

УДК 517.958:539.3; 621.78; 621.785.5

**МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ  
СТАЛЬНЫХ ДЕТАЛЕЙ В СОСТАВЕ СБОРОЧНЫХ ЕДИНИЦ  
С УЧЕТОМ ИХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ЗАКАЛКИ****д-р техн. наук, проф. С.П. КУНДАС***(Международный государственный экологический университет им. А.Д. Сахарова, Минск);**канд. техн. наук А.В. ЛЕМЗИКОВ, канд. техн. наук Д.Г. ИВАНОВ, С.Н. МЕЛЬНИКОВ**(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск);***С.В. МЕДВЕДЕВ***(Объединенный институт информатики НАН Беларуси, Минск)*

*Рассмотрены характерные особенности остаточных напряжений при индукционной закалке, установлены вызывающие их причины. Построена математическая модель, описывающая остаточные напряжения I рода в стальных деталях. Полученное математическое описание позволяет осуществлять моделирование процесса с учетом термических и обусловленных различием удельного объема фаз деформаций, а также индуцированной фазовыми превращениями пластичности. Модель адаптирована к интеграции с тепловым расчетом и расчетом фазовых превращений, включает в себя возможность непосредственного учета зависимости механических свойств материала от температуры. Представлен алгоритм компьютерной реализации модели и конечно-элементная формулировка для случая осевой симметрии и общей трехмерной геометрии. Рассмотрена методика сквозного моделирования напряженно-деформированного состояния деталей в составе сборочных единиц с учетом остаточных напряжений, возникших при их закалке. Представлены результаты моделирования.*

**Введение.** Использование индукционного нагрева для закалки стальных деталей в последнее время находит все большее применение в промышленности. Обусловлено это следующими его преимуществами перед печным: высокая скорость и локализация зоны нагрева, более низкие энергозатраты, экологическая чистота метода.

При разработке технологического процесса термообработки с применением индукционного нагрева стоит задача оценки и выбора таких параметров системы, как частота напряжения, питающего индуктор, форма и размеры индуктора, мощность генератора и т.п. Критериями для выбора этих параметров являются чаще всего свойства деталей, обеспечиваемые термообработкой (распределение твердости по сечению стальной детали, остаточные напряжения и деформации и др.). Следует отметить, что оценка остаточных напряжений при проектировании технологии термообработки крайне важна в связи с тем, что при последующей эксплуатации детали остаточные напряжения суммируются с напряжениями, вызванными внешней нагрузкой, что в свою очередь может привести к разрушению. Для решения этой проблемы может быть использован целый ряд экспериментальных методов [1]. Вместе с тем проведение такого рода экспериментов возможно лишь в хорошо оборудованных, дорогостоящих, специализированных лабораториях высококвалифицированными специалистами.

Альтернативным подходом к оценке остаточных напряжений является использование последних достижений в области теории напряженно-деформированного состояния (НДС) твердого тела и построение на их основе математических и компьютерных моделей. Такой подход позволяет значительно упростить инженерный анализ как технологического процесса закалки, так и работы деталей в составе сборочных единиц и сократить затраты времени и материальных средств на технологическую подготовку производства.

**Физические явления в процессе индукционной закалки. Причины остаточных напряжений**

Вопросу о причинах, вызывающих остаточные напряжения при термообработке, в литературе уделяется недостаточное внимание, хотя только в случае детального представления о природе этого явления возможно построение адекватной математической модели.

В соответствии с [2, 3] при нагреве детали источники теплоты обусловлены возникновением вихревых токов вследствие действия переменного магнитного поля. Нагрев детали до температуры выше точки  $A_{c1}$  приводит к аустенитизации стали. При охлаждении аустенит распадается на феррит, перлит, бейнит и мартенсит. Неравновесные структуры бейнита и мартенсита во многих случаях являются желательными благодаря их механическим характеристикам. Однако на эксплуатационные характеристики детали помимо структуры в значительной мере влияют и упругопластические деформации детали, имеющие место в процессе закалки, которые чаще всего и приводят к остаточным напряжениям.

Рассмотрим причины, вызывающие остаточные напряжения I рода при термообработке сталей [4]:

- *термические напряжения в процессе нагрева и охлаждения.* Несмотря на то, что исходное состояние детали может быть ненапряженным, в процессе быстрого нагрева или охлаждения за счет тер-

мического градиента различные части детали становятся несогласованными, что может привести к превышению предела упругости с дальнейшим переходом в область пластического течения. После охлаждения до комнатной температуры остаточная деформация сохраняется и является причиной остаточных напряжений [5];

- *различие в структурных составляющих по сечению детали.* Целью термообработки является получение требуемого фазового состава и свойств детали. Так, например, часто необходимо достижение такого результата, когда поверхность детали до некоторой глубины составляет мартенсит, а сердцевину – феррит и перлит [6]. Различные механизмы образования этих фаз из аустенита (диффузионный – для феррита и перлита; сдвиговый – для мартенсита), ряд особенностей кинетического и термодинамического характера приводят к тому, что твердые растворы в среднем одного химического состава значительно отличаются по своим физическим свойствам [7]. К таким свойствам можно отнести температурный коэффициент линейного расширения (ТКЛР) и плотность. Необходимо отметить, что этот тип остаточных напряжений во многих случаях требует проведения отпуска;

- *индуцированная фазовыми превращениями пластичность (ИФПП).* На макроуровне ИФПП в общем рассматривается как аномальная пластическая деформация, наблюдаемая в том случае, если фазовые превращения происходят под действием внешнего напряжения, даже много меньшего, чем предел пластичности наиболее «слабой» фазы. Для объяснения этого феномена в настоящее время используются два механизма: Мэги и Гринвуда – Джонсона [8]. Механизм Мэги играет важную роль в процессе мартенситного превращения: под действием девиаторных напряжений I рода рост мартенсита более предпочтителен в определенных направлениях, т.е. является анизотропным, что вызывает необратимую пластическую деформацию. При этом необязательно наличие внешней нагрузки в общепринятом смысле – в сложных, неравномерно охлаждающихся деталях достаточно напряжений, вызванных вышеуказанными причинами. Механизм Гринвуда – Джонсона объясняет наблюдаемую ИФПП в случае диффузионного типа превращения: разность удельного объема исходной и результирующей фазы приводит к микропластичности, которая обретает анизотропный характер в условиях действия девиаторных напряжений I рода. Индуцированная фазовыми превращениями пластичность по механизму Мэги является обратимой, т.е. устраняется после повторной аустенитизации. Последние исследования в этой области показывают, что механизм Гринвуда – Джонсона является доминирующим в случае и бейнитного превращения, несмотря на то, что оно происходит по сдвиговому механизму.

