z могут быть комплексными, причем $c \neq 0, -1, -2, \dots$. Ряд (5) сходится при $|z| < 1$ и при $|z| = 1$, $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$, а при остальных значениях z функция Гаусса определяется как аналитическое продолжение этого ряда.

Один из способов такого продолжения – использование интегрального представления Эйлера:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt, \quad 0 < \operatorname{Re} b < \operatorname{Re} c, |\arg(1-z)| < \pi, \quad (6)$$

где правая часть определена при указанных условиях, обеспечивающих сходимость интеграла. Классические результаты в теории этой функции представлены в ряде работ [2–4].

Интерес к функциям (5) и (6) и их различным обобщениям вызван применением этих функций в прикладных задачах и в теории дифференциальных и интегральных уравнений [5].

Отметим, что через функцию Гаусса определяются многие важные специальные функции. Так, присоединенная функция Лежандра $P_V^\mu(z)$ представляется в виде

$$P_V^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{\frac{\mu}{2}} {}_2F_1 \left(-\nu, 1+\nu; 1-\mu; \frac{1-z}{2} \right), \quad z \notin [-1, 1], \quad (7)$$

$$P_V^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{\mu}{2}} {}_2F_1 \left(-\nu, 1+\nu; 1-\mu; \frac{1-x}{2} \right), \quad -1 < x < 1. \quad (8)$$

Интегралы

$$(I_{0+}^\alpha \varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad 0 < x < \infty, \quad (9)$$

$$(I_-^\alpha \varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad -\infty < x < 0, \quad (10)$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, называются интегралами дробного порядка α [1]. Первый из них (9) называют левосторонним, а второй (10) – правосторонним интегралом на полуоси. Операторы $I_{0+}^\alpha \varphi$, $I_-^\alpha \varphi$ называют операторами дробного интегрирования. Интегралы (9), (10) принято называть также дробными интегралами Римана – Лиувилля на полуоси.

Для функции $f(x)$, заданной на полуоси $(0, \infty)$, каждое из выражений

$$(D_{0+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1, \quad (11)$$

$$(D_-^\alpha f)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^\infty \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1, \quad (12)$$

называется дробной производной порядка $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$ на полуоси, соответственно левосторонней и правосторонней [1]. Дробные производные (11), (12) называют обычно производными Римана – Лиувилля на полуоси.

Для степенной функции $\varphi(x) = x^{\beta-1}$, $\operatorname{Re}(\beta) > 0$, имеем [1, (2.44)]:

$$I_{0+}^\alpha \varphi = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} x^{\alpha+\beta-1}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad (13)$$

$$D_{0+}^\alpha \varphi = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha-1}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) \geq 0. \quad (14)$$

Для степенной функции $\varphi(x) = x^{\beta-1}$ [1, табл. 9.3, формула (1)]

$$I_-^\alpha \varphi = \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} x^{\alpha+\beta-1}, \quad \operatorname{Re}(\alpha+\beta) < 1, \quad (15)$$

$$D_-^\alpha \varphi = \frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} x^{\beta-\alpha-1}, \quad \operatorname{Re}(n-\alpha+\beta) < 1, \quad n = [\operatorname{Re} \alpha] + 1. \quad (16)$$

Будем использовать следующие обозначения:

$$I_{0+}^\alpha f = \begin{cases} I_{0+}^\alpha f, & \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \\ D_{0+}^{-\alpha} f, & \operatorname{Re}(\alpha) \leq 0; \end{cases} \quad I_-^\alpha f = \begin{cases} I_-^\alpha f, & \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \\ D_-^{-\alpha} f, & \operatorname{Re}(\alpha) \leq 0. \end{cases}$$

