

УДК 519.1:519.8:004.6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ РАСПИСАНИЯ УЧЕБНЫХ ЗАНЯТИЙ УНИВЕРСИТЕТА

М.В. ДЕКАНОВА*(Полоцкий государственный университет)*

Представлена математическая модель составления расписания учебных занятий для университета на основе гиперграфа. В модели учтены обязательные ограничения: занятия, которые проводятся с одной и той же группой (одним и тем же преподавателем, в одной и той же аудитории), должны быть назначены на различные интервалы времени; выполнение всех аудиторных работ в течение всего планового периода; общее число всех видов занятий в выделенный промежуток времени не должно превышать имеющийся аудиторный фонд; отсутствие «форточек» для студентов; обеспечение возможности сдвоенности пар; обеспечение возможности проведения определенных пар в различные дни. Показаны критерии, по которым производится оптимизация. Представлена свертка всех критериев оптимизации в одну целевую функцию. Предложен алгоритм решения задачи методом раскраски гипервершин гиперграфа.

Введение. Направление в науке, получившее название «теория расписаний», берет свое начало с известной работы Генри Гантта 1903 года [1], предложившего то, что сегодня называют диаграммами Гантта, которые встречаются во многих работах по теории расписаний [2; 3].

Первые исследования в области автоматизации составления расписания работ относятся к производственным системам и появились в 50 – 60-е годы XX века в связи с внедрением автоматизированных систем управления производством [4].

На рубеже XX и XXI веков актуальным стало создание систем автоматизированного управления учебным процессом в образовательных системах массового обслуживания [5]. Связано это с усилением требований к качеству обучения, появлением разнообразных форм обучения, развитием форм дистанционного обучения, необходимостью повышения экономической эффективности обучения и др.

Формулировка и решение задачи составления расписания занятий с помощью аппарата классической теории расписаний связана с рядом сложностей и требует модификации традиционной постановки задачи составления расписания для учета специфических особенностей организации процесса обучения в образовательных системах. Так, в работе [6] предлагается для решения задачи составления расписания учебных занятий использовать теоретический аппарат составления «производственных» расписаний.

Область применения известных методов составления «производственных» расписаний для составления расписания учебных занятий ограничена малыми образовательными системами с малым числом ограничений, накладываемым на расписание. Все это привело к появлению нового направления решения задачи составления расписания учебных занятий, основанного на непосредственном использовании методов целочисленного программирования [7 – 10].

Для решения задачи построения учебных расписаний разработано множество алгоритмов (как правило, эвристических), учитывающих те или иные особенности постановки задачи. Существуют коммерческие пакеты программ составления учебных расписаний – как отечественные [11], так и зарубежные [12; 13]. Все известные работы в этом направлении, посвященные автоматизации процедуры составления расписания занятий [14 – 26], можно условно разделить на две группы: к первой группе относятся работы, использующие классические методы решения задач целочисленного программирования (методы полного перебора, ветвей и границ, перебора в глубину, метод Гомори и др.) [14 – 24]; вторая группа работ основана на методах решения задач целочисленного программирования, использующих интеллектуальные алгоритмы решения данных задач [25; 26].

С математической точки зрения задача построения оптимального расписания учебных занятий является достаточно сложной, поскольку она принадлежит классу так называемых NP-трудных задач [27].

Используемая терминология по теории расписаний соответствует монографии [28], а по теории графов – монографии [29].

Несмотря на большую проработанность рассматриваемой проблемы, до сих пор в математических моделях не учтен ряд ограничений и критериев оптимизации (например, равномерность распределения занятий в течение дня, минимизация количества дней, занятых учебной нагрузкой, выполнение всех аудиторных работ в течение всего планового периода), не предложено эффективных алгоритмов их решения, особенно для задач большой размерности.

1. Математическая модель составления расписания

Задачу составления расписания учебных занятий университета, как и в ряде работ [16 – 18; 21; 24], предлагается решать по этапам. На *первом этапе* на основе документов, связанных с организацией

учебного процесса (как правило, учебных поручений преподавателей, нагрузкой), формируется непротиворечивое начальное расписание, соответствующее критериям оптимальности и ограничениям. *Второй этап* – назначение аудиторий для занятий, расписание которых составлено на первом этапе. *Третий этап* связан с улучшением расписания, связанным с устранением конфликтов, возникших после выполнения первых двух этапов. На каждом из этапов возможно применение различного математического аппарата и, соответственно, появление различных математических моделей и алгоритмов их решения.

В работе представлены гиперграфовая модель и алгоритм формирования рационального расписания учебных занятий университета.

Теоретико-графовая математическая модель расписания представляется следующим образом. В процессе решения задачи построения расписания необходимо назначить каждое занятие на конкретный промежуток времени рабочего дня недели. Поскольку длительность одной пары фиксирована, то заранее известны все возможные интервалы времени, на которые могут быть назначены пары. Введем обозначения: T_d – множество дней недели (понедельник, вторник, ..., суббота); T_{II} – множество регламентированных «пар» по сменам (пары от 1 до 8); T_q – множество признаков недели (расписание по четным и нечетным неделям может быть различным). Также введем множество таймслотов $T = T_d \times T_{II} \times T_q$, элементы которого однозначно определяют день недели, «пару»/смену и признак недели. Для каждого занятия m известно множество таймслотов, когда оно свободно, то есть в это время занятие может быть проведено $T_m^+ \subset T$, и множество недоступных таймслотов $T_m^- \subset T$, причем $T_m^+ \cup T_m^- = T$; $T_m^+ \cap T_m^- = \emptyset$.