#### **Математическая модель упругопластического состояния детали в процессе термообработки**

Выше была доказана необходимость решения задачи НДС в упругопластической постановке, что требует поэтапного вычисления приращения деформаций и напряжений с последующим выполнением интегрирования этих компонент на каждом шаге решения тепловой задачи. Связано это с тем, что пластическое поведение материала обладает «эффектом памяти» и решение задачи в определенный момент времени зависит от предыстории нагрузки. Необходимо отметить, что эта особенность часто делает невозможным использование для расчета остаточных напряжений конечно-элементных программ общего назначения (например, Comsol Multiphysics), т.е. требует разработки собственных программных модулей.

В общем случае соотношение между приращением деформации и напряжения связаны следующим образом [9]:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^e\}, \quad (1)$$

где  $\{\sigma\}$  и  $\{\varepsilon^e\}$  – тензоры напряжения и упругой деформации (здесь и далее тензоры напряжения и деформации представлены в векторном виде);  $[D]$  – матрица упругости материала.

В предположении малых деформаций выражение (1) может быть представлено в дифференциальном виде

$$\{d\sigma\} = [D]\{d\varepsilon^e\} + [dD]\{\varepsilon^e\}, \quad (2)$$

где  $[dD]$  – изменение матрицы упругости материала на рассматриваемом интервале приращения тензора деформаций.

Обобщая все вышесказанное, запишем выражение для суммарной деформации:

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^e\} + \{d\varepsilon^p\} + \{d\varepsilon^T\} + \{d\varepsilon^{ph}\} + \{d\varepsilon^{tp}\}, \quad (3)$$

где  $\{d\varepsilon^e\}$ ,  $\{d\varepsilon^p\}$ ,  $\{d\varepsilon^T\}$ ,  $\{d\varepsilon^{ph}\}$ ,  $\{d\varepsilon^{tp}\}$  – приращение соответственно упругих, пластических, термических, обусловленных фазовыми превращениями, ИФПП деформаций на текущем временном шаге.

Как указано в работе [10], объемная деформация для сталей в случае превращения 100 % объема аустенита в 100 % объема мартенсита составляет 0,044, а в случае полного превращения в перлит и феррит – 0,007.

Приращение деформации, обусловленной фазовыми превращениями, можно представить в виде [11]:

$$\{d\epsilon^{ph}\} = \frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V^{ph}} \{I^V\}, \quad (4)$$

где  $\Delta V/V^{ph}$  – объемная деформация при фазовом превращении;  $\{I^V\}$  – вектор, соответствующий единичному гидростатическому тензору деформации.

Аналогичным образом вычисляется термическая деформация, которая также имеет объемный характер:

$$\{d\epsilon^T\} = \alpha \{I^V\} dT + (T - T_{ref}) \{I^V\} d\alpha, \quad (5)$$

где  $T$  – температура на текущем временном шаге;  $dT$  – изменение температуры по отношению к предыдущему временному шагу;  $\alpha$  – ТКЛР;  $d\alpha$  – изменение ТКЛР на интервале  $dT$ ;  $T_{ref}$  – температура, по отношению к которой измеряется термическая деформация.

Включение в модель ИФПП деформаций представляет собой более сложную задачу. На настоящий момент только модель Леблонда позволяет получить математическое описание ИФПП применительно к напряжениям I рода [12]:

$$\{\epsilon^p\} = k \varphi(z) \{s\}. \quad (6)$$

Здесь  $k$  – параметр ИФПП;  $z$  – объемная доля образующейся фазы;  $\{s\}$  – девиаторная часть тензора напряжений;  $\varphi(z)$  – функция, описывающая кинетику ИФПП, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0, & z = 0; \\ 1, & z = 1. \end{cases} \quad (7)$$

В работах [9; 13] используется следующая дифференциальная форма выражения (6):

$$\{d\epsilon^p\} = k dz (1 - z) \{s\}. \quad (8)$$

Значение параметра ИФПП для превращения типа аустенит-феррит/перлит составляет  $4,18 \cdot 10^{-5}$  МПа<sup>-1</sup> и  $5,08 \cdot 10^{-5}$  МПа<sup>-1</sup> для превращения типа аустенит-мартенсит [13].

Запишем выражение, связывающее деформации с напряжениями, в следующем виде:

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon^e\} = [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon^{th}\} - \{\epsilon^p\} - \{\epsilon^{ph}\} - \{d\epsilon^p\}). \quad (9)$$

Таким образом, выражение (2) может быть представлено как

$$\{d\sigma\} = [D] (\{d\epsilon\} - \alpha \{I^V\} dT - (T - T_a) \{I^V\} d\alpha - \{d\epsilon^p\} - \{d\epsilon^{ph}\} - \{d\epsilon^p\}) + [dD] \{\epsilon^e\}. \quad (10)$$

В случае пластического течения материала удобно воспользоваться понятием упругопластической матрицы материала, на основе которого выражение, связывающее напряжения и деформации, будет выглядеть следующим образом:

$$\{d\sigma\} = [D_{ep}] \{d\epsilon\} + [dD] \{\epsilon^e\}, \quad (11)$$

где  $[D_{ep}]$  – упругопластическая матрица материала.