Дробные интегралы порядка $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, функции $\varphi(x)$ по функции x^σ ($x > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$) определяются формулами:

$$\left(I_{0+;x^\sigma}^\alpha \varphi\right)(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{t^{\sigma-1} \varphi(t)}{(x^\sigma - t^\sigma)^{1-\alpha}} dt \quad (x > 0; \operatorname{Re}(\alpha) > 0), \quad (17)$$

$$\left(I_{-;x^\sigma}^\alpha \varphi\right)(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \frac{t^{\sigma-1} \varphi(t)}{(t^\sigma - x^\sigma)^{1-\alpha}} dt \quad (x > 0; \operatorname{Re}(\alpha) > 0), \quad (18)$$

а соответствующие дробные производные порядка α ($\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$) имеют вид

$$\left(D_{0+;x^\sigma}^\alpha f\right)(x) = \left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1} dx}\right)^n \left(I_{0+;x^\sigma}^{n-\alpha} f\right)(x) \quad (x > 0; n = \operatorname{Re}[\alpha] + 1), \quad (19)$$

$$\left(D_{-;x^\sigma}^\alpha f\right)(x) = \left(-\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1} dx}\right)^n \left(I_{-;x^\sigma}^{n-\alpha} f\right)(x) \quad (x > 0; n = \operatorname{Re}[\alpha] + 1) \quad (20)$$

(см. [1, § 18.2]). Мы будем использовать для них следующие обозначения для $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$I_{0+;x^\sigma}^\alpha \varphi = \begin{cases} I_{0+;x^\sigma}^\alpha \varphi, & \operatorname{Re} \alpha > 0, \\ D_{0+;x^\sigma}^{-\alpha} \varphi, & \operatorname{Re} \alpha \leq 0; \end{cases} \quad I_{-;x^\sigma}^\alpha \varphi = \begin{cases} I_{-;x^\sigma}^\alpha \varphi, & \operatorname{Re} \alpha > 0, \\ D_{-;x^\sigma}^{-\alpha} \varphi, & \operatorname{Re} \alpha \leq 0. \end{cases} \quad (21)$$

Введем пространство $\mathcal{L}_{v,r}$ измеримых по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначных функций f на $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, для которых $\|f\|_{v,r} < \infty$, где

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{v,r}} = \left(\int_0^\infty \left| t^v f(t) \right|^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (1 \leq r < \infty, v \in \mathbb{R}), \quad (22)$$

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{v,\infty}} = \operatorname{ess\,sup}_{t>0} \left[t^v |f(x)| \right].$$

Пусть комплексные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ такие, что существует одно α_j , для которого $\operatorname{Re} \alpha_j = \min(\operatorname{Re} \alpha_1, \dots, \operatorname{Re} \alpha_n, \operatorname{Re} \alpha_{n+1})$. Тогда положим $\alpha_{n+1} = 0$ и введем функцию [1, § 10]

$$m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{cases} 0, & \operatorname{Re} \alpha_j > 0, i = 1, 2, \dots, n. \\ -\alpha_j, & \text{если существует } \alpha_j, \text{ для которого} \\ \operatorname{Re} \alpha_j < \min(0, \operatorname{Re} \alpha_1, \dots, \operatorname{Re} \alpha_{j-1}, \operatorname{Re} \alpha_{j+1}, \dots, \operatorname{Re} \alpha_n) \end{cases} \quad (23)$$

(если существуют α_j, α_k , такие, что $\alpha_j \neq \alpha_k$, но $\operatorname{Re} \alpha_j = \operatorname{Re} \alpha_k = \min(0, \operatorname{Re} \alpha_1, \dots, \operatorname{Re} \alpha_n)$, то функция $m(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ не определяется);

$$I_{0+}^{m(\alpha)}(\mathcal{L}_{v,r}) = \begin{cases} \mathcal{L}_{v,r}, & \operatorname{Re} \alpha > 0, \\ I_{0+}^{-\alpha}(\mathcal{L}_{v,r}), & \operatorname{Re} \alpha < 0, \end{cases}; \quad I_{-}^{m(\alpha)}(\mathcal{L}_{v,r}) = \begin{cases} \mathcal{L}_{v,r}, & \operatorname{Re} \alpha > 0, \\ I_{-}^{-\alpha}(\mathcal{L}_{v,r}), & \operatorname{Re} \alpha < 0, \end{cases} \quad (1 < r < \infty). \quad (24)$$