Таким образом, расписание занятий вуза может быть представлено гиперграфом расписания:

$$H_{РАСП} = (M, T, E_{РАСП}),$$

где $E_{РАСП}$ – бинарное отношение множества учебных событий («пар»):

$$S = \{(m, t) | E_{РАСП}(m, t), m \in M, t \in T\}.$$

Расписания занятий в университете являются периодическими, поэтому достаточно составить расписание учебных занятий на один плановый период. Обычно периодом является одна неделя или же две последовательные недели (если расписания для них существенно отличаются одно от другого). Нарушения периодичности, возникающие в процессе реализации расписания, можно учитывать в режиме корректировки основного расписания, составленного на один плановый период.

Для проведения занятий студенты объединяются в академические группы $g \in G$. Обозначим через n_g количество занятий группы g за две недели. Множество групп G включает подмножества групп факультета G_U .

Лекционные занятия проводятся в потоках $r \in R$. Пусть R_U – множество потоков, включающих хотя бы одну группу, принадлежащую факультету U , а R_U – множество потоков, включающих только группы факультета U .

Для проведения некоторых занятий группы могут делиться на подгруппы $d \in D$. Обозначим D_U – множество подгрупп групп факультета U .

Введем гиперграф структуры групп, подгрупп и потоков:

$$H_{СТР} = (G, D, R, E_{СТР}),$$

где $E_{СТР}$ – бинарное отношение множества пар:

$$M = \{(g, z) | E_{СТР}(g, z), g \in G, z \in D \cup R \cup G\}.$$

Множество преподавателей P также может разбиваться на подмножества P_U преподавателей различных кафедр университета. Введем гиперграф учебной нагрузки:

$$H_{УН} = (M, P, E_{УН}),$$

где $E_{УН}$ – бинарное отношение, порождающее множество пар:

$$L_B = \{(m, p) | E_{УН}(m, p), m \in M, p \in P \cup \{\emptyset\}\}.$$

Инцидентность m и p означает, что занятие $l_b \in L_B$ с контингентом студентов m (группа/подгруппа/поток) проводит преподаватель p ; $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ (b_1 – идентификатор дисциплины; b_2 – вид занятия; b_3 – количество подгрупп, на которые подразделяется группа для проведения данного занятия ($z \in D$)).

Исходная информация для составления расписания включает аудиторный фонд. Обозначим $A_{мм}$ – множество мультимедийных аудиторий, $A_{к/к}$ – множество компьютерных аудиторий, $A_{снец}$ – множество

специализированных аудиторий, $A_{обц}$ – аудитории общего назначения. Будем считать эти множества непересекающимися, тогда $|A_{мм}| + |A_{к/к}| + |A_{спец}| + |A_{обц}|$ – количество аудиторий университета.

Введем гиперграф учебных поручений:

$$H_{УП} = (L_B, A_{мм}, A_{к/к}, A_{спец}, A_{обц}, E_{УП}),$$

где $E_{УП}$ – бинарное отношение, порождающее множество пар:

$$V = \{(b, a) | E_{УП}(l_b, a), l_b \in L_b, a \in A_{мм} \cup A_{к/к} \cup A_{спец} \cup A_{обц} \cup \{\emptyset\}\}.$$

Инцидентность между l_b и a означает, что учебное поручение $v \in V$ для занятия l_b содержит требуемую аудиторию a или «пустую» аудиторию (для ее более позднего определения).

При формировании расписания занятий должен учитываться ряд обязательных ограничений. Для их формирования введем булево обозначение учебного события $s \in S$.

$$s = s(g, z, p, a, t, l_b) = \begin{cases} 1, & \text{если с группой } g \text{ в таймслоте } t \text{ преподавателем } p \\ & \text{проводится занятие } l_b \text{ в аудитории;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Можно выделить следующие *обязательные ограничения*:

1) в любом таймслоте t для каждой группы g может проводиться не более одного занятия (таким образом, если два занятия проводятся с одной и той же группой студентов, то они должны быть назначены на различные интервалы времени):

$$\sum_{z: z \in R \cup G} s + \sum_{z: z \in D} \frac{s}{b_3} \leq 1, \forall t \in T, \forall g \in G; \quad (1)$$

2) в любом таймслоте t любой преподаватель p может вести не более одного занятия (таким образом, если два занятия проводятся одним преподавателем, то они должны быть назначены на различные интервалы времени):

$$\sum_z s \leq 1, \forall t \in T, \forall p \in P; \quad (2)$$

3) в любом таймслоте t в любой аудитории a не может проходить более одного занятия (таким образом, если два занятия проводятся в одной и той же аудитории, то они должны быть назначены на различные интервалы времени):

$$\sum_{z: z \in R \cup G} s + \sum_{z: z \in D} \left(\frac{s}{b_3} \right) \leq 1, \forall t \in T, \forall g \in A; \quad (3)$$

4) общее число всех видов занятий в каждом таймслоте t не должно превышать имеющийся в университете аудиторный фонд:

$$\sum_{z: z \in R \cup G} s + \sum_{z: z \in D} \left(\frac{s}{b_3} \right) \leq |A_{мм}| + |A_{к/к}| + |A_{спец}| + |A_{обц}|, \forall t \in T; \quad (4)$$

5) расписание занятий каждой группы в любой день не должно содержать «окон» (т.е. для студентов в построенном расписании не должно быть так называемых «форточек»).

