

MIESIĘCZNIK
POŁOCKI.

Т о м I.
Р о к 1818.

*«Вестник Полоцкого государственного университета»
продолжает традиции первого в Беларуси литературно-
научного журнала «Месячник Полоцкий».*



ВЕСНІК ПОЛАЦКАГА ДЗЯРЖАУНАГА УНІВЕРСІТЭТА
Серыя С. Фундаментальныя навукі

У серыі С навукова-тэарэтычнага часопіса друкуюцца артыкулы, якія прайшлі рэцэнзаваанне, змяшчаюць новыя навуковыя вынікі ў галіне інфарматыкі і матэматыкі, фізікі.

ВЕСТНИК ПОЛОЦКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия С. Фундаментальные науки

В серии С научно-теоретического журнала публикуются статьи, прошедшие рецензирование, содержащие новые научные результаты в области информатики и математики, физики.

HERALD OF POLOTSK STATE UNIVERSITY
Series C. Fundamental sciences

Series C includes reviewed articles which contain novelty in research and its results in computer science and mathematics, physics.

Адрес редакции:

Полоцкий государственный университет, ул. Блохина, 29, г. Новополоцк, 211440, Беларусь
тел. + 375 (214) 53 34 58, e-mail: vestnik@psu.by

Отв. за выпуск *В.А. Груздев, Д.О. Глухов, А.А. Козлов.*
Редактор *О.П. Михайлова.*

Подписано к печати 30.03.2017. Бумага офсетная 65 г/м². Формат 60×84¹/₈. Ризография.
Усл. печ. л. 11,62. Уч.-изд. л. 14,02. Тираж 100 экз. Заказ

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 621.396.96

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУНКТОВ ПРИЕМА И ИСТОЧНИКА РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ НА ТОЧНОСТЬ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ

*А.Х. АЛЬ-ОДХАРИ, канд. техн. наук, доц. Г.А. ФОКИН
(Санкт-Петербургский государственный университет
телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича);
И.В. ФЕДОРЕНКО*

*(Военная академия связи им. Маршала Советского Союза С.М. Будённого, Санкт-Петербург);
канд. техн. наук Д.С. РЯБЕНКО, С.В. ЛАВРОВ
(Полоцкий государственный университет)*

Выполнена оценка влияния геометрического распределения пунктов приема и источника радиоизлучения на точность позиционирования. Результаты исследования показывают, что геометрический фактор снижения точности (GDOP) оказывается наименьшим, когда источник радиоизлучения находится в центре между пунктами приема. Его величина составляет 0,99 для 4 пунктов приема и быстро возрастает, если источник радиоизлучения перемещается от центра. При увеличении количества пунктов приема геометрический фактор снижения точности уменьшается, что приводит к повышению точности позиционирования.

***Ключевые слова:** разностно-дальномерный метод, геометрический фактор снижения точности, алгоритм Ньютона – Гаусса, определение местоположения, источник радиоизлучения.*

Введение. Геометрическое расположение пунктов приема (ПП) и источника радиоизлучения (ИРИ) оказывает влияние на точность позиционирования. Наиболее общий параметр, используемый для оценки влияния геометрии взаимного расположения на точность позиционирования ИРИ, – геометрический фактор снижения точности (Geometric Dilution of Precision – GDOP), который является мерой того, насколько ошибка в определении местоположения зависит от взаимного расположения пунктов приема и ИРИ.

Для определения координат источника радиоизлучения широко применяется разностно-дальномерный метод (РДМ) [1–9]. Погрешность определения координат источника радиоизлучения РДМ зависит от точности определения временных задержек прихода сигнала на пункт приема (ПП). В работе [1] выполнена оценка точности позиционирования подвижного ИРИ традиционным РДМ. При построении рабочей зоны позиционирования вводят понятие геометрического фактора системы, связывающего точность местоопределения ИРИ с взаимным расположением ПП и источника радиоизлучения [6]. Недостатком существующих методов определения координат ИРИ (в том числе РДМ) является значительное влияние геометрического фактора на точность их определения. В настоящей работе выполнено исследование влияния геометрического распределения ПП и ИРИ на точность позиционирования для четырех пунктов приема.

1. Модель измерений разностно-дальномерного метода

Одним из эффективных методов определения координат ИРИ является разностно-дальномерный метод (Time Difference of Arrival – TDOA) [4]. Данный метод основан на измерении времени распространения сигнала от ИРИ до приемника так, чтобы на его основе можно было рассчитать расстояние между ИРИ и приемником. Для определения пространственных координат ИРИ необходимо измерение как минимум трех значений разностей дальностей от ИРИ до трех пар опорных точек [9]. При этом измерения должны быть независимыми [10]. Поэтому для обеспечения измерений в пространстве минимально необходимо иметь четыре опорных ПП, что позволяет организовать три независимые пространственные базы.

Пусть местоположению ИРИ соответствует вектор координат $x = [x, y]^T$. Тогда расстояние от ИРИ до j -го пункта приема с координатами $x_j = [x_j, y_j]^T$ определяется следующим образом:

$$d_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (1)$$

Линии постоянной разности рассчитывают относительно одного ПП, называемого опорным, например, первого пункта приема, тогда можно записать следующие выражения для разностей прихода сигналов:

$$d_{j,1} = d_j - d_1, \quad j = 2, \dots, M. \quad (2)$$

На практике первичные измерения разницы дальностей подвержены аддитивному белому гауссовскому шуму (АБГШ) n_j . С учетом ошибки измерения линий постоянной разности r_j определяются следующим выражением:

$$r_j = d_{j,1} + n_j. \quad (3)$$

Для получения оценки вектора \tilde{x} необходимо решить систему из $(N - 1)$ нелинейных уравнений (3) относительно неизвестных координат источника, которую можно записать в векторном виде следующим образом [2]:

$$r = d_1(x) + n, \quad (4)$$

где

$$r = [r_2, r_3, \dots, r_M]^T, \quad (5)$$

$$n = [n_2, n_3, \dots, n_M]^T, \quad (6)$$

$$d_1(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} - \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \\ \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2} - \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \\ \vdots \\ \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} - \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Для нахождения координат источника радиоизлучения требуется решить систему нелинейных уравнений (4).

2. Алгоритм решения уравнения разностно-дальномерного метода

Для решения уравнений (4) могут применяться прямые и итерационные алгоритмы решения нелинейных задач [1, 10, 11]. Для оценивания ошибок определения местоположения ИРИ в пространстве РДМ ограничимся итеративным способом вычисления координат, предположив, что в результате прямого решения системы (4) известно некоторое начальное (нулевое) приближение вектора координат ИРИ $x_e^{(0)} = [x^{(0)}, y^{(0)}]^T$. На первой итерации вычисляется первое приближение вектора координат $x_e^{(1)} = [x^{(1)}, y^{(1)}]^T$, на второй – второе и т.д. Существует множество итеративных методов решения систем из N нелинейных уравнений, содержащих N переменных, описанных в [2]. Воспользуемся методом Ньютона – Гаусса как одним из наиболее эффективных и быстро сходящихся [3].

Разложим функцию r в ряд Тейлора в точке с координатами $x_e^{(0)}$ и ограничимся линейным членом разложения [10, 12]:

$$r = d(x^{(0)}) + \left[\frac{\partial d^T}{\partial x}(x^{(0)}) \right]^T (\tilde{x} - x^{(0)}) = d(x^{(0)}) + H \cdot (\tilde{x} - x^{(0)}), \quad (8)$$

где H – матрица Якоби,

$$H = \left[\frac{\partial d^T}{\partial x}(x^{(0)}) \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{x-x_2}{d_2} - \frac{x-x_1}{d_1} & \frac{y-y_2}{d_2} - \frac{y-y_1}{d_1} \\ \frac{x-x_3}{d_3} - \frac{x-x_1}{d_1} & \frac{y-y_3}{d_3} - \frac{y-y_1}{d_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{x-x_k}{d_M} - \frac{x-x_1}{d_1} & \frac{y-y_k}{d_M} - \frac{y-y_1}{d_1} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Линейное выражение (8) может быть преобразовано к виду

$$\tilde{x} = x^{(0)} - H^{-1}(r - d(x^{(0)})). \quad (10)$$

Выражение (10) представляет собой векторную форму системы линейных уравнений.

Метод Ньютона – Гаусса работает по принципу минимизации целевой функции

$$\varepsilon(x) = (r - d_1(x))^T (r - d_1(x)) \quad (11)$$

и позволяет получить оценку координат ИРИ методом наименьших квадратов

$$\tilde{x} = \arg \min_x \varepsilon(x). \quad (12)$$

Выражение для оценки вектора координат имеет следующий вид:

$$\tilde{x} = x^{(0)} + (H^T H)^{-1} H^T (r - d(x^{(0)})). \quad (13)$$

Уравнения (13) позволяют оценить вектор координат ИРИ при наличии начального приближения и $(N-1)$ измерений разностей дальностей от N пунктов приема до ИРИ.

3. Геометрический фактор снижения точности в разностно-дальномерном методе

Используя выражение (13), рассмотрим основные соотношения, характеризующие влияние геометрического распределения ПП РДМ относительно ИРИ на точность определения местоположения. Для этого уравнение, связывающее погрешности определения разностей дальностей и координат ИРИ с учетом (13), запишем в виде

$$\tilde{x} - x = (H^T H)^{-1} H^T (r - d(x)). \quad (14)$$

В выражении (14) $\tilde{x} - x = \delta_x = [\delta_x \quad \delta_y]^T$ – вектор ошибок определения координат ИРИ; $r - d(x) = \delta_R = [\delta_{2,1}, \delta_{3,1}, \dots, \delta_{N,1}]^T$ – вектор ошибок измерения разностей дальностей от ПП до ИРИ относительно первого ПП.

Представим выражение (14) в виде

$$\delta_x = (H^T H)^{-1} H^T \delta_R. \quad (15)$$

Считаем, что математические ожидания ошибок определения координат ИРИ и измерения разностей дальностей (δ_x и δ_R) равны нулю, т.е. $E_x = E_R = 0$ [5]. Тогда ковариационные матрицы ошибок определения вектора координат ИРИ и ошибок вычисления разностей расстояний имеют следующий вид:

$$\text{Cov}(\delta_x) = E[(\delta_x - E_x)(\delta_x - E_x)^T] = E[\delta_x \delta_x^T], \quad (16)$$

$$\text{Cov}(\delta_R) = E[(\delta_R - E_R)(\delta_R - E_R)^T] = E[\delta_R \delta_R^T]. \quad (17)$$

С учетом (15) ковариационную матрицу $\text{Cov}(\delta_x)$ (16) представим как

$$\text{Cov}(\delta_x) = (H^T H)^{-1} H^T \text{Cov}(\delta_R) \left((H^T H)^{-1} H^T \right)^T = \text{Cov}(\delta_R) (H^T H)^{-1}. \quad (18)$$

Диагональными членами матриц $\text{Cov}(\delta_x)$ и $\text{Cov}(\delta_R)$ являются дисперсии ошибок пространственных координат (σ_x^2, σ_y^2) и дисперсии определения разностей расстояний ($\sigma_{R2,1}^2, \sigma_{R3,1}^2, \dots, \sigma_{RN,1}^2$) соответственно.

Выражение (18) свидетельствует о том, что соотношение между погрешностями измерения разностей расстояний и определения координат ИРИ зависит только от вида матрицы H , т.е. от геометрии взаимного расположения ПП и ИРИ.

Предполагая, что ошибки в измерениях являются случайными, независимыми, имеют нулевое среднее и дисперсии σ_R^2 , ковариационная матрица ошибок измерения разностей расстояний принимает следующий вид:

$$\text{Cov}(\delta_R) = \sigma_R^2 I_{n \times n}, \quad (19)$$

а ковариационная матрица ошибок определения вектора координат ИРИ

$$\text{Cov}(\delta_x) = \sigma_R^2 I_{n \times n} (H^T H)^{-1} = \sigma_R^2 (H^T H)^{-1}, \quad (20)$$

где $I_{n \times n}$ – единичная матрица из $n \times n$ элементов.

Таким образом, дисперсии погрешностей определения координат являются функциями диагональных элементов матрицы $(H^T H)^{-1}$. Приняв $\sigma_R^2 = 1$, определим среднеквадратическое отклонение ошибки определения местоположения ИРИ в пространстве следующим образом:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{\text{tr Cov}(\delta_x)}, \quad (21)$$

где $\text{tr}(\bullet)$ – след матрицы.

В общем случае коэффициент геометрии определения местоположения ИРИ РДМ имеет вид [13, 14]

$$\text{GDOP} = \frac{\sqrt{\text{tr Cov}(\delta_x)}}{\sigma_R} = \sqrt{\text{tr} (H^T H)^{-1}}. \quad (22)$$

Таким образом, коэффициент геометрии представляет собой число, устанавливающее во сколько раз ошибка определения местоположения больше ошибки определения разностей дальностей в зависимости от геометрического расположения ПП, описываемого матрицей H .

4. Результаты моделирования

На основе формулы (22) были проведены расчеты распределения коэффициента GDOP для четырех пунктов приема. Результаты представлены на рисунке 1.

На рисунке 1 представлено распределение геометрического фактора снижения точности позиционирования для 4 ПП. Это распределение подтверждает, что коэффициент GDOP является наименьшим, когда ИРИ находится в центре между ПП, где составляет 0,99, и быстро возрастает, если ИРИ перемещается из центра. В [6] показано, что минимальный коэффициент геометрии для РДМ равен $2/\sqrt{M}$ (M – количество ПП) в двухмерном пространстве.

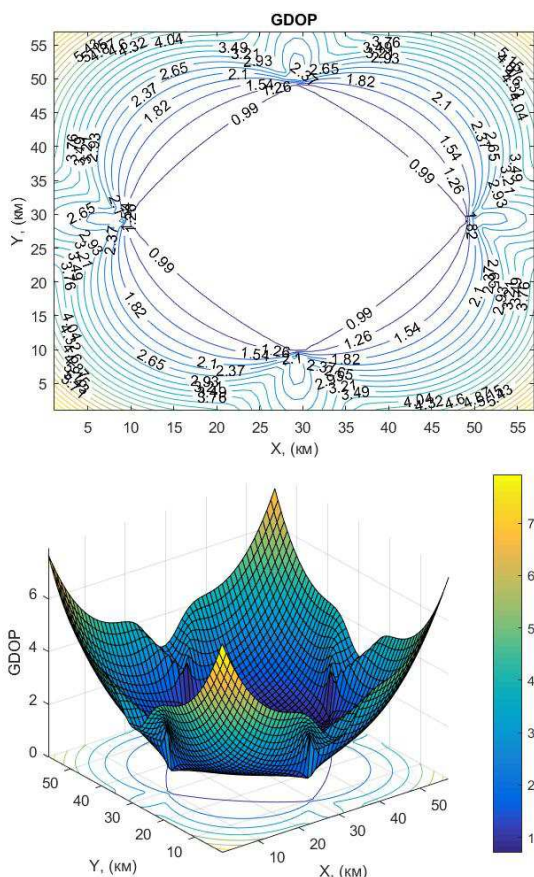


Рисунок 1. – Распределение коэффициента GDOP для 4 пунктов приема

Проанализировав распределение коэффициента GDOP (рисунок 1), можно сделать вывод о том, что имеется явная зависимость между расположением пунктов приема и ИРИ распределением геометрического фактора.

Дальнейшее исследование авторы связывают с оценкой введенного параметра для условий нахождения источника вне района расположения пунктов приема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дворников, С.В. Теоретические основы координатометрии источников радиоизлучения : учеб. пособие / С.В. Дворников, В.Н. Саяпин, А.Н. Симонов. – СПб. : ВАС, 2007.
2. LTE positioning accuracy performance evaluation / M. Sivers, G. Fokin // Lecture Notes in Computer Science. – 2015. – Т. 9247. – P. 393–406.
3. Handbook of position location: Theory, Practice, and Advances / S.A. Zakavat, R.M. Buehrer // Wiley-IEEE. – 2011. – P. 1281. – ISBN 978-0-470-94342-7.
4. Основы построения и функционирования разностно-дальномерных систем координатометрии источников радиоизлучений : учеб. пособие / Р.В. Волков [и др.]; под ред. Р.В. Волкова. – СПб. : ВАС, 2013.
5. Сиверс, М.А. Позиционирование абонентских станций в сетях мобильной связи LTE разностно-дальномерным методом / М.А. Сиверс, Г.А. Фокин, О.Г. Духовницкий // Системы управления и информационные технологии. – 2015. – Т. 59, № 1. – С. 55–61.
6. Фокин, Г.А. Оценка точности позиционирования абонентских станций в сетях LTE разностно-дальномерным методом / Г.А. Фокин // Актуальные проблемы инфотелекоммуникаций в науке и образовании : IV Междунар. науч.-техн. и науч.-метод. конф., СПб., 3-4 марта 2015 : сб. науч. ст. : в 2 т. / Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций. – СПб., 2015. – Т. 1 – С. 170–173.
7. Аль-Одхари, А.Х. Локализация объектов в условиях неоднородного рельефа с использованием беспилотных летательных аппаратов / А.Х. Аль-Одхари, Г.А. Фокин // Наука и инновации в технических университетах : материалы Десятого Всерос. форума студентов, аспирантов и молодых уче-

- ных, СПб., 26-28 окт. 2016 / Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого. – СПб., 2016. – С. 7–9.
8. Киреев, А.В. Positioning objects in LTE networks by measuring the signal propagation time / А.В. Киреев, Г.А. Фокин // Труды учебных заведений связи. – 2016. – Т. 2, № 1. – С. 68–72.
 9. Сиверс, М.А. Оценка возможностей метода разностно-дальномерного метода позиционирования абонентских станций в системах мобильной связи LTE средствами имитационного моделирования / М.А. Сиверс, Г.А. Фокин, О.Г. Духовницкий // Информационные технологии моделирования и управления. – 2016. – Т. 98, № 2. – С. 149–160.
 10. Ортега, Д. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Д. Ортега, В. Рейнболдт. – М. : Мир, 1975. – 558 с.
 11. Метод пространственно-временной фильтрации радиосигналов на основе антенных решеток произвольной пространственной конфигурации / В.Н. Саяпин [и др.] // Информация и космос. – 2006. – № 3. – С. 83–89.
 12. Глобальные системы позиционирования / Б.Б. Серапинас. – М. : ИКФ «Каталог», 2002. – 106 с.
 13. Семенюк С.С. Геометрический фактор разностно-дальномерной сети датчиков в пространстве / С.С. Семенюк, В.В. Уткин, Л.Н. Бердинских // Научные технологии. – 2012. – Т. 13. – № 8. – С. 66–73.
 14. Lee, H.B. Accuracy Limitations of Hyperbolic Multi-lateration Systems / H. B. Lee // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System. – 1975. – Vol. AES-11, № 1. – P. 16–29.

Поступила 02.03.2017

**RESEARCH OF INFLUENCE OF GEOMETRICAL DISTRIBUTION
OF POINTS OF RECEPTION AND RADIO EMISSION SOURCE
ON ACCURACY OF POSITIONING**

**A.H. AL-ODHARI, G. FOKIN, I. FEDORENKO,
D. RYABENKO, S. LAVROV**

The estimation of influence of geometric distribution of receiving point and a radio source on positional accuracy is executed in the present work. Results of research show, that GDOP is the least when the radio source is located in the center between receiving point and has value of 0,99 for 4 receiving points and quickly increases, if radio source moves away from the center. GDOP decreases when a quantity of receiving point at increases that leads to increase of positional accuracy.

Keywords: *time-difference method, geometric dilution of precision, Newton-Gauss algorithm, position location, radio source.*

УДК 534.6: 621.391

АНАЛИЗ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЗАЩИЩЕННОСТИ РЕЧЕВОЙ ИНФОРМАЦИИ В ТЕХНИЧЕСКИХ КАНАЛАХ УТЕЧКИ**д-р техн. наук, проф. В.К. ЖЕЛЕЗНЯК, И.Б. БУРАЧЁНОК**
(Полоцкий государственный университет)

Осуществлен анализ и синтез измерительных сигналов, используемых для оценки защищенности речевой информации в технических каналах утечки в условиях шумов высокого уровня при значительных неравномерностях их амплитудно-частотных характеристик. Выявлены и исследованы наиболее значимые свойства гармонических и сложных измерительных сигналов в полосах равной разборчивости. Исследованы искажения формы автокорреляционных функций, принятых в условиях шумов сложных измерительных сигналов. Предложено использовать сложные измерительные сигналы с регулируемым уровнем эффективной длительности. Наибольшая точность оценки защищенности получена при использовании сложных измерительных сигналов, формируемых при заданном значении уровня эффективной длительности $a = 0,8$ с фиксированной длительностью $T_c = 4$ с в каждой полосе равной разборчивости.

Ключевые слова: измерительные сигналы, технические каналы утечки информации, обработка измерительных сигналов.