Т е о р е м а о действии операторов $P_{\delta,j}^\gamma$ ($j=1,2,3,4$) в $\mathcal{L}_{v,r}$ -пространствах

В [1, § 35; 6] были рассмотрены четыре интегральных уравнения с функцией Лежандра в ядре:

$$\left(P_{\delta,1}^\gamma f\right)(x) \equiv \int_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma\left(\frac{x}{t}\right) f(t) dt = g(x); \quad (25)$$

$$\left(P_{\delta,4}^\gamma f\right)(x) \equiv \int_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{-\frac{\gamma}{2}} P_\delta^\gamma\left(\frac{t}{x}\right) f(t) dt = g(x); \quad (26)$$

$$\left(P_{\delta,3}^\gamma f\right)(x) \equiv \int_x^\infty \left(t^2 - x^2\right)^{-\frac{\gamma}{2}} P_\delta^\gamma\left(\frac{x}{t}\right) f(t) dt = g(x); \quad (27)$$

$$\left(P_{\delta,2}^\gamma f\right)(x) \equiv \int_x^\infty \left(t^2 - x^2\right)^{-\frac{\gamma}{2}} P_\delta^\gamma\left(\frac{t}{x}\right) f(t) dt = g(x), \quad (28)$$

полагая во всех случаях $0 \leq x \leq \infty$, $\operatorname{Re} \gamma < 1$, чтобы указанные интегралы сходились на переменном конце. В [1, § 35.2] были получены следующие композиционные разложения для этих операторов в пространствах $L_p(a,b)$, $0 < a < b < +\infty$, $1 \leq p < +\infty$:

$$\left(P_{\delta,1}^\gamma f\right)(x) = I_{0+}^{-\gamma-\delta} I_{0+;x^2}^{\delta+1} (2x)^{-\delta-1} f(x), \quad (29)$$

$$\left(P_{\delta,4}^\gamma f\right)(x) = (2x)^{\delta+1} I_{0+;x^2}^{-\delta-1} I_{0+}^{-\gamma+\delta+2} f(x), \quad (30)$$

$$\left(P_{\delta,3}^\gamma f\right)(x) = 2^{\delta+1} x^{-\gamma+\delta+3} I_{-;x^2}^{-\delta-1} x^{\gamma+\delta-1} I_{-}^{-\gamma+\delta+2} x^{-\delta-1} f(x), \quad (31)$$

$$\left(P_{\delta,2}^\gamma f\right)(x) = 2^{-\delta-1} x^{\delta+1} I_{-}^{-\gamma-\delta} x^{\gamma-\delta-1} I_{-;x^2}^{\delta+1} x^{-\gamma-\delta-1} f(x). \quad (32)$$

Ограниченность операторов, стоящих в левых частях (25)–(28), и справедливость представлений (29)–(32) в весовых пространствах $\mathcal{L}_{v,r}$, $1 < r < +\infty$, были установлены в [6].

ТЕОРЕМА 1 [6, Теорема 1] Пусть $\delta, \gamma, v \in \mathbb{R}$, $1 < r < \infty$, $\gamma < 1$, $-2\delta - 1 \neq \mathbb{Z}$ и выполняются какие-либо из условий A_j таблицы 1. Тогда соответствующий оператор B_j определен на множестве C_j и ограниченно отображает C_j на множество D_j , причем имеют место равенства E_j .

