

MIESIĘCZNIK  
POŁOCKI.

Т о м I.  
Р о к 1818.

*«Вестник Полоцкого государственного университета» продолжает традиции первого в Беларуси литературно-научного журнала «Месячник Полоцкий».*



---

---

ВЕСНИК ПОЛАЦКАГА ДЗЯРЖАУНАГА УНІВЕРСІТЭТА  
Серыя С. Фундаментальныя навукі

У серыі С навукова-тэарэтычнага часопіса друкуюцца артыкулы, якія прайшлі рэцэнзаванне, змяшчаюць новыя навуковыя вынікі ў галіне інфарматыкі і матэматыкі, фізікі.

---

---

ВЕСТНИК ПОЛОЦКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
Серия С. Фундаментальные науки

В серии С научно-теоретического журнала публикуются статьи, прошедшие рецензирование, содержащие новые научные результаты в области информатики и математики, физики.

---

---

HERALD OF POLOTSK STATE UNIVERSITY  
Series C. Fundamental sciences

Series C includes reviewed articles which contain novelty in research and its results in computer science and mathematics, physics.

---

---

Адрес редакции:  
Полоцкий государственный университет, ул. Блохина, 29, г. Новополоцк, 211440, Беларусь  
тел. + 375 (214) 53 34 58, e-mail: [vestnik@psu.by](mailto:vestnik@psu.by)

Отв. за выпуск: *В.А. Груздев, Д.О. Глухов, А.А. Козлов.*  
Редактор *О.П. Михайлова.*

Подписано к печати 29.09.2017. Бумага офсетная 65 г/м<sup>2</sup>. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Ризография.  
Усл. печ. л. 13,95. Уч.-изд. л. 16,82. Тираж 100 экз. Заказ 1536

## ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 681.32

### МОДЕЛИРОВАНИЕ СЖАТИЯ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЗЕМЛИ МОДИФИЦИРОВАННЫМ АЛГОРИТМОМ ЕСВАQ С ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ВОССТАНОВЛЕННОЙ ИНФОРМАЦИИ В ФОРМАТЕ CEOS

кан. техн. наук, доц. Р.П. БОГУШ, И.Ю. ЗАХАРОВА  
(Полоцкий государственный университет);

кан. техн. наук Н.М. НАУМОВИЧ  
(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники)

*Рассмотрены особенности представления предварительно обработанных комплексных данных радиолокатора с синтезом апертуры в формате CEOS. Для сжатия данных использован модифицированный алгоритм на основе энтропийно-ограниченного блочного адаптивного квантования. Представлены общая схема алгоритма и результаты моделирования по сжатию и записи восстановленных комплексных данных в стандартный формат. В качестве входных данных использованы значения отраженного сигнала радиолокатора с синтезом апертуры ERS-1, отсчеты которого даны в виде синфазной и квадратурной компонент. Приведены результаты фокусировки с геометрической коррекцией восстановленных после сжатия и представленных в стандартном формате данных ERS-1. Рассчитаны основные показатели качества работы квантователя.*

**Ключевые слова:** синтезированная апертура, формат данных CEOS, радиолокационное изображение, энтропийно-ограниченное блочное адаптивное квантование.

**Введение.** В настоящее время пространственное разрешение изображений, получаемых с использованием систем дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) на основе радиолокаторов с синтезированной апертурой антенны (РСА), сопоставимо с разрешением космических снимков, получаемых системами ДЗЗ оптического диапазона [1]. При этом системы дистанционного зондирования Земли на основе РСА позволяют:

- получать детальные изображения местности в любых метеоусловиях и в любое время суток;
- обнаруживать объекты по их радиолокационным характеристикам;
- осуществлять зондирование подповерхностных объектов;
- обеспечивают возможность изучения деталей состояния водной поверхности [2].

Для стандартизации представления данных РСА систем ДЗЗ комитетом по спутниковым наблюдениям Земли (Committee on Earth Observation Satellites – CEOS) приняты рекомендации по уровням обработки радиолокационных данных и формату CEOS для их представления [3]. Известно, что чем ниже уровень обработки данных, тем меньше вероятность возникновения ошибок, проще организовать изменение алгоритмов при обработке, возможна максимальная автоматизация процесса и т.д. [1]. Однако определение состава и формата представления основных и вспомогательных данных РСА на каждом уровне требует учета многих разнородных факторов процесса функционирования не только самого датчика, но и его носителя и системы ДЗЗ в целом [1, 4]. Полученные данные обрабатываются, как правило, с использованием существующих коммерческих пакетов, которые учитывают особенности представления первичных данных РСА. Существует ряд коммерческих и свободно распространяемых прикладных программ, специально предназначенных для работы с радиолокационными данными. Для ряда других программ создаются специальные модули, позволяющие проводить обработку поляриметрических данных (таких как Envisat, ALOS/PALSAR, Radarsat-2, TerraSAR-X и др). Они позволяют проводить синтез изображений из комплексных данных первого уровня Single Look Complex Image (SLC), их калибровку, расчет различных поляриметрических параметров, когерентностей и других характеристик. К такому программному обеспечению относятся:

- ENVI со встраиваемым модулем SARscape;
- GAMMA Software;

- Geomatica 2012;
- ScanEx Image Processor;
- NEST;
- PolSARPro;
- DORIS.

Среди наиболее используемых программных модулей возможность обработки данных нулевого уровня предоставляется SARscape и Modular SAR Processor. Другое программное обеспечение направлено на обработку сфокусированных радиолокационных данных первого уровня. Для того чтобы обработка радиолокационных изображений была возможна, при разработке PCA систем дистанционного зондирования Земли необходимо учитывать рекомендации CEOS по формату представления данных, что обеспечит дальнейшую корректную обработку информации существующими программными пакетами.

**Целью работы** является моделирование сжатия комплексных радиолокационных данных на основе модифицированного энтропийно-ограниченного блочного адаптивного квантования с представлением восстановленных отсчетов отраженного сигнала PCA в формате CEOS, который поддерживается существующими программными пакетами.

**1. Сжатие и восстановление комплексных радиолокационных данных.** Предварительная обработка радиолокационных данных на борту космического аппарата предполагает сжатие комплексных данных отраженного сигнала, которое необходимо для сокращения объема передаваемой информации по каналу связи. В основе ряда алгоритмов сжатия, применяемых в современных системах ДЗЗ на основе PCA, лежит технология блочного адаптивного квантования (БАК) [5]. Энтропийно-ограниченное блочное адаптивное квантование (Entropy Constrained Block Adaptive Quantization – ECBAQ) основывается на том, что динамический диапазон уровней мощности сигнала (от 0 до 255 или от –128 до + 127) в выделенном блоке данных намного меньше, чем у всего набора значений [5, 6], и представляется перспективным для использования в системах ДЗЗ. В связи с этим на первом шаге сжатия выполняется разбиение необработанных данных на блоки, минимальный размер которых выбирается таким образом, чтобы обеспечить нормальное распределение данных в блоке, а максимальный размер ограничен мощностью сигнала, которая должна оставаться постоянной для каждого блока [6]. Для радиолокационных данных ДЗЗ одним из наиболее часто применяемых является блок размером 128 отсчетов, который гарантирует выполнение заданных условий. Алгоритм на основе ECBAQ использует оптимальный квантователь, минимизирующий значения среднего квадрата ошибки (СКО) и выходной энтропии путем изменения параметров квантования, таких как количество уровней на выходе квантователя и шаг квантования [7].

Модифицированный алгоритм требует выполнения следующих основных шагов для одного блока входных данных:

1. Расчет количества уровней квантователя  $C$ :

$$C = 2^{R_{out}},$$

где  $R_{out}$  – заданная разрядность выходных данных, бит/символ.

2. Расчет размера шага квантования  $S_c$ :

$$S_c = A_{max}/C,$$

где  $A_{max}$  – максимальное значение во входном блоке данных.

3. Равномерное квантование значений в блоке на основе рассчитанных  $C$  и  $S_c$ .
4. Определение СКО согласно формуле [8]

$$\sigma^2 = \frac{\sum_1^n (x - \tilde{x})^2}{n},$$

где  $x$  – исходное значение;

$\tilde{x}$  – квантованное значение;

$n$  – количество элементов в блоке,  $n = 128$ .

5. Расчет энтропии  $H$  выполняется с учетом того, что входные радиолокационные данные подчиняются нормальному закону распределения вероятности [9]:

$$H = \frac{1}{2} \cdot \ln(2\pi\sigma^2 e),$$

6. Если значение энтропии  $H$  больше заданного значения  $R$ , причем изначально  $R = R_{out}$ , то шаг квантования уменьшается на единицу и происходит возврат к шагу 3.

7. Если значение СКО больше значения  $\epsilon$ , которое задается исходя из требуемой точности квантователя, то количество уровней квантования увеличивается на единицу и происходит возврат к шагу 2.

8. Если максимальный индекс квантователя превышает значение  $2^{R_{out}} - 1$ , то пороговые значения повышаются и происходит возврат к шагу 1.

9. Запись индексов уровней квантования для блока и  $A_{max}$  для выбранных  $C$  и  $S_c$ .

10. Кодирование полученных данных алгоритмом Хаффмана.

Восстановление после сжатия происходит по следующему алгоритму:

- декодирование Хаффмана;
- разделение на блоки;
- извлечение значений  $A_{max}$ ;
- восстановление значений  $C$  и  $S_c$  исходя из переданного значения  $A_{max}$ ;
- восстановление кодовой книги исходя из рассчитанных значений;
- соотнесение индекса уровня квантования с индексом кодовой книги для получения значения, соответствующего данному индексу.

К основным характеристикам квантователя относится коэффициент сжатия данных ( $C_D$ ), который вычисляется как отношение количества бит на отсчет для входных ( $R_{in}$ ) и выходных данных ( $R_{out}$ ).

**2. Представление восстановленных комплексных радиолокационных данных в формате CEOS.** Запись комплексных отсчетов отраженного сигнала PCA в формате CEOS, представляющих собой радиоголограмму (РГГ), обеспечивает возможность дальнейшей их обработки стандартными программными пакетами [10]. Данный формат представляет собой набор фиксированных записей основных данных и метаданных, состоящий из смеси ASCII и бинарных записей, и использует структуру из четырех файлов:

- файл каталога тома (Volume directory file);
- файл заголовка (Leader file);
- файл данных (Data set file);
- файл нулевого тома (Null volume file) [3, 10].

Согласно поставленной задаче моделирования необходимо радиолокационные данные записать по правилам формата в файл данных. Файл данных включает запись описания файла и набор записей РГГ. Запись описания файла содержит:

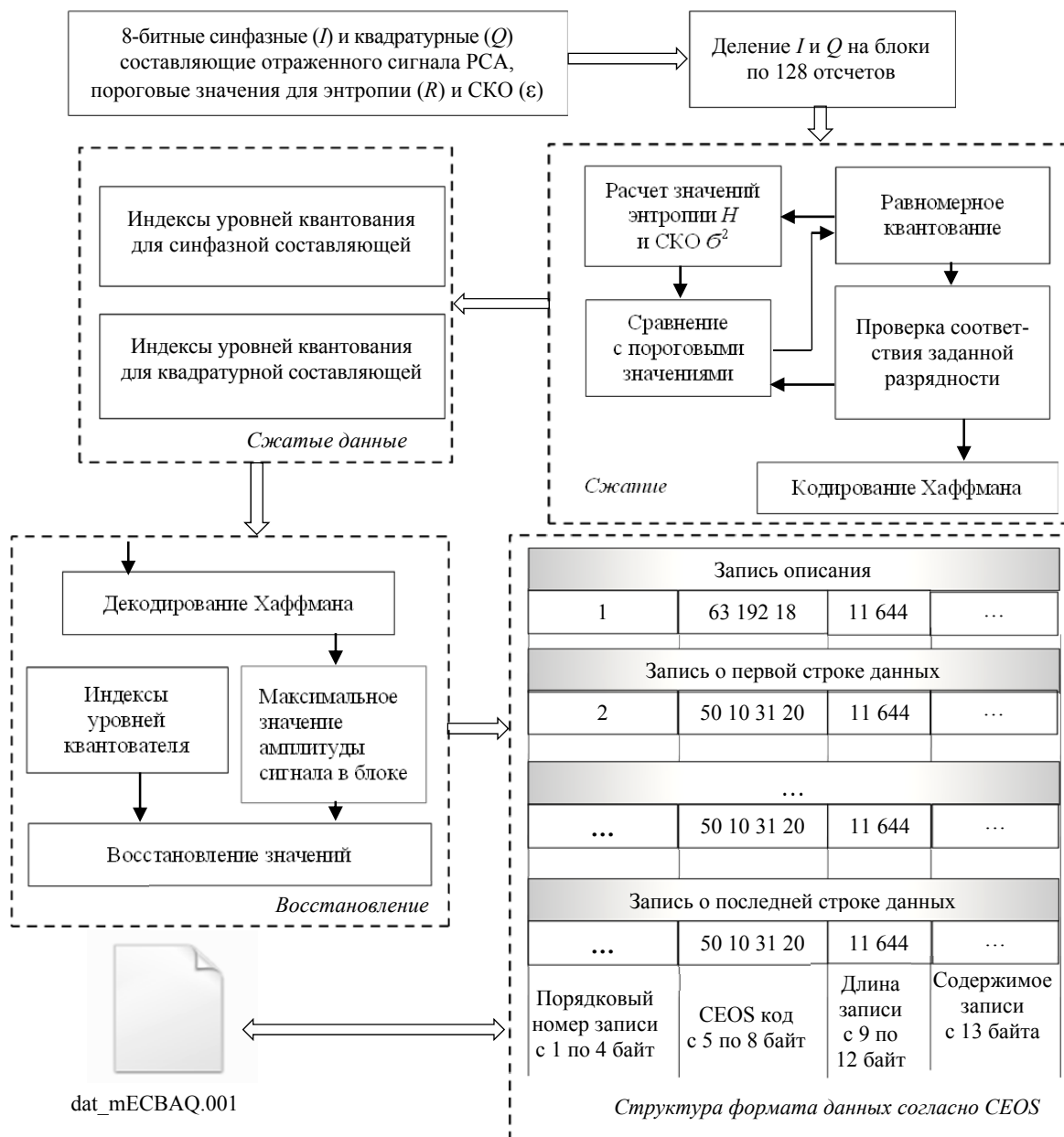
- идентификатор формата контрольного документа;
- номер и имя файла;
- данные о локации (номер, протяженность, код, флаг локации);
- информацию о количестве записей с необработанными данными, длине каждой записи, количестве строк и пикселей в каждом комплекте данных. CEOS код записи – 63, 192, 18, 18.

Каждая запись с данными необработанного сигнала хранит описание, включающее количество строк, количество пикселей в строке, вспомогательную информацию о параметрах датчиков, счетчик пакетов, и представляет собой одну строку РГГ, т.е. отраженные сигналы для одного зондирующего импульса. Каждый элемент строки РГГ представлен двумя байтами, по одному байту на синфазную и квадратурную составляющие отраженного сигнала и записывается с 413 по 11644 байт. Количество записей необработанного сигнала равно количеству строк изображения. CEOS код записи – 50, 10, 31, 20.

Схема моделирования модифицированного ECBAQ сжатия и представления восстановленных комплексных радиолокационных данных в стандартный формат показана на рисунке 1.

**3. Результаты моделирования.** Представленная на рисунке 1 схема моделирования сжатия и записи комплексных радиолокационных данных в стандартный формат CEOS реализована с использованием программного пакета MatLab. В качестве входных значений использовались данные PCA ERS-1 с синфазной и квадратурной 8-битными составляющими из [11]. На первом этапе входные отсчеты разделяются на две части: синфазную и квадратурную составляющие. Далее выполняется блочная обработка данных по схеме, показанной на рисунке 1, при этом размер блока составляет 128 бит. Следует заметить, что при выставлении слишком низких пороговых значений  $R$  и  $\epsilon$ , квантователь может повысить заданную разрядность выходных данных, т.е. уменьшить коэффициент сжатия. Для исключения увеличения разрядности предусмотрен шаг 8 алгоритма сжатия, рассмотренного в разделе 1. После завершения оптимального квантования формируется матрица на основе полученных квантованных отсчетов. Каждая строка матрицы включает значение максимальной амплитуды блока данных и индексы уровней квантования данного блока. Соответственно, количество строк матрицы определяется количеством бло-

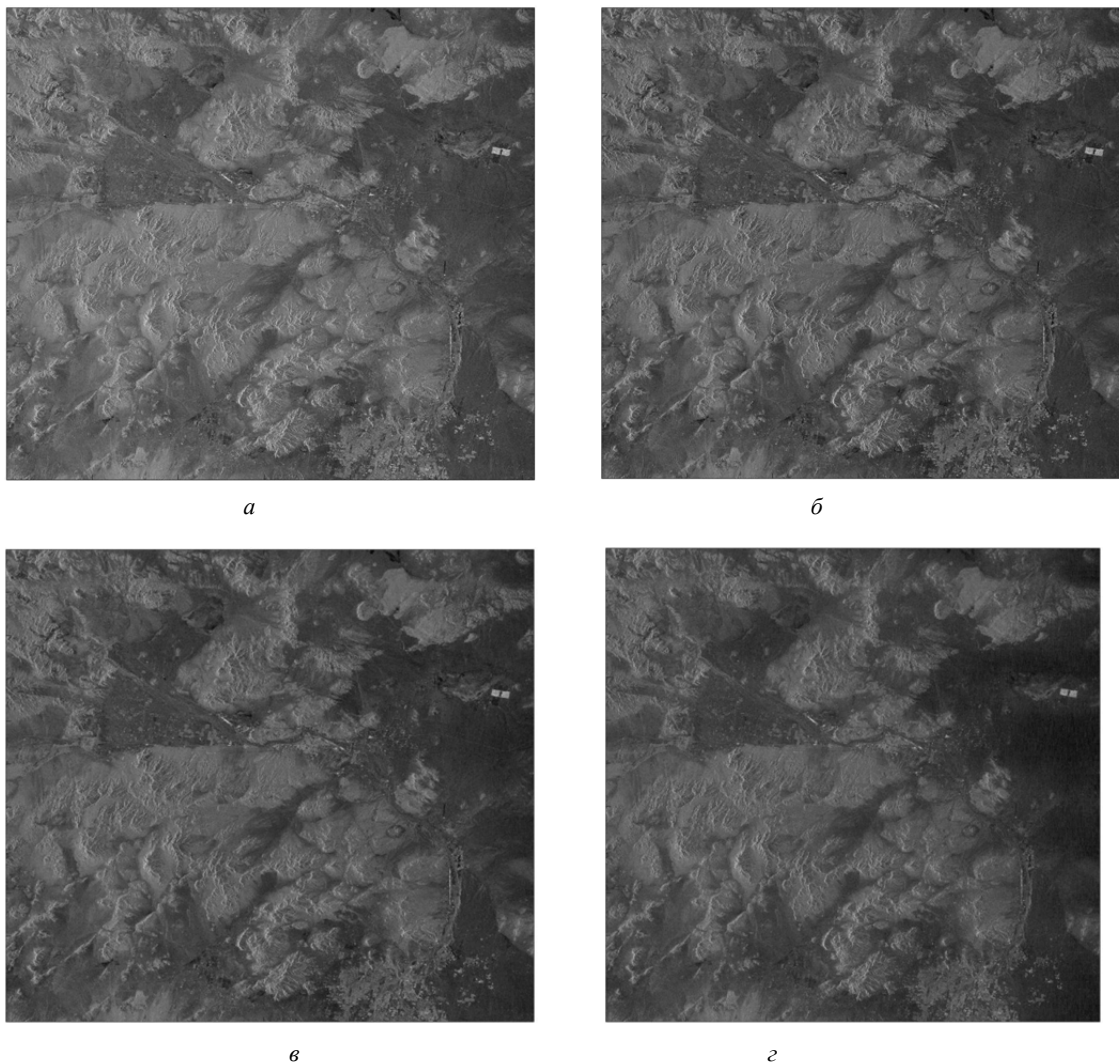
ков. На следующем этапе выполняется эффективное кодирование без потери данных методом Хаффмана с использованием функции *huffmanenco*. Для восстановления данные необходимо декодировать методом Хаффмана (функция *huffmandeco*), затем преобразовать в матрицу, строки которой описывают один сжатый блок данных, выделить максимальное значение отсчета и индексы квантования для данного блока, выполнить восстановление данных на основе расчета шага и уровня квантования. После моделирования процедур сжатия и восстановления значений синфазной и квадратурной составляющих выполняется запись полученных данных в файл согласно спецификации формата CEOS [3].



**Рисунок 1. – Схема моделирования модифицированного ECBAQ сжатия с представлением восстановленных комплексных радиолокационных данных в стандартном формате**

На рисунке 2, *a* показано сфокусированное радиолокационное изображение PCA ERS-1 из [11], а на рисунках 2, *б–г* представлены результаты фокусировки восстановленных после модифицированного ECBAQ сжатия данных при различных значениях  $C_0$ , записанных в формате CEOS, т.е. получены по схеме обработки, показанной на рисунке 1.

Для фокусировки и формирования радиолокационного изображения с геометрической коррекцией использовался алгоритм, реализованный в пакете MatLab, из [10], предназначенный для обработки данных спутников ERS-1/ERS-2. Входные данные представляют собой сформированный файл `dat_mECBAQ.001` и стандартный файл заголовка `LEA_01.001` с метаданными [11].



**Рисунок 2.** – Результат фокусировки: *а* – для исходных комплексных данных;  
*б* – для восстановленных данных после сжатия при  $C_Q = 8/4$ ;  
*в* – для восстановленных данных после сжатия при  $C_Q = 8/3$ ;  
*г* – для восстановленных данных после сжатия при  $C_Q = 8/2$

Для оценки качества работы квантователя используется отношение сигнал/шум (Signal To Quantization Noise Ratio – SQNR), которое вычисляется как [12]

$$SQNR = 10 \lg \left( \frac{\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} x_{ij}}{\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} (x_{ij} - \tilde{x}_{ij})^2} \right),$$

где  $x_{ij}$  – значение исходного отсчета сигнала;

$\tilde{x}_{ij}$  – значение восстановленного после сжатия отсчета сигнала;

$M$  – количество строк в матрице данных;

$N$  – количество столбцов в матрице данных.

В таблице 1 приведены результаты экспериментальных исследований по оценке качественных характеристик алгоритма.

Таблица 1 – Рассчитанные качественные характеристики алгоритма и пороговые значения

Коэффициент сжатия, $C_Q$	$SQNR$ , дБ	$SQNR_{ECSAQ}$ , дБ [7]	Результирующее пороговое значение $\epsilon$	Результирующее пороговое значение $R$
8/4	23,33	22,23	1,75	1,7
8/3	18,1	16,17	6,94	2,38
8/2	12,63	9,67	26,8	3,06

Визуальное сравнение синтезированных радиолокационных изображений, которые показаны на рисунке 2, свидетельствует, что для сжатых/восстановленных радиолокационных данных при  $C_Q = 8/4$  и  $C_Q = 8/3$  отличия незначительны, а в случае  $C_Q = 8/2$  области, содержащие ряд высокочастотных компонент, имеют визуально отличимые различия. Анализ таблицы 1 свидетельствует, что модифицированный алгоритм обеспечивает улучшение отношения сигнала/шум для разных коэффициентов сжатия.

Для выявления основных изменений в изображениях на рисунках 3, а, 4, а и 5, а показаны негативные разностные изображения для сфокусированных исходных данных и восстановленных после сжатия, а также соответствующие им гистограммы. Для лучшего масштабирования гистограмм нулевой уровень яркости, принадлежащий фону, на них не отображается.

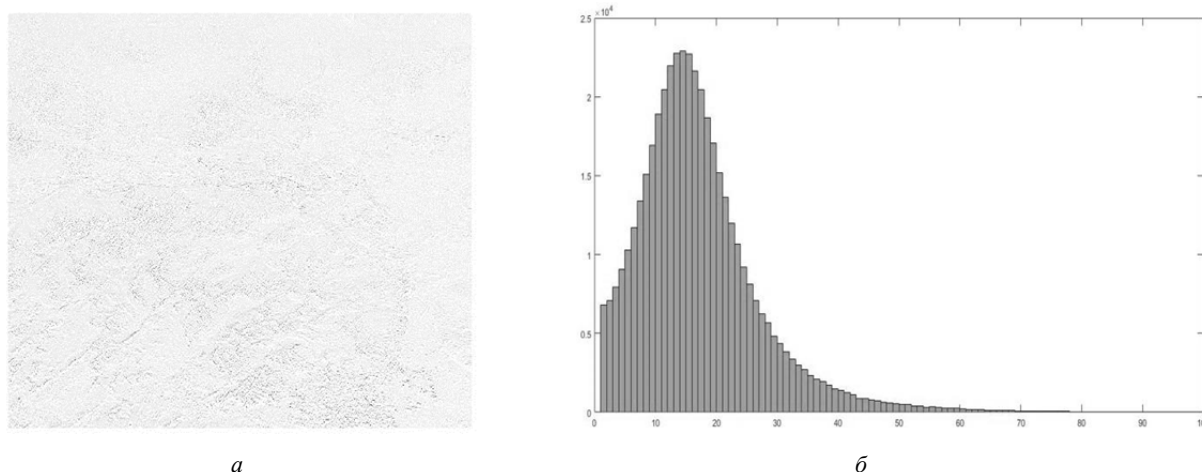


Рисунок 3. – Визуальное представление изменений сфокусированного изображения при сжатии радиолокационных данных с  $C_Q = 8/4$ : а – разностное изображение; б – гистограмма

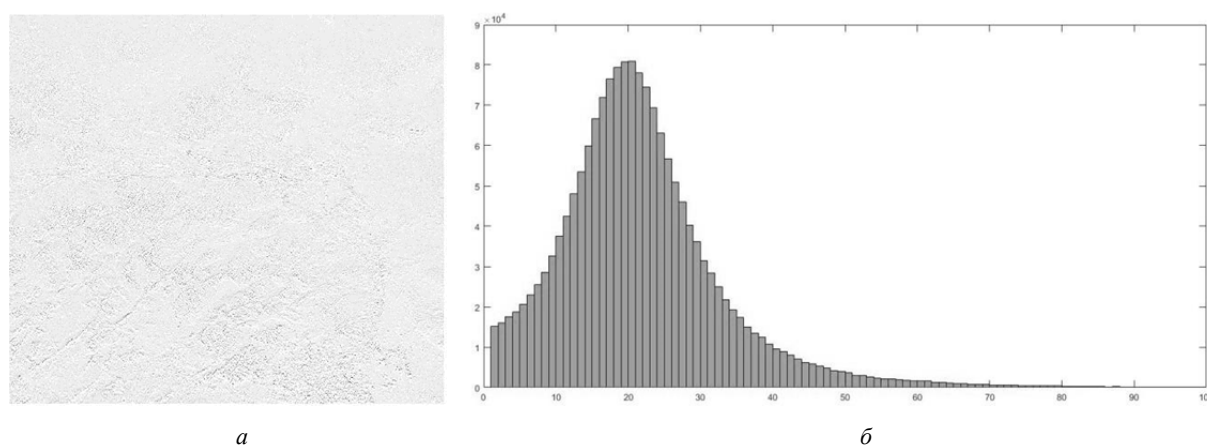


Рисунок 4. – Визуальное представление изменений сфокусированного изображения при сжатии радиолокационных данных с  $C_Q = 8/3$ : а – разностное изображение; б – гистограмма

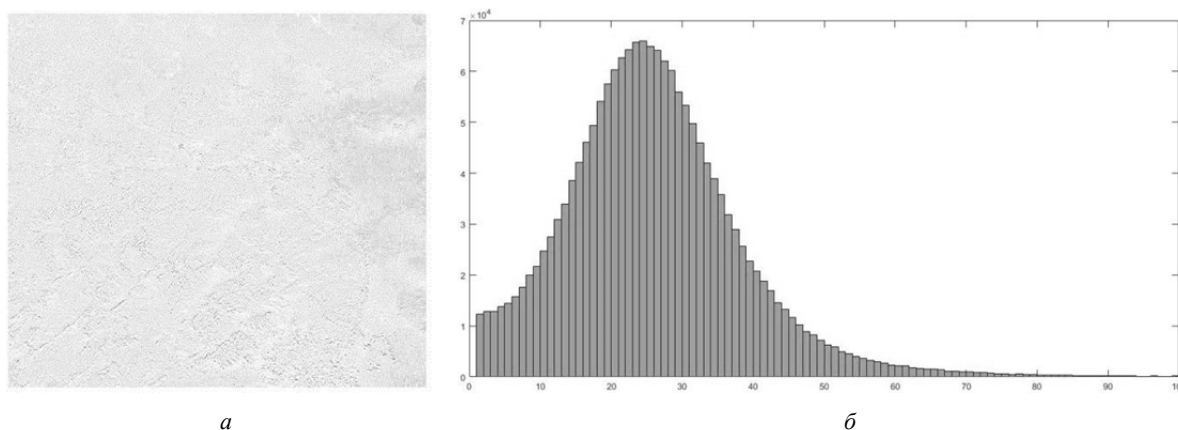


Рисунок 5. – Визуальное представление изменений сфокусированного изображения при сжатии радиолокационных данных с  $C_Q = 8/4$ : *a* – разностное изображение; *б* – гистограмма

Анализ рисунков 3–5, показывает, что для сжатых/восстановленных изображений при  $C_Q = 8/4$  и  $C_Q = 8/3$  отличия незначительны, а при  $C_Q = 8/2$  в правой части разностного изображения присутствуют области и пиксели с увеличенной амплитудой. Гистограмма для данного разностного изображения также свидетельствует о наличии на нем большего количества пикселей с увеличенным уровнем яркости.

При наличии в обрабатываемом блоке данных значительного количества высокочастотных составляющих с высокой амплитудой и применении сжатия при  $C_Q = 8/2$  для корректного отображения всего диапазона входных данных требуется большее число выходных уровней квантователя, т.е.  $R_{out} > 2$ . Вследствие этого на подобных участках изображений могут образовываться шумовые области (рисунок 6). Для практического использования рекомендуется применение модифицированного алгоритма с коэффициентами сжатия  $C_Q = 8/4$  и  $C_Q = 8/3$  и отношением сигнал/шум 23,33 дБ и 18,1 дБ соответственно.

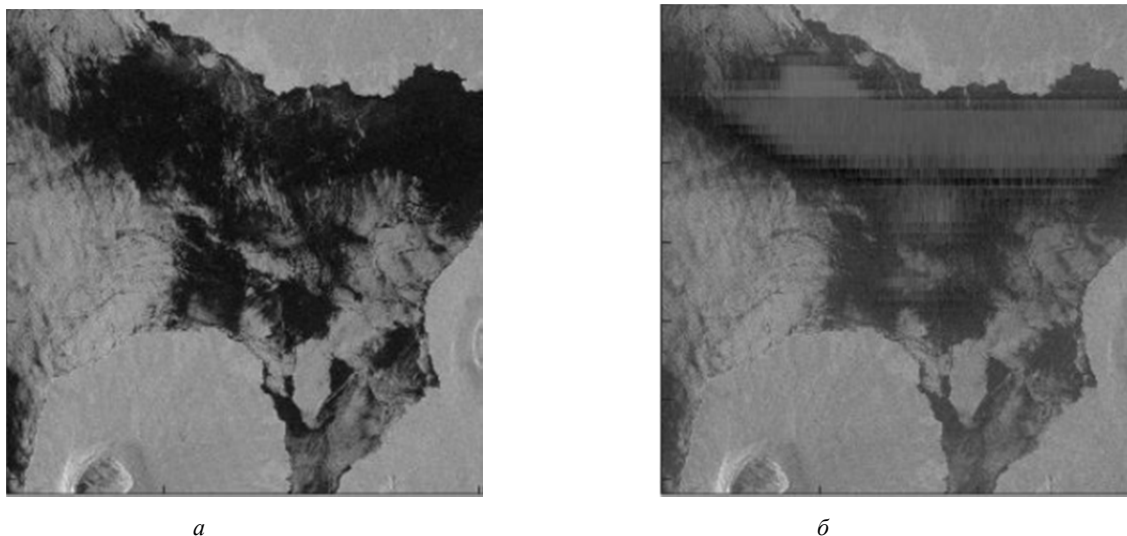


Рисунок 6. – Пример наличия шумовой области на изображении при  $C_Q = 8/2$ :  
*a* – результат фокусировки исходных данных; *б* – результат фокусировки для восстановленных данных после сжатия при  $C_Q = 8/2$

**Заключение.** Рассмотрен модифицированный алгоритм сжатия ЕСВАQ радиолокационных данных PCA и записи восстановленных после сжатия отсчетов в формате CEOS. Представлены результаты моделирования в пакете MatLab для комплексных данных PCA ERS-1. Приведены сфокусированные изображения с геометрической коррекцией для сжатых и записанных в формате CEOS данных. Результаты моделирования свидетельствуют о корректности выполнения процедур сжатия и восстановления данных с последующей записью их в формате стандартного пакета CEOS.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Радиолокационные системы землеобзора космического базирования / В. С. Верба [и др.] – М. : Радиотехника, 2010. – 680 с.
2. Коберниченко, В. Г. Радиоэлектронные системы дистанционного зондирования Земли : учеб. пособие / В. Г. Коберниченко ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург: Изд-во Урал. федер. ун-та, 2016. – 220 с.
3. CEOS WGD on Synthetic Aperture Radar Data Product Format Standards issue 2 revision (CEOS-SAR-CST) // Committee on Earth Observation Satellite (CEOS) Data Subgroup, 1989.
4. Беленов, А. В. Стандартные уровни обработки и форматы представления данных ДЗЗ из космоса. Мировой опыт / А. В. Беленов // Геоматика. – 2009. – № 4. – С. 18–202.
5. Benz, U. A Comparison of Several Algorithms for SAR Raw Data Compression / U. Benz, K. Strodl, A. Moreira // IEEE Transactions on geoscience and remote sensing. – 1995. – Vol. 33. – № 5. – P. 1266–1276.
6. Agrawal, N. SAR signal processing algorithms / N. Agrawal, K. Venugopalan // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. – 2009. – Vol. 4, № 9. – P. 40–45.
7. Algra, T. Compression of raw sar data using entropy-constrained quantization / T. Algra // IEEE IGARSS, Honolulu, HI, 14 June 2000. – Vol. 6. – P. 2660–2662.
8. Agrawal, N. Analysis of Complex SAR Raw Data Compression / N. Agrawal, K. Venugopalan // Progress In Electromagnetics Research Symposium, Cambridge, USA, July 2–6, 2008 / Cambridge, 2008. – P. 155–160.
9. Вернер, М. Основы кодирования : учебник для ВУЗов / М. Вернер. – М. : Техносфера, 2004. – 288 с.
10. Моделирование алгоритма формирования радиолокационного изображения на основе представленных в формате CEOS необработанных данных дистанционного зондирования Земли / Р. П. Богуш [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 13–21.
11. Geohazard Supersites and Natural Laboratories. GEO – Group on Earth Observations. [Electronic resource]. – Mode of access: [http://eo-virtual-archive4.esa.int/search/ER01\\_SAR\\_IM\\_\\_0P/html/?name=Franche-Comte](http://eo-virtual-archive4.esa.int/search/ER01_SAR_IM__0P/html/?name=Franche-Comte). – Date of access: 20.06.17.
12. Сэлмон, Д. Сжатие данных, изображений и звука / Д. Сэлмон. – М. : Техносфера, 2004. – 368 с.

Поступила 20.09.2017

**SIMULATION OF COMPRESSION ECBAQ MODIFICATION WITH REPRESENTATION  
IN CEOS FORMAT OF EARTH REMOTE SENSING DAT**

**R. BOHUSH, I. ZAKHARAVA, N. NAUMOVISH**

*Features of the representation of compressed complex SAR radar data in CEOS format for the possibility of their further processing by existing software packages are considered. The general scheme of the algorithm and the results of modeling for compression and recording of complex data in a standard format are presented. As the initial data, the values of the reflected ERS-1 signal with In –phase and Quadrature phase components were used. Data compression is performed based on entropy-constrained block adaptive quantization modification algorithm. The proposed processing algorithm is implemented in MatLab software. Experimental results are presented in the paper.*

**Keywords:** synthetic aperture radar, CEOS format, radar image, compression.

УДК 621.396

## ОБЗОР МЕТОДОВ ОБНАРУЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ПОМОЩЬЮ НЕЛИНЕЙНОГО РАДИОЛОКАТОРА

**М.М. ИВАНОВ, д-р техн. наук, проф. В.К. ЖЕЛЕЗНЯК, В.М. ЧЕРТКОВ**  
(Полоцкий государственный университет)

*Выполнен обзор методов обнаружения нелинейных элементов с помощью нелинейного радиолокатора. Дано определение понятию нелинейной радиолокации и раскрыт ее принцип работы. Представлены математические выкладки, поясняющие физические процессы, происходящие в нелинейном элементе при взаимодействии с зондирующим сигналом. Рассмотрено применение новых для нелинейной радиолокации способов зондирования: последовательностью сверхширокополосных импульсов, зондирование сверхширокополосными импульсами и сверхвысокочастотным гармоническим сигналом одновременно, моноимпульсного зондирования. Рассмотрены классический метод анализа второй и третьей гармоник, режим «20К», применение аудиосигналов, двухчастотных и многочастотных сигналов. Проведен сравнительный анализ, выявлены достоинства и недостатки рассмотренных методов обнаружения нелинейных элементов.*

**Ключевые слова:** нелинейный радиолокатор, сверхширокополосный сигнал, нелинейный элемент, обнаружение нелинейных элементов.

**Введение.** Принцип работы нелинейной радиолокации полностью аналогичен традиционной радиолокации для случая поиска объектов с активным ответом, при этом уравнение нелинейной радиолокации [1] имеет следующий вид:

$$P_{N_{\text{пр}}} = \frac{P_{\text{изл}} G_{\text{изл}} G_{N_{\text{пр}}} \lambda^2}{(4\pi r)^4} \cdot \frac{\lambda^2}{N^2} \cdot G_{\text{НО}_{\text{пр}}} \cdot G_{N_{\text{изл}}} \cdot \zeta_N(\omega, P_{\text{изл}}) \cdot K_1(\omega) K_2(\omega_N), \quad (1)$$

где  $P_{N_{\text{пр}}}$  – мощность отклика объекта на  $N$ -й гармонике в месте расположения приемной антенны радиолокатора;

$P_{\text{изл}}$  – мощность излучения радиолокатора;

$G_{\text{изл}}$  – коэффициент усиления излучающей антенны радиолокатора;

$G_{N_{\text{пр}}}$  – коэффициент усиления приемной антенны радиолокатора на  $N$ -й гармонике;

$\lambda = c / f$  – длина волны излучения радиолокатора (эквивалентна частоте, где  $c$  – скорость света,  $f$  – частота излучения радиолокатора);

$r$  – расстояние до объекта;

$N$  – номер принимаемой радиолокатором гармоники;

$G_{\text{НО}_{\text{пр}}}$  – коэффициент усиления эквивалентной приемной антенны нелинейного элемента (НЭ);

$G_{N_{\text{изл}}}$  – коэффициент усиления эквивалентной излучающей антенны НЭ;

$K_1(\omega)$  – частотно-зависимый коэффициент затухания зондирующего сигнала радиолокатора в среде распространения;

$K_2(\omega_N)$  – частотно-зависимый коэффициент затухания сигнала  $N$ -й гармоники от НЭ в среде распространения;

$\zeta_N(\omega, P_{\text{изл}})$  – коэффициент нелинейного преобразования для  $N$ -й гармоники, зависящий от частоты и мощности излучения радиолокатора.

Нелинейными называются элементы, обладающие нелинейной вольт-амперной характеристикой (ВАХ), к ним относятся диоды, транзисторы, микросхемы, контакты металл – окисел – металл. Кроме того, к нелинейным элементам относится классическая двуокись железа – ржавчина.

Существенным отличием нелинейной радиолокации от классической с активным ответом является прямое преобразование падающей на НЭ энергии зондирующего сигнала в энергию высших гармоник. В связи с этим процесс обнаружения в условиях нелинейной локации можно классифицировать как наблюдение с полуактивным ответом, что связано с отсутствием потребления энергии объектом от спе-

циального источника питания. Особенности обнаружения НЭ являются очень малое значение коэффициента нелинейного преобразования ( $\zeta_N \ll 1$ ) и зависимость от частоты и мощности зондирующего сигнала локатора [1].

Вольт-амперная характеристика любого НЭ разлагается в ряд Тейлора в виде аппроксимирующего степенного полинома [1]. Выходной ток при воздействии гармонического сигнала будет иметь следующий вид:

$$i_{\text{вых}}(t) = i_0 + \alpha e_s(t) + \beta e_s^2(t) + \gamma e_s^3(t) + \dots, \quad (2)$$

где  $e_s(t)$  – входной сигнал на нелинейном элементе.

Из выражения (2) следует, что нелинейность ВАХ приводит к появлению в выходном сигнале постоянной составляющей  $i_0$ , основной гармонике с амплитудой, умноженной на коэффициент  $\alpha$ , и высших гармоник основной частоты, амплитуды которых пропорциональны соответствующим коэффициентам. Коэффициенты  $\beta$  и  $\gamma$  представляют первую, вторую производные от крутизны ВАХ ( $\alpha$ ) соответственно [1]:

$$\alpha = \left. \frac{di}{de} \right|_{e=E_0},$$

$$\beta = \frac{1}{2!} \cdot \left. \frac{d^2i}{d^2e} \right|_{e=E_0} = \frac{1}{2!} \cdot \left. \frac{d\alpha}{de} \right|_{e=E_0},$$

$$\gamma = \frac{1}{3!} \cdot \left. \frac{d^3i}{d^3e} \right|_{e=E_0} = \frac{1}{3!} \cdot \left. \frac{d^2\alpha}{d^2e} \right|_{e=E_0}.$$

Если входной сигнал имеет вид

$$e_s(t) = A_0 \cos \omega t, \quad (3)$$

где  $A_0$  – амплитуда сигнала;

$\omega = 2\pi f$  – циклическая частота сигнала (рад/с),  $f$  – частота сигнала (Гц),

то, подставив выражение (3) в формулу (2), получим

$$i_{\text{вых}}(t) = (i_0 + \beta A_0^2 + \dots) + (\alpha A_0 + 1, 25\gamma A_0^3) \cos \omega t + 0, 5\beta A_0^2 \cos 2\omega t + 0, 25\gamma A_0^3 \cos 3\omega t + \dots \quad (4)$$

Появление дополнительной постоянной составляющей  $\beta A_0^2$ , добавленной к основному току  $i_0$ , что соответствует смещению рабочей точки в сторону увеличения крутизны, если элемент находится в активном режиме. В пассивном режиме рабочая точка не смещается и располагается там, где крутизна ВАХ минимальна [1].

### Методы обнаружения нелинейных элементов

Существует много разнообразных методов обнаружения НЭ, использующих различные принципы нелинейной радиолокации, имеющих свои достоинства и недостатки. Рассмотрим наиболее распространенные из них.

#### 1. Зондирование гармоническим сигналом.

При облучении полупроводника гармоническим сигналом переотраженный сигнал обогащается гармониками. Вольт-амперная характеристика полупроводникового радиоэлектронного элемента имеет квадратичный характер, а ВАХ ложных полупроводников, полученных в местах соединения различных металлов, окислений, аппроксимируется полиномом третьей степени. При использовании этого метода в отраженном сигнале особый интерес представляют вторая и третья гармоники, так как соотношение их уровней указывает на тип НЭ [1]. Для настоящего полупроводникового элемента уровень второй гармоники выше уровня третьей, а при облучении ложного полупроводника – ситуация обратная.

Задача обнаружения НЭ сводится к узкополосному приему отраженных эхо-сигналов и анализу второй и третьей гармоник, соответствующих единственной частоте зондирования.

Работающие по такому принципу нелинейные радиолокаторы (НРЛ) обладают возможностью определять тип полупроводника. Но данное достоинство порождает основной недостаток НРЛ такого типа – наличие двух приемников, работающих на удвоенной и утроенной гармонике соответственно. Это приводит к проблеме радиочастотной изоляции.

### 2. Зондирование двухчастотным сигналом.

В данном методе НЭ зондируется двухчастотным сигналом, то есть НЭ зондируется одновременно гармоническими сигналами  $S_1$  и  $S_2$  с частотами  $f_1$  и  $f_2$  ( $f_2 > f_1$ ) соответственно. Приемник такого НРЛ выделяет из спектра отраженного сигнала комбинационные гармоники вида  $n_1f_1 \pm n_2f_2$ , где  $n = \{1, 2, 3, \dots\}$ . При этом сигналы от НЭ, как правило, имеют наибольшую величину на частотах  $f_1 \pm f_2$ . Данные комбинационные частоты обусловлены, квадратичным членом ВАХ настоящего полупроводникового перехода. При наличии ложных полупроводников переизлученный сигнал имеет наибольший уровень на частотах  $2f_1 - f_2$  и  $2f_2 - f_1$  [2].

### 3. Зондирование многочастотным сигналом.

Иногда в качестве зондирующего сигнала используют сигнал, спектр которого состоит из  $N$  равноамплитудных спектральных составляющих. В этом случае удастся увеличить мощность принимаемого сигнала. Данный прием используется вместо увеличения мощности зондирующего сигнала [3]. Средняя мощность удвоенных спектральных составляющих отраженного сигнала увеличивается пропорционально  $N$  при выполнении следующего условия:

$$\omega_i - \omega_{i+1} = \omega_{i+1} - \omega_{i+2}.$$

Таким образом, в образовании удвоенных частот в спектре отраженного сигнала участвуют более двух гармонических составляющих. Так, когерентно суммируются  $N - 1$  гармонических составляющих:

$$\omega_{отр} = \omega_1 + \omega_N = \omega_2 + \omega_{N-1} = \omega_3 + \omega_{N-2} = \dots$$

Увеличение мощности выполняется при условии полной синфазности спектральных составляющих [3].

Достоинства многочастотного зондирующего сигнала сведены в таблицу 1.

Таблица 1. – Достоинства многочастотного сигнала

Положительный эффект (по сравнению с одночастотным режимом)	Физический процесс, обусловленный многочастотным режимом работы
Увеличение дальности обнаружения нелинейных объектов: в 2–2,5 раза в свободном пространстве; в 1,6–1,8 раза вблизи поверхности грунта	Возрастание нелинейной эффективной поверхности рассеяния на 15–25 дБ при перестройке частоты на $\pm 15-20\%$ за счет резонансных явлений при переизлучении СВЧ-сигнала
Увеличение вероятности обнаружения неподвижных объектов с изрезанной диаграммой обратного рассеяния (ДОР)	Изменение ДОР нелинейного объекта
Увеличение дальности обнаружения объектов с электронными устройствами, имеющих экранирующие металлические корпуса	Резонансные явления в отверстиях и щелях металлического корпуса
Распознавание обнаруженного нелинейного объекта	Совокупность устойчивых резонансных эффектов в линейных и нелинейных элементах объекта поиска при переизлучении СВЧ-сигнала
Увеличение дальности обнаружения объектов, расположенных за экранирующими препятствиями (ж/б сооружениями, неровностями грунта и др)	Интерференционные и дифракционные явления на верхнем крае препятствия (эффект «усиления» поля препятствием)
Уменьшение требований к уровню собственных гармоник СВЧ-передатчика нелинейной радиолокационной станции (НРЛС) при двухчастотном режиме работы	Использование при приеме фиксированных комбинационных частот в спектре отраженного сигнала (вместо гармоник)
Уменьшение помехового воздействия корпуса носителя (на 30–60 дБ) при двухчастотном режиме работы НРЛС	Несовпадение боковых и задних лепестков диаграмм направленности передающих антенн НРЛС. Разнос между антеннами не менее $(2-3)\lambda_1$

Недостатком такого метода обнаружения нелинейных объектов является то, что при увеличении полосы спектра зондирующего сигнала необходимо увеличить и полосу приемника нелинейного радио-

локатора, что приводит к уменьшению отношения сигнал-шум. Кроме того, необходимо использовать антенну с более широкой полосой пропускания, что уменьшает ее коэффициент усиления.

**4. Зондирование амплитудно-модулируемым сигналом с подавленной несущей.**

В данном случае в качестве зондирующего сигнала используется амплитудно-модулируемый сигнал (АМ-сигнал) с подавленной несущей. Спектр такого сигнала представляет две гармонические составляющие, отстоящие от подавленной несущей на одинаковое расстояние вверх и вниз, численно равное номиналу поднесущей частоты [4].

При наличии нелинейности на приемной стороне регистрируют зависимости уровней амплитуд комбинационных от боковых составляющих зондирующего АМ-сигнала с подавленной несущей на третьей и второй гармониках, а также амплитуды восстановленной несущей частоты на второй гармонике [5]. По виду полученной зависимости осуществляют распознавание типа нелинейности на основе расчета значений коэффициентов степенного полинома, аппроксимирующего ВАХ нелинейного элемента [6].

Преимущество использования сигнала такого вида заключается в повышении надежности идентификации нелинейного объекта, тем самым уменьшается количество ложных срабатываний и, как следствие, повышается вероятность распознавания типа объекта с нелинейными свойствами.

**5. Эффект затухания.**

Согласно методу «эффект затухания» обнаружение НЭ осуществляется благодаря регистрации изменения уровня аудиошума вблизи НЭ [7].

В случае когда антенна НРЛ находится на малом расстоянии от НЭ, демодулированный аудиосигнал от полупроводника имеет низкий уровень шума, а при удалении антенны шум увеличивается. Таким образом, аудиосум имеет минимальное значение непосредственно над полупроводником и нормальный уровень в стороне от него. При зондировании ложных полупроводников наблюдается увеличение уровня аудиошума [8]. Зависимость уровня аудиошума от расстояния антенны НРЛ до НЭ представлена на рисунке 1.

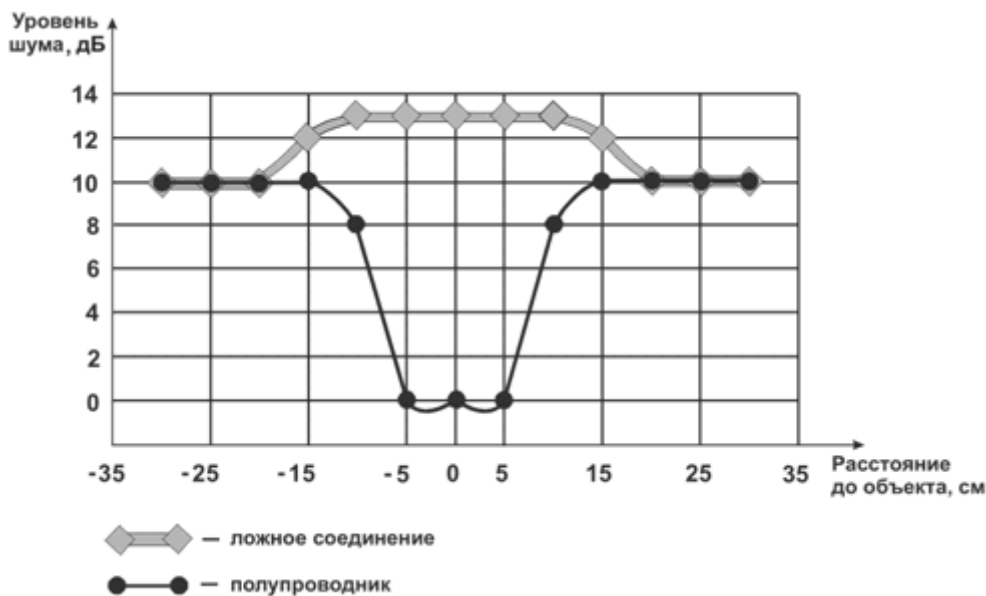


Рисунок 1. – Зависимость уровня аудиошума от расстояния антенны НРЛ до НЭ

Недостатком метода является то, что некоторые ложные полупроводники могут снижать уровень шума, поэтому возможны ошибочные определения настоящего полупроводника. Для устранения данного недостатка дополнительно используется метод «простукивания» – механического воздействия на предполагаемое место нахождения НЭ [8]. В свою очередь механическое воздействие приводит к изменению геометрии полупроводника и его свойств, поэтому в преобразованном сигнале ясно прослушивается частота простукивания. К достоинству метода можно отнести то, что он может быть реализован как НРЛ постоянного излучения, так и НРЛ импульсного излучения [7].

**6. Режим «20К».**

Режим «20К» получил название исходя из частоты следования зондирующих импульсов равной 20кГц [8]. При этом осуществляется выделение огибающей переизлученного сигнала. Для настоящего

полупроводника детектированный звуковой сигнал не является слышимым человеческим ухом. Если полупроводниковое соединение ложное, то не все зондирующие импульсы переотражаются, следовательно, детектируется аудиосигнал с более низкой частотой, которая прослушивается человеческим ухом. Недостаток данного метода заключается в большой вероятности ошибочного определения настоящего НЭ вместо ложного [9].

#### 7. Применение аудиосигналов в НРЛ.

Некоторые НРЛ используют метод прослушивания демодулированных аудиосигналов [7]. Примером может служить прослушивание синхронизирующего видеосигнала камер наблюдения. Нелинейный радиолокатор должен обеспечивать качественную аудиодемодуляцию как в АМ-, так и в ЧМ-режимах, чтобы использовать ее возможности для идентификации НЭ [7]. Например, используя частотную демодуляцию, можно услышать переключение фаз в электронных устройствах. Недостаток данного метода заключается в том, что необходимо уметь распознавать характерные звуки определенных электронных устройств. С помощью данного метода также можно отличить ложный полупроводник от настоящего, используя метод «простукивания». Настоящий полупроводник при этом не издает дополнительных звуков, а ложный сопровождается треском. Кроме того, для обнаружения НЭ можно использовать ЧМ-тон, что повышает вероятность обнаружения, но при этом теряется возможность различать настоящий полупроводник от ложного [7].

#### 8. Моноимпульсное зондирование.

Метод моноимпульсной локации позволяет выполнять практически мгновенный обзор заданной зоны пространства, используя ограниченное число многодиапазонных антенн, допускающих излучение и прием многодиапазонного широкополосного сигнала [10].

Типовой частотный диапазон систем радиопередачи соответствует частотному диапазону связанных радиостанций, которые часто используются в качестве каналов радиоуправления, и занимает полосу частот от 30 до 3000 МГц.

Для построения такого НРЛ зондирующий сигнал разбивается на дискретные зоны, спектр в которых является непрерывным. Ширина спектра каждой из дискретных зон соизмерима с их центральной частотой. Расстановка центральных частот дискретных зон широкополосных сигналов соизмерима с их шириной спектра. Сигналы, излученные в таких дискретных зонах, относятся к классу многодиапазонных широкополосных сигналов [10].

Для обнаружения отраженных сигналов от НЭ на 2-й гармонике спектр зондирующих сигналов в каждой из дискретных зон должен иметь октавную структуру. Число октавных зон обычно составляет примерно 3–4. Спектр зондирующего сигнала для данного случая представлен на рисунке 2.

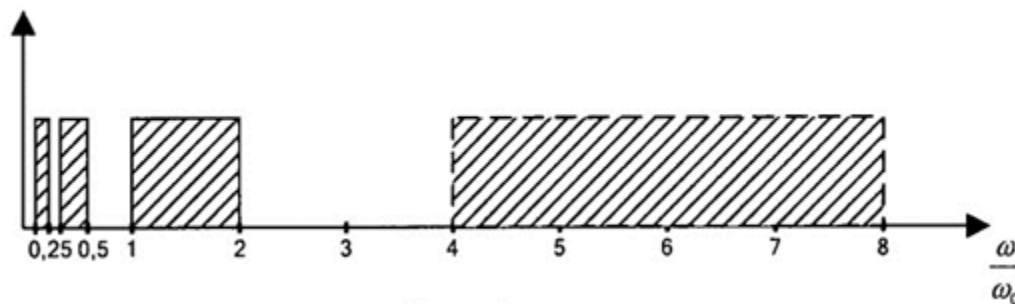


Рисунок 2 – Спектр зондирующего сигнала многодиапазонного широкополосного сигнала

Ограничение по ширине спектра каждой дискретной зоны является необходимым условием для выделения на фоне основной гармоники гармоник высшего порядка [10].

При зондировании в НЭ возникают вынужденные колебания. Если резонансный контур радиоприемного/передающего устройства совпадает со спектром дискретных зон зондирующего сигнала, то в контуре возникают резонансные колебания, амплитуда которых нарастает по линейному закону. Резонансные колебания также возникают и на кратных гармониках. Но для возникновения резонанса на кратных гармониках необходим зондирующий сигнал с большей энергией. Требуемое увеличение энергии минимально для гармоник с наименьшей кратностью, например для второй гармоники [10].

Возникновение резонансных колебаний в резонансном контуре приводит к модуляции по периодическому закону входного сопротивления радиоприемного или выходного радиопередающего устройства. В таком случае резонансный контур превращается в контур с переменными параметрами, работающий как параметрический усилитель, что приводит к увеличению амплитудного уровня отклика, отраженного от НЭ зондирующего сигнала, и расширению полосы пропускания контура [11]. Усиление от-

клика возникает за счет использования энергии зондирующего сигнала либо энергии источника питания нелинейного элемента.

Расширение полосы пропускания контура происходит не только на основной гармонике, но также на наборе гармонических составляющих  $2\omega_0/K$ , где  $K = 1, 2, 3, \dots$  – целое число. Эти резонансные колебания называются «обобщенным» резонансом [12].

При условии возбуждения параметрических колебаний в НЭ происходит увеличение дальности обнаружения, по сравнению с нерезонансным (непараметрическим) возбуждением отклика. Увеличение дальности обнаружения происходит за счет параметрического усиления отклика на основной гармонике и возникновения окна «прозрачности» на высших гармониках, например второй, и составляет величину в 10–30 раз большую по сравнению с нерезонансным возбуждением НЭ [10].