Таким образом, задача может быть сведена к поиску  $[D_{ep}]$  на каждом временном шаге тепловой нагрузки исходя из условий равновесия детали с учетом выбранного критерия пластичности.

Вычисление полного напряжения и деформаций при расчете может быть осуществлено при помощи интегрирования выражения (11).

Выбор критерия перехода в пластическую область крайне важен. Одним из наиболее значимых требований при этом является наличие справочных данных для сталей по задействованным в выбранном критерии феноменологическим параметрам. Экспериментальные исследования в области пластического поведения сталей показывают, что пластическое течение этого материала не зависит от шарового тензора (равномерное, всестороннее сжатие или растяжение), а определяется девиатором напряжений, который характеризует изменение формы элементарного объема [14]. Для такого поведения материала хорошо зарекомендовали себя два критерия перехода в область пластического течения: критерий Треска и критерий фон Мизеса.

В [14] показано, что наиболее приемлемым для сталей является критерий фон Мизеса. При этом закон, описывающий направление пластического течения, является ассоциативным, что подразумевает дифференцирование функции текучести по компонентам напряжения для определения соответствующего

щих пластических деформаций. Гладкость критерия фон Мизеса дает ему дополнительные вычислительные преимущества.

Кинематическим упрочнением в модели пластического поведения стали при индукционной закалке можно пренебречь, что связано с двумя следующими фактами:

- кинематическое упрочнение в достаточной мере проявляет себя в случае действия циклической нагрузки;
- в большинстве случаев отсутствуют справочные данные, которые отражают поведение материала при циклической нагрузке, что приводит к проблеме экспериментальной идентификации этих параметров для конкретной построенной модели.

В соответствии с ассоциативным законом пластического течения пластическая деформация

$$\{\epsilon^p\} = \gamma \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}}, \quad (12)$$

где  $f$  – некоторая функция, описывающая поверхность пластического течения;  $\gamma$  – параметр пластического течения.

Функцию  $f$ , учитывающую изотропное упрочнение, запишем в виде

$$f(\{\sigma\}, e^p) = \sqrt{\{s\}^T \{s\}} - Y(e^p), \quad (13)$$

$$Y(e^p) = \sqrt{\frac{2}{3}}(Y_0 + H_{iso} e^p), \quad (14)$$

$$e^p = \left( \frac{2}{3} \{\epsilon^p\}^T \{\epsilon^p\} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

где  $\{s\}$  – девиаторная часть тензора напряжений  $\{\sigma\}$ ;  $e^p$  – накопленная пластическая деформация;  $Y_0$  – предел упругости, соответствующий одноосному растяжению;  $H_{iso}$  – коэффициент изотропного упрочнения.

Введем понятие предельного неравенства модели:

$$g = f(\{\sigma\}, e^p) \leq 0. \quad (16)$$

Выражение (16) фактически определяет допустимые значения поля напряжений в случае упруго-пластического поведения.

Выражение (12) преобразуем к следующему дифференциальному виду:

$$\{d\epsilon^p\} = d\lambda \{n\}, \quad (17)$$

где  $\{n\}$  – тензор направления пластического течения:

$$\{n\} = \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} f_m^{-1}. \quad (18)$$

Здесь  $f_m$  может быть определено в соответствии с выражением:

$$f_m = \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}}^T \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}}. \quad (19)$$

Параметр  $d\lambda$  в выражении (17) непосредственно связан с приращением эффективной пластической деформации на рассматриваемом этапе тепловой нагрузки:

$$de^p = \sqrt{2/3} d\lambda. \quad (20)$$

Расчет параметра может быть осуществлен с учетом зависимости функции упрочнения от температуры [9]:

$$d\lambda = \frac{\{n\}^T [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon^{th}\} - \{\epsilon^p\} - \{\epsilon^{ph}\} - \{d\epsilon^{tp}\}) + \{n\}^T [dD] \{\epsilon^e\} - 2/3 Y f_m^{-1} (\partial Y / \partial T) dT}{S}, \quad (21)$$

где  $S$  может быть представлено следующим образом:

$$S = \{n\}^T [D] \{n\} + 2/3 Y f_m^{-1} H_{iso} \sqrt{2/3}.$$

Упругопластическая матрица в выражении (11), следуя математическим выкладкам [9], имеет вид

$$[D^{ep}] = \frac{[D] - [D]\{n\}\{n\}^T[D]}{S}. \quad (22)$$

Таким образом, приращение тензора напряжений на текущем шаге с учетом температурной зависимости функции упрочнения

$$\{d\sigma\} = [D^{ep}](\{\epsilon\} - \{\epsilon^{th}\} - \{\epsilon^p\} - \{\epsilon^{ph}\} - \{d\epsilon^{tp}\}) + \left( \frac{[dD] - [D]\{n\}\{n\}^T[dD]}{S} \right) \{\epsilon^e\} + \frac{2/3[D]\{n\}Y_f^{-1}(\partial Y / \partial T)dT}{S}. \quad (23)$$

### Конечно-элементная формулировка для случая осевой симметрии

Детали, обладающие осевой симметрией, широко распространены в промышленном производстве. Как уже отмечалось выше, рассмотрение этого случая позволяет понять общие закономерности формирования остаточных напряжений и (в случае же построения математической модели использование этой особенности геометрии детали) приводит к значительной экономии вычислительных ресурсов. При условии осевой симметрии геометрии детали и, соответственно, симметрично распределенного температурного поля задача расчета НДС может быть сведена к двумерной с помощью введения цилиндрических координат (координаты  $r, z, \theta$ ). В теории механики твердого деформируемого тела показывается, что ненулевые компоненты тензоров деформации и напряжения в этом случае соответствуют рисунку 1.

