

УДК 517.546

О ЛИНЕЙНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ЧЕБЫШЕВСКОГО ТИПА

Д.Э. КИРЬЯЦКИС

(Гродненский государственный университет им. Я. Купалы)

Фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка может быть, а может и не быть системой Чебышева. В настоящей работе установлены признаки того, что фундаментальная система является системой Чебышева в круге E . Для этой цели рассматривается класс аналитических в круге E функций, каждая из которых имеет n нулей в этом круге. Для функций рассматриваемого класса установлены оценки модулей производных.

Система вещественных функций $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$, определенных на отрезке a, b , называется системой Чебышева на отрезке a, b , если для любых действительных значений $c_0, c_1, \dots, c_n$ (случай $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ исключается) каждый обобщенный многочлен

$$P(x) = c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x) + \dots + c_n u_n(x)$$

имеет на a, b не более n попарно различных корней.

Системы Чебышева встречаются во многих областях математического анализа. Различные интересные свойства функций вещественного переменного, образующих систему Чебышева, и их применение можно найти в книгах [1; 2].

Что касается теории чебышевских систем, определяемых в различных классах функций комплексного переменного, то здесь можно отметить книги [3 – 5], в которых рассматриваются вопросы приближения и интерполяции.

В последнее время обнаружилась тесная связь некоторых специальных систем Чебышева с разделенными разностями, с линейными дифференциальными уравнениями, с классами однолистных и многолистных функций, определяемых в различных областях комплексной плоскости. Здесь можно упомянуть работы [6 – 9].

Напомним определение системы Чебышева для голоморфных в области D функций.

Система голоморфных в области D функций

$$u_0(z), u_1(z), \dots, u_n(z)$$

называется системой Чебышева в этой области, если для любых комплексных чисел $c_0, c_1, \dots, c_n$ (случай $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ исключается) уравнение

$$c_0 u_0(z) + c_1 u_1(z) + \dots + c_n u_n(z) = 0$$

имеет в области D не более чем n попарно различных корней. Другими словами, указанная выше система называется системой Чебышева в области D , если любой обобщенный многочлен

$$P(z) = c_0 u_0(z) + c_1 u_1(z) + \dots + c_n u_n(z)$$

(случай $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ исключается) имеет не более чем n корней в области D [3].

Простым примером системы Чебышева является система, состоящая из функций $1, z, \dots, z^{n-1}, z^n$. Другим простым, но важным в геометрической теории функций, примером системы Чебышева является система, состоящая из двух функций $1, f(z)$, где $f(z)$ – однолистная в области D функция [7]. В этом случае легко понять, что разделенная разность первого порядка

$$[f(z); z_0, z_1] = \frac{f(z_0) - f(z_1)}{z_0 - z_1}$$

отлична от нуля для любых различных $z_0, z_1 \in D$.

Справедливо следующее более общее утверждение: для того чтобы система линейно независимых в области D голоморфных функций $1, z, \dots, z^{n-1}, f z$ была системой Чебышева в области D , необходимо и достаточно, чтобы разнесенная разность n -го порядка

$$\left[f z ; z_0, \dots, z_n \right] = \frac{\left[f z ; z_0, \dots, z_{n-1} \right] - \left[f z ; z_1, \dots, z_n \right]}{z_0 - z_n} \neq 0$$

для любых попарно различных $z_0, \dots, z_n \in D$ [8]. Отсюда следует, что функция $f z$ является не более чем n -листной функцией в области D .

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n -го порядка

$$y^{(n)} z + g_{n-1} z y^{(n-1)} z + \dots + g_1 z y' z + g_0 z y z = 0, \quad (1)$$

где $g_0 z, \dots, g_{n-1} z$ – голоморфные в области D функции. Будем искать решения среди голоморфных в области D функций. Пусть

$$y_1 z, \dots, y_n z \quad (2)$$

фундаментальная система решений уравнения (1). Хорошо известно, что общее решение уравнения (1) записывается в виде

$$y z = c_1 y_1 z + \dots + c_n y_n z,$$

т.е. в виде линейной комбинации функций $y_1 z, \dots, y_n z$.