#### **9. Зондирование сверхширокополосным сигналом.**

В данном методе НРЛ в качестве зондирующего сигнала использует последовательность сверхширокополосных (СШП) импульсов. Количество импульсов должно быть не менее двух. При этом первый импульс является опорным сигналом, а последующие – результатом фазовой или амплитудной обработки первого по известному закону. Под характеристикой нелинейности понимается набор временных зависимостей разностей отклика исследуемого НЭ на опорное тестовое воздействие и свертки обратного преобразования Фурье от отношения спектров отклика объекта на  $n$ -е воздействие [13].

Как утверждается в [4], благодаря данному подходу более чем в 20 раз улучшается чувствительность к НЭ. При этом энергия тестового воздействия в 17,5 раз ниже по сравнению с классическим одночастотным подходом. Кроме того, увеличение базы второго тестового воздействия позволяет повысить обнаружительную способность СШП НРЛ.

Существует еще один способ обнаружения НЭ с помощью СШП сигналов. Суть его состоит в том, что НЭ зондируется одновременно СШП сигналом и мощным монохроматическим гармоническим СВЧ-колебанием. В результате наблюдается эффект взаимной модуляции [14]. В таком случае переизлученный от НЭ сигнал имеет в своем составе гармонику излучаемого СВЧ-сигнала, а также удвоенную и утроенную. Вместе с тем наблюдается взаимная модуляция между гармоническим и СШП сигналами, причем спектр подобен АМ-сигналу, где в качестве несущей выступает гармонический сигнал. Следовательно, настроив приемник на одну из боковых полос модулированного сигнала, можно определять наличие нелинейного элемента, а также появляется возможность отследить дальность до закладного устройства по задержке отраженного импульса.

Недостатком СШП НРЛ являются сложности в реализации СШП приемника и вычислительные сложности при обработке приемного сигнала. Кроме того, данный подход работает только при большой мощности гармонического СВЧ-сигнала [14].

**Закключение.** В результате анализа методов обнаружения нелинейных элементов можно сделать вывод о том, что глобально принцип работы нелинейного локатора остается неизменным в большинстве случаев и четко просматриваются два основных подхода:

- регистрация на приемной стороне удвоенной и утроенной гармоник переизлученного НЭ зондирующего сигнала;
- регистрация комбинационных частот в спектре переизлученного сигнала.

Применение метода зондирования СШП-сигналом позволяет значительно уменьшить мощность излучения по сравнению с классическим методом одночастотного зондирования. Выявленные достоинства дополняются положительными эффектами многочастотного зондирования благодаря тому, что спектр СШП-сигнала состоит из множества гармоник, а также улучшаются массогабаритные свойства НРЛ. Кроме того, несмотря на основной недостаток, который заключается в вычислительной сложности при обработке переизлученных сигналов, сверхширокополосная НРЛ является перспективным направлением исследований.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вернигоров, Н. С. Принцип обнаружения объектов нелинейным локатором / Н. С. Вернигоров // Защита информации. Конфидент. – № 4. – 1998. – С. 65–70.
2. ПВ.РФ Международный промышленный портал [Электронный ресурс] / Применение нелинейной радиолокации для обнаружения неизлучающих устройств промышленного шпионажа и металлических предметов. – 2011. – Режим доступа: <http://promvest.info/ru/inzhenernyie-seti-zhkh/primenenie-nelineynouy-radiolokatsii-dlya-obnaruzeniya-neizluchayuschih-ustroystv-promyishlennogo-shpionaja-i-metallicheskikh-predmetov/>. – Дата доступа: 05.08.2017.
3. Ларцов, С. В. Нелинейное рассеяние при использовании многочастотного и одночастотного зондирующих сигналов / С. В. Ларцов // Нелинейный мир. – 2006. – № 7–9. – С. 463–469.

4. Чертков, В. М. Использование фазоманипулированного сигнала в задачах нелинейной радиолокации / В. М. Чертков, С. В. Мальцев // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. С, Фундаментальные науки. – 2010. – № 3. – С. 129–134.
5. Иванов, М. М. Способ обнаружения нелинейного объекта с распознаванием типа нелинейности / М. М. Иванов, В. М. Чертков, Ю. А. Андреев // Актуальные вопросы физики и техники : II Респ. науч. конф. студентов, магистрантов и аспирантов, 18 апр. 2013 г. : в 2 ч. / редкол. : А. В. Рогачев (гл. ред.) [и др.]. – Гомель : Гомел. гос. ун-т им. Ф. Скорины, 2013. – Ч. 1. – С. 112–115.
6. Чертков, В. М. Аппаратно-программный комплекс автоматизированного поиска с возможностью идентификации радиоэлектронных средств скрытого съема информации / В. М. Чертков, В. К. Железняк // Известия НАН Беларуси. Серия физико-технических наук. – 2016. – № 4. – С. 99-105.
7. Джонс, Т. Обзор технологии нелинейной радиолокации / Т. Джонс // Специальная техника. – 1999. – № 3.
8. Техника для спецслужб [Электронный ресурс] // Нелинейные радиолокаторы и особенности их применения для поиска закладных устройств. – БНТИ, 2008. – Режим доступа: <http://www.bnti.ru/showart.asp?aid=839&lvl=04.01.02>. – Дата доступа: 14.09.2017.
9. Защита переговоров, видеонаблюдение, контроль доступа, охранно-пожарная безопасность [Электронный ресурс] // Зачем нужен нелинейный локатор и как с ним работать! – 2010. – Режим доступа: <http://www.detsys.ru/article/zachem-nujen-nelineynyy-lokator>. – Дата доступа: 05.08.2017.
10. Способ и устройство измерения угловой высоты объекта поиска в обзорных нелинейных радиолокаторах : 2013116170/07 (2013) // И. Н. Замятина, В. И. Ирхин ; дата публ.: 10.10.2014.
11. Харкевич, А. А. Линейные и нелинейные системы / А. А. Харкевич. – М. : Наука, 1973. – Т. 2.
12. Жаботинский, М. Е. Основы теории и техники умножения частоты / М. Е. Жаботинский, Ю. Л. Свердлов. – М. : Сов. радио, 1964. – С. 328.
13. Лоцилов, А. Г. Разработка принципов нелинейной сверхширокополосной радиолокации / А. Г. Лоцилов // Доклады ТУСУРа. – 2013. – № 4 (30). – С. 31–38.
14. Иванов, М. М. Повышение чувствительности нелинейного радиолокатора / М. М. Иванов, В. К. Железняк, В. М. Чертков // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 4. – С. 72–77.

Поступила 20.09.2017

#### REVIEW OF METHODS OF DETECTING NONLINEAR ELEMENTS BY THE NONLINEAR RADAR

*M. IVANOU, V. ZHELEZNYAK, V. CHERTKOV*

*In this article, an overview is given of methods for detecting nonlinear elements by means of a nonlinear radar. The definition of the concept of nonlinear radar is given and its working principle is disclosed. Mathematical calculations explaining the physical processes that occur in a nonlinear element when interacting with a sounding signal are also presented. The application of new sensing methods for nonlinear radiolocation: the sequence of ultrawideband pulses, probing with ultra-wideband pulses and ultrahigh-frequency harmonic signals simultaneously, and monopulse sounding are considered. Also considered classical methods such as the analysis of the second and third harmonics, «20K» mode, audio application, two- and multi-frequency signals, and others. Comparative analysis is carried out and advantages and disadvantages of the methods are revealed.*

**Keywords:** *nonlinear radiolocation, nonlinear radiolocation, ultra-wideband signal, nonlinear object, detection of nonlinear objects.*



## ФИЗИКА

УДК 537.533:621.384

### ФОРМИРОВАНИЕ НАНОСЕКУНДНЫХ ИМПУЛЬСОВ ТОКА ПУЧКА В ПЛАЗМЕННЫХ ЭМИССИОННЫХ СИСТЕМАХ НА ОСНОВЕ РАЗРЯДА В СКРЕЩЕННЫХ $E \times H$ ПОЛЯХ

*С.Н. АБРАМЕНКО, канд. техн. наук, доц. Д.А. АНТОНОВИЧ, д-р техн. наук, проф. В.А. ГРУЗДЕВ  
(Полоцкий государственный университет)*

*Предложен способ формирования импульсов тока пучка с длительностью до 100 нс с короткими (порядка 5 нс) фронтами в плазменном источнике электронов. Для реализации способа предлагается использовать плазменный источник электронов на основе разряда в скрещенных  $E \times H$  полях с управляющим электродом, который не участвует в формировании плазмы, но может формировать и регулировать минимум потенциала в системе ускорения электронов. Приведена электродная структура такого источника. Проведено моделирование соответствующей системы электропитания, генерирующей импульсы напряжения на управляющем электроде плазменного источника электронов длительностью порядка сотен наносекунд, с регулируемой частотой и скважностью следования импульсов с применением различных ключевых элементов.*

**Ключевые слова:** *плазменный источник электронов, плазменный эмиттер, импульсы тока пучка, разряд в скрещенных  $E \times H$  полях, системы электропитания плазменных источников электронов.*

**Введение.** Опыт промышленного применения электронных пучков показывает перспективность применения безнакальных электронно-оптических систем, одной из которых является плазменный источник электронов (ПИЭЛ) [1–3]. Одним из недостатков, сдерживающих расширение применения таких систем, для ряда технологий является сложность реализации в данных структурах импульсного режима работы с длительностью импульса тока пучка порядка сотни наносекунд и менее. Импульсный режим тока эмиссии в ПИЭЛ при модуляции тока разряда позволяет получать импульсы длительностью свыше десятка микросекунд, что определяется временем установления стационарного состояния (фронтом нарастания тока разряда) и обусловлено в основном скоростью перемещения в структуре ионов газа [4]. Скорость движения электронов при их типичной средней энергии в газоразрядной плазме приблизительно в 100 раз превышает скорость ионов, поэтому достаточно короткие импульсы тока пучка в ПИЭЛ можно получить при импульсном ускоряющем напряжении. Однако при ускоряющем напряжении, типичном для технологических ПИЭЛ в 30–40 кВ, разработка системы формирования импульсов ускоряющего напряжения достаточно проблематична. В данной работе предложено обоснование возможности реализации импульсного режима за счет применения ПИЭЛ на основе разряда в скрещенных  $E \times H$  полях с управляющим электродом и соответствующей системой электропитания.

**Условия формирования эмиттирующей плазмы в ПИЭЛ.** Эмиттирующая плазма в ПИЭЛ формируется с помощью низковольтных разрядов в газе [1, 2]. Могут применяться разряды различного типа [5, 6], однако для упрощенного анализа газоразрядную структуру в общем случае можно представить как структуру, содержащую два электрода: катод, находящийся под отрицательным потенциалом, и анод, находящийся под положительным потенциалом. При определенном сочетании давления газа в структуре (разрядной камере) и напряжения между электродами в межэлектродном промежутке возбуждается процесс ионизации газа электронами, энергия которых, полученная при движении от электрического поля в газоразрядной структуре, становится выше энергии, необходимой для ионизации. Одновременно с процессом ионизации молекул газа (генерации ионов и электронов) происходит процесс ухода зарядов на стенки разрядной структуры. При определенном соотношении интенсивности этих процессов в разрядной структуре образуется газоразрядная плазма.

Для описания процессов в разрядной структуре ПИЭЛ плазма представляется физической моделью смеси трех газов: нейтрального, электронного и ионного, с собственной температурой каждого газа ( $T_0$ ,  $T_e$ ,  $T_i$  соответственно), которые могут значительно отличаться. Обычно  $T_e \gg T_i \gg T_0$ , и скорость хаотического движения электронов много больше хаотической скорости ионов, этому способствует значительная разница в массах электрона и иона газа. Вследствие этого уход электронов из объема разрядной камеры на ее стенки может значительно превосходить скорость ухода ионов на стенки. В то же время генерация зарядов (ионов и электронов) в процессе ионизации осуществляется парами, т.е. с одинаковой скоростью. В результате в процессе формирования плазмы происходит накопление ионов в ней, возрастает ее потенциал, и начинают формироваться пристеночные электрические слои, которые

у катода и анода с ростом потенциала становятся тормозящими для электронов, т.е. снижают и уравнивают уход электронов из плазмы. С этого момента устанавливается стационарный режим разряда, постоянство концентраций положительных ( $n_+$ ) и отрицательных ( $n_-$ ) зарядов, а также их соотношения ( $n_+/n_-$ ) в плазме; постоянное падение потенциала в пристеночных слоях. Кроме этого, устанавливается стационарный баланс ионного и электронного токов в газоразрядной структуре, и в целом ток разряда обычно [7, 8] отображается следующими равенствами (1–4):

$$I_p = I_i + I_e, \quad (1)$$

$$I_i = j_{ik}S_k + j_{ia}S_a = j_{ik}S_k + j_{iek}S + j_iS_a = j_i(1 + \gamma)S_k + j_iS_a, \quad (2)$$

$$j_i = en_i \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}}, \quad (3)$$

где  $j_{iek}$  – плотность тока электронов ионно-электронной эмиссии;  
 $\gamma$  – коэффициент ионно-электронной эмиссии катода;  
 $S_k$  и  $S_a$  – площади катода и анода соответственно;

$$I_e = \gamma_e S_a = en_e \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} e^{-\frac{eU_{ac}}{kT_e}} S_a, \quad (4)$$

где  $U_{ac}$  – падение напряжения на пристеночном анодном слое, тормозящее часть теплового хаотического тока электронов на анод.

Из баланса токов для стационарного режима разряда следует, что устанавливающееся напряжение на пристеночных слоях зависит, кроме упомянутых ранее факторов, и от соотношения площадей газоразрядной камеры под катодным и анодным потенциалами.

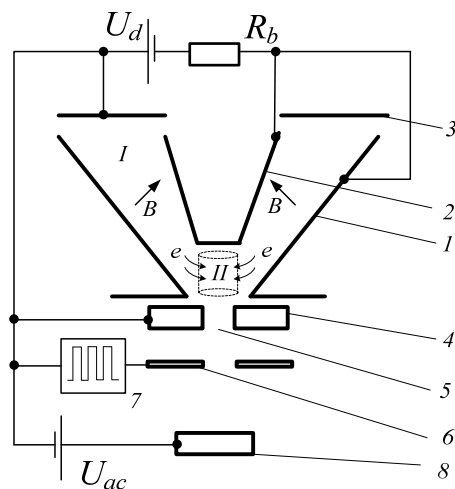
Реализация упомянутых базовых процессов, обеспечивающих формирование эмитирующей плазмы в ПИЭЛ, требует определенного времени для установления стационарного состояния с момента подачи напряжения ( $U_p$ ) на электроды. Эксперименты показывают, что это время (фронт нарастания тока разряда) составляет десятки микросекунд и обусловлено, по-видимому, в основном скоростью перемещения в структуре ионов газа при их средней энергии, составляющей обычно десятые доли электрон-вольт [9]. Таким образом, при модуляции тока разряда  $I_p$  соответствующим регулированием напряжения разряда возможен импульсный режим тока эмиссии в ПИЭЛ с длительностью импульсов более десятков микросекунд.

Скорость движения электронов при их типичной средней энергии в газоразрядной плазме порядка 1–2 эВ составляет величину порядка  $10^6$  м/с и приблизительно в сто раз превышает скорость ионов. Следовательно, достаточно короткие импульсы тока ПИЭЛ возможно получить при импульсном ускоряющем напряжении. Однако при типичном для технологических ПИЭЛ ускоряющем напряжении 20–40 кВ разработка системы формирования импульсов ускоряющего напряжения достаточно проблематична, в сравнении с другим возможным способом регулирования тока пучка в ПИЭЛ. Суть этого способа заключается в использовании для регулирования тока пучка дополнительного несвязанного с газоразрядной структурой электрода, который не участвует в формировании плазмы, но может формировать и регулировать минимум потенциала в системе ускорения электронов в ПИЭЛ. В электронных пушках с термокатодом этот способ можно считать единственно возможным и широко используемым для управления током пучка [1]. Однако возможности управления током пучка в ПИЭЛ триодного типа в открытых публикациях практически не обсуждались. В качестве базовой конструкции ПИЭЛ с управляющим электродом может выступать любая из ранее разработанных [10–12]. На рисунке 1 представлена электродная структура одного из вариантов такой структуры.

Разряд возбуждается в пространстве между катодами 1 и 2 (область  $L$ ). Плазмообразующий газ подается в пространство между катодами, а перепад давлений обеспечивается геометрией эмиссионного канала. Формирующаяся в разряде между катодами плазма диффундирует в область эмиссионного канала 5. Извлечение электронов осуществляется через эмиссионный канал в эмиттерном электроде 4 с анодным (или близким к нему) потенциалом. На управляющий электрод 6 поступают сигналы с генератора управляющих импульсов 7, создавая минимум потенциала в области ускорения, формируя импульсы эмиссионного тока в соответствии с управляющим сигналом.

Для реализации возможности формирования наносекундных импульсов тока пучка описанным способом необходимо разработать систему управления, способную формировать импульсы напряжения на управляющем электроде ПИЭЛ с длительностью порядка 100 нс, с короткими фронтами и регулируемыми

мой частотой следования импульсов. При этом на основе анализа физических процессов в ПИЭЛ и электронно-оптических структурах (ЭОС) с термокатодами предполагается, что будет достаточной амплитуда импульсов управляющего напряжения порядка 500–1000 В при токе нагрузки порядка 0,01 А.



1 – внешний катод; 2 – внутренний катод; 3 – анод; 4 – эмиттерный электрод;  
 5 – эмиссионный канал; 6 – управляющий электрод; 7 – генератор управляющих импульсов;  
 8 – ускоряющий электрод;  $U_d$  – напряжение горения разряда;  $U_{ac}$  – ускоряющее напряжение;  
 $R_b$  – балластное сопротивление;  $B$  – индукция магнитного поля

**Рисунок 1. – Электродная структура плазменного источника электронов на основе разряда в скрещенных  $E \times H$  полях с управляющим электродом**

**Разработка возможных вариантов электронной схемы.** Для формирования управляющих импульсов с требуемыми параметрами необходимо увеличивать рабочую частоту переключений силовых ключей, традиционно используемых в подобных схемах. Рост частоты коммутации дополнительно позволит уменьшить номиналы индуктивностей и емкостей, а значит, и использовать компоненты меньших размеров. Вместе с тем увеличение скорости переключения приведет к росту динамических потерь. По этой причине необходимо выбирать оптимальные силовые транзисторы с учетом особенностей конкретного применения. Для устройств с высокими рабочими напряжениями (более 200 В) и низкими рабочими частотами принято считать оптимальными относительно медленные БТИЗ-транзисторы [13], имеющие малые потери проводимости, но значительные потери на переключение. В сегменте устройств с низкими рабочими напряжениями оптимально использовать МДП-транзисторы (MOSFET). Они уступают БТИЗ-транзисторам по удельной мощности, но имеют меньшие потери на управление и на переключение. В сегменте с рабочими напряжениями до 650 В и высокими рабочими частотами БТИЗ-транзисторы оказываются малоэффективными из-за высокой частоты коммутации. В то же время и обычные кремниевые MOSFET демонстрируют не всегда удовлетворительные результаты. По этой причине достаточно перспективными являются нитрид-галлиевые транзисторы [13].

В настоящее время выпускаются нитрид-галлиевые (IGBT) транзисторы с рабочим напряжением до 850 В и рабочими частотами 200 кГц и выше. В итоге они занимают тот сегмент, в котором даже MOSFET оказываются бессильными. Для кремниевых ключей частота коммутаций в таких случаях обычно не превышает 150 кГц.

В процессе исследования было промоделировано несколько вариантов схем, использующих в качестве ключевого элемента биполярный транзистор (рисунок 2), полевой транзистор (рисунок 3), IGBT-транзистор (рисунок 4). В качестве программного продукта использовался пакет NI Multisim (13.0).

Во всех трех вариантах схем в качестве источника выбран источник прямоугольных импульсов, который имитирует исходный управляющий сигнал. На всех трех схемах TV1 – согласующий импульсный ферритовый высокочастотный трансформатор, исполняющий роль согласования и масштабирования. Он одновременно защищает выход генератора импульсов от аварийных ситуаций. Цепочка C1-VD1 защитно-демпфирующая; предотвращает самовозбуждение колебаний. Диоды VD2 (в схемах, представленных на рисунках 2 и 4) защищают от пробоя транзисторы самоиндукцией. TV2 – повышающий выходной транзистор. Сопротивление R1 имитирует нагрузку. Цепь 4 выходная и выбрана для отслеживания параметров выходного импульса. Транзисторы и диоды были отредактированы из реальных высоковольтных моделей таким образом, чтобы не учитывался максимальный ток и напряжение пробоя.

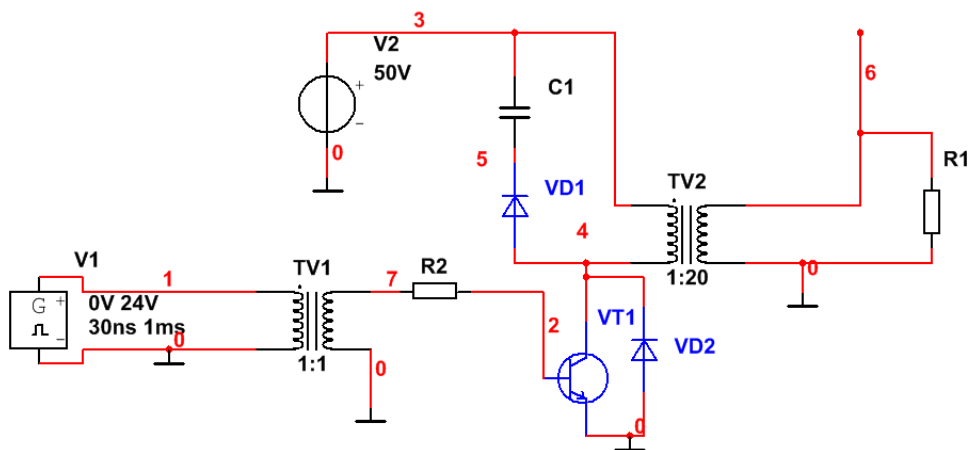


Рисунок 2. – Моделирование схемы на биполярном транзисторе

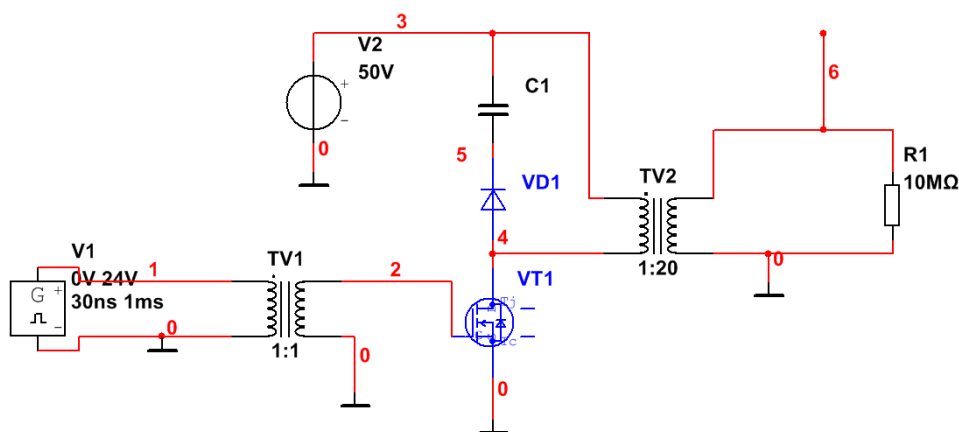


Рисунок 3. – Моделирование схемы на полевом транзисторе

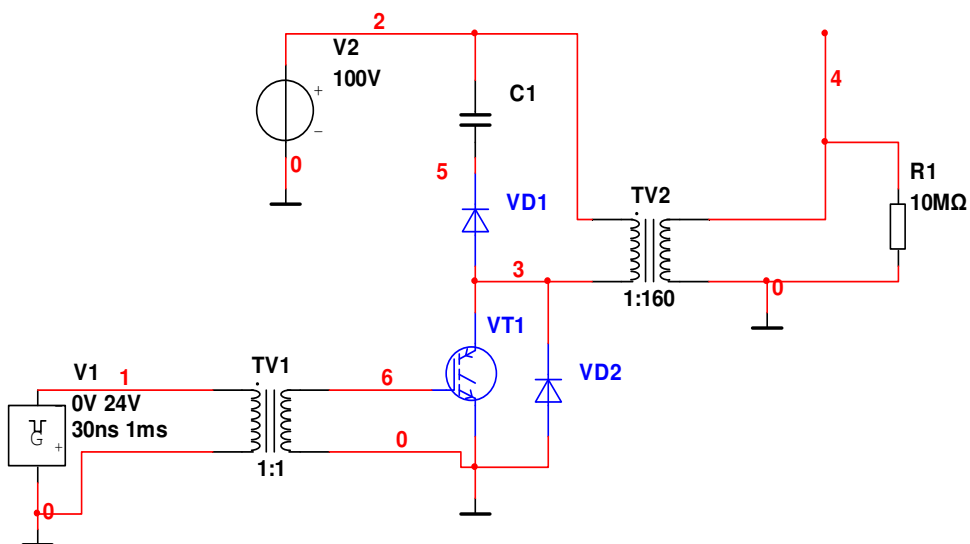


Рисунок 4. – Моделирование схемы на IGBT- транзисторе

Результаты моделирования показали возможность формирования импульсов напряжения на нагрузке с амплитудой до 1000 В, длительностью фронтов до 5 нс и длительностью импульса порядка 20 нс для схемы с биполярным транзистором, порядка 55 нс – для схемы с полевым транзистором и порядка 1 нс – для схемы с IGBT-транзистором.

**Заключение.** Полученные предварительные результаты показывают возможность формирования импульсов тока пучка наносекундной длительности в ПИЭЛ на основе разряда в скрещенных  $E \times H$  полях за счет использования в конструкции дополнительного управляющего электрода и применения соответствующей схемы генерации управляющих импульсов. Реализация таких режимов работы позволит плазменным источникам электронов успешно конкурировать с лазерными технологиями обработки материалов, особенно при необходимости получения большей, чем 3–4 мм, глубины воздействия. Импульсный режим работы обеспечивает существенное увеличение плотности мощности электронного пучка в импульсе в сравнении со стационарным случаем, что позволит локализовать термическое воздействие и достигать большей толщины модифицируемого слоя (чем при стационарном воздействии) с высокой однородностью свойств, т.е. повысить эффективность энергозатрат как при обработке однородных материалов, так и материалов с покрытиями.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Источники электронов с плазменным катодом: физика, техника, применения / под ред. Е. М. Окса. – Томск : НТЛ, 2005. – 216 с.
2. Источники электронов с плазменным эмиттером / под ред. Ю. Е. Крейнделя. – Новосибирск : Наука, 1983. – 120 с.
3. Плазменные эмиссионные системы с ненакаливаемыми катодами для ионно-плазменных технологий / В. Т. Барченко [и др.] ; под ред. В.Т. Барченко. – СПб. : СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2011. – 220 с.
4. Антонович, Д. А. Эмиссионные свойства плазменного эмиттера электронов / Д. А. Антонович, В. А. Груздев, В. Г. Залесский // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2008. – № 9. – С. 114–123.
5. Капцов, Н.А. Электрические явления в газах и вакууме / Н.А. Капцов. – М., Л. : ГИТТЛ, 1950. – 836 с.
6. Райзер, Ю.П. Физика газового разряда / Ю.П. Райзер. – Долгопрудный : Интеллект, 2009. – 736 с.
7. Груздев, В.А. Формирование эмиссионного тока в плазменных эмиттерах электронов / В. А. Груздев, В. Г. Залесский // Прикладная физика. – 2009. – № 5. – С. 82–90.
8. Груздев, В.А. Физические процессы формирования электронных пучков в плазменных источниках / В. А. Груздев, В. Г. Залесский // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2007. – № 9. – С. 2–14.
9. Zaleski, V. G. Peculiarities of plasma electron sources operation at high pressures / V. G. Zaleski, D.A. Antonovich // J. Phys. D, Appl. Phys. – 2007. – № 40. – P. 7771–7777.
10. Universal plasma electron source / V.A. Grusdev [et al.]. – Vacuum. – 2005. – № 77. – P. 399–405.
11. Плазменные эмиссионные системы для электронно-лучевых технологий. Часть 1 / Д. А. Антонович [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 37–44.
12. Плазменные эмиссионные системы для электронно-лучевых технологий. Часть 2 / Д. А. Антонович [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4 – С. 45–51.
13. Справочник по транзисторам [Электронный ресурс] / Электронный портал. Datasheets. – Режим доступа: <http://kazus.ru/guide/transistors/>. – Дата доступа: 09.09.2017.

Поступила 20.09.2017

## FORMATION OF NANOSECOND BEAM CURRENT PULSES IN PLASMA EMISSION SYSTEMS BASED ON DISCHARGE IN CROSSED $E \times H$ FIELDS

**S. ABRAMENKO, D. ANTONOVICH, V. GRUZDEV**

*The method for forming beam current pulses with duration of up to 100 ns with short (about 5 ns) fronts is proposed. To implement this method, it is proposed to use a plasma electron source based on the discharge in crossed  $E \times H$  fields with an additional electrode that does not participate in plasma formation, but can generate and control the minimum potential in the electron acceleration system. Shown an electrode structure of such a source. Modeling of the corresponding voltage pulse generation system on the control electrode of a plasma electron source with duration of the order of hundreds of nanoseconds is performed, with an adjustable frequency and a duty cycle of pulses. The amplitude of the control voltage pulses is about 1000 V.*

**Keywords:** Plasma electron source, beam current pulses, discharge in crossed  $E \times H$  fields.

УДК 621.316.718.5

## СТАБИЛИЗАЦИЯ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ ВАЛА ЭЛЕКТРОПРИВОДА ПОСТОЯННОГО ТОКА ЗА СЧЕТ ИСКЛЮЧЕНИЯ ВЛИЯНИЯ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТА МЕХАНИЧЕСКОГО МОДУЛЯТОРА

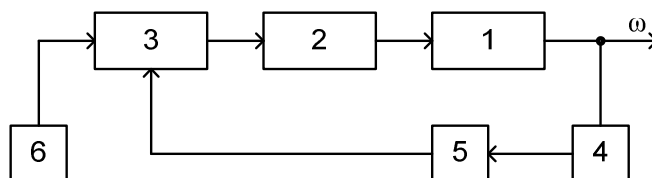
*канд. техн. наук, доц. А.С. ВЕРШИНИН, канд. техн. наук, доц. В.П. АВДЕЙКО  
(Полоцкий государственный университет)*

*В типовой схеме импульсного электропривода постоянного тока при формировании импульсов обратной связи с помощью механического модулятора предложено использовать два формирователя импульсов (например, оптронных) и расположить их диаметрально относительно механического модулятора. Для получения рабочих импульсов обратной связи в системе по сигналам указанных формирователей предложено ввести в систему стабилизации схему обработки указанных импульсов, которая определяет временное положение середины между центрами исходных импульсов и вырабатывает рабочие импульсы обратной связи, жестко привязанные к полученному моменту времени. Это позволяет исключить влияние эксцентриситета механического модулятора на частоту следования рабочих импульсов обратной связи в импульсной системе стабилизации скорости вращения вала электродвигателя постоянного тока.*

**Ключевые слова:** *электропривод, механический модулятор, формирователь импульсов, эксцентриситет, логические элементы, триггеры, скорость вращения, точность стабилизации.*

**Введение.** Высокие требования к точности регулирования скорости вращения вала электропривода постоянного тока нередко предъявляются в системах автоматического управления скоростью вращения, и в частности в приборах для выполнения угловых измерений. В последних жесткие требования к стабильной скорости вращения, например, механического модулятора, сочлененного с валом электропривода, как угловой меры обусловлены стремлением повышения точности измерений.

В таких случаях часто применяют импульсные астатические системы автоматической стабилизации скорости вращения вала электродвигателя постоянного тока [1, 2], общая типовая структура которой приведена на рисунке 1.



1 – электродвигатель постоянного тока с механическим модулятором 4 на валу, 2 – ключевой усилитель, 3 – регулятор, 5 – оптронный формирователь импульсов, 6 – задающий генератор

**Рисунок 1. – Общая структура импульсной системы стабилизации скорости вращения вала электропривода постоянного тока**

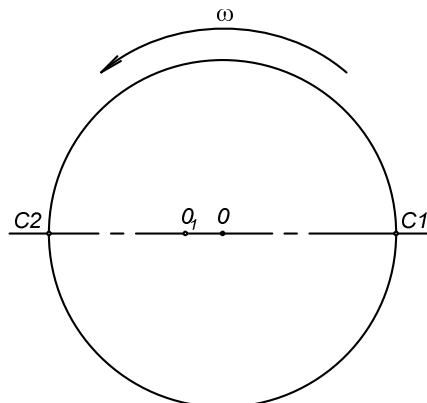
Точность стабилизации скорости вращения вала и, соответственно, механического регулятора в такой системе определяется стабильностью частоты задающего генератора импульсов, метрологическими характеристиками регулятора и точностью формирования импульсов обратной связи. Одним из возмущений в такой системе стабилизации скорости вращения электропривода является неравномерность следования импульсов обратной связи, формируемых оптронным формирователем импульсов по меткам, расположенным на окружности модулятора. Это имеет место при наличии эксцентриситета модулятора, насаженного на вал двигателя постоянного тока. При любом изготовлении механического модулятора (в зависимости от точности изготовления) эксцентриситет всегда будет иметь место.

Целью данной работы является повышение точности стабилизации скорости (равномерности) вращения механического модулятора за счет исключения влияния его эксцентриситета.

**Обоснование метода достижения цели.** Для исключения влияния эксцентриситета механического модулятора на частоту следования импульсов обратной связи в системе стабилизации скорости вращения вала электропривода следует формировать импульсы обратной связи по двум диаметрально расположенным меткам на механическом модуляторе (рисунок 2), с последующей обработкой во времени

полученных сигналов и привязки выходных импульсов к временному положению середины между центрами исходных импульсов [3, 4].

На рисунке 2 условно показан механический модулятор, который вращается с круговой скоростью  $\omega$  и в котором геометрический  $O$  и физический  $O_1$  центры вращения не совпадают. Длина отрезка  $OO_1 = \Delta$  является величиной эксцентриситета модулятора как следствие неточности изготовления.



**Рисунок 2. – Условное изображение механического модулятора с метками по внешней окружности (например, в виде щелевых прорезей) и диаметрально расположенными оптронными формирователями импульсов C1 и C2**

Касательная скорость механического модулятора относительно первого формирователя импульсов C1 изменяется по закону

$$V_{C1} = O_1 \cdot C1 \cdot \omega = [R + \Delta \cdot \sin(\omega \cdot t)] \cdot \omega, \tag{1}$$

где  $R$  – рабочий радиус механического модулятора относительно геометрического  $O$  центра вращения; Шаг дискретизации (шаг расположения меток) механического модулятора выразим в виде

$$h = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{N}, \tag{2}$$

где  $N$  – число дискрет (щелевых прорезей) механического модулятора.

Тогда частота выходных импульсов, вырабатываемых первым оптронным формирователем импульсов C1, с учетом формул (1) и (2), будет изменяться по закону

$$f_{C1} = \frac{V_{C1}}{h} = \frac{[R + \Delta \cdot \sin(\omega \cdot t)] \cdot \omega \cdot N}{2 \cdot \pi \cdot R} = \frac{R + \Delta \cdot \sin(\omega \cdot t)}{R} \cdot f_B \cdot N, \tag{3}$$

где  $f_B = \omega / 2 \cdot \pi$ .

Частота следования выходных импульсов, вырабатываемых вторым оптронным формирователем импульсов C2, также изменяется по аналогичному закону:

$$f_{C2} = \frac{R - \Delta \cdot \sin(\omega \cdot t)}{R} \cdot f_B \cdot N. \tag{4}$$

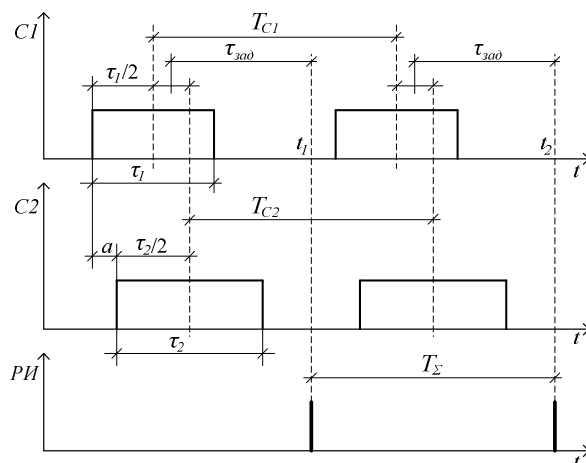
Из формул (3) и (4) следует, что частоты получаемых последовательностей импульсов от указанных формирователей импульсов не остаются постоянными и изменяются по синусоидальному закону. Использование такой последовательности импульсов в качестве обратной связи в системе стабилизации скорости вращения вала электропривода не позволяет получить высокую точность стабилизации.

Для исключения влияния эксцентриситета механического модулятора на частоту следования импульсов обратной связи предложено получать ее как результат одновременной обработки импульсов от двух диаметрально расположенных оптронных формирователей импульсов и вырабатывать рабочий выходной импульс со смещением на строго постоянную задержку во времени относительно середины между центрами исходных импульсов (рисунок 3) [4].

На рисунке 3 приняты следующие обозначения:

C1 и C2 – импульсы, вырабатываемые соответственно первым и вторым оптронными формирователями импульсов, которые располагаются диаметрально относительно механического модулятора;

$\tau_1$  и  $\tau_2$  – длительности импульсов соответственно  $C1$  и  $C2$ ;  
 $a$  – интервал времени между передними фронтами импульсов  $C1$  и  $C2$ ;  
 $T_{C1}$  и  $T_{C2}$  – периоды следования импульсов соответственно  $C1$  и  $C2$ ;  
 $\tau_{зад}$  – время постоянной задержки выходных рабочих импульсов относительно средней точки между центрами импульсов  $C1$  и  $C2$ ;  
 $T_{\Sigma}$  – период следования выходных рабочих импульсов обратной связи.



**Рисунок 3. – Временная диаграмма, поясняющая принцип обработки исходных импульсов от диаметрально расположенных формирователей для исключения влияния эксцентриситета механического модулятора**

Согласно рисунку 3, выразим моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ , в которые формируются выходные рабочие импульсы обратной связи:

$$t_1 = \frac{\tau_1/2 + a + \tau_2/2}{2} + \tau_{зад}; \quad (5)$$

$$t_2 = \frac{\tau_1/2 + T_{C1} + a + \tau_2/2 + T_{C2}}{2} + \tau_{зад}. \quad (6)$$

Теперь выразим период следования выходных рабочих импульсов обратной связи:

$$T_{\Sigma} = t_2 - t_1 = \frac{\tau_1}{4} + \frac{T_{C1}}{2} + \frac{a}{2} + \frac{\tau_2}{4} + \frac{T_{C2}}{2} + \tau_{зад} - \frac{\tau_1}{4} - \frac{a}{2} - \frac{\tau_2}{4} - \tau_{зад} = \frac{T_{C1} + T_{C2}}{2}, \quad (7)$$

тогда частоту следования выходных рабочих импульсов обратной связи получим в виде

$$f_p = \frac{1}{T_{\Sigma}} = \frac{2}{T_{C1} + T_{C2}} = \frac{2}{1/f_{C1} + 1/f_{C2}} = \frac{2 \cdot f_{C1} \cdot f_{C2}}{f_{C1} + f_{C2}}. \quad (8)$$

Введем обозначение  $f_B \cdot N = f_H$ , в этом случае выражения (3) и (4) преобразуются к виду

$$f_{C1} = f_H + \Delta f \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad (9)$$

$$f_{C2} = f_H - \Delta f \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad (10)$$

где  $\Delta f = \frac{\Delta}{R} \cdot f_B \cdot N = \frac{\Delta}{R} \cdot f_H$ .

Преобразуем выражение (8) с учетом формул (9) и (10):

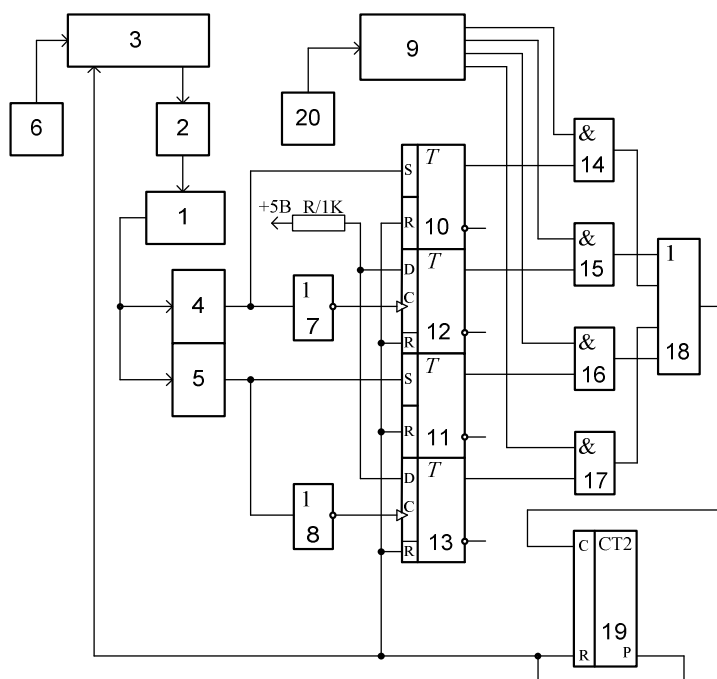
$$f_p = \frac{2 \cdot [f_H + \Delta f \cdot \sin(\omega \cdot t)] \cdot [f_H - \Delta f \cdot \sin(\omega \cdot t)]}{f_H + \Delta f \cdot \sin(\omega \cdot t) + f_H - \Delta f \cdot \sin(\omega \cdot t)} = \frac{f_H^2 - \Delta f^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t)}{f_H} \approx f_H, \quad (11)$$

так как  $\Delta f^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) \ll f_H^2$ .



Таким образом, из выражения (11) следует, что влияние эксцентриситета механического модулятора на частоту следования выходных рабочих импульсов  $f_p$  обратной связи практически исключено. При этом выходные рабочие импульсы обратной связи с частотой  $f_p$  формируются в моменты времени, сдвинутые относительно середины между центрами исходных импульсов  $C1$  и  $C2$  на строго постоянное время задержки  $\tau_{зад}$  (см. рисунок 3).

**Реализация метода.** Для построения системы стабилизации скорости вращения вала электропривода постоянного тока с такой обработкой сигналов от двух диаметрально расположенных датчиков относительно механического модулятора в структуру системы необходимо ввести цифровое устройство, которое в реальном времени выполнит рассмотренный вид обработки исходных импульсов от датчиков  $C1$  и  $C2$  и сформирует выходной рабочий импульс (рисунок 4).



**Рисунок 4. – Функциональная схема системы стабилизации скорости вращения вала электропривода постоянного тока**

В состав системы стабилизации скорости вращения вала электропривода постоянного тока входят электродвигатель 1 постоянного тока с механическим модулятором, ключевой усилитель 2, регулятор 3, диаметрально расположенные оптронные формирователи 4 и 5 импульсов (датчики), задающий генератор импульсов 6 и цифровая схема формирования рабочих импульсов.

Совокупность элементов НЕ 7 и 8, распределителя импульсов 9, RS-триггеров 10 и 11, D-триггеров 12 и 13, элементов И 14–17, элемента ИЛИ 18 и двоичного счетчика импульсов 19 вместе с генератором тактовых импульсов 20 образуют цифровую схему [5], которая формирует рабочие импульсы, снимаемые с выхода переполнения счетчика импульсов и используемые в качестве импульсов отрицательной обратной связи регулятора 3 [4].

Система стабилизации скорости вращения вала электропривода постоянного тока работает следующим образом. Регулятор сравнивает между собой последовательности импульсов, поступающих от задающего генератора импульсов и с выхода переполнения счетчика импульсов, и вырабатывает управляющее воздействие через ключевой усилитель на электродвигатель. При вращении механического модулятора оптронные формирователи импульсов 4 и 5 вырабатывают прямоугольные импульсы  $C1$  и  $C2$ , как показано на временной диаграмме (см. рисунок 3). Частота следования импульсов  $C1$  и  $C2$  пропорциональна скорости вращения механического модулятора и при наличии эксцентриситета указанная частота изменяется по синусоидальному закону около своего среднего значения согласно формулам (9) и (10). Период изменения частоты равен периоду одного оборота модулятора, а величина изменения частоты пропорциональна величине эксцентриситета. Полученные прямоугольные импульсы  $C1$  и  $C2$  поступают на входы цифровой схемы формирования рабочих импульсов (см. рисунок 4).

Временная диаграмма, поясняющая работу цифровой схемы формирования рабочих импульсов, приведена на рисунке 5.

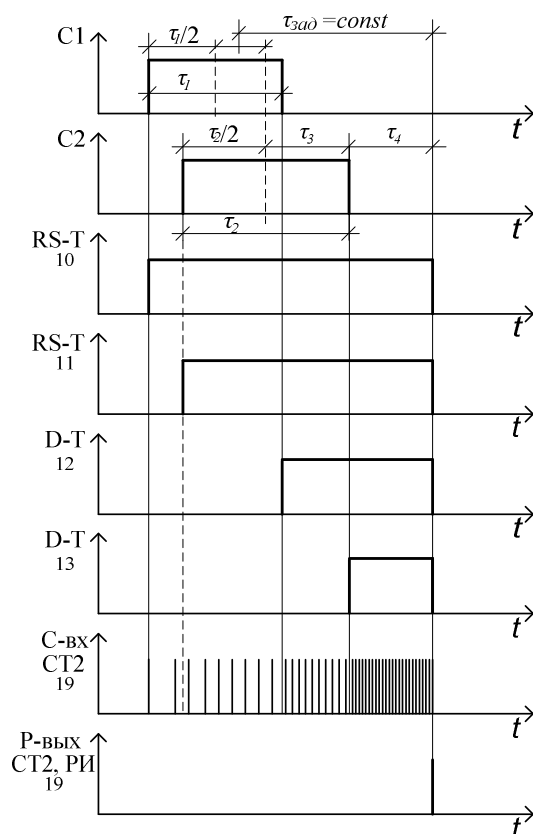


Рисунок 5. – Временная диаграмма работы цифровой схемы формирования рабочих импульсов

В соответствии с рисунком 5 выразим величину времени задержки формирования рабочего импульса относительно середины между центрами импульсов  $C1$  и  $C2$ .

$$\tau_{\text{зад}} = \frac{\tau_4 + \frac{\tau_2}{2} + \tau_4 + \tau_3 + \frac{\tau_1}{2}}{2} = \frac{\tau_4}{2} + \frac{\tau_2}{4} + \frac{\tau_4 + \tau_3}{2} + \frac{\tau_1}{4} = 2^n \cdot \frac{1}{f} = \text{const}, \quad (12)$$

где  $\tau_{\text{зад}}$  – время постоянной задержки рабочего импульса обратной связи относительно середины между центрами импульсов  $C1$  и  $C2$ ;

$\tau_1$  – длительность импульса  $C1$ , вырабатываемого оптронным формирователем импульсов 4;

$\tau_2$  – длительность импульса  $C2$ , вырабатываемого оптронным формирователем импульсов 5;

$\tau_3$  – время смещения между задними фронтами импульсов  $C1$  и  $C2$ ;

$\tau_4$  – время смещения выходного рабочего импульса относительно заднего фронта запаздывающего импульса (в данном случае  $C2$ );

$n$  – число разрядов двоичного счетчика импульсов;

$f$  – частота следования тактовых импульсов генератора.

Представим величины  $\tau_1$  и  $\tau_2$  в следующем виде:

$$\tau_1 = (\tau_2 - \tau_3) + (\tau_1 - \tau_2 + \tau_3), \quad (13)$$

$$\tau_2 = \tau_3 + (\tau_2 - \tau_3). \quad (14)$$

В выражении (13) первое слагаемое соответствует части длительности  $\tau_1$  от переднего фронта импульса  $C2$  до заднего фронта импульса  $C1$ . Второе слагаемое в этом выражении соответствует части длительности  $\tau_1$  от переднего фронта импульса  $C1$  до переднего фронта импульса  $C2$ .

В выражении (14) первое слагаемое соответствует части длительности  $\tau_2$  от заднего фронта импульса  $C1$  до заднего фронта импульса  $C2$ . Второе слагаемое в этом выражении соответствует части длительности  $\tau_2$  от переднего фронта импульса  $C2$  до заднего фронта импульса  $C1$ .

Подставим формулы (13) и (14) в выражение (12):

$$\begin{aligned} \tau_{\text{зад}} &= \tau_4 + \frac{\tau_3}{4} + \frac{\tau_3}{2} + \frac{(\tau_2 - \tau_3)}{4} + \frac{(\tau_2 - \tau_3)}{4} + \frac{(\tau_1 + \tau_3 - \tau_2)}{4} = \\ &= \tau_4 + \frac{3}{4} \cdot \tau_3 + \frac{1}{2} \cdot (\tau_2 - \tau_3) + \frac{1}{4} \cdot (\tau_1 + \tau_3 - \tau_2) = 2^n \cdot \frac{1}{f} = \text{const}. \end{aligned} \quad (15)$$

Умножив выражение (15) на частоту  $f$ , получим

$$2^n = \tau_4 \cdot f + \tau_3 \cdot \frac{3}{4} \cdot f + (\tau_2 - \tau_3) \cdot \frac{1}{2} \cdot f + (\tau_1 + \tau_3 - \tau_2) \cdot \frac{1}{4} \cdot f. \quad (16)$$

Как известно операция умножения временного интервала на частоту следования импульсов эквивалентна заполнению этого временного интервала импульсами соответствующей частоты. Из выражения (16) следует, что интервал времени  $\tau_4$  необходимо заполнять импульсами с частотой  $f$ , интервал времени  $\tau_3$  – с частотой  $0,75 \cdot f$ , интервал времени  $(\tau_2 - \tau_3)$  – с частотой  $0,5 \cdot f$  и интервал времени  $(\tau_1 + \tau_3 - \tau_2)$  – с частотой  $0,25 \cdot f$ . Из рисунка 5 видно, что интервал времени  $(\tau_2 - \tau_3)$  – это время перекрытия импульсов  $C1$  и  $C2$ , а интервал времени  $(\tau_1 + \tau_3 - \tau_2)$  – это интервал времени между передними фронтами этих импульсов.

Распределитель импульсов непрерывно вырабатывает четыре последовательности импульсов с частотой  $f/4$ , сдвинутых во времени друг относительно друга. В исходном состоянии все триггеры 10–13 и счетчик импульсов находятся в нулевом (сброшенном) состоянии. При появлении импульса  $C1$  с выхода оптронного формирователя импульсов 4 RS-триггер 10 устанавливается в единичное состояние и разрешает прохождение импульсов с первого выхода распределителя импульсов через элемент И 14 и далее через элемент ИЛИ на С-вход счетчика импульсов. При этом на этот вход счетчика импульсов поступают импульсы с частотой  $f/4$ . Состояние схемы соответствует интервалу времени  $(\tau_1 + \tau_3 - \tau_2)$  (см. рисунок 5).

При появлении импульса  $C2$  с выхода оптронного формирователя импульсов 5 RS-триггер 11 устанавливается в единичное состояние и разрешает прохождение импульсов с третьего выхода распределителя импульсов через элемент И 16 и далее через элемент ИЛИ на С-вход счетчика импульсов. Так как RS-триггеры 10 и 11 находятся в единичных состояниях, то на С-вход счетчика импульсов поступают импульсы с частотой  $f/2$ . Состояние схемы соответствует интервалу времени  $(\tau_2 - \tau_3)$  (см. рисунок 5).

С окончанием действия импульса  $C1$  по заднему фронту через элемент НЕ 7 D-триггер 12 переводится в единичное состояние и разрешает прохождение импульсов со второго выхода распределителя импульсов через элемент И 15 и далее через элемент ИЛИ на С-вход счетчика импульсов. Исходя из того что RS-триггеры 10 и 11 и D-триггер 12 находятся в единичных состояниях, на С-вход счетчика импульсов поступают импульсы с частотой  $3 \cdot f/4$ . Состояние схемы соответствует интервалу времени  $\tau_3$  (см. рисунок 5).

С окончанием действия импульса  $C2$  по заднему фронту через элемент НЕ 8 D-триггер 13 переводится в единичное состояние и разрешает прохождение импульсов с четвертого выхода распределителя импульсов через элемент И 17 и далее через элемент ИЛИ на С-вход счетчика импульсов. Так как все четыре триггера 10–13 находятся в единичных состояниях, то на С-входе счетчика импульсов суммируются четыре последовательности сдвинутых во времени импульсов с частотой  $f/4$ , то есть счетчик импульсов продолжает заполняться импульсами с частотой  $f$ . Состояние схемы соответствует интервалу времени  $\tau_4$  (см. рисунок 5).

При переполнении счетчика импульсов, когда на его вход подано  $2^n$  импульсов, на выходе переполнения счетчика формируется рабочий импульс, который сбрасывает в нулевое состояние счетчик импульсов и все триггеры 10–13. Сформированный рабочий импульс используется как импульс отрицательной обратной связи регулятора. Временное положение формируемого рабочего импульса строго постоянно относительно средней точки между центрами импульсов  $C1$  и  $C2$ . А период следования и частота формируемых рабочих импульсов свободны от влияния эксцентриситета механического модулятора.

Структура регулятора может быть практически любой для класса регуляторов, использующих в качестве сигнала обратной связи импульсы таходатчика, связанного с валом электродвигателя, а в качестве задающего воздействия – частоту импульсов задающего генератора.

**Условия работоспособности метода.** Условием работоспособности такой импульсной системы стабилизации скорости вращения вала электропривода является требование – длительность обработки исходных импульсов  $C1$  и  $C2$  и формирования рабочего импульса обратной связи должна быть меньше периода частоты импульсов задающего генератора. Для этого следует выбирать частоту тактовых им-

пульсов генератора значительно выше частоты импульсов задающего генератора. При этом возникает вопрос: в каком соотношении должны находиться указанные частоты?

Исходя из временной диаграммы (см. рисунок 5) время формирования рабочего импульса обратной связи можно определить как

$$T_{\text{ФРИ}} = \frac{\tau_1 + a + \tau_2}{2} + \tau_{\text{зад}} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{4} + \frac{a}{2} + \tau_{\text{зад}}. \quad (17)$$

Поскольку метки (щели) на механический модулятор наносятся одним инструментом, то длительности импульсов  $C1$  и  $C2$  отличаются незначительно:

$$\tau_1 \approx \tau_2 \approx \tau. \quad (18)$$

Амплитуда колебаний смещения  $a$  между передними фронтами импульсов  $C1$  и  $C2$  пропорциональна величине эксцентриситета и тоже невелика. Ограничим диапазон изменения смещения  $a$ , пусть

$$a \leq \tau/2. \quad (19)$$

Тогда время формирования рабочего импульса с учетом условия (19):

$$T_{\text{ФРИ}} = \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{4} + \tau_{\text{зад}}. \quad (20)$$

Примем  $\tau \approx \tau_{\text{зад}}$ , в этом случае

$$T_{\text{ФРИ}} = 1\frac{3}{4} \cdot \tau_{\text{зад}}, \quad (21)$$

где  $\tau_{\text{зад}} = 2^n \cdot \frac{1}{f} = \text{const}$ , здесь  $f$  – частота тактовых импульсов генератора.

Как указывалось выше, период следования импульсов задающего генератора  $T_{3Г}$  должен быть больше времени формирования рабочего импульса обратной связи  $T_{\text{ФРИ}}$ , то есть  $T_{3Г} > T_{\text{ФРИ}}$ , тогда логично принять

$$T_{3Г} = 2 \cdot \tau_{\text{зад}} = 2^{n+1} \cdot \frac{1}{f}. \quad (22)$$

Из формулы (21) следует, что частота тактовых импульсов генератора должна быть в  $2^{n+1}$  раз выше частоты импульсов задающего генератора.

**Вопросы метрологии.** Точность формирования во времени рабочих импульсов обратной связи с выхода переполнения счетчика импульсов зависит и от его разрядности. Чем больше число разрядов  $n$  счетчика импульсов, тем точнее во времени формируется указанный рабочий импульс обратной связи относительно середины между центрами исходных импульсов  $C1$  и  $C2$ .

Разумное количество разрядов счетчика импульсов целесообразно определять, задаваясь допустимой точностью формирования рабочего импульса во времени на периоде частоты задающего генератора.

Частота тактовых импульсов генератора и частота импульсов задающего генератора с учетом (22) связаны соотношением

$$f \geq 2^{n+1} \cdot f_{3Г}. \quad (23)$$

Рассматривая младший бит счетчика импульсов как абсолютную погрешность [6, 7] положения во времени формируемого рабочего импульса на периоде частоты импульсов задающего генератора, получим приведенную относительную погрешность в процентах [7]:

$$\delta \leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 100\%. \quad (24)$$

Далее, из формулы (24) получим

$$2^{n+1} \geq \frac{1}{\delta} \cdot 100\%. \quad (25)$$

Логарифмируем обе части выражения (25):

$$(n+1) \cdot \lg 2 \geq \lg \left( \frac{100}{\delta} \right). \quad (26)$$

Отсюда, задаваясь допустимой приведенной относительной погрешностью  $\delta$  формирования во времени указанного рабочего импульса относительно периода следования импульсов задающего генератора  $b$ , находим разрядность счетчика импульсов по формуле

$$n \geq \frac{\lg\left(\frac{100}{\delta}\right)}{\lg 2} - 1. \quad (27)$$

В функциональной схеме системы стабилизации скорости вращения вала электропривода постоянного тока, приведенной на рисунке 4, можно обойтись одним генератором импульсов, если вместо задающего генератора импульсов применить делитель частоты тактовых импульсов генератора, но при этом разрядность делителя частоты на единицу должна быть больше разрядности счетчика импульсов.

**Выводы:**

1. Использование двух формирователей импульсов, расположенных диаметрально относительно механического модулятора в системе стабилизации скорости вращения вала электропривода постоянного тока, и введенная в систему цифровая схема формирования рабочего импульса обратной связи (см. рисунок 4) позволяют исключить влияние эксцентриситета механического модулятора на скорость вращения вала электропривода и тем самым повысить точность стабилизации скорости вращения.