Введение. Наиболее распространенным способом обмена информацией между людьми является человеческая речь. Во все времена люди самую важную информацию передавали устно и всегда существовали те, кто пытался ее перехватить (подслушать). Сегодня, учитывая особенности расположения большинства офисов коммерческих предприятий и фирм, размещаемых в помещениях жилых домов с недостаточной акустической защищенностью, задача защиты конфиденциальных переговоров является достаточно дорогим и сложным мероприятием, а совершенствование средств извлечения речевой информации (РИ) и новые методы ее обработки в шумах высокого уровня определяют необходимость улучшения важнейших параметров ее защиты. Защита РИ в подобных помещениях зависит как от ее акустической защищенности по воздушной и структурной (вибрационной) акустической волне, так и от защищенности расположенных в помещении устройств и их элементов от утечки за счет акустопреобразовательного эффекта, побочных электромагнитных излучений и наводок. Отсутствие в соответствующих службах аппаратуры контроля, удовлетворяющей современным требованиям, обуславливает появление технических каналов утечки информации (КУИ) при кажущемся достаточным уровне защиты. Поэтому необходимость усовершенствования средств противодействия перехвату (аппаратуры контроля и защищенности РИ по техническим КУИ), обеспечивающих повышение точности, помехоустойчивости и чувствительности при оценке защищенности РИ в технических КУИ в условиях шумов высокого уровня при значительных неравномерностях амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) и приемлемом времени обработки, определяют актуальность представленных исследований.

Целью работы является анализ и синтез измерительных сигналов (ИС), используемых для оценки защищенности РИ в КУИ в условиях шумов высокого уровня при значительных неравномерностях АЧХ для выявления наиболее значимых их свойств, позволяющих получить численные значения параметров оценки защищенности с высокой точностью и разрешающей способностью по частоте и времени при повышении оперативности представления результатов.

Защищенность РИ в КУИ объективно оценивают выделением слабых ИС из шумов высокого уровня с учетом неравномерности АЧХ. Оценку осуществляют на основании измерений отношения мощности акустического сигнала к мощности маскирующего (фоновому) шума (отношение сигнал/шум) в точке приема на выходе КУИ за пределами помещения, предназначенного для конфиденциальных переговоров, и затем определяют коэффициент разборчивости речи [1]. Нормативные значения данного параметра приведены в соответствующих документах. Защита РИ в КУИ считается достаточной, если в местах возможной установки акустических и вибрационных первичных измерительных преобразователей величина показателя измеренного отношения сигнал/шум не превышает его нормативного значения. Основными параметрами и характеристиками при расчете разборчивости речи являются уровни спектральной плотности речевого сигнала и спектральной плотности фонового шума в речевом диапазоне частот, дБ. Для того чтобы учесть основные факторы, влияющие на величину разборчивости речи, отношение сигнал/шум определяется на нескольких несовпадающих частотах (средних частотах третьоктавных полос или в полосах равной разборчивости (ПРР) спектра речевого сигнала (РС). При контроле качества защищенности РИ в КУИ используют ИС: либо белый шум [2], либо гармонический сигнал по ГОСТ 16465–70 [3] в полосе РС. В работе [4] оценку защищенности РИ в КУИ предложено проводить с применением сложных ИС (иногда их называют широкополосными либо шумоподобными [5]) с обоснованными исходными данными в ПРР спектра РС [2] при использовании функций корреляции [5].

Математические модели измерительных сигналов, используемых для оценки защищенности речевой информации в каналах утечки информации.

Чтобы сигналы являлись объектами теоретического изучения и анализа, необходимо иметь их математические модели, отражающие с достаточной полнотой их основные свойства. Поэтому для анализа свойств сравниваемых ИС далее построим их математические модели.

Шумовой измерительный сигнал. Шумовой сигнал, использующийся для оценки защищенности РИ в КУИ, – это случайный процесс, характеризуемый нормальным законом распределения плотности вероятности [6]:

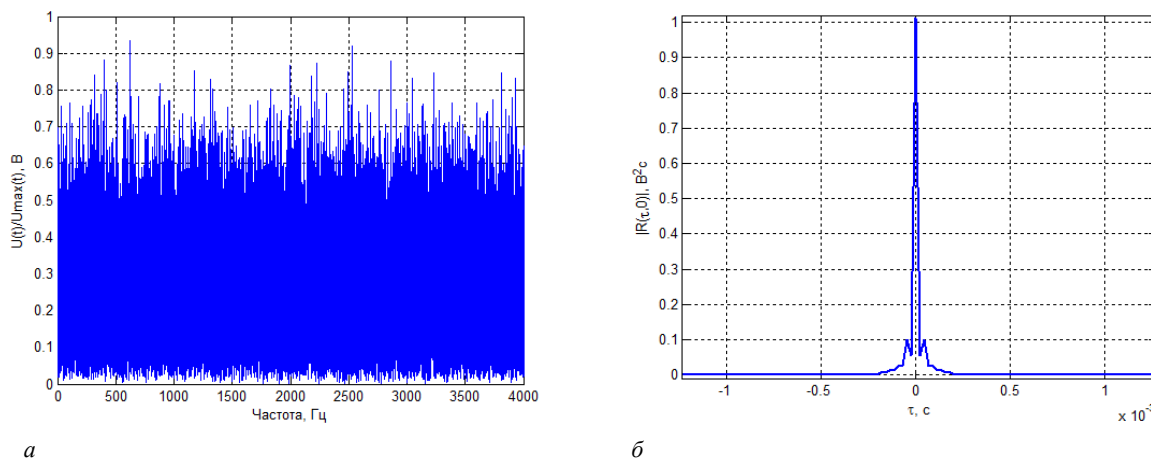
$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}, \tag{1}$$

где σ – среднеквадратическое отклонение (σ^2 – дисперсия) шумового сигнала;

x – вектор выборочных значений;

\bar{x} – математическое ожидание (среднее арифметическое) распределения.

Основными параметрами такого сигнала являются математическое ожидание, дисперсия и автокорреляционная функция (АКФ). Пример шумового ИС показан на рисунке 1. На рисунке 1, *a* отображено его спектральное представление, а на рисунке 1, *б* – АКФ. Особенностью шумового ИС является его АКФ, которая имеет высокий пик (представимый как дельта-функция Дирака [6]) в нуле и равна нулю во всех других точках.



a – спектральное представление; *б* – автокорреляционная функция

Рисунок 1. – Характеристики шумового измерительного сигнала

При измерении уровней шумовых акустических сигналов используют шумомер, который вносит значительные методические погрешности в результаты измерения, так как пропускает помехи, вызванные реверберацией помещения и искусственные, используемые для маскирования речевой информации, в результате чего происходит ухудшение помехоустойчивости обработки, что значительно снижает точность оценки защищенности РИ, поэтому шумовой ИС далее мы не рассматриваем.

Гармонический измерительный сигнал. Уравнение синусоидального сигнала, ограниченного по времени, запишем:

$$\left. \begin{aligned} s(t) &= A_0 \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \text{ для всех } 0 < t < T_c \\ s(t) &= 0 \text{ для всех } t < 0 \text{ и } t > T_c \end{aligned} \right\}, \tag{2}$$

где A_0 – амплитуда;

t – временные отсчеты;

ω – круговая частота, $\omega = 2\pi / T_c = 2\pi f_0$;

T_c – длительность;

φ_0 – начальная фаза;

f_0 – несущая частота.

Гармоническому ИС, в отличие от шумового, не присущи выше перечисленные факторы, снижающие точность оценки защищенности РИ в КУИ, однако обработка гармонического сигнала на сред-

них частотах ПРР допускает увеличение погрешности в КУИ с явно выраженными неравномерностями АЧХ, например, в условиях искусственного зашумления, использующегося при маскировании (защите) полезного речевого сигнала. На точность оценки существенное влияние оказывает также и длительность ИС. Спектральная плотность гармонического сигнала представляет собой одну спектральную линию и не позволяет учесть различные искажения ИС, возникающие при его прохождении через преграду. Что касается АКФ, то следует заметить некоторые ее особенности. Автокорреляционная функция периодического процесса сама является периодической функцией, однако она не содержит сведений о фазовых углах гармоник и воспроизводится в измененном масштабе времени. Она является четной, ее максимум приходится на начало отсчета времени и имеет положительное значение. Значение АКФ убывает с ростом временной задержки. Автокорреляционная функция и спектр мощности связаны преобразованием Фурье. Синусоидальная функция времени имеет АКФ, представленную косинусоидой той же частоты.

Дальнейший анализ проведем в сравнении гармонического и сложных ИС, предлагаемых для оценки защищенности РИ в КУИ в ПРР.

Сложный измерительный сигнал. Для оценки сложный ИС описывается математической моделью [4]:

$$s_{\text{сис}}(t) = \begin{cases} 0, & t < -\frac{T_c}{2}, \\ A_m \sin \left[(\omega_0 t + \frac{\mu}{2} t^2) + \varphi_0 \right], & -\frac{T_c}{2} < t < \frac{T_c}{2}, \\ 0, & t > \frac{T_c}{2}. \end{cases} \quad (3)$$

где A_m – амплитуда;

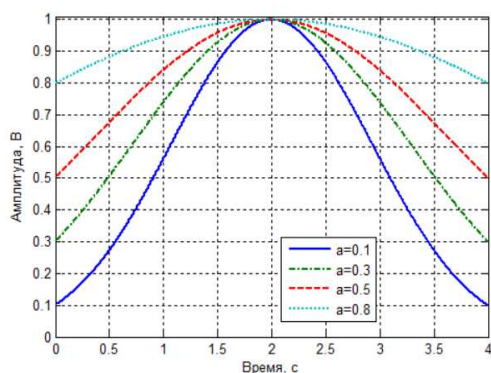
μ – скорость изменения мгновенной частоты во времени;

ω_0 – центральное значение частоты;

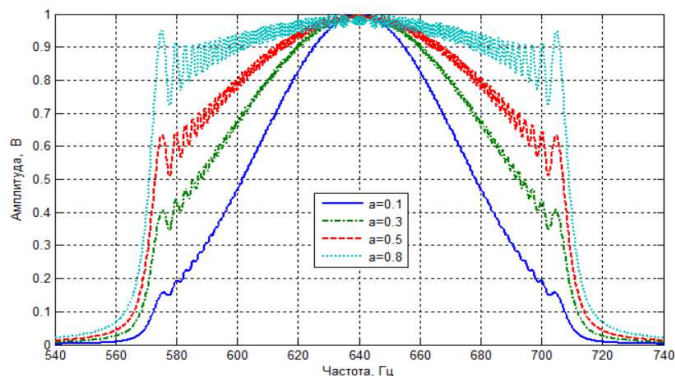
φ_0 – начальная фаза (в нашем случае $\varphi_0 = 0$).

Для формирования модели сложного ИС с регулируемыми уровнями эффективной длительности используем функцию вида $f(t) = e^{-(\beta t)^2}$, представляющую собой гауссов импульс, совпадающий по форме с графиком нормального распределения вероятностей, где $\beta = \frac{1}{T_c} \cdot 2 \cdot \sqrt{-\ln(a)}$ – коэффициент наклона,

а $t \in \left[-\frac{T_c}{2}; \frac{T_c}{2} \right]$, a – коэффициент задаваемого уровня эффективной длительности. На рисунке 2 приведены характеристики сложных ИС длительностью $T_c = 4$ с, используемых для оценки защищенности РИ в КУИ: огибающие с различными значениями уровня эффективной длительности a (рисунок 2, а) и модули спектральных плотностей (рисунок 2, б) на примере сложных ИС в третьей N_3 ПРР.



а



б

а – форма огибающих; б – спектральное представление в третьей N_3 полосе равной разборчивости

Рисунок 2. – Характеристики сложных измерительных сигналов длительностью $T_c = 4$ с с различными значениями уровня эффективной длительности a

Особенностью такого сигнала является то, что его форма совпадает с формой спектральной характеристики.

Используемые для оценки РИ в КУИ сложные ИС в ПРР относят к сигналам с большой относительной полосой η , определяемой по следующей формуле [6]:

$$\eta = \frac{(f_B - f_H)}{(f_B + f_H)}, \quad (4)$$

где f_B, f_H – верхняя и нижняя границы частот полос равной разборчивости.

Обозначим ПРР N_k , где k – порядковый номер полосы, $k = 1, \dots, 20$. Величина η для каждой ПРР представлена в таблице 1.

Таблица 1. – Значения величины η относительных полос сложных ИС в двадцати ПРР

N_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
η	0,62	0,15	0,11	0,1	0,09	0,08	0,07	0,05	0,05	0,05

Окончание таблицы 1

N_k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
η	0,04	0,04	0,05	0,06	0,06	0,05	0,05	0,11	0,18	0,16

Из таблицы следует, что относительные полосы всех исследуемых сложных ИС в ПРР изменяются в пределах $\eta \approx 0,16, \dots, 0,62$. Самое высокое значение относительной полосы $\eta = 0,62$ имеет сложный ИС в первой N_1 ПРР. Согласно [6], $\eta = 1$ является максимальной величиной, допускаемой определением.

Важное свойство рассматриваемых сигналов – ширина главного лепестка огибающей АКФ [4], которая обратно пропорциональна девиации частоты сигнала [5] (т.е. огибающая первый раз обратиться в нуль при сдвиге сигнала относительно его копии на интервал времени $\tau = \frac{2\pi}{\mu T_c} = \frac{1}{2\Delta f}$).

В таблице 2 представлены значения τ ширины главного лепестка АКФ и процентное соотношение ξ к длительности сигнала $T_c = 2$ с для сложных ИС в двадцати ПРР спектра РС.

Таблица 2. – Значения ширины главного лепестка АКФ сложных ИС в двадцати ПРР

N_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
τ , мс	3,13	6,67	7,14	6,45	6,06	5,26	5,26	5,26	5,56	5,56
ξ , %	0,16	0,33	0,36	0,32	0,30	0,26	0,26	0,26	0,28	0,28

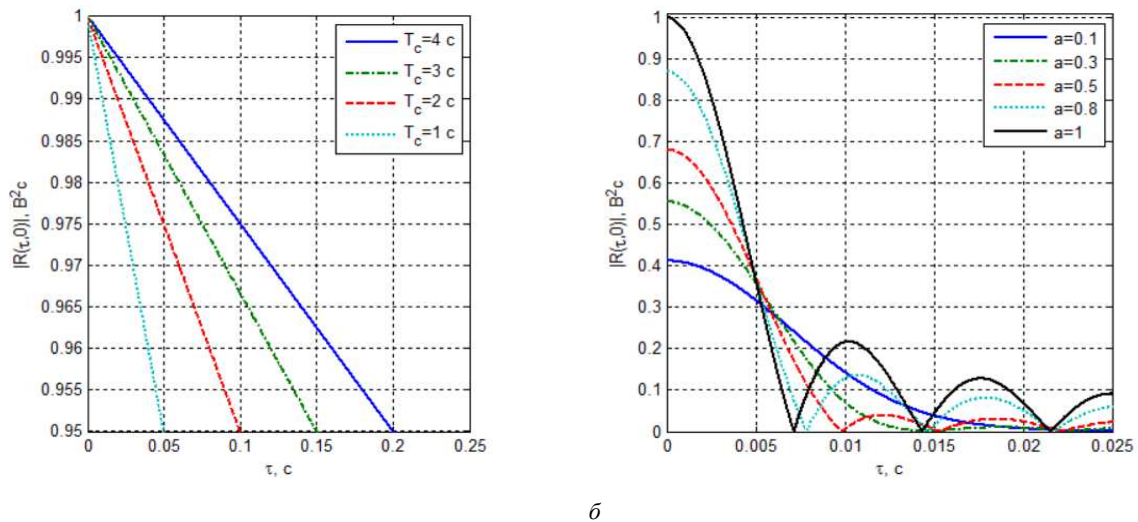
Окончание таблицы 2

N_k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
τ , мс	5,56	5,56	4,35	2,86	2,50	2,78	2,56	1,04	0,45	0,36
ξ , %	0,28	0,28	0,22	0,14	0,13	0,14	0,13	0,05	0,02	0,02

Все исследуемые сигналы имеют значительную девиацию частоты Δf , и поэтому главный лепесток функции АКФ получается весьма узким. Самый узкий главный лепесток АКФ имеет сложный ИС в двадцатой N_{20} ПРР спектра РС (частотный диапазон $f = [7250 \div 10000]$ Гц, $\Delta f_k = 1375$ Гц), самый широкий – в третьей N_3 (частотный диапазон $f = [570 \div 710]$ Гц, $\Delta f_k = 70$ Гц).

На рисунке 3 показаны формы огибающих АКФ исследуемых гармонических и сложных ИС. Исследования корреляционных свойств гармонических ИС, расположенных на средних частотах ПРР спектра РС, показывают, что форма огибающей их АКФ зависит от длительности сформированного ИС и не зависит от его частоты (рисунок 3, а). Особенность АКФ гармонического сигнала состоит в том, что ее огибающая представляет собой треугольник. Чем больше длительность ИС, тем меньше наклон огибающей его АКФ, что снижает точность определения ее максимального значения. Согласно исследованиям при наложении ограничения на время воздействия гармонического ИС его параметры ухудшаются, что в свою очередь снижает возможность реализации критерия достоверности воспроизведения с высокой точностью.

На рисунке 3, б показаны АКФ сложных ИС с гауссовой огибающей в третьей N_3 ПРР спектра РС с различными значениями уровня эффективной длительности a .



а

б

а – гармонических; **б** – сложных с заданными значениями уровня эффективной длительности a в третьей N_3 полосе равной разборчивости

Рисунок 3. – Огибающие автокорреляционных функций исследуемых измерительных сигналов

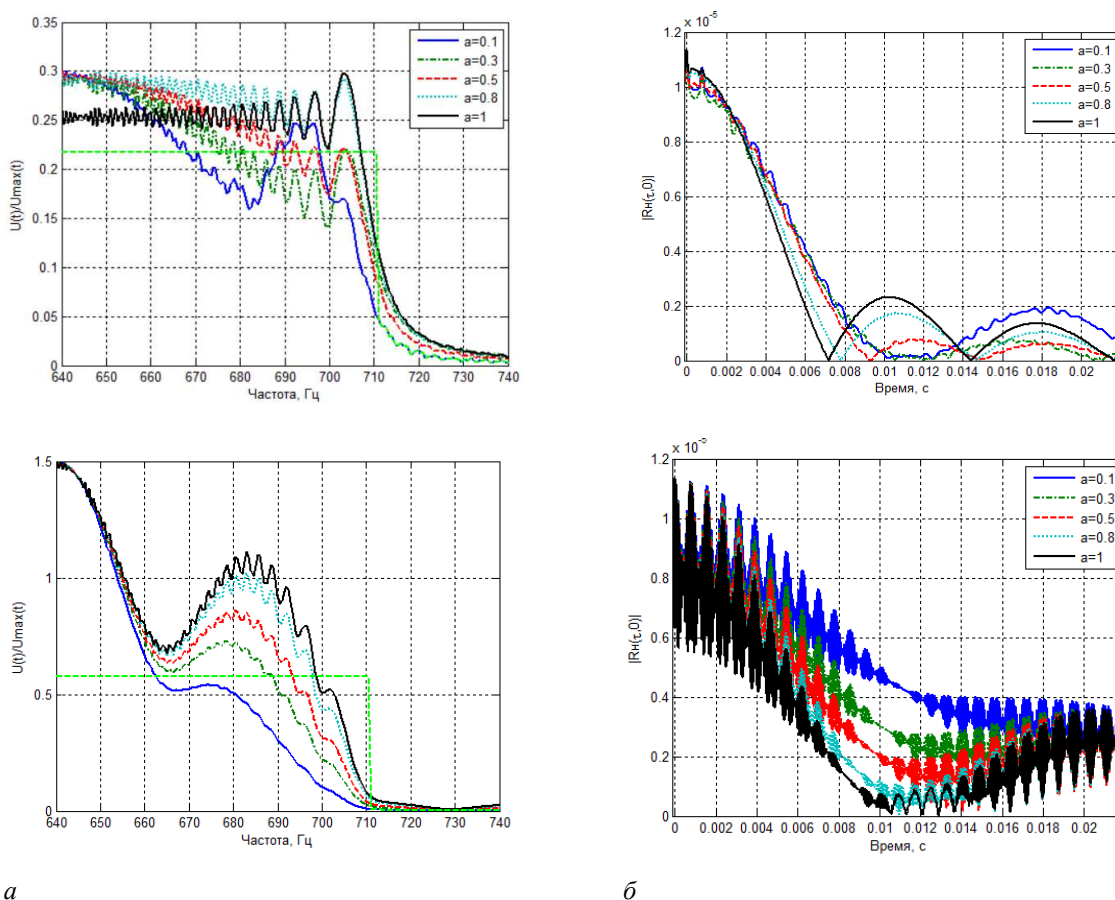
С точки зрения корреляционных свойств сложные ИС с прямоугольной огибающей $a = 1$ имеют такой недостаток, что высота двух первых симметричных боковых лепестков составляет $\approx 0,212$ от высоты центрального лепестка. Чем меньше значение a , тем больше ширина главного лепестка огибающей АКФ сигнала и меньше уровень боковых лепестков. Определенного снижения уровня боковых лепестков можно добиться, применяя в качестве измерительных сложные сигналы с непрямоугольными (типа колокола) [7] огибающими, что в условиях шумов высокого уровня повышает точность определения временного положения сигнала. Использование полностью колоколообразного сложного ИС удовлетворяет условию минимизации боковых лепестков АКФ и позволяет получить оптимальное решение для обеспечения высокой разрешающей способности по частоте, однако приводит к ухудшению разрешающей способности по времени. Чтобы устранить данный недостаток необходимо увеличивать длительность ИС.