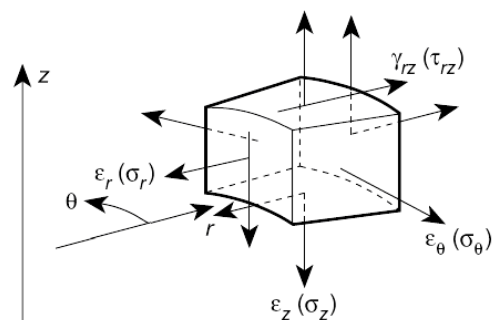


Рис. 1. Ненулевые компоненты тензоров деформации и напряжения в случае осевой симметрии

При использовании метода конечных элементов (МКЭ) задача формулируется в базисе компонент перемещения. Переход от перемещений к деформациям осуществляется с помощью следующего выражения:

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_r \quad \epsilon_z \quad \epsilon_\theta \quad \gamma_{rz}\}^T = \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} \quad \frac{\partial v}{\partial z} \quad \frac{u}{r} \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right\}^T, \quad (24)$$

где  $u$  и  $v$  – это  $r$  и  $z$  компоненты вектора перемещений соответственно.

В соответствии с принятой моделью, которая приводит к решению системы нелинейных уравнений с помощью итерационного процесса, тангенциальная матрица конечного элемента

$$[S] = 2\pi \int_{S_{el}} [B]^T [D_{ep}] [B] r dr dz, \quad (25)$$

где  $S_{el}$  – площадь конечного элемента;  $[B]$  – матрица геометрических характеристик элемента, получаемая с помощью стандартного метода конечных элементов.

Нагрузка, действующая на узлы конечно-элементной сетки, может быть записана в следующем виде:

$$\{f\} = -2\pi \int_{S_{el}} [B]^T [D_{ep}] (\{\epsilon^{th}\} + \{\epsilon^{ph}\} + \{d\epsilon^{tp}\}) r dr dz. \quad (26)$$

Матрица  $[B]$  не постоянна на элементе и зависит от расстояния от точки, в которой происходит вычисление, до оси симметрии. В связи с этим аналитическое вычисление интеграла (25) и (26) не представляется возможным. Решение этой проблемы может быть достигнуто численным интегрированием. Порядок интегрирования определяет точность решения и в значительной мере вычислительную сложность. В связи с этим важно определить такой порядок, при котором бы МКЭ обладал сходимостью, а скорость этой сходимости была бы сохранена по сравнению с тем случаем, когда используется аналитическое вычисление интегралов [15]. Обозначенным выше требованиям соответствует второй порядок квадратуры Гаусса, т.е. использование четырех точек интегрирования на серендиповом прямоугольном элементе. Однако, как известно, помимо порядка интегрирования обусловленность матрицы жесткости напрямую зависит от формулировки задачи, а именно от ее физической корректности. Касаясь рассматриваемого случая, необходимо определить такие граничные условия, которые бы привели к тому, что задача имеет одно и только одно корректное решение. Для случая осевой симметрии определение таких условий не

представляет большой сложности (в отличие от произвольной трехмерной геометрии). Очевидно, что узлы, лежащие на оси симметрии (в соответствии с рисунком 1 это ось  $z$ ), ограничены (закреплены) в перемещении в направлении оси  $r$ . Для получения единственного решения достаточно один из узлов на оси симметрии (при этом неважно какой) дополнительно ограничить (закрепить) в перемещении по оси  $z$ .

**Конечно-элементная формулировка для общего случая трехмерной геометрии.** В том случае если геометрия детали не обладает осевой симметрией, необходимо использовать полную трехмерную формулировку МКЭ для задачи НДС. Это многократно увеличивает необходимое число конечных элементов, а также число степеней свободы для каждого узла на единицу. Удобно воспользоваться декартовой системой координат, что приводит к трем степеням свободы для каждого узла (перемещения  $u$ ,  $v$  и  $w$  по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно).

Таким образом, вычислительные затраты в общем случае трехмерной геометрии многократно превышают вычислительные затраты случая осевой симметрии.

Переход от перемещений к деформациям осуществляется с помощью следующего выражения:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}^T = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right\}^T. \quad (27)$$

Тангенциальная матрица элемента

$$[S] = \int_{V_{el}} [B]^T [D_{ep}] [B] dx dy dz, \quad (28)$$

где  $V_{el}$  – объем элемента.

Вектор узловых нагрузок

$$\{f\} = \int_{V_{el}} [B]^T [D_{ep}] (\{\varepsilon^{th}\} + \{\varepsilon^{ph}\} + \{d\varepsilon^{tp}\}) r dx dy dz. \quad (29)$$

В случае если используются тетраэдральные конечные элементы, интегралы в выражениях (28) и (29) могут быть вычислены аналитически. Для других типов конечных элементов возможно проведение численного интегрирования с применением правила, описанного выше для (случая) осевой симметрии детали: порядок интегрирования должен быть на единицу больше, чем аппроксимирующий элемент полином.

На рисунке 2 представлен алгоритм решения задачи НДС с помощью метода конечных элементов.

Фазовый состав на каждом временном интервале определяется исходя из температурной истории в каждой точке интегрирования элемента [16]. Для известного фазового состава и температуры с помощью алгоритмов идентификации параметров и баз данных осуществляется расчет следующих величин: модуль Юнга  $E(T, \Sigma)$ ; коэффициент изотропного упрочнения  $H_{iso}(T, \Sigma)$ ; предел упругости  $Y_0(T, \Sigma)$ ; ТКЛР  $\alpha(T, \Sigma)$ ; коэффициент Пуансона  $\nu(T, \Sigma)$ ; параметр ИФПП  $k(T, \Sigma)$ ; матрица упругости и ее приращение на текущем временном шаге; разностная аппроксимация производной предела упругости по температуре.

Поиск решения упругопластической задачи осуществляется итерационно в соответствии с алгоритмом Ньютона – Рафсона. В качестве тангенциальной используется упругопластическая матрица.

Как видно из алгоритма решения задачи НДС, одним из обязательных этапов расчета является идентификация параметров на каждом шаге тепловой нагрузки, которая представляет собой отыскание модуля Юнга  $E(T, \Sigma)$ , коэффициента изотропного упрочнения  $H_{iso}(T, \Sigma)$  и предела упругости  $Y_0(T, \Sigma)$  для стали с определенным фазовым составом. Очевидно, что ошибка в вычислении этих параметров может значительно снизить точность вычислений в целом.