Обозначим через $j_{\max}$ номер последнего занятия группы g в день t_d недели t_q :

$$j_{\max} = \max\{t_n : s = 1\}, \forall g \in G, \forall t_d \in T, \forall t_q \in T.$$

Аналогично определим номер первого занятия $j_{\min}$:

$$j_{\min} = \min\{t_n : s = 1\}, \forall g \in G, \forall t_d \in T, \forall t_q \in T.$$

Тогда количество пар у группы g в день t_d :

$$j_{col} = \sum_{T_{II}} \{s : z \in R \cup G\} + \sum_{T_{II}} \left\{ \frac{s}{b_3} : z \in R \right\}.$$

Тогда искомое ограничение примет вид:

$$j_{\max} - j_{\min} - j_{col} = 0, \forall g \in G, \forall t_d \in T, \forall t_q \in T; \quad (5)$$

6) для каждой группы g должны выполняться все виды аудиторной работы в течение двух недель:

$$\sum_T \{s : z \in R \cup G\} + \sum_T \left\{ \frac{s}{b_3} : z \in D \right\} = n_g, \forall g \in G; \quad (6)$$

7) необходимо обеспечить возможность проводить некоторые занятия непосредственно одно за другим (например, лабораторные занятия, требующие две последовательные пары).

Пусть задано множество предметов L_z , для которых необходимо проведение сдвоенных пар. Тогда для некоторого занятия $l_z \in L_z$ определяется основное занятие j' , непосредственно назначаемое на определенный интервал времени t в день t_d недели t_q в аудиторию a' для группы g , и зависимое занятие j'' , следующее непосредственно за основным занятием.

Тогда искомое ограничение примет вид:

$$j'' - j' = 1; a' = a'', \forall g \in G, \forall t_d \in T, \forall t_q \in T; \forall l_z \in L_z; \quad (7)$$

8) необходимо обеспечить возможность проводить какие-либо занятия в разные дни (например, три занятия по высшей математике не должны проводиться в один день с одной группой учащихся).

Такая необходимость обеспечивается с помощью определения подмножества занятий L_w , никакие три из которых не должны проводиться в один и тот же день.

Тогда количество пар у группы g в день t_d недели t_q , принадлежащих подмножеству занятий L_w , удовлетворяет ограничению:

$$\sum_T \{s : z \in R \cup G; l_w \in L_w\} + \forall g \in G + \forall t_d \in T, \forall t_q \in T. \quad (8)$$

Таким образом, задача формирования расписания заключается в формировании гиперграфа $H_{расп}$, т.е. определении для каждого занятия таймслота и аудитории с учетом выполнения вышеприведенных обязательных ограничений (1) – (8).

В последующем может проводиться оптимизация всего сформированного расписания и ряд локальных оптимизаций расписаний отдельных подразделений университета по определенным желаемым критериям. В качестве частных критериев оптимизации расписания занятий могут быть предложены следующие:

1) равномерность распределения занятий по количеству «пар» в день:

$$K_1 = \left\{ \sum_{T_d} s \rightarrow \min, s \mid \forall g \in G, \forall t_d \in T, \forall t_q \in T \right\}; \quad (9)$$

2) возможность проведения занятий в определенную «смену» (временной промежуток до или после «пары» t'_q) для двух недель:

$$K_2 = \left\{ (j_{\max} \leq t'_q) \vee (j_{\min} \leq t'_q + 1), s \mid \forall g \in G, \forall t_d \in T, \forall t_q \in T \right\}. \quad (10)$$

Для оптимизации расписания преподавателей критерии применяются избирательно, в зависимости от предпочтений определенного преподавателя $p \in P$;

3) равномерность распределения занятий по количеству «пар» в день для двух недель:

$$K_3 = \left\{ \sum_{T_d} s \rightarrow \min, s \mid p \in P, \forall t_d \in T, \forall t_q \in T \right\}; \quad (11)$$

4) отсутствие занятий в определенные дни $T_d^p \subset T_d$, т.е. необходимо предусмотреть возможность запрещать назначение пар для преподавателя на тот или иной интервал времени (например, в связи с методическими днями или в связи с личными пожеланиями преподавателя):

$$K_4 = \left\{ \sum_{T_d} s = 0, s \mid p \in P, \forall t_d \in T, \forall t_q \in T_d^p \right\}; \quad (12)$$

5) минимизация количества окон:

$$K_5 = \left\{ \sum_{T_q \times T_d} (j_{\max} - j_{\min}) - \sum_T s \rightarrow \min, s \mid p \in P \right\}; \quad (13)$$

б) минимизация количества дней, занятых учебной нагрузкой:

$$T_{yH}^p \subseteq T_q \times T_d, (t_q, t_d) \in T_{yH}^p \Leftrightarrow \exists t_n, \exists z, \exists a \, s(p, z, a, (t_q, t_d, t_n)) = 1:$$

$$K_6 = \{T_{yH}^p \rightarrow \min, s | p \in P\}. \quad (14)$$

Эти критерии рассматриваем как частные критерии.

Предлагается построить обобщенный аддитивный критерий, который объединяет (свертывает) все частные критерии в одну целевую функцию, представляющую собой взвешенную сумму частных критериев:

$$F = \sum_{i=1}^6 w_i K_i,$$

где w_i – весовой коэффициент критерия K_i ; $0 \leq w_i \leq 1$; $F = \sum_{i=1}^6 w_i = 1$.

Коэффициенты w_i определяются на основе экспертных оценок.

2. Раскраска гипервершин гиперграфа

Для получения оптимального расписания занятий на основе описанной выше гиперграфовой модели могут использоваться методы, применяемые для раскраски гипервершин гиперграфа [21].

Следовательно, задача составления расписания сводится к формированию гиперграфа учебных поручений H_{yH} гиперграфа $H_{расп}$, имеющего оптимальное значение критерия F (9) – (14) при соблюдении обязательных ограничений (1) – (8).