2. Частота  $f$  генератора тактовых импульсов, используемых в цифровой схеме формирования рабочего импульса обратной связи, должна быть в  $2^{n+1}$  выше частоты  $f_{3Г}$  следования импульсов задающего генератора согласно соотношению  $f \geq 2^{n+1} \cdot f_{3Г}$ .

3. Для достижения требуемой допустимой точности положения во времени формируемых рабочих импульсов обратной связи разрядность счетчика импульсов должна удовлетворять выражению

$$n \geq \frac{\lg\left(\frac{100}{\delta}\right)}{\lg 2} - 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Трахтенберг, Р.М. Импульсные астатические системы электропривода с дискретным управлением / Р.М. Трахтенберг. – М. : Энергоатомиздат, 1982. – 168 с.
2. Москаленко, В.В. Системы автоматизированного управления электропривода : учебник / В.В. Москаленко. – М. : ИНФРА-М, 2007. – 208 с.
3. Цифровой электропривод постоянного тока : а. с. СССР №1335106 / В.Д. Сибирцев, А.С. Вершинин. – Оpubл. 1987.
4. Цифровой электропривод постоянного тока : а. с. СССР №1422349 / В.Д. Сибирцев, А.С. Вершинин. – Оpubл. 07.09.1988.
5. Цифровой измеритель временного положения середины видеоимпульсов : а. с. СССР №1449937 / В.Д. Сибирцев, А.С. Вершинин. – Оpubл. 07.01.1989.
6. Brindley, K. Sensors and Transducers / K. Brindley. – London, 1988.
7. Основы метрологии и электрические измерения : учеб. для вузов / под ред. Е.М. Душина. – 6-е изд., перераб. и доп. – Л. : Энергоатомиздат, 1987. – 480 с.

Поступила 20.09.2017

**ROTATION SPEED STABILIZATION OF THE DC ELECTRIC DRIVE SHAFT BY ELIMINATING THE ECCENTRICITY EFFECT OF THE MECHANICAL MODULATOR**

**A. VERSHININ, V. AVDEYKO**

*In a typical scheme of a pulsed DC electric drive when forming feedback impulses with a mechanical modulator, it is proposed to use two pulse formers (for example, optocouplers) and arrange them diametrically relative to the mechanical modulator. In order to form working feedback impulses in the stabilization system, it is suggested to introduce a circuit that processes the impulses from these pulse formers, determines the time position of the center between the centers of the initial impulses and generates working feedback impulses strictly at the obtained instants of time. This will allow us to exclude the mechanical modulator eccentricity effect on the repetition rate of the feedback impulses in the pulse system that stabilizes the rotational speed of the DC electric drive shaft.*

**Keywords:** *electric drive, mechanical modulator, pulse former, eccentricity, logic element, trigger, rotational velocity, stabilization accuracy.*

УДК 546.28: 621.315.592

**МИКРОТВЕРДОСТЬ ПЛЕНОК ПОЛИИМИДА И ПОЛИЭТИЛЕНТЕРЕФТАЛАТА, ОБЛУЧЕННЫХ ГАММА-КВАНТАМИ  $^{60}\text{Co}$** 

*канд. физ.-мат. наук Д.И. БРИНКЕВИЧ, д-р физ.-мат. наук, проф. М.Г. ЛУКАШЕВИЧ,  
канд. физ.-мат. наук, доц. В.С. ПРОСОЛОВИЧ, канд. физ.-мат. наук А.А. ХАРЧЕНКО  
(Белорусский государственный университет, Минск);  
канд. физ.-мат. наук, доц. С.А. ВАБИЩЕВИЧ, Н.В. ВАБИЩЕВИЧ  
(Полоцкий государственный университет)*

*Представлены результаты исследования микротвердости пленок полиимида и полиэтилентерефталата (ПЭТФ), подвергнутых облучению гамма-квантами  $^{60}\text{Co}$ . Обнаружено частичное растрескивание пленок полиимида при дозах свыше 5 кГр. Показано, что при облучении пленки полиимида и ПЭТФ ведут себя по-разному. Для полиимида наблюдалось увеличение приповерхностного упрочнения и небольшое снижение объемной микротвердости при облучении. В случае же ПЭТФ имело место снижение микротвердости приповерхностного слоя. Радиационные изменения в полиимиде были выражены значительно слабее, чем в ПЭТФ, что указывает на более высокую радиационную стойкость полиимида в сравнении с ПЭТФ. Установлено, что модификация физико-механических свойств приповерхностных слоев в процессе облучения не связана с окислительной деструкцией.*

**Ключевые слова:** полиимид, полиэтилентерефталат,  $\gamma$ -облучение, индентирование, микротвердость.

**Введение.** В настоящее время проводятся исследования по разработке резистов для рентгенолитографии, которая обладает рядом преимуществ. Так, применение рентгенолитографии позволяет исключить обратное рассеяние электронов, оказывающее негативное влияние при электронной литографии [1]. В качестве перспективных материалов для рентгенорезистов рассматриваются полимерные композиции на основе полиимидов, полиэтилентерефталата и других термически и механически стойких полимеров [2–5]. Полиэтилентерефталат (ПЭТФ) и полиимид (ПИ) – международное название картон – являются радиационно-стойкими полимерами. Допустимая доза облучения для ПЭТФ находится в диапазоне 1500–30000 кГр, а для полиимида она существенно превышает 30 000 кГр [6]. Однако процессы модификации структуры полимерного резиста, протекающие при высокоэнергетическом воздействии, изучены недостаточно. Отметим, что интенсивное воздействие высокоэнергетических частиц на полимер приводит к появлению принципиально новых свойств у облученного приповерхностного слоя полимерной пленки [7]. В свете вышеизложенного особый интерес представляют исследования изменения свойств приповерхностного слоя полимеров в процессе облучения высокоэнергетическими частицами.

Целью настоящей работы являлось выявление особенностей радиационной модификации приповерхностных слоев различных полимеров (полиимида, полиэтилентерефталата) при  $\gamma$ -облучении.

**Методика эксперимента.** Исследование прочностных свойств полимерных пленок проводилось при комнатной температуре на приборе ПМТ-3 методом микроиндентирования. Нагрузка ( $P$ ) на индентор в виде четырехгранной алмазной пирамиды с квадратным основанием в оправе типа НПМ и углом при вершине  $\alpha = 136^\circ$  варьировалась в пределах 1–100 г. Измерения микротвердости  $H$  проводились по восстановленному отпечатку с использованием стандартной методики согласно ГОСТ 9450-76. При каждом измерении на поверхность образца наносилось не менее 50 отпечатков и проводилась обработка результатов измерений с использованием методов математической статистики по методике, изложенной в [8]. Величина микротвердости  $H$  рассчитывалась по средней величине диагонали отпечатка  $d$  согласно формуле

$$H = \frac{1,854P}{d^2}.$$

При микро- и наноиндентировании наблюдается изменение формы отпечатка за счет упругого последействия при разгрузке. В достаточно пластичных материалах вершины отпечатка своего положения не меняют, т.е. расстояние между вершинами при возврате сохраняется [9]. В связи с этим измерялись обе диагонали отпечатка, а микротвердость рассчитывалась по их среднему значению. В настоящей работе измерялась восстановленная микротвердость [10]. Поскольку пленка была прозрачной для надлежащей визуализации отпечатка, измерения проводились на микроскопе Axiovert-10 поляризованном свете.

Облучение  $\gamma$ -квантами  $^{60}\text{Co}$  осуществлялось при комнатной температуре и нормальном атмосферном давлении на установке МРХ- $\gamma$ -25М. Мощность поглощенной дозы составляла  $0,360 \pm 0,008$  Гр/с. Поглощенные дозы находились в интервале от 0,6 до 50 кГр.

Изотермический отжиг проводился в муфельной печи типа ПМ-8 на воздухе. Образец помещался сразу в нагретую печь. Температура отжига составляла  $190 \pm 10$  °С, время отжига – 15 мин.

**Экспериментальные результаты и их обсуждение.** Отпечатки индентора на поверхности обоих полимерных пленок были с вогнутыми вовнутрь сторонами при всех дозах облучения, что свидетельствует о наличии напряжения сжатия вблизи отпечатков. Отметим, что при увеличении дозы облучения указанные напряжения также возрастают. Трещин в пределах отпечатков не обнаружено. При больших нагрузках (50–100 г) в вершине отпечатков обнаруживается помутнение полимера (визуально синего цвета), не зависящее от дозы облучения. Это может быть связано с модификацией структуры материала под давлением при нагружении индентора, которая приводит к изменению показателя преломления полимера.

При дозах свыше 5 кГр на поверхности полиимидной пленки наблюдаются изогнутые трещины и имеет место коробление пленки. В этом случае у края пленки наблюдается сетка трещин, которая образовалась, по-видимому, при резке образцов, что свидетельствует о возрастании микрохрупкости полиимида при  $\gamma$ -облучении.

Кривые зависимости микротвердости ( $H$ ) полиимида и полиэтилентерефталата от величины нагрузки ( $P$ ) при различных дозах гамма-облучения представлены на рисунках 1 и 2.

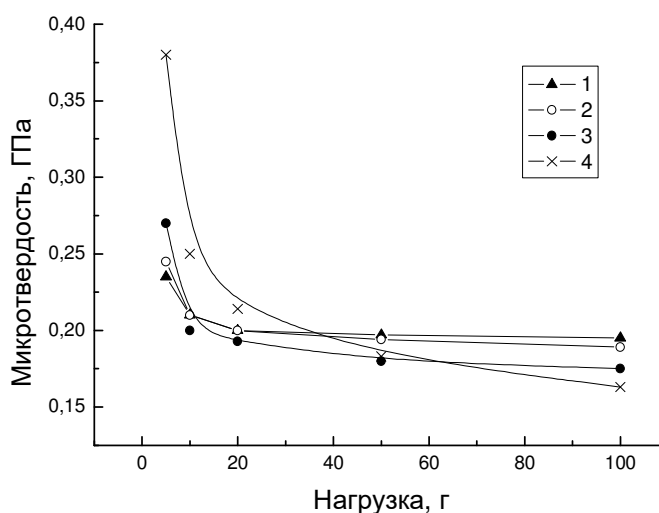


Рисунок 1. – Зависимость микротвердости  $\gamma$ -облученных пленок полиимида от величины нагрузки. Доза, кГр: 1 – 0; 2 – 0,945; 3 – 5,94; 4 – 44,82.

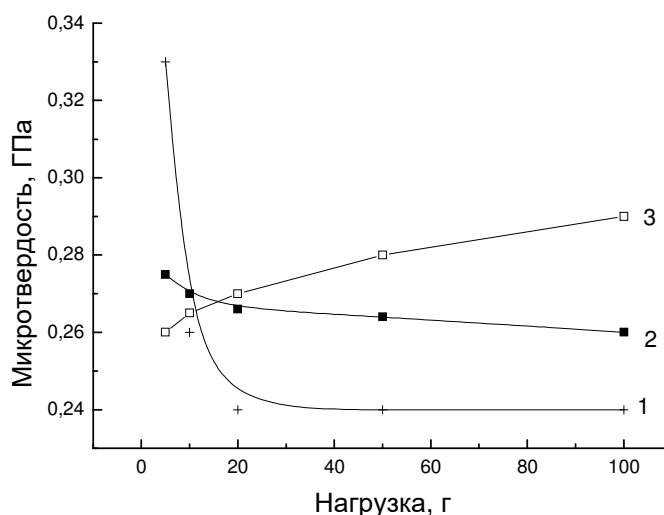


Рисунок 2. – Зависимость микротвердости  $\gamma$ -облученных пленок полиэтилентерефталата от величины нагрузки. Доза, кГр: 1 – 0; 2 – 5,94; 3 – 44,82

Для исходных (необлученных) пленок как полиимида, так и ПЭТФ, характерно резкое снижение микротвердости при увеличении нагрузки с выходом на плато при нагрузках свыше 10–20 г. Такой вид

зависимости микротвердости от нагрузки характерен для непластичных (твердых) кристаллов, в частности для металлов и полупроводников [11].

При облучении пленки полиимида и ПЭТФ ведут себя по-разному. Для полиимида наблюдалось увеличение приповерхностного упрочнения и небольшое снижение объемной микротвердости при облучении (рисунок 1, сравнение кривых 1 и 2, 3). В случае ПЭТФ при облучении имело место снижение микротвердости при нагрузке 5 г и возрастание  $H$  при больших нагрузках, что приводило при дозе 6 кГр к исчезновению эффекта приповерхностного упрочнения (рисунок 2, кривая 2). При увеличении дозы до 45 кГр наблюдался слабый эффект приповерхностного разупрочнения. Отметим, что радиационные изменения в полиимиде были выражены значительно слабее, чем в ПЭТФ (сравните рисунки 1 и 2). Это связано с более высокой радиационной стойкостью ПИ.

В процессе облучения одновременно протекают несколько реакций, причем тип и скорости преобладающих реакций зависят не только от химической природы полимера [12, 13], но и от вида и дозы ионизирующего излучения [13, 14]. К основным радиационно-химическим превращениям полимеров относят: 1) образование химических связей между макромолекулами – «сшивание» полимеров; 2) разрыв связей в главных цепях и образование молекул меньшей длины – деструкция; 3) изменение числа и расположения двойных связей; 4) окисление. В большинстве случаев все эти реакции протекают одновременно. На прочностные свойства полимеров наиболее сильно влияют первые два процесса; по типу преобладающего из них полимеры подразделяют на сшивающиеся и деструктурирующие. Исследованные в работе полимеры относятся к различным группам: полиимид преимущественно сшивается, а ПЭТФ при  $\gamma$ -облучении деструктурирует [14], причем деструкция происходит статистически вдоль полимерной цепи. С этим обстоятельством связано различное изменение прочностных свойств полиимида и ПЭТФ при облучении.

Исследованные в работе полимеры относятся к аморфно-кристаллическим полимерам. Они состоят из кристаллических областей, разделенных аморфными зонами, причем одна и та же полимерная цепь в силу большой длины может входить как в первые, так и во вторые области. Занятая кристаллитами доля объема зависит от условий кристаллизации, состава и природы полимера, присутствия примесей и т.д. При внешних высокоэнергетических воздействиях возможно разрушение слабых межмолекулярных связей и смещение цепей полимера с образованием областей с молекулярным упорядочением – так называемая «кристаллизация» в аморфных областях. Такое молекулярное упорядочение наблюдалось авторами [15] при облучении полиметилметакрилата миллисекундными лазерными импульсами. Молекулярное упорядочение при облучении приводит к известному эффекту ориентационного упрочнения полимеров [16], что наблюдалось в нашем эксперименте в виде увеличения микротвердости ПЭТФ при больших нагрузках в процессе облучения.

Резкое изменение свойств приповерхностного слоя ПЭТФ с изменением знака эффекта при низких дозах облучения наблюдалось ранее в работах [17–19]. Так, в работе [18] показано, что в процессе облучения ПЭТФ электронами при поглощенной дозе 25–50 кГр наблюдается гидрофобизация пленки полиэтилентерефталата, а при 100–200 кГр имеет место противоположный эффект гидрофилизации поверхности. Это обусловлено протеканием процессов окисления метиленовых ( $\text{CH}_2$ ) и метановых ( $\text{CH}_3$ ) групп в алифатических и ароматических фрагментах цепи ПЭТФ с образованием гидроксильных и карбонильных групп. В связи с вышеизложенным было изучено возможное влияние кислорода на изменение микротвердости в процессе облучения. Для этого был проведен отжиг ПЭТФ с различным доступом кислорода к поверхности пленки. Лицевая сторона пленки находилась в контакте с воздухом, а обратная сторона была прижата к керамической подставке вследствие чего контакт с кислородом воздуха был ограничен. Термообработка проводилась при температуре 190 °С, близкой к температуре размягчения ПЭТФ (245–248 °С).

На рисунке 3 представлены зависимости микротвердости пленки полиэтилентерефталата до и после изотермического отжига. После отжига при больших нагрузках (100–200 г) замечено охрупчивание полимера. Это выглядит как отколы на ребрах отпечатка (в пределах отпечатка). Эффект охрупчивания наблюдается также при облучении ПЭТФ [7]. Помутнения полимера, характерное для образцов, подвергнутых облучению, не произошло. После отжига полимера увеличилась микротвердость приповерхностного слоя (до 5 мкм) с лицевой (контактировавшей с кислородом) стороны, а при ограниченном доступе кислорода (с обратной стороны пленки) микротвердость, наоборот, снилась. Для объема полимера на глубинах более 5 мкм большее значение микротвердости наблюдалось с лицевой стороны образца.

Отметим, что изменение микротвердости полиэтилентерефталата при облучении (рисунок 2) схоже с отжигом при ограниченном доступе кислорода (рисунок 3, кривая 3). Таким образом объяснить модификацию физико-механических свойств ПЭТФ при облучении  $\gamma$ -квантами окислительной деструкцией не представляется возможным.



Ускоренная (по сравнению с объемом) радиационная модификация приповерхностных слоев полимерных материалов обусловлена тем, что вблизи поверхности полимера концентрация метастабильных дефектов существенно выше объемной концентрации вследствие наличия большого количества оборванных связей (в частности, концевых групп макромолекул), а также деформации валентных углов и валентных связей [20]. Кроме того, и концентрация возбужденных химических связей в приповерхностном слое выше, чем в объеме [13]. Эти дефекты возникают по кинетическим причинам в процессе изготовления полимерной пленки. Согласно [13] указанные выше обстоятельства способствуют генерации радиационных дефектов.

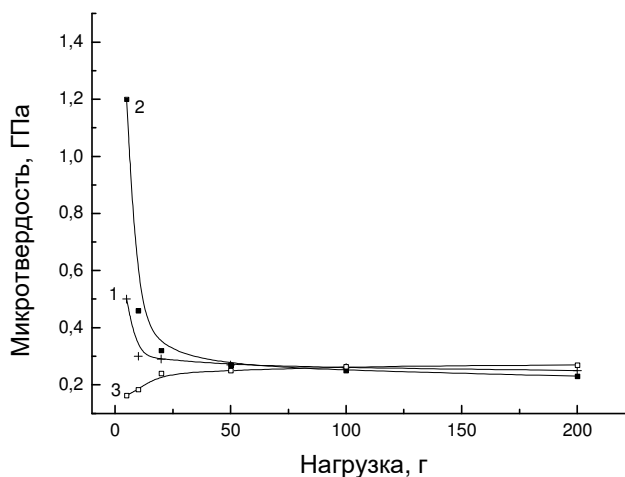


Рисунок 3. – Зависимость микротвердости пленки полиэтилтерфталата:

1 – до и после отжига (190 °С, 15 мин); 2, 3 – от величины нагрузки.

Сторона пленки: 2 – лицевая; 3 – обратная

**Заключение.** Таким образом, показано, что  $\gamma$ -облучение приводит к частичному растрескиванию пленок полиимида при дозах свыше 5 кГр. Показано, что при облучении пленки полиимида и ПЭТФ ведут себя по-разному. Для полиимида наблюдалось увеличение приповерхностного упрочнения и небольшое снижение объемной микротвердости в процессе облучения. В случае же ПЭТФ имело место снижение микротвердости приповерхностного слоя. Радиационные изменения в полиимиде были выражены значительно слабее, чем в ПЭТФ, что указывает на более высокую радиационную стойкость полиимида в сравнении с ПЭТФ. Установлено, что модификация физико-механических свойств приповерхностных слоев в процессе облучения не связана с окислительной деструкцией.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (договор № Ф16-151 от 20.05.2016 г.).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Моро, У. Микролитография. Принципы, методы, материалы : в 2 ч. / У. Моро. – М. : Мир, 1990. – Ч. 2. – 632 с.
2. Исследование поверхности пленок из полиэтилтерфталата, модифицированных вакуумно-ультрафиолетовым облучением на воздухе / А. В. Митрофанов [и др.] // Поверхность. – 2009. – № 7. – С. 30–38.
3. Радиационная модификация полиимида в процессе субмикронной рентгенолитографии / В. П. Назьмов [и др.] // Поверхность. – 2002. – № 12. – С. 16–20.
4. Исследования влияния синхротронного излучения на термофизические параметры рентгенорезиста ПММА / Генцелев А.Н. [и др.] // Поверхность. – 2012. – № 1. – С. 14–20.
5. Абляция политетрафторэтилена под действием синхротронного излучения при формировании микроструктур с высоким аспектным отношением / В. П. Назьмов [и др.] // Поверхность. – 2001. – № 3. – С. 10–14.
6. Малик, Б. Влияние облучения протонами с энергией порядка нескольких МэВ на сечение аморфизации полимера / Б. Малик, С. Паниграхи // Прикладная физика. – 2012. – № 1. – С. 20–25.
7. Radiation-induced modification of polymer surfaces / A. A. Kharchenko [et al.] // J. of Surface Investigation. X-ray, synchrotron and neutron techniques – 2015. – V. 9, № 2. – P. 371–376.

8. Бринкевич, Д. И. Микромеханические свойства эпитаксиальных слоев GaP, легированных редкоземельным элементом диспрозием / Д. И. Бринкевич, Н. В. Вабищевич, В. С. Просолович // Неорганические материалы. – 2012. – Т. 48, № 8. – С. 878–883.
9. Сойфер, Я. М. Исследование локальных механических свойств монокристаллов хлористого калия методом атомно-силовой микроскопии / Я. М. Сойфер, А. Вердян // Физика твердого тела. – 2003. – Т. 45, № 9. – С. 1621–1625.
10. Булычев, С. И. Соотношение между восстановленной и невосстановленной твердостью при испытании наномикроиндентированием / С. И. Булычев // Журнал технической физики. – 1999. – Т. 69, № 7. – С. 42–48.
11. Физическая природа изменения микротвердости по глубине образца / А. Б. Герасимов [и др.] // Физика и химия обработки материалов. – 2004. – № 3. – С. 71–74.
12. Кинг, Р. В. Полимеры. Влияние облучения на материалы и элементы электронных схем / Р. В. Кинг, Н. Дж. Бродвей, Р. А. Майер. – М. : Атомиздат, 1967. – С. 49–114.
13. Экспериментальные методы химии высоких энергий / под общ. ред. М. Я. Мельникова. – М. : МГУ, 2009. – С. 169–178.
14. Мошковский, Н. С. Действие различных видов ионизирующего излучения на полиэтилентерефталат / Н. С. Мошковский, Б. К. Пасальский, Я. И. Лаврентович // Высокомолекулярные соединения. А. – 1976. – Т. 18, № 9. – С. 2011–2015.
15. Изменение структуры полиметилметакрилата при облучении миллисекундными лазерными импульсами / С. В. Васильев [и др.] // Квантовая электроника. – 1998. – Т. 25, № 11. – С. 1023–1027.
16. Гуль, В. Е. Структура и механические свойства полимеров / В. Е. Гуль, В. Н. Кулешов. – М. : Лабиринт, 1994. – 344 с.
17. Структура пленок полиэтилентерефталата, модифицированных под воздействием ускоренных электронов / А. Н. Красовский [и др.] // Химия высоких энергий. – 2009. – Т. 43, № 2. – С. 134–142.
18. Функциональные превращения на поверхности пленок полиэтилентерефталата под действием ускоренных электронов / И. В. Васильева [и др.] // Химия высоких энергий. – 2003. – Т. 37, № 3. – С. 180–184.
19. Electron beam induced modification of poly (ethylene terephthalate) films / I. V. Vasiljeva [et al.] // Applied Surface Science. – 2006. – V. 252, № 24. – P. 8768–8775.
20. Веттегрень, В. И. Тепловые и флуктуационные деформации химических связей в поверхностных и граничных слоях полимеров / В. И. Веттегрень, И. И. Новак, Б. В. Кулик // Физика твердого тела. – 2005. – Т. 47, № 5. – С. 893–898.

Поступила 22.09.2017

#### MICROHARDNESS OF POLYIMIDE AND POLYETHYLENE TEREPHTHALATE FILMS IRRADIATED WITH $^{60}\text{Co}$ GAMMA QUANTA

**D. BRINKEVICH, M. LUKASHEVICH, V. PROSOLOVICH,  
A. KHARCHENKO, S. VABISHCHEVICH, N. VABISHCHEVICH**

*The results of a study of the microhardness of polyimide and polyethylene terephthalate (PET) films subjected to irradiation with  $^{60}\text{Co}$  gamma quanta are presented. Partial cracking of polyimide films was detected at doses above 5 kGy. It is shown that polyimide and PET films behave differently at irradiating. For polyimide, an increase in surface hardening and a slight decrease in bulk microhardness during irradiation were observed. In the case of PET, the microhardness of the near-surface layer decreased. Radiation changes in polyimide were significantly weaker than in PET. It is indicates a higher radiation resistance of polyimide in comparison with PET. It was established that the modification of the physicomechanical properties of the near-surface layers during irradiation is not associated with oxidative degradation.*

**Keywords:** polyimide, polyethene terephthalate,  $\gamma$ -irradiation, indentation, microhardness.

УДК 681.586.773:624.072.233.5

## СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДОВ УЛЬТРАЗВУКОВОГО КОНТРОЛЯ\*

*А.В. ШЛЯХТЕНОК, канд. техн. наук, доц. Д.А. ДОВГЯЛО  
(Полоцкий государственный университет)*

*Рассмотрена наиболее актуальная проблема рельсовой дефектоскопии – проблема обнаружения поперечных дефектов, находящихся под прикрытием горизонтальных расслоений. Проведен ультразвуковой контроль образцов железнодорожных рельсов, а также анализ информации, полученной в ходе испытаний образцов на гидравлическом прессе. На основании анализа полученных данных сформированы практические выводы и рекомендации, направленные на повышение эффективности контроля.*

**Ключевые слова:** *ультразвуковая дефектоскопия, промышленная диагностика, ультразвуковой датчик, обнаружение дефектов, неразрушающий контроль, эхо-метод, ультразвуковые фазированные решетки, дифракционно-временной метод.*

Одной из наиболее острых проблем ультразвукового контроля рельсового пути является проблема выявления и определения параметров поперечных трещин (II группа), находящихся под прикрытием горизонтально-ориентированных дефектов головки рельса (I, III группы), которые, в отличие от дефектов V группы (дефекты шейки рельса), невозможно подтвердить визуально, если грани дефекта не вышли на поверхности головки рельса. Основной задачей при проведении контроля подобных сечений является выявление поперечных дефектов на стадии их начального развития.

Анализ изломов рельсов, произошедших на железнодорожных дорогах стран СНГ за 2017 год, показал, что в большинстве случаев, когда излом происходил из-за наличия поперечных трещин в головке рельса, ее поражение в поперечном сечении составляло не менее 50%. Данное обстоятельство указывает на необходимость более тщательного анализа сигналов, зарегистрированных дефектоскопом, а также выработки практических рекомендаций, упрощающих процесс контроля и повышающих его эффективность.

Для проведения контроля с последующим подтверждением его результатов путем долома отобрано 5 образцов рельсов. Первичный сплошной контроль проводился с использованием дефектоскопа УДС2-РДМ-22 со стандартной схемой прозвучивания. Цель данного этапа заключалась в получении дефектограмм сплошного контроля, на основании которых был осуществлен первичный анализ дефектных сечений.

В общем случае схемой прозвучивания (контроля) можно назвать группу датчиков, реализованных на базе конкретного дефектоскопа, которые обеспечивают наиболее эффективное выявление дефектов в соответствии с поставленными целями и задачами.

В дефектоскопах РДМ-22 для контроля всего объема головки рельса применяются следующие пьезоэлектрические преобразователи:

- Канал 1 – канал реализован посредством использования раздельно-совмещенного пьезоэлектрического преобразователя с углом ввода ультразвука в контролируемое изделие, равным  $0^\circ$ . На практике данный канал показывает высокую эффективность при выявлении различного рода горизонтальных расслоений и трещин. Зона контроля, в зависимости от типа рельса, составляет от 0 до 190 мм.

- Канал 2 (7) – пьезоэлектрические преобразователи с углом ввода  $70^\circ$ . Преобразователи развернуты вдоль продольной оси рельса по ходу движения ультразвукового дефектоскопа для 2-го канала, а также против движения дефектоскопа для 7-го канала. Практическая полезность данного канала заключается в возможности обнаружения трещин, развивающихся под протяженными горизонтальными расслоениями, которые, в силу особенностей отражения ультразвуковых волн от различно ориентированных поверхностей, невозможно выявить пьезоэлектрическими преобразователями с другими углами ввода. Канал 2 уверенно выявляет трещины, развивающиеся под углом  $18...20^\circ$  от нормали. Зона контроля, в зависимости от типа рельса, составляет от 3 до 45 мм. Основным недостатком данного преобразователя является наибольшая среди всех используемых в дефектоскопе РДМ-22 зависимость размеров, снятых с дефектного места, от температуры. Так, например, в диапазоне температур от минус 40 до плюс  $50^\circ\text{C}$  номинальный угол ввода изменяется от  $60^\circ$  до  $74^\circ$ . Изменение угла ввода до  $74^\circ$  приводит к образованию поверхностной волны, которая чувствительна даже к небольшим поверхностным дефектам.

\* Начало статьи опубликовано в журнале «Вестник Полоцкого государственного университета». – 2016. – № 12 – С. 64–70.

• Каналы 3, 6 и 8 – пьезоэлектрические преобразователи с углом ввода  $55^\circ$ , развернутые на  $34^\circ$  относительно продольной оси рельса и направленные:

- канал 3 – в рабочую грань против хода ультразвукового дефектоскопа;
- канал 6 – в рабочую грань по ходу движения дефектоскопа;
- канал 8 – в нерабочую грань против хода ультразвукового дефектоскопа.

Разворот вставок на  $34^\circ$  позволяет контролировать весь объем головки рельса. Единственным недостатком рассматриваемых пьезоэлектрических преобразователей является высокая чувствительность к поверхностным дефектам. В отдельных случаях, даже при небольших и неглубоких расслоениях, вследствие многократного переотражения ультразвуковой волны (УЗВ) между расслоением и поверхностью, оператор может выдать ложное заключение о наличии дефекта в рельсе. Зона контроля данных пьезоэлектрических преобразователей составляет 144 мм.

Пьезоэлектрические преобразователи с углом ввода  $55^\circ$ , развернутые на  $34^\circ$  относительно продольной оси рельса, реализуют схему «ЗМЕЙКА». Данная схема является наиболее сложной и с точки зрения процесса отражения ультразвуковых лучей от различных граней головки рельса, и для понимания принципа отображения сигналов на В-развертке. Это вызвано тем, что для обнаружения дефектов головки в основном используются одно-, двух- и трехкратно переотраженные от ее граней лучи [1].

Вторичный, уточняющий, контроль отобранных образцов проводился при помощи портативных дефектоскопов УДС2-РДМ-33, УДС2М-35 с использованием различных методов, основанных на раздельной и совмещенной схемах включения. Наибольший интерес представляет раздельная схема контроля, не включенная в перечень обязательных, однако обладающая высокой выявляющей способностью. Принцип работы различных схем включения приведен на рисунке 1.

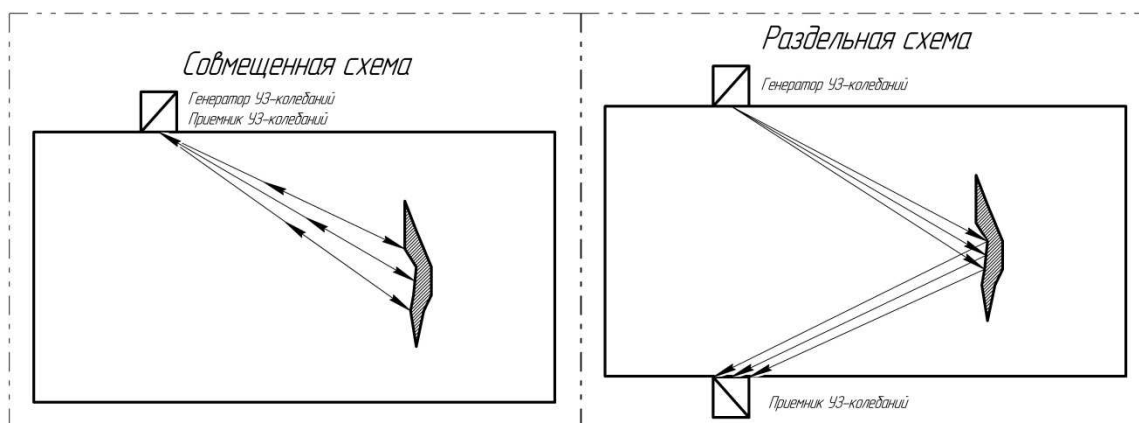


Рисунок 1. – Принцип работы различных схем включения

На первом этапе проведен анализ фрагментов дефектограмм дефектоскопа УДС2-РДМ-22, эскизы которых приведены на рисунке 2, и определены все сигналы, зарегистрированные ультразвуковыми датчиками.

Образец № 1:

- протяженность поверхностного расслоения по итогам измерения разрыва донного сигнала составляет 65 мм;
- максимальная глубина расслоения по итогам измерения сигналов, зарегистрированных 1-м каналом, составляет 7 мм;
- до разрыва донного сигнала 2-м каналом зарегистрирован сигнал в диапазоне 10...25 мм;
- каналами 3, 6 и 8 зарегистрированы сигналы в конце средней зоны (58...60 мм).

Исходя из результатов анализа сигналов, зарегистрированных 2-м каналом, можно предположить, что дефект имеет определенный наклон относительно нормали и располагается в центре головки рельса под горизонтальным расслоением.

Сигналы в каналах 3, 6 и 8, временное положение которых соответствует концу средней – началу дальней зоны, могут быть обусловлены отражениями как от угла, образованного плоскостью предполагаемого дефекта и горизонтальным расслоением, так и от краев и неровностей самого расслоения. Учитывая эти обстоятельства, рассмотрение данных сигналов, явно указывающих на наличие дефекта (без возможности заранее увидеть поперечное сечение в месте долома), нецелесообразно. Лишь после испытания рельса на прессе и последующего анализа дефекта в поперечном сечении, можно с определенной долей уверенности провести анализ сигналов от данных каналов.

Образец № 2:

- протяженность поверхностного расслоения по итогам измерения разрыва донного сигнала составляет 69 мм;
- максимальная глубина расслоения по итогам измерения сигналов, зарегистрированных 1-м каналом, составляет 7...7,5 мм;
- до разрыва донного сигнала 2-м каналом зарегистрированы 2 пачки сигналов в диапазонах глубин 8...18 и 21...28 мм соответственно.

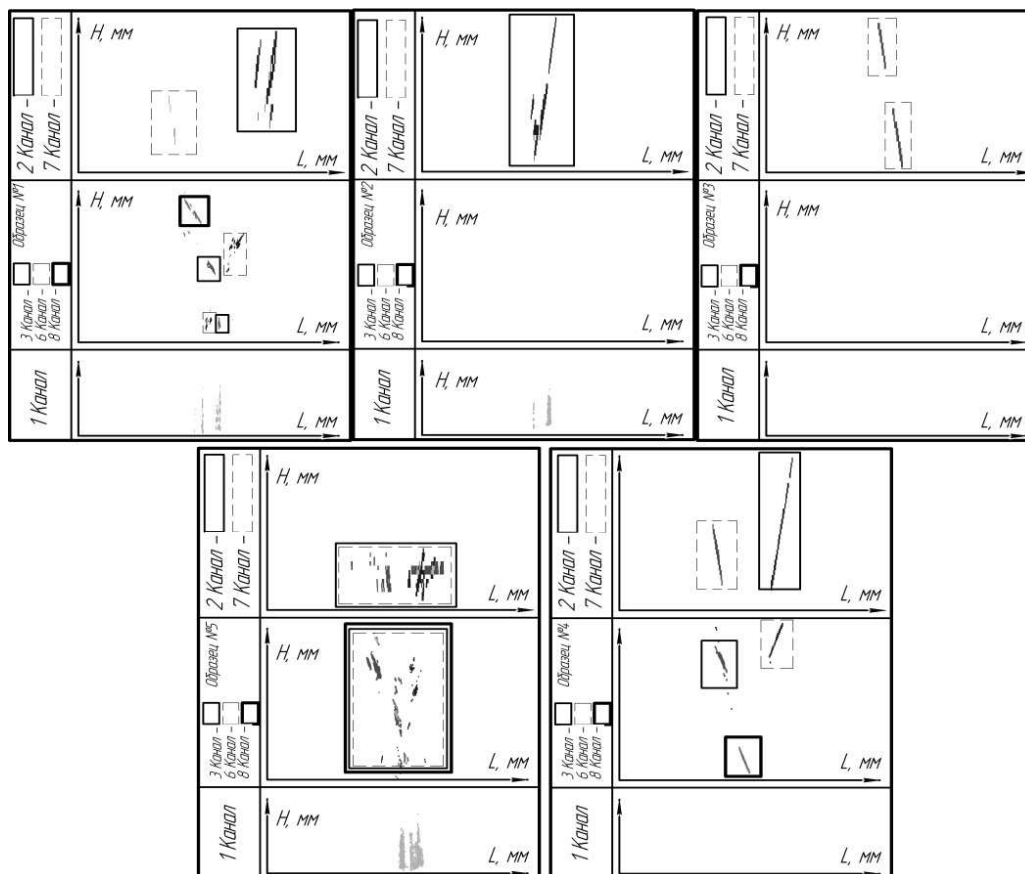


Рисунок 2. – Фрагменты дефектограмм пяти образцов рельсов

Исходя из результатов анализа сигналов, зарегистрированных 2-м каналом, можно предположить, что дефект имеет определенный наклон относительно нормали и располагается в центральной части головки рельса под горизонтальным расслоением.

Образец № 3:

- каналом 7 зарегистрированы 2 пачки сигналов в диапазонах глубин 10...19 и 25...32 мм соответственно.

Это обстоятельство указывает на возможный дефект сварного шва, расположенный в центральной части головки рельса.

Образец № 4:

- каналом 2 зарегистрирован сигнал с максимальной амплитудой на глубине 10...36 мм;
- каналом 7 зарегистрирован сигнал в диапазоне 11...23 мм;
- каналом 3 зарегистрирован сигнал в диапазоне глубин 101...115 мм с максимальной амплитудой на глубине 108 мм;
- каналом 6 зарегистрирован сигнал в диапазоне глубин 109...126 мм с максимальной амплитудой на глубине 117 мм;
- каналом 8 зарегистрирован сигнал в диапазоне глубин 49...63 мм с максимальной амплитудой на глубине 56 мм.

Если отсутствует поверхностное повреждение, то по результатам анализа можно говорить о наличии в поперечном сечении развитого дефекта. Каналы 2 и 7 указывают на наличие отражателя

в центральной части головки рельса. Каналы 3, 6 и 8 регистрируют сигналы в дальней (3 и 6 каналы) и средней (8 канал) зонах, что указывает на наличие дефекта в центральной части и нерабочей грани головки рельса.

Образец № 5:

- протяженность поверхностного расслоения по итогам измерения разрыва донного сигнала составляет 81 мм;
- максимальная глубина расслоения по итогам измерения сигналов, зарегистрированных 1-м каналом, составляет 8 мм;
- сигналов от 2, 7, 3, 6 и 8-го каналов, явно указывающих на наличие дефекта, не зарегистрировано.
- дефект изъят из пути по коду 30Г.2 (горизонтальное расслоение головки рельса) в виду протяженности поверхностного расслоения.

На втором этапе все образцы рельсов контролировались дефектоскопами УДС2М-35 и УДС2-РДМ-33. Основные параметры дефектов, фиксируемые в процессе контроля, показаны на рисунке 3.

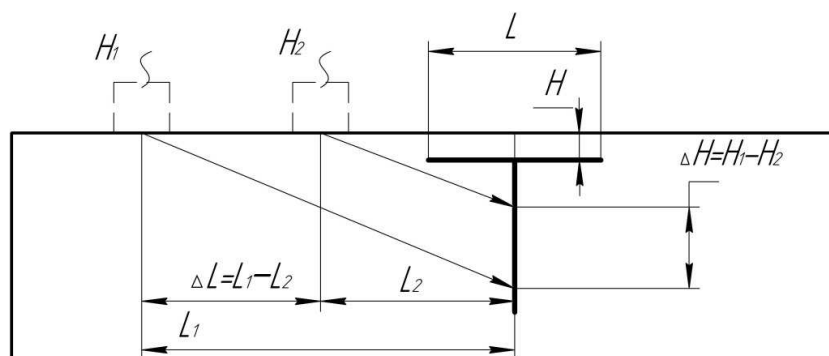


Рисунок 3. – Основные фиксируемые параметры дефектов

При использовании совмещенной схемы данные дефектоскопы показали практически идентичные результаты и подтвердили наличие поперечных дефектов в образцах с номерами 1...4.

Раздельная схема прозвучивания подтвердила наличие дефектов во всех образцах рельсов, причем в образце № 5 сигнал от предполагаемого дефекта появился лишь после подворота преобразователей на  $10^\circ$  относительно продольной оси.

Результаты контроля основных параметров приведены в таблице 1.

Таблица 1. – Результаты контроля основных параметров

№ образца	Схема включения датчиков	Тип дефектоскопа	Угол ввода ультразвука, град	$H^*$ , мм	$L^{**}$ , мм	$\Delta H$ , мм	$\Delta L$ , мм	$\Delta X$ , мм
1	Совмещенная	УДС2М-35	70	7	65	23	27	27
	Раздельная	УДС2-РДМ-33	45	-	-	-	-	29
2	Совмещенная	УДС2М-35	70	7,5	69	16	21	21
	Раздельная	УДС2-РДМ-33	45	-	-	-	-	22
3	Совмещенная	УДС2М-35	70	-	-	28	12	27
	Раздельная	УДС2-РДМ-33	45	-	-	-	-	30
4	Совмещенная	УДС2М-35	70	-	-	27	15	38
	Раздельная	УДС2-РДМ-33	45	-	-	-	-	43
5	Совмещенная	УДС2М-35	70	8	81	-	-	-
	Раздельная	УДС2-РДМ-33	45	-	-	-	-	9

\* – параметр определяется при помощи преобразователя с углом ввода  $0^\circ$ ;

\*\* – параметр определяется путем измерения протяженности повреждения поверхности катания на основании данных, полученных при измерении параметра  $H$ .

На рисунке 4 представлены результаты контрольных доломов фрагментов рельсов.

Опираясь на информацию, опубликованную в [2, 3], касающуюся принципов регистрации сигналов от горизонтальных расслоений различной глубины и протяженности с использованием схемы «ЗМЕЙКА» ( $\alpha = 55^\circ$ ,  $\gamma = 34^\circ$ ), а также с учетом особенностей озвучивания различно ориентированных дефектов преобразователями с углом ввода  $70^\circ$ , при анализе фрагментов дефектограмм 16-ти коротко-

мерных рельсов, испытанных на гидравлическом прессе в 2015 году, а также 5-ти короткомерных рельсов, испытанных в 2016 году, установлено следующее:

1) даже при отсутствии под горизонтальным расслоением поперечных трещин на дефектограмме в каналах 3, 6 и 8 могут присутствовать сигналы, временное положение которых указывает на наличие дефекта II группы. Это обстоятельство обусловлено такими факторами, как отражение УЗ-волны от диффузных краев горизонтального расслоения, многократного отражения УЗ-волны в пределах границ «расслоение – поверхность катания», неровностями горизонтального расслоения и другими факторами;

2) при сравнении с дефектограммами предыдущих проходов данные сигналы могут присутствовать в тех же временных зонах на каждой из них;



Рисунок 4. – Результаты контрольных доломов рельсов

3) зона контроля 55-градусных преобразователей в схеме контроля дефектоскопа УДС2-РДМ-22 составляет 130 мм (ближняя зона – 14...38 мм, средняя зона – 39...70 мм, дальняя зона – 70...130 мм). Так как сигналы от горизонтальных расслоений находились в диапазоне глубин от 55 до 70 мм (в зависимости от глубины расслоения, типа рельса и его вертикального износа), а сигналы от дефектов, поражение головки которыми составило более 50%, были зарегистрированы на глубинах от 40 до 55...60 мм, можно сделать вывод о том, что в процессе анализа дефектограмм дефектных сечений, на которых присутствуют поверхностные повреждения, инженером по расшифровке в первую очередь должны рассматриваться сигналы, временное положение которых находится в диапазоне от 40 до 60 мм. Наличие сигнала в этой зоне может указывать на развитый поперечный дефект головки рельса;

4) на двухпутных участках, где движение поездов по каждому из путей производится преимущественно в одном направлении, характерно развитие поперечных дефектов головки рельса под углом (относительно нормали) в диапазоне, как правило, от 0° до 20° (следует отметить, что отклонение развитого дефекта от нормали в образце № 1 составило 39°, что является скорее исключением).

Особенность развития подобных дефектов заключается в том, что нижний край трещины направлен по ходу движения подвижного состава, навстречу движению съемным дефектоскопом. В этом случае затрудняется его регистрация схемой «ЗМЕЙКА» (возможно получение незначительных пачек сигналов, интенсивность которых будет минимальна). Наиболее продуктивно данные дефекты выявляются каналами 2 и 7 (схема прозвучивания УДС2-РДМ-22), когда УЗ-волна озвучивает плоскость поперечной трещины, к тому же чем больше наклон в диапазоне от 0° до 20°, тем эффективнее 70-градусные преобразователи регистрируют данный дефект.

Существуют два варианта регистрации подобных дефектов 70-градусными преобразователями, входящими в схему прозвучивания дефектоскопа УДС2-РДМ-22:

– в случае если поперечный дефект головки рельса не имеет или имеет незначительный наклон относительно нормали, а его плоскость преимущественно зеркальная относительно длины волны, то регистрация может иметь вид, изображенный на рисунке 5. Откуда видно, что 7-м каналом зарегистрировано 2 сигнала с максимумами на глубине 29 и 13 мм. В данном случае данные пачки сигналов отно-

сятся к одному дефекту, озвученному краями трещины. При этом уровень превышения сигналом порога срабатывания звуковой индикации может быть незначительным;

– при значительном отклонении плоскости дефекта от нормали она практически полностью озвучивается 70-градусным преобразователем, в результате чего на дефектограмме будет присутствовать значительная по протяженности пачка сигналов;

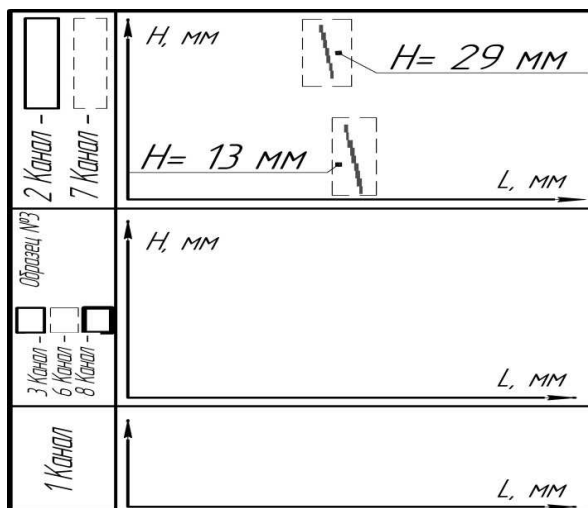


Рисунок 5. – Фрагмент дефектограммы дефекта сварного стыка

5) анализ сигналов, зарегистрированных 2-м каналом, необходимо производить в режиме «сведение». В первую очередь на вторичный контроль должны выдаваться дефектные места, в которых сигналы 70-градусными преобразователями зарегистрированы до пропадания донного сигнала (до поверхностного повреждения).

6) комплексный анализ дефектограмм как способ достоверного определения наличия поперечных дефектов головки рельса целесообразен в случаях отсутствия поверхностных повреждений.

При контроле образцов ультразвуковыми дефектоскопами УДС2-РДМ-33 и УДС2М-35 установлено:

– поперечные дефекты в образцах 1...4 зарегистрированы как преобразователями, включенными по раздельной схеме, так и преобразователями, включенными по совмещенной схеме;

– условные размеры дефектов, зарегистрированных по результатам контроля, зависят в первую очередь от качества настройки и типа конкретных факторов, таких как ориентация дефекта, профиль рельса в контролируемом сечении и т.д. Следует отметить, что результаты измерений в рамках проводимых испытаний с использованием различных дефектоскопов приблизительно совпадают и подтверждают наличие поперечных дефектов;

– одной из выявленных особенностей регистрации поперечных дефектов преобразователями с углом ввода  $70^\circ$  является то, что постановка данного преобразователя на границе горизонтального расслоения в отдельных случаях не исключает озвучивания поперечного дефекта, находящегося под этим расслоением, одним из фронтов УЗ-волны;

– исходя из результатов контроля образца № 2, имеющего боковой износ, равный 7 мм, можно сделать допущение о возможности использования зеркального метода (К-метода) как метода, позволяющего проводить контроль рельсов, имеющих боковой износ. В данном случае излучатель должен быть установлен со стороны, противоположной износу, а приемник – непосредственно на место износа. Данное допущение требует дальнейшего практического подтверждения в виду отсутствия обширной выборки по предложенному способу;

– с целью определения наиболее эффективных схем контроля и повышения его эффективности, для дефектоскопирования рельсов, пораженных дефектом кода 11.2 (выкрашивание металла боковой рабочей выкружки рельса), целесообразно экспериментальное (дополнительный проход) использование дефектоскопов УДС2-РДМ-22 с разворотом вставок каналов 2, 7 на  $10...14^\circ$  относительно продольной оси рельса в рабочую грань. Подтверждение наличия дефектов, обнаруженных данной схемой, необходимо проводить с использованием ручных преобразователей, включенных по различным схемам.

Ввиду того что использование преобразователей (как лыжных, так и ручных), включенных по совмещенной схеме, не дало результатов при контроле образца № 5, требуется проводить контроль



с использованием отдельных методов. Использование К-метода позволило выявить дефект II группы (поперечные трещины в головке рельса) на стадии зарождения. Особенностью использования данного метода при контроле образца № 5 является то, что сигнал от поперечного дефекта был получен при развороте преобразователей на угол, приблизительно равный  $10^\circ$ .

Результаты контроля образцов рельсов отражены в рекомендациях, которые выпущены в виде методического материала, используемого в ходе проведения технических занятий с операторами дефектоскопов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Довгяло, Д. А. Особенности и принципы выявления дефектов головки железнодорожного рельса / Д. А. Довгяло, А. В. Шляхтенок // Электронный сборник трудов молодых специалистов Полоцкого государственного университета. – 2016. – Выпуск 15 (85), Промышленность. Информационные технологии. Машиностроение. – С. 150–154.
2. Марков, А.А. Дефектоскопия рельсов. Формирование и анализ сигналов / А. А. Марков, Е. А. Кузнецова. – СПб. : Ультрапринт, 2014. – 332 с.
3. Александрова, С. Б. Ультразвуковая дефектоскопия : учеб.-метод. комплекс / С. Б. Александрова. – Барановичи : ДЦППК-2, 2008. – 205 с.

Поступила 20.09.2017

#### IMPROVEMENT OF METHODS FOR ULTRASOUND CONTROL

A. SHLIAHTENOK, D. DAUHIALA

*The most actual problem of rail flaw detection – the problem of detecting transverse defects that propagates under the longitudinal spallings is considered. The ultrasonic testing of rails samples as well as analysis of the obtained data and control brakes of defective rails that aimed to confirm the results of the inspection have been carried out. Based on the analysis of the data obtained, practical conclusions and recommendations aimed to improving the effectiveness of control have been developed.*

**Keywords:** *ultrasonic flaw detection, industrial diagnostics, ultrasonic sensor, defect detection, nondestructive testing, echo method, ultrasonic phased arrays, diffraction-time method.*

УДК 546.28:621.315.592

## СТРУКТУРНЫЕ И ОПТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИЛИКАТНОГО СТЕКЛА, ИМПЛАНТИРОВАННОГО ИОНАМИ МЕДИ

**В.И. ГОЛОВЧУК**, канд. физ.-мат. наук **А.А. ХАРЧЕНКО**,  
канд. физ.-мат. наук **Д.И. БРИНКЕВИЧ**, д-р физ.-мат. наук **М.Г. ЛУКАШЕВИЧ**  
(Белорусский государственный университет, Минск);  
канд. физ.-мат. наук, доц. **С.А. ВАБИЩЕВИЧ**, **Н.В. ВАБИЩЕВИЧ**  
(Полоцкий государственный университет, Новополоцк)

Методами атомно-силовой микроскопии, склерометрии, индентирования, измерения спектров отражения и пропускания исследовано углеродсодержащее силикатное стекло, имплантированное ионами меди. Показано, что имплантация  $\text{Cu}^+$  приводит к появлению на поверхности стекла конусообразных структур и увеличению шероховатости. Наблюдается также снижение измеренной методом индентирования микротвердости и изменение формы отпечатков, что обусловлено процессами радиационной деструкции за областью пробега ионов. Обнаружена немонотонная зависимость поверхностного плазмонного резонанса (ППР) от дозы имплантации. ППР максимально проявляется в образце с дозой  $7,5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ , это обусловлено тем, что медь формирует в стекле близкие к сферическим наночастицы с резкими границами. Увеличение дозы имплантации приводит к размытию границ наночастиц, что ухудшает условия возникновения ППР.

**Ключевые слова:** силикатное стекло, ионная имплантация, склерометрия, индентирование, атомно-силовая микроскопия, спектры отражения и пропускания.

**Введение.** Имплантированные ионами  $\text{Cu}^+$  стекла представляют большой практический интерес для создания нелинейных оптических комбинированных устройств [1, 2], оптических переключателей с ультракоротким временным откликом и оптических ограничителей интенсивности лазерного излучения [3]. При имплантации ионов металла в формирующихся в диэлектрической матрице металлических наночастицах возможно коллективное возбуждение электронов проводимости (поверхностный плазмонный резонанс) и вызванное им резонансное усиление локального поля, что стимулирует различные резонансные оптические и нелинейно-оптические эффекты в широком спектральном диапазоне [2, 3]. В настоящей работе методами склерометрии, индентирования, атомно-силовой микроскопии (АСМ), измерения спектров отражения и пропускания исследованы пленки углеродсодержащего силикатного стекла, имплантированного ионами меди.

**Методика эксперимента.** В работе исследовалось углеродсодержащее силикатное стекло с высокой оптической прозрачностью  $\sim 90\%$  в спектральном диапазоне 300–1100 нм. В таблице 1 представлены результаты измерения элементного состава приповерхностного слоя стеклянной пластинки методом рентгеноспектрального микроанализа с помощью растрового электронного микроскопа LEO – 1455 VP с областью микрозондирования около 5 мкм и погрешностью определения концентрации, не превышающей 10%. Имплантация ионами меди  $\text{Cu}^+$  с энергией 40 кэВ в интервале доз  $2,5 \cdot 10^{16}$ – $1,0 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$  в режиме постоянного ионного тока (плотность ионного тока 2–4 мкА/см<sup>2</sup>) проводилась при комнатной температуре в остаточном вакууме (не хуже  $10^{-5}$  Па) на ионно-лучевом ускорителе ИЛУ-3. С целью исключения перегрева образцы крепились на массивную охлаждаемую водой металлическую площадку.

Таблица 1. – Химический состав приповерхностного слоя силикатного стекла

Химический элемент	O	Si	C	Na	K	Zn	Al	Ti	Cu
Концентрация, вес. % исходный	48,8	23,5	12,8	4,8	4,2	2,4	1,9	1,6	–
Концентрация, вес. % имплантированный	47,1	25,8	10,7	5,5	4,0	2,7	1,8	1,4	0,7
Погрешность, вес. %	0,8	0,4	1,1	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

Спектры отражения и пропускания силикатного стекла регистрировались в диапазоне 210–1100 нм однолучевым спектрофотометром *PROSKAN MC-122* при комнатной температуре с разрешением не хуже 1 нм. Измерение спектров отражения проводилось с помощью приставки для измерения зеркального отражения, позволяющей изменять углы падения от 15° до 90°. Перед каждым измерением производилась калибровка – измерение интенсивности света  $I_{ко}$ , проходящего через диафрагму, без исследуемых объектов при нормальном падении света по отношению к диафрагме во всем изучаемом диапазоне длин волн. Световой поток регулировался посредством заменяемых диафрагм с разной площадью пропускного отверстия. После калибровки исследуемый образец закреплялся на обратной (неосвещаемой) стороне диафрагмы и измерялась интенсивность отраженного света  $I_{оо}$  в исследуемом диапазоне длин волн. Коэффициент отражения вычисляется автоматически спектрофотометром как  $R = I_{оо} / I_{ко}$ . Спектры отражения регистрировались при углах падения и отражения 20° к нормали.

Исследование прочностных свойств стекла проводилось при комнатной температуре на приборе ПМТ-3 методами индентирования и склерометрии. Нагрузка ( $P$ ) на индентор варьировалась в пределах 1–50 г. Склерометрия осуществлялась царапанием ребром четырехгранной алмазной пирамиды с квадратным основанием в оправе типа НПМ и углом при вершине  $\alpha = 136^\circ$  согласно ГОСТ 9377-81. Скорость движения индентора варьировалась в диапазоне 40–120 мкм/с. Наносилось не менее 7 канавок при каждой нагрузке и скорости движения индентора, а затем измерялась их ширина. Значения склерометрической микротвердости  $H_{\square}^{скл}$  вычислялись в соответствии с ГОСТ 21318-75 по средней ширине канавок [4]. Измерения микротвердости  $H^m$  методом микроиндентирования проводились этой же пирамидой по восстановленному отпечатку с использованием стандартной методики согласно ГОСТ 9450-76. При каждом измерении на поверхность образца наносилось не менее 50 отпечатков и проводилась обработка результатов измерений с использованием методов математической статистики по методике, изложенной в [5].