Назовем уравнение (1) дифференциальным уравнением чебышевского типа, если фундаментальная система (2) является системой Чебышева в области D . Другими словами, уравнение (1) является уравнением чебышевского типа, если любая голоморфная в области D функция $y z$, $y z \neq 0$, удовлетворяющая уравнению (1), имеет в области D не более $n-1$ корней.

Не любое дифференциальное уравнение (1) принадлежит типу Чебышева. Например, уравнение

$$y'' z - y' z = 0$$

будет чебышевского типа в круге $|z| < 1$ и не будет чебышевского типа в круге $|z| < 7$. Действительно, любая функция, удовлетворяющая данному уравнению, представима формулой $y z = c_1 + c_2 e^z$. При любых значениях c_1, c_2 , за исключением $c_1 = 0, c_2 = 0$, такая функция имеет не более одного корня в круге $|z| < 1$, однако в круге $|z| < 7$ она может иметь два корня.

Таким образом, линейное однородное дифференциальное уравнение n -го порядка может быть как чебышевского типа, так и не чебышевского типа. Это зависит от поведения его коэффициентов, а также от вида области D .

В данной работе мы рассматриваем условия, при выполнении которых фундаментальная система голоморфных в области D функций (2) решений линейного однородного дифференциального уравнения (1) является системой Чебышева в области D . В этой связи мы рассматриваем класс голоморфных в круге функций, имеющих в этом круге n нулей, устанавливаем формулу для производных k -порядка от этих функций, а также оцениваем модули k -тых производных. В качестве области D возьмем круг $|z| < R$. Предполагаем, что функции $g_0 z, \dots, g_{n-1} z$ являются голоморфными в круге $|z| < R$. Тогда решениями уравнения (1) будут также голоморфные в круге $|z| < R$ функции. Нам понадобится лемма об одном тождестве между многочленами, имеющими заданные корни.

Лемма 1. Пусть в круге $|z| < R$ взяты точки $a_1, \dots, a_n$. Образует многочлены $P_{n-j} z$, $j = 0, \dots, n$ и запишем их в виде

$$P_{n-j} z = \prod_{i=j+1}^n (a_i - z), \quad P_0 z \equiv 1.$$

Тогда справедливо тождество:

$$a_j - z \left(C_{k+1}^{j-1} - C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z \right) = \frac{k!}{j-2! (k+1-j)!} P_{n-j}^{k+1-j} z + C_k^{j-2} P_{n-j+1}^{k+2-j} z. \quad (3)$$

Здесь C_m^l – биномиальные коэффициенты и $2 \leq j \leq k+1$.

Доказательство. Имеем

$$a_j - z C_{k+1}^{j-1} - C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z = \frac{k!}{j-2! (k+1-j)!} P_{n-j}^{k+1-j} z + \\ + C_k^{j-2} - k+2-j P_{n-j}^{k+1-j} z + a_j - z P_{n-j}^{k+2-j} z.$$

Далее,

$$a_j - z C_{k+1}^{j-1} - C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z = \left(\frac{k!}{j-2! (k+1-j)!} - C_k^{j-2} - k+2-j \right) P_{n-j}^{k+1-j} z + \\ + a_j - z C_k^{j-2} P_{n-j}^{k+2-j} z.$$

Легко видеть, что

$$C_{k+1}^{j-1} - C_k^{j-1} = C_k^{j-2}, \quad \frac{k!}{j-2! (k+1-j)!} - C_k^{j-2} (k+2-j) = 0.$$

Отсюда следует справедливость тождества (3).