В задаче оптимальной раскраски гиперграфа требуется построить раскраску φ : гипервершин гиперграфа $H_{yH} = (V, E_{yH})$, которая содержит минимальное число цветов. Покажем, каким образом можно представить задачу построения расписания в терминах раскраски гиперграфа $H_{yH} = (V, E_{yH})$, который изображен на рисунке и строится согласно приведенным далее правилам.

Предполагается, что каждая нефиктивная гипервершина гиперграфа $H_{yH} = (V, E_{yH})$ соответствует определенному занятию, которое проводится конкретным преподавателем с конкретной группой учащихся в конкретной аудитории (если аудитория задана заранее) или в аудитории конкретного типа (если аудитория заранее не задана). Раскраска $\varphi: V \rightarrow N$ интерпретируется следующим образом: если нефиктивная гипервершина $v_i \in V$ окрашена в цвет $\varphi(v_i) \in N = \{1, 2, \dots, n\}$, то занятие, определенное гипервершиной $v_i \in V$, должно быть проведено в $\varphi(v_i)$ -й по порядку следования интервал времени из упорядоченного множества W интервалов, предназначенных для проведения пар в плановом периоде. Гиперграф $H_{yH} = (V, E_{yH})$ может содержать фиктивные гипервершины, включение которых во множество V определяется критерием K_4 оптимизации расписания преподавателей в терминах раскраски гиперграфа.

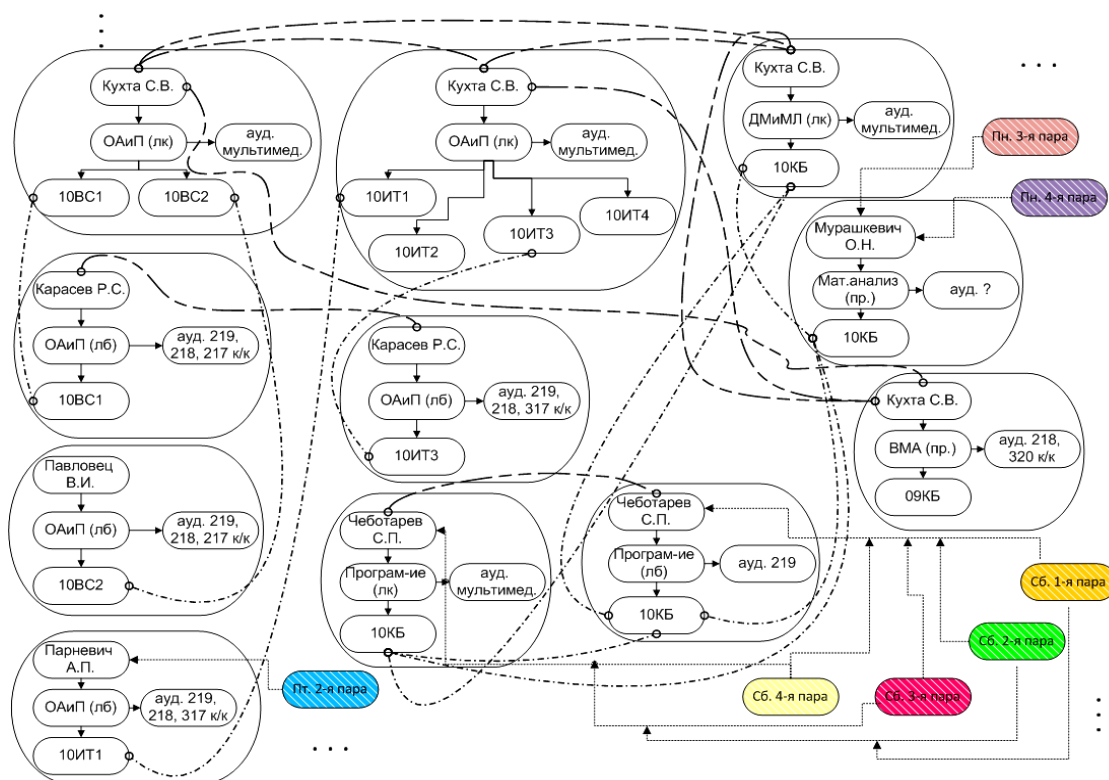
Гиперребра множества E_{yH} гиперграфа $H_{yH} = (V, E_{yH})$ используются для определения обязательных ограничений (1) – (8) и критериев локальной оптимизации расписания занятий (9) – (14). В частности, гиперребро $[v_i, v_j] \in E_{yH}$, инцидентное нефиктивным гипервершинам $v_i \in V$ и $v_j \in V$, может обозначать, что занятия, соответствующие данным гипервершинам, проводятся у одной и той же группы (обязательное ограничение (1)). Поскольку в раскраске φ смежные гипервершины гиперграфа H_{yH} должны быть окрашены в различные цвета, то занятия с одной и той же группой учеников должны быть проведены в различные интервалы времени из множества W . Точно так же следует ввести в гиперграф H_{yH} гиперребра $[v_i, v_j] \in E_{yH}$ в связи с обязательным ограничением (2) для преподавателей и в связи с обязательным ограничением (3) для аудиторий.

Если в процессе построения гиперграфа возникают кратные гиперребра, то их следует удалить, оставив в гиперграфе H_{yH} по одному гиперребру для каждого множества кратных гиперребер, инцидентных одной и той же паре гипервершин. Гипервершины, представляющие занятия одного и того же преподавателя (или одной и той же группы, или проводимые в одной и той же аудитории), должны быть попарно соединены между собой гиперребрами. В результате множество таких гипервершин определяет полный подграф гиперграфа H_{yH} . Следовательно, в раскраске φ гиперграфа H_{yH} все гипервершины полного подграфа будут окрашены в различные цвета.