Таблица 1

Действие операторов $P_{\delta,j}^\gamma$ ($j=1,2,3,4$) из $\mathcal{L}_{v,r}$ на $\mathcal{L}_{v+\gamma-1,r}$

J	A_j	B_j	C_j	D_j	E_j
1	$v < \min((- \delta + 1), (\delta + 2))$ $\delta > -1, \gamma + \delta < 0$	$P_{\delta,1}^\gamma$	$\mathcal{L}_{v,r}$	$\mathcal{L}_{v+\gamma-1,r}$	(29)
2	$v < \min(1, (\delta - \gamma + 4))$ $\gamma - \delta < 2, \delta < -1$	$P_{\delta,4}^\gamma$	$\mathcal{L}_{v,r}$	$\mathcal{L}_{v+\gamma-1,r}$	(30)
3	$v > \max((2\delta - \gamma + 1), (-\delta - 2))$ $\gamma - \delta < 2, \delta < -1$	$P_{\delta,3}^\gamma$	$\mathcal{L}_{v,r}$	$\mathcal{L}_{v+\gamma-1,r}$	(31)
4	$v > \max((-\gamma + \delta + 1), (-\gamma - \delta))$ $\delta > -1, \gamma + \delta < 0$	$P_{\delta,2}^\gamma$	$\mathcal{L}_{v,r}$	$\mathcal{L}_{v+\gamma-1,r}$	(32)

Решение интегральных уравнений $(P_{\delta,j}^{\gamma} f)(x) = g(x) \quad (j=1,2,3,4)$ в $\mathcal{L}_{v,r}$ -пространствах

Как показывают формулы (29)–(32), интегралы $P_{\delta,j}^{\gamma} f \in \mathcal{L}_{v+\gamma-1,r}$, $j=1,2,3,4$, представимы в виде композиций двух односторонних дробных интегралов со степенными весами. Условия такой представимости в весовых пространствах суммируемых функций на полуоси отражает теорема 1, из которой следует, что если $f(x)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_{v,r}$ (или некоторому его подпространству), то при соответствующих условиях операторы $P_{\delta,j}^{\gamma}$ ($j=1,2,3,4$) действуют на определенное подпространство из $\mathcal{L}_{\omega,r}$, $1 < r < \infty$, и справедливы те или иные из формул (29)–(32). Это означает, что если правая часть – функция $g(x)$ – берется из указанной области, на которую действует оператор $P_{\delta,j}^{\gamma}$ ($j=1,2,3,4$), соответствующее уравнение $(P_{\delta,j}^{\gamma} f)(x) = g(x)$ ($j=1,2,3,4$) однозначно разрешимо путем последовательного обращения двух интегро-дифференциальных операторов, композиция которых составляет $P_{\delta,j}^{\gamma}$ ($j=1,2,3,4$).

Осуществляя такие обращения, из формул (29)–(32) были получены следующие представления решений уравнений (25)–(28) [1, § 35; 6]:

$$f(x) = (2x)^{\delta+1} I_{0+}^{-\delta-1} I_{0+}^{\gamma+\delta} g(x), \quad (33)$$

$$f(x) = I_{0+}^{\gamma-\delta-2} I_{0+}^{\delta+1} (2x)^{-\delta-1} g(x), \quad (34)$$

$$f(x) = (x/2)^{\delta+1} I_{-}^{\gamma-\delta-2} x^{1-\gamma-\delta} I_{-;x^2}^{\delta+1} x^{\gamma-\delta-3} g(x), \quad (35)$$

$$f(x) = 2^{\delta+1} x^{\gamma+\delta+1} I_{-;x^2}^{-\delta-1} x^{1+\delta-\gamma} I_{-}^{\gamma+\delta} x^{-\delta-1} g(x). \quad (36)$$

Справедлива теорема.

ТЕОРЕМА 2 [6, Теорема 2] Пусть $\delta, \gamma, v \in \mathbb{R}$, $1 < r < \infty$, $\gamma < 1$, $-2\delta - 1 \neq \mathbb{Z}$, $g(x) \in \mathcal{L}_{v+\gamma-1,r}$ и выполняются какие-либо из условий A_j таблицы 2. Тогда соответствующее уравнение B_j имеет единственное решение $f \in \mathcal{L}_{v,r}$, выражаемое формулой C_j .

