

МАТЕМАТИКА

УДК 512.641:519.612.4

DOI 10.52928/2070-1624-2026-46-1-55-59

ПОИСК КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
ТРЕХМЕРНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ МАТРИЦЫ ОБЩЕГО ВИДА

д-р техн. наук, проф. С. Г. ЕХИЛЕВСКИЙ,
канд. физ.-мат. наук, доц. О. В. ГОЛУБЕВА, О. Н. ЗАБЕЛЕНДИК
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

д-р техн. наук, проф. М. Г. МУСТАФИН
(Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II, Россия)

Обоснована процедура сведения трехмерной задачи о собственных векторах матрицы к двумерному случаю. Предложен алгоритм поиска корней кубического уравнения, основанный на преобразовании элементов трехмерной матрицы при повороте системы координат. Показано, что в качестве критерия вещественности корней уравнения можно использовать симметричность исходной матрицы, что позволяет соответствующим подбором ее элементов связать инварианты матрицы с коэффициентами решаемого уравнения.

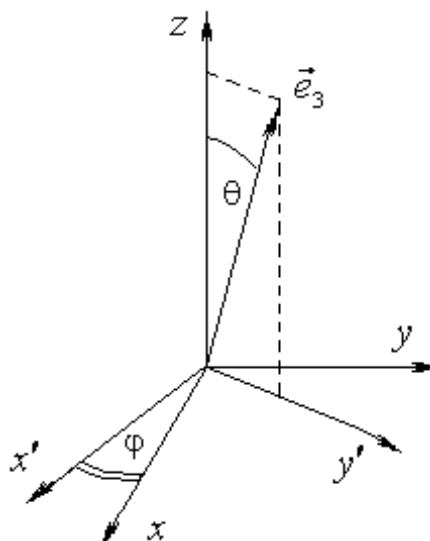
Ключевые слова: преобразование трехмерных матриц при пространственном повороте системы координат, критерий вещественности корней кубического уравнения.

Введение. Обычно при определении собственных значений и собственных векторов симметричной матрицы ограничиваются двумерным случаем или трехмерным, но с простым видом характеристического уравнения [1–3]. Причина заключается в сложности поиска корней характеристического уравнения третьей степени с произвольными коэффициентами. Целью данной публикации является обоснование процедуры сведения трехмерной задачи о собственных векторах симметричной матрицы общего вида к двумерному случаю. Для этого предложен алгоритм поиска корней кубического уравнения, основанный на преобразовании элементов трехмерной матрицы при повороте системы координат.

Преобразование матриц при повороте системы координат к базису собственных векторов (сведение **трехмерного случая к двумерному**). Очевидно (рисунок), что в общем случае двумя поворотами системы координат ось OZ можно направить вдоль собственного вектора \vec{e}_3 симметричной матрицы

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & g \\ e & g & c \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Рисунок. – Поворот оси Oz системы координат
вдоль собственного вектора \vec{e}_3



Вначале выполним поворот на угол φ вокруг оси oz :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \hat{C}(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где

$$\hat{C}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

– матрица первого поворота [4]. При этом

$$\hat{A} \rightarrow \hat{A}' = \hat{C}(\varphi) \cdot \hat{A} \cdot \hat{C}^{-1}(\varphi), \quad (4)$$

где $\hat{C}^{-1}(\varphi) = \hat{C}(-\varphi)$ – матрица, обратная $\hat{C}(\varphi)$.

Затем новую (штрихованную) систему координат (см. рисунок) поворачиваем на угол θ вокруг оси ox' :

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \hat{D}(\theta) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где

$$\hat{D}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6)$$

– матрица второго поворота. При этом

$$\hat{A}' \rightarrow \hat{A}'' = \hat{D}(\theta) \cdot \hat{A}' \cdot \hat{D}^{-1}(\theta) = \hat{D}(\theta) \cdot \hat{C}(\varphi) \cdot \hat{A} \cdot \hat{C}^{-1}(\varphi) \cdot \hat{D}^{-1}(\theta), \quad (7)$$

где $\hat{D}^{-1}(\theta) = \hat{D}(-\theta)$ – матрица, обратная $\hat{D}(\theta)$.

По правилу умножения матриц

$$\hat{D}(\theta) \cdot \hat{C}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}; \quad (8)$$

$$\hat{C}^{-1}(\varphi) \cdot \hat{D}^{-1}(\theta) = (\hat{D}(\theta) \cdot \hat{C}(\varphi))^T, \quad (9)$$

где T – знак транспонирования.

С учетом (1), (7) – (9)

$$\hat{A}_{31}'' = \sin \theta \left[(a-b) \sin \varphi \cos \varphi + d(\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) \right] + \cos \theta (e \cos \varphi + g \sin \varphi) = \hat{A}_{13}''; \quad (10)$$

$$\hat{A}_{32}'' = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(e \sin \varphi - g \cos \varphi) + \sin \theta \cos \theta (c - a \sin^2 \varphi - b \cos^2 \varphi + 2d \sin \varphi \cos \varphi) = \hat{A}_{23}''; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_{33}'' = & \sin \theta \sin \varphi (a \sin \varphi \sin \theta - d \cos \varphi \sin \theta + e \cos \theta) - \sin \theta \cos \varphi (d \sin \varphi \sin \theta - \\ & - b \cos \varphi \sin \theta + g \cos \theta) + \cos \theta (a \sin \varphi \sin \theta - d \cos \varphi \sin \theta + e \cos \theta). \end{aligned} \quad (12)$$

Из системы уравнений

$$\hat{A}_{31}'' = 0, \quad \hat{A}_{32}'' = 0 \tag{13}$$

с помощью (10), (11) можно определить углы поворотов системы координат, нужные для направления оси oz вдоль собственного вектора \vec{e}_3 матрицы \hat{A} , а затем, подставив найденные значения φ и θ в (12), вычислить собственное значение λ_3 матрицы \hat{A} , являющееся корнем характеристического уравнения третьей степени

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & d & e \\ d & b-\lambda & g \\ e & g & c-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

Таким образом, трехмерный случай задачи о приведении симметричной матрицы к диагональному виду сводится к двумерному. Третий поворот (вокруг оси oz') обнуляет остальные (\hat{A}_{21}'' и \hat{A}_{12}'') недиагональные элементы.