Таким образом, раскраска $\varphi: V \rightarrow N$ построенного гиперграфа $H_{yH} = (V, E_{yH})$ определяет расписание занятий, для которого выполнены обязательные ограничения (1) – (3).

Следующее ограничение, которое необходимо учитывать при составлении расписания, связано с количеством имеющихся в университете аудиторий каждого типа (обязательное ограничение (4)). Это ограничение учитывается путем введения дополнительного ограничения на использование одного и того же цвета для ограниченного числа гипервершин из заданного подмножества множества V . Конкретный цвет

гипервершин означает, что занятия, представленные гипервершинами одного цвета, проводятся в один и тот же интервал времени из множества W . Следовательно, учет при построении раскраски $\varphi: V \rightarrow N$ заданной границы на число гипервершин одного цвета позволяет ограничить количество аудиторий соответствующего типа, которые могут быть использованы в одном и том же интервале времени из множества W . Такая интерпретация обязательного ограничения (4) предполагает применение нетрадиционного понятия раскраски гипервершин гиперграфа. Для соответствующего обобщения раскраски (оптимальной раскраски) будем использовать термин допустимая раскраска $\varphi: V \rightarrow N$ (оптимальная допустимая раскраска).



Пример гиперграфа

Если в процессе построения гиперграфа возникают кратные гиперребра, то их следует удалить, оставив в гиперграфе $H_{уп}$ по одному гиперребру для каждого множества кратных гиперребер, инцидентных одной и той же паре гипервершин. Гипервершины, представляющие занятия одного и того же преподавателя (или одной и той же группы, или проводимые в одной и той же аудитории), должны быть попарно соединены между собой гиперребрами. В результате множество таких гипервершин определяет полный подграф гиперграфа $H_{уп}$. Следовательно, в раскраске φ гиперграфа $H_{уп}$ все гипервершины полного подграфа будут окрашены в различные цвета.

Таким образом, раскраска $\varphi: V \rightarrow N$ построенного гиперграфа $H_{уп} = (V, E_{уп})$ определяет расписание занятий, для которого выполнены обязательные ограничения (1) – (3).

Следующее ограничение, которое необходимо учитывать при составлении расписания, связано с количеством имеющихся в университете аудиторий каждого типа (обязательное ограничение (4)). Это ограничение учитывается путем введения дополнительного ограничения на использование одного и того же цвета для ограниченного числа гипервершин из заданного подмножества множества V . Конкретный цвет гипервершин означает, что занятия, представленные гипервершинами одного цвета, проводятся в один и тот же интервал времени из множества W . Следовательно, учет при построении раскраски $\varphi: V \rightarrow N$ заданной границы на число гипервершин одного цвета позволяет ограничить количество аудиторий соответствующего типа, которые могут быть использованы в одном и том же интервале времени из множества W . Такая интерпретация обязательного ограничения (4) предполагает применение нетрадиционного понятия раскраски гипервершин гиперграфа. Для соответствующего обобщения раскраски (оптимальной раскраски) будем использовать термин допустимая раскраска $\varphi: V \rightarrow N$ (оптимальная допустимая раскраска).

При составлении расписания следует учитывать необходимость или пожелания преподавателей, не назначать для них занятия на какие-то конкретные промежутки времени из множества W (или не проводить занятия в каких-то аудиториях в конкретные промежутки времени). Для задания такого требования или пожелания требуется сопоставить преподавателю (или аудиториям определенного типа) конкретные цвета (номера интервалов времени из множества W), запрещенные для них по тем или иным причинам (критерий оптимизации K_4 (12)). В терминах сетевой модели такое требование может быть реализовано следующим образом.

При построении допустимой раскраски необходимо раскрасить гипервершины гиперграфа $H_{\text{УП}} = (V, E_{\text{УП}})$ так, чтобы определенные его гипервершины не получили запрещенные для них цвета.

Для представления такого условия в гиперграф $H_{\text{УП}} = (V, E_{\text{УП}})$ вводится соответствующее множество фиктивных гипервершин (по одной фиктивной гипервершине для каждого интервала времени из множества W , который может оказаться запрещенным).

Например, если составляется расписание на шесть рабочих дней недели по шесть занятий каждый день, то требуется рассмотреть 48 интервалов времени для проведения занятий: $|W| = n = 48$. Если каждый из этих интервалов может быть запрещенным (для преподавателя или для какого-то типа аудиторий), то необходимо добавить 48 фиктивных вершин в построенный гиперграф, заранее окрасив их последовательно в различные цвета из множества $N = \{1, 2, \dots, 48\}$. Затем следует добавить в полученный гиперграф гиперребра, инцидентные фиктивным гипервершинам и тем гипервершинам гиперграфа $H_{\text{УП}}$, для которых следует запретить соответствующие цвета в допустимой раскраске. Например, фиктивная гипервершина v_i , заранее окрашенная в цвет $\varphi(v_i) \in N = \{1, 2, \dots, 24\}$, должна быть соединена гиперребром с каждой гипервершиной, определяющей занятие, которое нельзя проводить в $\varphi(v_i)$ -м по порядку следования интервале времени из упорядоченного множества W . В процессе последующей раскраски гиперграфа $H_{\text{УП}}$ соответствующие нефиктивные гипервершины не могут окрашиваться в запрещенные для них цвета, и, следовательно, соответствующие занятия не будут проводиться в запрещенные для них интервалы времени из множества W .