Морфология поверхности исходной и модифицированной имплантацией поверхности стеклянной пленки исследовалась методом атомно-силовой микроскопии при комнатной температуре в полуконтактном резонансном режиме на частоте 145 кГц прибором Solver P47HT-МДТ. Использовались кантилеверы серии NSG 01 с радиусом закругления 10 нм. Величина шероховатости поверхности  $R_a$  определялась как среднее арифметическое значение высоты микронеровностей, измеренное от средней линии профиля (по модулю) в пределах заданной длины по проведенным не менее пяти раз измерениям на одном образце диаметром 5 мм.

**Экспериментальные результаты и их обсуждение.** Характерные АСМ-изображения в режиме топографии и фазового контраста поверхности силикатного стекла, исходного и подвергнутого имплантации ионами  $Cu^+$ , приведены на рисунках 1 и 2. Поверхность необлученного стекла гладкая – «волнистость» не превышает 5–10 нм (рисунок 1, *а*). На этом фоне наблюдаются отдельные пики диаметром в основании 0,3–2,0 мкм и высотой до 200 – 300 нм, плотность которых составляла от 2 до 5 штук на площади 20×20 мкм (рисунок 1, *б*). Значения среднеарифметической шероховатости ( $R_a$ ), усредненные по результатам не менее чем 10 измерений в различных точках образца, составляли  $R_a = 14,5$  нм при дисперсии  $\Delta R_a = 6,2$  нм.

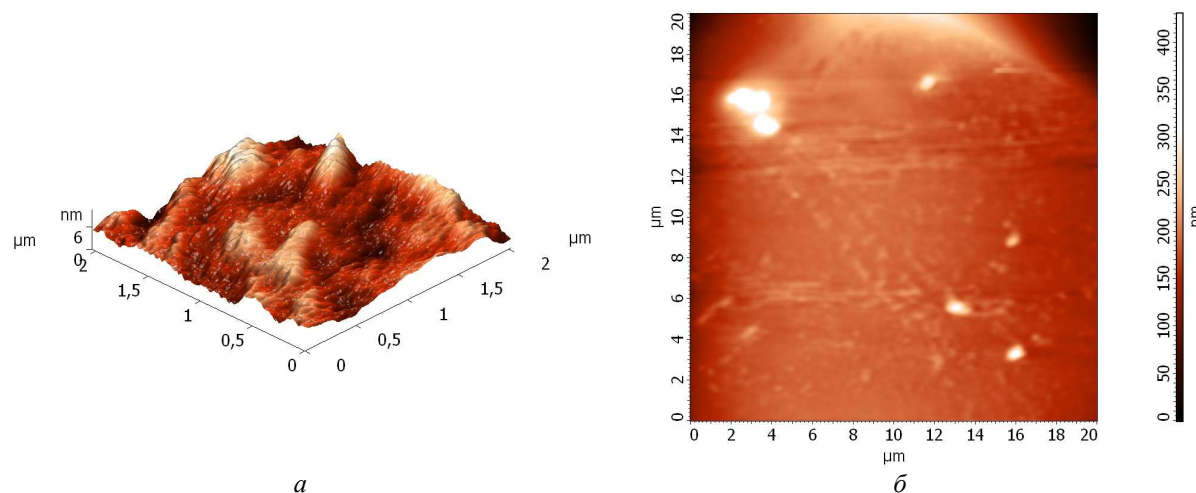


Рисунок 1. – Характерные АСМ-изображения исходного стекла в режимах топографии (*а*) и фазового контраста (*б*)

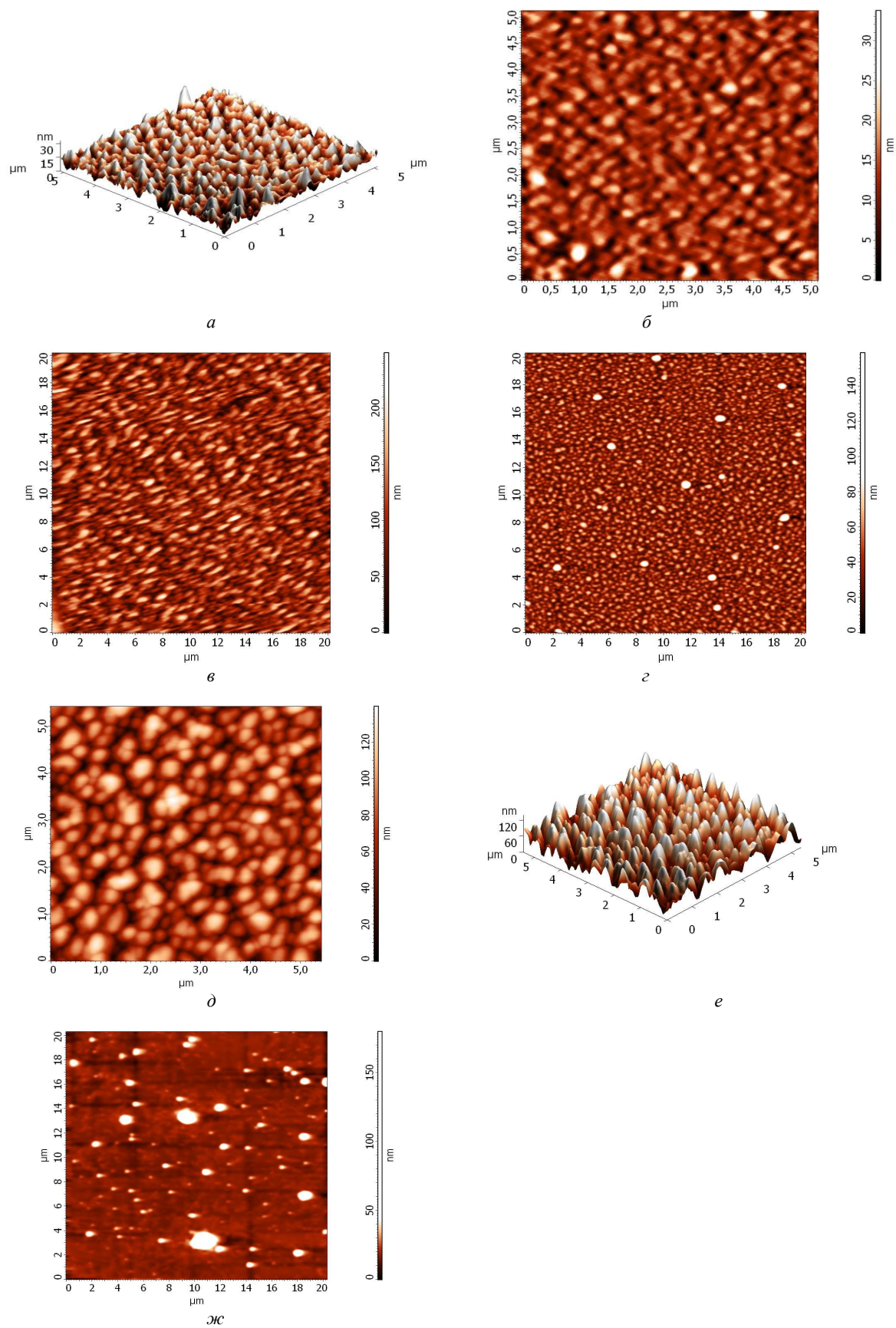


Рисунок 2. – Характерные АСМ-изображения имплантированного стекла в режимах топографии (*a, e*) и фазового контраста (*б–д, ж*). Доза имплантации  $\Phi \cdot 10^{16}$ ,  $\text{см}^{-2}$ : 2 – *a, б*; 5 – *в*; 7,5 – *г*; 10 – *д–ж*.  
Изображения снимались с имплантированной (*a–e*) и неимплантированной (*ж*) стороны

Имплантация  $\text{Cu}^+$  приводит к появлению на поверхности стекла конусообразных структур (рисунок 2, а) и увеличению шероховатости поверхности (таблица 2). В отличие от исходного образца эти структуры равномерно распределены по поверхности стекла и полностью заполняют все поле измерения (рисунок 2, б). Среди них преобладают достаточно крупные структуры с диаметром в основании  $\sim 100\text{--}150$  нм и высотой до 50 нм. Увеличение дозы имплантации приводит к росту диаметра основания конусообразных структур (до  $500\text{--}700$  нм для отдельных структур) и, соответственно, к снижению их количества. Наблюдался также существенный рост (таблица 2) среднеарифметической шероховатости  $R_a$  поверхности при дозах имплантации свыше  $5 \cdot 10^{16}$   $\text{см}^{-2}$ .

Таблица 2. – Шероховатость имплантированного ионами меди стекла

Доза имплантации $\Phi$ , $\text{см}^{-2}$		Среднеарифметическая шероховатость $R_a$ , нм	Высота максимального пика, нм
исходный		14,5	44
$2 \cdot 10^{16}$		21,6	47,3
$5 \cdot 10^{16}$		91	188
$7,5 \cdot 10^{16}$		50	133
$10 \cdot 10^{16}$	Имплантированная сторона	72	140
	Обратная сторона	16,5	83

Отметим, что изменения морфологии поверхности стекла наблюдались не только на имплантированной, но и на обратной стороне пластин (рисунок 2, д, ж). На неимплантированной (обратной) стороне возникали отдельные пики высотой до  $80\text{--}100$  нм и диаметром в основании от  $0,1$  до  $2$  мкм, схожие с пиками на поверхности исходного образца (рисунок 2, ж). Однако их плотность в десятки раз увеличилась по сравнению с исходным: с  $2\text{--}5$  шт. на площади  $20 \times 20$  мкм в исходном до  $50\text{--}80$  шт. на той же площади имплантированного медью образца (рисунки 1, б и 2, ж).

Конусообразные структуры на поверхности при различных видах имплантации наблюдались ранее [6–10] в различных стеклообразных полимерах (полиэтилентерефталат, полиимид, полиэфирэфиркетон и др.) и были обусловлены выходом к поверхности имплантированного слоя при дозах имплантации свыше  $3 \cdot 10^{16}$   $\text{см}^{-2}$  [9, 10]. Отметим также, что выход к поверхности металлических наночастиц наблюдался ранее в работах [11, 12] случае имплантации кварцевого стекла ионами меди и серебра с энергией  $30\text{--}40$  эВ при дозе  $5 \cdot 10^{16}$   $\text{мкА} / \text{см}^2$ . Этот эффект в углеродсодержащих стеклах связан как с испарением атомов матрицы в процессе имплантации, так и с интенсивным выходом газообразных продуктов в виде молекул  $\text{O}_2$ ,  $\text{CO}$  и  $\text{CO}_2$ , образующихся при внедрении ионов меди вследствие разрыва химических связей в стекле. Об этом свидетельствует снижение концентрации кислорода и углерода в стекле после имплантации (таблица 1). Причем, вероятнее всего, газовыделение идет преимущественно в виде молекул  $\text{CO}$ , поскольку концентрации углерода и кислорода при имплантации снижаются примерно одинаково (таблица 1). По мнению авторов [7, 10, 13–14], наблюдаемые при имплантации изменения морфологии обратной (неимплантированной) поверхности стеклообразной пленки обусловлены релаксацией упругих напряжений, образовавшихся в процессе изготовления в приповерхностном слое. Эти выводы, по нашему мнению, применимы и для объяснения экспериментальных результатов (рисунок 2, ж), полученных в настоящей работе.

При  $\Phi = 5 \cdot 10^{16}$   $\text{см}^{-2}$ , когда имел место выход к поверхности стекла наночастиц меди, наблюдалось резкое увеличение среднеарифметической шероховатости. Это позволило оценить форму указанных наночастиц по изображениям АСМ. Согласно рисунку 2, в при дозе  $5 \cdot 10^{16}$   $\text{см}^{-2}$  форма этих частиц эллипсообразная. При увеличении дозы до  $7,5 \cdot 10^{16}$   $\text{см}^{-2}$  частицы приобретают форму близкую к сферической с четкими границами (рисунок 2, з), которые размываются при  $\Phi = 10 \cdot 10^{16}$   $\text{см}^{-2}$  (рисунок 2, д).

Зависимости микротвердости  $H^n$ , измеренной методом индентирования, от нагрузки  $P$  для исходного и имплантированных  $\text{Cu}^+$  образцов представлены на рисунке 3. В исходном образце отпечатки бочковидные, что указывает на наличие в приповерхностной области напряжений растяжения. Вокруг отпечатков изредка наблюдаются небольшие трещины, отслоения, микропузыри. В отличие от кристаллических материалов (например, полупроводников [15, 16]) приповерхностное упрочнение отсутствует. При увеличении нагрузки микротвердость слабо растет (рисунок 3, кривая 1), что свидетельствует о модификации (упрочнении) структуры под воздействием давления, оказываемого индентором.

Ионная имплантация приводит к снижению микротвердости  $H^n$  во всем диапазоне нагрузок (рисунок 3, кривые 2–4) и изменению формы отпечатков – они становятся вогнутыми, что свидетельствует об изменении знака сил, действующих на отпечаток. Силы становятся сжимающими. Наблюдалась немонотонная зависимость микротвердости  $H^n$  от дозы имплантации: микротвердость образца с  $\Phi = 7,5 \cdot 10^{16}$   $\text{см}^{-2}$  (рису-

нок 3, кривая 3) была несколько выше, чем при дозах  $5,0 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$  и  $10 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$  (рисунок 3, кривые 2 и 4). Отметим, что эти данные коррелируют с измерениями шероховатости (таблица 2).

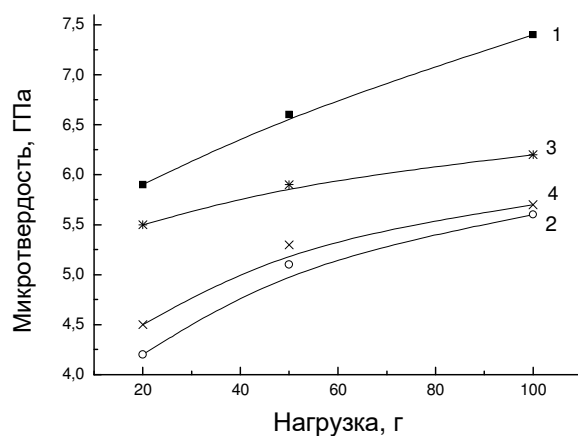


Рисунок 3. – Зависимости микротвердости  $H^n$  от нагрузки  $P$  для исходного (1) и имплантированных ионами  $\text{Cu}^+$  (2-5) образцов силикатного стекла. Доза  $\Phi \cdot 10^{16}, \text{ см}^{-2}$ : 2 – 5,0; 3 – 7,5; 4 – 10

Таковую же немонотонную зависимость от  $\Phi$  показывают и измерения склерометрической микротвердости  $H_{\square}^{\text{скл}}$ , приведенные в таблице 3. Отметим, что  $H_{\square}^{\text{скл}}$  была выше, чем  $H^n$ , измеренная методом индентирования, поскольку определялась при меньших нагрузках и, соответственно, при меньшей глубине проникновения индентора. Так, глубина проникновения индентора при нагрузке 100 г составляла 2,3–2,5 мкм; при 20 г – 1,1–1,2 мкм, а при измерении  $H_{\square}^{\text{скл}}$  она не превышала 0,35 мкм, что близко к глубине нарушенного имплантацией приповерхностного слоя. Значит, на величину  $H_{\square}^{\text{скл}}$  основное влияние оказывает имплантированный слой, в то время как при индентировании существенно влияние «запробежной» области. Полученные результаты указывают на протекание радиационно-химических процессов не только в области имплантации, но и за область пробега ионов, причем характер этих процессов существенно различается. В области имплантации микротвердость возрастает, а за пробегом ионов она снижается. Эффект упрочнения приповерхностной области при имплантации связан с формированием наночастиц меди, а разупрочнение «запробежной» области обусловлено процессами радиационной деструкции за область пробега ионов [17, 18].

Изменение свойств стекла на глубинах, значительно превышающих проецируемый пробег ионов, невозможно объяснить эмиссией вторичных электронов, образующихся при электронном торможении имплантируемых ионов, поскольку они не способны модифицировать стекло на глубине, существенно превышающей 0,1 мкм. В стеклах эмиссия вторичных электронов очень мала и ограничена областью в  $\sim 10 \text{ нм}$  [19, 20]. Уменьшение микротвердости  $H^n$  в процессе высокоэнергетического воздействия обусловлено химической модификацией структуры стекла, в частности деструкцией химических связей, вследствие передачи энергии из области пробега ионов. Прямое воздействие ионов на стекло, а также нейтрализация разноименно заряженных ионов и рекомбинация свободных радикалов в треке иона приводят к образованию молекул в возбужденном состоянии. Перенос возбуждения может происходить на значительные расстояния вглубь стекла. По данным [20], энергия возбуждения может передаваться на расстояние до 5–10 мкм, поэтому деструкция в объеме стекла, обеспечивающая снижение микротвердости, может происходить в реакциях с участием возбужденных частиц. Не следует также исключать возможность воздействия на физико-механические свойства стекла наведенного в приповерхностной области заряда, созданного облучением заряженными частицами [21, 22].

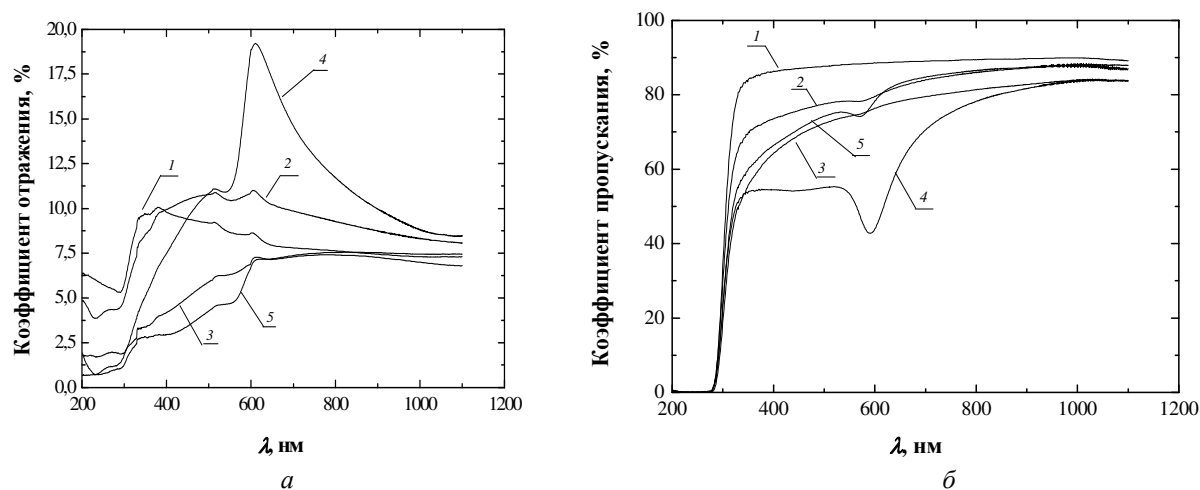
Таблица 3. – Склерометрическая микротвердость  $H_{\square}^{\text{скл}}$ , измеренная при нагрузке 2 г

Образец	Исходный	Имплантированные дозы $\Phi \cdot 10^{16}, \text{ см}^{-2}$			
		2,5	5,0	7,5	10
$H_{\square}^{\text{скл}}, \text{ ГПа}$	5,5	10	12	20	8,2



На рисунке 4 приведены спектральные зависимости коэффициентов пропускания и отражения силикатного стекла, имплантированного ионами меди. В исходном образце коэффициент пропускания близок к 0,9 в диапазоне длин волн от 300 до 1100 нм. Имплантация приводила к снижению прозрачности стекла вблизи края поглощения в диапазоне волн 300–900 нм (рисунок 4, б) и снижению коэффициента отражения в области непрозрачности – 200–300 нм (рисунок 4, а), что может быть обусловлено как формированием в приповерхностной области металлосодержащих частиц, так и перестройкой структуры стекла при имплантации.

Кроме того, в спектрах пропускания и отражения имплантированных образцов появляется широкая селективная полоса с максимумом вблизи 600 нм, которая наиболее сильно проявляется при  $\Phi = 7,5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ . Аналогичные полосы в спектрах пропускания наблюдались ранее при имплантации ионами  $\text{Cu}^+$  и  $\text{Ag}^+$  халькогенидных стеклообразных полупроводников  $\text{As}_2\text{S}_3$  и  $\text{Ge}_{15,8}\text{As}_{21}\text{S}_{63,2}$  [2], кварцевого стекла [1, 11, 23],  $\text{ZnO}$  [24] и стеклообразных полимеров [25]. Максимум указанной полосы зависит от исходной матрицы и для имплантации ионов меди в стеклянную матрицу находится в диапазоне длин волн от 560 до 600 нм [3]. Авторы [11, 23] связывали данную полосу с проявлением эффекта поверхностного плазмонного резонанса в металлических наночастицах, сформированных в матрице при имплантации, что также подтверждалось расчетными спектрами Ми-резонансов.



**Рисунок 4. – Спектральные зависимости коэффициентов отражения (а) и пропускания (б) силикатного стекла исходного (1) и имплантированного ионами меди (2–5) с энергией 40 кэВ при падении света на имплантированную поверхность. Доза  $\Phi, \text{см}^{-2}$ : 2 –  $2,5 \cdot 10^{16}$ ; 3 –  $5 \cdot 10^{16}$ ; 4 –  $7,5 \cdot 10^{16}$ ; 5 –  $1 \cdot 10^{17}$**

Поверхностный плазмонный резонанс наблюдался нами как в спектрах пропускания (рисунок 4, б), так и отражения (рисунок 4, а). Было отмечено проявление ППР с немонотонной зависимостью от дозы имплантации. Максимальный эффект наблюдался в образце с дозой  $7,5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$  и незначительный в остальных имплантированных медью образцах. Такое поведение поверхностного плазмонного резонанса с ярко выраженным при дозе  $7,5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$  максимумом может быть объяснено следующим образом.

Наночастицы меди формируются при превышении концентрации атомов  $\text{Cu}$  в стекле равновесного значения растворимости, что наблюдается в области торможения ионов меди. Процесс торможения сопровождается деионизацией  $\text{Cu}^+$  в матрице стекла и образованием атомов меди  $\text{Cu}^0$ . Атомы меди могут образовывать химические связи с возникающими радикалами и ионами стекла либо участвовать в процессах окиссации. Однако вследствие различий в величинах свободных энергий Гиббса преимущественно формируются связи  $\text{Cu}-\text{Cu}$ , что приводит к появлению кластеров, состоящих из нескольких атомов меди и служащих впоследствии центрами зарождения наночастиц  $\text{Cu}$  [1]. Чем выше концентрация атомов меди в матрице, тем больше размер наночастиц. При имплантации наиболее крупные наночастицы формируются вблизи максимума профиля распределения примеси по глубине, т.е. проецированного пробега  $R_p$  ионов. Зарождение наночастиц начинается при дозах свыше  $1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$  [1]. При высокодозной имплантации тяжелых ионов максимум распределения примеси по глубине смещается к поверхности образца вследствие эффекта распыления атомов поверхности мишени [1] и при определенной дозе наночастицы могут выходить к поверхности, что и наблюдалось в наших экспериментах по измерению АСМ.

Аналогичный эффект наблюдался в [11], где отмечалось, что морфология поверхности имплантированного  $\text{Cu}^+$  и  $\text{Ag}^+$  силикатного стекла характеризуется наличием полусферических образований, обу-

словенных частичным обнажением сферических наночастиц металлов на поверхности, со средним размером 5–10 нм. При этом авторы отмечают, что выход металлических наночастиц к имплантированной поверхности согласуется с появлением в оптическом спектре поглощения поверхностного плазмонного резонанса. Кроме того, выход к поверхности наночастиц наблюдался и в случае имплантации кварцевого стекла ионами  $\text{Ag}^+$  с энергией 30 эВ при дозе  $5 \cdot 10^{16}$  мкА/см<sup>2</sup> и плотностями тока в ионном пучке 4–15 мкА/см<sup>2</sup> [12]. В этом случае эффект ППР был ярко выражен. Таким образом, анализ полученных АСМ изображений позволяет оценить размеры и форму синтезированных ионной имплантацией наночастиц меди. Как отмечалось выше, проведенные измерения АСМ показывают, что медь формирует в стекле близкие к сферическим наночастицы с резкими границами при дозе  $7,5 \cdot 10^{16}$  см<sup>2</sup> (рисунок, 2, з). Эти условия оптимальны для проявления ППР. Увеличение дозы имплантации приводит к размытию границ наночастиц, что ухудшает условия возникновения ППР (рисунок, 2, д). При более низких  $\Phi$  форма наночастиц далека от сферической (рисунок, 2, в), что также не способствует проявлению ППР.

**Заключение.** Таким образом, установлено, что в процессе имплантации ионов  $\text{Cu}^+$  происходит модификация морфологии поверхности, выражающаяся в формировании конусообразных структур и увеличении шероховатости поверхности. Процессы радиационного разупрочнения при ионной имплантации протекают далеко за областью проецированного пробега ионов меди и обусловлены процессами радиационной деструкции. Обнаружена немонотонная зависимость поверхностного плазмонного резонанса от дозы имплантации. Он был максимален в образце с  $\Phi = 7,5 \cdot 10^{16}$  см<sup>2</sup>. Это обусловлено тем, что при указанной дозе медь формирует в стекле близкие к сферическим наночастицы с резкими границами. Увеличение дозы имплантации приводит к размытию границ наночастиц, что ухудшает условия возникновения ППР.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов, А. Л. Особенности синтеза металлических наночастиц в диэлектрике методом ионной имплантации / А. Л. Степанов // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия «Физика твердого тела». – 2003. – № 1. – С. 82–88.
2. Оптические свойства халькогенидных стекол с ионно-имплантированными наночастицами меди / Т. С. Кавецкий [и др.] // Письма в ЖТФ. – 2012. – Т. 38, № 23. – С. 11–18.
3. Нелинейный оптический отклик свойства халькогенидных стекол с ионно-имплантированными наночастицами серебра и меди в ближнем ультрафиолетовом спектральном диапазоне / Р.А. Ганеев [и др.] // Физика твердого тела. – 2004. – Т. 46, № 2. – С. 341–346.
4. Склерометрический метод измерения микротвердости пленок фоторезиста на кремнии / Д. И. Бринкевич [и др.] // Приборы и методы измерений. – 2016. – Т. 7, № 1. – С. 77–84.
5. Бринкевич, Д. И. Микромеханические свойства эпитаксиальных слоев GaP, легированных редкоземельным элементом диспрозием / Д. И. Бринкевич, Н. В. Вабищевич, В. С. Просолович // Неорганические материалы. – 2012. – Т. 48, № 8. – С. 878–883
6. Харченко, А.А. Формирование низкоразмерных структур на полимерной пленке фокусированным ионным пучком / А. А. Харченко [и др.] // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 2. – С. 29–31.
7. Модификация поверхности позитивного фоторезиста при ионной имплантации / Д. И. Бринкевич [и др.] // Микроэлектроника. – 2015. – Т. 44, № 6. – С. 448–452.
8. Модификация приповерхностной области пленки полиимида имплантацией ионов бора / А. А. Харченко [и др.] // Поверхность. – 2015. – № 1. – С. 94–99.
9. Радиационная модификация поверхности области пленки полимеров / А. А. Харченко [и др.] // Поверхность. – 2015. – № 1. – С. 94–99.
10. Исследования поверхности полимеров модифицированной радиационной обработкой / А. А. Харченко [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2013. – № 12. – С. 83–88.
11. Nonlinear optical susceptibilities of copper- and silver-doped silicate glasses in the ultraviolet range / R. A. Ganeev [et al.] // Phys. Stat. Sol. B. – 2003. – V. 238. – P. R5–R7.
12. Nanostructuring of silicate glass under low-energy Ag-ion implantation / A. L. Stepanov, V. N. Popok // Surf. Sci. – 2003. – V. 566–568, Part 2. – P. 1250–1254.
13. Пленки полиимида, имплантированные ионами бора / А. А. Харченко [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2014. – № 4. – С. 113–118.
14. Исследование поверхности пленок из полиэтилентерефталата, модифицированных вакуумно-ультрафиолетовым облучением на воздухе / А. В. Митрофанов [и др.] // Поверхность. – 2009. – № 7. – С. 30–38.
15. О распределении величины микротвердости по глубине образца / Герасимов А.Б. [и др.] // Физика твердого тела. – 1999. – Т. 41, № 7. – С. 1225–1227.



16. Вабищевич, С. А. Подавление радиационного упрочнения кремния, легированного германием / С. А. Вабищевич, Н. В. Вабищевич, Д. И. Бринкевич // Физика и химия обработки материалов. – 2006. – № 4. – С. 12–14.
17. Ионная имплантация позитивных фоторезистов / Д. И. Бринкевич [и др.] // Микроэлектроника. – 2014. – Т. 43, № 3. – С. 193–199.
18. Вабищевич, Н. В. Микроиндентирование структур фотополимер-кремний / Н. В. Вабищевич [и др.] // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2011. – № 4. – С. 77–83.
19. Экспериментальные методы химии высоких энергий / под общ. ред. М. Я. Мельникова. – М. : МГУ, – 2009. – 824 с.
20. Светочувствительные полимерные материалы / под ред. А. В. Ельцова. – Л. : Химия, 1985. – 296 с.
21. Объемный разряд в диэлектрических материалах космических аппаратов при облучении электронами и протонами / Ф. И. Акишин [и др.] // Перспективные материалы. – 2009. – № 3. – С. 12–16.
22. Комплексные исследования эффектов зарядки полимерного резиста (ПММА) при электронной литографии / Э. И. Рау [и др.] // Микроэлектроника. – 2013. – Т. 42, № 2. – С. 116–126.
23. Формирование периодических дифракционных плазмонных наноструктур с имплантированными наночастицами меди методом локального ионного травления кварцевого стекла / Т. С. Кавецкий [и др.] // Письма в ЖТФ. – 2013. – Т. 39, № 13. – С. 17–23.
24. Karali, T. Optical properties and luminescence of metallic nanoclusters in ZnO:Cu / T. Karali [et al.] // Physica B. – 2005. – V. 363. – P. 88–95.
25. Формирование периодической дифракционной структуры на основе полиметилметакрилата с наночастицами серебра методом ионной имплантации / М. Ф. Галяутдинов [и др.] // Письма в ЖТФ. – 2016. – Т. 42, № 4. – С. 30–37.

Поступила 22.09.2017

#### STRUCTURAL AND OPTICAL CHARACTERISTICS OF CARBON-CONTAINING SILICATE GLASS IMPLANTED BY COPPER IONS

V. GOLOVCHUK, A. KHARCHENKO, D. BRINKEVICH, M. LUKASHEVICH,  
S. VABISHCHEVICH, N. VABISHCHEVICH

*Carbon-containing silicate glass implanted with copper ions was studied by methods of atomic force microscopy, sclerometry, indentation, measurement of reflection and transmission spectra. It is shown that the implantation of  $\text{Cu}^+$  leads to the appearance of cone-shaped structures on the glass surface and an increase in the roughness. A decrease in the microhardness measured by the indentation method and a change in the shape of the prints are also observed, which is due to the processes of the radiation destruction beyond the ion range. A nonmonotonic dependence of the surface plasmon resonance (SPR) on the dose of implantation was found. It was maximal in the sample with  $7,5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-2}$ . This is due to the fact that at this dose, copper forms in the glass close to spherical nanoparticles with sharp boundaries. An increase in the dose of implantation leads to blurring of the boundaries of nanoparticles, which worsens the conditions for the appearance of SPR.*

**Keywords:** *silicate glass, ion implantation, sclerometry, indentation, atomic force microscopy, reflection and transmission spectra.*

УДК 548.24

## МЕТОДИКА РАСЧЕТА ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ У ПОЛОС СДВИГА ТИПА ИЗОГНУТЫХ ЛУЧЕЙ У ПОВЕРХНОСТИ АМОРФНОГО МЕТАЛЛА

*А.А. РЮМЦЕВ, канд. физ.-мат. наук О.М. ОСТРИКОВ*  
(Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого)

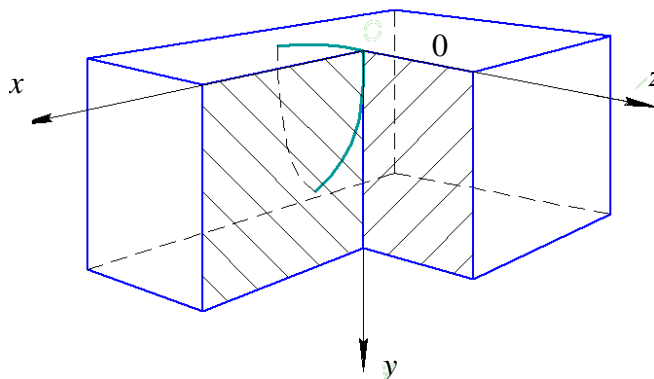
*Предложена методика расчета полей напряжений у полос сдвига типа изогнутых лучей, находящихся у поверхности металлического стекла. Данная методика позволила описать характер распределения напряжений в аморфном материале у полос сдвига типа изогнутых лучей, находящихся у поверхности металлического стекла, при различных законах распределения плотности квазидислокаций. В результате были выявлены вероятные места концентрации наибольших напряжений, где могут зарождаться трещины – необратимые дефекты.*

**Ключевые слова:** *полоса сдвига, металлическое стекло, поля напряжений.*

**Введение.** Дислокационная модель полосы сдвига в аморфном материале, предложенная в [1, 2], позволяет моделировать процесс формирования полос сдвига. Согласно [2], данная теория является базой для создания теории прогнозирования распределения напряжений в аморфном материале. Однако в работах [1–5] не рассматриваются случаи конкретного моделирования деформационного процесса, характеризующегося заданными типами полос сдвига – каналов сдвиговой деформации в аморфных материалах [3], а также плотностью распределения квазидислокаций. К таким типам полос сдвига относятся полосы сдвига типа чешуйчатых навалов, а также типа лучей [2]. В частности, ранее не рассматривался вопрос создания методики расчета полей напряжений у полос сдвига типа изогнутых лучей у поверхности аморфного материала, которая была бы призвана описать характер и общую картину полей напряжений. Данный вопрос очень важен в изучении изменений физических свойств материала при возникновении полос сдвига, а также в самих полосах сдвига. Полученная картина распределения напряжений в металлическом стекле даст возможность прогнозирования тех или иных физических явлений, знание которых позволит определять опасные участки в материале, где с наибольшей вероятностью могут возникать трещины и разломы.

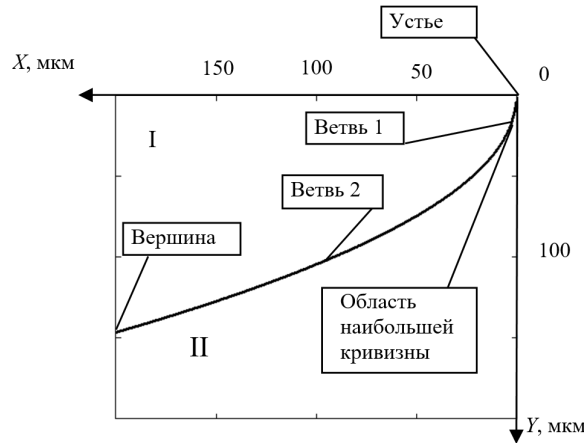
Целью работы стала разработка численно-аналитического метода расчета полей напряжений в металлических стеклах у полос сдвига типа изогнутых лучей у поверхности аморфного материала.

**Постановка задачи.** Полосы сдвига типа изогнутых лучей, формирующиеся у поверхности материала в разрезе, перпендикулярном ее следу на поверхности материала, а также перпендикулярном поверхности материала, имеют вид кривой, изображенной на рисунке 1.



**Рисунок 1.** – Схематическое изображение полосы сдвига в виде изогнутого луча у поверхности аморфного материала в разрезе

Рассмотрим случай, представленный на рисунке 2, где схематически изображена находящаяся у поверхности металлического стекла криволинейная полоса сдвига в форме изогнутых лучей [3] в плоскости  $XOY$ .



**Рисунок 2. – Схематичное изображение полосы сдвига, находящейся у поверхности металлического стекла в форме изогнутых лучей в разрезе, перпендикулярном следу полосы сдвига на поверхности аморфного материала, а также самой поверхности материала**

При формировании полосы сдвига на поверхности аморфного материала образуется ступенька величиной  $\delta$ . В этом случае напряжения, создаваемые криволинейной полосой сдвига, определяются с помощью криволинейного интеграла [2]:

$$\sigma_{ij} = \int_{L_{AB}} \rho \sigma_{ij}^{(0)} ds, \tag{1}$$

где  $L_{AB}$  – задает профиль полосы сдвига;  
 $\rho$  – плотность квазидислокаций, формирующих полосу сдвига;  
 $\sigma_{ij}^{(0)}$  – напряжения, создаваемые единичной квазидислокацией у поверхности.

Использование квазидислокационного подхода в решении проблемы определения картины напряжений, вызванных в аморфном материале полосой сдвига, стало возможно благодаря тому, что он базируется на теории дислокаций в изотропных средах, а аморфные материалы относятся именно к таким средам, несмотря на то, что реально в аморфных материалах дислокаций как линейных дефектов кристаллической решетки, не существует [2, 5]. Согласно теории дислокационных трещин [6] далее понятие «квазидислокация» заменим на «дислокация».

Криволинейный интеграл (1) по общеизвестным правилам [2] сводится к определенному интегралу

$$\sigma_{ij}(x, y) = \int_{a+\delta}^L \sqrt{1+(f'(\xi))^2} \rho(\xi) \sigma_{ij}^{(0)}(x, y, \xi) d\xi, \tag{2}$$

где  $L$  – длина полосы сдвига, равная проекции  $L_{AB}$  на ось  $OY$ ;  
 $a$  – глубина залегания источника дислокаций;  
 $f(\xi)$  – функция, определяющая форму полосы сдвига;  
 $\rho(\xi)$  – линейная плотность дислокаций в полосе сдвига;  
 $\xi$  – параметр интегрирования;

$\sigma_{ij}^{(0)}(x, y, \xi)$  – напряжения, создаваемые единичной дислокацией, которые в случае формирования у поверхности материала полосы сдвига типа луча, находятся по формулам [2]:

$$\sigma_{xz}^{(0)}(x, y, \xi) = B_B \left[ \frac{y - f_1(\xi)}{(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2} - \frac{y + f_1(\xi)}{(x - \xi)^2 + (y + f_1(\xi))^2} \right],$$

$$\sigma_{yz}^{(0)}(x, y, \xi) = -B_B \left[ \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2} - \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y + f_1(\xi))^2} \right],$$

где  $B_B = \frac{\mu b_B}{2\pi}$ .

Здесь  $\mu$  – модуль сдвига;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $b_b$  – модуль винтовой дислокации, образующей полосу сдвига.

Форму полосы сдвига искривленных лучей без существенных локальных изменений вдоль длины (см. рисунок 2) можно описать функцией [2]

$$f(\xi) = A_1 \cdot \ln(\xi) + B_1 \cdot \xi^{1/2}, \quad (3)$$

где  $A_1$  и  $B_1$  – эмпирические коэффициенты.

Рассмотрим четыре варианта распределения плотности дислокаций  $\rho(\xi)$ . Пусть в первом случае плотность дислокаций постоянна:

$$\rho(\xi) = 10^5 \text{ м}^{-1}. \quad (4)$$

Во втором – закон распределения дислокаций описывается линейной функцией

$$\rho(\xi) = A_2 \cdot \xi + B_2, \quad (5)$$

где  $A_2, B_2$  – эмпирические коэффициенты.

В третьем случае закон распределения дислокаций описывается квадратичной функцией типа

$$\rho(\xi) = A_3 \cdot \xi^2 + B_3 \cdot \xi + C_3, \quad (6)$$

где  $A_3, B_3$  и  $C_3$  – эмпирические коэффициенты.

Пусть в четвертом случае плотность дислокаций изменяется по гармоническому закону, описываемому функцией

$$\rho(\xi) = A_4 \cdot \sin(\xi), \quad (7)$$

где  $A_4$  – эмпирический коэффициент.

#### Результаты расчетов полей напряжений и их обсуждение.

Для формы полосы сдвига, описываемой функцией (3), где  $A_1 = 1$  мкм,  $B_1 = 10$  мкм<sup>1/2</sup>, при распределении линейной плотности дислокаций по закону, описываемому функцией (4), у вершины полосы сдвига в области II наблюдаются максимальные по модулю и отрицательные напряжения  $\sigma_{zx}$ , которые уменьшаются при удалении от вершины в отрицательном направлении по оси  $OX$  и положительном по оси  $OY$ .

В области II (рисунок 3) напряжения знакопеременны и меняются на отрицательные, продолжая расти в отрицательном направлении по оси  $OX$  до вершины полосы сдвига, где напряжения достигают максимума по модулю.

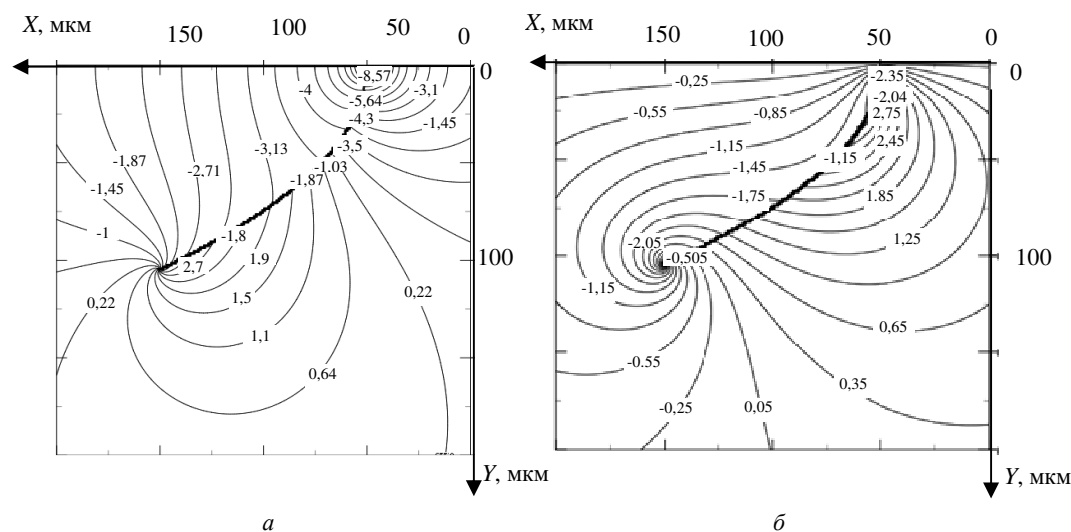


Рисунок 3. – Распределение напряжений у полосы сдвига, описываемой функцией (3), при законе распределения плотностей дислокаций, описываемом функцией (4): а –  $\sigma_{zx}$ ; б –  $\sigma_{zy}$

В области II напряжения  $\sigma_{zy}$  максимальны у ветви 1 полосы сдвига и постепенно убывают при удалении от этой зоны преимущественно в положительных направлениях по осям  $OX$  и  $OY$ .

Вокруг отрезка полосы сдвига, у ее устья, напряжения уменьшаются и в области I становятся отрицательными, достигая максимальных по модулю значений у вершины полосы, и убывают при удалении от нее до середины ветви 2 и далее от полосы сдвига к поверхности материала.

Для формы полосы сдвига, описываемой функцией (3), где  $A_1 = 1$  мкм,  $B_1 = 10$  мкм<sup>1/2</sup>, при законе распределения плотности дислокаций, описываемом функцией (5), где  $A_2 = 0,9 \cdot 10^5$  м<sup>-2</sup>;  $B_2 = 6 \cdot 10^5$  м<sup>-1</sup>, в области II наибольшие напряжения  $\sigma_{zx}$  локализованы у отрезка полосы сдвига у вершины и уменьшаются при удалении от этой зоны в преимущественно положительном направлении по оси  $OY$ . Вокруг отрезка полосы сдвига у области наибольшей кривизны против часовой стрелки напряжения становятся отрицательными и достигают максимума по модулю у поверхности материала у вершины.

Следует отметить, что вокруг вершины полосы сдвига по часовой стрелке напряжения меняются на отрицательные и возрастают по модулю вокруг устья полосы, достигая максимума у ветви 2.

В области I максимальные положительные напряжения  $\sigma_{zy}$  сконцентрированы у вершины полосы сдвига и уменьшаются при удалении от нее. В области II напряжения знакопеременны и становятся отрицательным, достигая максимума по модулю у середины ветви 2.

Для формы полосы сдвига, описываемой функцией (3), где  $A_1 = 1$  мкм,  $B_1 = 10$  мкм<sup>1/2</sup>, при нелинейном законе распределения плотности дислокаций, описываемом функцией (6), где  $A_3 = 1/10 \cdot 10^5$  м<sup>-3</sup>,  $B_3 = 1/5 \cdot 10^5$  м<sup>-2</sup>,  $C_3 = 5 \cdot 10^5$  м<sup>-1</sup>, наибольшие положительные напряжения  $\sigma_{zx}$  в области II сконцентрированы у отрезка полосы сдвига у ее вершины и постепенно убывают при удалении от этой зоны преимущественно в положительном направлении по оси  $OY$ . При этом в области I напряжения становятся отрицательными и достигают максимума у отрезка полосы сдвига у вершины. В области II вокруг отрезка полосы сдвига у ее области наибольшей кривизны напряжения становятся отрицательными и, огибая устье полосы сдвига, в области I увеличиваются по модулю до максимума.

Максимальные по модулю и отрицательные напряжения  $\sigma_{zy}$  в области I сконцентрированы у вершины полосы сдвига и постепенно убывают при удалении от нее, при этом в области II напряжения в положительном направлении от вершины становятся положительными и достигают максимальных значений у середины ветви 2. Следует отметить, что в области I напряжения  $\sigma_{zy}$  знакопеременны. Максимальные положительные напряжения локализуются у отрезка полосы сдвига от области наибольшей кривизны до середины ветви 2 и постепенно уменьшаются при удалении от этой зоны, преимущественно в отрицательном направлении по оси  $OY$ .

Для формы полосы сдвига, описываемой функцией (3), где  $A_1 = 1$  мкм,  $B_1 = 10$  мкм<sup>1/2</sup>, и при распределении плотности дислокаций по гармоническому закону, описываемому функцией (7), где  $A_4 = 10^5$  м<sup>-1</sup>, наибольшие напряжения  $\sigma_{zx}$  локализованы у поверхности материала у устья полосы сдвига. Данные напряжения отрицательны и уменьшаются по модулю при удалении от ветви 1 полосы сдвига. В области I и II напряжения сконцентрированы у полосы сдвига, при этом в пиках синусоиды полей напряжений минимальны, а у средней линии синусоиды – максимальны по модулю и отрицательны.

Наибольшие напряжения  $\sigma_{zy}$  в данном случае сконцентрированы у ветви 1 полосы сдвига. При этом в пике синусоиды полей напряжений у ветви 1 полосы сдвига напряжения минимальны и положительны в области II и отрицательны в области I. Вдоль остальной части полосы сдвига поля напряжений имеют вид синусоиды, в пиках которой наблюдаются минимальные по модулю и отрицательные значения, а у средней линии этой синусоиды отмечены локальные напряжения, значения которых меняются по величине вдоль всей средней линии полосы по гармоническому закону. У устья полосы сдвига наблюдается зона отрицательных напряжений. Кроме того, в области I образуется зона отрицательных напряжений у полосы сдвига от вершины до середины ветви 2, распространяющаяся в положительном направлении по оси  $OX$ .

Таким образом, методика расчета полей напряжений у полос сдвига, имеющих форму изогнутых лучей, находящихся у поверхности аморфного материала, предложенная в данной статье, позволяет составить достаточно полную картину полей напряжений в аморфном материале, вызванных полосой сдвига приведенной формы. Полученные результаты в виде распределений полей напряжений позволяют

определить наиболее опасные места в аморфном материале при появлении полос сдвига, что дает возможность прогнозирования места и направления возникновения трещин при дальнейшем нагружении материала.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Остриков, О.М. Дислокационная гармоническая модель полосы сдвига в аморфном материале / О.М. Остриков // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2007. – № 4. – С. 41–48.
2. Остриков, О.М. Уравнение равновесия криволинейной полосы сдвига, находящейся у поверхности аморфного материала / О.М. Остриков // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2012. – Т. 17, № 4. – С. 17 – 21.
3. Верещагин, М.Н. Негомогенная пластическая деформация аморфных сплавов на основе железа : моногр. / М.Н. Верещагин, В.Г. Шепелевич, О.М. Остриков. – Гомель : Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, 2004. – 134 с.
4. Верещагин, М.Н. Аналогии и различия в развитии сдвиговой пластической деформации при локальном деформировании аморфных и монокристаллических материалов / М.Н. Верещагин, О.М. Остриков // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 2003, № 3. – С. 35–37.
5. Остриков, О.М. Механика двойникования твердых тел : монография / О.М. Остриков. – Гомель : Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого, 2008. – 301 с.
6. Астафьев, В.И. Нелинейная механика разрушения / В.И. Астафьев, Ю.Н. Радаев, Л.В. Степенова. – Самара : Самарский университет, 2001. – 562 с.

*Поступила 29.05.2017*

#### **METHOD OF CALCULATION OF STRESS FIELDS IN SHEAR BANDS SUCH AS CURVED BEAMS LOCATED AT THE SURFACE OF THE METALLIC GLASS**

**A. RUMTSAU, O. OSTRIKOV**

*This technique allowed to describe the nature of the distribution of stresses in the amorphous material in shear rays such as curved beams located at the surface of the metallic glass under different laws of density distribution quasidislocations. As a result, places of probable concentration of maximum stress where can arise cracks – irreversible defects have been identified.*

**Keywords:** *band shift, metallic glass, the stress field.*

УДК 621.371:550.837.6

**ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ НАД УГЛЕВОДОРОДАМИ  
НА ЗАТУХАНИЕ РАДИОИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ**

*канд. техн. наук, доц. В.Ф. ЯНУШКЕВИЧ  
(Полоцкий государственный университет)*

*Рассмотрены вопросы взаимодействия радиоимпульсных сигналов с анизотропными средами над углеводородными залежами. Используется вертикальная поляризация электромагнитных волн. Изучен широкий диапазон используемых частот. Исследовано влияние диэлектрической проницаемости, удельной проводимости среды, частоты столкновения частиц на затухание радиоимпульсных сигналов. Даны рекомендации по использованию оптимальных характеристик зондирующих сигналов. Перестройка устройства дополняет функциональные возможности для поиска углеводородных залежей. На основе приведенных исследований могут быть разработаны методы георазведки углеводородов. Результаты исследований предложено использовать в поисковой геофизике.*

**Ключевые слова:** электромагнитная волна, анизотропная среда, углеводородные залежи.

**Введение.** Актуальность рассматриваемых в настоящей работе задач заключается в усовершенствовании существующих электромагнитных методов (ЭММ) георазведки и разработке новых методов поиска, идентификации месторождений нефти и газа (углеводородов). Выбор метода электроразведки определяет методику проведения натуральных испытаний, точность определения границ и уровень идентификации углеводородных залежей (УВЗ). Современные методы электромагнитной разведки требуют надежной, достоверной базы уникальной информации об установленных на данный момент сведениях о свойствах УВЗ. Такие знания служат надежным инструментом при поиске, оконтуривании и идентификации залежей нефти и газа с помощью ЭММ [1–3].

Экспериментальное исследование и результаты анализа взаимодействия электромагнитных волн (ЭМВ) с УВЗ представлены во многих работах. В статье [4] заложены классические принципы радиоимпульсного зондирования слоистых сред. В работе [5] были предложены новые решения к ближнепольной СВЧ-диагностике подповерхностных неоднородностей с субволновой разрешающей способностью, основанные на использовании импульсного зондирующего сигнала, в котором глубинную чувствительность определяет временная зависимость рассеянного импульса. Были предложены и апробированы в эксперименте методы томографии и голографии (определения формы) подповерхностных диэлектрических объектов, основанные на двумерном сканировании вдоль поверхности среды той же самой приемно-передающей системой, представляющей собой жестко связанные передатчик и приемник, что и в ранее опубликованных авторами методах многочастотной ближнепольной СВЧ-диагностики [6].

В работе [7] показано, что система уравнений классической электродинамики при анализе распространения плоской гармонической электромагнитной волны в устройствах радиоэлектроники с однородной анизотропной проводящей рабочей средой должна быть «полной», возможность исключения из рассмотрения дивергентных уравнений является частным случаем и в каждой конкретной ситуации должна быть обоснована. Особенности расчета элементов тензора для частного случая – использования силицена – показывает, что для каждого конкретного применения вида анизотропной среды возможны свои оригинальные решения [8].

Способ поиска УВЗ [9] позволяет обнаруживать месторождения нефти и газа по измерениям величины напряженности электрического поля отраженных радиоимпульсных сигналов на глубинах до 200 м. Исследование процессов распространения ЭМВ вблизи точки перехода диэлектрической проницаемости через нуль связано с аномальным поведением напряженности электрического поля, различными резонансными эффектами и может быть применено для поиска и идентификации углеводородных залежей [10].

Работы [11–15] позволяют расширить возможности электромагнитных методов георазведки. В статье [16] приведены исследования по влиянию искусственного подмагничивания на обнаружение УВЗ. В каждом реальном случае применения ЭММ нужно учитывать помеховую обстановку в районе проведения испытаний [17].

Целью настоящей работы является определение затухания радиоимпульсных сигналов в зависимости от характеристик анизотропной среды над углеводородами.

**Объекты и методы исследования.** Рассмотрим процесс взаимодействия ЭМВ с углеводородными залежами в режиме импульсного сигнала следующего вида:

$$U(f) = \frac{U \cdot \tau_u}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0) \cdot \tau_u}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0) \cdot \tau_u}{2}} + \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0) \cdot \tau_u}{2}}{\frac{(\omega + \omega_0) \cdot \tau_u}{2}}, \quad (1)$$

где  $\frac{U \cdot \tau_u}{2} = 1$  – амплитуда радиоимпульса;

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$  – частота радиоимпульса;

$\omega_0$  – несущая частота радиоимпульса;

$\tau_u$  – длительность радиоимпульса.

Процесс взаимодействия ЭМВ с локальным включением на трассе распространения радиоволн можно представить в виде режима наклонного падения плоской волны с вертикальной поляризацией в среде с параметрами  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ ,  $\delta_0$  на безграничную поверхность с анизотропным импедансом. Такая электромагнитная волна возбуждается с помощью переносного передатчика, перемещаемого вдоль исследуемого профиля.

Компоненты тензора диэлектрической проницаемости для такого режима взаимодействия имеют следующий вид [11]:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \epsilon_r \cdot F \left(1 + \frac{n\Omega_1}{w}\right) + \sum_{i=1}^2 \left\{ \begin{aligned} &\frac{F \cdot w_{ni}^2}{w} \cdot \frac{(w + n\Omega_1) \cdot [w_{\Gamma i}^2 - (w + n\Omega_1)^2 - v_i^2]}{[v_i^2 + w_{\Gamma i}^2 - (w + n\Omega_1)^2]^2 + 4(w + n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} - \\ &- jF \left[ \frac{w_{ni}^2}{w} \cdot v_i \cdot \frac{(w + n\Omega_1)^2 + v_i^2 + w_{\Gamma i}^2}{[v_i^2 + w_{\Gamma i}^2 - (w + n\Omega_1)^2]^2 + 4(w + n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} + \frac{\delta_r F}{w\epsilon_0} \right] \end{aligned} \right\}, \\ \dot{\epsilon}_2 &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \begin{aligned} &\frac{w_{ni}^2}{w} \cdot F \cdot w_{\Gamma i} \cdot \frac{v_i^2 + w_{\Gamma i}^2 - (w + n\Omega_1)^2}{[v_i^2 + w_{\Gamma i}^2 - (w + n\Omega_1)^2]^2 + 4(w + n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} - \\ &- 2j \frac{w_{ni}^2}{w} \cdot F \cdot w_{\Gamma i} \cdot v_i \cdot \frac{w + n\Omega_1}{[v_i^2 + w_{\Gamma i}^2 - (w + n\Omega_1)^2]^2 + 4(w + n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} \end{aligned} \right\}, \\ \dot{\epsilon}_3 &= \sum_{i=1}^2 \left\{ F \left(1 + \frac{n\Omega_1}{w}\right) \cdot \left[ \epsilon_r - \frac{w_{ni}^2}{w} \cdot \frac{1}{(w + n\Omega_1)^2 + v_i^2} \right] - j \left[ \frac{w_{ni}^2}{w} \cdot F \cdot v_i \cdot \frac{1}{(w + n\Omega_1)^2 + v_i^2} + \frac{\delta_r F}{w\epsilon_0} \right] \right\}. \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Здесь  $F = \frac{\tau}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi \cdot n \cdot F_1 \cdot \tau)}{\pi \cdot n \cdot F_1 \cdot \tau}$ ,

$T$ ,  $F_1$  – период, частота импульса;

$n$  – номер гармоники;

$\Omega_1$  – круговая частота импульса,  $\Omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot F_1$ ;

$\epsilon_r$ ,  $\delta_r$  – диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость среды;

$\epsilon_0$  – диэлектрическая постоянная;

$w_{ni}$  – плазменная частота;

$v_i$  – частота столкновения частиц;



$$\omega_{\Gamma i} - \text{гиротропная частота, } \omega_{\Gamma i} = \frac{q_e \mu_0 H_0}{m};$$

$q_e, m$  – заряд электрона, масса электрона;

$H_0$  – напряженность магнитного поля Земли,

$\mu_0$  – магнитная постоянная;

$i = 1$  для электронов,  $i = 2$  для ионов.

Постоянная распространения волны

$$\dot{\gamma}_2 = j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{c} \cdot \sqrt{\epsilon_2}. \quad (3)$$

Коэффициент затухания

$$\alpha_2 = \text{Im}(\dot{\gamma}_2). \quad (4)$$

**Результаты и их обсуждение.** Был проведен анализ затухания по формуле (4) для импульсного взаимодействия ЭМВ со средой, находящейся над углеводородной залежью. На рисунке 1 представлены результаты расчетов в зависимости от диэлектрической проницаемости наполнителя и частоты сигнала. Для исследования были выбраны параметры:  $n = 5$ ,  $\sigma_r = 0,5$  См/м,  $N_i = 10^{15} \text{ м}^{-3}$ . Как показал анализ результатов, с ростом частоты затухание возрастает. На более высоких частотах рост диэлектрической проницаемости среды также ведет к увеличению затухания ЭМВ.