Пусть в круге $|z| < R$ заданы точки $a_1, \dots, a_n$ и $y(z)$ – голоморфная в этом круге функция. Обозначим

$$\Psi_n(z) = \int_{a_n}^z a_n - \zeta^{n-1} y^n(\zeta) d\zeta, \\ \Psi_j(z) = \int_{a_j}^z \frac{a_j - \zeta^{j-1}}{a_{j+1} - \zeta} \Psi_{j+1}(\zeta) d\zeta, \quad j=1, 2, \dots, n-1.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $y(z)$ – голоморфная в круге $|z| < R$ функция и $y(a_1) = \dots = y(a_n) = 0$. Тогда справедлива формула

$$y^k(z) = \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j}(z) \Psi_j(z) a_j - z^{-j+1}, \quad k=0, 1, \dots, n-1. \quad (4)$$

Доказательство. Докажем формулу (4) с помощью индукции по k . При $k=0$ формула (4) справедлива. Предположим, что формула (4) справедлива при некотором $k > 0$, и докажем ее справедливость при $k+1$, т.е.

$$y^{k+1}(z) = \sum_{j=1}^{k+2} C_{k+1}^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j}(z) \Psi_j(z) a_j - z^{-j+1}, \quad (5)$$

или

$$y^{k+1}(z) = \sum_{j=1}^{k+2} C_{k+1}^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j}(z) \Psi_j(z) a_j - z^{-j+1} = \sum_{j=1}^{k+1} C_{k+1}^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j}(z) \Psi_j(z) a_j - z^{-j+1} + \\ + P_{n+k-2}(z) \Psi_{k+2}(z) a_{k+2} - z^{-k-1}. \quad (6)$$

Возьмем от функции $y^k(z)$, заданной формулой (4), производную и покажем, что $y^{k+1}(z)$ совпадает с правой частью (6).

Имеем

$$y^{k+1}(z) = \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j}(z) \Psi_j(z) a_j - z^{-j+1} + \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j}(z) \Psi_j'(z) a_j - z^{-j+1} + \\ + \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j}(z) \Psi_j'(z) a_{j-1} - z^{-j}.$$

Далее,

$$y^{n+1} z = \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z \Psi_j z a_j - z^{-j+1} + \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j} z \Psi_{j+1} z a_{j+1} - z^{-j-1} + \\ + \sum_{j=2}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j} z \Psi_j z j-1 a_j - z^{-j}. \quad (7)$$

Используя формулу

$$\Psi'_j z = \frac{a_j - z^{j-1}}{a_{j+1} - z} \Psi_{j+1} z,$$

получим

$$y^{n+1} z = \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z \Psi_j z a_j - z^{-j+1} + \sum_{j=1}^k C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j} z \Psi_{j+1} z a_{j+1} - z^{-j-1} + \\ + P_{n+k-2} z \Psi_{k+2} z a_{k+2} - z^{-k-1} + \sum_{j=2}^k C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j} z \Psi_j z j-1 a_j - z^{-j}.$$

С помощью (6) и (7) получим

$$\sum_{j=1}^{k+1} C_{k+1}^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z \Psi_j z a_j - z^{-j+1} = \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z \Psi_j z a_j - z^{-j+1} + \\ + \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j} z \Psi_{j+1} z a_j - z^{-j-1} + \sum_{j=2}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j} z \Psi_{j+1} z j-1 a_j - z^{-j}.$$

Далее,

$$\sum_{j=2}^{k+1} C_{k+1}^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z \Psi_{j+1} z a_j - z^{-j+1} + C_{k+1}^0 P_{n-1}^{k+1} \Psi_1 z a_1 - z^0 = \\ = \sum_{j=2}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z \Psi_{j+1} z a_j - z^{-j+1} + C_k^0 P_{n-1}^{k+1} \Psi_1 z a_1 - z^0 + \\ + \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j} z \Psi_{j+1} z a_{j+1} - z^{-j-1} + \sum_{j=2}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j} z \Psi_j z j-1 a_j - z^{-j}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=2}^{k+1} C_{k+1}^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z \Psi_j z a_j - z^{-j+1} = \sum_{j=2}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z \Psi_j z a_j - z^{-j+1} + \\ + \sum_{j=2}^{k+1} C_k^{j-2} P_{n-j+1}^{k+2-j} z \Psi_j z a_j - z^{-j} + \sum_{j=2}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j} z \Psi_j z j-1 a_j - z^{-j}.$$