При оценке защищенности РИ в КУИ длительность формируемого гармонического ИС в каждой ПРР спектра РС регламентирована $T_c = 1, 10$ и 25 с, исходя из чего суммарное время для передачи двадцати гармонических ИС соответственно равно $T_{\text{сум}} = 20, 200$ и 500 с. Таким образом, чем выше длительность исходного ИС, тем выше точность оценки.

Как элемент базы, девиация частоты предлагаемых для оценки защищенности РИ в КУИ сложных ИС ограничена шириной каждой ПРР, и поэтому при постановке задачи получения результатов в реальном режиме времени она является ограничивающим фактором. Чем больше база сложного ИС, тем выше потенциальные возможности и информативность сигнала, однако труднее реализация: для обеспечения необходимой точности требуются большие временные ресурсы. Обоснование выбора для оценки защищенности РИ в КУИ оптимальных исходных данных: длительности T_c , с; базы B ; изменения мгновенной частоты во времени μ , Гц/с, для сложных сигналов в ПРР спектра РС представлены в работе [4]. Если оценивать суммарное время для передачи всех, одинаковых по длительности $T_c = 4$ с, сложных ИС в двадцати ПРР спектра РС, то оно составит $T_{\text{сум}} = 80$ с. Исходя из этого дальнейшие исследования оценки защищенности РИ в КУИ проводились при формировании сложных ИС в ПРР спектра РС с постоянным значением длительности $T_c = 4$ с при одинаковых шумовых воздействиях. Изменялась лишь форма сложного ИС за счет регулирования уровня его эффективной длительности.

На рисунке 4 представлены основные характеристики сложных ИС в третьей N_3 ПРР в одинаковых условиях зашумления при различных заданных значениях уровня эффективной длительности a , частотой дискретизации $F_s = 44,1$ кГц, длительностью $T_c = 4$ с. На рисунке 4, а показаны модули спектров, исследуемых ИС в точке приема на выходе КУИ. На рисунке 4, б – огибающие их АКФ.

Форма построенных огибающих АКФ отображает даже незначительные искажения принятых сложных ИС. Использование данной характеристики для оценки искажений гармонических сигналов не обладает такой информативностью. Наиболее точно с использованием огибающих АКФ передаются искажения АЧХ ИС с меньшим значением уровня эффективной длительности сигнала a .



***a* – спектральное представление; *б* – огибающие их автокорреляционные функции**

Рисунок 4. – Графическое представление основных характеристик, исследуемых измерительных сигналов в одинаковых условиях зашумления

Далее исследуем, как искажения влияют на оценку защищенности речевой информации в КУИ. Для оценки используем сложные ИС с различными уровнями эффективной длительности a в одинаковых условиях зашумления. Полученные значения оценки средней мощности P в точке приема на выходе КУИ искаженных ИС представлены в таблице 3.

Таблица 3. – Результаты оценки средней мощности сложных измерительных сигналов в точке приема на выходе каналов утечки информации

N_k	P, B^2				
	$a = 0,1$	$a = 0,3$	$a = 0,5$	$a = 0,8$	$a = 1$
N_1	0,25	0,35	0,43	0,55	0,62
N_2	0,33	0,41	0,48	0,58	0,65
N_3	0,35	0,44	0,51	0,60	0,65
N_4	0,33	0,42	0,48	0,57	0,64
N_5	0,33	0,41	0,47	0,56	0,61
N_6	0,32	0,39	0,45	0,53	0,58
N_7	0,27	0,35	0,43	0,54	0,62
N_8	0,20	0,31	0,40	0,55	0,66
N_9	0,20	0,30	0,39	0,55	0,65
N_{10}	0,24	0,33	0,42	0,54	0,64
N_k	P, B^2				
	$a = 0,1$	$a = 0,3$	$a = 0,5$	$a = 0,8$	$a = 1$
N_{11}	0,29	0,37	0,44	0,54	0,60
N_{12}	0,32	0,40	0,46	0,54	0,59
N_{13}	0,26	0,35	0,42	0,54	0,61
N_{14}	0,27	0,35	0,43	0,56	0,65
N_{15}	0,25	0,34	0,42	0,52	0,59
N_{16}	0,26	0,35	0,43	0,55	0,63
N_{17}	0,26	0,35	0,43	0,56	0,66
N_{18}	0,26	0,35	0,43	0,54	0,62
N_{19}	0,26	0,35	0,43	0,54	0,62
N_{20}	0,26	0,35	0,42	0,54	0,62

Согласно полученным результатам наблюдается следующая зависимость: с уменьшением уровня эффективной длительности a сложного ИС уменьшается и его средняя мощность P , B^2 .

Выводы. На основании проведенного анализа ИС в ПРР спектра РС при использовании наиболее значимых их свойств (спектрального представления и АКФ) установлено, что применение для оценки защищенности РИ в КУИ сложного ИС, в отличие от применения гармонического ИС, позволяет полностью контролировать возникающие искажения АЧХ в пределах каждой из ПРР, на которые разбивается спектр РС, а не в отдельных точках на числовой оси. Исследование деформаций АЧХ гармонического и сложных ИС с регулируемым уровнем эффективной длительности при одинаковых шумовых воздействиях в каждой ПРР показывает, что наилучшие результаты оценки позволяют получить сложные ИС с регулируемым уровнем эффективной длительности $a = 1$. Если использовать $a = 0,8$, то это снижает точность оценки в 1,14 раза, а использование $a = 0,1$ – в 2,3 раза. Однако использование колоколообразного сложного ИС удовлетворяет условию минимизации боковых лепестков АКФ, что является важным при обнаружении ИС на фоне шумов. С учетом сказанного рекомендуется оценку проводить, используя ИС с регулируемым уровнем эффективной длительности $a = 0,8$ длительностью $T_c = 4$ с в каждой ПРР спектра РС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Железняк, В.К. Защита информации от утечки по техническим каналам : учеб. пособие / В.К. Железняк. – СПб. : ГУАП, 2006. – 188 с.
2. Левин, Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. – М. : Сов. радио, 1969. – 752 с.
3. Сигналы радиотехнические измерительные. Термины и определения : ГОСТ 16465–70 (с изм. № 1). – М. : ИПК Изд-во стандартов, 2008. – 30 с.
4. Железняк, В.К. Представление параметров широкополосного линейно-частотно-модулированного сигнала для оценки разборчивости речи в технических каналах утечки информации / В.К. Железняк, К.Я. Раханов, И.Б. Бураченок // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2014. – № 12. – С. 2–12.
5. Варакин, Л.Е. Теория сложных сигналов / Л.Е. Варакин. – М. : Советское радио, 1970. – 376 с.
6. Обнаружение радиосигналов / П.С. Акимов [и др.] ; под ред. А.А. Колосова. – М. : Радио и связь, 1989. – 288 с.
7. Слока, В.К. Вопросы обработки радиолокационных сигналов / В.К. Слока. – М. : Сов. радио, 1970. – 256 с.

Поступила 02.03.2017

ANALYSIS OF MEASURING SIGNALS FOR THE ESTIMATION OF SPEECH INFORMATION PROTECTION IN TECHNICAL CHANNELS OF LEAKAGE

V. ZHELEZNYAK, I. BURACHONAK

The analysis and synthesis of measuring signals used to estimate of speech information protection in technical channels of leakage in a high-level noise and significant nonuniformities of their amplitude-frequency characteristics. Identified and investigated most significant properties of harmonic and complex measurement signals in bands of equal intelligibility. The distortion of the form of autocorrelation functions of complex measurement signals received in a noise are investigated. It is proposed to use complex measurement signals with an adjustable level of effective duration. The highest accuracy of the protection rating was obtained by using complex measurement signals with a given level of effective duration $a = 0,8$ s with fixed duration $T_c = 4$ s in each band of equal intelligibility.

Keywords: *measurement signals, technical channels of information leakage, processing of measurement signals.*

УДК 004.02

**ПРИМЕНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ КОГНИТИВНЫХ КАРТ
ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЛОХОСТРУКТУРИРОВАННЫХ СИСТЕМ**

*канд. техн. наук, доц. А.Ф. ОСЬКИН
(Полоцкий государственный университет);*

*Д.А. ОСЬКИН
(Белорусский государственный экономический университет, Минск)*

Рассматривается методика моделирования плохоструктурированных систем, основанная на применении нечетких когнитивных карт. Кратко рассмотрена история становления этого метода моделирования, приведены ссылки на основные работы в данной предметной области. Предложена модификация алгоритма построения нечеткой когнитивной карты Коско. Приведены примеры моделирования с использованием модифицированного алгоритма.

Ключевые слова: моделирование, когнитивные карты, плохоструктурированные системы

Введение. Когнитивные карты представляют собой разновидность математических моделей, описывающих проблемные ситуации или сложные слабоструктурированные системы. Впервые термин «когнитивные карты» (Cognitive Maps) предложил Е. Толмен в работе [1].

Рассматривать когнитивную карту как ориентированный граф, дугам которого присваиваются знак «плюс» или «минус», предложил Р. Аксельрод. В работе [2] он применил эту модель для построения теории принятия решений в политике и экономике.

Таким образом, классические знаковые когнитивные карты задаются в виде ориентированного графа и представляют моделируемую систему в виде множества вершин (концептов) и дуг, взвешенных двухуровневыми значениями. Базовыми элементом такой карты являются связи, описывающая влияние одного концепта K_i (начальная вершина в теории графов) на другой концепт K_j (конечная вершина в теории графов). Направленность этой связи w_{ij} означает, что концепт-источник влияет на концепт-приемник, т.е. изменение значений (состояний) концепта-источника приводит к изменению значений (состояний) концепта-приемника. При этом передача влияния рассматривается качественно: при положительной связи и увеличении концепта K_i концепт K_j увеличивается, а при уменьшении $K_i - K_j$ уменьшается. При отрицательном значении связи увеличение значения K_i вызовет уменьшение K_j (и наоборот).

Такая когнитивная карта может быть использована для качественной оценки влияния отдельных концептов на устойчивость системы в целом. Выявляя образовавшиеся в карте контуры, анализируя результирующие знаки каждого из контуров и используя теорию обратных связей, можно оценивать устойчивость моделируемой системы.

В основе такого анализа лежит, по сути дела, методология анализа обычных линейных систем, основанная на сравнении различных контуров, образованных из концептов. Понятно, что возможности такого анализа ограничены и не позволяют выявить особенности взаимовлияния концептов, а также ранжировать их по степени влияния друг на друга. Особенно заметно это становится при решении задач многокритериальной оптимизации с заданными количественными критериями.

В 1986 г. в работе [3] Б. Коско предложил новый тип когнитивных карт, получивших название «нечеткие когнитивные карты» (Fuzzy Cognitive Maps).

Концепты в нечеткой когнитивной карте (НКК) могут принимать значения из диапазона действительных чисел [0, 1].

Термин «нечеткие» обозначает только то, что причинные связи могут принимать не только значение, равное 0 или 1, а лежат в диапазоне действительных чисел, отражающих «силу» влияния одного концепта на другой. Подход, основанный на теории нечетких множеств Л. Заде, по крайней мере, в вычислительном аспекте, в модели Б. Коско не применяется.

Структура влияния нескольких входных концептов на выходной в картах данного типа соответствует структуре однослойного перцептрона. В работе предложен способ аккумуляции отдельных влияний, аналогичный взвешенному суммированию компонентов входного вектора искусственным нейронном с последующим нелинейным преобразованием результатов этого суммирования. Отдельные чет-

кие влияния входных концептов суммируются, и для предотвращения выхода за пределы диапазона выходного концепта используется специальная нелинейная функция f :

$$K_j = f\left(\sum_{i=1}^n w_{ij} \cdot K_i\right). \quad (1)$$

где w_{ij} – вес влияния концепта i на концепт j ;

n – число концептов, непосредственно влияющих на концепт j ;

K_i и K_j – значения входного и выходного концептов соответственно.

В качестве активационной функции используется сигмоида:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda x}}. \quad (2)$$

Несмотря на то, что в вычислительном аспекте нечеткие когнитивные карты Б. Коско похожи на искусственную нейронную сеть, между этими двумя моделями существуют различия. Нечеткие когнитивные карты могут носить чисто экспертный характер (хотя могут и обучаться) и соответствуют модели типа «белого ящика», тогда как искусственная нейронная сеть принципиально ориентирована на обучение (модель типа «черного ящика»).

Стремление максимально использовать постулаты теории нечетких множеств привело к появлению нечетких когнитивных карт, для описания влияний между концептами в которых используются нечеткие продукционные правила (Rules Based Fuzzy Cognitive Maps – нечеткие когнитивные карты, основанные на правилах) [4].

В этих картах концепты представлены в виде нечетких множеств, определяемых функциями принадлежности к базовому множеству.

Причинно-следственные отношения между двумя концептами выражены в виде лингвистической нечетко-продукционной системы «один вход – один выход» (Single Input – Single Output; SISO) относительно нечетких приращений концептов. Правила имеют вид:

Если «приращение концепта K_i малое», *то* «приращение концепта K_j среднее».

В последнее время интерес к применению когнитивных карт для моделирования сложных, плохо структурированных систем сильно увеличился (например, работы [5, 6]), в связи с чем разработка новых подходов к моделированию и модификация существующих методик представляется весьма актуальной.

Процесс формирования и использования когнитивных карт можно представить в виде следующей последовательности процедур:

- определение списка концептов (согласованного списка концептов в случае опроса группы экспертов);
- определение отношений причинности (влияния) между каждой парой концептов (согласованных отношений причинности);
- построение когнитивной карты;
- динамическое моделирование;
- анализ системных характеристик когнитивной карты;
- анализ устойчивости;
- обучение когнитивной карты.

Модификация нечетких когнитивных карт Коско

Мы предлагаем модифицировать алгоритм построения нечетких когнитивных карт Коско. Наш подход отличается большей формализацией отдельных шагов алгоритма, что позволит повысить точность моделирования, так как в этом случае параметры модели будут в меньшей степени зависеть от субъективного мнения отдельных экспертов.

Итак, в алгоритм построения нечеткой когнитивной карты предлагается внести следующие изменения.

1. После определения списка концептов выполняется нормирование их числовых значений и переход к безразмерным величинам таким образом, чтобы числовые значения концептов всегда изменялись в интервале от 0 до 1.
2. Текущие значения концептов рассчитываются по формуле

$$K_j = \begin{cases} f\left(\sum_{i=1}^n w_{ij} \cdot K_i\right), & \text{если } K_j > 0 \\ 0, & \text{если } K_j \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

3. При назначении весов взаимного влияния концептов экспертами используется балльная шкала интенсивности предпочтений, предложенная Т. Саати в работе [7]. Допуская, что степень влияния i -го концепта на j -й по сравнению со степенью влияния k -го концепта на j -й, выражается числом $a_{ik} \geq 1$, он предложил следующую квантификацию градаций весов:

- $a_{ik} = 1$, если веса w_{ij} и w_{kj} одинаковы;
- $a_{ik} = 3$, если вес w_{ij} немного больше веса w_{kj} ;
- $a_{ik} = 5$, если вес w_{ij} больше веса w_{kj} ;
- $a_{ik} = 7$, если вес w_{ij} значительно больше веса w_{kj} ;
- $a_{ik} = 9$, если вес w_{ij} во много раз больше веса w_{kj} .

Таким образом, в результате проведения экспертом лингвистических парных сравнений получается матрица $A = [a_{ik}]$, где элемент a_{ik} показывает, во сколько раз вес w_{ij} больше веса w_{kj} .

4. Вычисленные на основании матрицы A значения весов нормируются так, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{i=1}^p w_{ij} = 1, \tag{4}$$

где p – число концептов, влияющих на j -й концепт.

Такой подход позволяет предотвратить возможность выхода значений выходного концепта за допустимые пределы.

5. Для концептов-источников, содержащих только исходящие дуги, $w_{ii} = 1$.

Пример модели на основе нечеткой когнитивной карты

В качестве тестовой модели рассмотрим когнитивную карту, состоящую из четырёх концептов: K_1, K_2, K_3 и K_4 . Пусть вершина 1, соответствующая концепту K_1 , является вершиной-источником, а вершина 4, соответствующая концепту K_4 , есть вершина-сток. Вершина-источник связана с остальными вершинами карты только исходящими дугами, а вершина-сток, как уже было сказано, не имеет исходящих дуг. Будем также считать, что в графе-модели отсутствуют петли. Пусть заданы начальные значения концептов K_1, K_2, K_3, K_4 и определены знаки и значения весов $w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{23}, w_{24}, w_{32}, w_{34}$. Числовые значения концептов нормированы, а значения весов, вычисленные на основе матрицы парных сравнений A , удовлетворяют условию (3). Для многих практически интересных случаев мы можем представить моделируемую систему именно в таком виде.

С учетом сказанного выше, когнитивная карта будет иметь вид, показанный на рисунке 1.

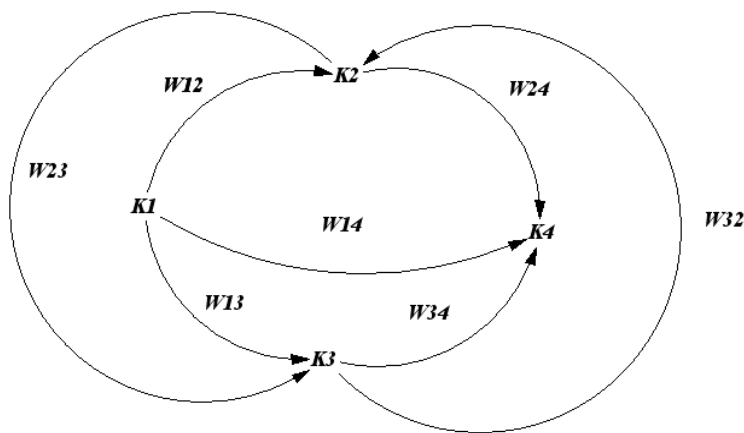


Рисунок 1. – Пример нечеткой когнитивной карты

Примечание. На рисунке для большей наглядности концепты K_1, K_2, K_3 и K_4 обозначены как $K1, K2, K3$ и $K4$, а веса $w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{23}, w_{24}, w_{32}, w_{34}$ – $W12, W13, W14, W23, W24, W32, W34$ соответственно.

Предположим, что на основании обработки мнений экспертов, нами получена следующая матрица, соответствующая нечеткой когнитивной карте, приведенной на рисунке 1.

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,75 & 0,71 & 0,28 \\ 0 & 0 & 0,29 & 0,29 \\ 0 & 0,25 & 0 & -0,43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Пусть исходные нормированные значения концептов заданы следующим вектором-строкой:

$$K = (K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4) = (0,80 \ 0,40, \ 0,03 \ 0,10). \quad (6)$$

Пусть также в некоторый момент времени t_0 значение концепта K_1 изменилось и стало равно 0,95. Тогда переходный процесс в системе можно рассчитать по следующей матричной формуле:

$$K(t_{k+1}) = K(t_k) \cdot W, \quad (7)$$

где $K(t_{k+1})$ и $K(t_k)$ – векторы-строки концептов в моменты времени t_{k+1} и t_k соответственно.

В таблице 1 приведены результаты расчета описанного выше переходного процесса в среде MS Excel. При расчете учитывается формула (3).

Таблица 1 – Результаты расчета рассматриваемого переходного процесса в среде MS Excel

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
K_1	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95
K_2	0,4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
K_3	0,03	0,79	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68
K_4	0,1	0,37	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Графики на рисунке 2 иллюстрируют изменения концептов во времени.