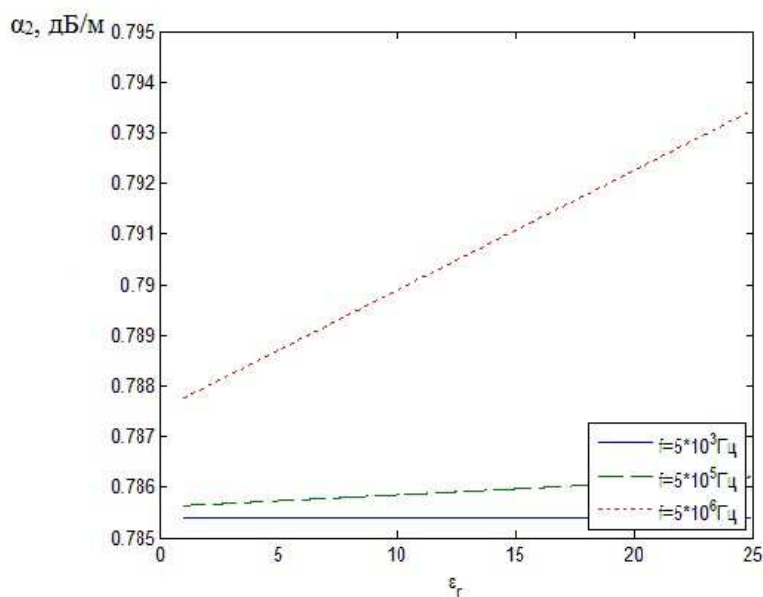


Рисунок 1. – Зависимости  $\alpha_2 = f(\epsilon_r)$

Электромагнитная волна возбуждается с помощью переносного передатчика, перемещаемого вдоль исследуемого профиля.

На рисунке 2 представлены результаты расчетов в зависимости от количества гармоник и частоты сигнала. Для исследования были выбраны следующие параметры:  $\epsilon_r = 15$ ,  $\sigma_r = 0,5$  См/м,  $N_i = 10^{15} \text{ м}^{-3}$ . Как видно из рисунка 2, с ростом частоты затухание возрастает, особенно при больших значениях номеров гармоник. Это объясняется увеличением ширины спектра. Следовательно, на более высоких частотах затухание ЭМВ существенно увеличивается. Так, на частоте  $5 \cdot 10^6$  Гц наблюдается рост затухания практически в 2 раза.

Зависимости от удельной проводимости среды и частоты сигнала показаны на рисунке 3. Для исследования были выбраны следующие параметры:  $\epsilon_r = 15$ ,  $n = 5$ ,  $N_i = 10^{15} \text{ м}^{-3}$ . Построенные графики на рисунке 3 демонстрируют, как с ростом частоты затухание возрастает. При значениях удельной про-

проводимости  $\sigma_r = (0-0,2)$  См/м затухание ЭМВ наибольшее; при дальнейшем росте этой величины затухание уменьшается и стабилизируется.

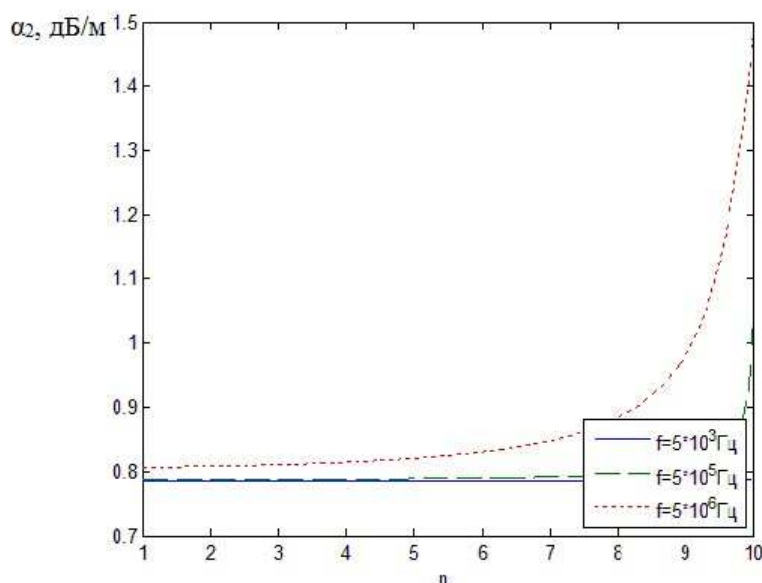


Рисунок 2. – Зависимости  $\alpha_2 = f(n)$

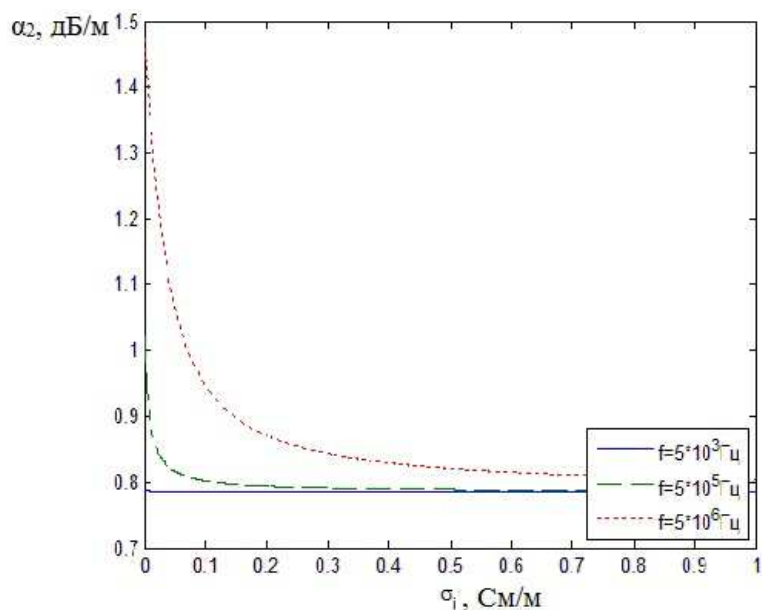


Рисунок 3. – Зависимости  $\alpha_2 = f(\sigma_i)$

На рисунке 4 представлены результаты расчетов в зависимости от частоты сигнала и частоты столкновения частиц. Для исследования были выбраны следующие параметры:  $\epsilon_r = 5$ ,  $\delta_r = 0,5$  См/м,  $N_i = 10^{15}$  м<sup>-3</sup>. Проанализировав результаты, показанные на рисунке 4, было выявлено, что с ростом частоты затухание возрастает, особенно при больших значениях частоты столкновения. Это объясняется увеличением сопротивления среды прохождению радиоимпульсных сигналов в изучаемых слоях.

Количественные проявления этих эффектов определяются физико-геологическими свойствами пород-коллекторов: гранулометрическим и минералогическим составом пород, структурно-текстурными особенностями скелета, характером пористости и проницаемости, видом цементирующего вещества и механическими свойствами скелета, количеством пластовой воды в порах и ее минерализацией и т.д.

Влажность исследуемых слоев определяет характер проводимости среды, что особенно различается в частотной области применяемых ЭМВ.

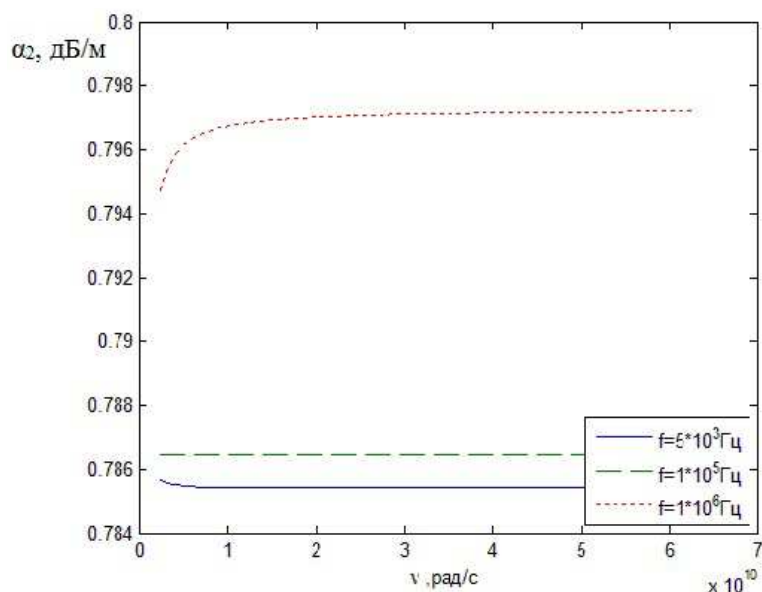


Рисунок 4. – Зависимости  $\alpha_2 = f(\nu)$

На рисунке 5 представлены результаты расчетов в зависимости от диэлектрической проницаемости наполнителя и номера гармоник. Для исследования были выбраны следующие параметры:  $f = 5 \cdot 10^3$  Гц,  $\sigma_r = 0,5$  См/м,  $N_i = 10^{15}$  м<sup>-3</sup>. Анализ графиков на рисунке 5, показал, что с ростом частоты затухание возрастает.

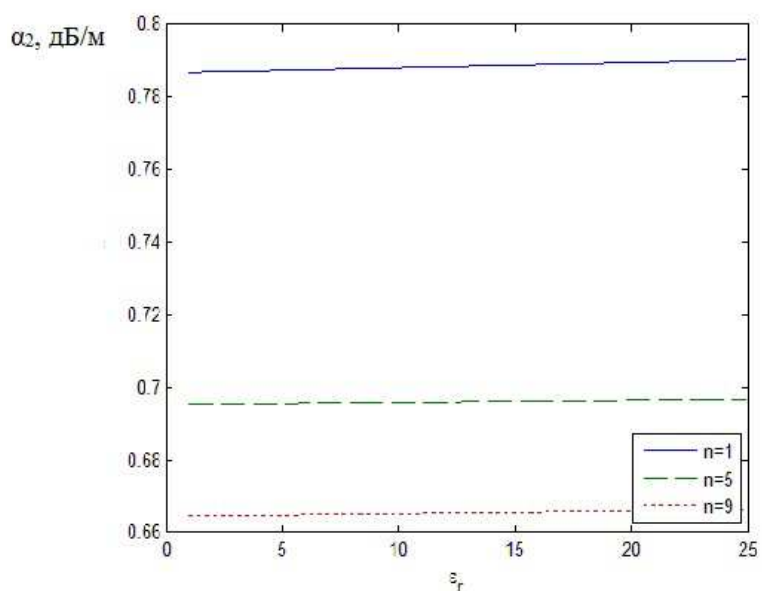
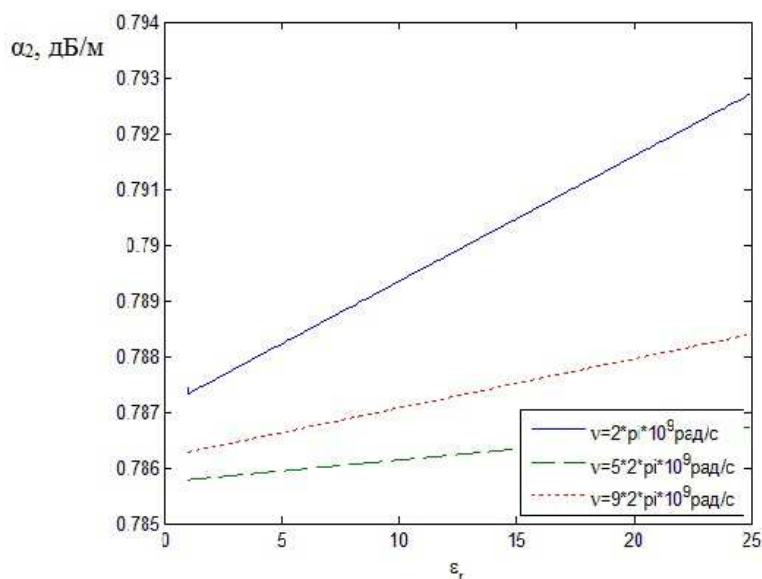


Рисунок 5. – Зависимости  $\alpha_2 = f(\epsilon_r)$

На рисунке 6 представлены результаты расчетов в зависимости от диэлектрической проницаемости и частоты столкновения частиц. Для исследования были выбраны следующие параметры:  $n = 5$ ,  $\sigma_r = 0,5$  См/м,  $N_i = 10^{15}$  м<sup>-3</sup>. Как показал анализ результатов, что с ростом диэлектрической проницаемости затухание возрастает, особенно при больших значениях частоты столкновения.

Рисунок 6. – Зависимости  $\alpha_2 = f(\epsilon_r)$ 

**Заключение.** Проведен анализ взаимодействия анизотропного слоя плазмopodobного типа с ЭМВ в режиме радиоимпульсных сигналов. Результаты исследования могут быть применены в поисковой геофизике. При этом следует отметить:

- затухание радиоимпульсных сигналов в среде над углеводородной залежью определено в широком диапазоне частот зондируемых сигналов, диэлектрических проницаемостей и удельных проводимостей сред;

- на более высоких частотах рост диэлектрической проницаемости среды ведет к увеличению затухания электромагнитных волн;

- с ростом частоты затухание возрастает, особенно при больших значениях номеров гармоник. Это объясняется увеличением ширины спектра.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гололобов, Д.В. Радиотехнические системы поиска и идентификации углеводородных залежей в режиме двухчастотного взаимодействия / Д.В. Гололобов, В.Ф. Янушкевич // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз. тэхн. – 2002. – № 1. – С. 49–54.
2. Moskvichew, V.N. Interaction of electromagnetic waves (EMW) with anisotropic inclusion in communication line / V.N. Moskvichew // 9-th Microw. Conf. NICON-91, Rydzyna, May 20-22, 1991 / Rydzyna, 1991. – Vol. 1. – P. 240–244.
3. Гололобов, Д.В. Поверхностный импеданс среды над углеводородными залежами в режиме частотно-модулированных сигналов / Д.В. Гололобов, С.В. Калинин, В.Ф. Янушкевич // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз. тэхн. – 2010. – № 4. – С. 98–101.
4. Финкельштейн, М.И. Применение радиолокационного подповерхностного зондирования в инженерной геологии / М.И. Финкельштейн, В.А. Кутев, В.П. Золоторев. – М.: Недра, 1986. – 182 с.
5. Гайкович, К.П. Ближнепольная импульсная СВЧ-диагностика подповерхностных диэлектрических неоднородностей [Электронный ресурс] / К.П. Гайкович, Е.С. Максимович // Журнал радиоэлектроники. – 2016. – № 2. – Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb16/4/text.pdf>. – Дата доступа: 22.08.2017.
6. Gaikovich, K.P. Inverse problem of near-field scattering in multilayer media / K.P. Gaikovich, P.K. Gaikovich // Inverse Problems. – 2010. – Vol. 26, № 12. – P. 125013.
7. Макаров, А.М. Об особенностях волновых процессов в устройствах радиоэлектроники с анизотропной рабочей средой / А.М. Макаров, Л.А. Лунёва, К.А. Макаров // Наука и образование. – 2016. – № 11. – С. 88–98.
8. Александров, Ю.М. Расчет элементов тензора комплексной диэлектрической проницаемости для анизотропных материалов / Ю.М. Александров, В.В. Яцышен // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2015. – Т. 18, № 1. – С. 23–27.

9. Иванова, К.И. Способ геоэлектроразведки углеводородной залежи с использованием радиоимпульсных сигналов / К.И. Иванова, В.Ф. Янушкевич // *Фундаментальные и прикладные исследования в современном мире : материалы XV Междунар. науч.-техн. конф.*, СПб., 4 окт. 2016 г. / Информационный издательский учебно-научный центр «Стратегия будущего». – СПб., 2016. – Т. 1. – С. 107–111.
10. Васильев И. С., Козлов И. П. Распространение электромагнитной волны в плоскостойком диэлектрике вблизи нуля диэлектрической проницаемости [Электронный ресурс] / И.С. Васильев, И.П. Козлов // *Труды МАИ*. – 2010. – Вып. 41. – С. 1–6.
11. Взаимодействие радиоимпульса с анизотропной средой / Д.Л. Василенко [и др.] // *Проблемы проектирования и производства радиоэлектронных средств : сб. материалов IV Междунар. науч.-техн. конф.*, Новополюцк, 25–26 мая 2006 г. / *Полоцкий государственный университет*. – Новополюцк, 2006. – Т. 2. – С. 77–80.
12. Янушкевич, В.Ф. Моделирование двухчастотного зондирования углеводородных залежей / В.Ф. Янушкевич // *Современные проблемы проектирования и производства радиоэлектронных средств : сб. материалов междунар. науч.-техн. семинара*, Новополюцк, 29–31 мая 2000 г. / *Полоцкий государственный университет*. – Новополюцк, 2000. – С. 205–208.
13. Цывис, Н. В. Ресурсосберегающие методы поиска залежей нефти и газа / Н. В. Цывис, В. Ф. Янушкевич // *Ресурсо- и энергосберегающие технологии в химической промышленности и производстве строительных материалов : материалы докл. междунар. науч.-техн. конф.*, Минск, 9–10 нояб. 2000 г. / *БГТУ*. – Минск, 2000. – С. 408 – 411.
14. Иванов, Д. Ю. Современные экологические технологии георазведки углеводородных залежей / Д. Ю. Иванов, Н. В. Цывис, В. Ф. Янушкевич // *Процессы и оборудование экологических производств : V традиц. науч.-техн. конф. стран СНГ*, Волгоград, 27–29 нояб. 2000 / *ВолгГТУ*. – Волгоград, 2000. – С. 10.
15. Цывис, Н. В. Радиотехнические системы обнаружения углеводородных залежей на основе двухчастотного взаимодействия / Н. В. Цывис, В. Ф. Янушкевич, Д. Ю. Иванов // *Состояние и проблемы измерений : 7-ая Всерос. науч.-техн. конф.*, М., 28–30 нояб. 2000 г. / *МГТУ им. Н.Э. Баумана*. – М., 2000. – С. 96–97.
16. Влияние наклона поля подмагничивания на электродинамические параметры среды над углеводородами / А. А. Кураев [и др.] // *Проблемы проектирования и производства радиоэлектронных средств : сб. материалов II междунар. науч.-техн. конф.*, Новополюцк, 15–17 мая 2002 г. / *Полоцкий государственный университет*. – Новополюцк, 2002. – Т. 1. – С. 263–267.
17. Янушкевич, В. Ф. Экранирование радиоэлектронных устройств и систем. Новые принципы проектирования антенн : учеб. пособие для аспирантов / В. Ф. Янушкевич, М. Е. Капралов, К. И. Кременя. – Вильнюс : Циклонас, 2016. – 156 с.

Поступила 31.08.2017

## INFLUENCE OF THE ANISOTROPIC ENVIRONMENT PARAMETERS ON HYDROCARBONS ON THE DAMPING OF RADIO-PULSE SIGNALS

V. YANUSHKEVICH

*The article deals with the interaction of radio impulse signals with anisotropic media over hydrocarbon deposits. Vertical polarization of electromagnetic waves is used. A wide range of frequencies is considered. The effect of the dielectric constant, the specific conductivity of the medium, the particle collision frequency on the attenuation of radio impulse signals was studied. Recommendations are given on the use of optimal characteristics of sounding signals. The possibility of rebuilding the device complements the functionality for searching hydrocarbon deposits. Based on the above studies, methods of geological prospecting of hydrocarbons can be developed. The results of the research can be used in search geophysics.*

**Keywords:** *electromagnetic wave, anisotropic medium, hydrocarbon deposits.*

## МАТЕМАТИКА

УДК 517.6:517.958

### АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ

канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ  
(Полоцкий государственный университет)

*Предложен алгоритм решения уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности с восьмым алгебраическим порядком погрешности. Для симметрической пятидиагональной матрицы получены формулы прогонки системы линейных уравнений с краевым условием Дирихле. Доказаны достаточные условия корректности формул прогонки вперед для пятидиагональной симметрической матрицы. Доказано, что аппроксимация узловых значений решения для оператора Пуассона по симметричному шаблону содержит только частные производные четного порядка по каждой из координат.*

**Ключевые слова:** численные методы решения эллиптических уравнений математической физики, достаточные условия корректности формул прогонки пятидиагональной матрицы.

**Введение.** Задачи с численным решением уравнения Пуассона встречаются во многих физико-технических приложениях, большой класс краевых задач математической физики также сводится к уравнению Пуассона на прямоугольнике. В статье [1] исходная гидродинамическая задача сводится к замкнутой системе четырех уравнений в частных производных относительно функций тока и вихря жидкости, три из которых являются уравнениями параболического типа, а четвертое – уравнение Пуассона относительно функции тока, в котором правая часть представляет собой функцию вихря ( $\Delta\psi = \varphi$ , [1, с. 60, формула (5)]). Система данных уравнений решается многократно по циклу методом чередующихся направлений, поэтому точность аппроксимации уравнения Пуассона является актуальной задачей в прикладной математике. Важно выработать численные алгоритмы решения уравнения Пуассона с большим алгебраическим порядком погрешности для экономии времени счета и сохранения небольшой нормы погрешности. В работе [2, с. 227] приведена явная разностная формула на девятиточечном шаблоне, позволяющая найти решение уравнения Пуассона методом простой итерации. Симметричным девятиточечным шаблоном можно покрыть весь прямоугольник по общим границам, который является универсальным шаблоном внутри прямоугольника и на его сторонах (границах). Приведенная авторами формула простой итерации дает четвертый порядок невязки уравнения Пуассона в равномерной норме и общую относительную погрешность  $10^{-5} - 10^{-6}$ . Такой же порядок относительной погрешности приводится в программах для решения эллиптических уравнений у А.А. Самарского [3].

В данной работе нами предложен алгоритм для решения уравнения Пуассона. По формуле простой итерации с шестым порядком погрешности находятся узловые значения решения вблизи четырех вершин прямоугольника. Методом прогонки с трехдиагональной матрицей, устойчивость которой обеспечивает частично неявная разностная формула с шестым порядком погрешности, находятся приграничные узловые значения численного решения. Внутренние узловые значения решения на следующем итерационном слое находятся по частично неявной итерационной формуле с десятым порядком погрешности на симметричном 25 точечном шаблоне с пяти диагональной матрицей прогонки. Кроме аппроксимирующих формул с указанными порядками погрешности нами получено достаточное условие корректности метода прогонки с пяти диагональной матрицей. Приведенный нами алгоритм дает восьмой порядок (при числе узлов порядка 1600) невязки уравнения Пуассона в равномерной норме и общую относительную погрешность  $10^{-13} - 10^{-14}$  при одних и тех же параметрах задачи, что и в работе [2]. Приведен пример, решенный аналитически, и написана программа на языке FORTRAN, поддерживающем максимальные размерности массива решения. В отличие от работы [3], где для шаблона граничного разностного оператора можно использовать любое число узлов и добиться равенства порядков погрешности внутреннего и граничного операторов, в данной задаче граничный оператор имеет порядок погрешности на 2 меньше, чем внутренний оператор, так как шаблон граничного оператора имеет меньшее число узлов, чем шаблон внутреннего оператора.

**Постановка задачи.** В качестве примера для разностной схемы решим уравнение Пуассона на прямоугольнике:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin(x), & 0 < x, y < \pi, \\ u(0, y) = u(\pi, y) = \sin(y), \\ u(x, 0) = u(x, \pi) = \sin(x), \\ 0 \leq x, y \leq \pi. \end{cases} \quad (1)$$

Проведем редукцию линейной задачи (1) [5], т.е. сведем решение (1) к сумме решений 3 простых систем:  $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y)$ . Первая система содержит одно неоднородное краевое условие:

$$1) \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, & 0 < x, y < \pi, \\ u_1(0, y) = u_1(\pi, y) = \sin(y), \\ u_1(x, 0) = u_1(x, \pi) = 0, \\ 0 \leq x, y \leq \pi. \end{cases}$$

Решаем задачу 1) методом разделения переменных  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ ,  $X''Y + XY'' = 0$ . Выберем функцию  $Y(y) = \sin(y)$ , совпадающую с неоднородным граничным условием на первой части границы и автоматически обращающее в 0 решение на второй части границы. Тогда для  $X(x)$  имеем

$$X'' \sin(y) - X \sin(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X'' - X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Общее решение последней краевой задачи находим на множестве гиперболических функций  $X(x) = A \operatorname{sh}(x) + B \operatorname{ch}(x)$ ,  $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

Используя граничные условия:

$$X(0) = A \operatorname{sh}(0) + B \operatorname{ch}(0) = B = 1; \quad X(\pi) = A \operatorname{sh}(\pi) + \operatorname{ch}(\pi) = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)},$$

запишем решение 1) частной задачи:  $u_1(x, y) = \left( \left( \frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)} \right) \operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x) \right) \sin(y)$ .

Найдем решение второй частной задачи:

$$2) \begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0, & 0 < x, y < \pi, \\ u_2(0, y) = u_2(\pi, y) = 0, \\ u_2(x, 0) = u_2(x, \pi) = \sin(x), \\ 0 \leq x, y \leq \pi. \end{cases}$$

Аналогично, разделяя переменные, выбираем функцию  $X(x) = \sin(x)$ , автоматически удовлетворяющую первому граничному условию 2) и совпадающую со вторым граничным условием.

$$Y'' \sin(x) - Y \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Y'' - Y = 0 \\ Y(0) = Y(\pi) = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Краевые задачи (3) и (2) совпадают с точностью до замены переменных  $X \rightarrow Y$ ,  $x \rightarrow y$ , поэтому выписываем ответ для задачи 2):

$$u_2(x, y) = \left( \left( \frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)} \right) \operatorname{sh}(y) + \operatorname{ch}(y) \right) \sin(x).$$

Находим решение третьей задачи с уравнением Пуассона и однородными краевыми условиями:

$$3) \begin{cases} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = \sin(x), & 0 < x, y < \pi \\ u_3(0, y) = u_3(\pi, y) = 0 \\ u_3(x, 0) = u_3(x, \pi) = 0 \\ 0 \leq x, y \leq \pi \end{cases}$$

Разделяя переменные, выбираем функцию аргумента  $x$ , повторяющую неоднородность уравнения Пуассона  $X(x) = \sin(x)$ ,  $u(x, y) = \sin(x)Y(y)$ . При этом автоматически выполняется первое краевое условие задачи 3), решение подставим в уравнение Пуассона:

$$-\sin(x)Y + Y'' \sin(x) = \sin(x) \Leftrightarrow Y'' - Y = 1.$$

$$\begin{cases} Y'' - Y = 1 \\ Y(0) = Y(\pi) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Находим частное решение дифференциального уравнения краевой задачи (4)

$$Y_{part}(y) = -1.$$

Общее решение однородного уравнения следующее:

$$Y(y) = A \operatorname{sh}(y) + B \operatorname{ch}(y).$$

Общее решение неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения есть сумма решений частного неоднородного и общего однородного уравнений

$$Y_H(y) = -1 + A \operatorname{sh}(y) + B \operatorname{ch}(y).$$

Теперь нужно выполнить краевые условия задачи (4):

$$Y_H(0) = -1 + A \operatorname{sh}(0) + B \operatorname{ch}(0) = B - 1 = 0 \Leftrightarrow B = 1, \quad Y_H(\pi) = -1 + A \operatorname{sh}(\pi) + \operatorname{ch}(\pi) = 0 \Leftrightarrow A = \left( \frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)} \right),$$

тогда решение краевой задачи (4) есть

$$u_3(x, y) = \left( -1 + \left( \frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)} \right) \operatorname{sh}(y) + \operatorname{ch}(y) \right) \sin(x).$$

Решение исходной задачи (1) есть сумма решений 3 частных задач:

$$\begin{aligned} u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) = & \left( \left( \frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)} \right) \operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x) \right) \sin(y) + \\ & + \left( \left( \frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)} \right) \operatorname{sh}(y) + \operatorname{ch}(y) \right) \sin(x) + \left( -1 + \left( \frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)} \right) \operatorname{sh}(y) + \operatorname{ch}(y) \right) \sin(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Подстановкой формулы (5) в три уравнения системы (1) убеждаемся, что она является решением задачи (1), а в силу теорем существования и единственности для уравнения Пуассона [5] – единственным решением. Нам понадобится раскладывать в ряд Тейлора сумму узловых значения функций на симметрично расположенных узлах с центральным значением  $u_{0,0}$ . Для сокращения выкладок докажем следующее утверждение 1.



**Утверждение 1.** Пусть множество узлов шаблона с центром (0,0) можно разбить на прямоугольники с вершинами в данных узлах и сторонами, параллельными координатным осям, тогда разложение оператора Лапласа в ряд имеет только производные с четным порядком по каждой из координат.

**Доказательство.** Обозначим координаты 4 вершин прямоугольника  $(h_1, h_2), (h_1, -h_2), (-h_1, -h_2), (-h_1, h_2)$  соответственно с узловыми значениями  $u_{1,2}, u_{1,-2}, u_{-1,-2}, u_{-1,2}$ . В силу равноудаления узлов от центра и симметрии шаблона аппроксимация оператора Лапласа содержит узловые значения  $u_{1,2}, u_{1,-2}, u_{-1,-2}, u_{-1,2}$  с равными весами. По формуле Ньютона – Лейбница имеем

$$\begin{aligned}
 u_{1,2} + u_{1,-2} + u_{-1,-2} + u_{-1,2} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^m \frac{1}{m!} C_m^k h_1^k h_2^{m-k} \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{m-k}}{m!} C_m^k h_1^k h_2^{m-k} \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} + \right. \\
 &+ \left. \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^m}{m!} C_m^k h_1^k h_2^{m-k} \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{m!} C_m^k h_1^k h_2^{m-k} \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^m \frac{1}{m!} \left( C_m^k h_1^k h_2^{m-k} \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \times \right. \right. \\
 &\times \left. \left. \left( 1 + (-1)^{m+k} + (-1)^m + (-1)^k \right) \right) \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{m!} C_m^k h_1^k h_2^{m-k} \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \left\{ \begin{array}{l} 1 - (-1)^k - 1 + (-1)^k = 0, m = 2l + 1 \\ 2 + 2(-1)^k = \begin{cases} 0, k = 2s + 1 \\ 4, k = 2s \end{cases}, m = 2l \end{array} \right\} = \\
 &= 4u_{0,0} + 4 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=0}^l \frac{C_{2l}^{2s}}{(2l)!} h_1^{2s} h_2^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}}. \tag{6}
 \end{aligned}$$

В формуле (6) частные производные  $\frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}}$  вычисляются в центральном узле (0,0). Множество узлов шаблона разбивается на четверки вершин, и согласно формуле (6) разложение в ряд Тейлора содержит производные только четного порядка  $2l$  (и четного порядка по каждой переменной  $2s, 2l - 2s$ ). Тогда разложение оператора Лапласа в ряд с учетом всех узлов шаблона содержит только производные четных порядков  $2s, 2l - 2s$  (хотя каждая четверка вершин имеет свой весовой коэффициент в квадратурной формуле). Что и завершает доказательство **утверждения 1**.

**Аппроксимация внутреннего оператора.** Для аппроксимации уравнения Пуассона на внутренних узлах равномерной прямоугольной сетки исследуем симметричный 25 точечный шаблон, центральный узел указан белым кружком, ось  $y$  направим вниз, ось  $x$  вправо, координаты узлов в масштабах  $(h_1, h_2)$  отмечены на рисунке целыми числами:

$$\begin{array}{ccccc}
 \bullet -2, 2 & \bullet -1, 2 & \bullet 0, 2 & \bullet 1, 2 & \bullet 2, 2 \\
 \bullet -2, 1 & \bullet -1, 1 & \bullet 0, 1 & \bullet 1, 1 & \bullet 2, 1 \\
 \bullet -2, 0 & \bullet -1, 0 & \bullet 0, 0 & \bullet 1, 0 & \bullet 2, 0 \\
 \bullet -2, -1 & \bullet -1, -1 & \bullet 0, -1 & \bullet 1, -1 & \bullet 2, -1 \\
 \bullet -2, -2 & \bullet -1, -2 & \bullet 0, -2 & \bullet 1, -2 & \bullet 2, -2
 \end{array}$$

Для удобства выберем одинаковый шаг сетки по обоим переменным, т.е. случай  $h_1 = h_2 = h$ . В таком случае равномерная сетка на прямоугольнике имеет различное число узлов на его сторонах. Аппроксимируем оператор Лапласа линейной квадратурной формулой:

$$\begin{aligned}
 u_{xx} + u_{yy} \equiv \Delta u \equiv f(x, y) &= \frac{1}{h^2} \left( C_0 u_{0,0} + C_1 (u_{0,1} + u_{0,-1} + u_{1,0} + u_{-1,0}) + C_2 (u_{1,1} + u_{1,-1} + u_{-1,1} + u_{-1,-1}) + \right. \\
 &+ C_3 (u_{0,2} + u_{0,-2} + u_{2,0} + u_{-2,0}) + C_4 (u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,-2} + u_{-2,1} + u_{-1,2} + u_{2,-1} + u_{-1,-2} + u_{-2,-1}) + \\
 &\left. + C_5 (u_{2,2} + u_{2,-2} + u_{-2,2} + u_{-2,-2}) \right). \tag{7}
 \end{aligned}$$

Формула (7) использует все 25 узловых значений шаблона.

Разложим в ряд Тейлора суммы четверок узловых значений с точностью до  $O(h^{10})$  по формуле (6):

$$u_{0,1} + u_{0,-1} + u_{1,0} + u_{-1,0} = 4u_{0,0} + h^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{h^4}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{h^6}{360} \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{h^8}{20160} \left( \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + O(h^{10}). \quad (8)$$

Аналогично

$$u_{1,1} + u_{-1,1} + u_{1,-1} + u_{-1,-1} = 4u_{0,0} + 2h^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{h^4}{6} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{h^6}{180} \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{h^8}{10080} \left( \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + 28 \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} + 70 \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} + 28 \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + O(h^{10}). \quad (9)$$

Заменим в формуле (8)  $h \rightarrow 2h$  и получим выражение (10)

$$u_{0,2} + u_{0,-2} + u_{2,0} + u_{-2,0} = 4u_{0,0} + 4h^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{4h^4}{3} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{8h^6}{45} \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{4h^8}{315} \left( \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + O(h^{10}). \quad (10)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} & u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,-2} + u_{-2,1} + u_{-1,2} + u_{2,-1} + u_{-1,-2} + u_{-2,-1} = \\ & = 8u_{0,0} + \frac{4(1^2 + 2^2)}{2!} h^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{h^4}{24} \left( 4(1^4 + 2^4) \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + 4 \cdot 6(1^2 2^2 + 2^2 \cdot 1^2) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \\ & + \frac{h^6}{720} \left( 4(1^6 + 2^6) \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + 4 \cdot 15 \cdot (1^2 2^4 + 2^2 \cdot 1^4) \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{h^8}{40320} \left( 1028 \left( \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + 4 \cdot 28 \cdot 68 \left( \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} \right) + 4 \cdot 70 \cdot 32 \left( \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^4 \partial x^4} \right) \right) + O(h^{10}) = \\ & = 8u_{0,0} + 10h^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{h^4}{6} \left( 17 \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + 48 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \\ & + \frac{h^6}{180} \left( 65 \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + 300 \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) \right) + \\ & + \frac{h^8}{10080} \left( 257 \left( \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + 1904 \left( \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} \right) + 2240 \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} \right) + O(h^{10}). \end{aligned} \quad (11)$$

Заменим в формуле (9)  $h \rightarrow 2h$  и получим следующую формулу:

$$u_{2,2} + u_{2,-2} + u_{-2,2} + u_{-2,-2} = 4u_{0,0} + 8h^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{8h^4}{3} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{16h^6}{45} \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{8h^8}{315} \left( \left( \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + 28 \left( \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} \right) + 70 \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} \right) + O(h^{10}). \quad (12)$$

Подставляя в формулу (7) разложения (8)–(12) и группируя слагаемые по степеням  $h$ , получим

$$\begin{aligned} \Delta u \equiv f(x, y) = & \frac{u_{0,0}}{h^2} (C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 4C_3 + 8C_4 + 4C_5) + \Delta u (C_1 + 2C_2 + 4C_3 + 10C_4 + 8C_5) + \\ & + h^2 \left( \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) \left( \frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{4C_3}{3} + \frac{17C_4}{6} + \frac{8C_5}{3} \right) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} (C_2 + 8C_4 + 16C_5) \right) + \\ & + h^4 \left( \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) \left( \frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{8C_3}{45} + \frac{65C_4}{180} + \frac{16C_5}{45} \right) + \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) \left( \frac{15}{180} C_2 + \frac{300}{180} C_4 + \frac{16}{3} C_5 \right) \right) + \\ & + h^6 \left( \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) \left( \frac{C_1}{20160} + \frac{C_2}{10080} + \frac{4C_3}{315} + \frac{257C_4}{10080} + \frac{8C_5}{315} \right) + \\ & + h^6 \left( \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} \right) \left( \frac{28}{10080} C_2 + \frac{1904}{10080} C_4 + \frac{224}{315} C_5 \right) + \\ & + h^6 \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} \left( \frac{70}{10080} C_2 + \frac{2240}{10080} C_4 + \frac{560}{315} C_5 \right) + O(h^8). \end{aligned} \tag{13}$$

**Замечание 1.** Формула (13) аппроксимирует уравнение Пуассона с точностью до  $O(h^8)$ .

Левая и правая части формулы (13) должны быть равны с точностью до  $O(h^8)$ . В пределе при  $h \rightarrow 0$  коэффициент  $(C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 4C_3 + 8C_4 + 4C_5) = 0$  при  $\frac{u_{0,0}}{h^2}$ , иначе первое слагаемое правой части формулы (13) стремится к бесконечности. Коэффициент при  $\Delta u$  равен единице для тождественности выражения (13) с нулевой степенью по  $h^0$ :  $(C_1 + 2C_2 + 4C_3 + 10C_4 + 8C_5 = 1)$ . Так как

$$f_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2},$$

то в скобке при  $h^2$  в формуле (13) могут присутствовать только частные производные  $f_{xx}$ ,  $f_{yy}$  (частные производные четного порядка и по  $x$ , и по  $y$ ), следовательно, получаем уравнение:

$$2 \left( \frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{4C_3}{3} + \frac{17C_4}{6} + \frac{8C_5}{3} \right) = C_2 + 8C_4 + 16C_5.$$

Учитывая операторное равенство для  $\Delta^3 u$ , сведем к нему коэффициент в формуле (13) при  $h^4$ :

$$\Delta^3 u \equiv \Delta^2 f = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^3 u = \left( \frac{\partial^6}{\partial x^6} + 3 \left( \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} \right) + \frac{\partial^6}{\partial y^6} \right) u = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4},$$

получим условие на коэффициенты  $3 \left( \frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{8C_3}{45} + \frac{65C_4}{180} + \frac{16C_5}{45} \right) = \frac{15}{180} C_2 + \frac{300}{180} C_4 + \frac{16}{3} C_5$ .

Учитывая операторное равенство для  $\Delta^4 u$ , сведем к нему коэффициенты в формуле (13) при  $h^6$ :

$$\Delta^4 u \equiv \Delta^3 f = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^4 u = \left( \frac{\partial^8}{\partial x^8} + 4 \left( \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} \right) + 6 \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{\partial^8}{\partial y^8} \right) u.$$

Получим два уравнения на коэффициенты:

$$4\left(\frac{C_1}{20160} + \frac{C_2}{10080} + \frac{4C_3}{315} + \frac{257C_4}{10080} + \frac{8C_5}{315}\right) = \frac{28}{10080}C_2 + \frac{1904}{10080}C_4 + \frac{224}{315}C_5,$$

$$6\left(\frac{C_1}{20160} + \frac{C_2}{10080} + \frac{4C_3}{315} + \frac{257C_4}{10080} + \frac{8C_5}{315}\right) = \frac{70}{10080}C_2 + \frac{2240}{10080}C_4 + \frac{560}{315}C_5.$$

Объединим все написанные условия на коэффициенты в неоднородную систему линейных уравнений, предварительно проводя элементарные преобразования:

$$\begin{cases} C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 4C_3 + 8C_4 + 4C_5 = 0 \\ C_1 + 2C_2 + 4C_3 + 10C_4 + 8C_5 = 1 \\ C_1 - 4C_2 + 16C_3 - 14C_4 - 64C_5 = 0 \\ C_1 - 8C_2 + 64C_3 - 70C_4 - 512C_5 = 0 \\ C_1 - 12C_2 + 256C_3 - 438C_4 - 3072C_5 = 0 \\ 3C_1 - 64C_2 + 768C_3 - 698C_4 - 16384C_5 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Система линейных неоднородных уравнений (14) имеет единственное решение

$$C_0 = -\frac{173}{70}, C_1 = \frac{8}{21}, C_2 = \frac{8}{45}, C_3 = \frac{1}{30}, C_4 = \frac{4}{315}, C_5 = \frac{1}{2520}. \quad (15)$$

Используя явный вид коэффициентов (15) перепишем формулу (7):

$$\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{4C_3}{3} + \frac{17C_4}{6} + \frac{8C_5}{3} = \frac{1}{2}(C_2 + 8C_4 + 16C_5) = \frac{4}{45} + \frac{16}{315} + \frac{8}{2520} = \frac{1}{7}$$

$$\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{8C_3}{45} + \frac{65C_4}{180} + \frac{16C_5}{45} = \frac{1}{3}\left(\frac{15}{180}C_2 + \frac{300}{180}C_4 + \frac{16}{3}C_5\right) = \frac{8}{1620} + \frac{40}{5670} + \frac{16}{22680} = \frac{4}{315}$$

$$\frac{C_1}{20160} + \frac{C_2}{10080} + \frac{4C_3}{315} + \frac{257C_4}{10080} + \frac{8C_5}{315} = \frac{1}{4}\left(\frac{28}{10080}C_2 + \frac{1904}{10080}C_4 + \frac{224}{315}C_5\right) = \frac{1}{8100} + \frac{68}{113400} + \frac{1}{14175} = \frac{1}{1260}.$$

В итоге получим

$$\begin{aligned} f_{0,0} + h^2 \frac{\Delta f}{7} + \frac{4h^4}{315}(\Delta f)^2 + \frac{h^6}{1260}(\Delta f)^3 = \\ = \frac{1}{h^2} \left( -\frac{173}{70}u_{0,0} + \frac{8}{21}(u_{0,1} + u_{0,-1} + u_{1,0} + u_{-1,0}) + \frac{8}{45}(u_{1,1} + u_{1,-1} + u_{-1,1} + u_{-1,-1}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{30}(u_{0,2} + u_{0,-2} + u_{2,0} + u_{-2,0}) + \frac{4}{315}(u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,-2} + u_{-2,1} + u_{-1,2} + u_{2,-1} + u_{-1,-2} + u_{-2,-1}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2520}(u_{2,2} + u_{2,-2} + u_{-2,2} + u_{-2,-2}) + O(h^8) \right). \end{aligned} \quad (16)$$

**Замечание 2.** Из формулы (16) видно, что квадратурная формула уравнения Пуассона для внутренних узлов сетки содержит степенной ряд относительно аргумента  $h^2\Delta f$  – это результат того, что точный дифференциальный оператор  $\Delta u$  заменяется приближенной квадратурной формулой с точностью  $O(h^{2l})$ . Как видно из выражения (16), старшая степень степенного ряда равна  $l-1$ .

Выразим из формулы (16) центральное узловое значение  $u_{0,0}$  и присвоим ему верхний индекс итерации на единицу больше, чем остальным узловым значениям решения, тогда получим формулу простой итерации:

$$\begin{aligned}
 u_{0,0}^{k+1} = & \frac{70}{173} \left[ \frac{8}{21} (u_{0,1}^k + u_{0,-1}^k + u_{1,0}^k + u_{-1,0}^k) + \frac{8}{45} (u_{1,1}^k + u_{1,-1}^k + u_{-1,1}^k + u_{-1,-1}^k) + \right. \\
 & + \frac{1}{30} (u_{0,2}^k + u_{0,-2}^k + u_{2,0}^k + u_{-2,0}^k) + \frac{4}{315} (u_{1,2}^k + u_{2,1}^k + u_{1,-2}^k + u_{-2,1}^k + u_{-1,2}^k + u_{2,-1}^k + u_{-1,-2}^k + u_{-2,-1}^k) + \quad (17) \\
 & \left. + \frac{1}{2520} (u_{2,2}^k + u_{2,-2}^k + u_{-2,2}^k + u_{-2,-2}^k) - h^2 \left( f_{0,0} + h^2 \frac{\Delta f}{7} + \frac{4h^4}{315} (\Delta f)^2 + \frac{h^6}{1260} (\Delta f)^3 \right) \right] + O(h^{10}).
 \end{aligned}$$

С точки зрения устойчивости численного решения предпочтительнее использовать неявные итерационные формулы [4], тем более что, тождественно преобразуя формулу (16), мы не изменим порядок ее погрешности. Запишем в вертикальном разрезе узловые значения  $u_{0,-2}^{k+1}, u_{0,-1}^{k+1}, u_{0,0}^{k+1}, u_{0,1}^{k+1}, u_{0,2}^{k+1}$  проходящем через узел (0,0) в левой части уравнения на  $k+1$  слое итерации, а в правую часть перенесем все остальные слагаемые, в которой узловые значения решения находятся в слое с номером итерации  $k$ .

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{30} u_{0,-2}^{k+1} + \frac{8}{21} u_{0,-1}^{k+1} - \frac{173}{70} u_{0,0}^{k+1} + \frac{8}{21} u_{0,1}^{k+1} + \frac{1}{30} u_{0,2}^{k+1} = \\
 & - \frac{8}{21} (u_{-1,0}^k + u_{1,0}^k) - \frac{1}{30} (u_{-2,0}^k + u_{2,0}^k) - \frac{8}{45} (u_{1,1}^k + u_{1,-1}^k + u_{-1,1}^k + u_{-1,-1}^k) - \\
 & - \frac{4}{315} (u_{1,2}^k + u_{2,1}^k + u_{1,-2}^k + u_{-2,1}^k + u_{-1,2}^k + u_{2,-1}^k + u_{-1,-2}^k + u_{-2,-1}^k) - \\
 & - \frac{1}{2520} (u_{2,2}^k + u_{2,-2}^k + u_{-2,2}^k + u_{-2,-2}^k) + h^2 \left( f_{0,0} + h^2 \frac{\Delta f}{7} + \frac{4h^4}{315} (\Delta f)^2 + \frac{h^6}{1260} (\Delta f)^3 \right) + O(h^{10}). \quad (18)
 \end{aligned}$$

Неоднородная линейная система уравнений (18) относительно неизвестных узловых значений  $u_{j,i}^{k+1}$  имеет пятидиагональную матрицу системы, которую можно решить методом прогонки. Рассмотрим сетку (множество из  $n+1$  произвольных узлов)  $\omega_{n+1} = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ . Запишем систему линейных уравнений с пятидиагональной матрицей в общем виде:

$$A_{1k} x_{k-2} + A_{2k} x_{k-1} - C_k x_k + B_{1k} x_{k+1} + B_{2k} x_{k+2} = F_k, \quad k = \overline{2, n-2}. \quad (19)$$

Граничными условиями для (20) являются заданные значения решения в двух приграничных слоях, т.е.  $x_0, x_1, x_{n-1}, x_n$  - известны,  $x_k, k = \overline{2, n-2}$  подлежат решению с использованием (19). В разностном уравнении (19) максимальная разность индексов равна 4, что соответствует краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения 4 порядка, а задание 4 приграничных значений функций является аналогом граничного условия 1 рода (Дирихле) для уравнения 2 порядка с 2 известными концевыми значениями функции на отрезке.

Решение системы линейных уравнений (19) ищем в виде

$$x_k = \lambda_{1k} x_{k+1} + \lambda_{2k} x_{k+2} + v_k, \quad k = \overline{n-2, 2}, \quad (20)$$

тогда из формулы (20)

$$x_{k-1} = \lambda_{1k-1} x_k + \lambda_{2k-1} x_{k+1} + v_{k-1}, \quad x_{k-2} = \lambda_{1k-2} x_{k-1} + \lambda_{2k-2} x_k + v_{k-2}. \quad (21)$$

Подставим  $x_{k-2}, x_{k-1}$  в систему линейных уравнений (19), используя выражение (21)

$$\begin{aligned}
 & A_{1k} (\lambda_{1k-2} (\lambda_{1k-1} x_k + \lambda_{2k-1} x_{k+1} + v_{k-1}) + \lambda_{2k-2} x_k + v_{k-2}) + \\
 & + A_{2k} (\lambda_{1k-1} x_k + \lambda_{2k-1} x_{k+1} + v_{k-1}) - C_k x_k + B_{1k} x_{k+1} + B_{2k} x_{k+2} = F_k \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow x_k = \frac{x_{k+1} (B_{1k} + A_{2k} \lambda_{2k-1} + A_{1k} \lambda_{1k-2} \lambda_{2k-1})}{C_k - A_{1k} \lambda_{1k-2} \lambda_{1k-1} - A_{1k} \lambda_{2k-2} - A_{2k} \lambda_{1k-1}} + \\
 & + \frac{x_{k+2} B_{2k}}{C_k - A_{1k} \lambda_{1k-2} \lambda_{1k-1} - A_{1k} \lambda_{2k-2} - A_{2k} \lambda_{1k-1}} + \frac{A_{1k} \lambda_{1k-2} v_{k-1} + A_{1k} v_{k-2} + A_{2k} v_{k-1} - F_k}{C_k - A_{1k} \lambda_{1k-2} \lambda_{1k-1} - A_{1k} \lambda_{2k-2} - A_{2k} \lambda_{1k-1}}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Сравнивая формулы (20) и (22), получим значения прогоночных коэффициентов:

$$\lambda_{1k} = \frac{B_{1k} + A_{2k}\lambda_{2k-1} + A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{2k-1}}{C_k - A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} - A_{1k}\lambda_{2k-2} - A_{2k}\lambda_{1k-1}}, \quad \lambda_{2k} = \frac{B_{2k}}{C_k - A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} - A_{1k}\lambda_{2k-2} - A_{2k}\lambda_{1k-1}}, \quad (23)$$

$$v_k = \frac{A_{1k}\lambda_{1k-2}v_{k-1} + A_{1k}v_{k-2} + A_{2k}v_{k-1} - F_k}{C_k - A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} - A_{1k}\lambda_{2k-2} - A_{2k}\lambda_{1k-1}}, \quad k = \overline{2, n-2}.$$

Кроме того, из формулы (20) ( $k = 0, 1$ ) следует, что

$$x_0 = \lambda_{10}x_1 + \lambda_{20}x_2 + v_0, \quad x_1 = \lambda_{11}x_2 + \lambda_{21}x_3 + v_1, \quad x_{n-2} = \lambda_{1n-2}x_{n-1} + \lambda_{2n-2}x_n + v_{n-2}. \quad (24)$$

Из формул (24) видно, что  $x_0, x_1$  принимают фиксированные значения (условие Дирихле) при любых соседних узловых значениях, если положить  $v_0 = x_0, \lambda_{10} = \lambda_{20} = 0, v_1 = x_1, \lambda_{11} = \lambda_{21} = 0$ .

После определения коэффициентов  $v_0, \lambda_{10}, \lambda_{20}, v_1, \lambda_{11}, \lambda_{21}$  формулы (23) дают остальные коэффициенты  $\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, v_k$  (**формулы прогонки вперед**  $k = \overline{2, n-2}$ ). Зная  $x_{n-1}, x_n$  по формуле (24) находим  $x_{n-2}$ , так как  $\lambda_{1n-2}, \lambda_{2n-2}, v_{n-2}$  найдены по формуле (23) прогонкой вперед. Используя (20) находим все неизвестные узловые значения (**формулы прогонки назад**  $k = \overline{n-2, 2}$ ). То есть доказано **утверждение 2**.

**Утверждение 2.** Решение линейной системы уравнений с пятидиагональной матрицей (19) и известными фиксированными значениями  $x_0, x_1, x_{n-1}, x_n$  задается алгоритмом – формулы прогонки вперед (23) с краевыми условиями ( $v_0 = x_0, \lambda_{10} = \lambda_{20} = 0, v_1 = x_1, \lambda_{11} = \lambda_{21} = 0$ ) и формулы прогонки назад (20).

Коэффициенты неявного разностного уравнения (18) свяжем с прогоночными коэффициентами (19):

$$A_{1k} = \frac{1}{30}, \quad A_{2k} = \frac{8}{21}, \quad C_k = \frac{173}{70}, \quad B_{1k} = \frac{8}{21}, \quad B_{2k} = \frac{1}{30}, \quad F_k = -\frac{8}{21}(u_{-1,0}^k + u_{1,0}^k) - \frac{1}{30}(u_{-2,0}^k + u_{2,0}^k) - \frac{8}{45}(u_{1,1}^k + u_{1,-1}^k + u_{-1,1}^k + u_{-1,-1}^k) - \frac{4}{315}(u_{1,2}^k + u_{2,1}^k + u_{1,-2}^k + u_{-2,1}^k + u_{-1,2}^k + u_{2,-1}^k + u_{-1,-2}^k + u_{-2,-1}^k) - \frac{1}{2520}(u_{2,2}^k + u_{2,-2}^k + u_{-2,2}^k + u_{-2,-2}^k) + h^2 \left( f_{0,0} + h^2 \frac{\Delta f}{7} + \frac{4h^4}{315}(\Delta f)^2 + \frac{h^6}{1260}(\Delta f)^3 \right), \quad k = \overline{2, n-2}. \quad (25)$$

**Утверждение 3.** Пусть пятидиагональная матрица линейной системы уравнений (19) с краевым условием Дирихле (известны  $x_0, x_1, x_{n-1}, x_n \Leftrightarrow \lambda_{10} = \lambda_{11} = \lambda_{20} = \lambda_{21} = 0$ ) является:

1) симметрической:  $A_{1k} = B_{2k}, A_{2k} = B_{1k}, k = \overline{2, n-2} (A_{1k} \neq 0, A_{2k} \neq 0)$ ;

2) удовлетворяет условию  $\frac{3}{2}(|A_{1k}| + |A_{2k}| + |B_{1k}| + |B_{2k}|) < |C_k| (k = \overline{2, n-2})$ ,

$$\frac{3}{2}(|A_{21}| + |B_{11}| + |B_{21}|) < |C_1| (k = 1), \quad \frac{3}{2}(|B_{10}| + |B_{20}|) < |C_0| (k = 0),$$

$$\frac{3}{2}(|A_{1n-1}| + |A_{2n-1}| + |B_{1n-1}|) < |C_{n-1}| (k = n-1), \quad \frac{3}{2}(|A_{1n}| + |A_{2n}|) < |C_n| (k = n).$$

Второе условие можно назвать **строгим полуторным диагональным преобладанием**, тогда:

1)  $|\lambda_{1k}| < 1, |\lambda_{2k}| < 1, k = \overline{2, n-2}$ ;

2) формулы прогоночных коэффициентов (23) корректны.

**Доказательство:**

1) Доказательство первой части **утверждения 3** проведем по индукции. Для базы индукции  $k = 0, 1, 2$  из формул прогоночных коэффициентов (23) имеем:

$$|\lambda_{10}| = |\lambda_{11}| = 0 < 1, \quad |\lambda_{12}| = \left| \frac{B_{12} + A_{22}\lambda_{21} + A_{12}\lambda_{10}\lambda_{21}}{C_2 - A_{12}\lambda_{10}\lambda_{11} - A_{12}\lambda_{20} - A_{22}\lambda_{11}} \right| = \left| \frac{B_{12}}{C_2} \right| < \left| \frac{C_2}{C_2} \right| = 1,$$

$$|\lambda_{20}| = |\lambda_{21}| = 0 < 1, \quad |\lambda_{22}| = \left| \frac{B_{22}}{C_2 - A_{12}\lambda_{10}\lambda_{11} - A_{12}\lambda_{20} - A_{22}\lambda_{11}} \right| = \left| \frac{B_{22}}{C_2} \right| < \left| \frac{C_2}{C_2} \right| = 1.$$

Если  $|\lambda_{1k-1}| < 1, |\lambda_{2k-1}| < 1, |\lambda_{1k-2}| < 1, |\lambda_{2k-2}| < 1$ , то согласно (23) и утверждению 3 при  $k = \overline{2, n-2}$ :

$$|\lambda_{2k}| = \frac{|B_{2k}|}{|C_k - A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} - A_{1k}\lambda_{2k-2} - A_{2k}\lambda_{1k-1}|} < \frac{|B_{2k}|}{|C_k| - |B_{2k}| - |A_{1k}| - |A_{2k}|} < \\ < \frac{|B_{2k}|}{|B_{1k}| + \frac{1}{2}(|B_{2k}| + |B_{1k}| + |A_{1k}| + |A_{2k}|)} < \frac{|B_{2k}|}{|B_{2k}|} = 1.$$

$$|\lambda_{1k}| = \left| \frac{B_{1k} + A_{2k}\lambda_{2k-1} + A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{2k-1}}{C_k - A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} - A_{1k}\lambda_{2k-2} - A_{2k}\lambda_{1k-1}} \right| < \frac{|B_{1k}| + |A_{2k}| + |A_{1k}|}{|C_k| - |B_{2k}| - |A_{1k}| - |A_{2k}|} < \\ < \frac{|B_{1k}| + |A_{2k}| + |A_{1k}|}{|B_{1k}| + \frac{1}{2}(|B_{2k}| + |B_{1k}| + |A_{1k}| + |A_{2k}|)} = \frac{|B_{1k}| + |A_{2k}| + |A_{1k}|}{|B_{1k}| + |A_{1k}| + |A_{2k}|} = 1,$$

т.е. из  $|\lambda_{1k-1}| < 1, |\lambda_{2k-1}| < 1, |\lambda_{1k-2}| < 1, |\lambda_{2k-2}| < 1 \Rightarrow |\lambda_{1k}| < 1, |\lambda_{2k}| < 1$ .

Что и требовалось доказать.