Таблица 2

Решение уравнений (26)–(29) в $\mathcal{L}_{v,r}$ -пространствах

J	A_j	B_j	C_j
1	$v < \min((- \delta + 1), (\delta + 2)), \delta > -1, \gamma + \delta < 0$	(25)	(33)
2	$v < \min(1, (\delta - \gamma + 4)), \gamma - \delta < 2, \delta < -1$	(26)	(34)
3	$v > \max\{(2\delta - \gamma + 1), (-\delta - 2)\}, \gamma - \delta < 2, \delta < -1$	(27)	(35)
4	$v > \max\{(-\gamma + \delta + 1), (-\gamma - \delta)\}, \delta > -1, \gamma + \delta < 0$	(28)	(36)

Примеры решений уравнений (25)–(28)

Пусть $\delta, \gamma, v \in \mathbb{R}$, $\gamma < 1$, $-2\delta - 1 \neq \mathbb{Z}$, $d > 0$. Пусть $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$; $g(x) = Ax^{\beta-1}\theta(d-x) \in \mathcal{L}_{v+\gamma-1,r}$ ($A \in \mathbb{R}, \beta > 0$), $1 \leq r < \infty$, $v > 2 - \beta - \gamma$.

Согласно теореме 2 интегральные уравнения:

$$(P_{\delta,1}^{\gamma} f)(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\gamma/2} P_{\delta}^{\gamma} \left(\frac{x}{t} \right) f(t) dt = Ax^{\beta-1}\theta(d-x), \quad x > 0, \quad (37)$$

при $v < \min((- \delta + 1), (\delta + 2)), \delta > -1, \gamma + \delta < 0$;

$$\left(P_{\delta,4}^{\gamma} f\right)(x)=\int_0^x\left(x^2-t^2\right)^{-\gamma / 2} P_{\delta}^{\gamma}\left(\frac{t}{x}\right) f(t) d t=A x^{\beta-1} \theta(d-x), x>0, \quad (38)$$

при $\nu < \min(1, (\delta - \gamma + 4))$, $\gamma - \delta < 2, \delta < -1$;

$$\left(P_{\delta,3}^{\gamma} f\right)(x)=\int_x^{\infty}\left(t^2-x^2\right)^{-\gamma / 2} P_{\delta}^{\gamma}\left(\frac{x}{t}\right) f(t) d t=A x^{\beta-1} \theta(d-x), x>0, \quad (39)$$

при $\nu > \max\{(2\delta - \gamma + 1), (-\delta - 2)\}$, $\gamma - \delta < 2, \delta < -1$;

$$\left(P_{\delta,2}^{\gamma} f\right)(x)=\int_x^{\infty}\left(t^2-x^2\right)^{-\gamma / 2} P_{\delta}^{\gamma}\left(\frac{t}{x}\right) f(t) d t=A x^{\beta-1} \theta(d-x), x>0, \quad (40)$$

при $\nu > \max\{(-\gamma + \delta + 1), (-\gamma - \delta)\}$, $\delta > -1, \gamma + \delta < 0$, – имеют единственные решения $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$, выражаемые соответственно формулами:

$$f(x)=(2 x)^{\delta+1} I_{0+; x^2}^{-\delta-1} I_{0+}^{\gamma+\delta} A x^{\beta-1} \theta(d-x), \quad (41)$$

$$f(x)=I_{0+}^{\gamma-\delta-2} I_{0+; x^2}^{\delta+1}(2 x)^{-\delta-1} A x^{\beta-1} \theta(d-x), \quad (42)$$

$$f(x)=(x / 2)^{\delta+1} I_{-; x^2}^{\gamma-\delta-2} x^{1-\gamma-\delta} I_{-; x^2}^{\delta+1} x^{\gamma-\delta-3} A x^{\beta-1} \theta(d-x), \quad (43)$$

$$f(x)=2^{\delta+1} x^{\gamma+\delta+1} I_{-; x^2}^{-\delta-1} x^{1+\delta-\gamma} I_{-}^{\gamma+\delta} x^{-\delta-1} A x^{\beta-1} \theta(d-x). \quad (44)$$

Докажем лемму.