В отличие от обязательного ограничения (4), приведенная выше интерпретация критерия оптимизации K_4 не требует обобщения традиционного понятия раскраски гиперграфа. Для учета критерия оптимизации K_4 достаточно лишь дополнить множество гипервершин гиперграфа соответствующим множеством фиктивных гипервершин и соединить их гиперребрами с гипервершинами, для которых требуется запретить использование соответствующих цветов. Следует заметить, однако, что построение допустимой раскраски гиперграфа $H_{\text{УП}}$ следует начинать при условии, что части его гипервершин (а именно всем фиктивным гипервершинам) заранее приписаны конкретные цвета, причем эти цвета не могут быть изменены в дальнейшем, даже если это исключает возможность получения оптимальной раскраски гиперграфа $H_{\text{УП}}$.

Ограничение (7) учитывается в процессе построения допустимой раскраски $\varphi: V \rightarrow N$ следующим образом. При окрашивании подмножества гипервершин, связанных ограничением (7), цвет необходимо выбирать только для основной гипервершины из этого подмножества. При этом неосновным гипервершинам подмножества цвета назначаются исходя из их расположения относительно окрашенной основной гипервершины. Аналогично обязательному ограничению (4) такая интерпретация ограничения (7) также приводит к нетрадиционному понятию раскраски гиперграфа, состоящему в принудительном окрашивании неосновных гипервершин гиперграфа $H_{\text{УП}}$ согласно цветам, которые назначены его основным вершинам. Для учета этого обобщения понятия раскраски будем использовать тот же термин «допустимая раскраска» гиперграфа $H_{\text{УП}}$.

Обязательные ограничения (5), (6), (8) отражаются непосредственно в целевой функции, которая используется при построении оптимальной допустимой раскраски гиперграфа $H_{\text{УП}}$, и учитываются как тенденция к запрещению цветов, нарушающих эти условия уже в самом алгоритме построения допустимой раскраски.

Опишем алгоритм, который реализуется перед началом раскраски гипервершин гиперграфа. На этом этапе определяются гипервершины, цвета которым назначаются заранее, а также множества допустимых цветов, которые могут быть назначены остальным гипервершинам. Если явно не оговорено, какие гипервершины просматриваются, то предполагается, что просматриваются нефиктивные гипервершины гиперграфа $H_{\text{УП}}$.

1. Фиктивные гипервершины окрашиваются в соответствующие цвета из множества N .
2. Для всех нефиктивных гипервершин производится анализ, с какой гипервершины необходимо начинать.
3. Начинаем искать гипервершину v_i для совместителей (занятия у совместителей обычно проводятся либо по субботам, либо во вторую смену). Такую гипервершину красим в единственно возможный для нее цвет и просматриваем все смежные с ней гипервершины, запрещая для них цвет, в который окрашена гипервершина v_i .

4. Далее выбирается гипервершина, у которой наибольшее количество окрашенных «соседей». Такую гипервершину красим в единственно возможный для нее цвет и просматриваем все смежные с ней гипервершины, запрещая для них цвет, в который окрашена гипервершина v_i .

5. Находим гипервершину с аудиторией, которая является самой «востребованной» (необходимо определить индекс востребованности). Такую гипервершину красим в единственно возможный для нее цвет и просматриваем все смежные с ней гипервершины, запрещая для них цвет, в который окрашена гипервершина v_i .

6. Находим гипервершину с преподавателем, который является самым «востребованным». Такую гипервершину красим в единственно возможный для нее цвет и просматриваем все смежные с ней гипервершины, запрещая для них цвет, в который окрашена гипервершина v_i .

7. Просматриваем все гипервершины до тех пор, пока будем находить неокрашенные гипервершины, которые можно окрасить только в один цвет из множества N . Если находим такую гипервершину v_i , то красим ее в единственно возможный для нее цвет из множества N . Просматриваем все смежные с ней гипервершины и запрещаем для них цвет, в который окрашена гипервершина v_i . Если для какой-либо гипервершины остается только один возможный цвет, то после просмотра всех гипервершин шаг 7 повторяется снова.

Таким образом, находим гипервершины, которые можно окрасить только в один цвет из множества N . Если найдена такая гипервершина v_i , то гипервершину v_i помечаем как просмотренную. Для непомеченных гипервершин находим все допустимые цвета. Среди непросмотренных гипервершин находим группы идентичных гипервершин: они соответствуют одной и той же группе учащихся, одному и тому же преподавателю и требуют для своего проведения либо один и тот же тип аудитории, либо одну и ту же аудиторию. Идентичные гипервершины помечаются как просмотренные, и для них находятся цвета, в которые они могут быть окрашены. Затем выполняются действия, аналогичные шагу 7. Определяются списки допустимых цветов для всех гипервершин, которые еще не окрашены.

Алгоритм раскраски гипервершин гиперграфа представляет собой выполнение следующих шагов:

- шаг 1. Назначаются последовательно цвета из множества N всем гипервершинам, которые необходимо раскрасить. Назначаются цвета гипервершинам блока в соответствии с цветом, который получила вершина из массива цветов;

- шаг 2. Вычисляются оценки качества полученного назначения цветов. Для этого формируется массив конфликтных вершин, в который помещаются смежные гипервершины с одинаковыми цветами. Для каждой гипервершины v_i просматриваются смежные с ней гипервершины. Если какая-либо из смежных гипервершин имеет такой же цвет, как и гипервершина v_i , то гипервершина v_i помещается в массив конфликтных вершин, а штраф за назначение цветов увеличивается на величину соответствующего штрафа;