2) Для корректности формул (23) достаточно, чтобы знаменатель формул не обращался в 0.

С учетом доказанного первого утверждения  $|\lambda_{10}| = |\lambda_{11}| = 0 < 1, |\lambda_{20}| = |\lambda_{21}| = 0 < 1, |\lambda_{1k}| < 1,$

$|\lambda_{2k}| < 1, k = \overline{2, n-2}$ , тогда  $\forall k = \overline{2, n-2}$ , имеем

$$|C_k - A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} - A_{1k}\lambda_{2k-2} - A_{2k}\lambda_{1k-1}| > |C_k| - |B_{2k}| - |A_{1k}| - |A_{2k}| > |B_{1k}| + \frac{1}{2}(|B_{2k}| + |B_{1k}| + |A_{1k}| + |A_{2k}|) > 0.$$

Другими словами, знаменатели трех формул (23) сохраняют знак и в 0 не обращаются.

Что и требовалось доказать.

**Замечание 3.** Непосредственной проверкой убеждаемся, что коэффициенты линейной системы уравнений (25) удовлетворяют условию корректности (**утверждение 3**):

$$\frac{173}{70} \approx 2,471 > \frac{3}{2} 2 \left( \frac{1}{30} + \frac{8}{21} \right) \approx 1,242 - \text{невяная система разностных уравнений (25) с пятидиаго-}$$

нальной симметрической матрицей устойчива относительно прогоночных формул (20), (23), (24).

**Аппроксимация граничного оператора.** Для шаблона граничного оператора рассмотрим симметричный 15-точечный шаблон, координатные оси  $x, y$  направлены вверх и вправо, центральный узел с координатами (0,0) выделен светлым кружком. Левая граница прямоугольной области имеет координату  $x = -1$  и включает 5 узлов, расположенных на ней.

$$\begin{array}{ccc} \bullet -1, 2 & \bullet 0, 2 & \bullet 1, 2 \\ \bullet -1, 1 & \bullet 0, 1 & \bullet 1, 1 \\ \bullet -1, 0 & \bullet 0, 0 & \bullet 1, 0 \\ \bullet -1, -1 & \bullet 0, -1 & \bullet 1, -1 \\ \bullet -1, -2 & \bullet 0, -2 & \bullet 1, -2 \end{array}$$

Рассмотрим случай с одинаковым шагом сетки по обоим переменным  $h_1 = h_2 = h$ . Оператор Лапласа является линейным оператором, который можно аппроксимировать квадратурной формулой (более того, погрешность аппроксимации является линейным оператором) в силу леммы [6]. Аппроксимируем оператор Лапласа линейной квадратурной формулой:

$$u_{xx} + u_{yy} \equiv \Delta u \equiv f(x, y) = \frac{1}{h^2} (C_0 u_{0,0} + C_1 (u_{0,1} + u_{0,-1} + u_{1,0} + u_{-1,0}) + C_2 (u_{1,1} + u_{-1,1} + u_{1,-1} + u_{-1,-1}) + \\ + C_3 (u_{0,2} + u_{0,-2}) + C_4 (u_{1,2} + u_{-1,2} + u_{-1,-2} + u_{1,-2})). \tag{26}$$

Используем формулу (6) для разложения в ряд Тейлора суммы 4-х узловых значений в вершинах прямоугольника:

$$\begin{aligned} u_{1,2} + u_{-1,2} + u_{-1,-2} + u_{1,-2} &= 4u_{0,0} + 2h^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \\ &+ \frac{h^4}{6} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 24 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 16 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{h^6}{180} \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 60 \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 240 \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + 64 \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \\ &+ \frac{h^8}{10080} \left( \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + 112 \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} + 1120 \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} + 1792 \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} + 256 \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + O(h^{10}). \end{aligned} \quad (27)$$

$$u_{0,2} + u_{0,-2} = 2u_{0,0} + 4h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{4h^4}{3} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{8h^6}{45} \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} + \frac{4h^8}{315} \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} + O(h^{10}). \quad (28)$$

Подставим разложения (27), (28), (8), (9) в формулу (26) и сгруппируем слагаемые по степеням  $h^{2l}$ :

$$\begin{aligned} \Delta u \equiv f(x, y) &= \frac{u_{0,0}}{h^2} (C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 2C_3 + 4C_4) + \Delta u (C_1 + 2C_2 + 2C_4) + \\ &+ u_{yy} (4C_3 + 6C_4) + h^2 \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \left( \frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{C_4}{6} \right) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \left( \frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{4}{3} C_3 + \frac{8C_4}{3} \right) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} (C_2 + 4C_4) \right) + \\ &+ h^4 \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \left( \frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{C_4}{180} \right) + \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} \left( \frac{15}{180} C_2 + \frac{C_4}{3} \right) + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \left( \frac{15}{180} C_2 + \frac{4C_4}{3} \right) + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \left( \frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{8C_3}{45} + \frac{64C_4}{180} \right) \right) + \\ &+ h^6 \left( \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} \left( \frac{C_1}{20160} + \frac{C_2}{10080} + \frac{C_4}{10080} \right) + \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} \left( \frac{28}{10080} C_2 + \frac{112}{10080} C_4 \right) + \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} \left( \frac{70}{10080} C_2 + \frac{1120}{10080} C_4 \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} \left( \frac{28}{10080} C_2 + \frac{1792}{10080} C_4 \right) + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \left( \frac{C_1}{20160} + \frac{C_2}{10080} + \frac{4C_3}{315} + \frac{256C_4}{10080} \right) \right) + O(h^8). \end{aligned} \quad (29)$$

Левая и правая части формулы (29) должны быть равны с точностью до  $O(h^8)$ . В пределе при  $h \rightarrow 0$  коэффициент  $C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 2C_3 + 4C_4 = 0$  при  $\frac{u_{0,0}}{h^2}$ , иначе первое слагаемое правой части стремится к бесконечности. Коэффициент при  $\Delta u$  равен единице для тождественности выражения (29) с нулевой степенью по  $h$ :  $(C_1 + 2C_2 + 2C_4 = 1)$ . Коэффициент при  $u_{yy}$  должен быть равен 0, т.е.  $4C_3 + 6C_4 = 0$ . Все остальные слагаемые в формуле (29) необходимо выразить через частные производные четного порядка (и по  $x$ , и по  $y$ ) от правой части уравнения Пуассона – функции  $f(x, y)$ . Так как в скобке при  $h^2$  могут присутствовать только частные производные  $f_{xx}, f_{yy}$ , то в общем случае получаем

$$B_1 f_{xx} + B_2 f_{yy} = B_1 \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + B_2 \left( \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = B_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + (B_1 + B_2) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}.$$

В силу последнего уравнения в (29) имеем связь  $\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{C_4}{6} + \frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{4}{3} C_3 + \frac{8C_4}{3} = (C_2 + 4C_4)$ .

Найдем связь коэффициентов в (29) с  $h^4$ . Вообще говоря, сумма со всеми четными производными  $f(x, y)$

$$\begin{aligned} B_1 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + B_2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + B_3 \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} &= B_1 \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} \right) + B_2 \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) + B_3 \left( \frac{\partial^6 u}{\partial y^4 \partial x^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) = \\ &= B_1 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + (B_1 + B_2) \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + (B_2 + B_3) \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + B_3 \frac{\partial^6 u}{\partial y^6}. \end{aligned}$$



В силу последнего уравнения в скобке с  $h^4$  в формуле (29) получаем уравнение связи:

$$\frac{15}{180}C_2 + \frac{C_4}{3} - \left( \frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{C_4}{180} \right) = \frac{15}{180}C_2 + \frac{4C_4}{3} - \left( \frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{8C_3}{45} + \frac{64C_4}{180} \right) \Leftrightarrow 32C_3 - 117C_4 = 0.$$

По сравнению с формулой (13), у которой восьмой алгебраический порядок погрешности формулы (29) равен шести, т.е.  $h^6$ . Объединим все условия на коэффициенты в систему линейных уравнений, предварительно приводя элементарные преобразования:

$$\begin{cases} C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 2C_3 + 4C_4 = 0 \\ C_1 + 2C_2 + 2C_4 = 1 \\ 4C_3 + 6C_4 = 0 \\ C_1 - 4C_2 + 8C_3 - 7C_4 = 0 \\ 32C_3 - 117C_4 = 0 \end{cases} \quad (30)$$

Система линейных неоднородных уравнений (30) имеет единственное решение

$$C_0 = -\frac{10}{3}, C_1 = \frac{2}{3}, C_2 = \frac{1}{6}, C_3 = 0, C_4 = 0, \frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} = \frac{1}{12}, \frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} = \frac{1}{360}, \frac{15}{180}C_2 = \frac{1}{72}. \quad (31)$$

Перепишем формулу (29) с найденными коэффициентами из (31)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} \left( -\frac{10}{3}u_{0,0} + \frac{2}{3}(u_{0,1} + u_{0,-1} + u_{1,0} + u_{-1,0}) + \frac{1}{6}(u_{1,1} + u_{-1,1} + u_{1,-1} + u_{-1,-1}) \right) = \\ & = \Delta u + h^2 \left( \frac{1}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{1}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + h^4 \left( \frac{1}{360} \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{1}{72} \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) \right) + O(h^6) = \\ & = f + \frac{h^2}{12} \Delta f + h^4 \left( \frac{1}{360} \left( \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right) + \frac{1}{90} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + O(h^6) = \\ & = f_{0,0} + \frac{h^2}{12} \Delta f + h^4 \left( \frac{\Delta f^2}{360} + \frac{1}{180} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + O(h^6). \end{aligned} \quad (32)$$

Из формулы (32) явно выразим  $u_{0,0}^{k+1}$  центральное узловое значение на  $k+1$  слое итерации, остальные узловые значения расположим на  $k$  слое итерации:

$$\begin{aligned} u_{0,0}^{k+1} &= \frac{1}{5} \left( u_{0,1}^k + u_{0,-1}^k + u_{1,0}^k + u_{-1,0}^k \right) + \frac{1}{20} \left( u_{1,1}^k + u_{-1,1}^k + u_{1,-1}^k + u_{-1,-1}^k \right) - \\ & - \frac{3}{10} h^2 f_{0,0} - h^4 \frac{\Delta f}{40} - h^6 \frac{\Delta f^2}{1200} - \frac{h^6}{600} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + O(h^8). \end{aligned} \quad (33)$$

Формула простой итерации, приведенная в сборнике [2], отличается от полученной нами формулы (33) отсутствием последних двух слагаемых, поэтому у нас порядок погрешности на 2 выше, а формула точнее. Из формулы (32) легко получить неявную формулу для линейной системы уравнений с трехдиагональной матрицей прогонки, получаемую как частный случай из системы линейных уравнений (19) ( $A_k = B_{2k} = 0$ ):

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}u_{0,-1}^{k+1} - \frac{10}{3}u_{0,0}^{k+1} + \frac{2}{3}u_{0,1}^{k+1} = -\frac{1}{6} \left( u_{1,1}^k + u_{-1,1}^k + u_{1,-1}^k + u_{-1,-1}^k \right) - \\ & - \frac{2}{3} \left( u_{1,0}^k + u_{-1,0}^k \right) + h^2 \left( f_{0,0} + \frac{h^2}{12} \Delta f + h^4 \left( \frac{\Delta f^2}{360} + \frac{1}{180} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (34)$$

$$A_k x_{k-1} - C_k x_k + B_k x_{k+1} = F_k, \quad A_k = B_k = \frac{2}{3}, \quad C_k = \frac{10}{3},$$

$$F_k = -\frac{1}{6} \left( u_{1,1}^k + u_{1,-1}^k + u_{-1,1}^k + u_{-1,-1}^k \right) - \frac{2}{3} \left( u_{1,0}^k + u_{-1,0}^k \right) +$$

$$+ h^2 \left( f_{0,0} + \frac{h^2}{12} \Delta f + h^4 \left( \frac{\Delta f^2}{360} + \frac{1}{180} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right), \quad k = \overline{1, n-1}.$$
(35)

Из выражений (21), (23) получим формулы прогонки назад:

$$x_k = \lambda_k x_{k+1} + v_k, \quad k = \overline{n-1, 1}$$
(36)

и формулы прогонки вперед.

$$\lambda_k = \frac{B_k}{C_k - A_k \lambda_{k-1}}, \quad v_k = \frac{A_k v_{k-1} - F_k}{C_k - A_k \lambda_{k-1}}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad \lambda_0 = 0, \quad v_0 = x_0.$$
(37)

Условие устойчивости выполнено автоматически [4].

$$|A_k| + |B_k| < |C_k|, \quad k = \overline{n-1, 1}, \quad \Leftrightarrow \frac{4}{3} < \frac{10}{3}.$$

Метод прогонки с несимметричной трехдиагональной матрицей был использован авторами и в работе [7].

Программа для решения уравнения Пуассона написана на FORTRAN:

```

program puasson; use dfimsl
integer(8), parameter :: n=120, n1=60, m=20000; integer(8) :: i, j, k, kk
real(8) :: u(0:m+1, 0:n1+1, 0:n+1), a, b, d, pi, x, y
real(8) :: res(0:n1+1, 0:n+1), delta(0:n1+1, 0:n+1), max, fif1(0:n+1), fif0(0:n+1), fif10(0:n+1), fif11(0:n+1)
real(8) :: c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, nu00(0:n+1), ll(0:n+1)
real(8) :: c(0:n+1), fif(0:n+1), l1(0:n+1), l2(0:n+1), nu(0:n+1), nu0(0:n+1), l(0:n+1)
real(8) :: cch, ssh, a1(0:n+1), a2(0:n+1), b1(0:n+1), b2(0:n+1), f, laplf1, laplf2, laplf
real(8) :: h1, h2, h, aa(0:n+1), bb(0:n+1), c0(0:n+1)
real(8) :: ss1, ss2, aa1, aa2, bb1, bb2, cc, c11, c22, c33, c44, c55, c66
cch(x) = (dexp(x) + dexp(-x)) / 2d0; ssh(x) = (dexp(x) - dexp(-x)) / 2d0
aa1(x, y) = dsin(y); aa2(x, y) = dsin(y); bb1(x, y) = dsin(x)
bb2(x, y) = dsin(x); f(x, y) = dsin(x)
laplf1(h1, x, y) = -h1 * h1 * dsin(x); ss1(h1, x, y) = h1 * h1 * h1 * h1 * dsin(x)
ss2(h1, x, y) = -h1 * h1 * h1 * h1 * h1 * dsin(x); laplf(h1, x, y) = -h1 * h1 * dsin(x)
max = -1000d0; pi = 2d0 * dasin(1d0); a = 0d0; b = 2d0 * pi; cc = 0d0; d = pi
h1 = (b - a) / dfloat(n); h2 = (d - cc) / dfloat(n1)
do i = 1, n - 1, 1; do j = 1, n1 - 1, 1
u(0, j, i) = 0d0
enddo; enddo
do k1 = 0, m, 1; do i = 0, n, 1; do j = 0, n1, 1
x = a + h1 * dfloat(i); y = cc + h1 * dfloat(j)
if(i == 0 .or. i == n .or. j == 0 .or. j == n1) then
u(k1, 0, i) = bb1(x, cc); u(k1, n1, i) = bb2(x, d); u(k1, j, 0) = aa1(a, y); u(k1, j, n) = aa2(b, y)
endif; enddo; enddo; enddo
do kk = 0, n1, 1
a1(kk) = 1d0 / 30d0; a2(kk) = 8d0 / 21d0; b1(kk) = 8d0 / 21d0; b2(kk) = 1d0 / 30d0; c(kk) = 173d0 / 70d0
enddo
do k = 0, m, 1; do i = 1, n - 1, 1; do j = 1, n1 - 1, 1
if((i == 1 .and. j == 1) .or. (i == 1 .and. j == n1 - 1) .or. (i == n - 1 .and. j == 1) .or. (i == n - 1 .and. j == n1 - 1)) then
y = cc + h1 * dfloat(j); x = a + h1 * dfloat(i)
c1 = 2d - 1 * (u(k, j - 1, i) + u(k, j + 1, i) + u(k, j, i - 1) + u(k, j, i + 1))
c2 = 5d - 2 * (u(k, j + 1, i + 1) + u(k, j + 1, i - 1) + u(k, j - 1, i - 1) + u(k, j - 1, i + 1))
c3 = -(3d - 1) * h1 * h1 * f(x, y) - (2.5d - 2) * h1 * h1 * laplf(h1, x, y) - ss1(h1, x, y) * h1 * h1 / 1200d0
u(k + 1, j, i) = c1 + c2 + c3
endif; enddo; enddo
l(1) = 0d0; l(n1 - 1) = 0d0; ll(1) = 0d0; ll(n1 - 1) = 0d0; nu0(1) = u(k + 1, 1, 1)
nu0(n1 - 1) = u(k + 1, n1 - 1, 1); nu00(1) = u(k + 1, 1, n1 - 1); nu00(n1 - 1) = u(k + 1, n1 - 1, n1 - 1)

```

```

do kk=1,n1-1,1
bb(kk)=240d0; aa(kk)=240d0;c0(kk)=1200d0
enddo
do j=2,n1-2,1
y=cc+h1*dfloat(j);x=a+h1*dfloat(i)
c4=-60d0*(u(k,j+1,2)+u(k,j+1,0)+u(k,j-1,0)+u(k,j-1,2));c5=-240d0*(u(k,j,2)+u(k,j,0))
c6=h1*h1*360d0*f(a+h1,y)+30d0*h1*h1*laplf(h1,a+h1,y)+ss1(h1,a+h1,y)*h1*h1
fif(j)=c4+c5+c6; l(j)=bb(j)/(c0(j)-aa(j)*(j-1));nu0(j)=(aa(j)*nu0(j-1)-fif(j))/(c0(j)-aa(j)*(j-1))
c44=-60d0*(u(k,j+1,n)+u(k,j+1,n-2)+u(k,j-1,n)+u(k,j-1,n-2));c55=-240d0*(u(k,j,n)+u(k,j,n-2))
c66=h1*h1*360d0*f(b-h1,y)+30d0*h1*h1*laplf(h1,b-h1,y)+ss1(h1,b-h1,y)*h1*h1
fif1(j)=c44+c55+c66; ll(j)=bb(j)/(c0(j)-aa(j)*ll(j-1));nu00(j)=(aa(j)*nu00(j-1)-fif1(j))/(c0(j)-aa(j)*ll(j-1))
enddo
do j=n1-2,2,-1
u(k+1,j,1)=l(j)*u(k,j+1,1)+nu0(j);u(k+1,j,n-1)=ll(j)*u(k,j+1,n-1)+nu00(j)
enddo
l(1)=0d0;l(n-1)=0d0;ll(1)=0d0;ll(n-1)=0d0;nu0(1)=u(k+1,1,1)
nu0(n-1)=u(k+1,1,n-1);nu00(1)=u(k+1,n1-1,1);nu00(n-1)=u(k+1,n1-1,n-1)
do kk=1,n-1,1
bb(kk)=240d0;aa(kk)=240d0;c0(kk)=1200d0
enddo
do i=2,n-2,1
x=a+h1*dfloat(i);y=cc+h1*dfloat(j)
c4=-60d0*(u(k,2,i+1)+u(k,0,i+1)+u(k,0,i-1)+u(k,2,i-1));c5=-240d0*(u(k,2,i)+u(k,0,i))
c6=h1*h1*360d0*f(x,cc+h1)+30d0*h1*h1*laplf(h1,x,cc+h1)+ss1(h1,x,cc+h1)*h1*h1
fif0(i)=c4+c5+c6; l(i)=bb(i)/(c0(i)-aa(i)*l(i-1));nu0(i)=(aa(i)*nu0(i-1)-fif0(i))/(c0(i)-aa(i)*l(i-1))
c44=-60d0*(u(k,n1,i+1)+u(k,n1-2,i+1)+u(k,n1,i-1)+u(k,n1-2,i-1))
c55=-240d0*(u(k,n1,i)+u(k,n1-2,i))
c66=h1*h1*360d0*f(x,d-h1)+30d0*h1*h1*laplf(h1,x,d-h1)+ss1(h1,x,d-h1)*h1*h1
fif10(i)=c44+c55+c66; ll(i)=bb(i)/(c0(i)-aa(i)*ll(i-1));nu00(i)=(aa(i)*nu00(i-1)-fif10(i))/(c0(i)-aa(i)*ll(i-1))
enddo
do i=n-2,2,-1
u(k+1,1,i)=l(i)*u(k,1,i+1)+nu0(i);u(k+1,n1-1,i)=ll(i)*u(k,n1-1,i+1)+nu00(i)
enddo
do i=2,n-2,1
l1(0)=0d0;l1(1)=0d0;l2(0)=0d0;l2(1)=0d0;l1(n1)=0d0;l2(n1)=0d0;l1(n1-1)=0d0;
l2(n1-1)=0d0;nu(n1-1)=u(k+1,n1-1,i);nu(n1)=u(k+1,n1,i);nu(1)=u(k+1,1,i);nu(0)=u(k+1,0,i)
do j=2,n1-2,1
x=a+h1*dfloat(i); y=cc+h1*dfloat(j);c1=-(8d0/21d0)*(u(k,j,i+1)+u(k+1,j,i-1))
c2=-(8d0/45d0)*(u(k,j+1,i+1)+u(k+1,j-1,i-1)+u(k,j-1,i+1)+u(k+1,j+1,i-1))
c11=-(1d0/30d0)*(u(k,j,i+2)+u(k+1,j,i-2))
c3=-(4d0/315d0)*(u(k+1,j+1,i-2)+u(k,j+1,i+2)+u(k+1,j-1,i-2)+u(k,j-1,i+2))
c33=-(4d0/315d0)*(u(k+1,j+2,i-1)+u(k,j+2,i+1)+u(k+1,j-2,i-1)+u(k,j-2,i+1))
c22=-(1d0/2520d0)*(u(k,j+2,i+2)+u(k+1,j-2,i-2)+u(k,j-2,i+2)+u(k+1,j+2,i-2))
c5=h1*h1*(f(x,y)+(1d0/7d0)*(laplf1(h1,x,y)))+(4d0/315d0)*ss1(h1,x,y)+(1d0/1260d0)*ss2(h1,x,y)
fif11(j)=c1+c2+c11+c3+c33+c22+c5
l1(j)=(a1(j)*l1(j-2)*l2(j-1)+a2(j)*l2(j-1)+b1(j))/(c(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a2(j)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2))
l2(j)=b2(j)/(c(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2)-a2(j)*l1(j-1))
nu(j)=(a1(j)*l1(j-2)*nu(j-1)+a2(j)*nu(j-1)+a1(j)*nu(j-2)-fif11(j))/(c(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2)-a2(j)*l1(j-1))
enddo
do j=n1-2,2,-1
u(k+1,j,i)=l1(j)*u(k,j+1,i)+l2(j)*u(k,j+2,i)+nu(j)
enddo; enddo; enddo
do j=0,n1,1;do i=0,n,1
x=a+h1*dfloat(i);y=cc+h2*dfloat(j)
!c1=(cch(x)+ssh(x)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi))*dsin(y)
!c2=dsin(x)*(cch(y)+ssh(y)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi))
!c3=dsin(x)*(cch(y)-1d0+ssh(y)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi))
c1=(cch(x)+ssh(x)*(1d0-cch(2d0*pi))/ssh(2d0*pi))*dsin(y);c2=dsin(x)*(cch(y)+ssh(y)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi))
c3=dsin(x)*(cch(y)-1d0+ssh(y)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi));res(j,i)=c1+c2+c3;delta(j,i)=u(m,j,i)-res(j,i)
if(delta(j,i)<0d0)then
delta(j,i)=-delta(j,i);endif
if(delta(j,i)>max)then
max=delta(j,i);endif; enddo; enddo;
print*,"norma C =",max;end program puasson

```

При  $n = n_1 = 20$ ,  $m = 5000$  программа возвращает невязку задачи (1) в равномерной норме

$$\text{norma C} = 1.1751864209253995\text{e-}10,$$

а при  $n = n_1 = 40$ ,  $m = 5000$

$$\text{norma C} = 7.476241847825804\text{e-}13,$$

что дает 8-й порядок погрешности  $\frac{\|\delta u_1\|_C}{\|\delta u_2\|_C} = \frac{1,1751864209253995\text{e-}10}{7,476241847825804\text{e-}13} \approx 234 \approx 2^8 = 256$  (так как алгебраический

порядок погрешности внутреннего разностного оператора (18) равен 8). Кроме того, при  $n = n_1 = 100$ ,  $m = 20000$  программа возвращает норму относительной погрешности

$$\text{norma C} = 6.61378111\text{e-}14,$$

близкую к  $1\text{e-}16$ , т.е. к двойной точности  $\text{real}(8)$ , в то время как по формуле простой итерации у авторов [2] ( $n = n_1 = 100$ ,  $m = 20000$ ) получим

$$\text{norma C} = 4.567879487049620\text{e-}6 > 1\text{e-}8$$

(не достигает первой точности  $\text{real}(4)$  и порядок погрешности только четвертый), здесь  $n+1$ ,  $n_1+1$  — число узлов по осям  $x$ ,  $y$  и  $m$  — число итераций. Решим также численно и аналитически задачу Пуассона на прямоугольнике:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin(x), & 0 < x < 2\pi, 0 < y < \pi \\ u(0, y) = u(2\pi, y) = \sin(y), & 0 \leq y \leq \pi \\ u(x, 0) = u(x, \pi) = \sin(x), & 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

С аналитическим решением:

$$u(x, y) = \left( \left( \frac{1 - \text{ch}(2\pi)}{\text{sh}(2\pi)} \right) \text{sh}(x) + \text{ch}(x) \right) \sin(y) + \\ + \left( \left( \frac{1 - \text{ch}(\pi)}{\text{sh}(\pi)} \right) \text{sh}(y) + \text{ch}(y) \right) \sin(x) + \left( -1 + \left( \frac{1 - \text{ch}(\pi)}{\text{sh}(\pi)} \right) \text{sh}(y) + \text{ch}(y) \right) \sin(x).$$

С учетом того, что высота прямоугольника в 2 раза меньше его ширины:  $n = 120$ ,  $n_1 = 60$ ,  $m = 20000$ .

Программа возвращает невязку последней задачи в равномерной норме:

$$\text{norma C} = 5.972999872483342\text{e-}14.$$

### Результаты:

1. Получены формулы прогонки для пятидиагональной системы линейных уравнений с 4 известными узловыми значениями на концах отрезка и соседних к концам узлах (краевое условие Дирихле).

2. Для симметрической матрицы со строгим полуторным диагональным преобладанием имеет место корректность полученных формул прогонки вперед.

3. Предложен 3-этапный алгоритм для точного решения уравнения Пуассона на прямоугольнике:

а) по формуле простой итерации (33) находят 4 значения  $u^{k+1}_{1,n-1}, u^{k+1}_{1,1}, u^{k+1}_{n-1,1}, u^{k+1}_{n-1,n-1}$ ;

б) по формулам (34)–(37) прогонкой находят  $u^{k+1}_{1,j}, u^{k+1}_{n-1,j}, u^{k+1}_{i,1}, u^{k+1}_{i,n-1}$ ,  $i, j = \overline{1, n-1}$ ;

в) по формулам (20), (23), (25) методом пятидиагональной прогонки и краевым условием Дирихле определяют  $u^{k+1}_{i,j}$ ,  $i, j = \overline{2, n-2}$ .

4. Доказано утверждение: на симметричных шаблонах аппроксимация оператора Лапласа выражается через частные производные четного порядка от неизвестной функции по каждой переменной.

5. С помощью указанного алгоритма и написанной программы показано, что при небольшом числе узлов равномерной сетки (1600) алгебраический порядок погрешности равен 8.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Блохина, Н. С. Влияние ветра на динамику развития термобара в период весеннего прогрева водоема / Н. С. Блохина, Д. А. Соловьёв // Вестник Московского университета. Серия 3, Физика. Астрономия. – 2006. – № 3. – С. 59–63.
2. Методы ускорения газодинамических расчетов на неконструированных сетках / К. Н. Волков [и др.]. – М. : Физматлит, 2013. – 536 с.
3. Согласование порядков аппроксимации дифференциального и граничного операторов в краевой задаче для уравнений в частных производных / А.Ю. Герец [и др.] // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 102–109.
4. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики : учеб. пособие / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М. : Изд-во ЛКИ, 2014. – 480 с.
5. Свешников, А.Г. Лекции по математической физике / А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. – М. : Изд-во МГУ, 1993 – 332 с.
6. Аппроксимация двойных и тройных интегралов во внутренних краевых задачах математической физики / О.В. Голубева [и др.] // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 86–104.
7. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.

Поступила 19.09.2017

**APPROXIMATION OF THE POISSON EQUATION  
ON AN EXTENDED PRECISION RECTANGLE**

**D. PASTUKHOV, Y. PASTUKHOV**

*An algorithm for solving the Poisson equation on an extended precision rectangle with the eighth algebraic order of error is proposed. For a symmetric five-diagonal matrix, formulas are obtained for marching of a linear system with the Dirichlet boundary condition. Sufficient conditions for the correctness of the forward marching formulas for a five-diagonal symmetric matrix are proved. Approximation of the node values solution for the Poisson operator with respect to the symmetric template contains only partial derivatives of even order in each of the coordinates.*

**Keywords:** *numerical methods for solving elliptic equations of mathematical physics, sufficient conditions for the correctness of the formulas for marching a five-diagonal matrix.*

УДК 514

## ТЕНЗОР ОБОБЩЕННОЙ ЭНЕРГИИ

канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ  
(Полоцкий государственный университет);

С.В. ЧЕРНОВ

(ОАО Конструкторское бюро «Дисплей», Витебск)

Приведено доказательство инвариантности энергии системы ранга  $n$ , состояние которой описывается гладкой функцией, определенной в расслоенном пространстве скоростей, то есть доказано, что при невырожденном преобразовании системы координат обобщенная энергия, заданная в виде линейной комбинации функции Лагранжа (от координат и их производных до  $n$ -го порядка) и суммы произведений обобщенных импульсов различных порядков (от первого до  $n$ -го включительно) на производные соответствующего порядка от координат, остается неизменной.

**Ключевые слова:** уравнения Эйлера – Лагранжа, гладкие многообразия, расслоенное пространство скоростей, импульс системы, тензор энергии, тензор обобщенного импульса, невырожденная функция.

**Введение.** Фундаментальные законы сохранения справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных и др.). Они одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления, и в макромире, с его классическими представлениями.

Законы сохранения используются в механике и теоретической физике. Научное и методологическое значение законов сохранения определяет их исключительная общность и универсальность. Благодаря той особой роли, которую играют законы сохранения в физике, они являются важнейшим элементом современной научной картины мира.

Между основными уравнениями динамики и законами сохранения имеется принципиальная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса. Так, если задана сила, действующая на материальную точку и начальные условия, то можно найти уравнение движения, траекторию, величину и направление скорости в любой момент времени и т. п. Законы же сохранения не дают нам прямых указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены, то есть чего в природе произойти не может.

В начале XX века Эмми Нетер доказала важную теорему, которая утверждает, что всякому непрерывному преобразованию координат с заданным законом преобразования соответствует некоторая сохраняющаяся величина (или, как говорят, инвариант преобразования). Поскольку преобразования координат тесно связаны со свойствами симметрии пространства и времени (однородностью, изотропностью пространства и однородностью времени), то каждому свойству симметрии пространства и времени должен соответствовать определенный закон сохранения. С однородностью пространства, то есть с симметрией законов физики по отношению к пространственным сдвигам начала координат, связан закон сохранения импульса. С изотропностью пространства, то есть с симметрией относительно поворота системы координат в пространстве, связан закон сохранения момента импульса. Аналогично представление об однородности времени (симметрии по отношению к сдвигам времени) приводит к закону сохранения энергии.

Значение теоремы Нетер не ограничивается только тем, что она устанавливает связь классических законов сохранения с видами симметрии, имеющими геометрическую природу. При наличии в физической системе симметрий другого рода, не связанных со свойствами пространства и времени, теорема Нетер позволяет установить другие законы сохранения. И наоборот, всякий закон сохранения связан с некоторой определенной симметрией системы.

Дифференциально-геометрическое рассмотрение импульса и энергии в физической и математической постановке изложено в литературе [1–8, 12–15]. Свойства тензора энергии-импульса при простейших линейных преобразованиях координат-времени объясняет законы сохранения импульса в макроскопической системе. Но тензор энергии-импульса в дифференциальной форме является инвариантным относительно произвольного невырожденного преобразования координат, что приводит к локальным законам сохранения энергии-импульса, например, в физике элементарных частиц. Функция Лагранжа определяет некоторую вариационную задачу, например, минимизацию интеграла действия в механической системе и динамику этой системы (уравнения Эйлера – Лагранжа) [6]. Если интегрант (подынтегральная

функция в простейшей вариационной задаче) вырожден относительно переменных времени либо координат, то это вырождение приводит соответственно к закону сохранения энергии, либо импульса относительно данной координаты [7]. Представленная работа является продолжением работ [9, 10, 13].

**Постановка задачи.**

Дифференциально-геометрические структуры, используемые в работе:  $X_m$  – гладкое многообразие размерности  $m$ ;  $T^n X_m$  – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка  $n$  с базой расслоения  $X_m$ ;  $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  – невырожденная функция в точке  $v_x^n \in T^n X_m$  [9].

**Лемма 1.** Пусть  $\bar{x}^i = S^i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , здесь  $S : (x) \rightarrow (\bar{x})$  – гладкое невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия  $X_m$  расслоения скоростей порядка  $T^p X_m$ ,  $p \geq \max(s, l)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , тогда

$$D_t^k x^i(\bar{x}) = x^{(k)i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k)j}{x} + f(\bar{x}, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{(k-1)}{x}), \quad k \geq 1,$$

где  $f(\bar{x}, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{(k-1)}{x})$  – некоторая гладкая функция

$$\bar{x}, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{(k-1)}{x}, \quad x = (x^1, \dots, x^m), \quad \overset{\cdot}{x} = D_t^s \bar{x}^j, \quad s = \overline{0, k-1}.$$

**Доказательство** проведем методом математической индукции. База индукции  $k = 1$ , тогда

$$D_t^1 x^i(\bar{x}) = x^{(1)i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(1)j}{x} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{\cdot}{x} \quad \text{– справедливо. В случае } k = 2 \text{ получим}$$

$$D_t^2 x^i(\bar{x}) = x^{(2)i}(\bar{x}) = D_t^1 \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(1)j}{x} \right) = \sum_{j=1}^m D_t^1 \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{\cdot}{x} + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} D_t^1 \overset{\cdot}{x} \right) = \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial x^l \partial \bar{x}^j} \overset{l \cdot j}{x} x + \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{\cdot \cdot j}{x} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{\cdot \cdot j}{x} + f(\bar{x}, \overset{\cdot}{x}), \quad f(\bar{x}, \overset{\cdot}{x}) = \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial x^l \partial \bar{x}^j} \overset{l \cdot j}{x} x, \quad \text{проверено для } k = 2.$$

Индуктивный переход. Пусть  $D_t^k x^i(\bar{x}) = x^{(k)i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k)j}{x} + f(\bar{x}, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{(k-1)}{x})$ , тогда

$$D_t^{k+1} x^i(\bar{x}) = D_t^1 x^{(k)i}(\bar{x}) = D_t^1 \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k)j}{x} + f(\bar{x}, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{(k-1)}{x}) \right) = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial x^l \partial \bar{x}^j} \overset{l \cdot j}{x} \right) \overset{(k)j}{x} + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k+1)j}{x} + \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\bar{x}, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{(s-1)}{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(s+1)j}{x} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k+1)j}{x} + f(\bar{x}, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{(k)}{x}), \quad 0+1 \leq s+1 \leq k-1+1 = k$$

$$f(\bar{x}, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{(k)}{x}) = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial x^l \partial \bar{x}^j} \overset{l \cdot j}{x} \right) \overset{(k)j}{x} + \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\bar{x}, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{(s-1)}{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(s+1)j}{x}. \quad \text{Лемма доказана.}$$

**Теорема 1** [11, с. 193, 13, с. 121, лемма 3]. Пусть  $x^i = S^i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$ ,  $S : (\bar{x}) \rightarrow (x)$  – гладкое невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия  $X_m$  расслоения скоростей порядка  $T^p X_m$ ,  $p \geq \max(s, l)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , тогда

$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x}, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{(l)}{x})}{\partial \bar{x}^j} = \begin{cases} C_k^p \cdot D_t^{k-p} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right), & C_k^p = \frac{k!}{p!(k-p)!}, \quad k! = \prod_{j=1}^k j, \quad k \geq p; \\ 0, & k < p. \end{cases}$$

**Доказательство.** Утверждение теоремы в более общем виде приведено в [11].

Ввиду важности этого утверждения приведем независимое от ссылки доказательство **теоремы 1** для двух параметров  $k$  и  $p$ .

При  $p > k \geq 0$  по **лемме 1** имеем  $x^{(k)i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) = x^{(k)i}(\bar{x}) = \sum_{l=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-l}} \bar{x}^{(k)l} + f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})^{(k-1)}$ ,  $k \geq 1$ ,

поэтому

$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{(\bar{p})_j} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \sum_{l=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-l}} \bar{x}^{(k)l} + f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})^{(k-1)} \right) = 0.$$

При  $k \geq p$  доказательство проведем методом математической индукции. База индукции  $k = p$ . Используя **лемму 1**, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{(\bar{p})_j} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \sum_{l=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-l}} \bar{x}^{(k)l} + f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})^{(k-1)} \right) = \\ &= \left( \sum_{k=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-l}} \frac{\partial \bar{x}^{(k)l}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})^{(k-1)}}{(\bar{p})_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-l}} \delta_j^l = \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}}, \quad \delta_j^l = \begin{cases} 1, & j = l \\ 0, & j \neq l \end{cases} \text{— символ Кронекера.} \end{aligned}$$

База индукции доказана.

Индуктивный переход. Пусть утверждение теоремы справедливо при  $k \geq p$ . Введем функции

$$F_k^i(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) = x^{(k)i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}), \quad \bar{x}^{(k+1)i} = D_t(x^{(k)i}) = D_t F_k^i = \sum_{l=1}^m \sum_{s=0}^k \frac{\partial F_k^i}{\partial \bar{x}^{-s}} \bar{x}^{(s+1)l}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^{(k+1)i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{(\bar{p})_j} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \sum_{l=1}^m \sum_{s=0}^k \frac{\partial F_k^i}{\partial \bar{x}^{-s}} \bar{x}^{(s+1)l} \right) = \sum_{l=1}^m \sum_{s=0}^k \left( -\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \bar{x} \partial \bar{x}^{-s}} \bar{x}^{(s+1)l} + \frac{\partial F_k^i}{\partial \bar{x}^{-s}} \frac{\partial \bar{x}^{(s+1)l}}{\partial \bar{x}} \right) = \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{s=0}^k \left( -\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \bar{x} \partial \bar{x}^{-s}} \bar{x}^{(s+1)l} \right) + \frac{\partial F_k^i}{\partial \bar{x}^{-s}} \delta_p^{s+1} \delta_j^l = \sum_{l=1}^m \sum_{s=0}^k \left( -\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \bar{x} \partial \bar{x}^{-s}} \bar{x}^{(s+1)l} \right) + \frac{\partial F_k^i}{\partial \bar{x}^{-(p-1)j}}. \end{aligned}$$

По предположению индукции  $\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{(\bar{p})_j} = \frac{\partial F_k^i}{\partial \bar{x}^{-j}} = C_k^p D_t^{k-p} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}} \right)$ . Значит,

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m \sum_{s=0}^k \left( -\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \bar{x} \partial \bar{x}^{-s}} \bar{x}^{(s+1)l} \right) + \frac{\partial F_k^i}{\partial \bar{x}^{-(p-1)j}} &= C_k^p \left( \sum_{l=1}^m \sum_{s=0}^k \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( D_t^{k-p} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}} \right) \right) D_t \bar{x}^{(s)l} \right) + C_k^{p-1} D_t^{k-(p-1)} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}} \right) = \\ &= C_k^p \left( \sum_{l=1}^m \sum_{s=0}^{k-p} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( D_t^{k-p} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}} \right) (\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})^{(k-p)} \right) D_t \bar{x}^{(s)l} \right) + C_k^{p-1} D_t^{k-(p-1)} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}} \right) = \\ &= C_k^p D_t \left( D_t^{k-p} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}} \right) \right) + C_k^{p-1} D_t^{k-(p-1)} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}} \right) = (C_k^p + C_k^{p-1}) D_t^{k+1-p} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}} \right) = C_{k+1}^p D_t^{k+1-p} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}} \right). \end{aligned}$$



В последней строке было использовано свойство биномиальных коэффициентов:

$$C_k^p + C_k^{p-1} = \frac{k!}{p!(k-p)!} + \frac{k!}{(p-1)!(k-(p-1))!} = \frac{k!}{p!(k-p)!} \left(1 + \frac{p}{k-p+1}\right) = \frac{(k+1)!}{p!(k-p+1)!} = C_{k+1}^p.$$

Теорема доказана.

**Определение 1.** Система функций  $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$ , где

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2 \min(n,p)-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \right), \quad k = \overline{0, n}, \quad i = \overline{1, m},$$

называется обобщенным импульсом ранга  $n$  для функции  $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  в локальных координатах  $(x)$  базы  $X_m$  расслоения  $T^p X_m$ , здесь  $L(x, \dot{x}, \dots, \overset{(p)}{x})$  – локальная запись функции  $L$  при выборе локальных координат  $(x)$  в базе  $X_m$  расслоения  $T^p X_m$ .

Функция  $p_{k,n}^i$  называется  $k$ -й компонентой обобщенного импульса  $P_n$  ранга  $n$  по  $i$ -й координате или импульсами порядка  $k$  ( $k$ -импульсами) по  $i$ -й координате обобщенного импульса  $P_n$  ранга  $n$ .

**Теорема 2** [10, с. 127, теорема 1; 13, С. 119, теорема 2] (закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе  $X_m$  расслоения  $T^{2n} X_m$ ). При замене  $(\bar{x}) \rightarrow (x(\bar{x}))$  в базе многообразия

$X_m$  расслоения  $T^{2n} X_m$  обобщенные импульсы  $k$ -порядка  $\overline{p_k^i(n)}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \overset{(2n-k)}{\bar{x}})$  в системе координат  $(\bar{x})$  преобразуются как **тензоры** типа  $(0,1)$  (ковекторы):

$$\overline{p_k^i(n)}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \overset{(2n-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^m p_k^j(n)(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(n)(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}.$$

Импульс порядка  $k$  в системе координат  $(x)$  в базе многообразия  $X_m$  расслоения  $T^{2n} X_m$  имеет вид

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \right), \quad k = \overline{0, n} \quad i, j = \overline{1, m}.$$

**Определение 2.** Пусть  $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $L(x, \dots, \overset{(p)}{x})$  – локальная запись функции  $L$  в локальных координатах  $(x)$  в базе  $X_m$  расслоения  $T^p X_m$ .

Функция

$$\begin{aligned} H = H_n = H_n(L, x) &= H(L, x, n) = -L(x, \dot{x}, \dots, \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i \overset{(k)i}{x} = -L(x, \dot{x}, \dots, \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i D_t^k x^i = \\ &= -L(x, \dot{x}, \dots, \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \right) D_t^k x^i \overset{(k)i}{x} = D_t^k x^i, \end{aligned}$$

где  $D_t^k$  – оператор  $k$ -кратного полного дифференцирования по времени  $t$ , называется гамильтонианом (функцией Гамильтона) ранга  $n$  этого преобразования для функции Лагранжа  $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ , а также энергией системы, состояние которой описывается функцией  $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  в локальной системе координат  $(x)$  в базе  $X_m$  расслоения  $T^p X_m$ .

В дальнейшем будет доказано, что при  $p \leq n$  энергия системы является тензором нулевого ранга, то есть не зависит от выбора локальной системы координат  $(x)$  в базе  $X_m$  расслоения  $T^p X_m$ , а при

$p > n$ , вообще говоря, зависит от локальных координат и, таким образом, не сохраняется при замене локальной системы координат в базе  $X_m$  расслоения  $T^p X_m$ .

**Замечание 1.** Максимальный порядок производной по  $t$  порядка  $l$  в  $p_k^i(n)$  равен  $l+l+k=2 \cdot l+k$ .

Если  $l+k > p$ , то  $\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \equiv 0$  и, значит, коэффициент при производной  $x^{(l+k)i}$  равен 0, следовательно,

при определении максимального порядка производной по  $t$  можно считать  $l+k \leq p$  (в частности,  $k \leq p$ ).

Кроме того,

$$l \leq n-k \Leftrightarrow l+k \leq n \Rightarrow l+k \leq \min(n, p) \Rightarrow l \leq \min(n, p) - k \Rightarrow 2 \cdot l+k \leq 2 \cdot (\min(n, p) - k) + k = 2 \cdot \min(n, p) - 2 \cdot k + k = 2 \cdot \min(n, p) - k, \quad p_{k,n}^i \text{ зависит от производных порядка } \max(2 \min(n, p) - k, p) = b(n, p, k), \quad b(n, n, k) = b(n, p = n, k) = \max(2 \min(n, n) - k, p).$$

Для каждого слагаемого вида  $p_{k,n}^i x^{(k)i} = p_{k,n}^i x^{(k)i}$  – произведения импульса порядка  $k$  на производную того же порядка по  $i$ -й координате – справедливо  $\max(\max(2 \min(n, p) - k, p), k) = \max(2 \min(n, p) - k, p, k)$ . Энергия системы

$$H_n(L, x) = H(L, x, n) = -L(x, x, \dots, x) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i x^{(k)i} = -L(x, \dots, x) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i x^{(k)i}$$

будет зависеть от максимального порядка производной

$$\max_{1 \leq k \leq n} (2 \min(n, p) - k, p, k) = a(n, p) = \max_{1 \leq k \leq n} (b(n, p, k), k).$$

На основании этого можно записать

$$H(x, x, \dots, x) = H_n(L, x) = H(L, x, n) = -L(x, x, \dots, x) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x, x, \dots, x) x^{(k)i} = -L(x, x, \dots, x) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x, x, \dots, x) D_t^k x^i = -L(x, x, \dots, x) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) D_t^k x^i.$$

**Рассмотрим следующую постановку задачи.**

Пусть  $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ .  $L(x, \dots, x)$ ,  $p_i^k(x, x, \dots, x)$  – локальная запись функции  $L$  и импульсов  $k$ -го порядка при выборе локальных координат  $(x)$  в базе  $X_m$  расслоения  $T^n X_m$ .

Проведем исследование закона преобразования энергии

$$H = H_n = H_n(L, x) = H(L, x, n) = -L(x, x, \dots, x) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x, x, \dots, x) x^{(k)i} = -L(x, \dots, x) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i D_t^k x^i,$$

где  $x^{(k)i} = D_t^k x^i$  – производная порядка  $k$  при замене локальной системы координат  $x = x(\bar{x})$  в базе  $X_m$  расслоения скоростей  $T^n X_m$ ;

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^m), \quad \bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^m), \quad \bar{L}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) = L(x(\bar{x}), D_t x(\bar{x}), \dots, D_t^n x(\bar{x}));$$

$$p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) \text{ – импульс } k\text{-го порядка.}$$

**Основные теоремы.**

**Теорема 3** [9, с. 127, теорема 2; 13, с. 120, лемма 2] (дифференциальная связь импульсов  $k$  и  $(k - 1)$ -го порядков). Пусть  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  – невырожденная функция Лагранжа, здесь  $L(x, \dots, \dot{x})$ ,  $p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})$  и  $p_{k-1,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})$  – локальная запись функции  $L$  и импульсов  $k$  и  $(k - 1)$ -го порядков при выборе локальных координат  $(x)$  в базе  $X_m$  расслоения  $T^P X_m$ . Тогда выполняется следующее соотношение:

$$D_t p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x}) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^{(k-1)i}} - p_{k-1,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x}),$$

где  $p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^{(l+k)i}} \right)$  – импульс  $k$ -го порядка;

$$p_{k-1,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x}) = \sum_{l=0}^{n-(k-1)} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^{(l+k-1)i}} \right) - \text{импульс } (k-1)\text{-го порядка.}$$

**Теорема 4.** Пусть  $x^i = S^i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$ ,  $S: (\bar{x}) \rightarrow (x)$  – невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия  $X_m$  расслоения скоростей порядка  $T^P X_m$ ,  $p \geq \max(s, l)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , тогда

$$D_t^k x^i(x) = \frac{\partial^k x^i(x)}{\partial x^j} = \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^k C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) x^j, \quad C_l^s = \frac{l!}{s!(l-s)!}, \quad l! = \prod_{k=1}^l k, \quad l \geq s. \quad (1)$$

**Доказательство.** Доказательство проведем математической индукцией по порядку производной  $k$ . Пусть база индукции  $k = 1$ , тогда

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^m), \quad \bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^m).$$

По определению считаем  $C_0^0 = 1$ , в этом случае формула (1) принимает вид

$$D_t^1 x^i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \bar{x}^j = \sum_{j=1}^m C_{1-1}^{1-1} D_t^{1-1} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \bar{x}^j. \quad (2)$$

Рассмотрим при  $k = 2$ , имеем

$$\begin{aligned} D_t^2 x^i &= D_t^1 \dot{x}^i = D_t^1 \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \bar{x}^j \right) = \sum_{j=1}^m D_t^1 \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \bar{x}^j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} D_t^1 \bar{x}^j = \\ &= \sum_{j=1}^m D_t^1 \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \bar{x}^j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \ddot{x}^j = \sum_{j=1}^m C_{2-1}^{1-1} D_t^{2-1} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \bar{x}^j + \sum_{j=1}^m C_{2-1}^{2-2} D_t^{2-2} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \ddot{x}^j. \end{aligned} \quad (3)$$

Затем при  $k = 3$

$$\begin{aligned} D_t^3 x^i &= D_t^2 \ddot{x}^i = D_t^2 \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \bar{x}^j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \ddot{x}^j \right) = \sum_{j=1}^m D_t^2 \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \bar{x}^j + \sum_{j=1}^m D_t^2 \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \ddot{x}^j + \\ &+ \sum_{j=1}^m D_t^1 \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \ddot{x}^j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \ddot{\ddot{x}}^j = \sum_{j=1}^m D_t^2 \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \bar{x}^j + 2 \sum_{j=1}^m D_t^1 \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \ddot{x}^j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \ddot{\ddot{x}}^j = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^m C_{3-1}^{3-1} D_t^{3-1} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(1)j} x + \sum_{j=1}^m C_{3-1}^{3-2} D_t^{3-2} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(2)j} x + \sum_{j=1}^m C_{3-1}^{3-3} D_t^{3-3} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(3)j} x = \\
&= \sum_{j=1}^m (C_{3-1}^{3-1} D_t^{3-1} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(1)j} x + C_{3-1}^{3-2} D_t^{3-2} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(2)j} x + C_{3-1}^{3-3} D_t^{3-3} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(3)j} x). \quad (4)
\end{aligned}$$

Наконец, при  $k = 4$

$$\begin{aligned}
D_t^4 x^i &= D_t^1 \bar{x}^i = D_t^1 \left( \sum_{j=1}^m D_t^2 \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \bar{x}^j + 2 \sum_{j=1}^m D_t^1 \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \bar{x}^j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \bar{x}^j \right) = \\
&= \sum_{j=1}^m (D_t^3 \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \bar{x}^j + D_t^2 \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \bar{x}^j + 2(D_t^2 \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \bar{x}^j + D_t^1 \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \bar{x}^j) + D_t^1 \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \bar{x}^j + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \bar{x}^j) = \\
&= \sum_{j=1}^m (D_t^3 \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \bar{x}^j + 3D_t^2 \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \bar{x}^j + 3D_t^1 \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \bar{x}^j + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \bar{x}^j) = \\
&= \sum_{j=1}^m (C_{4-1}^{4-1} D_t^{4-1} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(1)j} x + C_{4-1}^{4-2} D_t^{4-2} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(2)j} x + C_{4-1}^{4-3} D_t^{4-3} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(3)j} x + C_{4-1}^{4-4} D_t^{4-4} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(4)j} x). \quad (5)
\end{aligned}$$

Формулы (2)–(5) являются частными случаями формулы (1) при  $k = 1, 2, 3, 4$  соответственно. По предположению математической индукции имеем

$$D_t^k x^i(\bar{x}) = x^i(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^k C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s)j} x.$$

$$\text{Докажем, что } D_t^{k+1} x^i(\bar{x}) = x^i(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^{k+1} C_{k+1-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s)j} x = \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^{k+1} C_k^{s-1} D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s)j} x.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
D_t^{k+1} x^i(\bar{x}) &= D_t \left( x^i(\bar{x}) \right) = D_t \left( \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^k C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s)j} x \right) = \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^k C_{k-1}^{s-1} D_t \left( D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s)j} x \right) + \\
&+ \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^k C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s)j} D_t x = \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^k C_{k-1}^{s-1} D_t^{k+1-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s)j} x + \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^k C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s+1)j} x. \quad (6)
\end{aligned}$$

В правой части формулы (6) сделаем замену переменных:

$$s = g - 1, g = s + 1, s - 1 = g - 2, k - s = k + 1 - g,$$

тогда получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^k C_{k-1}^{s-1} D_t^{k+1-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s)j} x + \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^k C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s+1)j} x = \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^k C_{k-1}^{s-1} D_t^{k+1-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s)j} x + \sum_{j=1}^m \sum_{g=2}^{k+1} C_{k-1}^{g-2} D_t^{k+1-g} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(g)j} x. \quad (7)
\end{aligned}$$

В формуле (7) меняем индекс суммирования  $g$  на  $s$ :

$$\sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^k C_{k-1}^{s-1} D_t^{k+1-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s)j} x + \sum_{j=1}^m \sum_{g=2}^{k+1} C_{k-1}^{g-2} D_t^{k+1-g} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(g)j} x =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^k C_{k-1}^{s-1} D_t^{k+1-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s)j} x + \sum_{j=1}^m \sum_{s=2}^{k+1} C_{k-1}^{s-2} D_t^{k+1-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s)j} x = \sum_{j=1}^m \sum_{s=2}^k C_{k-1}^{s-1} D_t^{k+1-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s)j} x + \\
 &+ \sum_{j=1}^m \sum_{s=2}^k C_{k-1}^{s-2} D_t^{k+1-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s)j} x + C_{k-1}^{1-1} D_t^k \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(1)j} x + C_{k-1}^{k+1-2} D_t^{k+1-(k+1)} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(k+1)j} x = \\
 &= \sum_{s=2}^k (C_{k-1}^{s-1} + C_{k-1}^{s-2}) D_t^{k+1-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s)j} x + C_{k-1}^0 D_t^k \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(1)j} x + C_{k-1}^{k-1} D_t^0 \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(k+1)j} x.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
 C_{k-1}^{s-1} + C_{k-1}^{s-2} &= \frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-1-(s-1))!} + \frac{(k-1)!}{(s-2)!(k-1-(s-2))!} = \frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!} + \frac{(k-1)!}{(s-2)!(k+1-s)!} = \\
 &= \frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!} + \frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!(k+1-s)} = \frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!} \left( 1 + \frac{s-1}{k+1-s} \right) = \\
 &= \frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!} \left( \frac{k+1-s+s-1}{k+1-s} \right) = \frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!} \frac{k}{k+1-s} = \frac{k!}{(s-1)!(k+1-s)!}, \text{ то} \\
 C_{k-1}^{s-1} + C_{k-1}^{s-2} &= C_k^{s-1} = \frac{k!}{(s-1)!(k+1-s)!}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Учтём преобразование (9) в правой части выражения (8):

$$\begin{aligned}
 &\sum_{s=2}^k (C_{k-1}^{s-1} + C_{k-1}^{s-2}) D_t^{k+1-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s)j} x + C_{k-1}^0 D_t^k \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(1)j} x + C_{k-1}^{k-1} D_t^0 \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(k+1)j} x = \\
 &= \sum_{s=2}^k C_k^{s-1} D_t^{k+1-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s)j} x + D_t^k \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(1)j} x + D_t^0 \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(k+1)j} x = \\
 &= \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^{k+1} C_{k+1-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s)j} x.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Замечание 2.** Используя замену переменных  $s_1 = s - 1$ ,  $s = s_1 + 1$ ,  $k - s = k - 1 - s_1$ ,  $k - 1 \geq s_1 \geq 0$ , в последнем результате, получим как следствие формулу (1)

$$D_t^k x^i(\bar{x}) = \frac{(k)i}{x(\bar{x})} = \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^k C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s)j} x, \quad C_l^s = \frac{l!}{s!(l-s)!}, \quad l! = \prod_{k=1}^l k, \quad l \geq s,$$

которая может быть представлена в виде

$$D_t^k x^i(\bar{x}) = \frac{(k)i}{x(\bar{x})} = \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^k C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s)j} x = \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^{k-1} C_{k-1}^s D_t^{k-1-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right)^{(s+1)j} x.$$

По теореме о сложной функции выполняется равенство

$$\frac{\partial L(x(\bar{x}), \dot{x}(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x^{(l+k)i}} = \sum_{p=0}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(p)j}} \frac{\partial \bar{x}^{(p)j}}{x^{(l+k)i}},$$

тогда имеем в разных системах координат

$$\begin{aligned} \bar{H}_n(\bar{L}, \bar{x}) &= \bar{H}(\bar{L}, \bar{x}, n) = -\bar{L}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{p}_{k,n}^{(k)i} \bar{x} = -\bar{L}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{p}_{k,n}^{(k)i} \bar{x} = \\ &= -\bar{L}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_l^j \left( \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(l+k)i}} \right) \bar{x}. \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} H_n(L, x) &= H(L, x, n) = -L(x(\bar{x}), \bar{x}(\bar{x}), \dots, x(\bar{x})) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^{(k)i} x = -L(x(\bar{x}), \bar{x}(\bar{x}), \dots, x(\bar{x})) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^{(k)i} x = \\ &= -L(x(\bar{x}), D_l x(\bar{x}), \dots, D_l^l x(\bar{x})) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_l^j \left( \frac{\partial L(x(\bar{x}), \bar{x}(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x^{(l+k)i}} \right) x = \\ &= -\bar{L}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_l^j \left( \sum_{p=0}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(p)j}} \frac{\partial x}{\partial x^{(l+k)i}} \right) x. \end{aligned} \tag{11}$$

По теореме 1 выполнено равенство

$$\frac{\partial x}{\partial x^{(l+k)i}} = \begin{cases} C_p^{l+k} \cdot D_t^{p-(l+k)} \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial x^i} \right), C_p^{l+k} = \frac{p!}{(l+k)! (p-(l+k))!}, g! = \prod_{k=1}^g k, p \geq l+k; \\ 0, p < l+k. \end{cases} \tag{12}$$

По теореме 4 справедливо

$$x(\bar{x}) = \sum_{g=1}^m \sum_{s=1}^k C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^g} \right) x, C_l^s = \frac{l!}{s! (l-s)!}, l! = \prod_{k=1}^l k, l \geq s. \tag{13}$$

Учитывая равенства (12) и (13) и подставляя их в формулу (11), получим

$$\begin{aligned} &-\bar{L}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_l^j \left( \sum_{p=0}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(p)j}} \frac{\partial x}{\partial x^{(l+k)i}} \right) x = \\ &= -\bar{L}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_l^j \left( \sum_{p=l+k}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(p)j}} C_p^{l+k} \cdot D_t^{p-(l+k)} \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial x^i} \right) (\bar{x}) \left( \sum_{g=1}^m \sum_{s=1}^k C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^g} \right) x \right) \right). \end{aligned} \tag{14}$$

Применяя к произведению  $f \cdot g$  формулу Лейбница, имеем

$$D_t^a (fg) = \sum_{b=0}^a C_a^b D_t^b (f) D_t^{a-b} (g), C_a^b = \frac{a!}{b! (a-b)!}, b! = \prod_{c=1}^b c, a \geq b.$$

$$\begin{aligned} &-\bar{L}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_l^j \left( \sum_{p=l+k}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(p)j}} C_p^{l+k} \cdot D_t^{p-(l+k)} \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial x^i} \right) (\bar{x}) \cdot \left( \sum_{g=1}^m \sum_{s=1}^k C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^g} \right) x \right) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-k} \sum_{p=l+k}^n \sum_{j=1}^m \sum_{g=1}^m \sum_{s=1}^k \sum_{a=0}^l (-1)^l C_p^{l+k} C_{k-1}^{s-1} C_l^a D_t^a \left( \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{(\frac{\rho}{j})} \right) D_t^{p-(l+k)+l-a} \left( \left( \frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^i} \right) (\bar{x}) \right) D_t^{k-s} \left( \frac{\partial \bar{x}^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^g} \right) \bar{x}^g = \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-k} \sum_{p=l+k}^n \sum_{j=1}^m \sum_{g=1}^m \sum_{s=1}^k \sum_{a=0}^l (-1)^l C_p^{l+k} C_{k-1}^{s-1} C_l^a D_t^a \left( \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{(\frac{\rho}{j})} \right) D_t^{p-k-a} \left( \left( \frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^i} \right) (\bar{x}) \right) D_t^{k-s} \left( \frac{\partial \bar{x}^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^g} \right) \bar{x}^g \quad (15)
 \end{aligned}$$

Одной из основных задач данной работы является нахождение связи между соотношениями (10) и (14), причем выражение (14) эквивалентно выражению (15).