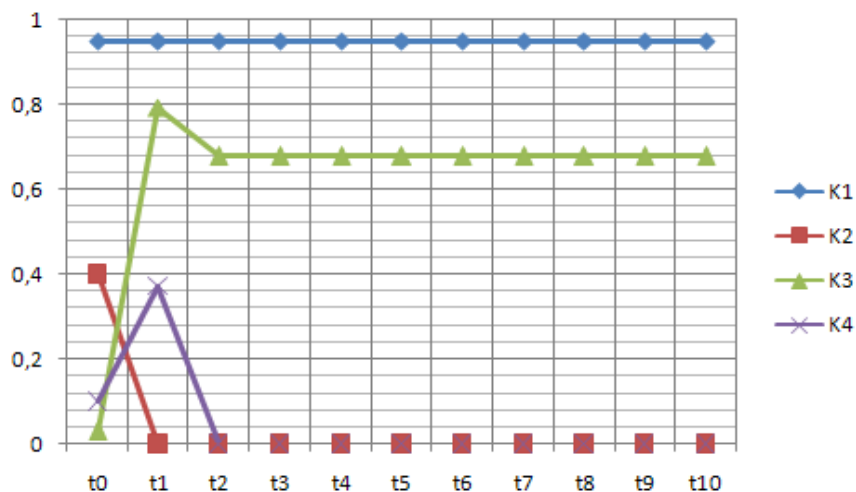


Рисунок 2. – Графики изменения концептов K_1, K_2, K_3, K_4 во времени

В таблице 2 и на рисунке 3 приведены результаты расчета переходного процесса для того же вектора концептов и следующей матрице весов:

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,75 & 0,71 & 0,28 \\ 0 & 0 & 0,29 & 0,29 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0,43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Таблица 2. – Результаты расчета рассматриваемого переходного процесса для матрицы весов (8)

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
K_1	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95
K_2	0,4	0,72	0,91	0,93	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95
K_3	0,03	0,79	0,88	0,94	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95
K_4	0,1	0,40	0,82	0,91	0,94	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95

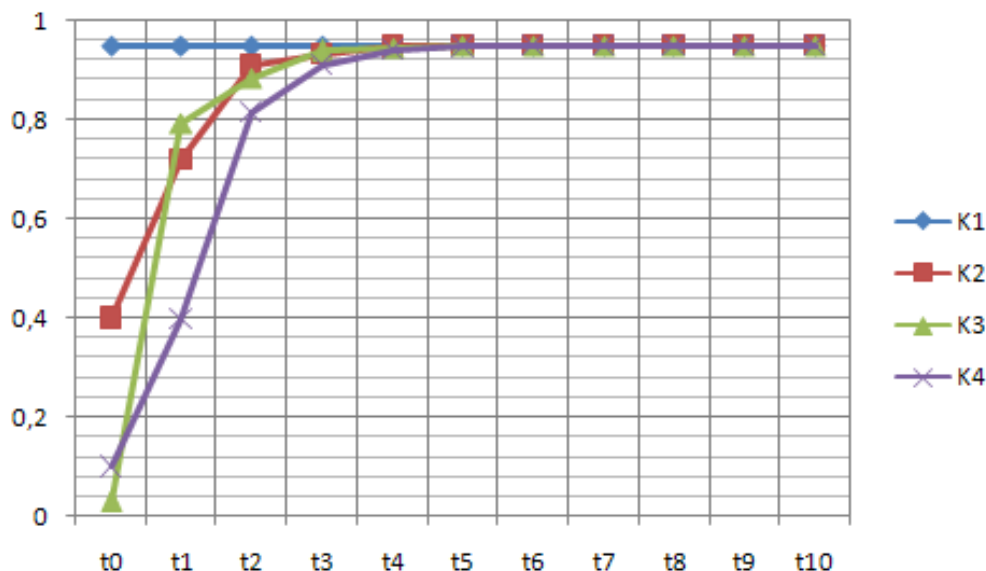


Рисунок 3. – Графики изменения концептов K_1, K_2, K_3, K_4 во времени при матрице весов, заданной выражением (8)

Выводы. Нечеткие когнитивные карты представляют собой простой, удобный и универсальный инструмент для моделирования и исследования процессов в плохоструктурированных и слабоформализованных системах.

Применение когнитивных карт позволяет уточнить структуру системы, оценить ее устойчивость, выполнить моделирование переходных процессов в системе.

Коллективное построение нечеткой когнитивной карты группой экспертов позволяет естественным образом объединить усилия экспертов, проводящих анализ и моделирование плохоструктурированной системы, упрощает выработку консолидированного представления о процессах, протекающих в моделируемой системе.

Важным направлением применения нечеткого когнитивного моделирования может быть учебный процесс. Использование когнитивных карт при изучении сложных процессов и систем в любой предметной области позволяет повысить эффективность и качество обучения и уменьшить время, необходимое для усвоения нового учебного материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tolmen, E.C. Cognitive maps in rats and men / E.C. Tolmen. – Psychological Review. – 1948. – Vol. 42, № 55. – P. 189–208.
2. Axelrod, R. Structure of Decision: the cognitive maps of political elites / R. Axelrod. – N. Y. : Princeton Univ. Press, 1976.
3. Kosko, B. Fuzzy Cognitive Maps. International / B. Kosko. – Journal of Man-Machine Studies. – 1986. – Vol. 24. – P. 65–75.
4. Carvalho, J.P. Rule- based fuzzy cognitive maps and fuzzy cognitive maps – a comparative study. / J.P. Carvalho, J.A. Tom // In Proc. of the 18th International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS'99. – New York, 1999. – P. 115–119.

5. Ntarlas, O.D. A survey on Applications of fuzzy cognitive maps in business and management / O.D. Ntarlas, P.P. Groumpos // Вестник УГАТУ = Vestnik UGATU. – 2014. – № 5. – С. 3–7.
6. Причина, О.С. Применение нечетких когнитивных карт для организационной диагностики предприятия и моделирования деятельности / О.С. Причина, Д.Л. Мороз, К. Руиз // Вестник Таганрогского института им. А.П. Чехова. – 2014. – № 1. – С. 34–37.
7. Saaty, T.L. Exploring the interface between hierarchies, multiple objectives and fuzzy sets / T.L. Saaty // Fuzzy Sets and Syst. – 1978. – № 1. – P. 57–68.

Поступила 20.03.2017

APPLICATION OF FUZZY COGNITIVE MAPS FOR BAD STRUCTURED SYSTEMS MODELING

A. OSKIN, D. OSKIN

The technique of modeling of bad structured systems based on the use of fuzzy cognitive maps is considered. The history of the development of this modeling method is briefly reviewed, references are made to the main works in this subject area. A modification of the algorithm for constructing Kosko's fuzzy cognitive map is proposed. Examples of modeling using a modified algorithm are given.

Keywords: modeling, fuzzy cognitive maps, bad structured systems.

УДК 629.78

**ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРЫ И ФОРМАТА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ
РАДИОЛОКАЦИОННЫХ ДАННЫХ СПУТНИКОМ TERRASAR-X****В.М. ЧЕРТКОВ, кан. техн. наук, доц. Р.П. БОГУШ****(Полоцкий государственный университет);****кан. техн. наук Н.М. НАУМОВИЧ****(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск)**

Среди существующих спутников радиолокационного зондирования Земли TerraSAR-X – один из наиболее востребованных, так как позволяет получать радиолокационные изображения с высоким пространственным разрешением. Базовыми продуктами данного спутника являются обработанные до уровня 1 В радиолокационные данные, для описания которых используется набор файлов и каталогов. Рассмотрены особенности представления основных и вспомогательных данных спутника TerraSAR-X, описана структура выходного продукта данного спутника. Синтезирован алгоритм преобразования и записи данных в формат COSAR с использованием программного обеспечения MatLab.

Ключевые слова: радиолокационное изображение, формат данных, TerraSAR-X.

Введение. Системы дистанционного зондирования Земли на основе радиолокаторов с синтезированной апертурой антенны позволяют получать детальные радиолокационные изображения местности с качеством близким к оптическим системам, но при любых метеоусловиях и в любое время суток [1, 2]. Среди существующих спутников радиолокационного зондирования Земли TerraSAR-X является одним из наиболее востребованных и позволяет получать радиолокационные изображения (РЛИ) с высоким пространственным разрешением, до 1 м [3]. Радиолокатор с синтезированной апертурой (РСА) спутника выполняет съемку в X-диапазоне длин волн с частотой 9,65 ГГц и длиной волны соответственно 3 см. Базовые продукты данного спутника представляются обработанными до уровня 1 В изображениями, которые содержат следующие геометрические проекции и представления данных [3, 4]: Single Look Slant Range Complex (SSC) – комплексные РЛИ с наклонной дальностью с амплитудно-фазовыми параметрами в геометрии наклонной дальности; Multilook Ground Range Detected (MGD) – РЛИ с корректировкой по WGS84 со средней высотой местности для проекции с наклонной на горизонтальную дальность; Geocoded Ellipsoid Corrected (GEC) – РЛИ с корректировкой по WGS84 со средней высотой местности; Enhanced Ellipsoid Corrected (EEC) – РЛИ с корректировкой по WGS84 с цифровой моделью рельефа. Разнообразие базовых продуктов основных радиолокационных данных спутника и различных вспомогательных данных, которые к тому же могут динамически дополняться, предопределило представление базового продукта в виде набора файлов и каталогов, которые упакованы в отдельный архив. При этом метаданные записаны в отдельный файл с использованием языка XML в качестве их описания. Для записи радиолокационных данных спутника TerraSAR разработан и используется специализированный формат COSAR [4]. Данная работа направлена на выявление особенностей структуры и формата представления радиолокационных данных спутником TerraSAR.

Структура пакета данных спутника TerraSAR-X. Выходной продукт данного спутника представляет собой архив (*.tar) со структурой каталогов и файлов, в которых отдельно хранятся РЛИ и метаданные о режиме съемки, времени и координатах нахождения летательного аппарата, информация о проекции и геокодировании, параметры качества информации, конфигурация съемочной системы и т.д. [2].

На рисунке 1 представлена структура выходного продукта спутника TerraSAR-X.

Основной файл метаданных, XML-файл, содержит информацию обо всех каталогах и файлах выходного продукта и включает основные разделы:

- *generalHeader* – хранит информацию о наземной станции;
- *productComponents* – представляет информацию о файловом составе выходного продукта;
- *productInfo* – содержит информацию о параметрах режима съемки, получения, передачи и хранения радиолокационной информации;
- *productSpecific* – представляет информацию о геокодировании и режиме съемки SSC;
- *setup* – описывает конфигурацию режима съемки и обработки данных и содержит информацию об уровне обработки выходного продукта, поляризационных каналах съемки и используемом программном обеспечении;
- *processing* – включает параметры обработчика и получаемых данных во время съемки, тип применяемых геометрических координат, результаты анализа и коррекции, геометрические параметры фо-

кусировки данных, также содержит параметры оценки и вычисления доплеровского центроида и флаги, указывающие, какие этапы обработки были выполнены;

– *instrument* – описывает параметры радиолокационного сенсора во время получения «сырых» (необработанных) данных;

– *calibration* – хранит параметры применения радиометрических и других поправок над полученными данными, которые использовались для калибровки, включая абсолютный коэффициент калибровки без масштабирования процессором, общую временную задержку, вносимую электронными приборами, калибровочные коэффициенты;

– *noise* – описывает шум и содержит идентификатор его модели, опорный уровень и время нестабильности шума, полиномы мощности шума как функции дальности в зависимости от опорных временных отсчетов азимута;

– *platform* – включает координаты антенн РСА, GPS антенны относительно спутниковой системы, основной сегмент, описывающий файл орбит через сегменты векторов состояний, привязанных к географическим координатам и пикселям радиолокационного изображения;

– *productQuality* – описывает качество изображения, данных и пределы их валидных значений.

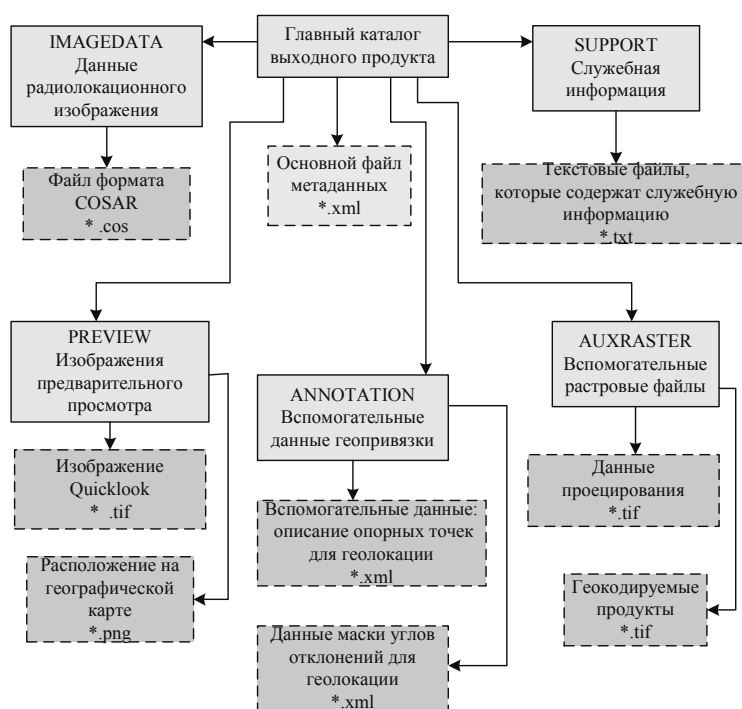


Рисунок 1. – Структура каталогов и файлов выходного продукта спутника TerraSAR-X

Изображения предварительного просмотра. В данном каталоге располагаются изображения небольшого размера для обеспечения возможности их быстрого просмотра, а также общая карта с отображением местоположения съемки. Изображения Quicklook являются масштабированными копиями РЛИ до 2000 пикселей по высоте, размер определяется типом изображения, режимом съемки и видом выходного продукта спутника. В случае отображения нескольких поляризационных слоев изображение представляется 24-битным цветным изображением формата TIFF, а каждый слой цвета соответствует определенному каналу поляризации. Также приводится меньший точечный рисунок растрового изображения в градациях серого в формате JPEG или TIFF с размером до 1000 пикселей по высоте.

Особенности представления данных радиолокационного изображения в формате COSAR. Полученные от РСА спутника TerraSAR-X данные отраженного радиосигнала в комплексном виде хранятся в файле формата COSAR. В зависимости от режима съемки спутника в файле может находиться ряд пакетов. Если для каждого канала поляризации система РСА использует несколько излучающих радиосигналов, то информация для каждого отраженного сигнала записывается в отдельных файл.

Сформированный для передачи пакет хранит метаданные, включая информацию о пригодности основных данных для дальнейшей обработки, и данные РЛИ в виде прямоугольной матрицы, в которой каждый столбец соответствует определенному расстоянию по дальности и содержит информацию о данных азимута. Расположение пакетов данных в файле COSAR показано на рисунке 2.

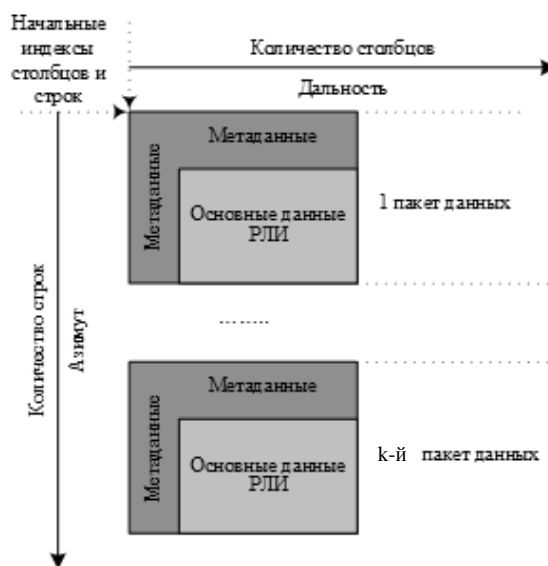


Рисунок 2. – Схема расположения пакетов данных в файле COSAR

Метаданные располагаются в первых четырех строках и в начале каждой последующей строки (рис. 3). Вспомогательные данные, записанные в первых четырех строк, повторяются в каждом сформированном пакете и содержат информацию о радиопередаче и общую информацию о сформированном файле. В первую строку каждого пакета заносятся следующие параметры (рис. 4):

- число байт в текущей передаче (BIB);
- индекс дальности, который отражает расположение первой выборки дальности на виртуальном растре относительно эталонного значения (RSRI);
- количество строк, хранящих значения по дальности (RS);
- количество азимутальных столбцов (AS);
- индекс номера радиопередачи (BI);
- общее количество байт в строке в направлении дальности (RTNB);
- общий размер азимутальных строк (TNL);
- частоту дискретизации первой выборки по отношению к текущей выборке дальности (1 для 330 МГц, 2 для 165 МГц, 3 для 110 МГц);
- идентификатор COSAR файла и версии сформированного файла;
- вещественную переменную с плавающей точкой, значение которой обратно скорости масштабирования, применяемой в обработке данных;
- неиспользованные 32-битные числа в каждой строке пакета зарезервированы для вспомогательных данных, которые могут содержать дополнительные сведения о режимах формирования зависимой информации, полезной для интерферометрической обработки сложных данных.

Основные данные в файле COSAR представляются 32-битными числами в комплексном виде: 16 бит для мнимой части и 16 бит для действительной части. Вспомогательные данные хранятся в виде 32-битного целого числа. Порядок следования байт в файле обратный, т.е. старший байт представляется первым. Ячейка с именем идентификатора COSAR представляет собой 32-битное целое с постоянным значением в шестнадцатеричной системе счисления.

Отличительной особенностью COSAR формата является хранение данных РЛИ в искаженной или исправленной геометрии. Выбор геометрии для хранения данных определяет размер формируемого файла COSAR и зависит от полученной сцены радиолокационного снимка, т.е. положения спутника относительно сцены. Информация об искажении РЛИ представляется метаданными, которые записываются в файл COSAR совместно с основными данными РЛИ.

Общий вид данных в столбцах азимутной выборки представлен на рисунке 5. Данные делятся на три категории: метаданные, верные и искаженные данные. Вспомогательные данные азимутальной выборки представляются по три 32-битных числа в каждом столбце азимутальной выборки, описывающие следующие параметры:

ASRI – Азимутальной параметр выборки. Представляет расположение первого образца фактического столбца азимута относительно нулевого доплеровского расположения ссылочной выборки в промежуточном растре. Этот индекс не только определяет местоположение отдельных пакетов, но и также позволяет хранить данные перекошенного изображения;

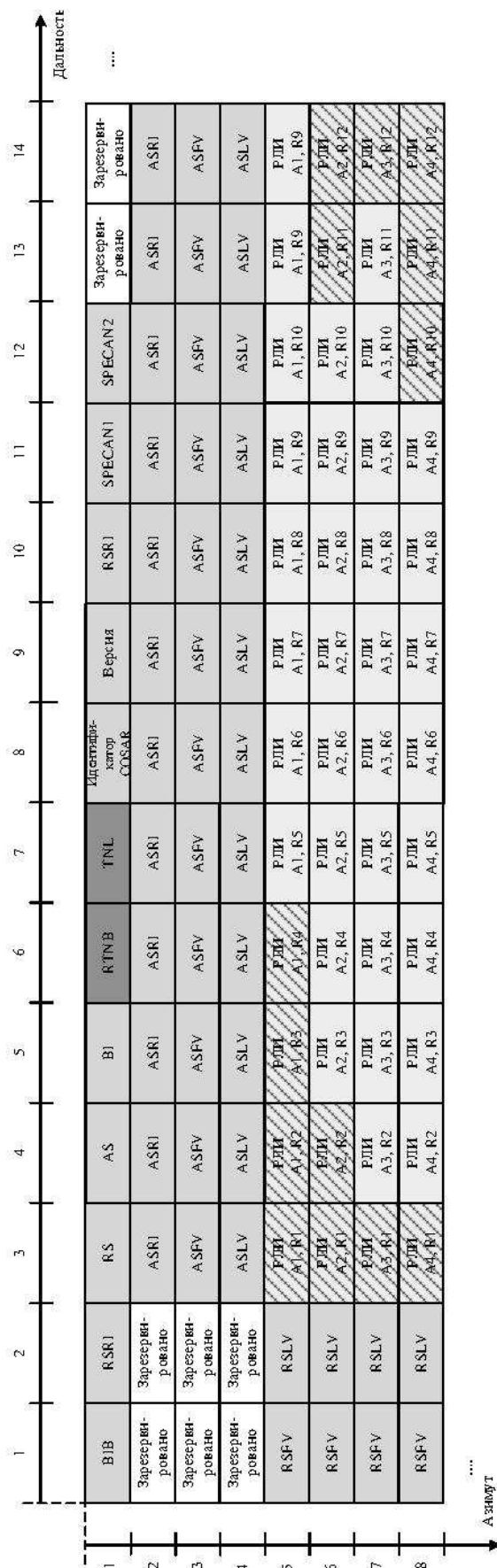


Рисунок 3. – Структура представления данных в файле COSAR

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2095982080	0	18878	27750	1	75520	27754	1129529682	1	2	0	0	2139062143	2139062143	2139062143
BIB	RSR1	RS	AS	BI	RTNB	TNL	Идентификатор COSAR	Версия	RSR1	SPECAN1	SPECAN2	Зарезервировано	Зарезервировано	Зарезервировано

Рисунок 4. – Расположение метаданных в первой строке файла COSAR

ASFV – номер ячейки первой верной хранящийся азимутальной выборки в столбце. Индекс азимута начинается с 1;

ASLV – последняя верная ячейка азимутальной выборки в столбце.