Для идентификации механических параметров стали использовалась диаграмма растяжения. Методика идентификации приведена в работе [16].

Напряжение I рода для смеси из фаз может быть вычислено путем использования правила аддитивности:

$$\Sigma = f(z)\sigma_1 + (1 - f(z))\sigma_2, \quad (30)$$

где  $\sigma_i$  и  $\Sigma$  – напряжение II рода в  $i$ -й фазе и напряжение I рода смеси соответственно;  $f(z)$  – нормализующая функция

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z = 0; \\ 1, & z = 1, \end{cases} \quad (31)$$

где  $z$  – объемное содержание фазы 1.

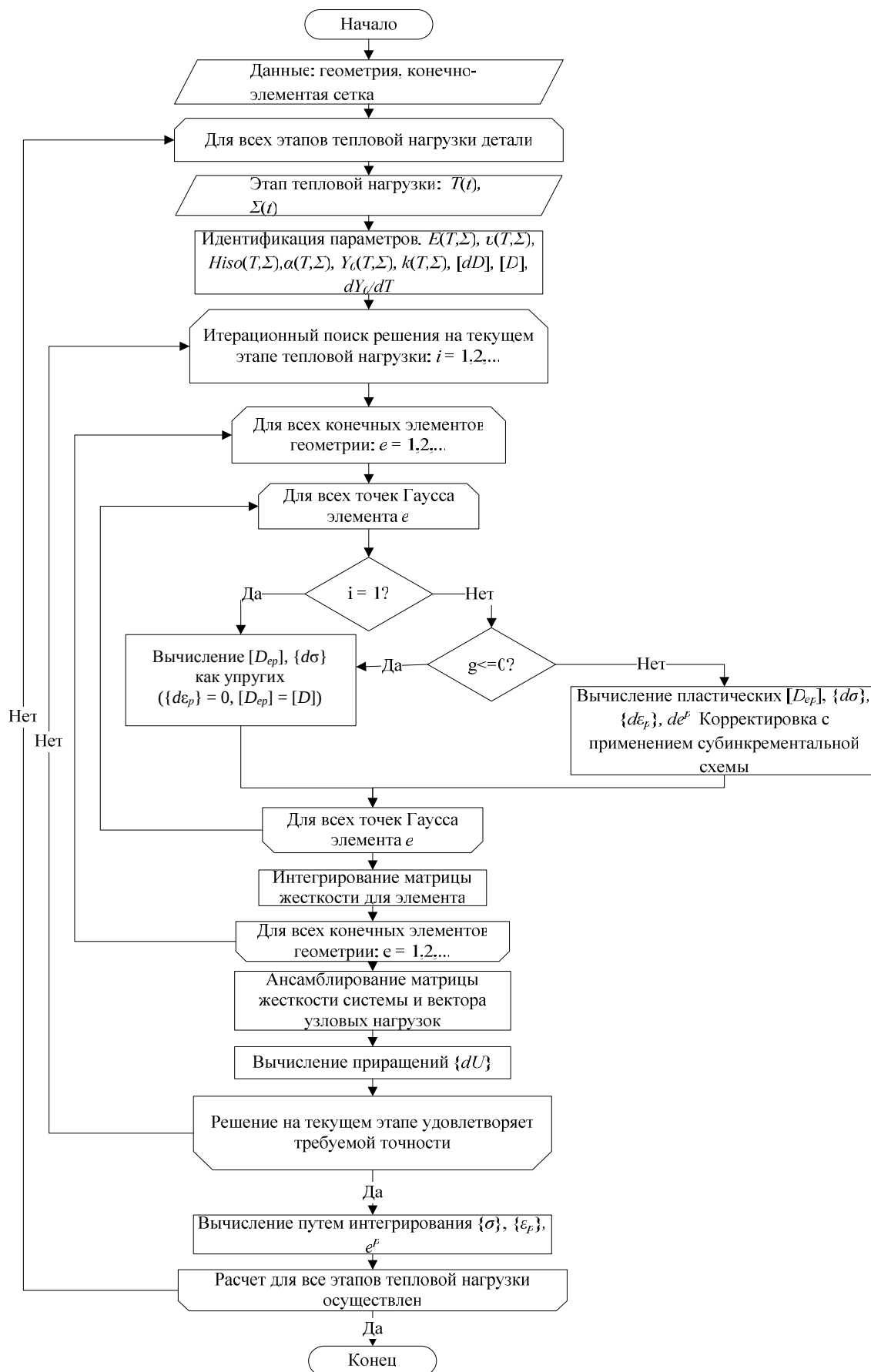


Рис. 2. Алгоритм решения задачи напряженно-деформированного состояния в процессе индукционной закалки

Численные исследования Леблонда [17; 18], а затем и экспериментальные исследования [19] показывают, что для смесей фаз на основе  $\alpha$ -модификации решетки железа (феррит, перлит, бейнит, мартенсит) справедливо линейное правило аддитивности, т.е.

$$f(z) = z. \quad (32)$$

Для смесей фаз, в которых присутствует аустенит, справедлива квадратичная аппроксимация:

$$f(z) = z^2, \quad (33)$$

где  $z$  – объемное содержание аустенита в фазе.