Лемма 1. Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$, $\sigma > 0$, $\beta \in \mathbb{C}$ такие, что $\operatorname{Re}(\beta) > 1 - \sigma$.

(а) Если $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, то

$$\left(I_{0+; x^{\sigma}}^{\alpha} t^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma\left(1+\frac{\beta-1}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(1+\alpha+\frac{\beta-1}{\sigma}\right)} x^{\beta+\sigma \alpha-1} . \quad (45)$$

(б) Если $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$, то

$$\left(D_{0+; x^{\sigma}}^{\alpha} t^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma\left(1+\frac{\beta-1}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(1-\alpha+\frac{\beta-1}{\sigma}\right)} x^{\beta-\sigma \alpha-1} .$$

Доказательство. (а) Применяя последовательно формулы (17), (3), (4), получаем

$$\begin{aligned} \left(I_{0+; x^{\sigma}}^{\alpha} t^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{t^{\sigma-1} t^{\beta-1}}{\left(x^{\sigma}-t^{\sigma}\right)^{1-\alpha}} d t = \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{t^{\sigma+\beta-2}}{\left(x^{\sigma}-t^{\sigma}\right)^{1-\alpha}} d t = \left[y = \frac{t^{\sigma}}{x^{\sigma}}\right] = \\ &= \frac{x^{\alpha \sigma+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 y^{\frac{\beta-1}{\sigma}+1-1} (1-y)^{\alpha-1} d y = \frac{x^{\alpha \sigma+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} B\left(1+\frac{\beta-1}{\sigma}, \alpha\right) = \\ &= \frac{\Gamma\left(1+\frac{\beta-1}{\sigma}\right) \Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(1+\frac{\beta-1}{\sigma}+\alpha\right)} \frac{x^{\alpha \sigma+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\Gamma\left(1+\frac{\beta-1}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(1+\alpha+\frac{\beta-1}{\sigma}\right)} x^{\alpha \sigma+\beta-1} \end{aligned}$$

($x > 0, \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 1 - \sigma, \sigma > 0$).

(б) Применяя последовательно формулы (19), (45), (2), получаем

$$\begin{aligned} \left(D_{0+;x^\sigma}^\alpha t^{\beta-1}\right)(x) &= \left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1} dx}\right)^n \left(I_{0+;x^\sigma}^{n-\alpha} t^{\beta-1}\right)(x) = \left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1} dx}\right)^n \left(\frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{t^{\beta+\sigma-2}}{(x^\sigma - t^\sigma)^{1-n+\alpha}} dt\right) = \\ &= \left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1} dx}\right)^n \left(\frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma\left(1+\frac{\beta-1}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(1-\alpha+\frac{\beta-1}{\sigma}+n\right)} x^{\sigma\left(\left(\frac{\beta-1}{\sigma}\right)-\alpha+n\right)}\right) = \\ &= \left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1} dx}\right)^n \left(\frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma\left(1+\frac{\beta-1}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(1-\alpha+\frac{\beta-1}{\sigma}\right)_n} x^{\sigma\left(\left(\frac{\beta-1}{\sigma}\right)-\alpha+n\right)}\right) = \frac{\Gamma\left(1+\frac{\beta-1}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(1-\alpha+\frac{\beta-1}{\sigma}\right)} x^{\beta-\sigma\alpha-1} \end{aligned}$$

($x > 0, \operatorname{Re}(\alpha) \geq 0, \operatorname{Re}(\beta) > 1 - \sigma, \sigma > 0$).

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $\alpha \in \mathbb{C}, \sigma > 0, \beta \in \mathbb{C}$.