**Теорема 5** (о дифференциальной связи энергии ранга  $n$  с импульсами 0-го порядка ранга  $n$ ). Пусть  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$   $L(x, \dots, x)$ ,  $p_{i,n}^k(x, \dots, x)$  – локальная запись функции  $L$  и импульсов  $k$ -го порядка при выборе локальных координат  $(x)$  в базе  $X_m$  расслоения  $T^n X_m$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $i = \overline{1, m}$  и

$$H_n(L, x) = H(L, x, n) = -L(x, \dots, x) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x, \dots, x) x^{(k)i} = -L(x, \dots, x) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x, \dots, x) D_t^k x^i -$$

энергия системы, состояние которой описывается функцией  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  в локальной системе координат  $(x)$  в базе  $X_m$  расслоения  $T^n X_m$ . Тогда справедливо

$$\begin{aligned}
 D_t(H(L, x, n) + L(x, \dots, x)) &= D_t(-L(x, \dots, x) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x, \dots, x) x^{(k)i} + L(x, \dots, x)) = \\
 &= D_t\left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x, \dots, x) x^{(k)i}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)^{(k)i}}{\partial x^{(k-1)i}} x^{(k)i} - \sum_{i=1}^m p_{0,n}^i(x, \dots, x) x^{(1)i}, \quad (16)
 \end{aligned}$$

где  $p_{0,n}^i = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(0+k)i}} \right)$  – импульс 0-го порядка  $x = x = D_t x^i$ .

**Доказательство:**

$$\begin{aligned}
 D_t(H(L, x, n) + L(x, \dots, x)) &= D_t\left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x, \dots, x) x^{(k)i}\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m D_t(p_{k,n}^i(x, \dots, x)) x^{(k)i} + \\
 &+ \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x, \dots, x) D_t x^{(k)i} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m D_t(p_{k,n}^i(x, \dots, x)) x^{(k)i} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x, \dots, x) D_t x^{(k)i} = \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m D_t(p_{k,n}^i(x, \dots, x)) x^{(k)i} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x, \dots, x) x^{(k+1)i}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Во второй части формулы (15) сделаем замену  $l = k + 1$ ,  $k = l - 1$ ,  $n + 1 \geq l \geq 2$ , получим

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m D_t(p_{k,n}^i(x, \dots, x)) x^{(k)i} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x, \dots, x) x^{(k+1)i} &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m D_t(p_{k,n}^i(x, \dots, x)) x^{(k)i} + \\
 + \sum_{l=2}^{n+1} \sum_{i=1}^m p_{l-1,n}^i(x, \dots, x) x^{(l-1)i} &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m D_t(p_{k,n}^i(x, \dots, x)) x^{(k)i} + \sum_{k=2}^{n+1} \sum_{i=1}^m p_{k-1,n}^i(x, \dots, x) x^{(k-1)i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^m D_t(p_{1,n}^i(x, \dots, x)) x^{(2n-1)(1)i} + \sum_{k=2}^n \sum_{i=1}^m D_t(p_{k,n}^i(x, \dots, x)) x^{(2n-k)(k)i} + \sum_{k=2}^{n+1} \sum_{i=1}^m p_{k-1,n}^i(x, \dots, x) x^{(2n-(k-1))(k)i} = \\
 &= \sum_{i=1}^m D_t(p_{1,n}^i(x, \dots, x)) x^{(2n-1)(1)i} + \sum_{i=1}^m p_{n,n}^i(x, \dots, x) x^{(2n-n)(n+1)i} + \\
 &\quad \sum_{k=2}^n \sum_{i=1}^m D_t(p_{k,n}^i(x, \dots, x)) x^{(2n-k)(k)i} + \sum_{k=2}^n \sum_{i=1}^m p_{k-1,n}^i(x, \dots, x) x^{(2n-(k-1))(k)i} = \\
 &= \sum_{i=1}^m D_t(p_{1,n}^i(x, \dots, x)) x^{(2n-1)(1)i} + \sum_{i=1}^m p_{n,n}^i(x, \dots, x) x^{(2n-n)(n+1)i} + \sum_{k=2}^n \sum_{i=1}^m (D_t(p_{k,n}^i(x, \dots, x)) + p_{k-1,n}^i(x, \dots, x)) x^{(2n-k)(k)i}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Используем **теорему 3**  $D_t(p_{k,n}^i(x, \dots, x)) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} - p_{k-1,n}^i(x, \dots, x)$  и ПОЭТОМУ

$$D_t(p_{k,n}^i(x, \dots, x)) + p_{k-1,n}^i(x, \dots, x) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}}. \quad (19)$$

При  $k = 1$

$$D_t(p_{1,n}^i(x, \dots, x)) + p_{0,n}^i(x, \dots, x) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(1-1)i}}, \quad D_t(p_{1,n}^i) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^i} - p_{0,n}^i, \quad (20)$$

$$p_{n,n}^i(x, \dots, x) = \sum_{l=0}^{n-n} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l+n)i}} \right) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(n)i}}. \quad (21)$$

Преобразуем выражение (18), учитывая формулы (19)–(21):

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^m D_t(p_{1,n}^i(x, \dots, x)) x^{(2n-1)(1)i} + \sum_{i=1}^m p_{n,n}^i(x, \dots, x) x^{(2n-n)(n+1)i} + \sum_{k=2}^n \sum_{i=1}^m (D_t(p_{k,n}^i(x, \dots, x)) + p_{k-1,n}^i(x, \dots, x)) x^{(2n-k)(k)i} = \\
 &= \sum_{i=1}^m D_t(p_{1,n}^i(x, \dots, x)) x^{(2n-1)(1)i} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(n)i}} x^{(n+1)i} + \sum_{k=2}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} x^{(k)i} = \\
 &= \sum_{i=1}^m D_t(p_{1,n}^i(x, \dots, x)) x^{(2n-1)(1)i} + \sum_{k=2}^{n+1} \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} x^{(k)i} = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^i} - p_{0,n}^i(x, \dots, x) \right) x^{(2n-0)(1)i} + \\
 &\quad + \sum_{k=2}^{n+1} \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} x^{(k)i} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^i} x^{(1)i} - \sum_{i=1}^m p_{0,n}^i(x, \dots, x) x^{(1)i} + \sum_{k=2}^{n+1} \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} x^{(k)i} = \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} x^{(k)i} - \sum_{i=1}^m p_{0,n}^i(x, \dots, x) x^{(2n-0)(1)i} = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} x^{(k)i} - \sum_{i=1}^m p_{0,n}^i(x, \dots, x) x^{(2n-0)(1)i}.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.



**Замечание 3.** Первая сумма в правой части выражения (16) с использованием замены переменных  $k_1 = k - 1, k = k_1 + 1, n \geq k_1 \geq 0$  может быть представлена в виде

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} x^{(k)i} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i},$$

**Теорема 6.** Обозначим векторы  $x = (x^1, x^2, \dots, x^m)$  и  $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^m)$ . Пусть  $x^i = S^i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$ ,  $S : (\bar{x}) \rightarrow (x)$  – невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия  $X_m$  расслоения скоростей порядка  $T^P X_m$ ,  $i, k = \overline{1, m}$ ,  $S^{-1} : (x) \rightarrow (\bar{x})$  – обратное отображение, тогда верно утверждение

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^k} = \delta_k^i, \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^j} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} = \delta_k^i, \delta_i^k = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases} \text{ – символ Кронекера.} \quad (22)$$

**Доказательство.** Рассмотрим композицию преобразований  $x^i = x^i(\bar{x}^1(x), \bar{x}^2(x), \dots, \bar{x}^m(x))$ . Согласно теореме о сложной функции имеем

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \delta_k^i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^k}.$$

Аналогично доказывается равенство  $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^k} = \delta_k^i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^j} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}$ .

Теорема доказана.

Докажем, что каждая из сумм в формуле (16) является геометрическим инвариантом, то есть не зависит от выбора локальной системы координат  $(x)$  в базе  $X_m$  расслоения скоростей  $T^n X_m$ . Имеет место следующая теорема.

**Теорема 7** (об инвариантах  $G_1, G_2$ ). Пусть  $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R} L(x, \dots, x), p_{i,0}^k(x, x, \dots, x^{(2n-k)})$  – локальная запись функции  $L$  и импульсов 0-го порядка при выборе локальных координат  $(x)$  в базе  $X_m$  расслоения  $T^n X_m$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Тогда функции

$$G_1(x, x, \dots, x^{(n+1)}) = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} x^{(k)i} \quad \text{и} \quad G_2(x, x, \dots, x^{(2n)}) = \sum_{i=1}^m p_{0,n}^i(x, x, \dots, x^{(2n)}), \quad (23)$$

где  $p_{0,n}^i = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_l^l \left( \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(0+l)i}} \right)$  – импульс 0-го порядка  $x^i = x^i = D_l x^i$ .

При замене локальных координат  $(x)$  в базе  $X_m$  расслоения  $T^n X_m$  преобразуются как тензоры 0-го ранга, то есть не зависят от выбора локальных координат (являются геометрическими инвариантами, следовательно, имеет место сохранение энергии при замене локальных координат).

**Доказательство.** По теореме о сложной функции имеем  $x^i = x^i = D_l x^i(\bar{x}) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \bar{x}^k$ . По теореме 2 импульсы 0-го порядка ранга  $n$  преобразуются как тензоры типа  $(0,1)$  (ковекторы):

$$p_0^i(n)(x, x, \dots, x^{(2n-k)}) = \sum_{j=1}^m p_0^j(n)(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{(2n-k)}) \cdot \frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^i}.$$

Подставим это равенство в функционал  $G_2(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x}) = \sum_{i=1}^{(2n)} p_{0,n}^i \ddot{x}^i$ , получим

$$\begin{aligned} G_2(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x}) &= \sum_{i=1}^{(2n)} p_{0,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x}) \ddot{x}^i = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^m \overline{p_0^j}(n)(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x}) \cdot \frac{\partial \overline{x}^j(x)}{\partial \ddot{x}^i} \right) \ddot{x}^i = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \overline{p_0^j}(n)(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x}) \cdot \frac{\partial \overline{x}^j(x)}{\partial \ddot{x}^i} \sum_{k=1}^m \frac{\partial \overline{x}^i(\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} \ddot{x}^k = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{k=1}^m \overline{p_0^j}(n)(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x}) \cdot \ddot{x}^k \right) \sum_{i=1}^m \frac{\partial \overline{x}^j(x)}{\partial \ddot{x}^i} \frac{\partial \overline{x}^i(\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} = \\ &= \sum_{j=1}^m \left( \sum_{k=1}^m \overline{p_0^j}(n)(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x}) \cdot \ddot{x}^k \right) \delta_k^j = \sum_{j=1}^m \overline{p_0^j}(n)(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x}) \cdot \ddot{x}^j = \overline{G}_2(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x}), \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\delta_i^k = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$  – символ Кронекера.

Для  $n = 1$  формула (24) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, \ddot{x})}{\partial \ddot{x}^i} \ddot{x}^{(k-1)i} x^k &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \ddot{x}^i} \ddot{x}^i x^k + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i x^k = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial \overline{L}(x, \dot{x})}{\partial \ddot{x}^k} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial \ddot{x}^i} + \frac{\partial \overline{L}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial \dot{x}^i} \right) \sum_{l=1}^m \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial \ddot{x}^l} \ddot{x}^l + \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial \overline{L}(x, \dot{x})}{\partial \ddot{x}^k} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i x^k = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial \overline{L}(x, \dot{x})}{\partial \ddot{x}^k} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial \dot{x}^i} + \frac{\partial \overline{L}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k} D_t \left( \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial \dot{x}^i} \right) \right) \sum_{l=1}^m \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial \ddot{x}^l} \ddot{x}^l + \\ &+ \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\partial \overline{L}(x, \dot{x})}{\partial \ddot{x}^k} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial \ddot{x}^l} \ddot{x}^l x^k + \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial \ddot{x}^l} D_t \left( \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial \dot{x}^l} \right) x^k = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^m \left( \frac{\partial \overline{L}(x, \dot{x})}{\partial \ddot{x}^k} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial \ddot{x}^l} \ddot{x}^l x^k + \frac{\partial \overline{L}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial \ddot{x}^l} \ddot{x}^l x^k \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\partial \overline{L}(x, \dot{x})}{\partial \ddot{x}^k} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial \ddot{x}^l} \ddot{x}^l x^k + D_t \left( \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial \dot{x}^l} \right) \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial \dot{x}^i} x^k = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^m \left( \frac{\partial \overline{L}(x, \dot{x})}{\partial \ddot{x}^k} \delta_l^i \ddot{x}^l x^k + \frac{\partial \overline{L}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k} \delta_l^i \ddot{x}^l x^k \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\partial \overline{L}(x, \dot{x})}{\partial \ddot{x}^k} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial \ddot{x}^l} \ddot{x}^l x^k + D_t \left( \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial \dot{x}^l} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial \dot{x}^i} \right) x^k = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \overline{L}(x, \dot{x})}{\partial \ddot{x}^k} \ddot{x}^k x^k + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \overline{L}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k} \ddot{x}^k x^k + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\partial \overline{L}(x, \dot{x})}{\partial \ddot{x}^k} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial \dot{x}^l} \ddot{x}^l x^k + \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial \overline{L}(x, \dot{x})}{\partial \ddot{x}^k} \ddot{x}^k x^k + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \overline{L}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k} \ddot{x}^k x^k = \overline{G}_1(x, \dot{x}, \ddot{x}), \end{aligned} \quad (25)$$

где  $D_t(\delta_l^k) = 0, \delta_i^k = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$  – символ Кронекера.

Теорема доказана.

Отметим, что промежуточные преобразования в формуле (25) являются самостоятельными важными результатами. При выводе последней формулы (25) были применены **теорема 1** и **теорема 6**.

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial \ddot{x}^l} \ddot{x}^l = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial \dot{x}^l} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial \dot{x}^i} \ddot{x}^l = \delta_l^k = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases} \text{ – символ Кронекера;}$$

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} = \frac{\partial x^k}{\partial x} = C_1^1 \cdot D_t^{1-1} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x} = 1 \cdot D_t^0 \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x} = \frac{\partial x^k}{\partial x};$$

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} = \frac{\partial x^k}{\partial x} = C_1^0 \cdot D_t^{1-0} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x} = 1 \cdot D_t^1 \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x} = D_t \frac{\partial x^k}{\partial x};$$

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} = \frac{\partial D_t^0 x^k}{\partial D_t^1 x^i} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{(1)i}} = \delta_1^0 \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x} = 0.$$

Рассмотрим общий случай

$$G_1(x, x, \dots, x) = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} x^{(k)i} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i}.$$

По **теореме 4** получим

$$D_t^k x^i(x) = \frac{\partial x^i}{\partial x^{-j}} = \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^k C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i}{\partial x^{-j}} \right) x^{(s)j} = \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^{k-1} C_{k-1}^s D_t^{k-1-s} \left( \frac{\partial x^i}{\partial x^{-j}} \right) x^{(s+1)j},$$

заменяя индекс  $k$  на  $k+1$  в последнем операторе, получим аналогичную формулу

$$D_t^{k+1} x^i(x) = \frac{\partial x^i}{\partial x^{-j}} = \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^{k+1-1} C_{k+1-1}^s D_t^{k+1-1-s} \left( \frac{\partial x^i}{\partial x^{-j}} \right) x^{(s+1)j} = \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^k C_k^s D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i}{\partial x^{-j}} \right) x^{(s+1)j}.$$

В результате имеем

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} \left( \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^k C_k^s D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i}{\partial x^{-j}} \right) x^{(s+1)j} \right). \tag{26}$$

По **теореме 1** выполнено равенство

$$\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} = \sum_{p=0}^n \sum_{d=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(p)d}} \frac{\partial x^{(p)d}}{\partial x^{(k)i}}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial x^{(p)d}}{\partial x^{(k)i}} = \begin{cases} C_p^k \cdot D_t^{p-k} \left( \frac{\partial x^{(p)d}}{\partial x^i} \right), & C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}, \quad k! = \prod_{g=1}^k g, \quad p \geq k; \\ 0, & p < k. \end{cases} \tag{28}$$

Подставим равенство (28) в формулу (27):

$$\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} = \sum_{p=k}^n \sum_{d=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(p)d}} C_p^k \cdot D_t^{p-k} \left( \frac{\partial x^{(p)d}}{\partial x^i} \right) \tag{29}$$

и полученном результате используем выражение (26):

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} \left( \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^k C_k^s D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i}{\partial x^{-j}} \right) x^{(s+1)j} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^m \left( \sum_{p=k}^n \sum_{d=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{(\underline{p})^d} C_p^k \cdot D_t^{p-k} \left( \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \right) \right) \left( \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^k C_k^s D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) x^{(s+1)j} \right). \quad (30)$$

Поскольку  $x^{(s+1)j} = D_t^s(x) = D_t^s(x)^{(1)j}$ ,  $C_k^s D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) x^{(s+1)j} = C_k^s D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) D_t^s(x)^{(1)j}$ , с помощью формулы Лейбница получим

$$\begin{aligned} D_t^a(fg) &= \sum_{b=0}^a C_a^b D_t^b(f) D_t^{a-b}(g), \quad C_a^b = \frac{a!}{b!(a-b)!}, \quad b! = \prod_{c=1}^b c, \quad a \geq b, \text{ следовательно} \\ \sum_{s=0}^k C_k^s D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) x^{(s+1)j} &= \sum_{s=0}^k C_k^s D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) D_t^s(x)^{(1)j} = D_t^k \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} D_t^1(x^j) \right) = D_t^k \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} x \right)^{(1)j} = \\ &= D_t^k \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} x \right)^j. \end{aligned} \quad (31)$$

Подставляем полученную формулу (31) в выражение (30):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^m \left( \sum_{p=k}^n \sum_{d=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{(\underline{p})^d} C_p^k \cdot D_t^{p-k} \left( \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \right) \right) \left( \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^k C_k^s D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) x^{(s+1)j} \right) &= \\ = \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^m \left( \sum_{p=k}^n \sum_{d=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{(\underline{p})^d} C_p^k \cdot D_t^{p-k} \left( \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \right) \right) \left( \sum_{j=1}^m D_t^k \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} x \right)^{(1)j} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Так как  $\sum_{k=0}^n \sum_{p=k}^n a_{kp} = \sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^p a_{kp}$  – дискретный аналог для двойного интеграла при  $n \geq p \geq k \geq 0$ , то сумму в формуле (32) запишем в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^m \left( \sum_{p=k}^n \sum_{d=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{(\underline{p})^d} C_p^k \cdot D_t^{p-k} \left( \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \right) \right) \left( \sum_{j=1}^m D_t^k \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} x \right)^{(1)j} \right) &= \\ = \sum_{p=0}^n \sum_{i=1}^m \left( \sum_{k=0}^p \sum_{d=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{(\underline{p})^d} C_p^k \cdot D_t^{p-k} \left( \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \right) \right) \left( \sum_{j=1}^m D_t^k \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} x \right)^{(1)j} \right) &= \\ = \sum_{p=0}^n \sum_{i=1}^m \left( \sum_{d=1}^m \sum_{k=0}^p \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{(\underline{p})^d} C_p^k \cdot D_t^{p-k} \left( \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \right) \right) \left( \sum_{j=1}^m D_t^k \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} x \right)^{(1)j} \right) &= \\ = \sum_{p=0}^n \sum_{i=1}^m \left( \sum_{d=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{(\underline{p})^d} \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^p C_p^k \cdot D_t^{p-k} \left( \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \right) D_t^k \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} x \right)^{(1)j} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

По формуле Лейбница  $\sum_{k=0}^p C_p^k \cdot D_t^{p-k} \left( \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \right) D_t^k \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} x \right)^{(1)j} = D_t^p \left( \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} x \right)^{(1)j}$ ,

поэтому

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^n \sum_{i=1}^m \left( \sum_{d=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(p)d}} \right) \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^p C_p^k \cdot D_t^{p-k} \left( \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \right) D_t^k \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}} \right) \frac{(1)j}{x} = \\ & = \sum_{p=0}^n \sum_{i=1}^m \left( \sum_{d=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(p)d}} \right) \sum_{j=1}^m D_t^p \left( \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}} \right) \frac{(1)j}{x} = \sum_{p=0}^n \sum_{d=1}^m \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(p)d}} \right) \sum_{i=1}^m D_t^p \left( \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}} \right) \frac{(1)j}{x}. \end{aligned} \quad (34)$$

Преобразуем последнюю сумму в выражении (34):

$$\sum_{i=1}^m D_t^p \left( \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}} \right) \frac{(1)j}{x} = D_t^p \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}} \right) \frac{(1)j}{x}. \quad (35)$$

Снова используем **теорему 6**  $\sum_{i=1}^m \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}} = \delta_j^d$ ,  $\delta_j^d = \begin{cases} 1, d = j \\ 0, d \neq j \end{cases}$  – символ Кронекера. Тогда

получим  $\sum_{i=1}^m \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}} \frac{(1)j}{x} = \frac{(1)j}{x} \sum_{i=1}^m \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}} = \frac{(1)j}{x} \delta_j^d$ , значит

$$D_t^p \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}} \right) \frac{(1)j}{x} = D_t^p \left( \frac{(1)j}{x} \delta_j^d \right). \quad (36)$$

Подставляем полученное выражение (36) в сумму (34):

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^n \sum_{d=1}^m \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(p)d}} \right) \sum_{i=1}^m D_t^p \left( \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}} \right) \frac{(1)j}{x} = \sum_{p=0}^n \sum_{d=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(p)d}} D_t^p \left( \frac{(1)j}{x} \delta_j^d \right) = \\ & = \sum_{p=0}^n \sum_{j=1}^m \sum_{d=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(p)d}} D_t^p \left( \frac{(1)j}{x} \delta_j^d \right) = \sum_{p=0}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(p)d}} D_t^p \left( \frac{(1)j}{x} \right) = \sum_{p=0}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(p)d}} D_t^{p+1}(\bar{x}^{-j}) = \\ & = \sum_{p=0}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(p)d}} \frac{(n)^{(p+1)j}}{x} = \bar{G}_1(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})^{(2n)}. \end{aligned}$$

Этот результат может быть получен и другим способом:

$$C_p^k C_k^s = \frac{p!}{k!(p-k)!} \frac{k!}{s!(k-s)!} = \frac{p!}{k!(p-k)!s!(k-s)!} = \frac{p!}{s!(p-s)!(k-s)!(p-s-(k-s))!} = C_p^s C_{p-s}^{p-k}, \quad (37)$$

где  $C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ ,  $p! = \prod_{c=1}^p c$ ,  $p \geq k$ .

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^m \left( \sum_{p=k}^n \sum_{d=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(p)d}} \right) C_p^k \cdot D_t^{p-k} \left( \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \right) \left( \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^k C_k^s D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}} \right) \frac{(s+1)j}{x} \right) = \\ & = \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^m \left( \sum_{p=k}^n \sum_{d=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(p)d}} \right) C_p^k \cdot D_t^{p-k} \left( \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \right) \left( \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^k C_{p-s}^{k-s} D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-j}} \right) \frac{(s+1)j}{x} \right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{d=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{p=0}^n C_p^s \cdot \frac{\bar{\partial} L(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{(\underline{p})^d} \left( \sum_{s=0}^n \frac{(s+1)^j}{x} \sum_{k=s}^p C_{p-s}^{k-s} D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) D_t^{p-k} \left( \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \right) \right). \quad (38)$$

При замене пределов суммирования в выражении (38) было использовано ограничение на порядки  $n \geq p \geq k \geq s \geq 0$ .

Преобразуем тройную сумму

$$\sum_{k=0}^n \sum_{p=k}^n \sum_{s=0}^k a_{kps} = \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^k \sum_{p=k}^n a_{kps} = \sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^p \sum_{s=0}^k a_{kps} = \sum_{p=0}^n \sum_{s=0}^p \sum_{k=s}^p a_{kps} = \sum_{s=0}^n \sum_{k=s}^n \sum_{p=k}^n a_{kps} = \sum_{s=0}^n \sum_{p=s}^n \sum_{k=s}^p a_{kps}$$

и в последней сумме с учетом выражения (38) сделаем замену переменных  $u = k - s$ ,  $0 \leq u \leq k - s$ ,  $p - k = p - s - (k - s) = p - s - u$ , затем применим формулу Лейбница:

$$D_t^{p-s}(fg) = \sum_{u=0}^{p-s} C_{p-s}^u D_t^u(f) D_t^{p-s-u}(g), \quad C_{p-s}^u = \frac{(p-s)!}{u!(p-s-u)!}, \quad u! = \prod_{c=1}^u c, \quad p-s \geq u,$$

а также **теорему 6**  $\sum_{i=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} = \delta_j^d$ ,  $\delta_j^d = \begin{cases} 1, d = j \\ 0, d \neq j \end{cases}$  – символ Кронекера, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=s}^p C_{p-s}^{k-s} D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) D_t^{p-k} \left( \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \right) &= \sum_{u=0}^{p-s} C_{p-s}^u D_t^u \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) D_t^{p-s-u} \left( \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \right) = D_t^{p-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \right) = \\ &= D_t^{p-s}(\delta_j^d) = \begin{cases} 1, d = j \text{ и } p = s \\ 0, d \neq j \text{ или } p \neq s \end{cases} = \delta_j^d \delta_p^s, \quad \delta_p^s = \begin{cases} 1, p = s \\ 0, p \neq s \end{cases} \text{ – символ Кронекера.} \end{aligned} \quad (39)$$

Равенство (39) получено на основании того, что

$$\delta_j^d = \begin{cases} 1, d = j \\ 0, d \neq j \end{cases} = \text{const и } D_t^{p-s}(\text{const}) = \begin{cases} 0, p-s > 0, \\ \text{const}, p-s = 0, \end{cases} \quad (40)$$

то есть производная от постоянной равна 0, если ее порядок больше 0, и равна постоянной, если порядок равен 0.

На основании формул (38) и (39) имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m \sum_{d=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{p=0}^n C_p^s \cdot \frac{\bar{\partial} L(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{(\underline{p})^d} \left( \sum_{s=0}^n \frac{(s+1)^j}{x} \sum_{k=s}^p C_{p-s}^{k-s} D_t^{k-s} \left( \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) D_t^{p-k} \left( \frac{\partial \bar{x}^{-d}(x)}{\partial x^i} \right) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{d=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{p=0}^n \frac{\bar{\partial} L(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{(\underline{p})^d} \left( \sum_{s=0}^n C_p^s \frac{(s+1)^j}{x} \delta_j^d \delta_p^s \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{d=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{p=0}^n \frac{\bar{\partial} L(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{(\underline{p})^d} C_p^p \frac{(p+1)^j}{x} \delta_j^d \delta_p^p = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{d=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{p=0}^n \frac{\bar{\partial} L(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{(\underline{p})^d} \frac{(p+1)^j}{x} \delta_j^d = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{p=0}^n \frac{\bar{\partial} L(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{(\underline{p})^d} \frac{(p+1)^j}{x} \delta_j^j = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{d=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{p=0}^n \frac{\bar{\partial} L(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{(\underline{p})^j} \frac{(p+1)^j}{x} = \bar{G}_1(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Теорема 8** (инвариантность энергии относительно замены координат). Пусть  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  – гладкая функция;  $L(x, \dots, x^{(n)})$ ,  $p_{i,n}^k(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)})$ ,  $H_n(L, x)$  – локальная запись функции  $L$ , импульсов  $k$ -го порядка и энергии ранга  $n$  соответственно при выборе локальных координат  $(x)$  в базе  $X_m$  расслоения  $T^n X_m$ . Следовательно

$$H_n(L, x) = H(L, x, n) = -L(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{i,n}^k(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)}) x^{(k)i},$$

где  $\bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x}^{(n)})$ ,  $\bar{p}_{k,n}^j(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(2n-k)})$ ,  $\bar{H}_n(\bar{L}, \bar{x})$  – локальная запись функции  $L$ , импульсов  $k$ -го порядка и энергии ранга  $n$  соответственно при выборе локальных координат  $(\bar{x})$  в базе  $X_m$  расслоения  $T^n X_m$ ,

$$\bar{H}_n(\bar{L}, \bar{x}) = \bar{H}(\bar{L}, \bar{x}, n) = \bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x}^{(n)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{p}_{k,n}^j(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(2n-k)}) \bar{x}^{(k)i}.$$

Тогда  $H(L, x, n) = \bar{H}(\bar{L}, \bar{x}, n)$  – энергия системы – тензор 0-го ранга, который не зависит от выбора локальных координат, то есть является инвариантным геометрическим объектом.

**Доказательство.**

$L(x(\bar{x}), \dot{x}(\bar{x}), \dots, x^{(n)}(\bar{x})) = \bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x}^{(n)})$   $x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$  – невырожденная замена координат в базе  $X_m$  расслоения  $T^n X_m$ . Значит

$$\begin{aligned} D_t(H(L, x, n) - \bar{H}(\bar{L}, \bar{x}, n)) &= D_t(-L(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{i,n}^k(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)}) x^{(k)i} + L(x, \dots, x^{(n)}) - \\ &- \sum_{j=1}^m \bar{p}_{k,n}^j(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(2n-k)}) \bar{x}^{(k)i}) = D_t(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{i,n}^k(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)}) x^{(k)i} - \sum_{j=1}^m \bar{p}_{k,n}^j(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(2n-k)}) \bar{x}^{(k)i}) = \\ &= D_t(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{i,n}^k(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)}) x^{(k)i}) - D_t(\sum_{j=1}^m \bar{p}_{k,n}^j(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(2n-k)}) \bar{x}^{(k)i}). \end{aligned} \quad (41)$$

С учетом теоремы 5 имеем

$$\begin{aligned} D_t(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{i,n}^k(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)}) x^{(k)i}) &= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(k-1)i}} x^{(k)i} - \sum_{i=1}^m p_{0,n}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n)}) x^i = \\ &= G_1(x, \dot{x}, \dots, x^{(n+1)}) - G_2(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n)}) \cdot D_t(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{i,n}^k(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)}) x^{(k)i}) = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dots, \bar{x}^{(n)})}{\partial \bar{x}^{(k-1)i}} \bar{x}^{(k)i} - \sum_{i=1}^m \bar{p}_{0,n}^i(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(2n)}) \bar{x}^i = \\ &= \bar{G}_1(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(2n)}) - \bar{G}_2(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(2n)}). \end{aligned}$$

$$D_t(H(L, x, n) - \bar{H}(\bar{L}, \bar{x}, n)) = D_t(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{i,n}^k(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)}) x^{(k)i}) - D_t(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{p}_{k,n}^j(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(2n-k)}) \bar{x}^{(k)i}) =$$

$$\begin{aligned}
&= G_1(x, \dot{x}, \dots, x^{(n+1)}) - G_2(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n)}) - (\bar{G}_1(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(2n)}) - \bar{G}_2(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(2n)})) = \\
&= G_1(x, \dot{x}, \dots, x^{(n+1)}) - \bar{G}_1(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(2n)}) - G_2(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n)}) - \bar{G}_2(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(2n)}) = 0 - 0 = 0,
\end{aligned}$$

так как по **теореме 7** (об инвариантах  $G_1, G_2$ )

$$\begin{aligned}
G_1(x, \dot{x}, \dots, x^{(n+1)}) &= \bar{G}_1(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(2n)}), \quad G_2(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n)}) = \bar{G}_2(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(2n)}). \\
D_t(H(L, x, n) - \bar{H}(\bar{L}, \bar{x}, n)) &= D_t(H(L(x(\bar{x}), \dot{x}(\bar{x}), \dots, x^{(n)}), S(\bar{x}), n) - \bar{H}(\bar{L}, \bar{x}, n)) = 0.
\end{aligned}$$

Равенство выполняется для любой невырожденной замены координат  $x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$  в базе  $X_m$  расслоения  $T^n X_m$ . Значит,  $H(L, x, n) - \bar{H}(\bar{L}, \bar{x}, n) \equiv C = \text{const}$  для всех невырожденных замен координат  $x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$  в базе  $X_m$  расслоения  $T^n X_m$ .

Рассмотрим тождественное преобразование  $x(\bar{x}) = S(\bar{x}) = \bar{x}$

$$H(L(x(\bar{x}), \dot{x}(\bar{x}), \dots, x^{(n)}), S(\bar{x}), n) - \bar{H}(\bar{L}, \bar{x}, n) = \bar{H}(\bar{L}, \bar{x}, n) - \bar{H}(\bar{L}, \bar{x}, n) = C = 0.$$

Следовательно,

$$\bar{H}(\bar{L}, \bar{x}, n) = \bar{H}(\bar{L}, \bar{x}, n).$$

Теорема доказана.

**Замечание 4.** Утверждение **теоремы 8** справедливо и для функций  $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $p \leq n$ , так как при  $p < n$  можно определить функцию  $L_1: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ , которая в любой локальной системе координат  $(x)$  в базе  $X_m$  расслоения  $T^n X_m$   $L_1(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) \equiv L(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)})$  для любых  $x^{(p+1)}, \dots, x^{(n)}$ . Для функции  $L_1(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)})$  утверждение **теоремы 8** справедливо. Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 9** (инвариантность энергии относительно замены координат). Пусть  $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  – гладкая функция;  $L(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)}), p_{i,n}^k, H_n(L, x)$  – локальная запись функции  $L$ , импульсов  $k$ -го порядка и энергии ранга  $n$  соответственно при выборе локальных координат  $(x)$  в базе  $X_m$  расслоения  $T^p X_m$ .

$$H_n(L, x) = H(L, x, n) = -L(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{i,n}^k x^{(k)i},$$

где  $\bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(p)}), p_{k,n}^j, \bar{H}_n(\bar{L}, \bar{x})$  – локальная запись функции  $L$ , импульсов  $k$ -го порядка и энергии ранга  $n$  соответственно при выборе локальных координат  $(\bar{x})$  в базе  $X_m$  расслоения  $T^p X_m$ .

Поскольку  $\bar{H}_n(\bar{L}, \bar{x}) = \bar{H}(\bar{L}, \bar{x}, n) = \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(p)}) + \sum_{j=1}^m p_{k,n}^j x^{(k)i}$ , тогда  $H(L, x, n) = \bar{H}(\bar{L}, \bar{x}, n)$ .



**Замечание 5.** Для  $n=1$   $p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_l^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)^{(n)}$ ,

$$p_1^i(1) = p_{1,1}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2 \cdot 1 - 1)}) = \sum_{l=0}^{1-1} (-1)^l D_l^l \left( \frac{\partial L(x, x)}{\partial x^{(l+1)i}} \right)^{(1)} = \frac{\partial L(x, x)}{\partial x^{(1)i}} = \frac{\partial L(x, x)}{\partial x^i},$$

$$L(x(\bar{x}), \dot{x}(\bar{x})) = \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}),$$

где  $x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$  – невырожденная замена координат.

Для функции энергии произвольного ранга  $n$  можно написать

$$H_n(L, x) = H(L, x, n) = -L(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x, \dots, x^{(2n-k)}) x^{(k)i}$$

Тогда, в частности, для  $n = 1$ , получим

$$\begin{aligned} H_1(L, x) &= H(L, x, 1) = -L(x, \dot{x}) + \sum_{k=1}^1 \sum_{i=1}^m p_{1,1}^i(x) x^{(1)i} = -L(x, \dot{x}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^i} x^i = \\ &= -\bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} + \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} \right) x^i = -\bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} \sum_{l=1}^m \frac{\partial x^i}{\partial x^{-l}} x^{-l} = \\ &= -\bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{-l}} x^{-l} = -\bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^k} \delta_k^l x^{-l} = -\bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^k} x^{-k} = \\ &= -\bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^m \bar{p}_{1,1}^k x^{-k} = \bar{H}(\bar{L}, \bar{x}, 1) = \bar{H}_1(\bar{L}, \bar{x}), \end{aligned} \tag{42}$$

где  $\delta_k^l = \begin{cases} 1, k=l \\ 0, k \neq l \end{cases}$  – символ Кронекера,

то есть энергия порядка  $n = 1$  является инвариантом относительно невырожденной замены координат.

В выражении (42) была использована **теорема 1**:

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} = \frac{\partial D_l^0 x^k}{\partial D_l^1 x^{-i}} = \frac{\partial x^{(0)k}}{\partial x^{-(1)i}} = 0 \text{ (так как } 0 < 1), \quad \frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} = \frac{\partial x^{(1)k}}{\partial x^{-(1)i}} = C_1^1 \cdot D_l^{1-1} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} = 1 \cdot D_l^0 \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}}.$$

Таким образом, основная **теорема 9** проверена для  $n = 1$ .

Для  $n = 2$  с невырожденной заменой координат  $x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$  имеем  $L(x(\bar{x}), \dot{x}(\bar{x}), \ddot{x}(\bar{x})) = \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \ddot{\bar{x}})$ ,

$$p_1^i(2) = p_{1,2}^i(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(2 \cdot 2 - 1)}) = \sum_{l=0}^{2-1} (-1)^l D_l^l \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^{(l+1)i}} \right)^{(1) (2)} = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^i} - D_l \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^i} \right),$$

$$p_2^i(2) = p_{2,2}^i(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(2 \cdot 2 - 1)}) = \sum_{l=0}^{2-2} (-1)^l D_l^l \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^{(l+2)i}} \right)^{(1) (2)} = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^i}.$$

$$\begin{aligned}
 H_2(L, x) + L(x, \dot{x}, \ddot{x}) &= H(L, x, 2) + L(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^m p_{k,2}^i(x, \dots, x) x^i = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^i} - D_t \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^i} \right) \right) x^i + \\
 &+ \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^i} x^i = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} + \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} C_2^1 D_t \left( \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} \right) - D_t \left( \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} \right) \right) \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} x^j + \\
 &+ \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} \left( D_t \left( \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j} \right) x^j + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j} x^j \right) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} + \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} D_t \left( \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - D_t \left( \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} \right) \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} \right) \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} x^j + \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} \left( D_t \left( \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j} \right) x^j + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j} x^j \right) = \\
 &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} x^j + \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} \right) \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} - D_t \left( \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} \right) \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} x^j + \\
 &+ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} x^j \left( D_t \left( \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j} \right) \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j} D_t \left( \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j} \right) \right) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \left( \left( \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} - D_t \left( \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} \right) \right) \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} x^j + \right. \\
 &+ \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} x^j \delta_j^k + \left. \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} D_t \left( \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j} \right) \right) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} - D_t \left( \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} \right) x^k + \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} x^k = \\
 &= \bar{H}(\bar{L}, \bar{x}, 2) + \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x}),
 \end{aligned}$$

где  $D_t \left( \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right) = D_t(\delta_j^k) = 0$ ,  $\delta_j^k = \begin{cases} 1, k = j \\ 0, k \neq j \end{cases}$  - символ Кронекера.

Таким образом, утверждение **теоремы 9** проверено для случая  $n = 2$ .

**Замечание 6.** При  $p > n$  энергия системы при замене локальных координат, вообще говоря, не сохраняется.

Рассмотрим случай  $p = 2, n = 1$  (старший порядок производной выше ранга энергии).

$$L(x(\bar{x}), \dot{x}(\bar{x}), \ddot{x}(\bar{x})) = \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x}) \text{ с невырожденной заменой } x = x(\bar{x}) = S(\bar{x}).$$

$$\begin{aligned}
 H_1(L, x) &= H(L, x, 1) = -L(x, \dot{x}, \ddot{x}) + \sum_{k=1}^1 \sum_{i=1}^m p_{1,1}^{(1)i} x^i = -L(x, \dot{x}, \ddot{x}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^i} x^i = \\
 &= -\bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x}) + \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} (x) + \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} (x) + \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial x^i} (x) \right) x^i =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x}) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^i} \sum_{l=1}^m \frac{\partial x^i}{\partial x^l} \dot{x}^l + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} C_2^1 D_t^{2-1} \left( \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial x^i}{\partial x^l} \dot{x}^l = \\
 &= -\bar{L}(x, \dot{x}) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^l} \dot{x}^l + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} C_2^1 D_t^{2-1} \left( \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial x^i}{\partial x^l} \dot{x}^l = \\
 &= -\bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x}) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} \delta_l^k \dot{x}^l + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} C_2^1 D_t^{2-1} \left( \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial x^i}{\partial x^l} \dot{x}^l = \\
 &= -\bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x}) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} \dot{x}^k \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} C_2^1 D_t^{2-1} \left( \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial x^i}{\partial x^l} \dot{x}^l = \\
 &= \bar{H}(\bar{L}, \dot{x}, 1) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} 2D_t \left( \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial x^i}{\partial x^l} \dot{x}^l. \tag{43}
 \end{aligned}$$

Таким образом, второе слагаемое в формуле (43), вообще говоря, не равно 0, препятствует сохранению энергии при невырожденной замене локальных координат (x) в базе  $X_m$  расслоения  $T^n X_m$ . То есть при  $p > n$  энергия системы при замене локальных координат не сохраняется.

Рассмотренные связи фундаментальных в физике и природе величин импульса и энергии подтверждают законы сохранения импульса и энергии в зависимости от порядка старшей производной по времени от аргументов функции Лагранжа. Работа имеет непосредственное отношение к дифференциальной геометрии в векторных полях и их расслоениях, а также к таким приложениям, как теоретическая механика, теоретическая физика, квантовая механика, физика элементарных частиц. Доказана инвариантность энергии системы ранга  $n$ , состояние которой описывается гладкой функцией, определенной в расслоенном пространстве скоростей

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин, В. А. Современная геометрия. Методы и приложения / В. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. – М. : УРСС, 1994.
2. Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов, А. В. Дифференциальная геометрия / А. В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
5. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 7-е изд., испр. – М. : Наука, 1988. – Т. 2: Теория поля. – 512 с.
6. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 7-е изд., испр. – М. : Наука, 1988. – Т. 1: Механика. – 214 с.
7. Галеев, Э. М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. – М. : Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.
8. Дирак, П. Лекции по квантовой механике / П. Дирак. – М. : Мир, 1968.
9. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / С. Г. Ехилевский [и др.] // Вестник полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.
10. Закон преобразования обобщенного импульса / С. Г. Ехилевский [и др.] // Вестник полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.
11. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л. Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии»; ВИНТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.

12. Трофимов, В. В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко. – М. : Факториал, 1995.
13. Пастухов, Ю. Ф. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов, О. В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 117–123.
14. Об эффективном поиске безусловного экстремума гладких функционалов в конечномерных задачах / О. В. Голубева [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 4. – С. 119.
15. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.

Поступила 19.09.2017

## THE GENERALIZED ENERGY TENSOR

*Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV, S. CHERNOV*

*We prove the invariance of the energy of a  $n$ -rank system whose state is described by a smooth function defined in a bundle velocity space, that is, it is proved that for a nondegenerate transformation of the coordinate system the generalized energy given in the form of a linear combination of the Lagrange function (from the coordinates and their derivatives to the  $n$ th order) and the sum of the products of different orders generalized impulses (from the first to the  $n$ th order) by the derivatives of the corresponding order of coordinates, remains unchanged.*

**Keywords:** *Euler – Lagrange equations, smooth manifolds, bundle velocity space, system momentum, energy tensor, generalized-momentum tensor, nondegenerate function.*

УДК 517.929.7

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ  
ДВУХСЛОЙНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ**

*канд. физ.-мат. наук, доц. И.Б. СОРОГОВЕЦ, О.Н. МЕДВЕДЕВА  
(Полоцкий государственный университет)*

*Представлено обоснование метода Фурье для решения краевых задач теплопроводности в случае двухслойного полого цилиндра. Рассмотрено девять задач на собственные значения и собственные функции типа Штурма – Лиувилля с разрывными коэффициентами. Методом разделения переменных найдены решения однородных задач. Каждая задача приведена к интегральному уравнению с симметричным ядром. Решения неоднородных задач получены в виде рядов Фурье по системам собственных функций рассматриваемых задач.*

**Ключевые слова:** *двухслойное тело, температура, метод разделения переменных.*

**Постановка задачи.** Полый цилиндр большой длины (бесконечный полый цилиндр) с внутренним радиусом  $R_0$  и внешним  $R_1$  окружен оболочкой толщиной  $H = R - R_1$ , где  $R$  – внешний радиус оболочки. Теплофизические характеристики полого цилиндра и оболочки считаем различными:  $\lambda_1, c_1, \rho_1; \lambda_2, c_2, \rho_2$ . Здесь  $c$  – теплоемкость,  $\rho$  – плотность,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, индекс 1 относится к полому цилиндру, индекс 2 – к оболочке. Найти распределение температуры в системе двух цилиндрических тел, которая будет зависеть от начальной температуры и от способа взаимодействия системы с окружающей средой. Предполагается, что температурное поле в системе тел радиальное, т. е. не зависит от полярного угла  $\varphi$  и координаты  $z$ . Температуру полого цилиндра обозначаем  $T_1(r, t)$  ( $t$  – время), температуру оболочки –  $T_2(r, t)$ . Внутри полого цилиндра и оболочки могут быть источники тепла  $w_1(r, t), w_2(r, t)$  – количество тепла, выделяемого в единице объема в единицу времени.

В общем случае задача определения температуры указанных цилиндрических тел может быть задана в виде системы, включающей в себя два уравнения теплопроводности, начальные условия, условия сопряжения температур, граничные условия. Граничные условия должны задаваться на внутренней поверхности  $r = R_0$  и на внешней –  $r = R$ . Для удобства введем безразмерные величины

$$x = \frac{r}{R}, \quad x_0 = \frac{R_0}{R}, \quad x_1 = \frac{R_1}{R}, \quad a_1 = \frac{\lambda_1}{c_1 \rho_1}, \quad a_2 = \frac{\lambda_2}{c_2 \rho_2}, \quad K_a^2 = \frac{a_1}{a_2}, \quad K_\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad F = \frac{a_2 t}{R^2}.$$

Тогда система соотношений для определения температуры запишется в виде

$$\frac{\partial T_1}{\partial F} = K_a^2 \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) + W_1(x, F) \quad \left( F > 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1, \quad W_1(x, F) = \frac{w_1(r, t) R^2}{a_2 c_1 \rho_1} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial F} = \left( \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) + W_2(x, F) \quad \left( F > 0, \quad x_1 \leq x \leq 1, \quad W_2(x, F) = \frac{w_2(r, t) R^2}{a_2 c_2 \rho_2} \right); \quad (2)$$

начальное условие

$$T(x, 0) = f(x), \quad T(x, 0) = \begin{cases} T_1(x, 0) = f_1(x) \quad (x_0 \leq x \leq x_1), \\ T_2(x, 0) = f_2(x) \quad (x_1 \leq x \leq 1), \end{cases} \quad f_1(x_1) = f_2(x_1); \quad (3)$$

условия сопряжения

$$T_1(x_1, F) = T_2(x_1, F); \quad K_\lambda \frac{\partial T_1(x_1, F)}{\partial x} = \frac{\partial T_2(x_1, F)}{\partial x}; \quad (4)$$

граничные условия

$$\beta_1 \frac{\partial T_1(x_0, F)}{\partial x} - \alpha_1 T_1(x_0, F) = \varphi_1(F); \quad \beta_2 \frac{\partial T_2(1, F)}{\partial x} + \alpha_2 T_2(1, F) = \varphi_2(F). \quad (5)$$

Варьируя значения констант  $\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2$  в формулах (5), можно получить при  $x = x_0$  и при  $x = 1$  три вида граничных условий: первого, второго и третьего рода. Всего получим девять различных задач, которые можно охарактеризовать как задачи  $(i - j)$  ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ). Это означает, что в формулах (5) при  $x = x_0$  задано граничное условие  $i$ -го рода, а при  $x = 1$  задано граничное условие  $j$ -го рода.

Судя по публикациям [1–5], основным методом решения задач теплопроводности для многослойных тел является метод интегральных преобразований. Этот метод имеет один недостаток: после получения решения задачи теплопроводности в изображениях не всегда удастся элементарными методами вернуться к оригиналам. В [6, 7] задачи теплопроводности двухслойных тел решались методом разделения переменных. Обоснование метода разделения переменных приводит к задачам Штурма – Лиувилля с разрывными коэффициентами. В данной работе метод разделения переменных применяется для определения температурных полей двухслойного полого цилиндра.

#### Метод разделения переменных при решении однородных задач.

Предварительно рассмотрим случай, когда в формулах (1)–(5)

$$W_1(x, F) = 0; \quad W_2(x, F) = 0; \quad \varphi_1(F) = 0; \quad \varphi_2(F) = 0.$$

Решения уравнений (1) и (2) будем искать в виде произведения функций, т. е.

$$T_k(x, F) = U_k(F) \cdot V_k(x) \quad (k = 1, 2). \quad (6)$$

Подставляя выражения (6) в уравнения (1) и (2), после разделения переменных и решения получаемых уравнений, находим

$$V_1(x) = A_1 J_0\left(\frac{\mu_1}{K_a} x\right) + B_1 Y_0\left(\frac{\mu_1}{K_a} x\right), \quad V_2(x) = A_2 J_0(\mu_2 x) + B_2 Y_0(\mu_2 x), \quad U_k(F) = \exp(-\mu_k^2 F), \quad (7)$$

где  $J_0(x)$  и  $Y_0(x)$  – функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода соответственно [1].

Далее будут использоваться также функции  $J_1(x) = -J_0'(x)$  и  $Y_1(x) = -Y_0'(x)$  – бесселевы функции первого порядка первого и второго рода соответственно. Как видно, решения (7) зависят от шести постоянных  $\mu_1, \mu_2, A_1, A_2, B_1, B_2$ , которые находятся из условий (4), (5). Чтобы первое из условий сопряжения (4) выполнялось при любых  $F > 0$ , должно быть  $\mu_1 = \mu_2$ , что приводит к равенству

$$J_0\left(\frac{\mu}{K_a} x_1\right) A_1 + Y_0\left(\frac{\mu}{K_a} x_1\right) B_1 - J_0(\mu x_1) A_2 - Y_0(\mu x_1) B_2 = 0. \quad (8)$$

Второе из условий (4) можно записать в виде

$$K_a \mu \left( J_1\left(\frac{\mu}{K_a} x_1\right) A_1 + Y_1\left(\frac{\mu}{K_a} x_1\right) B_1 \right) - \mu K_a \left( J_1(\mu x_1) A_2 + Y_1(\mu x_1) B_2 \right) = 0. \quad (9)$$

Из граничных условий (5) получаем еще два соотношения:

$$\left( \frac{\beta_1 \mu}{K_a} J_1\left(\frac{\mu}{K_a} x_0\right) - \alpha_1 J_0\left(\frac{\mu}{K_a} x_0\right) \right) A_1 + \left( \frac{\beta_1 \mu}{K_a} Y_1\left(\frac{\mu}{K_a} x_0\right) - \alpha_1 Y_0\left(\frac{\mu}{K_a} x_0\right) \right) B_1 = 0, \quad (10)$$

$$\left( \beta_2 \mu J_1(\mu) + \alpha_2 J_0(\mu) \right) A_2 + \left( \beta_2 \mu Y_1(\mu) + \alpha_2 Y_0(\mu) \right) B_2 = 0. \quad (11)$$

Получена система 4-х линейных однородных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов  $A_1, A_2, B_1, B_2$  и числа  $\mu$ . Чтобы система (8)–(11) имела ненулевые решения, ее определитель  $\Delta(\mu)$  должен равняться нулю.

Выпишем выражение  $\Delta(\mu)$ , для чего введем новые обозначения:

$$\left\{ \begin{array}{l} J0\left(\frac{\mu}{K_a}x_0\right) = J_{00}, Y0\left(\frac{\mu}{K_a}x_0\right) = Y_{00}, J0\left(\frac{\mu}{K_a}x_1\right) = J_{01}, Y0\left(\frac{\mu}{K_a}x_1\right) = Y_{01}, J0(\mu x_1) = J_{02}, Y0(\mu x_1) = Y_{02}, \\ J0(\mu) = J_{03}, Y0(\mu) = Y_{03}, J1\left(\frac{\mu}{K_a}x_0\right) = J_{10}, Y1\left(\frac{\mu}{K_a}x_0\right) = Y_{10}, J1\left(\frac{\mu}{K_a}x_1\right) = J_{11}, Y1\left(\frac{\mu}{K_a}x_1\right) = Y_{11}, \\ J1(\mu x_1) = J_{12}, Y1(\mu x_1) = Y_{12}, J1(\mu) = J_{13}, Y1(\mu) = Y_{13}. \end{array} \right. \quad (12)$$

В этих обозначениях

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} J_{01} & Y_{01} & -J_{02} & -Y_{02} \\ \mu K_\lambda J_{11} & \mu K_\lambda Y_{11} & -\mu K_a J_{12} & -\mu K_a Y_{12} \\ \frac{\beta_1 \mu}{K_a} J_{10} - \alpha_1 J_{00} & \frac{\beta_1 \mu}{K_a} Y_{10} - \alpha_1 Y_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 \mu J_{13} + \alpha_2 J_{03} & \beta_2 \mu Y_{13} + \alpha_2 Y_{03} \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Уравнение  $\Delta(\mu) = 0$  называют характеристическим уравнением, а его решения – характеристическими числами или собственными значениями (если при этих значениях система (8)–(11) имеет ненулевые решения). Отметим, что число  $\mu = 0$  является корнем определителя (13) для каждой задачи. Ниже будет показано, что число  $\mu = 0$  будет собственным значением только для задачи (2–2). Соответствующей собственной функцией будет  $T(x, F) = 1$  ( $x \in [x_0, 1]$ ,  $F \geq 0$ ). В связи с этим характеристическое число  $\mu = 0$  больше рассматриваться не будет. При этом вторую строку определителя (13) сократим на  $\mu$ , а в задачах ( $i - j$ ) при  $i = 2$  или  $j = 2$  сократим на  $\mu$  третью или четвертую строки.

Далее будет показано, что для каждой задачи множество собственных значений счетно, собственные значения неотрицательны, просты и их можно перенумеровать  $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots$ .

Для задачи (2–2) добавляется собственное значение  $\mu_0 = 0$ . Решения системы (8)–(11) будут зависеть от собственных чисел  $\mu_k$ , и мы будем обозначать их как  $A_{1,k}, A_{2,k}, B_{1,k}, B_{2,k}$ . Займемся теперь решением системы (8)–(11). Будем считать, что уравнение (9) сокращено на  $\mu$ .