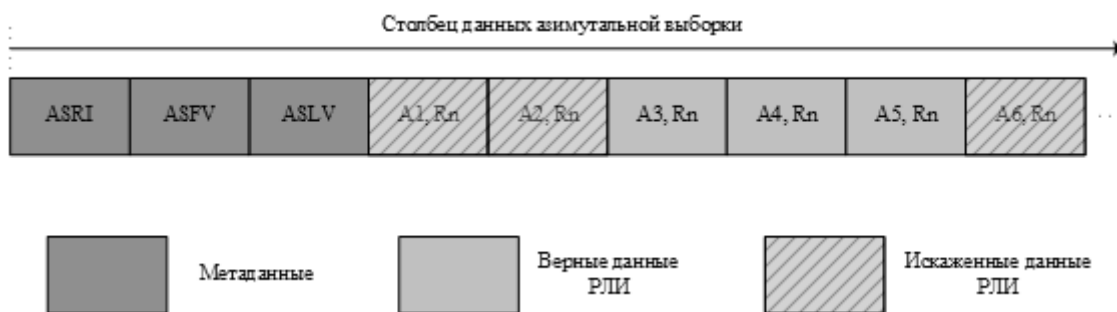


Рисунок 5. – Описание данных азимутной выборки

Таким образом, устранение искажения изображения и расположения начала колонки верных данных выборок азимута начинается с ячейки под номером ASRI+ASFV-1. В случае если перекос изображения имеет место, то параметр ASRI является постоянным для всех столбцов по дальности всего пакета.

Величина задержки первой выборки данных дальности является постоянной в пакете данных и указана в первой строке метаданных в начале пакета.

Каждая строка данных выборки дальности содержит два параметра метаданных и данные РЛИ соответственно, общий вид строки данных выборки дальности представлен на рисунке 6, где:

RSFV – номер ячейки первой верной выборки дальности в строке; нумерация индекса дальности начинается с 1.

RSLV – последняя верная ячейка выборки дальности в строке.

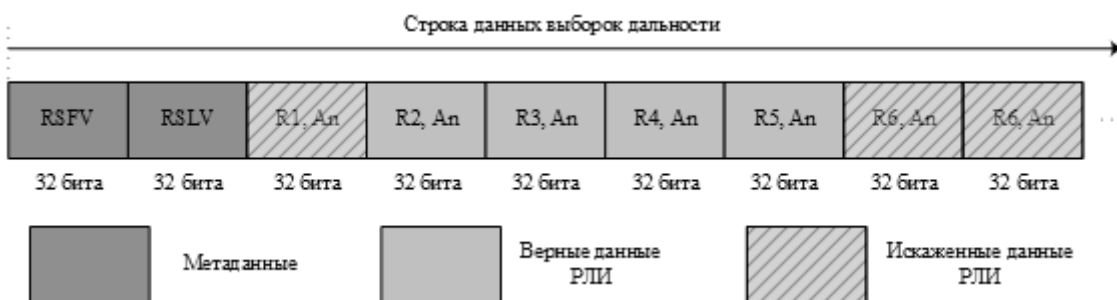


Рисунок 6. – Описание данных выборки по дальности

Число азимутных выборок в одном столбце может изменяться от передачи к передаче, а число выборок дальности в одной строке всегда одинаково для каждого пакета в сформированном файле.

Вспомогательные данные геопривязки. В формате COSAR также предусмотрено хранение вспомогательных данных геопривязки РЛИ к местности. При этом для каждой опорной точки определяются следующие параметры: привязка к опорному времени азимута, привязка к опорному времени наклонной дальности, широта, долгота, номер строки и номер столбца полученного массива растра COSAR изображения, углы падения и элевации.

Вспомогательные растровые файлы. В данном разделе размещаются данные проецирования и данные геокодирования. Процедура геокодирования выполняет развертывание полученного РЛИ в соответствии с направлением севера [3].

Результаты моделирования представления данных в формат COSAR. С учетом рассмотренной структуры представления радиолокационных данных спутником TerraSAR-X синтезирован и реализован алгоритм представления данных в формат COSAR с использованием программного обеспечения MatLab, который включает следующие основные шаги:

- импорт сфокусированного РЛИ с геометрической коррекцией;
- формирование основных и вспомогательных данных на основе импортированного РЛИ;
- вывод в файл первой строки основных и вспомогательных данных;
- перестановка пикселей для удобства конкатенации двух 16-битных чисел в 32-битное число;

- формирование вспомогательных данных о перекосе изображения;
- преобразование растра РЛИ в одномерный массив;
- конкатенация 16-битных чисел в 32-битное число;
- вывод данных.

Для реализации алгоритм представления данных в формат COSAR в пакете MatLab реализованы и используются следующие основные функции:

- RLI_open_complex – чтение комплексных данных радиолокационного изображения;
- asdata_form – формирование верных и искаженных данных азимутальной выборки;
- header_write – заполнение заголовка первой строки (листинг 1);
- rsdata_form – формирование верных и искаженных данных выборок по дальности;
- rek_rli – реструктуризация данных РЛИ (листинг 2);
- COSAR_data – формирование данных COSAR файла.

Листинг 1 – Функция заполнения заголовка первой строки формата COSAR

```
function [header] = header_write(height, width, asri, asfv, aslv)
% height : высота РЛИ
% width : ширина РЛИ
% asri : вектор азимутальных параметров для каждой выборки азимута
% asfv : вектор, содержащий номера ячеек первых верных данных в азимутальной выборке
% aslv : вектор, содержащий номера ячеек последних верных данных в азимутальной выборке
header=zeros(4,width); % заполнение основного заголовка нулями
header(1,1)=4*(width)*(height+4); % число байт в текущей передаче (BIB)
header(1,2)=1; % индекс дальности, который отражает расположение первой выборки дальности на
виртуальном растре относительно эталонного значения (RSRI)
header(1,3)=width-2; % количество строк, хранящих значения по дальности (RS)
header(1,4)=height; % количество азимутальных столбцов (AS)
header(1,5)=1; % индекс номера радиопередачи (BI)
header(1,6)=4*(width); % общее количество байт в строке в направлении дальности (RTNB)
header(1,7)=height+4; % общий размер азимутальных строк (TNL)
header(1,8)=1129529682; % идентификатор COSAR файла
header(1,9)=1; % версия сформированного файла
header(1,10)=2; % частота дискретизации первой выборки по отношению к текущей выборке даль-
ности (1 для 330 МГц, 2 для 165 МГц, 3 для 110 МГц)
header(1,11)=0; % скорость масштабирования
header(1,12)=0; % скорость масштабирования
header(1,13)=2139062143; % зарезервированные и неиспользуемые данные
header(1,14)=2139062143; % зарезервированные и неиспользуемые данные
header(1,15)=2139062143; % зарезервированные и неиспользуемые данные
header(1,16:width1)=2139062143; % зарезервированные и неиспользуемые данные
header(2:4,1:2)=2139062143; % зарезервированные и неиспользуемые данные
header(2,3:width)=asri(3:width); % информация о верных и искаженных выборках по азимуту
header(3,3:width)=asfv(3:width);
header(4,3:width)=aslv(3:width);
header=uint32(header); % преобразование вектора к формату чисел uint32
header=swapbytes(header); % циклическая перестановка младших байт со старшими
header=header'; % транспонирование вектора
end
```

Листинг 2 – Функция реструктуризации данных РЛИ согласно формату COSAR

```
function img = rek_rli(RLI,height,width)
% RLI : комплексное радиолокационное изображение
% height : высота изображения
% width : ширина изображения

img = RLI'; % транспонирование изображения
img = uint16(img(:)); % преобразование данных в формат uint16
img = typecast(img,'uint32'); % объединение комплексной и действительной составляющих
img = reshape(img, width-2,height); % изменение порядка чтения пикселей изображения
img = swapbytes(samples); % циклическая перестановка младших байт со старшими
end
```

На рисунке 7 приведен пример сфокусированного радиолокационного изображения ERS-2 [5] по рассмотренной в [6] методике, которое преобразовано по разработанному алгоритму в формат COSAR с использованием MatLab.

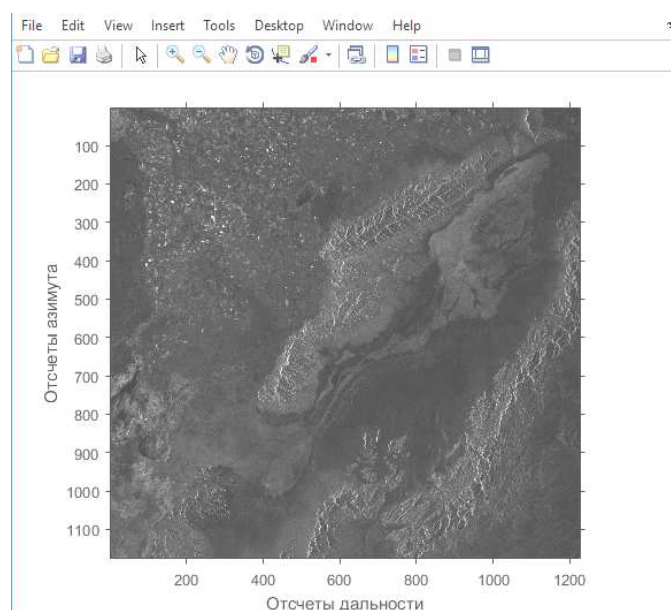


Рисунок 7. – Сфокусированное радиолокационное изображение спутника ERS-2, преобразованное в формат COSAR

Заключение. Рассмотрены особенности структуры и формата представления радиолокационных данных дистанционного зондирования Земли спутником TerraSAR. Полученные от PCA спутника данные отраженного радиосигнала в комплексном виде хранятся в файле формата COSAR. Основной файл метаданных представлен XML файлом и содержит вспомогательные данные и информацию обо всех каталогах и файлах выходного продукта. Синтезирован и реализован алгоритм представления данных в формат COSAR с использованием программного обеспечения MatLab.

ЛИТЕРАТУРА

1. Радиолокационные системы землеобзора космического базирования // В.С. Верба [и др.]. – М. : Радиотехника, 2010. – 680 с.
2. Hein, A. Processing of SAR data: fundamentals, signal processing, interferometry: Springer / A. Hein. – Berlin, 2004. – P. 292.
3. Самые точные и детальные геопространственные данные. TerraSAR-X, TanDEM-X [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://innoter.com/satellites/931>.
4. Document specifying the format of delivery, data structure, metadata information of TerraSAR-X data products [Electronic resource]. – Mode of access: http://www.intelligence-airbusds.com/files/pmedia/public/r460_9_030201_level-1b-product-format-specification_1.3.pdf.
5. Geohazard Supersites and Natural Laboratories [Electronic resource]. – Mode of access: http://eo-virtual-archive4.esa.int/search/ER02_SAR_RAW_OP/ER02_SAR_IM_OP_20110701T182202_20110701T182219_DPA_84681_0000.CEOS.tar/html.
6. Моделирование алгоритма формирования радиолокационного изображения на основе представленных в формате CEOS необработанных данных дистанционного зондирования Земли / Р.П. Богуш [и др.] // Вестник Полочкого государственного университета. Сер. С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 13–21.

Поступила 02.03.2017

FEATURES STRUCTURE AND FORMAT OF PRESENTATION OF RADAR SATELLITE DATA TERRASAR-X

V. CHERTKOV, R. BOHUSH, N. NAUMOVICH

TerraSAR-X is one of the most demanded, because it allows obtaining radar images with high spatial resolution. The basic products of the satellites are processed to the level 1B radar data. It uses a set of files and directories to describe the data. The paper discusses the features of representation of primary and secondary data satellite TerraSAR-X, describes the structure of the output product of the satellite. The algorithm of writing data into format COSAR using MatLab software is presented.

Keywords: radar image, SAR, data format, TerraSAR-X.

УДК 615.849.19

ОБРАБОТКА ТЕРМОГРАФИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ОТКРЫТОГО СЕРДЦА

*д-р техн. наук, проф. В.И. КОТОВСКИЙ,
канд. техн. наук, доц. В.В. ШЛЫКОВ, В.А. ДАНИЛОВА
(Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»)*

Выделения контуров изображений основано на вычислении градиента изображения, что определяется как векторная величина, которая показывает направление быстрого роста интенсивности оттенков цвета изображения – число градаций уровней яркости для полутонового изображения. Применение метода выделения контуров на термограммах осуществляется путем определения градиента от охлажденных до наиболее прогретых участков миокарда и наоборот, а также для обеспечения дистанционного контроля температуры в условиях искусственного кровообращения. Благодаря этому можно оценить неравномерность распределения температуры на поверхности миокарда при гипо- и гипертермии сердца. Метод дает возможность во время операции на открытом сердце определить контуры локальных участков миокарда с экстремальным значением температур. Анализ тепловых изображений поверхности открытого сердца показывает наличие взаимосвязи между состоянием миокарда и гетерогенностью (неоднородностью) термограмм. На качественном уровне анализ термограмм позволяет в процессе общего обзора изображения изучить температурный рельеф и распределение горячих и холодных зон. Количественный анализ дает возможность уточнить результаты визуального анализа термограммы и количественно оценить разницу температур исследуемого участка и окружающих тканей на поверхности.

Ключевые слова: термограмма, контур, градиент температур, изображение открытого сердца, искусственное кровообращение.

Введение. Инфракрасная термография сердца привлекала к себе внимание тем, что реализация методов неинвазивной диагностики на основе анализа термографических изображений позволяет рассчитать скорость охлаждения миокарда и определить наличие ишемических поражений на поверхности миокарда. А современные приборы и информационные технологии дают новые решения, которые могут быть полезны во время искусственного кровообращения. Разработка эффективных методов анализа термограмм сердца позволит повысить безопасность защиты миокарда.

Целью исследования является применение метода выделения контуров на термограммах и анализ тепловых изображений поверхности открытого сердца.

Реализация метода неинвазивного контроля температуры сердца даст возможность получить дополнительную важную информацию относительно температуры и сосудистой однородности во времени при охлаждении и нагреве миокарда.

Методика эксперимента. Для регистрации распределения температуры на поверхности сердца применялся тепловизор Flir ThermoCam E300, позволяющий измерить температуру в диапазоне от -20 до $+130^{\circ}\text{C}$ с точностью до $0,1^{\circ}\text{C}$.

В экспериментах использовалось сердце свиньи, в которое для выполнения гипо- и гипертермии были канюлированы коронарные сосуды в области артериального клапана. Расстояние между объектом исследования (сердцем) и прибором для измерения температуры (тепловизором) составляло $L = 20\text{--}25$ см, вес сердца $M = 500$ г.

Для контроля температуры перфузионного раствора и окружающей среды (операционного поля) использовался пирометр Optris MS Plus, который позволяет измерить температуру в диапазоне от -32 до 230°C с точностью до $0,5^{\circ}\text{C}$.

При подготовке сердца свиньи к проведению термографических измерений оно было обложено льдом и равномерно охлаждено до температуры 6°C . Температура охлажденного сердца $T_{heart1} = 6^{\circ}\text{C}$, а температура окружающей среды $T_{ext} = 19^{\circ}\text{C}$. Температура охлаждения поверхности миокарда контролировалась инфракрасным пирометром Optris MS Plus.

Сначала перфузионный раствор вводился в коронарные артерии при температуре $T_{liq1} = 36^{\circ}\text{C}$ с помощью шприца и канюлей. При этом последовательно регистрировались тепловизионные изображения миокарда с помощью тепловизора Flir ThermoCam E300. Градиент температур между перфузионным веществом и средой в эксперименте составил $T_{liq1} - T_{ext} = 36 - 19 = 17^{\circ}\text{C}$.

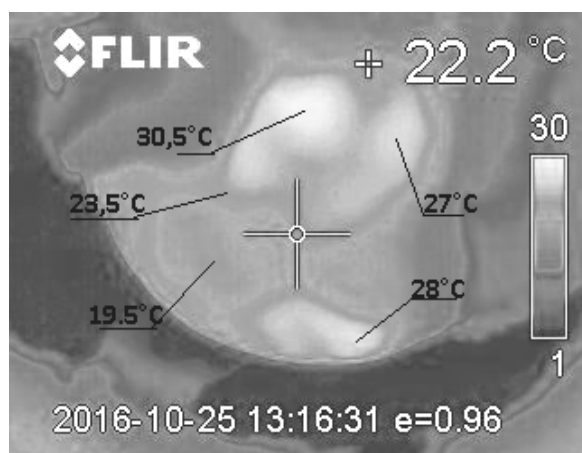
Градиент температур между сердцем и окружающей средой при максимально охлажденном сердце составлял $T_{heart1} - T_{ext} = 6 - 19 = 13^{\circ}\text{C}$, после согревания сердца до температуры $T_{heart2} = 22^{\circ}\text{C}$ составлял соответственно $T_{heart2} - T_{ext} = 22 - 19 = 3^{\circ}\text{C}$.

Затем сердце было вновь охлаждено до температуры $T_{heart1} = 6^{\circ}\text{C}$, перфузионный раствор нагрет до $T_{liq2} = 42^{\circ}\text{C}$. Таким образом, градиент температур между охлажденным сердцем и средой составил $T_{heart1} - T_{ext} = 6 - 19 = 13^{\circ}\text{C}$ и между перфузионной жидкостью и средой $T_{liq2} - T_{ext} = 42 - 19 = 23^{\circ}\text{C}$.

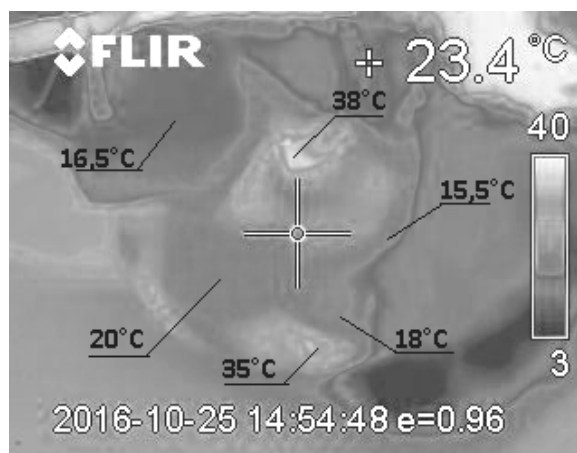
После согревания сердца с помощью прокачки перфузионного раствора через канюли в коронарные артерии миокард нагрелся до температуры $T_{heart3} = 23^{\circ}\text{C}$. Следовательно, градиент температур между сердцем и окружающей средой после согревания составил $T_{heart3} - T_{ext} = 32 - 19 = 4^{\circ}\text{C}$.

Распределение температуры на поверхности сердца при температуре среды 22,2 и 23,4 $^{\circ}\text{C}$ представлено на рисунке 1, а и б соответственно.

Далее исследовалось распределение температур на поверхности миокарда при его охлаждении от температуры сердца $T_{heart4} = 18^{\circ}\text{C}$ до температуры $T_{heart5} = 13^{\circ}\text{C}$ с помощью прокачки перфузионной жидкости, которая была охлаждена до температуры $T_{liq3} = 5^{\circ}\text{C}$. Градиент температуры между миокардом и окружающей средой для согретого сердца составил $T_{heart4} - T_{ext} = 18 - 19 = 1^{\circ}\text{C}$, а после охлаждения его до температуры $T_{heart5} = 13^{\circ}\text{C}$ соответственно $T_{heart5} - T_{ext} = 13 - 19 = 6^{\circ}\text{C}$. При этом градиент температур между перфузионной жидкостью и средой составил $T_{liq3} - T_{ext} = 5 - 19 = 14^{\circ}\text{C}$.



а

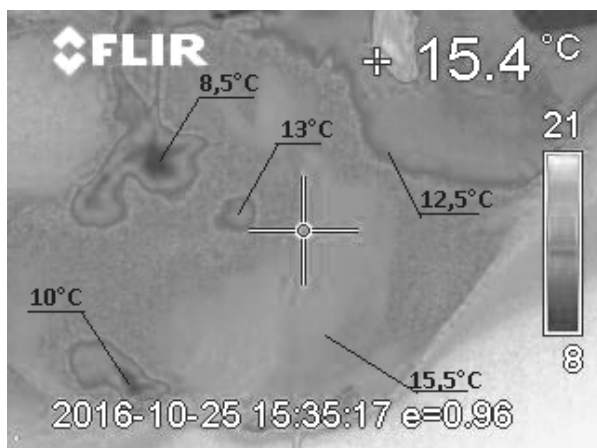


б

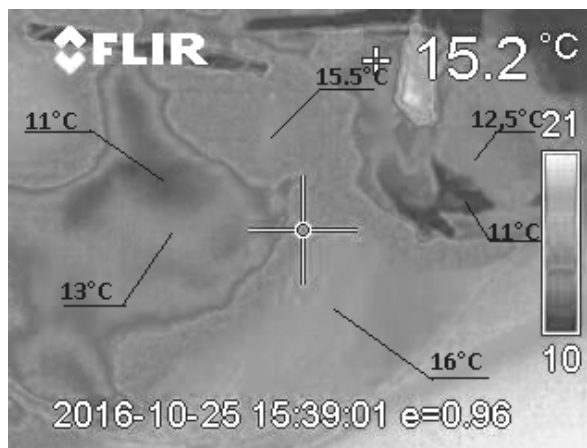
а – при температуре 22,2 $^{\circ}\text{C}$; б – при температуре 23,4 $^{\circ}\text{C}$

Рисунок 1. – Распределение температуры на поверхности сердца

Распределение температур на поверхности сердца при температуре 15,4 и 15,2 $^{\circ}\text{C}$ представлены соответственно на рисунке 2, а и б.