(а) Если $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ и $\sigma \operatorname{Re}(\alpha) + \operatorname{Re}(\beta) < 1$, то

$$\left(I_{-;x^\sigma}^\alpha t^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\beta}{\sigma} - \alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\beta}{\sigma}\right)} x^{\beta+\sigma\alpha-1}.$$

(б) Если $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$ и $\sigma[n - \operatorname{Re}(\alpha)] + \operatorname{Re}(\beta) < 1, n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$, то

$$\left(D_{-;x^\sigma}^\alpha t^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\beta}{\sigma} + \alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\beta}{\sigma}\right)} x^{\beta-\sigma\alpha-1}.$$

Доказательство леммы 2 проводится аналогично доказательству леммы 1 с использованием формул (18) и (20) соответственно.

Применяя лемму 1, лемму 2, формулы (13)–(14) и (15)–(16) из представлений (41)–(44) окончательно получаем:

$$f(x) = 2^{\delta+1} A \frac{\Gamma(\beta) \Gamma\left(\frac{\gamma+\delta+\beta+1}{2}\right)}{\Gamma(\gamma+\delta+\beta) \Gamma\left(\frac{\gamma-\delta+\beta-1}{2}\right)} x^{\gamma+\beta-2} \theta(d-x), \quad (46)$$

$\beta > \max(0, -\delta - \gamma, -\delta - \gamma - 1, -\delta + \gamma + 1)$;

$$f(x) = 2^{-\delta-1} A \frac{\Gamma(\delta+\beta+1) \Gamma\left(\frac{-\delta+\beta}{2}\right)}{\Gamma(\gamma+\beta-1) \Gamma\left(\frac{\delta+\beta}{2} + 1\right)} x^{\gamma+\beta-2} \theta(d-x), \quad (47)$$

$\beta > \max(\delta, -\delta - 1, -\delta - 2, 1 - \gamma)$;

$$f(x) = 2^{-\delta-1} A \frac{\Gamma(3-\gamma-\beta+\delta) \Gamma\left(\frac{-\gamma-\delta-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma(1-\beta) \Gamma\left(\frac{-\gamma+\delta-\beta}{2}+2\right)} x^{\gamma+\beta-2} \theta(d-x), \quad (48)$$

$$\beta < \min(1, 3-\gamma+\delta, 4-\gamma+\delta, 2-\gamma-\delta);$$

$$f(x) = 2^{\delta+1} A \frac{\Gamma(2-\gamma-\beta) \Gamma\left(\frac{3+\delta-\beta}{2}\right)}{\Gamma(2+\delta-\beta) \Gamma\left(\frac{1-\delta-\beta}{2}\right)} x^{\gamma+\beta-2} \theta(d-x), \quad (49)$$

$$\beta < \min(1-\delta, 2+\delta, 3+\delta, 2-\gamma), \text{ — соответственно для уравнений (37) – (40).}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск, 1987. – 688 с.
2. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973. – Т. 1: Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра. – 294 с.
3. Джрбашян, М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.М. Джрбашян. – М.: Наука, 1966.
4. Прудников, А.П. Интегралы и ряды: в 3 т. / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1986. – Т. 3: Дополнительные главы. – 801 с.
5. Kilbas, A.A. Theory and applications of fractional differential equation / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo // North-Holland Mathematics Studies. – Amsterdam, 2006. – Vol. 204.
6. Скоромник, О.В. Решение интегральных уравнений с функцией Лежандра в ядрах в $\mathcal{L}_{\eta,r}$ -пространствах / О.В. Скоромник // Вестн Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2008. – № 13. – С. 68–73.

Поступила 05.09.2014

**THE SOLUTION OF SOME INTEGRAL EQUATIONS
WITH THE LEGENDRE FUNCTION IN KERNELS IN $\mathcal{L}_{\nu,r}$ -SPACES**

O. SKOROMNIK, Y. ZHAVORONOK

Four integral equations of the first kind on the positive half axis involving the Legendre function in the kernels are considered. Using the representations of the integral operators in the left – hand sides of the considering equations as the compositions of fractional integral operators with power weights, the conditions for their boundedness from one weight spaces of summable functions into other spaces were established earlier. These results are applied to deduce explicit solutions of the integral equations in considered spaces, studied in the paper.