В силу линейной зависимости напряжений от деформаций в упругой области, справедливы следующие выражения:

$$E(\Sigma) = f(z)E_\alpha + (1 - f(z))E_\gamma; \quad (34)$$

$$Y_0(\Sigma) = f(z)Y_{0\alpha} + (1 - f(z))Y_{0\gamma}. \quad (35)$$

Вычисление коэффициента упрочнения аналогичным образом не представляется возможным (см. выражение (31)). Однако несложные математические выкладки показывают, что коэффициент упрочнения смеси двух фаз может быть вычислен с помощью выражения

$$H_{iso}(\Sigma) = \frac{E_\gamma E(\Sigma) \left( f(z) H_{iso\alpha} (E_\gamma + H_{iso\gamma}) + (1 - f(z)) H_{iso\gamma} (E_\alpha + H_{iso\alpha}) \right)}{f(z) \left( E_\alpha^2 + E_\alpha H_{iso\alpha} + E_\gamma H_{iso\alpha} \right) (E_\gamma + H_{iso\gamma}) + (1 - f(z)) E_\gamma^2 (E_\alpha + H_{iso\alpha})}. \quad (36)$$

Представленные выше модели НДС практически реализованы в программном комплексе ThermoSim 2 [20] с последующей передачей данных и моделированием процесса эксплуатации сборочной единицы в программном комплексе LS-DYNA. Так как при этом используются разные программные средства, то требуется перенести распределение напряженно-деформированного состояния, полученное путем моделирования закалки с использованием тетраэдральной конечно-элементной сетки (сетка А), на конечно-элементную сетку, состоящую из восьмиугольных элементов (сетка Б).

Предложена методика переноса результатов, которая состоит из следующих этапов:

- 1) в случае необходимости производится построение сетки А на основании информации о симметрии исследуемой детали;
- 2) с использованием опорных точек производится совмещение конечно-элементных сеток А и Б в пространстве;
- 3) для каждого узла сетки Б производится интерполяция компонентов тензора напряжений по значениям узлов сетки А;
- 4) полученные значения тензора напряжений используются в качестве начального напряженного состояния при моделировании механической задачи.

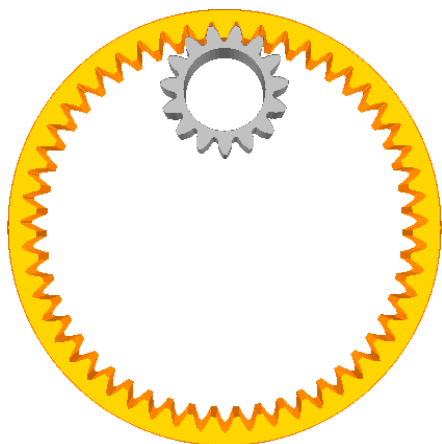


Рис. 3. Трехмерная модель исследуемой системы

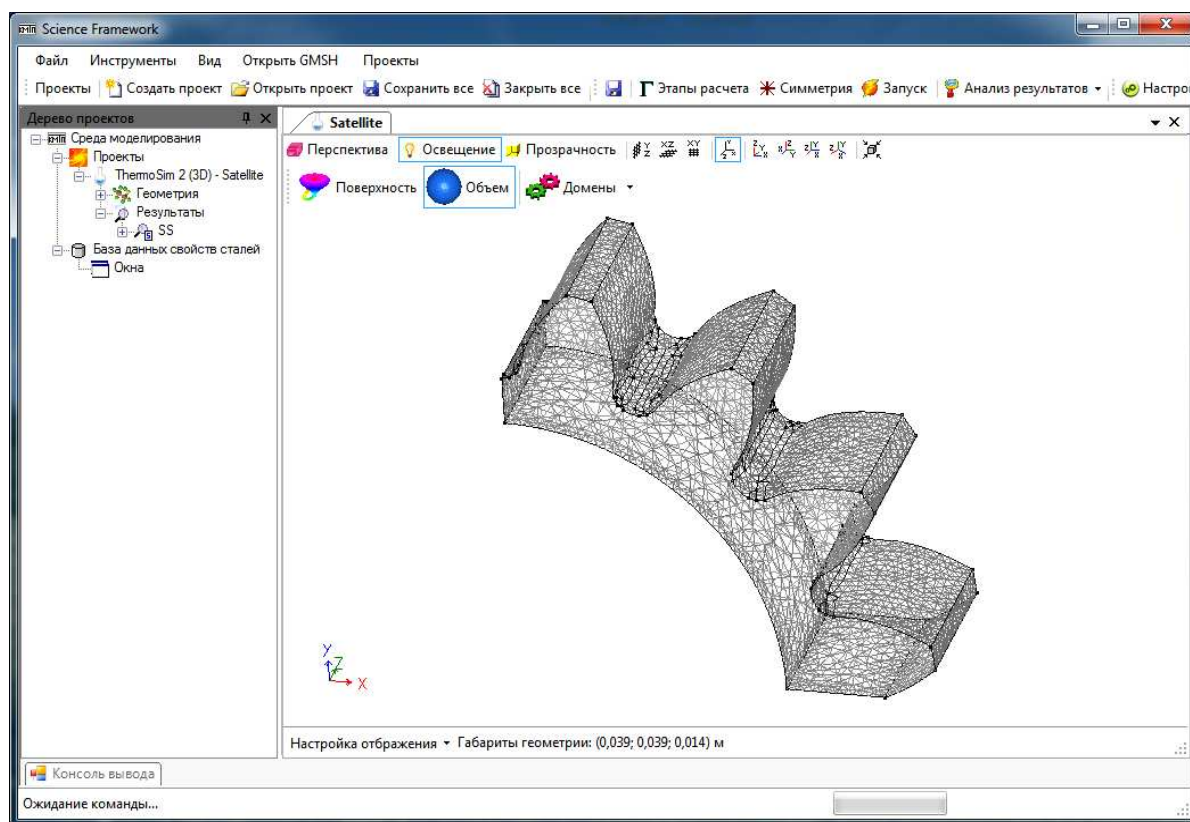
Алгоритм, реализующий указанную методику, разработан в рамках программного комплекса ThermoSim 2. Исследование предложенного подхода осуществлялось путем моделирования процесса закалки и эксплуатации сателлита главной пары автобуса МАЗ [21].

На первом этапе моделирования была получена трехмерная модель исследуемой системы (рис. 3). В рамках исследования изучалось влияние процесса закалки только на сателлит главной передачи.