Итак,

$$\sum_{j=2}^{k+1} C_{k+1}^{j-1} - C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z \Psi_j z a_j - z^{-j+1} = \\ = \sum_{j=2}^{k+1} C_k^{j-1} j-1 P_{n-j}^{k+1-j} z \Psi_j z a_j - z^{-j+1} + \sum_{j=2}^{k+1} C_k^{j-2} j-1 P_{n-j+1}^{k+2-j} z \Psi_j z a_j - z^{-j}.$$

Если теперь перенести в одну сторону и воспользоваться леммой 1, то придем к выводу, что формула (6) справедлива, значит, и справедлива формула (5). Но тогда справедлива и теорема 1.

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся еще следующие леммы.

Лемма 2. Для любого z из круга $|z| \leq r$ справедливо неравенство

$$\left| P_{n-j}^{k+1-j} z \right| \leq \frac{n-j!}{n-k-1!} R + |z|^{n-k-1}, \quad j=1, \dots, k+1.$$

Доказательство. Перепишем многочлен $P_{n-j} z$ в виде

$$P_{n-j} z = -1^{n-j} h_1 z \dots h_{n-j} z,$$

где $h_1 z = z - a_{j+1}, \dots, h_{n-j} z = z - a_n$.

По формуле Лейбница получим

$$P_{n-j}^{k+1-j} z = -1^{n-j} \sum \frac{k+1-j!}{m_1! \dots m_{n-j}!} h_1^{m_1} z \dots h_{n-j}^{m_{n-j}} z,$$

где сумма берется так, что

$$m_1 \geq 0, \dots, m_{n-j} \geq 0, \text{ и } m_1 + \dots + m_{n-j} = k+1-j.$$

Так как $h_i^0 z = h_i z$ и $h_i^1 z = 1$, то $h_i^l z = 0$, если $l > 1$, и мы берем только те m_i , которые принимают значения 0 или 1. Тогда из этого следует, что среди чисел $m_1, \dots, m_{n-j}$ будет $k+1-j$ единиц и $n-k-1$ нулей. В этом случае легко получим

$$\left| P_{n-j}^{k+1-j} z \right| < \frac{k+1-j!}{k+1-j!} \frac{n-j!}{n-k-1!} R + |z|^{n-k-1} = \frac{n-j!}{n-k-1!} R + |z|^{n-k-1}, \quad j=1, \dots, k+1,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. Справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{n-j!}{k+1-j!} = \frac{n!}{k!} \frac{1}{n-k}.$$

Доказательство. Разделим обе части предполагаемого равенства на $n-k-1!$ и докажем равенство

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{n-j!}{k+1-j!} \frac{1}{n-k-1!} = \frac{n!}{k!} \frac{1}{n-k},$$

т.е. равенство

$$\sum_{j=1}^{k+1} C_{n-j}^{k+1-j} = C_{n-1}^k + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_{n-k}^1 + C_{n-k-1}^0 = C_n^k.$$

Имеем

$$\begin{aligned} C_{n-1}^k + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_{n-k}^1 + C_{n-k-1}^0 &= C_{n-k}^0 + C_{n-k}^1 + C_{n-k+1}^2 + C_{n-k+2}^3 + \dots + C_{n-k+k-1}^k = \\ &= C_{n-k+1}^1 + C_{n-k+1}^2 + C_{n-k+2}^3 + \dots + C_{n-k+k-1}^k = C_{n-k+2}^2 + C_{n-k+2}^3 + \dots + C_{n-k+k-1}^k. \end{aligned}$$

Применяя формулу

$$C_{n-k+m}^m + C_{n-k+m}^{m+1} = C_{n-k+m+1}^{m+1}$$

при $m=0, m=1, \dots, m=k-1$, убеждаемся в справедливости леммы 3.