а



б

а – при температуре 15,4 $^{\circ}\text{C}$; б – при температуре 15,2 $^{\circ}\text{C}$

Рисунок 2. – Распределение температур на поверхности сердца

Контурирование участков термограмм. Выделения контуров изображений основано на вычислении градиента изображения, что определяется, как векторная величина, показывающая направление быстрого роста интенсивности цвета изображения. В данном случае такой величиной является двумерная функция яркости изображения:

$$\vec{g} = \text{grad } I = \left(\frac{dI}{dx}, \frac{dI}{dy} \right),$$

где I – начальная интенсивность (яркость) изображения.

Использование метода для контурирования участков термограмм с неравномерным распределением температур основано на определении контура изображения, что имеет нулевой уровень наибольшей одномерной функции LSF (LineSpreadFunction) и реализация изменений размера контура при эволюции (росте) нулевого уровня функции LSF [1].

Наиболее общим способом поиска разрывов функции яркости является обработка изображения с помощью скользящей маски – фильтра или окна (шаблона), что представляет собой некоторую квадратную матрицу, соответствующую указанной группе пикселей исходного изображения. Элементы матрицы формируют коэффициенты цифрового фильтра. Оперирование такой матрицей в любых локальных преобразованиях представляет пространственную фильтрацию изображения.

Общая схема пространственной фильтрации на основе одномерной функции LSF имеет вид, изображенный на рисунке 3 [4].

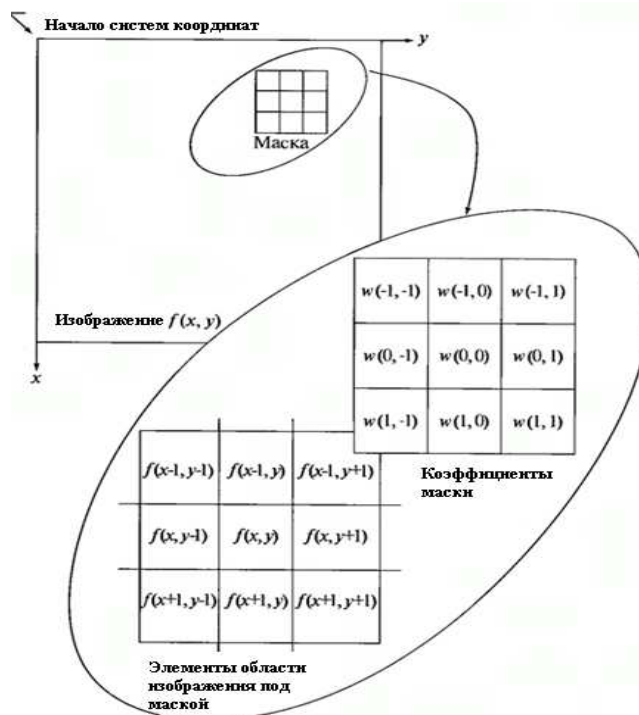


Рисунок 3. – Пространственная фильтрация на основе одномерной функции LSF

Процесс пространственной фильтрации основан на простом перемещении маски (окна) от одной точки к другой точки изображения, а отклик фильтра в каждой точке (x, y) вычисляется с использованием предварительно заданных связей. В случае линейной пространственной фильтрации на основе одномерной функции LSF отзыв задается суммой произведения коэффициентов фильтра на соответствующие значения пикселей в области, которая покрыта маской фильтра [4].

$$R = w(-1, -1)f(x-1, y-1) + w(-1, 0)f(x-1, y) + \dots \\ \dots + w(0, 0)f(x, y) + \dots + w(1, 0)f(x+1, y) + w(1, 1)f(x+1, y+1).$$

где $w(0, 0)$ – коэффициент, соответствующий значению функции $f(x, y)$, которая указывает на центровку маски относительно точки (x, y) .

По определению, градиент изображения $f(x, y)$ в точке (x, y) является вектор:

$$\nabla f = \sqrt{G_x^2 + G_y^2} = \begin{bmatrix} \frac{df}{dx} \\ \frac{df}{dy} \end{bmatrix},$$

Эта величина равна значению максимальной скорости изменения функции $f(x, y)$ в точке (x, y) , где максимум достигается в направлении вектора ∇f . Направление вектора градиента является важной характеристикой при определении направления быстрого роста интенсивности. Если обозначить $\alpha(x, y)$ как угол между направлением вектора ∇f в точке (x, y) и осью x , то можно определить направление контура в точке (x, y) , которое является перпендикулярным направлению вектора градиента в этой точке [4]:

$$\alpha(x, y) = \arctg\left(\frac{G_x}{G_y}\right).$$

Ряд методов определения контуров изображений реализовано в среде Matlab. Распознавания объектов с помощью определения контуров выполняется функцией *edge*. Суть метода заключается в поиске локальных участков с перепадами яркости. Перепады яркости определяются с помощью фильтрации по каждой из осей координат одномерным фильтром лапласиана-гаусиана. В методе Канни для классификации перепадов на «слабые» и «сильные» используется два порога – нижний и верхний. «Слабые» границы отмечаются в результирующем изображении, только если они соединены с «сильными». Для изображений, искаженных шумом, данный метод обеспечивает наилучшее обнаружение границ по сравнению с другими методами функции *edge* и методом сегментации, но требует существенно большего времени.

В идеальном случае, результатом выделения контуров является набор связанных кривых, обозначающих границы объектов, граней и отпечатков на поверхности, а также кривые отражающие изменения положения поверхностей [5].

Применение метода выделения контуров на термограммах осуществляется путем определения градиента от охлажденных до наиболее прогретых участков миокарда и наоборот, а также для обеспечения дистанционного контроля температуры в условиях искусственного кровообращения. Благодаря этому можно оценить неравномерность распределения температуры на поверхности миокарда при гипо- и гипертермии сердца [2]. Метод дает возможность во время операции на открытом сердце определить контуры локальных участков миокарда с экстремальным значением температур.

Общий подход выявления перепадов яркости на изображении можно сформулировать следующим образом. Исходное изображение представляется цифровой матрицей F с элементами $f[i], f[j]$ и подвергается линейной или нелинейной обработке для того, чтобы усилить перепады яркости. В результате образуется массив чисел G с элементами $g[i], g[j]$, описывающими изображение с подчеркнутыми изменениями величин яркости. Потом выполняется операция сравнения с порогом $T[i]$ и порогами $L[j], U[j]$ и определяется положение элементов изображения с ярко выраженными перепадами. Если $g[i] < T[i]$ и $G[j] < L[j]$, то имеет место нисходящий перепад, а при $g[i] > T[i]$ и $G[j] > U[j]$ – восходящий перепад. Величины $T[i], L[j], U[j]$ представляют собой нижнее и верхнее пороговые значения [6].

Выбор порога является одним из ключевых вопросов выделения перепадов. При слишком высоком уровне порога не будут обнаружены структурные элементы с низким контрастом. И наоборот, слишком низкий уровень порога является причиной того, что шум будет ошибочно принят за перепад. Для обозначения положения перепадов на изображении необходимо сформировать контурный перепад – массив элементов [6]. Таким образом, перепады величин яркости на изображениях термограмм являются характеристиками контуров областей объектов.

Из-за неравномерности перепадов яркости, которыми характеризуются инфракрасные изображения, невозможно применить прямую функцию контурирования без предварительной обработки изображения. При подготовке термографического изображения формируется матрица свертки, которая представляет матрицу коэффициентов, «умножается» на значение пикселей изображения для получения перепадов яркости.

Наиболее часто используемым фильтром, основанным на матрице свертки, который можно применить для обработки термографических изображений, является фильтр размытия. Матрица коэффициентов для такого фильтра заполняется по нормальному закону (закону Гаусса). Коэффициенты для матрицы Гаусса уже являются нормируемыми [7], а при обработке термографических изображений нужна еще их нормализация – необходимо исключить случай выхода значения более 255.

Начальным этапом обработки термографического изображения является представление термограммы в восьмибитовом формате градации оттенков серого, кодируемой 256 уровнями (от 0 до 255).

Информативность тепловидения и термографических исследований возможно повысить за счет линейного контрастирования изображения. Задача контрастности связана с улучшением согласования динамического диапазона изображения и фона, на котором выполняется визуализация (например, термограмма). В рассматриваемом случае, формат градаций оттенков серого на кодирование каждого отсчета термографического изображения отводится 1 байт (8 бит), поэтому уровни могут принимать одно из 256 значений.

Вторым этапом обработки является сглаживание изображения фильтром Гаусса третьего порядка, чтобы избежать неравномерного распределения яркости, это позволяет не допустить ошибок в определении нулевых перепадов. Параметры фильтра (коэффициенты маски) значительно влияют на решение задачи контурирования и регулируют влияние интенсивности на формирование контура. Контур для термографического изображения может быть плавным, малочувствительным к изменениям границ на изображении, но устойчивым к различному шуму. С другой стороны, увеличение влияния интенсивности позволит фильтру быть более чувствительным к изменениям контура изображения, при этом возрастет чувствительность к шумам.

Если первоначальное значение вектора независимых переменных равно $\vec{u}^{(0)}$, что соответствует наличию априорной информации о положении точки экстремума, на каждой итерации можно вычислить значения вектора изменений для следующей итерации по формуле

$$\vec{u}^{(k+1)} = \vec{u}^{(k)} + \Delta \vec{u}^{(k)}.$$

Таким образом, алгоритм градиентного поиска можно применить в следующем виде:

$$\vec{u}^{(k+1)} = \vec{u}^{(k)} - h \nabla f(\vec{u}^{(k)})$$

или в скалярном виде:

$$u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)} - h \frac{\partial f(\vec{u}^{(k)})}{\partial u_i} = u_i^{(k)} - h \cdot \text{grad}_{u_i} f(\vec{u}^{(k)}),$$

где ∇f – градиент функции интенсивности цвета изображения $f(x, y)$;

$h \nabla f(\vec{u}^{(k)})$ – значение шага, которое меняется автоматически в соответствии с изменением величины градиента;

h – параметр шага, который остается постоянной величиной.

Алгоритм имеет преимущество, что при приближении к точке минимума длина шага автоматически уменьшается. После каждой серии с заданным количеством шагов s_1 запоминается значение целевой функции для LSF.

Далее была реализована эволюция функции нулевого уровня с регуляцией разрастания функции LSF по средством выделения участков изображения от охлажденных областей к более прогретым и наоборот.

На рисунке 4 можно наблюдать за инициализацией разрастания каждого контура, к прогретому от более охлажденного (белая линия) и к охлажденному от более прогретого (черная линия) соответственно, а также их наложения на изображении.

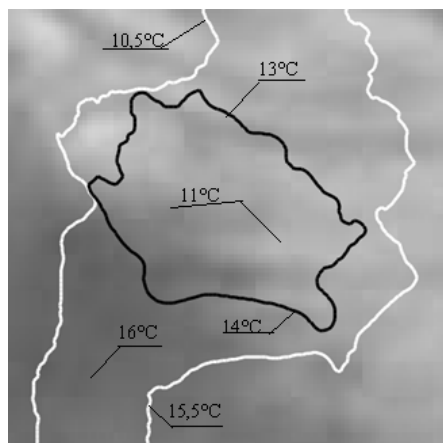


Рисунок 4. – Инициализация разрастания контуров на термографическом изображении

Выбор величины шага является весьма важным и в конечном итоге определяет работоспособность и скорость сходимости алгоритма. Если размер шага выбран слишком малым, то движение к оптимуму будет долгим из-за необходимости вычисления частных производных во многих точках. При большом шаге в районе оптимума могут возникнуть незатухающие колебания независимых переменных и снизится точность нахождения экстремума.

Анализ тепловых изображений поверхности открытого сердца показывает наличие взаимосвязи между состоянием миокарда и гетерогенностью (неоднородностью) термограмм, которые проявляются при ишемии миокарда. На качественном уровне анализ термограмм позволяет в процессе общего обзора изображения, изучить температурный рельеф и распределение горячих и холодных зон. Количественный анализ дает возможность уточнить результаты визуального анализа термограммы и количественно оценить разницу температур исследуемого участка и окружающих тканей на поверхности.

При реализации метода контурирования для изолированного сердца свиньи лучший результат выделения контура был получен уже при 200 итерации эволюции ноль-уровня.

Предложенный метод термографического дистанционного контроля температуры позволяет оценить неравномерность распределения температуры на поверхности миокарда при охлаждении и нагревании сердца, уменьшает вероятность осложнений в послеоперационный период [3].

Клиническая апробация методики.

При клинической апробации методики выделения русла коронарных сосудов с помощью термографии проводилась регистрация термограммы сердца в условиях искусственного кровообращения.

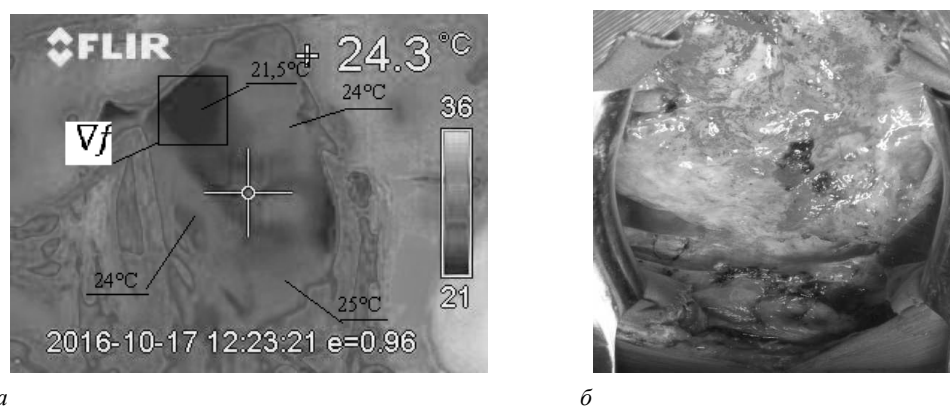
Последовательно регистрировались термографические изображения миокарда при гипотермии при температуре от 34 до 13 °С. Температура окружающей среды в операционной составляла $T_{ext} = 23$ °С и оставалась неизменной благодаря системе кондиционирования.

Через 18 мин по показаниям аппарата искусственного кровообращения температура составила $T_{ext} = 22$ °С, а по данным тепловизора температура на поверхности сердца снизилась от $T_{int1} = 34$ °С до $T_{int2} = 24$ °С.

Таким образом, градиент температуры между сердцем и окружающей средой в начале эксперимента составлял $T_{int1} - T_{ext} = 34 - 23 = 11$ °С, а через 18 мин охлаждения градиент составил $T_{int1} - T_{ext} = 24 - 23 = 1$ °С. При этом градиент температур между перфузионным раствором и окружающей средой при гипотермии равен $T_{dac} - T_{ext} = 22 - 23 = 1$ °С.

Учитывая, что точность измерения температур тепловизором составляет $\pm 0,1$ °С, величина градиента температуры больше 1 °С позволяет достоверно определить участки миокарда с неоднородным распределением температуры.

Распределение температуры на поверхности сердца при температуре 24,3°С представлено на рисунке 5 (а, б).

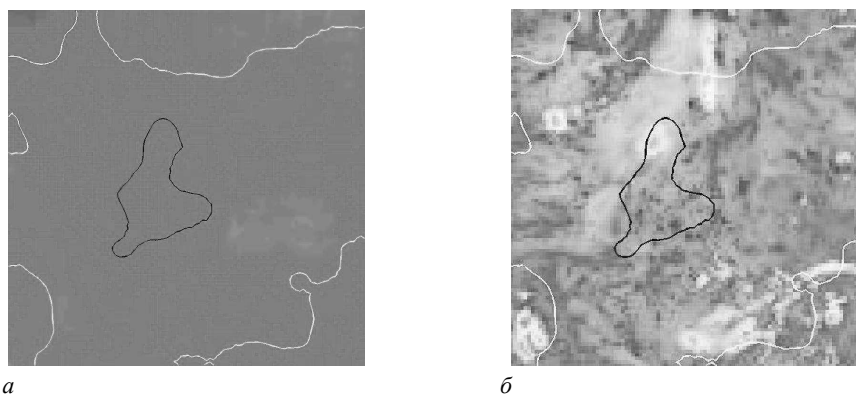


а – термограмма поверхности открытого сердца;
 б – поверхность открытого сердца в условиях искусственного кровообращения

Рисунок 5. – Распределение температуры на поверхности сердца при температуре окружающей среды 24,3 °С

На рисунке б (а, б) можно наблюдать эволюцию контура: к прогретому от более охлажденного (белая линия) и к охлажденному от более прогретого (черная линия) на поверхности открытого сердца.

Выделение контуров сосудов на термографическом изображении открытого сердца в условиях искусственного кровообращения показывает достоверные изменения функции нулевого уровня с регулирующей разрастания функции LSF, что дает возможность выделить участки от охлажденных областей к более прогретым областям на поверхности миокарда.



a – контур после применения фильтров; *б* – контур на исходном изображении

Рисунок 6. – Инициализация разрастания контуров на термографическом изображении открытого сердца в условиях искусственного кровообращения

Выводы. Распределение температуры на поверхности сердца при гипо- и гипертермии позволяет с помощью термографии определить русло коронарных сосудов только при достаточном градиенте температуры между температурой сердца и окружающей средой. При точности измерения тепловизора, равной $\pm 0,1$ °С, для достоверного определения главного русла коронарной артерии необходимо обеспечить градиент температур не менее 10 °С. При этом для четкого определения контуров коронарных сосудов на тепловизионном изображении необходимо обеспечить градиент температур между перфузионным раствором и окружающей средой не менее 10 °С при гипотермии и не менее 20 °С при гипертермии.

Для выделения контуров сосудов на термографическом изображении наиболее оптимальным является момент операции, временной интервал которого соответствует начальному этапу процесса передачи тепла от перфузионного раствора в миокард.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данилова, В.А. Метод безконтактного контроля температуры / В.А. Данилова, В.В. Шликов // Наукові Вісті НТУУ «КПІ», Сер. Приладобудування. – 2015. – Вип. 49(1). – С. 88–94.
2. Danilova, V.A. Use of Thermal Imaging for Diagnosis of Vascular Pathologies / V.A. Danilova, V.V. Shlykov // Биомедицинская инженерия и электроника : электронный науч. журн. – 2014. – № 1.
3. Khudetsky, I.U. Use of Thermal Imaging for Control of the Process Hypothermia Cardiac / I.U. Khudetsky, V.A. Danilova, V.V. Shlykov // The Polish Journal of Applied Sciences, Lomza State University of Applied Sciences. – 2015. – P. 93–96.
4. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М. : Техносфера, 2005. – 1007 с.
5. Википедия: свободная электронная энциклопедия: на русском языке [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D1%8B%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%86.
6. Прэтт, Э. Цифровая обработка изображений [Электронный ресурс] / Э. Прэтт. – Режим доступа: <http://dsp-book.narod.ru/pratt/pratt.htm>.
7. Матричные фильтры обработки изображений на русском языке [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://habrahabr.ru/post/142818>.

Поступила 20.03.2017

PROCESSING OF THE THERMOGRAPHIC IMAGE OF THE OPEN HEART

V. KOTOVSKIY, V. SHLYKOV, V. DANILOVA

Allocation of contours image based on the calculation of the gradient image, which is defined as a vector quantity, which indicates the direction of rapid growth of intensity the image colors. Application the method of selection in the thermograms circuits is carried out by determining the gradient of the most chilled to the heated areas of the myocardium, and vice versa, as well as for remote control of the temperature in the cardiopulmonary bypass. The method makes it possible during open-heart surgery to determine the contours of the local areas of the myocardium with temperature extremes. The analysis of thermal images open surface of the heart shows an association between the state of the myocardium and heterogeneity thermograms. On the qualitative level analysis of thermal images allows explore the terrain and the temperature distribution of the hot and cold zones. Quantitative analysis makes it possible to refine the results of visual analysis of thermal images and quantify the difference between the temperature of the investigated area and surrounding tissues on the surface.