Преобразование матриц при повороте системы координат и поиск корней кубического уравнения. Описанная процедура сведения к двумерному случаю трехмерной задачи о приведении симметричной матрицы к диагональному виду может рассматриваться как метод решения кубического уравнения общего вида с тремя вещественными корнями

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0. \tag{15}$$

Используя свойства определителей [5], с помощью (14) свяжем фигурирующие в (15) коэффициенты с элементами матрицы \hat{A} :

$$I_1 = a + b + c, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e \\ e & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & g \\ g & c \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & g \\ e & g & c \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Дальнейшее сводится к подбору значений элементов матрицы \hat{A} , обеспечивающих выполнение фигурирующих в (16) равенств. Заметим, что возможность подбора может рассматриваться как критерий наличия у уравнения (15) трех вещественных корней.

Проиллюстрируем изложенное формулировкой условий примера о приведении трехмерной симметричной матрицы к диагональному виду. Для этого решим обратную задачу: для данных φ и θ подбором элементов матрицы \hat{A} обеспечим выполнение равенств (13). Согласно (10), (11) вид (13) существенно упрощается при $\theta = \pi/4$. Пусть при этом $\varphi = \pi/6$. В результате система уравнений (13) примет вид

$$\begin{cases} (a-b)\frac{\sqrt{3}}{4} - d\frac{1}{2} + e\frac{\sqrt{3}}{2} + g\frac{1}{2} = 0; \\ c - a\frac{1}{4} - b\frac{3}{4} + d\frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \end{cases}$$

из которого следует приемлемость для рассматриваемых углов следующих значений элементов матрицы \hat{A} :

$$a = e = 1, \quad d = g = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad b = c = 3. \tag{17}$$

Таким образом, условие примера о поиске собственных значений и векторов матрицы имеет вид

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 3 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 3 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Согласно (15), (16) ему соответствует характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + \frac{40}{3}\lambda - \frac{16}{3} = 0. \quad (19)$$

Его корень найдем, подставив в (12) $\theta = \pi/4$, $\varphi = \pi/6$ и подобранные значения (17) элементов матрицы \hat{A} :

$$\begin{aligned} \lambda_3 = \hat{A}_{33}^* &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2\sqrt{2}} - 3 \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{8} (4 + 12 + 16) = 4. \end{aligned}$$

В качестве проверки подставим найденное собственное значение в (14). В результате с учетом (18) получим

$$\begin{vmatrix} -3 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \end{vmatrix} = -3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 + 1 + \frac{1}{3} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Покажем вещественность остальных собственных значений. Для этого выделим в левой части (19) $\lambda - 4$ в качестве множителя

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + \frac{40}{3}\lambda - \frac{16}{3} = \left(\lambda^2 - 3\lambda + \frac{4}{3} \right) (\lambda - 4) = 0,$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{4}{3}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{11}{12}}.$$

Нетрудно убедиться в сохранности инвариантов матрицы (см. (15), (16), (19)) после ее приведения к диагональному виду

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7, \quad I_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_1 \cdot \lambda_3 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \frac{40}{3}, \quad I_3 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \frac{16}{3}.$$

Заключение. Таким образом, обоснована процедура сведения трехмерной задачи о собственных векторах матрицы к двумерному случаю. Предложен алгоритм поиска корней кубического уравнения, основанный на преобразовании элементов трехмерной матрицы при повороте системы координат. Показано, что в качестве критерия вещественности корней уравнения можно использовать симметричность исходной матрицы, что позволяет соответствующим подбором ее элементов связать инварианты матрицы с коэффициентами решаемого уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2010. – 278 с.
2. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник. – М.: Физматлит, 2009. – 309 с.
3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия: учебник. – М.: Физматлит, 2019. – 224 с.
4. Ильин В. А., Ким Г. Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М.: МГУ, 1998, – 320 с.
5. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 512 с.

Поступила 11.02.2026

**FINDING THE ROOTS OF THE CHARACTERISTIC EQUATION
OF AN ARBITRARY THREE-DIMENSIONAL SYMMETRIC MATRIX**

S. EKHILEVSKIY, O. GOLUBEVA, O. ZABELENDIK
(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

M. MUSTAFIN
(Empress Catherine II Saint Petersburg Mining University, Russia)

The procedure for reducing the three-dimensional problem of finding the eigenvectors of the matrix to the two-dimensional case is justified. Disclosed is an algorithm for finding roots of a cubic equation based on transformation of elements of a three-dimensional matrix during rotation of a coordinate system. It is shown that the symmetry of the original matrix can be used as a criterion for the reality of the roots of the equation, which allows us to correlate the invariants of the matrix with the coefficients of the solved equation by appropriate selection of matrix elements.

Keywords: *transformation of three-dimensional matrices during spatial rotation of the coordinate system, a criterion for the reality of the roots of a cubic equation.*