- шаг 3. Для каждого интервала времени и каждого ресурса проверяется, превышено ли число имеющихся ресурсов. Если оно превышено, все гипервершины, которые запрашивают данный ресурс в данный интервал времени, помечаются как конфликтные. Штраф за полученное назначение цветов увеличивается на произведение штрафа за данное нарушение на число таких нарушений. Если нарушено, например, правило – соответствующие занятия не следуют непосредственно одно за другим, то обе гипервершины помечаются как конфликтные, а штраф за данное назначение цветов увеличивается на величину штрафа за это нарушение. Если нарушено правило, например, соответствующие занятия проводятся в один день, то одна из гипервершин помечается как конфликтная, а цена решения увеличивается на величину штрафа за это нарушение. Определяются конфликты, приводящие к появлению форточек для студентов. Для каждого дня проверяется, есть ли у группы студентов в этот день форточки. Если есть, то подсчитывается их количество, а штраф за данное назначение цветов увеличивается на произведение штрафа за такое нарушение на количество форточек. Если форточка одна, то конфликтной считается либо первая гипервершина v_j , либо последняя гипервершина v_j , окрашенная в цвет из множества цветов для данного дня; если имеется больше одной форточки, то обе гипервершины v_i и v_j считаются конфликтными;

- шаг 4. Если штраф за полученное назначение цветов равняется нулю, то имеем допустимую раскраску, которая определяет расписание учебных занятий. В противном случае выполняется шаг 3;

- шаг 5. Разрешение конфликтов. Выделяются блоки гипервершин, которые содержат конфликтные гипервершины. Все гипервершины такого блока помечаются как конфликтные. Если блок помечен как имеющий фиксированный цвет, то такой блок не может содержать конфликтных гипервершин. Все конфликтные гипервершины считаются неокрашенными, и соответствующие ресурсы освобождаются. Случайным образом выбираем блок с конфликтными гипервершинами. Вычисляются возможные цвета для определяющей гипервершины выбранного блока с учетом уже окрашенных гипервершин. Если количество допустимых цветов отлично от нуля, то случайным образом выбирается один из них. Если нет допустимых цветов во множестве N , то выбирается один из возможных цветов без учета уже окрашенных гипервершин. Этот цвет назначается определяющей гипервершине блока, а также остальным его гипервершинам. Ресурсы, запрашиваемые гипервершинами блока, определяются как используемые.

Среди конфликтных гипервершин выбирается случайным образом гипервершина v_i . Просматриваются все гипервершины, смежные с v_i , и если им приписан цвет, то он помечается как запрещенный для гипервершины v_i . Для каждого цвета из множества N , который остался допустимым, определяем, можно ли назначить его гипервершине v_i с учетом использованных ресурсов. Если нельзя, помечаем этот цвет как недопустимый. Затем удаляем форточки из списка допустимых цветов. Для каждой группы студентов, связанной с гипервершиной v_i , находим количество еще не окрашенных гипервершин, а также количество форточек в имеющемся на данный момент расписании для рассматриваемой группы студентов. Если количество форточек равно количеству неокрашенных гипервершин, то среди всех допустимых цветов из множества N разрешаем те цвета, которые соответствуют форточкам. Если имеются допустимые цвета, то выбираем один из них. Если нет допустимых цветов, то выбираем один из первоначально допустимых цветов. Окрашиваем гипервершину v_i в выбранный цвет и помечаем ресурсы, запрашиваемые гипервершиной v_i , как используемые.

Среди оставшихся конфликтных гипервершин случайным образом выбирается гипервершина v_j , для которой повторяются все действия предыдущего шага. Затем выполняется шаг 2.

Заключение. В результате проведенного исследования разработана математическая модель решения задачи составления расписания учебных занятий, которая учитывает ряд обязательных ограничений и критериев оптимизации. Данная модель имеет ряд отличий:

- учитывает равномерность распределения занятий в течение дня; возможность проведения занятий в определенную смену;

- минимизирует количество дней, занятых учебной нагрузкой;

- обеспечивает выполнение всех аудиторных работ в течение всего планового периода и др.

Предложен алгоритм решения задачи составления расписания учебных занятий методом раскраски вершин гиперграфа. Разработанные математическая модель и алгоритм решения задачи могут быть положены в основу автоматизированной системы составления расписания учебного заведения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лазарев, А.А. Методы и алгоритмы решения задач теории расписаний для одного и нескольких приборов и их применение для задач комбинаторной оптимизации: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А.А. Лазарев. – М.: Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 1997. – 413 с.
2. Танаев, В.С. Теория расписаний. Многостадийные системы / В.С. Танаев, Ю.Н. Сотсков, В.А. Струсович. – М.: Наука, 1989. – 328 с.
3. Гафаров, Е.Р. Задачи теории расписаний. Алгоритмы и применение / Е.Р. Гафаров // Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук: тр. 49-й науч. конф. МФТИ: Управление и прикладная математика. – Москва-Долгопрудный, 2006. – С. 82 – 83.
4. Баронов, В.В. Автоматизация управления предприятием / В.В. Баронов. – М.: Инфра-М, 2000.
5. Логоша, Б.А. Комплекс моделей и методов оптимизации расписания занятий в вузе / Б.А. Логоша, А.В. Петропавловская // Экономика и математические методы. – 1993. – Т. 29, № 4.
6. Строкина, Ю.Г. Алгоритмические процедуры формирования гетерогенных расписаний для производственных систем: дис. ... канд. техн. наук / Ю.Г. Строкина. – Уфа: УГАТУ, 1997. – 150 с.
7. Волков, И.К. Исследование операций: учебник для вузов / И.К. Волков, Е.А. Загоруйко; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 436 с.
8. Ху, Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях / Т. Ху; пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – 520 с.
9. Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций / Хэмди А. Таха. – 6-е изд.; пер. с англ. – М.: Издат. дом «Вильямс», 2001.
10. Сигал, И.Х. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы: учеб. пособие / И.Х. Сигал, А.П. Иванова. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 240 с.
11. Расписание Про 2.3 [Electronic resource]. – Mode of access: <http://www.softsearch.ru/programs/28-705-raspisanie-pro-download.shtml>.
12. Magic Timetable Master [Electronic resource]. – Mode of access: <http://www.imagictimetablessoftware.com/>
13. TimeTabler [Electronic resource]. – Mode of access: <http://www.timetabler.com/>
14. Burke, E.K. A University Timetabling System Based on Graph Coloring and Constraint Manipulation / E.K. Burke, D.G. Elliman, R.F. Weare // Journal Of Research on Computing in Education. – 1993.
15. Бабкин, Э.А. Проектирование и реализация алгоритмов составления учебного расписания на основе многоагентных технологий / Э.А. Бабкин, И.М. Ретинский // Технические, программные и математические аспекты управления сложными распределенными системами: материалы науч.-техн. конф. – Нижний Новгород, 2003. – С. 10 – 12.
16. Безгинов, А.Н. Обзор существующих методов составления расписания / А.Н. Безгинов, С.Ю. Трегубов // Информационные технологии и программирование: межвуз. сб. ст. – Вып. 2(14). – М.: МГИУ, 2005.