Keywords: *thermogram; contour, temperature gradient; myocardium; temperature distribution; vascular pathology.*

ФИЗИКА

УДК 546.28:621.315.592

СПЕКТРЫ ОТРАЖЕНИЯ ГАММА-ОБЛУЧЕННЫХ ПЛЕНОК
ДИАЗОХИНОН-НОВОЛАЧНОГО ФОТОРЕЗИСТА*канд. физ.-мат. наук, доц. С.А. ВАБИЩЕВИЧ, Н.В. ВАБИЩЕВИЧ
(Полоцкий государственный университет);**канд. физ.-мат. наук Д.И. БРИНКЕВИЧ, канд. физ.-мат. наук А.А.ХАРЧЕНКО,
д-р физ.-мат. наук, проф. М.Г. ЛУКАШЕВИЧ, канд. физ.-мат. наук, доц. В.С. ПРОСОЛОВИЧ,
канд. хим. наук, доц. С.Д. БРИНКЕВИЧ
(Белорусский государственный университет, Минск)*

Методом измерения спектров отражения исследованы облученные γ -квантами ^{60}Co пленки позитивного фоторезиста ФП9120 толщиной 1,8 мкм, нанесенные на поверхность пластин кремния марки КДБ-10 (111) методом центрифугирования. Показано, что облучение γ -квантами ^{60}Co приводит к образованию модифицированного слоя полимера с показателем преломления, отличным от объемного. Обнаружена немонотонная зависимость показателя преломления приповерхностного слоя фоторезиста с ростом дозы облучения, обусловленная изменением молярной массы полимера в процессе эксперимента.

Ключевые слова: фоторезист, гамма-облучение, спектры отражения, показатель преломления.

Введение. Ионная имплантация широко применяется в современной полупроводниковой микро- и нанoeлектронике. Повышение степени интеграции предъявляет высокие требования к блоку операций, обеспечивающих маскирование ионного пучка. В качестве масок в процессах субмикронной и нанолитографии важную роль играют диазохинон-новолачные (ДХН) резисты [1–4]. Взаимодействие ДХН-резистов с дальним ультрафиолетом, рентгеновским и видимым излучением исследовано достаточно подробно [3]. Однако влияние γ -облучения на оптические свойства указанных материалов изучено недостаточно, хотя протекающие в резистах процессы радиационного дефектообразования могут оказывать существенное влияние на качество создаваемых приборов. Целью настоящей работы являлось изучение влияния γ -облучения на спектры отражения пленок диазохинон-новолачного резиста марки ФП9120.

Методика эксперимента. Пленки позитивного фоторезиста ФП9120 толщиной 1,8 мкм наносились на поверхность пластин кремния марки КДБ-10 с ориентацией (111) методом центрифугирования при скорости вращения 1800 об/мин. Перед формированием пленки фоторезиста (ФР) кремниевые пластины подвергали стандартному циклу очистки поверхности в органических и неорганических растворителях. Время вращения центрифуги – 40 с. После нанесения ФР на рабочую сторону пластины проводилась сушка в течение 50–55 мин при температуре 88°C. Толщина пленок фоторезиста контролировалась механическим способом на профилометре «Dectak» по 5 фиксированным точкам (центр, верх, низ, слева, справа) на каждой пластине, при этом отклонения от среднего значения по пластине для всех исследованных образцов не превышали 2%, что близко к погрешности измерений.

Спектры отражения структур фоторезист-кремний регистрировались в области прозрачности фоторезистивной пленки в диапазоне $\lambda = 210\text{--}1100$ нм однолучевым спектрофотометром PROSKAN MC-122 при комнатной температуре с разрешением не хуже 1 нм. Измерение спектров отражения производилось с помощью приставки для измерения зеркального отражения, позволяющей изменять углы падения от 15° до 90°. Перед каждым измерением производилась калибровка – измерение интенсивности света I_k проходящего через диафрагму без исследуемых объектов при нормальном падении света по отношению к диафрагме во всем исследовавшемся диапазоне длин волн. Световой поток регулировался посредством заменяемых диафрагм с разной площадью пропускного отверстия. После калибровки исследуемый образец закреплялся на обратной (неосвещаемой) стороне диафрагмы и проводились измерения интенсивности отраженного света I_0 в исследуемом диапазоне длин волн. Коэффициент отражения вычисляется автоматически спектрофотометром как $R = I_0 / I_k$. В наших исследованиях спектры отражения регистрировались при угле падения и отражения 20° к нормали. Согласно измерениям методом атомно-силовой микроскопии рельеф поверхности пленки был достаточно гладкий; средняя арифметическая шероховатость R_a поверхности пленки не превышала 2 нм.

Облучение γ -квантами ^{60}Co осуществлялось при комнатной температуре и нормальном атмосферном давлении на установке МРХ- γ -25М. Мощность поглощенной дозы составляла $0,360 \pm 0,008$ Гр/с. Интервал поглощенных доз – 6–3000 кГр.

Экспериментальные результаты и их обсуждение. В спектрах отражения необлученных полимерных пленок в области прозрачности наблюдались интерференционные полосы, обусловленные отражением от границы раздела фоторезист-кремний. Гамма-облучение приводило к смещению интерференционных максимумов и изменению расстояния между ними (рисунок 1), обусловленному трансформацией оптической длины фоторезистивной пленки при облучении. Кроме того, в γ -облученных образцах наблюдалось снижение интенсивности интерференционных полос вблизи края поглощения – в диапазоне длин волн $\lambda = 300\text{--}400$ нм. В области $\lambda > 450$ нм существенной зависимости интенсивности полос интерференции от дозы γ -облучения не наблюдалось. Указанный эффект возрастал при увеличении дозы облучения (кривые 2 и 3 на рисунке 1). Он может быть обусловлен возрастанием при γ -облучении коэффициента поглощения вблизи края фундаментального поглощения.

В области непрозрачности фоторезистивной пленки ($\lambda < 300$ нм) имел место рост коэффициента отражения при γ -облучении (кривые 1 и 2 на рисунке 1), наблюдавшийся уже при минимальной дозе облучения 6 кГр. При дальнейшем увеличении дозы до 3000 кГр коэффициент отражения практически не изменялся (кривые 2, 3 на рисунке 1).

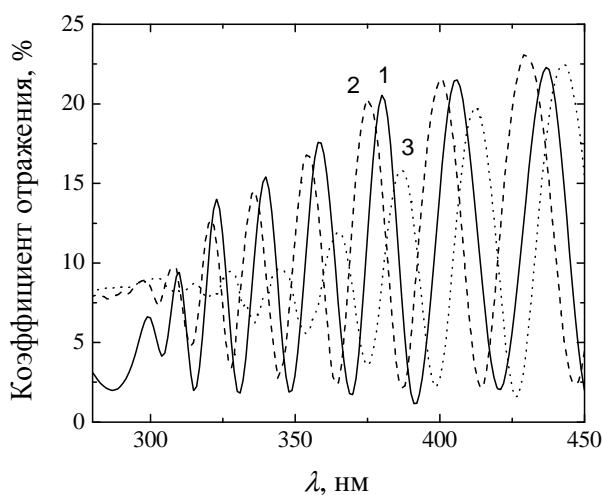


Рисунок 1. – Спектральные зависимости коэффициента отражения исходной (1) и γ -облученных (2, 3) фоторезистивных пленок на кремнии. Доза, кГр: 1 – 0; 2 – 6; 3 – 2900

На основании спектров отражения по номеру и положению максимумов/минимумов согласно формуле

$$2dn = m\lambda_m, \quad (1)$$

где n – показатель преломления фоторезистивной пленки;
 d – геометрическая толщина фоторезистивной пленки;
 m – номер максимума в спектрах отражения;
 λ_m – длина волны, соответствующая m -максимуму,

были рассчитаны зависимости $2dn$ от длины волны λ , представленные на рисунке 2.

Использовался также метод определения оптической длины $2dn$ по двум соседним максимумам согласно формуле

$$2dn = \left(\frac{1}{\lambda_m} - \frac{1}{\lambda_{m-1}} \right)^{-1}. \quad (2)$$

Однако из-за погрешности в определении длин волн максимумов λ_m и λ_{m+1} , равной $\Delta\lambda = 1$ нм наблюдался разброс рассчитанных значений оптической длины и соответственно разброс точек на зависимостях $2dn(\lambda)$ оказался существенно большим, чем при расчете $2dn$ по номеру и положению максимума. Поэтому от этого метода было решено отказаться.

Геометрическая толщина пленки d при γ -облучении в исследуемом интервале поглощенных доз практически не изменяется [4, 5], что подтверждается нашими экспериментами: изменения d при росте дозы были в пределах погрешности измерения профилометра «Dectak». Таким образом, можно считать, что на рисунке 2 отражена зависимость показателя преломления пленки n от длины волны. Зависимости для всех образцов выглядят как нормальные дисперсии $dn/d\lambda < 0$.

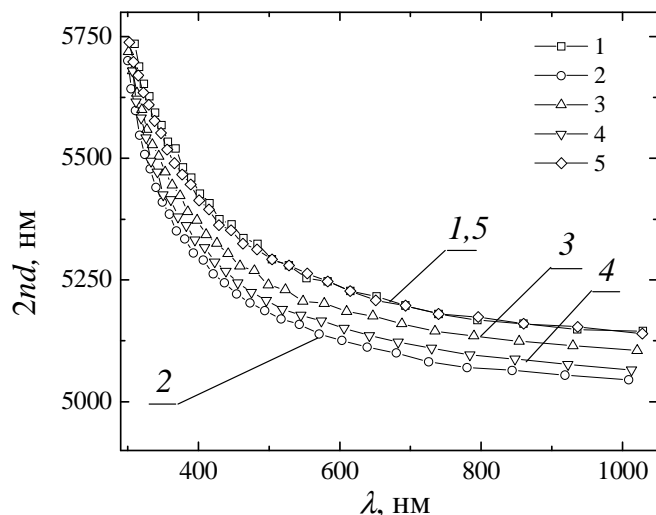


Рисунок 2. – Спектральные зависимости оптической длины исходного фоторезиста (1) и облученных (2–5) γ -квантами Co^{60} дозами D , кГр: 2 – 6; 3 – 78; 4 – 123; 5 – 2800

При γ -облучении наблюдается немонокотная зависимость оптической длины $2dn$ от дозы облучения. Облучение дозой 6 кГр приводит к уменьшению показателя преломления (оптическая длина $2dn$ снижается), наиболее выраженному в интервале $\lambda = 600\text{--}1000$ нм (кривая 2 на рисунке 2). В области ближнего ультрафиолета, когда показатель преломления исследуемых образцов резко возрастает, различия между исходным и γ -облученным образцами стираются. Поскольку при таких низких дозах существенной трансформации спектров поглощения не наблюдалось и модификации объема полимера не происходит, можно с большой долей уверенности предположить изменение в процессе облучения приповерхностного слоя полимерной пленки [6–8], приводящее к снижению показателя преломления приповерхностного слоя фоторезиста. Увеличение дозы γ -облучения свыше 70 кГр приводит к постепенному росту показателя преломления (кривые 3, 4 на рисунке 2) и при дозе 2800 кГр спектральные зависимости оптической длины γ -облученного и исходного фоторезиста практически совпадают (кривые 1, 5 на рисунке 2).

Немонокотные изменения параметров при низкодозовом гамма- и электронном облучении приповерхностных слоев полимеров наблюдались ранее в работах [9–11]. Так, авторами [9] обнаружено немонокотное изменение в области поглощенных доз 25–300 кГр степени кристалличности и поверхностного натяжения пленок полиэтилентерефталата (ПЭТФ). Вместе с тем показано [10], что прозрачность ПЭТФ имеет четко выраженный минимум при поглощенной дозе 150–200 кГр. Отмечается, что такие немонокотности обусловлены конкурирующими процессами кристаллизации цепей и образованием аморфной фазы, также окислительной деструкцией и сшиванием образцов ПЭТФ [9].

Структура и свойства поверхности принципиально отличаются от структуры и свойств в объеме полимера. Существование поверхностных сил обуславливает целый комплекс поверхностных явлений, которые в последние годы являются предметом всесторонних исследований [11]. Вблизи поверхности полимера концентрация метастабильных дефектов существенно выше объемной концентрации вследствие наличия большого количества оборванных связей (в частности, концевых групп макромолекул [12]), а также деформации валентных углов и валентных связей [13]. Кроме того, и концентрация возбужденных химических связей в приповерхностном слое выше, чем в объеме [13]. Эти дефекты возникают по кинетическим причинам в процессе изготовления полимерной пленки. Согласно [14] при наличии границы раздела (в нашем случае поверхности) возможна локализация радиационных повреждений вблизи приповерхностного слоя. Что и наблюдалось в наших экспериментах.

Отметим что, ускоренная (по сравнению с объемом) радиационная модификация приповерхностных слоев различных полимерных материалов при низкодозовых (до 50 кГр) высокоэнергетических воздействиях наблюдалась ранее в ряде работ [9, 15–17]. Причем в работах [9, 15, 16] отмечался немонокотный

характер изменения различных поверхностных свойств (смачиваемость, поверхностное натяжение и т.д.) при низкодозовом высокоэнергетическом облучении.

Показатель преломления полимеров зависит от молярной массы. Согласно формуле Лоренц–Лоренца [18], показатель преломления n изотропного вещества с молярной массой M (повторяющегося звена полимера), плотностью вещества ρ и молекулярной рефракцией R_M можно определить из выражения:

$$n^2 = \frac{M + 2R_M\rho}{M - R_M\rho}. \quad (3)$$

Видно что, увеличение молярной массы полимера приводит к уменьшению показателя преломления. При высокоэнергетическом воздействии на полимеры возможны два конкурирующих процесса – сшивка и деструкция молекул (реакции образования поперечных связей или разрыва цепи [5]). Причем, как отмечалось в [13], относительный вклад в радиационно-химические превращения полимеров процессов деструкции и сшивания может меняться в зависимости от дозы облучения. Приведенные экспериментальные данные указывают на то, что при начальной дозе облучения, равной 6 кГр, молярная масса полимера возрастает (имеет место сшивка молекул), соответственно показатель преломления уменьшается (рисунок 2, кривая 2). Затем, по мере увеличения дозы облучения доминирующим становится разрыв цепи и, соответственно, уменьшение молярной массы, что приводит к увеличению показателя преломления (рисунок 2, кривые 3, 4, 5). Следовательно, на начальной стадии γ -облучения происходит сшивание молекул, при повышении дозы – преобладает деструкция полимерных молекул.

Заключение. Таким образом, показано, что облучение γ -квантами ^{60}Co пленки позитивного фоторезиста ФП9120 на кремнии приводит к образованию модифицированного приповерхностного слоя полимера с показателем преломления, отличным от объемного. Обнаружена немонотонная зависимость показателя преломления приповерхностного слоя фоторезиста от дозы облучения: при начальной дозе 6 кГр n снижается на 3–5 %, а увеличение дозы свыше 70 кГр приводит к постепенному росту показателя преломления и при дозе 2900 кГр спектральные зависимости оптической длины γ -облученного и исходного фоторезиста практически совпадают.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (договор № Ф16-151 от 20.05.2016 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Photoimageable nozzle members and methods relating thereto : pat. US 8173031 / S.T. Weaver, R. Wells. – Publ. date 08.05.2012.
2. Применение фоторезистивных масок для маскирования ионного пучка в технологии КМОП-интегральных схем / С.В. Гранько [и др.] // Вестник Нижегородского университета. Сер. Физика. – 2001. – № 2. – С. 41–47.
3. Моро, У. Микролитография. Принципы, методы, материалы : в 2 ч. / У. Моро. – М. : Мир, 1990. – Ч. 2. – 632 с.
4. Ion implantation of positive photoresists / D.I. Brinkevich [et al.] // Russian Microelectronics. – 2014. – V. 43, № 3. – P. 194–200.
5. Грасси, Н. Деструкция и стабилизация полимеров / Н. Грасси, Дж. Скотт. – М. : Мир, 1988. – 446 с.
6. Модификация приповерхностных слоев пленок полиэтилентерефталата при облучении γ -квантами / Ю.А. Бумай [и др.] // Вестник БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2012. – № 3. – С. 41–44.
7. Radiation-induced modification of polymer surfaces / A.A. Kharchenko [et al.] // J. of Surface Investigation. X-ray, synchrotron and neutron techniques. – 2015. – V. 9, № 2. – P. 371–376.
8. Прочностные свойства структур фоторезист-кремний, γ -облученных и имплантированных ионами V^+ и P^+ / С.А. Вабишевич [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 51–57.
9. Структура пленок полиэтилентерефталата, модифицированных под воздействием ускоренных электронов / А.Н. Красовский [и др.] // Химия высоких энергий. – 2009. – Т. 43, № 2. – С. 134–142.
10. Функциональные превращения на поверхности пленок полиэтилентерефталата под действием ускоренных электронов / И.В. Васильева [и др.] // Химия высоких энергий. – 2003. – Т. 37, № 3. – С. 180–184.
11. Волынский, А.Н. Роль поверхностных явлений в структурно-механическом поведении полимеров / А.Н. Волынский, Н.Ф. Бакеев. – М. : Физматлит, 2014. – 536 с.
12. Экспериментальные методы химии высоких энергий / под общ. ред. М.Я. Мельникова. – М. : МГУ, 2009. – 824 с.

13. Веттегрень, В.И. Тепловые и флуктуационные деформации химических связей в поверхностных и граничных слоях полимеров / В.И. Веттегрень, И.И. Новак, Б.В. Кулик // Физика твердого тела. – 2005. – Т. 47, № 5. – С. 893–898.
14. Zezin, A.A. Formation and reactions of paramagnetic species in irradiated microheterogeneous copolymer systems with different electronic characteristics of components / A.A. Zezin, V.I. Feldman // Radiat. Phys. Chem. – 2002. – V. 63. – P. 75–80.
15. Electron beam induced modification of poly(ethylene terephthalate) films / I.V. Vasiljeva [et al.] // Applied Surface Science. – 2006. – V. 252, № 24. – P. 8768–8775.
16. Effect of electron irradiation on polypropylene films / S. Shahidi [et al.] // Plasma Science and Technology. – 2011. – V. 13, № 2. – P. 194–196.
17. Fang, Zhi. Surface treatment of polyethylene terephthalate films using a microsecond pulse homogeneous dielectric barrier discharges in atmospheric air/ Zhi Fang, Hao Yang, Yuchang Qiu // IEEE Transactions on Plasma Science. – 2010. – V. 38, № 7. – P. 1615–1623.
18. Аскадский, А.А. Компьютерное материаловедение полимеров / А.А. Аскадский, В.И. Кондрашенко. – М. : Научный мир, 1999. – Т. 1 : Атомно-молекулярный уровень. – 544 с.

Поступила 02.02.2017

REFLECTION SPECTRA OF Γ -IRRADIATED FILMS OF DIAZOQUINONE-NOVOLAK PHOTORESIST

**S. VABISHCHEVICH, N. VABISHCHEVICH, D. BRINKEVICH,
A. KHARCHENKO, M. LUKASHEVICH, V. PROSOLOVICH, S. BRINKEVICH**

Measuring the reflectance spectra were studied by γ -rays irradiated ^{60}Co films positive photoresist FP9120 1,8 microns thick, deposited on the surface of silicon wafers brand KDB-10 (111) by centrifugation. It is shown that irradiation ^{60}Co γ -rays leads to the formation of the modified polymer layer having a refractive index different from the bulk. A no monotonic dependence of the refractive index of the surface layer of photoresist with increasing radiation dose, due to the change of the molar mass of the polymer during irradiation.

Keywords: photoresist, gamma irradiation, reflection spectra, refractive index.

УДК 537.633.9

**ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
КОМПОЗИТА ЦТС42 – NiFe_{1,9}Co_{0,02}O₄**

*канд. физ.-мат. наук В.М. ЛАЛЕТИН, д-р физ.-мат. наук, проф. В.Н. ШУТ,
канд. физ.-мат. наук, доц. С.Р. СЫРЦОВ, В.Л. ТРУБЛОВСКИЙ
(ГНУ «Институт технической акустики НАН Беларуси»)*

Изготовлены объемные керамические композиты (1-x) ЦТС42 – xNiFe_{1,9}Co_{0,02}O₄ (x = 0,1–0,8) со связностью 3-0. С помощью рентгеноструктурного анализа подтверждено, что используемая технология позволяет получать двухфазные структуры, состоящие из ферромагнитной фазы NiFe₂O₄ (со структурой шпинели) и сегнетоэлектрической фазы ЦТС42 (с тетрагональной перовскитной структурой). Исследованы их электрофизические, сегнетоэлектрические и магнитоэлектрические характеристики в диапазоне температур 20–200°C. Полученные композиты обладают высокими магнитоэлектрическими характеристиками: коэффициент по напряжению для состава x = 0,6 равен 213 мВ/А на частоте 1 кГц и 130 В/А на резонансной частоте (380 кГц).