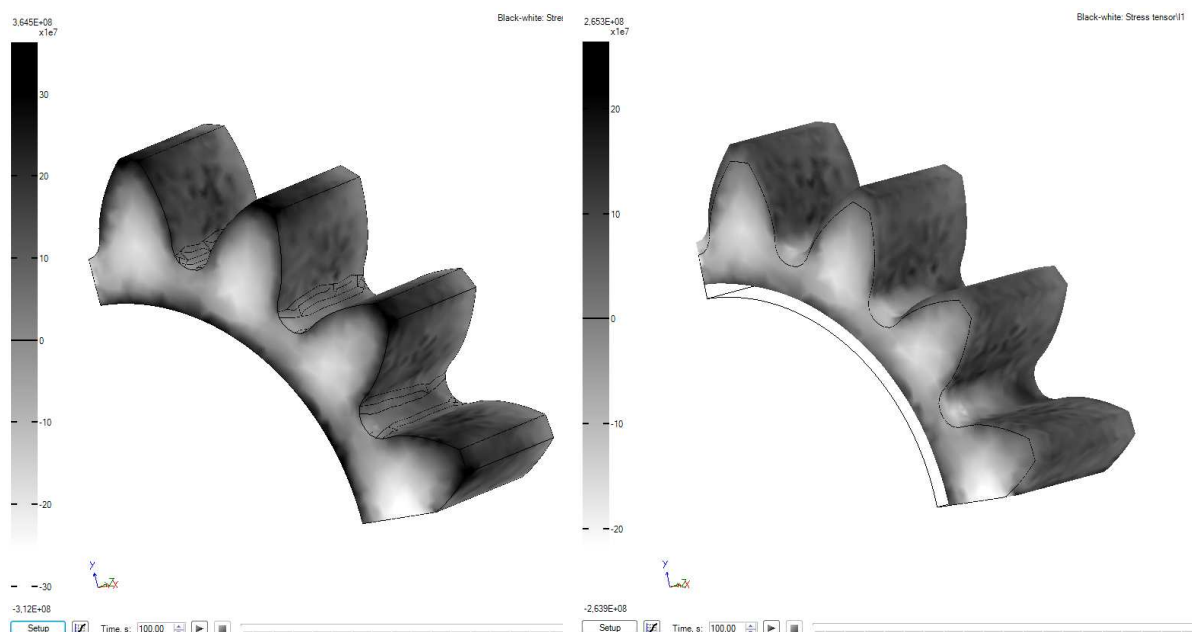
Для моделирования закалки в программном комплексе ThermoSim была построена (рис. 4, а) конечно-элементная модель (в качестве конечных элементов выступали тетраэдры). В результате решения трехмерной совместной тепловой и НДС задачи были получены распределения компонент тензора напряжений в детали (рис. 4, б, в).

Для сокращения вычислительной сложности использовалась восьмая часть полной геометрии детали с учетом граничных условий симметрии (тепловой поток через плоскости симметрии равен нулю).

Полученное распределение компонент тензора напряжений переносилось на полную конечно-элементную сетку, состоящую из восьмиугольных (HEX) элементов, для последующего использования в качестве начальных условий при моделировании контактной задачи в программном комплексе LS-DYNA.



а)



б)

в)

Рис. 4. Результаты моделирования напряженно-деформированного состояния:  
а – исходная конечно-элементная сетка; б – z-компонента тензора напряжений;  
в – II инвариант тензора напряжений и деформаций ( $\times 10$ )

В процессе решения контактной задачи было получено распределение напряжений и деформаций в сателлите, учитывающее начальное напряженно-деформированное состояние (рис. 5).

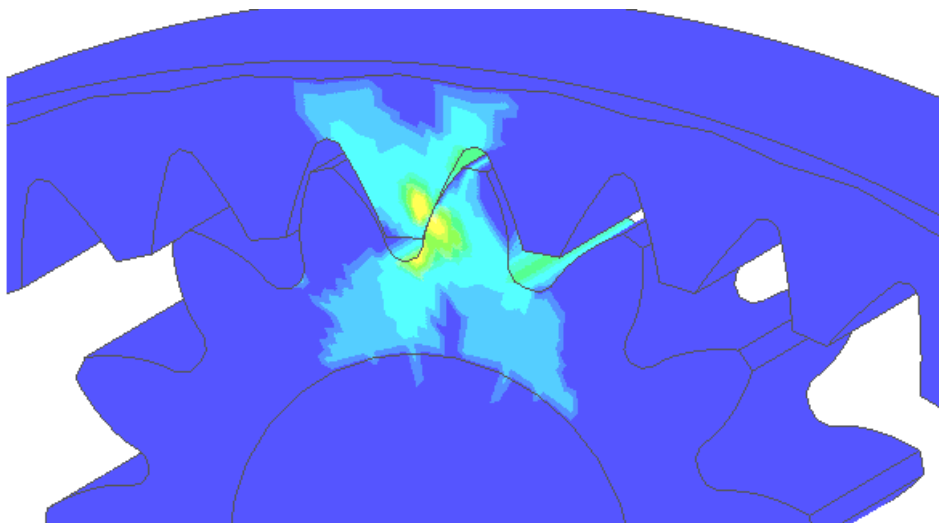


Рис. 5. Распределение напряжений после моделирования контактной задачи в LS-DYNA

**Заключение.** Разработана математическая модель напряженно-деформированного состояния стальных деталей в процессе индукционной закалки, на основе которой создана методика сквозного моделирования эксплуатации деталей в составе сборочных единиц с учетом остаточных напряжений при закалке. Модели практически реализованы с помощью программных комплексов ThermoSim II и LS-DYNA.