Предварительно введем некоторые преобразования определителя (13), в котором  $\mu$  заменено на  $\mu_k$  и вторая строка не содержит множителя  $\mu_k$ . К первой строке прибавим третью и четвертую, помноженные соответственно на  $\frac{-Y_{01}}{\frac{\beta_1 \mu_k}{K_a} Y_{10} - \alpha_1 Y_{00}}$  и  $\frac{Y_{02}}{\beta_2 \mu_k Y_{13} + \alpha_2 Y_{03}}$ , ко второй строке прибавим третью и четвер-

тую, помноженные соответственно на  $\frac{-K_\lambda Y_{11}}{\frac{\beta_1 \mu_k}{K_a} Y_{10} - \alpha_1 Y_{00}}$  и  $\frac{K_a Y_{12}}{\beta_2 \mu_k Y_{13} + \alpha_2 Y_{03}}$ . Получим определитель, кото-

рому соответствует система, равносильная (8)–(11). Введем замены  $A_{1,k} = \left(\frac{\beta_1 \mu_k}{K_a} Y_{10} - \alpha_1 Y_{00}\right) C_{1,k}$ ,  $A_{2,k} = \left(\beta_2 \mu_k Y_{13} + \alpha_2 Y_{03}\right) C_{2,k}$ . Тогда  $B_{1,k} = -\left(\frac{\beta_1 \mu_k}{K_a} J_{10} - \alpha_1 J_{00}\right) C_{1,k}$ ,  $B_{2,k} = -\left(\beta_2 \mu_k J_{13} + \alpha_2 J_{03}\right) C_{2,k}$ .

Для  $C_{1,k}, C_{2,k}$  получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} C_{1,k} &= \left( J_{02} \left( \beta_2 \mu_k Y_{13} + \alpha_2 Y_{03} \right) - Y_{02} \left( \beta_2 \mu_k J_{13} + \alpha_2 J_{03} \right) \right) D_k, \\ C_{2,k} &= \left( J_{01} \left( \frac{\beta_1 \mu_k}{K_a} Y_{10} - \alpha_1 Y_{00} \right) - Y_{01} \left( \frac{\beta_1 \mu_k}{K_a} J_{10} - \alpha_1 J_{00} \right) \right) D_k, \end{aligned}$$

где  $D_k$  – произвольные постоянные.

Выпишем окончательные выражения для коэффициентов  $A_{1,k}, A_{2,k}, B_{1,k}, B_{2,k}$ :

$$\left. \begin{aligned} A_{1,k} &= \left( \frac{\beta_1 \mu_k}{K_a} Y_{10} - \alpha_1 Y_{00} \right) \left( J_{02} \left( \beta_2 \mu_k Y_{13} + \alpha_2 Y_{03} \right) - Y_{02} \left( \beta_2 \mu_k J_{13} + \alpha_2 J_{03} \right) \right) D_k, \\ B_{1,k} &= - \left( \frac{\beta_1 \mu_k}{K_a} J_{10} - \alpha_1 J_{00} \right) \left( J_{02} \left( \beta_2 \mu_k Y_{13} + \alpha_2 Y_{03} \right) - Y_{02} \left( \beta_2 \mu_k J_{13} + \alpha_2 J_{03} \right) \right) D_k, \\ A_{2,k} &= \left( \beta_2 \mu_k Y_{13} + \alpha_2 Y_{03} \right) \left( J_{01} \left( \frac{\beta_1 \mu_k}{K_a} Y_{10} - \alpha_1 Y_{00} \right) - Y_{01} \left( \frac{\beta_1 \mu_k}{K_a} J_{10} - \alpha_1 J_{00} \right) \right) D_k, \\ B_{2,k} &= - \left( \beta_2 \mu_k J_{13} + \alpha_2 J_{03} \right) \left( J_{01} \left( \frac{\beta_1 \mu_k}{K_a} Y_{10} - \alpha_1 Y_{00} \right) - Y_{01} \left( \frac{\beta_1 \mu_k}{K_a} J_{10} - \alpha_1 J_{00} \right) \right) D_k. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Формулы (14) записаны в обозначениях (12), т. е.  $J$  – функция Бесселя первого рода,  $Y$  – функция Бесселя второго рода, первый индекс – порядок функции Бесселя, второй индекс – номер значения, при котором вычисляется функция Бесселя:  $0 - \left( \frac{\mu_k}{K_a} x_0 \right)$ ;  $1 - \left( \frac{\mu_k}{K_a} x_1 \right)$ ;  $2 - \left( \mu_k x_1 \right)$ ;  $3 - \left( \mu_k \right)$ .

Таким образом, найдено множество решений задач (1)–(5) без учета начального условия (3) при  $W_1(x, F) = 0$ ,  $W_2(x, F) = 0$ ,  $\varphi_1(F) = 0$ ,  $\varphi_2(F) = 0$  (однородный случай):

$$T_k(x, F) = \begin{cases} T_{1,k}(x, F) = \left( A_{1,k} J_0 \left( \frac{\mu_k}{K_a} x \right) + B_{1,k} Y_0 \left( \frac{\mu_k}{K_a} x \right) \right) \exp(-\mu_k^2 F) \quad (x \in [x_0, x_1]), \\ T_{2,k}(x, F) = \left( A_{2,k} J_0(\mu_k x) + B_{2,k} Y_0(\mu_k x) \right) \exp(-\mu_k^2 F) \quad (x \in [x_1, 1]), \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

где  $A_{1,k}, A_{2,k}, B_{1,k}, B_{2,k}$  – коэффициенты, определяемые по формулам (14);  $\mu_k$  – корни характеристического уравнения  $\Delta(\mu) = 0$ , здесь  $\Delta(\mu)$  – определитель (13).

#### Свойства решений однородных задач.

Будем предполагать, что в (1)–(5)  $W_1(x, F) = 0$ ,  $W_2(x, F) = 0$ ,  $\varphi_1(F) = 0$ ,  $\varphi_2(F) = 0$ . Запишем уравнения (1) и (2) в виде одного уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial F} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( p(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad p(x) = \begin{cases} K_a^2 x \quad (x \in [x_0, x_1]), \\ x \quad (x \in [x_1, 1]). \end{cases} \quad (16)$$

Функции (15), удовлетворяющие этому уравнению, запишем в виде

$$T_k(x, F) = V_k(x) \cdot \exp(-\mu_k^2 F), \quad V_k(x) = \begin{cases} V_{1,k}(x) = A_{1,k} J_0 \left( \frac{\mu_k}{K_a} x \right) + B_{1,k} Y_0 \left( \frac{\mu_k}{K_a} x \right) \quad (x \in [x_0, x_1]), \\ V_{2,k}(x) = A_{2,k} J_0(\mu_k x) + B_{2,k} Y_0(\mu_k x) \quad (x \in [x_1, 1]), \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Подставляя выражения (17) в уравнение (16) и сокращая на  $\exp(-\mu_k^2 F)$ , получим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют функции  $V_k(x)$ :

$$l(V_k(x)) = -\frac{1}{x} \left( p(x) V_k'(x) \right)' = \mu_k^2 V_k(x). \quad (18)$$

Иначе говоря, функции  $V_k(x)$  являются собственными функциями дифференциального оператора  $L$ , порожденного дифференциальным выражением  $l(V_k(x))$  в (18), условиями сопряжения (4) и граничными условиями (5). Мы пришли, таким образом, к задаче на собственные значения для дифференциаль-



ного оператора  $L$ . В классическом случае, когда  $p(x)$  непрерывно дифференцируемая на отрезке  $[x_0; 1]$  функция и  $p(x) > 0$ , эту задачу называют задачей Штурма – Лиувилля. В данном случае получено обобщение задачи Штурма – Лиувилля в том смысле, что функция  $p(x)$  терпит разрыв первого рода во внутренней точке отрезка  $[x_0; 1]$ , но при этом добавляются два условия (4) в точке разрыва.

Основной метод исследования в классической задаче Штурма – Лиувилля – приведение этой задачи к интегральному уравнению путем построения функции Грина [8]. В данном случае будем поступать аналогично. Предварительно рассмотрим задачу о том, будет ли число  $\mu = 0$  собственным значением оператора  $L$ . Для этого рассмотрим однородное уравнение  $l(U) = 0$  при условиях (4) и его решение

$$-\frac{1}{x}(p(x)U')' = 0 \Rightarrow \begin{cases} K_\lambda U'(x_1 - 0) = U'(x_1 + 0) \\ U(x_1 - 0) = U(x_1 + 0) \end{cases} \Rightarrow U(x) = \begin{cases} \frac{a}{K_a^2} \ln x + b & (x \in [x_0; x_1]), \\ \frac{K_\lambda a}{K_a^2} \ln \frac{x}{x_1} + \frac{a}{K_a^2} \ln x_1 + b & (x \in [x_1; 1]), \end{cases} \quad (19)$$

где  $a$  и  $b$  – произвольные постоянные.

Рассмотрим теперь задачу (2–2) с граничными условиями  $U'(x_0) = 0, U'(1) = 0$ . Оба эти условия выполнены при  $a = 0$ . Из решения (19) следует, что для задачи (2–2) число  $\mu = 0$  является собственным значением с соответствующей собственной функцией  $U(x) = b$  ( $x \in [x_0; 1]$ ).

Легко показать, что для других задач попытка удовлетворить граничным условиям приводит к равенствам  $a = 0, b = 0$ , т. е. для всех остальных задач число  $\mu = 0$  не является собственным значением.

Теперь будем строить функции Грина для всех задач, кроме задачи (2–2). Для этого воспользуемся методом [8], согласно которому решение неоднородного уравнения

$$l(U) = -\frac{1}{x}(p(x)U')' = f(x) \quad (20)$$

будет найдено с помощью метода вариации произвольных постоянных. Сначала находим два линейно независимых решения соответствующего однородного уравнения (19) при условиях (4), одно из которых  $U_0(x)$  удовлетворяет граничному условию при  $x = x_0$ , а другое  $U_1(x)$  – при  $x = 1$ . Построим указанные решения для каждой из восьми задач, воспользовавшись выражениями (19). Предварительно отметим, что при фиксированном  $i$  для всех задач ( $i - j$ ) функция  $U_0(x)$  будет одной и той же, а при фиксированном  $j$  такой будет функция  $U_1(x)$ . Таким образом, всего нужно построить три функции вида  $U_0(x)$  и три функции вида  $U_1(x)$ . Выпишем их

$$\begin{aligned} i = 2, \quad U_0'(x_0) = 0, & & j = 2, \quad U_1'(1) = 0, \\ U_0(x) = 1, \quad (x \in [x_0, 1]); & & U_1(x) = 1, \quad x \in [x_0, 1]; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} i = 1, \quad U_0(x_0) = 0, & & i = 3, \quad U_0'(x_0) - Bi_1 U_0(x_0) = 0, \quad Bi_1 = \alpha_1 / \beta_1, \\ U_0(x) = \begin{cases} \ln \frac{x}{x_0} & (x \in [x_0; x_1]), \\ K_\lambda \ln \frac{x}{x_1} + \ln \frac{x_1}{x_0} & (x \in [x_1; 1]); \end{cases} & & U_0(x) = \begin{cases} \left( \ln \frac{x}{x_0} + \frac{1}{x_0 Bi_1} \right) & (x \in [x_0; x_1]), \\ K_\lambda \ln \frac{x}{x_1} + \ln \frac{x_1}{x_0} + \frac{1}{x_0 Bi_1} & (x \in [x_1; 1]); \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} j = 1, \quad U_1(1) = 0, & & j = 3, \quad U_1'(1) + Bi_2 U_1(1) = 0, \quad Bi_2 = \alpha_2 / \beta_2, \\ U_1(x) = \begin{cases} \ln \frac{x}{x_1} + K_\lambda \ln x_1 & (x \in [x_0; x_1]), \\ K_\lambda \ln x & (x \in [x_1; 1]); \end{cases} & & U_1(x) = \begin{cases} \ln \frac{x}{x_1} + K_\lambda \left( \ln x_1 - \frac{1}{Bi_2} \right) & (x \in [x_0; x_1]), \\ K_\lambda \left( \ln x - \frac{1}{Bi_2} \right) & (x \in [x_1; 1]). \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

С помощью формул (21)–(23) легко подобрать функции  $U_0(x)$  и  $U_1(x)$  для каждой из задач. Например, для задачи (2–3) выбор осуществляем следующим образом:  $i = 2$  и по формуле (21)  $U_0(x) = 1$  при  $x \in [x_0; 1]$ ;  $j = 3$  и по второй из формул (23)

$$U_1(x) = \begin{cases} \ln \frac{x}{x_1} + K_\lambda \left( \ln x_1 - \frac{1}{Bi_2} \right) & (x \in [x_0; x_1]), \\ K_\lambda \left( \ln x - \frac{1}{Bi_2} \right) & (x \in [x_1; 1]). \end{cases}$$

Далее, по методу вариации произвольных постоянных строим решение уравнения (20):

$$U(x) = C_0(x)U_0(x) + C_1(x)U_1(x) \Rightarrow \begin{cases} C_0'U_0 + C_1'U_1 = 0 \\ C_0'U_0' + C_1'U_1' = -\frac{x}{p(x)}f(x) \end{cases} \Rightarrow C_0' = \frac{xU_1(x)}{w \cdot p}f(x), \quad C_1' = -\frac{xU_0(x)}{w \cdot p}f(x).$$

В этих формулах  $w = w(x)$  – вронскиан функций  $U_0(x), U_1(x)$ . Легко показать, что для всех задач  $w(x) \cdot p(x) = w \cdot p$  – кусочно-постоянная на отрезке  $[x_0; 1]$  функция. Интегрируя, находим

$$U(x) = - \left( U_0(x) \int_x^1 \frac{y f(y) U_1(y)}{w \cdot p} dy + U_1(x) \int_{x_0}^x \frac{y f(y) U_0(y)}{w \cdot p} dy \right) = \int_{x_0}^1 y G(x, y) f(y) dy. \quad (24)$$

Пределы интегрирования выбирались таким образом, чтобы  $C_0(1) = 0$  и  $C_1(x_0) = 0$ . При таком выборе пределов функция  $U(x)$  будет удовлетворять граничным условиям. В последнем интеграле  $G(x, y)$  – функция Грина дифференциального оператора  $L$ . Ее выражение

$$G(x, y) = -\frac{1}{w \cdot p} \begin{cases} U_0(x)U_1(y), & x_0 \leq x \leq y, \\ U_1(x)U_0(y), & y \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (25)$$

Легко видеть, что функция Грина симметрична, т. е.  $G(x, y) = G(y, x)$ . Эта функция обладает и некоторыми другими свойствами, которые приведены в [8, 9].

С помощью функции Грина каждая из восьми задач на собственные значения для дифференциального оператора  $L$  сводится к задаче на собственные значения для однородного интегрального уравнения

$$V(x) = \mu \int_{x_0}^1 y G(x, y) V(y) dy. \quad (26)$$

Рассмотрим теперь задачу (2–2), для которой число  $\mu = 0$  является собственным значением. Чтобы избавиться от этого условия, введем дифференциальный оператор  $L_1$ , порожденный дифференциальным выражением  $l_1(U) = l(U) + U$  и граничными условиями задачи (2–2). Общее решение однородного уравнения  $l_1(U) = 0$  можно представить в виде

$$U(x) = \begin{cases} U_0(x) & (x \in [x_0; x_1]), \\ U_1(x) & (x \in [x_1; 1]) \end{cases}, \quad U_0(x) = a_0 I_0 \left( \frac{x}{K_a} \right) + b_0 K_0 \left( \frac{x}{K_a} \right), \quad U_1(x) = a_1 I_0(x) + b_1 K_0(x),$$

где  $I_0(x)$  и  $K_0(x)$  – модифицированные функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода соответственно [1].

Для построения каждой из функций  $U_0(x)$  и  $U_1(x)$  получим систему трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными:  $a_0, b_0, a_1, b_1$ . После построения функций  $U_0(x), U_1(x)$  и применения формул

(24) и (25) задача на собственные значения для дифференциального оператора  $L$  сводится к интегральному уравнению (26), в котором  $\mu$  следует заменить на  $\mu + 1$ .

Легко показать, что функция  $U(x)$ , определенная формулой (24), удовлетворяет условиям сопряжения (4). Этот факт указывает на то, что собственные функции интегрального уравнения (26) удовлетворяют условиям сопряжения. Выпишем теперь основные свойства собственных значений оператора  $L$  и его собственных функций  $V_k(x)$ , являющихся одновременно и собственными функциями интегрального уравнения (26) [8, 9].

1. Собственные значения неотрицательные, простые и их множество счетно.
2. Собственные функции  $\{V_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  образуют полную ортогональную систему функций.
3. Всякая истокообразно представимая через ядро функция разлагается в ряд Фурье по этой системе.

**Методы построения решений неоднородных задач.**

а) Пусть в системе соотношений (1)–(5)  $W_1(x, F) = W_2(x, F) = 0$ ,  $\varphi_1(F) = \varphi_2(F) = 0$ ,  $f(x) \neq 0$ . Решение в этом случае обозначим  $T_f(x, F)$ . Предполагая, что  $f(x)$  разлагается в ряд Фурье по системе (6), получаем

$$T_f(x, F) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cdot V_k(x) \cdot \exp(-\mu_k^2 \cdot F), \quad D_k = \frac{1}{\|V_k\|^2} \int_{x_0}^1 f(x)V_k(x)dx, \quad \|V_k\|^2 = \int_{x_0}^1 V_k^2(x)dx.$$

б) Пусть в системе соотношений (1)–(5)  $\varphi_1(F) = \varphi_2(F) = f(x) = 0$ ,  $W_i(x, F) \neq 0$  ( $i = 1, 2$ ). Положим  $W(x, F) = W_1(x, F)$  при  $x \in [x_0; x_1]$ ,  $W(x, F) = W_2(x, F)$  при  $x \in [x_1; 1]$ . Полагая, что при каждом  $F > 0$  функция  $W(x, F)$  разлагается в ряд Фурье по системе  $\{V_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ , т. е.  $W(x, F) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(F) \cdot V_k(x)$ , реше-

ния задач в рассматриваемом случае будем искать в виде  $T_W(x, F) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(F) \cdot V_k(x)$  ( $B_k(0) = 0$ ). Для

$B_k(F)$  получаем  $B_k(F) = \int_0^F \exp(\mu_k^2(t - F))W_k(t)dt$ , т. е. решение  $T_W(x, F)$  построено.

в) При  $\varphi_1(F) = \varphi_2(F) = 0$ ,  $f(x) \neq 0$ ,  $W(x, F) \neq 0$  решением задач будет сумма  $T_f(x, F) + T_W(x, F)$ .

г) В общем случае легко подобрать функцию  $U(x, F)$ , удовлетворяющую только граничным условиям. Тогда решение задач можно найти в виде суммы трех слагаемых:  $T(x, F) = T1(x, F) + T2(x, F) + U(x, F)$ . Здесь  $T1(x, F)$  – решение типа а) в котором  $f(x) \rightarrow f(x) - U(x, 0)$ ;  $T2(x, F)$  – решение типа б) в котором

$$W(x, F) \rightarrow W(x, F) + H(x, F), \quad H(x, F) = \begin{cases} H_1(x, F) = K_a^2(U''_{xx} + x^{-1}U'_x) - U'_F & (x_0 \leq x \leq x_1), \\ H_2(x, F) = U''_{xx} + x^{-1}U'_x - U'_F & (x_1 \leq x \leq 1). \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967. – 600 с.
2. Жук, И. П. Теплотехнический расчет наружных ограждений / И. П. Жук, Л. П. Минченкова. – Минск : Наука и техника, 1975. – 104 с.
3. Ильченко, О. Т. Температурное поле двухслойной пластины при переменных во времени граничных условиях теплообмена / О. Т. Ильченко // Инженерно-физический журнал. – 1970. – Т. 19, № 6. – С. 1094–1099.
4. Павловский, Г. И. Теплопроводность в двухслойной пластине при граничных условиях III рода / Г. И. Павловский // Инженерно-физический журнал, 1962. – Т. 5, № 4. – С. 86–88.
5. Смирнов, М. С. Температурное поле в трехслойной стенке при граничных условиях четвертого рода / М. С. Смирнов // В кн. Тепло-и массообмен в каплярно-пористых телах. – М. ; Л. : Госэнергоиздат, 1957. – С. 17–20.

6. Сороговец, И. Б. Моделирование температурных полей двухслойных тел / И. Б. Сороговец, С. А. Шлапаков // Материалы международной научной конференции МСИТ // Гродно, 2008. – Ч. 2. – С. 261–265.
7. Вакульчик, В. С. Разложение по собственным функциям, связанным с краевыми задачами теплопроводности для двухслойных тел / В. С. Вакульчик, И. Б. Сороговец, С. А. Шлапаков // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2009. – № 3. – С. 87–91.
8. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М., 1971.
9. Соболев, С. Л. Уравнения математической физики / С. Л. Соболев. – М., 1966.

Поступила 19.09.2017

## **SIMULATION OF TEMPERATURE FIELDS OF TWO-LAYER A HOLLOW CYLINDER BY THE METHOD OF SEPARATION OF VARIABLES**

**I. SOROGOVETS, O. MEDVEDEVA**

*In this work, for solving boundary-value problems of heat conduction in the case of double-layered hollow cylinder, the justification is given of the Fourier method. Considered nine tasks on their own values and eigen functions of the Sturm–Lowville problem with discontinuous coefficients. By separation of variables of the solution of homogeneous problems. Each task, refer to the integral equation with symmetric kernel. Solutions of the inhomogeneous tasks received in the form of Fourier series by systems of eigen functions of the considered problems.*

*Keywords: two-layer body temperature, the method of separation of variables.*

УДК 512.643.4

**О ЦЕЛОМ ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ  $X^n = A$  ДЛЯ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ НАТУРАЛЬНЫХ  $n$**

**К.Л. ЯКУТО**

*(Витебский государственный университет имени П.М. Машерова)*

*Исследованы возможности использования аналитических методов для нахождения целых положительных решений нелинейных матричных уравнений. В леммах приведены условия на коэффициенты матрицы  $X$ , выражаемые через коэффициенты матрицы  $A$ . Условия даны в виде системы нелинейных уравнений от нескольких неизвестных. Предложен наиболее простой метод решения матричного уравнения вида  $X^n = A$  для матриц второго порядка в случае целых положительных  $n$ . Представленные результаты можно использовать для нахождения целых положительных корней матриц второго порядка при любом  $n$ .*

**Ключевые слова:** *нелинейное матричное уравнение, аналитические методы, система нелинейных алгебраических уравнений, метод математической индукции, натуральные корни уравнения.*

**Введение.** Извлечение корней  $n$ -й степени – важная задача теории матриц, имеющая как теоретические, так и практические приложения. Одно из применений – это вычисление логарифма матрицы. Корни матриц требуется находить в некоторых финансовых приложениях, использующих модели Маркова. Кроме того, необходимость решать подобные вопросы возникает в таких областях, как теория управления, динамическое программирование, методика решения некоторых дифференциальных уравнений [1]. В связи с этим представляет интерес вопрос о наличии положительных и целых положительных решений нелинейного матричного уравнения вида  $X^n = A$  для матриц различных порядков в случае целых положительных  $n$ . Задача по отысканию положительного решения нелинейного матричного уравнения  $X^2 = A$  была решена. Результаты решения этой задачи в представлении в [2].

Целью настоящей работы является доказательство эффективности использования аналитических методов для решения задачи по нахождению целых положительных решений нелинейного матричного уравнения  $X^n = A$  для матриц второго порядка в случае целых положительных  $n$ .

**Материал и методы.** В данной работе изучаются нелинейные матричные уравнения вида

$$X^n = A,$$

где  $A, X$  – матрицы второго порядка,  $n$  – натуральное число.

Элементы исходной матрицы  $A$  являются целыми и положительными числами. Методика проводимого исследования была подобна методике, предложенной в [3]: решаемое уравнение записывалось в виде системы, состоящей из четырех нелинейных уравнений, которая затем решалась аналитическими методами. В процессе проведения исследования использовались пакет символьной математики Maple 15, Microsoft Excel – программа для работы с электронными таблицами, входящая в стандартный пакет Microsoft Office. Для нахождения решений уравнений, правая часть которых представляет собой полином степени, равной степени  $X$  исследуемого матричного уравнения, использовался on-line калькулятор, размещенный на сайте [3].

**Результаты и их обсуждение.** Пусть в общем случае  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ .

Рассмотрим случай, когда один из диагональных элементов матрицы  $X$  равен нулю, оставшиеся элементы не равны друг другу, т. е. имеет место следующее нелинейное матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}. \tag{1}$$

При  $n = 2$  имеем следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} a^2 + bc = K, \\ ab = L, \\ ac = M, \\ bc = N. \end{cases} \quad (2)$$

Решение такой системы уравнений трудности не представляет.

**Лемма 1.** Если существует целый положительный корень рассматриваемого вида матричного уравнения  $X^3 = A$ , то для нахождения его элементов необходимо использовать формулы:  $b = \sqrt[3]{\frac{N}{p}}$ ,  $c = b \frac{M}{L}$ ,  $a = pb$ , где  $p = \frac{K - N}{L}$ .

Доказательство. При  $n = 3$  имеем следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} a^3 + 2abc = K, \\ a^2b + b^2c = L, \\ a^2c + bc^2 = M, \\ abc = N. \end{cases} \quad (3)$$

В данном случае также выполняется соотношение  $a = pb$ , где  $p = \frac{K - N}{L}$ .

Домножим обе части второго уравнения системы (3) на  $a/b$ , а затем вычтем из первого уравнения четвертое. Заметим, что полученные уравнения имеют одинаковые левые части, следовательно, равны и их правые части, т. е.  $L \frac{a}{b} = K - N$ . Зависимость между  $a$  и  $b$  будет иметь вид  $a = pb$ , где  $p = \frac{K - N}{L}$ . Если в левых частях второго и третьего уравнений системы (3) вынести за скобки  $b$  и  $c$  соответственно, то множители в скобках окажутся одинаковыми. Следовательно, можно установить связь между переменными  $b$  и  $c$ , которая будет иметь следующий вид:  $\frac{b}{c} = \frac{L}{M}$ . Подставив формулы, выражающие зависимости между переменными  $a$  и  $b$ ,  $c$  и  $b$ , в четвертое уравнение системы (3), получим уравнение относительно лишь переменной  $b$ . Решая полученное уравнение, найдем элемент  $b$ :

$$b = \sqrt[3]{\frac{LN}{Mp}}.$$

*Пример 1.* Пусть  $A = \begin{pmatrix} 148 & 273 \\ 195 & 70 \end{pmatrix}$ . В этом случае  $p = 0,2857$ ,  $b = 7$ ,  $a = pb = 2$ ,  $c = 5$ . Матрица  $X$ , являющаяся корнем матрицы  $A$ , имеет вид  $X = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Лемма 2.** Если существует целый положительный корень рассматриваемого вида матричного уравнения  $X^4 = A$ , то для нахождения его элементов необходимо использовать формулы:

$$b = \sqrt[4]{\frac{NL^2}{p^2ML + M^2}}, \quad c = b \frac{M}{L}, \quad a = pb, \quad \text{где } p = \frac{K - N}{L}.$$

Доказательство. При  $n = 4$  имеем следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} a^4 + 3a^2bc + b^2c^2 = K, \\ a^3b + 2ab^2c = L, \\ a^3c + 2abc^2 = M, \\ a^2bc + b^2c^2 = N. \end{cases} \quad (4)$$

В рассматриваемом случае, как и в предыдущем, имеет место такая же зависимость между переменными  $a$  и  $b$ ,  $b$  и  $c$ . Подставив в четвертое уравнение системы (4) вместо  $a$  и  $c$  соответствующие выражения, найдем  $b$ :

$$b = \sqrt[4]{\frac{NL^2}{p^2ML + M^2}}.$$

*Пример 2.* Пусть  $A = \begin{pmatrix} 9881 & 7480 \\ 4760 & 7161 \end{pmatrix}$ . В этом случае  $p = 0,36$ ,  $b = 11$ ,  $a = pb = 4$ ,  $c = 7$ . Матрица  $X$ , являющаяся корнем матрицы  $A$  имеет вид  $X = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Теорема 1.** Если существует целый положительный корень рассматриваемого вида матричного уравнения  $X^n = A$ , то для нахождения его элементов необходимо использовать формулы:

$$b = \sqrt[n]{f(K, L, M, N)}, \quad c = b \frac{M}{L}, \quad a = pb,$$

где  $f(K, L, M, N)$  – функция, зависящая от переменных  $K, L, M, N$ ;  $p = \frac{K - N}{L}$ .

Доказательство. Рассмотрим первое утверждение теоремы.

Доказательством того, что утверждение **теоремы 1** имеет место при  $n = 3$ , служит **лемма 1**.

Предположим, что для матрицы  $X^n = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$  имеет место формула линейной зависимости

между переменными  $a$  и  $b$ . Тогда необходимо доказать, что для матрицы  $X^{n+1} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$  также выполняется подобная зависимость.

Зная, что  $X^{n+1} = X^n X$ , можно записать соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Ka + Lb = P, \\ Kb = Q, \\ Ma + Nb = R, \\ Mb = S. \end{cases} \quad (5)$$

Поскольку  $X^{n+1} = X^n X = XX^n$ , то вместо первого уравнения системы (5), можно записать уравнение  $Ka + Mb = P$ .

Домножим обе части второго уравнения системы (5) на  $a/b$ , а затем вычтем из первого уравнения четвертое. Заметим, что полученные уравнения имеют одинаковые левые части, следовательно, равны и их правые части, т. е.  $Q \frac{a}{b} = P - S$ . Зависимость между  $a$  и  $b$  будет иметь вид  $a = pb$ , где

$$p = \frac{P - S}{Q}.$$

Рассмотрим второе утверждение теоремы.

Доказательством того, что утверждение **теоремы 1** имеет место при  $n = 3$ , служит **лемма 1**.

Зная, что  $X^{n+1} = XX^n$ , можно записать соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Ka + Mb = P, \\ La + Nb = Q, \\ Kc = R, \\ Lc = S. \end{cases} \quad (6)$$

Поскольку  $X^n X = XX^n$ , то вместо третьего уравнения системы (5) можно записать третье уравнение системы (6). Тогда, разделив второе уравнение системы (5) на третье уравнение, получим требуемый результат:

$$\frac{b}{c} = \frac{Q}{R}.$$

Приведем системы уравнений для случаев  $n = 5, \dots, 10$  и выражения для нахождения  $b$ .

Для случая  $n = 5$

$$\begin{cases} a^5 + 4a^3bc + 3ab^2c^2 = K, \\ a^4b + 3a^2b^2c + b^3c^2 = L, \\ a^4c + 3a^2bc^2 + b^2c^3 = M, \\ a^3bc + 2ab^2c^2 = N. \end{cases} \quad b = \sqrt[5]{\frac{NL^2}{p^3ML + 2pM^2}} \quad (7)$$

Для случая  $n = 6$

$$\begin{cases} a^6 + 5a^4bc + 6a^2b^2c^2 + b^3c^3 = K, \\ a^5b + 4a^3b^2c + 3ab^3c^2 = L, \\ a^5c + 4a^3bc^2 + 3ab^2c^3 = M, \\ a^4bc + 3a^2b^2c^2 + b^3c^3 = N. \end{cases} \quad b = \sqrt[6]{\frac{NL^3}{p^4ML^2 + 3p^2M^2L + M^3}} \quad (8)$$

Для случая  $n = 7$

$$\begin{cases} a^7 + 6a^5bc + 10a^3b^2c^2 + 4ab^3c^3 = K, \\ a^6b + 5a^4b^2c + 6a^2b^3c^2 + b^4c^3 = L, \\ a^6c + 5a^4bc^2 + 6a^2b^2c^3 + b^3c^4 = M, \\ a^5bc + 4a^3b^2c^2 + 3ab^3c^3 = N. \end{cases} \quad b = \sqrt[7]{\frac{NL^3}{p^5ML^2 + 4p^3M^2L + 3pM^3}} \quad (9)$$

Для случая  $n = 8$

$$\begin{cases} a^8 + 7a^6bc + 14a^4b^2c^2 + 10a^2b^3c^3 + b^4c^4 = K, \\ a^7b + 6a^5b^2c + 10a^3b^3c^2 + 4ab^4c^3 = L, \\ a^7c + 6a^5bc^2 + 10a^3b^2c^3 + 4ab^3c^4 = M, \\ a^6bc + 5a^4b^2c^2 + 6a^2b^3c^3 + b^4c^4 = N. \end{cases} \quad b = \sqrt[8]{\frac{NL^4}{p^6ML^3 + 5p^4M^2L^2 + 6p^2M^3L + M^4}} \quad (10)$$



Для случая  $n = 9$

$$\begin{cases} a^9 + 8a^7bc + 21a^5b^2c^2 + 20a^3b^3c^3 + 5ab^4c^4 = K, \\ a^8b + 7a^6b^2c + 15a^4b^3c^2 + 10a^2b^4c^3 + b^5c^4 = L, \\ a^8c + 7a^6bc^2 + 15a^4b^2c^3 + 10a^2b^3c^4 + b^4c^5 = M, \\ a^7bc + 6a^5b^2c^2 + 10a^3b^3c^3 + 4ab^4c^4 = N. \end{cases} \quad (11)$$

$$b = \sqrt[9]{\frac{NL^4}{p^7ML^3 + 6p^5M^2L^2 + 10p^3M^3L + 4pM^4}}.$$

Для случая  $n = 10$

$$\begin{cases} a^{10} + 9a^8bc + 28a^6b^2c^2 + 35a^4b^3c^3 + 15a^2b^4c^4 + b^5c^5 = K, \\ a^9b + 8a^7b^2c + 21a^5b^3c^2 + 20a^3b^4c^3 + 5ab^5c^4 = L, \\ a^9c + 8a^7bc^2 + 21a^5b^2c^3 + 20a^3b^3c^4 + 5ab^4c^5 = M, \\ a^8bc + 7a^6b^2c^2 + 15a^4b^3c^3 + 10a^2b^4c^4 + b^5c^5 = N. \end{cases} \quad (12)$$

$$b = \sqrt[10]{\frac{NL^5}{p^8ML^4 + 7p^6M^2L^3 + 15p^4M^3L^2 + 10p^2M^4L + M^5}}.$$

Если вычисленные значения всех переменных будут представлять собой целые числа, то можно сделать вывод, что матрица  $A$  имеет целый положительный корень.

Рассмотрим случай, когда оба диагональных элемента не равны нулю, а внедиагональные элементы не равны между собой, т. е. имеет место следующее нелинейное матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} \quad (13)$$

**Лемма 3.** Необходимым условием того, что матрица  $A$  будет иметь в качестве своего квадратного корня матрицу  $X$ , является выполнение для некоторого натурального  $a$  и некоторого натурального  $d$  равенства  $K - a^2 = N - d^2$ .

Доказательство. При  $n = 2$  имеем следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} a^2 + bc = K, \\ b(a + d) = L, \\ c(a + d) = M, \\ bc + d^2 = N. \end{cases} \quad (14)$$

Одним из слагаемых в левых частях первого и четвертого уравнений системы (14) является произведение  $bc$ . Перенеся в первом уравнении в правую часть слагаемое  $a^2$ , а в четвертом уравнении слагаемое  $d^2$  и приравняв правые части уравнений, заметим, что выполняется соотношение  $K - a^2 = N - d^2$ .

Поскольку  $a$  и  $d$  являются натуральными числами, то значения выражений  $K - a^2$  и  $N - d^2$  можно найти, перебирая возможные значения для  $a$  и  $d$ . Подставив найденные таким образом значения переменных  $a$  и  $d$  во второе и третье уравнения системы (14) и решив их, найдем соответственно значения переменных  $b$  и  $c$ . Если переменные  $b$  и  $c$  окажутся целыми положительными числами, то матрица

$$A = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} \text{ будет иметь матрицу-корень } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

**Лемма 4.** Если существует целый положительный корень рассматриваемого вида матричного уравнения  $X^3 = A$ , то для нахождения его элементов необходимо для каждого возможного значения переменной  $d$  решать уравнение третьего порядка для переменной  $c$  и воспользоваться формулами  $a = \frac{c}{p} + d$  и  $b = c \frac{L}{M}$ , где  $p = \frac{M}{K - N}$ . Если вычисленные значения всех переменных будут представлять собой целые числа, то матрица  $A$  имеет целый положительный корень.

Доказательство. При  $n = 3$  имеем следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} a^3 + 2abc + bcd = K, \\ a^2b + b^2c + abd + bd^2 = L, \\ a^2c + bc^2 + acd + cd^2 = M, \\ d^3 + 2bcd + abc = N. \end{cases} \quad (15)$$

Прежде всего необходимо оценить  $d$  и решить полученную систему уравнений (15) для каждого из возможных значений. Исходя из того, что  $d$  может быть только натуральным числом, для  $n = 3$  имеем, как и в предыдущем случае, следующую оценку:  $1 \leq d \leq \sqrt[3]{N-3}$ .

Чтобы решить систему уравнений (15), вычтем из первого уравнения четвертое, домножим второе уравнение на  $a/b$ , третье уравнение на  $d/c$  и вычтем из второго уравнения третье. В итоге получим следующую систему:

$$\begin{cases} a^3 - d^3 + abc - bcd = K - N, \\ a^3 - d^3 + abc - bcd = L \frac{a}{b} - M \frac{d}{c}. \end{cases} \quad (16)$$

Левые части уравнений системы (16) равны, значит равны и правые части, т. е.  $K - N = L \frac{a}{b} - M \frac{d}{c}$ .

Из последнего уравнения получаем выражение, связывающее переменные  $a$  и  $c$ :  $a = \frac{c}{p} + d$ , где  $p = \frac{M}{K - N}$ , при этом учтена связь между переменными  $b$  и  $c$ , которая имеет следующий вид:  $\frac{b}{c} = \frac{L}{M}$ .

Подставив выражение, связывающее переменные  $a$  и  $b$ , в четвертое уравнение системы (15), получим соответствующее уравнение:

$$\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma = 0, \quad (17)$$

где  $\alpha = \frac{L}{pM}$ ,  $\beta = \frac{3Ld}{M}$ ,  $\gamma = d^3 - N$ .

*Пример 3.* Пусть  $A = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}$ . Для  $d$  имеем следующую оценку:  $1 \leq d \leq 4$ . Если  $d = 1$ , то коэффициенты, входящие в уравнение (17) принимают следующие значения:  $\alpha = -0,67$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = -117$ . Уравнение с такими коэффициентами имеет один действительный нецелый и два комплексных корня. Если  $d = 2$ , то коэффициенты, входящие в уравнение (17), принимают следующие значения:  $\alpha = -0,67$ ,  $\beta = 4$ ,  $\gamma = -110$ . Уравнение с такими коэффициентами имеет один действительный нецелый и два комплексных корня. Если  $d = 3$ , то коэффициенты, входящие в уравнение (17), принимают следующие значения:  $\alpha = -0,67$ ,  $\beta = 6$ ,  $\gamma = -91$ . Уравнение с такими коэффициентами имеет один действительный нецелый и два комплексных корня. Если  $d = 4$ , то коэффициенты, входящие в уравнение (17), принимают следующие значения:  $\alpha = -0,67$ ,  $\beta = 8$ ,  $\gamma = -54$ . Уравнение с такими коэффициентами имеет три действительных корня, два из которых нецелые, а третий равен трем. Следовательно, искомая матрица имеет вид  $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Лемма 5.** Если существует целый положительный корень рассматриваемого вида матричного уравнения  $X^4 = A$ , то для нахождения его элементов необходимо для каждого возможного значения переменной  $d$  решать уравнение четвертого порядка для переменной  $c$  и воспользоваться формулами  $a = \frac{c}{p} + d$  и  $b = c \frac{L}{M}$ , где  $p = \frac{K-N}{L}$ . Если вычисленные значения всех переменных будут представлять собой целые числа, то матрица  $A$  имеет целый положительный корень.

Доказательство. При  $n = 4$  имеем следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} a^4 + 3a^2bc + 2abcd + bcd^2 + b^2c^2 = K, \\ a^3b + 2ab^2c + 2b^2cd + a^2bd + abd^2 + bd^3 = L, \\ a^3c + 2abc^2 + 2bc^2d + a^2cd + acd^2 + cd^3 = M, \\ d^4 + a^2bc + 2abcd + 3bcd^2 + b^2c^2 = N. \end{cases} \quad (18)$$

Для переменной  $d$  имеем следующую оценку:  $1 \leq d \leq \sqrt[4]{N-7}$ . Решая систему (18) аналогично системе (15), приходим к выводу, что в рассматриваемом случае также имеет место выражение, связывающее переменные  $a$  и  $c$ :

$$a = \frac{c}{p} + d,$$

где  $p = \frac{M}{K-N}$ .

Подставив выражение, связывающее переменные  $a$  и  $c$ , в четвертое уравнение системы (18), получим следующее уравнение:

$$\alpha c^4 + \beta c^3 + \gamma c^2 + \delta = 0, \quad (19)$$

где  $\alpha = \frac{p^2L^2 + LM}{p^2M^2}$ ,  $\beta = \frac{4dL}{pM}$ ,  $\gamma = \frac{6d^2L}{M}$ ,  $\delta = d^4 - N$ .

*Пример 4.* Пусть  $A = \begin{pmatrix} 2781 & 2700 \\ 3780 & 3861 \end{pmatrix}$ . Для  $d$  имеем следующую оценку:  $1 \leq d \leq 7$ . Если  $d = 1$ , то коэффициенты, входящие в уравнение (19), принимают следующие значения:  $\alpha = 0,569$ ,  $\beta = -0,816$ ,  $\gamma = 4,286$ ,  $\delta = -3860$ . Уравнение с такими коэффициентами имеет два действительных нецелых и два комплексных корня. Если  $d = 2$ , то коэффициенты, входящие в уравнение (19) принимают следующие значения:  $\alpha = 0,569$ ,  $\beta = -1,633$ ,  $\gamma = 17,143$ ,  $\delta = -3845$ . Уравнение с такими коэффициентами имеет два комплексных и два действительных нецелых корня. Если  $d = 3$ , то коэффициенты, входящие в уравнение (19), принимают следующие значения:  $\alpha = 0,569$ ,  $\beta = -2,449$ ,  $\gamma = 38,571$ ,  $\delta = -3780$ . Уравнение с такими коэффициентами имеет два комплексных и два действительных нецелых корня. Если  $d = 4$ , то коэффициенты, входящие в уравнение (19), принимают следующие значения:  $\alpha = 0,569$ ,  $\beta = -3,265$ ,  $\gamma = 68,571$ ,  $\delta = -3605$ . Уравнение с такими коэффициентами имеет один действительный нецелый корень, два комплексных корня и действительный корень, равный семи. Тогда  $d = 4$ ,  $c = 7$ ,  $b = 5$ ,  $a = 2$ . Если  $d = 5$ , то коэффициенты, входящие в уравнение (19), принимают следующие значения:  $\alpha = 0,569$ ,  $\beta = -4,082$ ,  $\gamma = 107,143$ ,  $\delta = -3236$ . Уравнение с такими коэффициентами имеет два комплексных и два действительных нецелых корня. Если  $d = 6$ , то коэффициенты, входящие в уравнение (19), принимают следующие значения:  $\alpha = 0,569$ ,  $\beta = -4,898$ ,  $\gamma = 154,286$ ,  $\delta = -2565$ . Уравнение с такими коэффициентами имеет два комплексных и два действительных нецелых корня. Если  $d = 7$ , то коэффициенты, входящие в уравнение (19), принимают следующие значения:  $\alpha = 0,569$ ,  $\beta = -5,714$ ,  $\gamma = 210$ ,  $\delta = -1460$ . Уравнение с такими коэффициентами имеет два комплексных и два действительных нецелых корня. Следовательно, искомая матрица принимает вид  $X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Теорема 2.** В общем случае для любого натурального  $n$  между переменными  $b$  и  $c$  матрицы  $X$  имеет место следующая зависимость:  $b = \frac{L}{M}c$ ; для любого натурального  $n$  между переменными  $c$ ,  $d$  и  $a$  матрицы  $X$  имеет место следующая зависимость:  $c = \frac{M(a-d)}{K-N}$ .

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы.

Для доказательства теоремы воспользуемся методом математической индукции.

Покажем, что зависимость имеет место при  $n = 3$ , для этого вынесем во втором и третьем уравнениях системы (15) за скобки  $b$  и  $c$  соответственно. Выражения, оставшиеся в скобках, будут равны между собой. Разделив второе уравнение системы (15) на третье и выразив из полученной пропорции  $b$ , получим требуемый результат.

Необходимо доказать, что если имеет место соотношение  $\frac{b}{c} = \frac{L}{M}$ , то выполняется соотношение

$$\frac{b}{c} = \frac{Q}{R}.$$

Пусть  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$ . Тогда  $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$ . Переписав последнее соотношение в виде системы четырех нелинейных уравнений, получим

$$\begin{cases} P = Ka + Lc, \\ Q = Kb + Ld, \\ R = Ma + Nc, \\ S = Mb + Nd. \end{cases} \quad (20)$$

Разделив второе уравнение системы (20) на третье, получим  $\frac{Q}{R} = \frac{Kb + Ld}{Ma + Nc}$ . Выразив из соотношения  $\frac{b}{c} = \frac{L}{M}$  переменную  $b$  и подставив в предыдущее выражение, имеем

$$\frac{Q}{R} = \frac{L(Kc + Md)}{M(Ma + Nc)}. \quad (21)$$

Поскольку порядок перемножения одинаковых матриц не влияет на конечный результат, то имеет место следующее равенство:  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$ . Переписав его в виде системы нелинейных уравнений, получим

$$\begin{cases} P = aK + bM, \\ Q = aL + bN, \\ R = cK + dM, \\ S = cL + dN. \end{cases} \quad (22)$$

Поскольку выражения, стоящие в левых частях третьих уравнений систем (20) и (22) совпадают, то совпадают и выражения, стоящие в правых частях этих уравнений:  $cK + dM = Ma + Nc$ . Следовательно, заменив выражение, стоящие в скобках в числителе (21), на  $Ma + Nc$ , приходим к выводу, что выполняется соотношение  $\frac{Q}{R} = \frac{L}{M}$ , а поскольку  $\frac{L}{M} = \frac{b}{c}$ , то  $\frac{Q}{R} = \frac{b}{c}$ .

Докажем второе утверждение теоремы.

Необходимо доказать, что если имеет место соотношение  $c = \frac{M(a-d)}{K-N}$ , то выполняется соотношение  $c = \frac{R(a-d)}{P-S}$ .

Заменив  $P$  и  $R$  соответствующими выражениями из системы (20),  $S$  соответствующим выражением из системы (22), получим  $\frac{(Ma+Nc)(a-d)}{Ka-Nd}$ .

Найдем выражение  $(a-d)$  из соотношения  $c = \frac{M(a-d)}{K-N}$ , подставим в  $\frac{(Ma+Nc)(a-d)}{Ka-Nd}$ . и в результате получим  $\frac{(Ma+Nc)c(K-N)}{M(Ka-Nd)}$ . Предположим, что доказываемое соотношение действительно имеет место, тогда выполняется следующее равенство:

$$\frac{(Ma+Nc)c(K-N)}{M(Ka-Nd)} = c. \quad (23)$$

Разделив обе части уравнения (23) на  $c$ , раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим уравнение  $c = \frac{M(a-d)}{K-N}$ , которое полагалось верным по условию. Следовательно, сделанное предложение также является верным.

Далее приведем уравнения относительно переменной  $c$ , получаемые в результате решения соответствующих систем, для случаев  $n = 5, \dots, 10$  и выражения, которые могут быть использованы для нахождения коэффициентов этих уравнений. Для каждого из этих уравнений имеет место выражение, связывающее переменные  $a$  и  $c$ ,  $b$  и  $c$ .

Для случая  $n = 5$

$$\alpha c^5 + \beta c^4 + \gamma c^3 + \delta c^2 + \varepsilon = 0, \quad (24)$$

где  $\alpha = \frac{L(M+2Lp^2)}{p^3M^2}$ ,  $\beta = \frac{5dL(M+Lp^2)}{p^2M^2}$ ,  $\gamma = \frac{10d^2L}{pM}$ ,  $\delta = \frac{10d^3L}{M}$ ,  $\varepsilon = d^5 - N$ .

Для случая  $n = 6$

$$\alpha c^6 + \beta c^5 + \gamma c^4 + \delta c^3 + \varepsilon c^2 + \varphi = 0, \quad (25)$$

где  $\alpha = \frac{L(M^2+3LMp^2+L^2p^4)}{p^4M^3}$ ,  $\beta = \frac{6dL(M+2Lp^2)}{p^3M^2}$ ,  $\gamma = \frac{15d^2L(M+Lp^2)}{p^2M^2}$ ,  $\delta = \frac{20d^3L}{pM}$ ,

$\varepsilon = \frac{15d^4L}{M}$ ,  $\varphi = d^6 - N$ .

Для случая  $n = 7$

$$\alpha c^7 + \beta c^6 + \gamma c^5 + \delta c^4 + \varepsilon c^3 + \varphi c^2 + \psi = 0, \quad (26)$$

где  $\alpha = \frac{L(M^2+4LMp^2+3L^2p^4)}{p^5M^3}$ ,  $\beta = \frac{7dL(L^2p^4+M^2+3LMp^2)}{p^4M^3}$ ,  $\gamma = \frac{21d^2L(M+2Lp^2)}{p^3M^2}$ ,

$\delta = \frac{35d^3L(Lp^2+M)}{p^2M^2}$ ,  $\varepsilon = \frac{35d^4L}{pM}$ ,  $\varphi = \frac{21d^5L}{M}$ ,  $\psi = d^7 - N$ .

Для случая  $n = 8$

$$\alpha c^8 + \beta c^7 + \gamma c^6 + \delta c^5 + \varepsilon c^4 + \varphi c^3 + \psi c^2 + \rho = 0, \quad (27)$$

где  $\alpha = \frac{L(L^3 p^6 + M^3 + 5LM^2 p^2 + 6L^2 Mp^4)}{p^6 M^4}$ ,  $\beta = \frac{8dL(3L^2 p^4 + M^2 + 4LMp^2)}{p^5 M^3}$ ,  $\delta = \frac{56d^3 L(2Lp^2 + M)}{p^3 M^2}$ ,  
 $\gamma = \frac{28d^2 L(L^2 p^4 + M^2 + 3LMp^2)}{p^4 M^3}$ ,  $\varepsilon = \frac{70d^4 L(Lp^2 + M)}{p^2 M^2}$ ,  $\varphi = \frac{56d^5 L}{pM}$ ,  $\psi = \frac{28d^6 L}{M}$ ,  $\rho = d^8 - N$ .

Для случая  $n = 9$

$$\alpha c^9 + \beta c^8 + \gamma c^7 + \delta c^6 + \varepsilon c^5 + \varphi c^4 + \psi c^3 + \rho c^2 + \tau = 0, \quad (28)$$

где  $\alpha = \frac{L(4L^3 p^6 + M^3 + 6LM^2 p^2 + 10L^2 Mp^4)}{p^7 M^4}$ ,  $\beta = \frac{9dL(L^3 p^6 + 5LM^2 p^2 + M^3 + 6L^2 Mp^4)}{p^6 M^4}$ ,  
 $\gamma = \frac{36d^2 L(3L^2 p^4 + M^2 + 4LMp^2)}{p^5 M^3}$ ,  $\delta = \frac{84d^3 L(L^2 p^4 + 3LMp^2 + M^2)}{p^4 M^3}$ ,  $\varepsilon = \frac{126d^4 L(2Lp^2 + M)}{p^3 M^2}$ ,  
 $\varphi = \frac{126d^5 L(Lp^2 + M)}{p^2 M^2}$ ,  $\psi = \frac{84d^6 L}{pM}$ ,  $\rho = \frac{36d^7 L}{M}$ ,  $\tau = d^9 - N$ .

Для случая  $n = 10$

$$\alpha c^{10} + \beta c^9 + \gamma c^8 + \delta c^7 + \varepsilon c^6 + \varphi c^5 + \psi c^4 + \rho c^3 + \tau c^2 + \mu = 0, \quad (29)$$

где  $\alpha = \frac{L(L^4 p^8 + 15L^2 M^2 p^4 + M^4 + 7LM^3 p^2 + 10L^3 Mp^6)}{p^8 M^5}$ ,  
 $\beta = \frac{10dL(4L^3 p^6 + 6LM^2 p^2 + M^3 + 10L^2 Mp^4)}{p^7 M^4}$ ,  $\gamma = \frac{45d^2 L(L^3 p^6 + 6L^2 Mp^4 + M^3 + 5LM^2 p^2)}{p^6 M^4}$ ,  $\rho = \frac{120d^7 L}{pM}$ ,  
 $\delta = \frac{120d^3 L(3L^2 p^4 + 4LMp^2 + M^2)}{p^5 M^3}$ ,  $\varepsilon = \frac{210d^4 L(L^2 p^4 + 3LMp^2 + M^2)}{p^4 M^3}$ ,  $\varphi = \frac{252d^5 L(2Lp^2 + M)}{p^3 M^2}$ ,  
 $\psi = \frac{210d^6 L(Lp^2 + M)}{p^2 M^2}$ ,  $\tau = \frac{45d^8 L}{M}$ ,  $\mu = d^{10} - N$ .

Таким образом, для решения задачи по нахождению матрицы-корня  $n$ -й степени, элементы которой представляют собой целые положительные числа, для матрицы также с целыми положительными элементами можно воспользоваться следующим алгоритмом.

1. Провести оценку возможных значений переменной  $d$ .
2. Для каждого из значений переменной  $d$  найти переменную  $c$ , составив и решив уравнение полиномиального вида степени  $n$ . Если хотя бы одно из решений уравнения будет представлять собой целое положительное число, то перейти к шагу 3.
3. Используя приведенные выше формулы связи, найти значения переменных  $a$  и  $b$ . Если значения этих переменных тоже будут представлять собой целые положительные числа, то исходная матрица  $A$  имеет целую положительную матрицу-корень, элементами которой являются переменные  $a, b, c, d$ .

**Заключение.** В результате проведенного исследования было показано, что для решения задачи по нахождению целых положительных решений матричного уравнения для матриц второго порядка в случае натуральных  $n$  можно использовать аналитические методы. Представлены формулы, позволяющие находить целые положительные корни матриц при  $n = 2, \dots, 10$ . Полученные результаты можно исполь-

зовать и для нахождения натуральных корней матриц второго порядка и при любом  $n$ . Приведенные примеры подтверждают правильность сформулированных выводов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Zarea, S. A. On positive defined solutions of the nonlinear matrix equation  $X - A^* X^n A = I$  / S. A. Zarea, S. M. El-Sayed // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 9, № 3. – P. 107–120.
2. Якуто, К. Л. О положительном решении матричного уравнения  $X^2 = A$  для матриц второго порядка / К. Л. Якуто // Молодость. Интеллект. Инициатива : материалы IV Междунар. науч-практ. конф. студентов и магистрантов, Витебск, 29 апр. 2016 г. / Вит. гос. ун-т; редкол.: И. М. Прищепа [и др.]. – Витебск, 2016. – С. 24–25.
3. Решение задач по математике онлайн [Электронный ресурс] // MathForYou.net. – 2011. – Режим доступа: <http://www.mathforyou.net>. – Дата доступа: 25.08.2016.

Поступила 04.09.2017

**ON THE WHOLE POSITIVE SOLUTION OF MATRIX EQUATION  $X^n = A$   
FOR MATRICES OF THE SECOND ORDER IN THE CASE OF NATURAL  $n$**

**K. YAKUTO**

*Possibilities of using analytical methods for finding positive integer solutions of nonlinear matrix equations are studied. Lemmas contain the conditions on the coefficients of the  $X$  matrix, expressed through the coefficients of the matrix  $A$ . These conditions are given in the form of a system of nonlinear equations of several unknowns. The simplest method of the solution of the matrix equation form  $X^n = A$  for matrices of different orders in the case of positive integer  $n$  is proposed. Presented results are possible to use to find positive integer roots of second-order matrices for any  $n$ .*

**Keywords:** *nonlinear matrix equation, analytical methods, the system of nonlinear algebraic equations, the method of mathematical induction, the natural roots of the equation.*

## СОДЕРЖАНИЕ

### ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

<i>Богущ Р.П., Захарова И.Ю., Наумович Н.М.</i> Моделирование сжатия радиолокационных данных дистанционного зондирования Земли модифицированным алгоритмом ЕСВАQ с представлением восстановленной информации в формате CEOS .....	2
<i>Иванов М.М., Железняк В.К., Чертков В.М.</i> Обзор методов обнаружения нелинейных элементов с помощью нелинейного радиолокатора .....	10

### ФИЗИКА

<i>Абраменко С.Н., Антонович Д.А., Груздев В.А.</i> Формирование наносекундных импульсов тока пучка в плазменных эмиссионных системах на основе разряда в скрещенных E×H полях .....	17
<i>Вершинин А.С., Авдейко В.П.</i> Стабилизация скорости вращения вала электропривода постоянного тока за счет исключения влияния эксцентриситета механического модулятора .....	22
<i>Бринкевич Д.И., Лукашевич М.Г., Просолович В.С., Харченко А.А., Вабищевич С.А., Вабищевич Н.В.</i> Микротвердость пленок полиимида и полиэтилентерефталата, облученных гамма-квантами <sup>60</sup> Co .....	30
<i>Шляхтенко А.В., Довгяло Д.А.</i> Совершенствование методов ультразвукового контроля .....	35
<i>Головчук В.И., Харченко А.А., Бринкевич Д.И., Лукашевич М.Г., Вабищевич С.А., Вабищевич Н.В.</i> Структурные и оптические характеристики силикатного стекла, имплантированного ионами меди .....	42
<i>Рюмцев А.А., Остриков О.М.</i> Методика расчета полей напряжений у полос сдвига типа изогнутых лучей у поверхности аморфного металла .....	50
<i>Янушкевич В.Ф.</i> Влияние параметров анизотропной среды над углеводородами на затухание радиоимпульсных сигналов .....	55

### МАТЕМАТИКА

<i>Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.</i> Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности .....	62
<i>Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф., Чернов С.В.</i> Тензор обобщенной энергии .....	78
<i>Сороговец И.Б., Медведева О.Н.</i> Моделирование температурных полей двухслойного полого цилиндра методом разделения переменных .....	101
<i>Якуто К.Л.</i> О целом положительном решении матричного уравнения $X^n = A$ для матриц второго порядка в случае натуральных $n$ .....	109