17. Ерунов, В.П. Формирование оптимального расписания учебных занятий в вузе / В.П. Ерунов, И.И. Морковин // Вестн. ОГУ. – 2001. – № 3.
18. Каширина, И.Л. Генетический алгоритм решения квадратичной задачи о назначениях специального вида / И.Л. Каширина // Вестн. ВГУ. – 2003. – № 1.
19. Костенко, В.А. Локально-оптимальные алгоритмы построения расписаний, основанные на использовании сетей Хопфилда / В.А. Костенко, А.В. Винокуров // Программирование. – 2003. – № 4. – С. 27 – 40.
20. Костин, С.А. Модели и алгоритмы глобальной оптимизации первоначального расписания вуза / С.А. Костин, Н.Н. Клеванский // Информационные технологии в образовании: XIV междунар. конф.-выст.: материалы конф. – М.: МИФИ, 2004.
21. Маслов, М.Г. Эвристический алгоритм решения задачи составления расписания учебных занятий в вузе / М.Г. Маслов // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. XV междунар. науч. конф., Тамбов, 2 – 4 июня 2002 г.: в 10-ти т. – Тамбов, 2002. – Т. 9. – С. 86 – 88.
22. Система моделей и методов рационального планирования и организации учебного процесса в вузе / под ред. В.В. Гусева, Н.Я. Краснера. – Воронеж: ВГУ, 1984. – 152 с.
23. Ханов, Г.В. Автоматизация составления расписаний с учетом неопределенности / Г.В. Ханов, Е.В. Алабужев // Информационные технологии в образовании, технике и медицине: материалы междунар. конф.: в 3-х т. Т. 1 / ВолгГТУ. – Волгоград, 2004.
24. Сотсков, Ю.Н. Построение расписаний учебных занятий на основе раскраски вершин графа / Ю.Н. Сотсков, С.В. Балтак // Информатика. – 2006. – С. 58 – 69.
25. Люггер, Джордж, Ф. Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем / Джордж, Ф. Люггер. – 4-е изд.; пер. с англ. – М.: Издат. дом «Вильямс», 2003. – 864 с.
26. Кузин, Л.Т. Основы кибернетики / Л.Т. Кузин: в 2 т. Т. 1. Математические основы кибернетики: учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1994. – 576 с.
27. Гэри, М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
28. Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари. – М.: Мир, 1973. – 300 с.
29. Клеванский, Н.Н. Формирование расписания с использованием динамических критериев загруженности / Н.Н. Клеванский, Е.А. Макарецова // Информационные технологии в образовании: XI междунар. конф.-выст. Ч. IV. – М.: МИФИ, 2001. – С. 139 – 140.
30. Клеванский, Н.Н. Моделирование стратегии формирования расписания занятий вуза средствами реляционной алгебры / Н.Н. Клеванский, Е.А. Макарецова, С.А. Костин // Прикладные проблемы образовательной деятельности: межвуз. сб. науч. тр. – Воронеж: ВГПУ, 2003. – С. 71 – 74.
31. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
32. Leighton, F.T. A graph coloring algorithm for large scheduling problems / F.T. Leighton // Journal of Research of the National Bureau of Standards. – 1979. – Vol. 84. – P. 489 – 506.
33. Werra D. de. An introduction to timetabling / D. de Werra // European Journal of Operations Research. – 1985. – Vol. 19. – P. 151 – 162.
34. Tuza Z. Graph colorings with local constraints: a survey / Z. Tuza // Discussions Mathematical Graph Theory. – 1997. – Vol. 17. – P. 101 – 228.

Поступила 20.09.2013

MATHEMATICAL MODEL AND ALGORITHM OF TIMETABLING AT UNIVERSITY

M. DEKANOVA

The mathematical model of drawing up the schedule of university studies on the basis of the hyper graph is presented. In the mathematical model obligatory restrictions are considered: classes, which are conducted with the same group (by the same teacher, in the same audience) must be appointed at various time intervals, all classroom assignments must be done during the planned period, the total number of all types of classes in the allocated period mustn't exceed the available classroom fundre. The mustn't be "free periods" for students, the must be possibility to have dual classes and to conduct certain classes in various days. Optimization carried out according to the following criteria: the uniformity of the distribution of classes during the day, the possibility of carrying out classes in a certain change, the minimization of the number of the days with an academic load, the minimization of "free periods" for teachers, lack of classes in certain days for teachers. The convolution of all optimization criteria is presented one criterion function. The algorithm of the task solution by method of a coloring of hyper tops of the hyper graph is offered.