Лемма 4. Для любого z из круга $|z| \leq r$ справедливо неравенство:

$$\left| \Psi_j z \right| \leq \frac{j-1!}{n!} |y^n z_0| \left| a_j - z \right|^j, \quad j=1, 2, \dots, n$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство

$$|\Psi_n z| \leq \frac{n-1!}{n!} |y^n z_0| |a_n - z|^n. \quad (8)$$

В самом деле, согласно определению имеем

$$\Psi_n z = \int_{a_n}^z (a_n - \zeta)^{n-1} y^n \zeta d\zeta.$$

Сделаем замену

$$\zeta = z - a_n t + a_n,$$

где $0 \leq t \leq 1$ и $d\zeta = -a_n dt$.

Тогда получим

$$\Psi_n z = -a_n - z^n \int_0^1 t^{n-1} y^n (z - a_n t + a_n) dt.$$

Значит,

$$|\Psi_n z| \leq |a_n - z|^n |y^n z_0| \int_0^1 t^{n-1} dt = \frac{n-1!}{n!} |a_n - z|^n |y^n z_0|,$$

и неравенство (8) доказано.

Из (8) для любого ξ с условием $|\xi| \leq r$ следует неравенство

$$\frac{|\Psi_n \xi|}{|a_n - \xi|^n} \leq \frac{n-1!}{n!} |y^n z_0| \text{ для любого } |\xi| \leq r.$$

Докажем теперь неравенство

$$|\Psi_{n-1} z| \leq \frac{n-2!}{n!} |y^n z_0| |a_{n-1} - z|^{n-1}. \quad (9)$$

Согласно определению

$$\Psi_{n-1} z = \int_{a_{n-1}}^z (a_{n-1} - \zeta)^{n-2} \frac{\Psi_n \zeta}{a_n - \zeta} d\zeta.$$

Делая замену $\zeta = z - a_{n-1} t + a_{n-1}$, где $0 \leq t \leq 1$ и $d\zeta = -a_{n-1} dt$, получаем

$$\Psi_{n-1} z = -a_{n-1} - z^{n-1} \int_0^1 t^{n-2} \frac{\Psi_n (z - a_{n-1} t + a_{n-1})}{a_n - z - a_{n-1} t + a_{n-1}} dt.$$

Далее, имеем

$$|\Psi_{n-1} z| \leq |y^n z_0| |a_{n-1} - z|^{n-1} \frac{n-1!}{n!} \int_0^1 t^{n-2} dt = \frac{n-2!}{n!} |a_{n-1} - z|^{n-1} |y^n z_0|,$$

и неравенство (9) доказано.

Из (9) для любого ξ с условием $|\xi| \leq r$ следует неравенство

$$\frac{|\Psi_{n-1} \xi|}{|a_{n-1} - \xi|^{n-1}} \leq \frac{n-2!}{n!} |y^n z_0|.$$

Продолжая указанный процесс, убеждаемся в справедливости леммы 4.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $g_0(z), \dots, g_{n-1}(z)$ – голоморфные в круге $|z| < R$ функции. Если для любого z из круга $|z| < R$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{R+|z|^{n-k}}{(n-k)!} |g_k(z)| \leq 1, \quad (10)$$

то дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(z) + g_{n-1}(z) y^{(n-1)}(z) + \dots + g_1(z) y'(z) + g_0(z) y(z) = 0 \quad (11)$$

есть уравнение типа Чебышева, т.е. фундаментальная система дифференциального уравнения (11) является системой Чебышева в круге $|z| < R$.

Доказательство. Пусть условие (10) выполнено. Предположим, что дифференциальное уравнение (11) не является уравнением чебышевского типа. Тогда найдется голоморфная в круге $|z| < R$ функция $y(z)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению (11) и имеет n нулей $a_1, \dots, a_n$ в круге $|z| < R$, т.е. $y(a_1) = \dots = y(a_n) = 0$. Возьмем минимального размера замкнутый круг $|z| \leq r$, который содержит все точки $a_1, \dots, a_n$. Ясно, что $r < R$. В круге $|z| \leq r$ функция $|y^{(n)}(z)|$ имеет максимум в некоторой точке z_0 . Применяя теорему 1 и леммы 2–4, легко убедиться в том, что

$$|y^{(k)}(z)| < |y^{(n)}(z_0)| \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} \frac{(n-j)!}{(n-k-1)!} \frac{(j-1)!}{n!} (R+|z|)^{n-k} = \frac{R+|z|^{n-k}}{(n-k)!} |y^{(n)}(z_0)|,$$