В результате проведенных исследований установлено, что предложенный подход и разработанные программные средства позволяют решать поставленную задачу – осуществлять сквозное моделирование процессов закалки и последующую эксплуатацию стальных деталей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Withers, P.J. Residual Stress. Part 1: Measurement techniques / P.J. Withers, H.K.D.H. Bhadeshia // *Materials Science and Technology*. – 2001. – Vol. 17. – P. 355–365.
2. Кундас, С.П. Совместное решение электромагнитной и тепловой задач при моделировании индукционного нагрева / С.П. Кундас, Д.Г. Иванов, И.А. Гишкелюк // *Изв. Белорус. инж. акад.* – 2005. – № 1(19)/2. – С. 51–53.
3. Semiatin, S.L. Induction Heat Treatment of Steel / S.L. Semiatin, D.E. Stutz. – Ohio: American Society for Metals, 1986. – 308 p.
4. Комплексная математическая модель индукционной закалки осесимметричных деталей с учетом напряженно-деформированного состояния и фазовых превращений / В.Б. Демидович [и др.] // *Актуальные проблемы энергосберегающих электротехнологий: сб. тр. конф.* – Екатеринбург, 2006. – С. 149–153.
5. Hearn, E.J. *Mechanics of materials. An introduction to the mechanics of elastic and plastic deformation of solid and structural materials* / E.J. Hearn. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 1997. – Vol. 2. – 597 с.
6. Термическая обработка в машиностроении: справочник / под ред. Ю.М. Лахтина, А.Г. Рахштадта. – М.: Машиностроение, 1980. – 783 с.
7. Withers, P.J. Residual stress. Part 2. Nature and origins / P.J. Withers, H.K.D.H. Bhadeshia // *Materials Science and Technology*. – 2001. – Vol. 17. – P. 366–374.
8. Lakhdar, T. New investigations on transformation induced plasticity and its interaction with classical plasticity / T. Lakhdar, S. Petit-Grostabussiat // *International journal of plasticity*. – 2006. – Vol. 22. – P. 110–130.
9. Murthy, Y.V.L.N. Numerical simulation of welding and quenching processes using transient thermal and thermo-elasto-plastic formulations / Y.V.L.N. Murthy, Rao G. Venkata, Iyer P. Krishna // *Computers & Structures*. – 1996. – Vol. 60. – P. 131–154.
10. Mathematical model of phase transformations and elasto-plastic stress in the water spray quenching of steel bar / Y. Nagasaka [et al.] // *Metallurgical and Materials Transactions*. – 1993. – Vol. 24A. – P. 795–808.

11. Моделирование напряженно-деформированного состояния стальных деталей при закалке / С.П. Кундас [и др.] // Деформация и разрушение материалов. – 2005. – № 5. – С. 37–47.
12. Leblond, J.B. Mathematical modeling of transformation plasticity in steels II. Coupling with strain hardening phenomena / J.B. Leblond // International journal of plasticity. – 1989. – № 5. – С. 573–591.
13. Seong-Hoon, K. Three-dimensional thermo-elastic-plastic finite element modeling of quenching process of plain-carbon steel in couple with phase transformation / K. Seong-Hoon, I. Young-Taek // International journal of mechanical sciences. – 2007. – Vol. 49. – P. 423–439.
14. Plasticity of Metals: Experiments, Models, Computation / Ed. by E. Steck [et al.]. – Berlin: Wiley-VCH Verlag GmbH, 2001. – 398 p.
15. Zienkiewicz, O.C. The Finite Element Method / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. – 5th Edition. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – Vol. I: The Basis. – 708 p.
16. Математическое моделирование индукционной закалки с применением метода конечных элементов / С.П. Кундас [и др.] // Актуальные проблемы теории и практики индукционного нагрева: сб. тр. – СПб.: ООО ВНИИТВЧ-ЭСТЭЛ-2005. – С. 292–299.
17. Leblond, J.B. A theoretical and numerical approach to the plastic behavior of steels during phase transformations: II. Study of classical plasticity for ideal plastic phases / J.B. Leblond, G. Mottet, J.C. Devaux // Journal of the mechanics and physics of solids. – 1986. – Vol. 34. – P. 411–432.
18. Leblond, J.B. A theoretical and numerical approach to the plastic behaviour of steels during phase transformations: I. Derivation of general relations / J.B. Leblond, G. Mottet, J.C. Devaux // Journal of the mechanics and physics of solids. – 1986. – Vol. 34. – P. 395–409.
19. Petit-Grostabussiat, S. Experimental results on classical plasticity of steels subjected to structural transformations / S. Petit-Grostabussiat, L. Taleb, J-F. Jullien // International journal of plasticity. – 2004. – Vol. 20. – P. 1371–1386.
20. Кундас, С.П. Компьютерное моделирование процессов термической обработки сталей / С.П. Кундас. – Минск: Бестпринт, 2005. – 313 с.
21. Моделирование закалки шестерен главной пары автомобилей МАЗ / А.В. Лемзиков [и др.] // Новые материалы и технологии: порошковая металлургия, композиционные материалы, защитные покрытия, сварка: материалы докл. 10-й междунар. науч.-техн. конф., г. Минск, 12–14 сент. 2012 г. – Минск, 2012. – С. 273–275.

Поступила 25.11.2013

**A METHODIC OF STRESS-STRAIN STATE SIMULATION OF STEEL DETAILS  
AS PART OF ASSEMBLY UNITS WITH TAKING INTO ACCOUNT  
THE IR PROVISIONAL HARDENING**

**S. KUNDAS, A. LEMZIKOV, D. IVANOV,  
S. MELNIKOV, S. MEDVEDEV**

*The article describes the characteristics of residual stresses in induction hardening, set their causes. A mathematical model describing the I residual stresses of the first kind in the steel parts. The resulting mathematical description allows modeling process based on thermal and due to the difference in specific volume phase deformations and phase transformations induced plasticity. The model is adapted for integration with thermal calculations and calculations of phase transformations and includes the ability to direct account dependence of the mechanical properties of the material on the temperature. An algorithm for the computer implementation of the model and the finite element formulation for the case of axial symmetry and overall three-dimensional geometry. The methodic of integrated stress-strained state modeling of details as part of assembly units, taking into account the residual stresses encountered during their hardening. The simulation results are introduced.*