если z принадлежит кругу $|z| \leq r$. Теперь из (1) следует, что

$$|y^{(n)}(z)| < |y^{(n)}(z_0)| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R+|z|^{n-k}}{(n-k)!} |g_k(z)|, \quad (12)$$

если z принадлежит кругу $|z| \leq r$. Полагая в (12) $z = z_0$, имеем

$$1 < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R+|z_0|^{n-k}}{(n-k)!} |g_k(z_0)|.$$

Получили противоречие, которое и доказывает теорему 2.

Следствие 1. Если

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2R^{n-k}}{(n-k)!} |c_k| \leq 1,$$

то дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(z) + c_{n-1} y^{(n-1)}(z) + \dots + c_1 y'(z) + c_0 y(z) = 0$$

с числовыми комплексными коэффициентами $c_{n-1}, \dots, c_0$ является уравнением чебышевского типа в круге $|z| < R$.

Возьмем систему

$$1, z, \dots, z^{n-2}, f(z) \quad (13)$$

голоморфных в круге $|z| < R$ функций. С помощью этих функций составим однородное линейное дифференциальное уравнение n -го порядка вида

$$y^{(n)}(z) - \frac{f^{(n)}(z)}{f^{(n-1)}(z)} y^{(n-1)}(z) = 0. \quad (14)$$

Очевидно функции (13) образуют фундаментальную систему решений уравнения (14).

Следствие 2. Если для любого z из круга $|z| < R$ выполняется неравенство

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{n-1!}{R+|z|} \left| f^{(n-1)}(z) \right|,$$

то дифференциальное уравнение (14) является уравнением чебышевского типа. Другими словами, система функций (13) является системой Чебышева в круге $|z| < R$.

Следствие 3. Если для любого z из круга $|z| < R$ выполняется неравенство

$$\left| g_0(z) \right| \leq \frac{n-1!}{R+|z|^n},$$

то дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(z) + g_0(z)y(z) = 0$$

является уравнением чебышевского типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн, М.Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. – М.: Наука, 1973. – 552 с.
2. Карлин, С. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике / С. Карлин, В. Стадден. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
3. Смирнов, В.И. Конструктивная теория функций комплексного переменного / В.И. Смирнов, Н.А. Лебедев. – М.: Наука, 1964. – 439 с.
4. Гончаров, В.А. Теория интерполирования и приближения функций / В.А. Гончаров. – М.: Наука, 1954. – 328 с.
5. Гельфонд, А.О. Исчисление конечных разностей / А.О. Гельфонд. – М.: Наука, 1967. – 376 с.
6. Голузин, Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г.М. Голузин. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
7. Кирьяцкис, Д.Э. О некоторых свойствах аналитических функций, образующих систему Чебышева / Д.Э. Кирьяцкис // Весн. Гродзенск. дзярж. ун-та. Сер. 2. Матэматыка. – 2011. – № 2(111). – С. 5 – 14.
8. Кирьяцкис, Д.Э. О некоторых свойствах системы Чебышева, связанной с разделенной разностью n -го порядка / Д.Э. Кирьяцкис // Изв. Смоленск. гос. ун-та. – 2011. – № 4(16). – С. 155 – 165.
9. Кирьяцкис, Д. Об одной чебышевской системе рациональных функций / Д. Кирьяцкис // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. – Смоленск, 2005. – С. 131 – 132.

Поступила 01.03.2012

ABOUT LINEAR HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATION AND THE CHEBYSHEV SYSTEM

D. KIRJACKIS

The fundamental system of solutions of linear homogeneous differential equations of n -th order may or may not be a Chebyshev system. In this paper, mounted signs that the fundamental system is a system of Chebyshev in the circle. For this purpose, we consider a class of analytic functions in a circle, each of which has n zeros in the circle. For functions of this class of modules, the estimates of derivatives.