Ключевые слова: *магнитоэлектрический эффект, керамические композиты, диэлектрические свойства, рентгеноструктурный анализ.*

Введение. В последние годы сохраняется устойчивый интерес к магнитоэлектрикам – классу материалов, в которых сосуществуют магнитное и электрическое упорядочение [1]. Взаимодействие электрической и магнитной подсистем в этих материалах проявляется в виде магнитоэлектрического (МЭ) эффекта. Указанный эффект заключается в возникновении в образце электрического поля при приложении магнитного – прямой МЭ эффект ($E = \alpha_E H$) или магнитного поля при приложении электрического – обратный МЭ эффект ($H = \alpha_H E$). Наиболее перспективными с точки зрения практического применения являются двухфазные МЭ композиты, состоящие из двух механически связанных друг с другом фаз: магнитоэлектрической и пьезоэлектрической. Хотя МЭ эффект отсутствует в отдельных фазах, но за счет проявления механической связи между ними, он наблюдается в композитах на их основе. В качестве материалов для магнитоэлектрической и пьезоэлектрической фаз чаще всего используются различные ферриты и сегнетоэлектрические керамики (в основном ЦТС различной модификации). Достоинством объемных композитов является простота в изготовлении и отсутствие дорогостоящих компонентов. Кроме высоких МЭ коэффициентов, важным фактором, определяющим эффективность использования объемных композитов в различных электронных устройствах, являются их высокие электрофизические характеристики [2–5]. С фундаментальной точки зрения несомненный интерес представляет изучение особенностей сегнетоэлектрического поведения двухфазных МЭ композитов. Целью данной работы является исследование электрофизических и сегнетоэлектрических характеристик объемного 3-0 композита ЦТС42 – NiFe_{1,9}Co_{0,02}O₄ в практически важном диапазоне температур 20–200°C.

Методика эксперимента. Объектом исследования в данной работе являлся МЭ керамический композит со связностью 3-0, при которой частицы феррита никеля внедрены в матрицу сегнетоэлектрического цирконат-титаната свинца (1-x)ЦТС42 – xNiFe_{1,9}Co_{0,02}O₄ (x = 0,1–0,8). Наряду с высокими магнитоэлектрическими параметрами и низким коэрцитивным полем, выбор модифицированного магнитомягкого феррита никеля NiFe_{1,9}Co_{0,02}O₄ в качестве магнитной составляющей композита обусловлен его повышенным удельным сопротивлением ρ (более чем на четыре порядка выше сопротивления NiFe₂O₄) [6]. В качестве материала для пьезоэлектрической фазы композита использовалась ЦТС42 – керамика «средней жесткости» с высокими значениями пьезокоэффициентов ($d_{33} \approx 280 \cdot 10^{-12}$ Кл/Н) и температурой сегнетоэлектрического фазового перехода ($T_c = 275^\circ\text{C}$).

Объемные композиты были изготовлены путем спекания смесей однофазных компонентов. Образцы системы ЦТС42 – NiFe_{1,9}Co_{0,02}O₄ с содержанием феррита 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70 и 80 масс.% спекались в тиглях со свинецсодержащей засыпкой в течение двух часов при температуре 1240°C. Скорость охлаждения образцов не превышала 50°C в час. Образцы имели форму дисков диаметром 8,7–8,8 мм и толщиной 0,8–0,9 мм. Электроды наносили вжиганием серебряной пасты при температуре 650°C в течение 20 мин. Поляризацию материалов осуществляли при температуре 70–100°C в течение двух часов в электрическом поле 4 кВ/мм с последующим охлаждением в поле до комнатной температуры в течение получаса.

Исследования диэлектрической проницаемости ϵ и тангенса угла диэлектрических потерь $\text{tg}\delta$ проводились на автоматизированной установке, созданной на базе измерителей импеданса E7-12, E7-14 и универсального LCR-моста E7-8 (на частоте 1 кГц). Кристаллическая структура и фазовый состав исследовались с помощью рентгеновского дифракционного анализа с использованием FeK α -излучения.

Определение остаточной поляризации P_r и величины коэрцитивного поля E_k проводилось путем исследования петель гистерезиса (модифицированная схема Sawyer–Tower). МЭ эффект исследовали путем измерения напряжения, возникающего на образце при воздействии на него переменного и постоянного магнитных полей [6].

Результаты и их обсуждение. Результаты дифракционного анализа композитов различных составов и чистых исходных компонентов, представлены на рисунке 1.

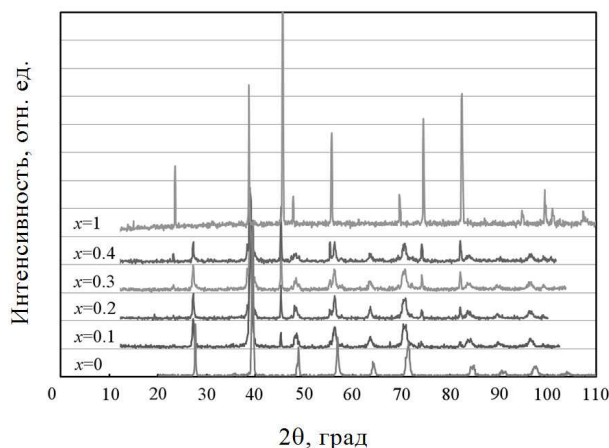


Рисунок 1. – Дифрактограммы композитов $(1-x)\text{ЦТС42} - x\text{NiFe}_{1.9}\text{Co}_{0.02}\text{O}_4$

Они свидетельствуют о том, что используемая в настоящей работе технология позволяет получать двухфазные структуры: ферромагнитная фаза NiFe_2O_4 (со структурой шпинели) и сегнетоэлектрическая фаза ЦТС42 (с тетрагональной перовскитной структурой) разделяемо сосуществует в композитах всех составов. Из дифрактограмм следует, что интенсивности пиков, соответствующих ферритной фазе, увеличиваются с ростом ее концентрации в композите. Других промежуточных или межграничных фаз в системе с помощью рентгеновского дифракционного анализа обнаружено не было. Данные электронной микроскопии подтвердили получение двухфазного композита с однородной структурой и хорошо диспергированной ферритовой фазой в матрице цирконат-титаната свинца. Размер зерен феррита $\text{NiFe}_{1.9}\text{Co}_{0.02}\text{O}_4$ растет с увеличением его содержания в композите и достигает средних значений $d \approx 2$ мкм при $x = 0,5$.

На рисунке 2 представлены температурные зависимости проницаемости ϵ и диэлектрических потерь ($\text{tg } \delta$) композитов различных составов в диапазоне температур 20–200°C.

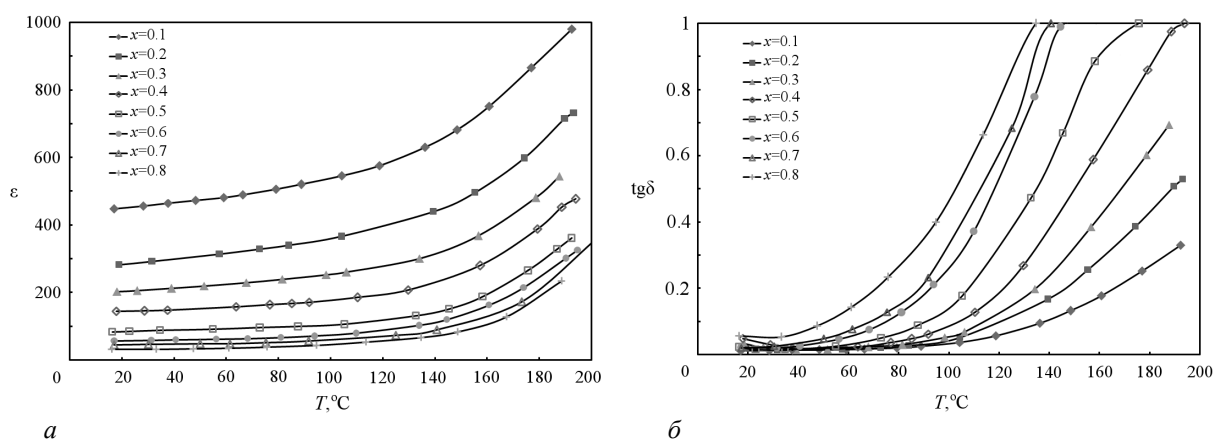


Рисунок 2. – Температурная зависимость диэлектрической проницаемости ϵ (a) и диэлектрических потерь $\text{tg } \delta$ (б) композитов $(1-x)\text{ЦТС42} - x\text{NiFe}_{1.9}\text{Co}_{0.02}\text{O}_4$ (частота 1кГц)

Для композитов всех составов характерно монотонное увеличение ϵ с ростом температуры, усиливающееся по мере приближения к температуре фазового перехода ($T_c = 275^\circ\text{C}$) в сегнетоэлектрической компоненте композита (рисунок 2, a). Разбавление сегнетоэлектрической ЦТС-керамики ($\epsilon > 10^3$) магнитной фазой с низкой проницаемостью ($\epsilon \approx 10$) приводит к уменьшению проницаемости композита во

всем исследуемом диапазоне температур (20–200°C). График изменения диэлектрической проницаемости композита при комнатной температуре (20°C) с увеличением в нем концентрации ферритовой фазы приведена на рисунке 3. Из него видно, что проницаемость композита уменьшается от $\epsilon \approx 420$ (при $x = 0,1$) до $\epsilon \approx 40$ (при $x = 0,8$). Наиболее существенное изменение характеристик композитов происходит при концентрации феррита до 30 масс. %.

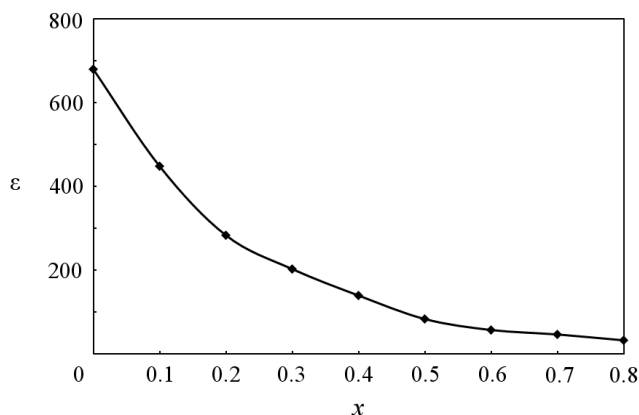


Рисунок 3. – Зависимость диэлектрической проницаемости композитов от содержания ферритовой фазы при комнатной температуре (20°C)

Как следует из рисунка 2, б, диэлектрические потери в композите монотонно увеличиваются с ростом концентрации ферритовой фазы. Следует отметить, что при концентрациях менее 40 масс. % потери в практически важном диапазоне температур 20–80°C находятся на удовлетворительно низком уровне ($\leq 0,05$). Существенный рост потерь в композите при концентрации магнитной фазы свыше 50 масс. % объясняется более высокими потерями в $\text{NiFe}_{1,9}\text{Co}_{0,02}\text{O}_4$ и проявлением перколяционного эффекта. Увеличение диэлектрических потерь с ростом температуры для всех исследуемых составов ($x = 0,1-0,8$) происходит в связи с увеличением проводимости в обоих компонентах системы.

Изменение сегнетоэлектрических характеристик ЦТС-керамики, по мере «разбавления» ее не-сегнетоактивной фазой феррита с низкой диэлектрической проницаемостью, исследовалось с помощью P - E -петель гистерезиса (на частоте $f = 50$ Гц) при комнатной температуре. Характерная P - E -петля гистерезиса (для состава $x = 0,1$) представлена на рисунке 4.

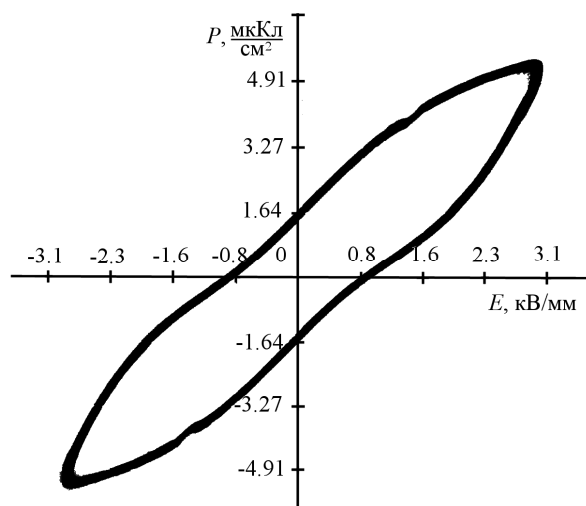


Рисунок 4. – Петля гистерезиса для композита 0,9ЦТС42 – 0,1NiFe_{1,9}Co_{0,02}O₄ (20°C, $f = 50$ Гц)

Композиты всех исследуемых составов демонстрируют отчетливое сегнетоэлектрическое поведение. С ростом количества ферритовой фазы в образце наблюдалось увеличение «сплюснутости» их петель гистерезиса. При увеличении концентрации $\text{NiFe}_{1,9}\text{Co}_{0,02}\text{O}_4$ величина остаточной поляризации P_r существенно уменьшается: от 1,64 мкКл/см² при $x = 0,1$ до 0,03 мкКл/см² при $x = 0,8$ (рисунок 5). Коэрцитивное поле E_k снижается при этом существенно меньше: с 0,85 кВ/мм до 0,44 кВ/мм соответственно.

Заметим, что именно использование в данной работе в качестве магнитной фазы $\text{NiFe}_{1.9}\text{Co}_{0.02}\text{O}_4$, с повышенным удельным сопротивлением ($\rho \approx 10^9 \text{ Ом}\cdot\text{м}$) позволило существенно уменьшить отрицательное влияние эффекта перколяции и исследовать поляризационные характеристики композитов с высоким (более 50 масс.%) содержанием ферритовой фазы.

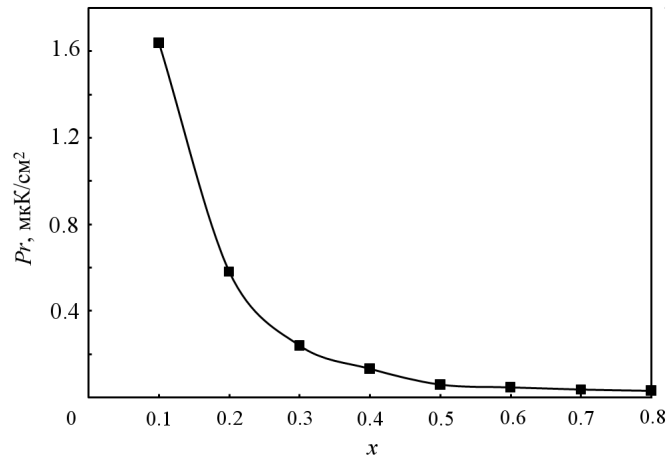


Рисунок 5. – Зависимость остаточной поляризации P_r от содержания ферритовой фазы (20°C)

Изготовленные образцы обладают высокими МЭ характеристиками[6]. Полевая зависимость МЭ коэффициента по напряжению для образца состава ЦТС42 – 40 масс.%, $\text{NiFe}_{1.9}\text{Co}_{0.02}\text{O}_4$ – 60 масс.%, демонстрирующего максимальный МЭ сигнал при продольном и поперечном эффектах, представлена на рисунке 6.

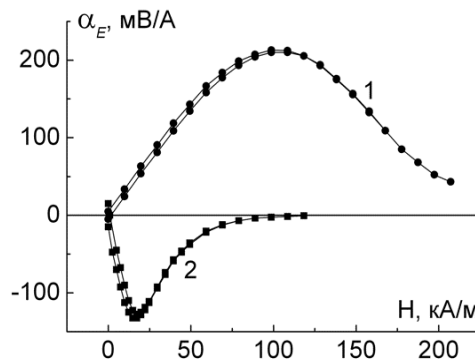


Рисунок 6. – Полевая зависимость продольного (1) и поперечного (2) МЭ коэффициентов (на частоте 1 кГц) для композита 0.4ЦТС42 – 0.6 $\text{NiFe}_{1.9}\text{Co}_{0.02}\text{O}_4$

В случае продольного эффекта (кривая 1) МЭ коэффициент по напряжению достигает максимальной величины 213 мВ/А в магнитном поле, равном 100 кА/м. В случае поперечного эффекта (кривая 2), коэффициент по напряжению принимает максимальное значение 133 мВ/А при 16 кА/м. Магнитоэлектрический сигнал на резонансной частоте 380 кГц в композите данного состава превышает низкочастотный на три порядка и достигает 130 В/А. Полевые зависимости МЭ коэффициентов, полученные для образцов других составов, имеют аналогичный вид, отличающийся величиной сигнала и значением подмагничивающего поля.

Заключение. По керамической технологии изготовлены объемные композиты $(1-x)\text{ЦТС42} - x\text{NiFe}_{1.9}\text{Co}_{0.02}\text{O}_4$ ($x = 0,1-0,8$) со связностью 3-0. С помощью рентгеноструктурного анализа подтверждено, что используемая технология позволяет получать двухфазные структуры, состоящие из ферромагнитной фазы NiFe_2O_4 (со структурой шпинели) и сегнетоэлектрической фазы ЦТС42 (с тетрагональной перовскитной структурой).

При увеличении содержания магнитной фазы ($\text{NiFe}_{1.9}\text{Co}_{0.02}\text{O}_4$) диэлектрическая проницаемость и остаточная поляризация композитов уменьшаются. При этом диэлектрические потери при комнатной температуре остаются на достаточно низком уровне ($\text{tg}\delta < 0,07$), что обусловлено высоким удельным

сопротивлением ($\rho \approx 10^9$ Ом·м) феррита никеля кобальта. В свою очередь низкий уровень потерь позволяет существенно уменьшить отрицательное влияние эффекта перколяции и проводить эффективную поляризацию композитов с высоким (более 50 масс.%) содержанием ферритовой фазы.

Полученные образцы демонстрируют высокие МЭ характеристики – коэффициент по напряжению для $x = 0,6$ составляет 213 мВ/А на частоте 1 кГц и 130 В/А на резонансной частоте, равной 380 кГц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Recent Progress in Multiferroic Magnetolectric Composites: from Bulk to Thin Films / J. Ma [et al.] // Adv. Mater. – 2011. – Vol. 23, № 9. – P. 1062–1087.
2. Mitoseriu, L. Intrinsic/extrinsic interplay contributions to the functional properties of ferroelectric-magnetic composites / L. Mitoseriu, V. Buscaglia // Phase Transitions. – 2006. – Vol. 79, № 12. – P. 1095–1121.
3. Ferroelectric Properties of Microwave Processed PZT-NiZn Ferrite Composites / R. Rani [et al.] // Integrated Ferroelectrics. – 2010. – Vol. 122. – P. 45–51.
4. Preparation and magnetolectric properties of NiFe₂O₄-PZT composites obtained in-situ by gel-combustion method / C.E. Ciomaga [et al.] // J. Eur. Ceram. Soc. – 2012. – Vol. 32 – P. 3325–3337.
5. Dielectric, magnetic and magnetolectric properties of Ni_{0,5}Zn_{0,5}Fe₂O₄+Pb(Zr_{0,48}Ti_{0,52})O₃ composite ceramics / Y. Zhang [et al.] // Ceramics International. – 2014. – Vol. 40. – P. 5853–5860.
6. Лалетин, В.М. Магнитоэлектрические свойства композиционной керамики цирконат-титанат свинца – феррит никеля / В.М. Лалетин // Материалы, технологии, инструменты. – 2014. – Т. 19, №4. – С. 56–60.

Поступила 20.03.2017

DIELECTRIC AND MAGNETOELECTRIC CHARACTERISTICS OF THE PZT42 – NiFe_{1,9}Co_{0,02}O₄ COMPOSITE

V. LALETIN, V. SHUT, S. SYRTSOV, V. TRUBLOVSKY

Bulk ceramic composites (1-x)PZT42 – xNiFe_{1,9}Co_{0,02}O₄ (x=0.1–0.8) with connectivity scheme of 3-0 were fabricated. With the help of X-ray diffraction analysis it was confirmed that the used technology allows one to obtain two-phase structures consisting of ferromagnetic phase of NiFe₂O₄ (with spinel structure) and ferroelectric phase of PZT42 (with tetragonal perovskite structure). Their electrophysical, ferroelectric and magnetolectric characteristics are studied in the temperature range 20–200°C. The resulting composites have high magnetolectric characteristics: for the composition with $x = 0.6$ the voltage coefficient is 213 mV/A at frequency of 1 kHz and 130 V/A at resonance frequency of 380 kHz.

Keywords: magnetolectric effect, ceramic composites, dielectric properties, X-ray structural analysis.

УДК 537.533

ПЛАЗМЕННЫЕ ЭМИССИОННЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Часть 2

канд. техн. наук, доц. Д.А. АНТОНОВИЧ,
д-р техн. наук, проф. В.А. ГРУЗДЕВ, П.Н. СОЛДАТЕНКО
(Полоцкий государственный университет);
д-р физ.-мат. наук, доц. В.Г. ЗАЛЕССКИЙ
(Физико-технический институт НАН Республики Беларусь, Минск)

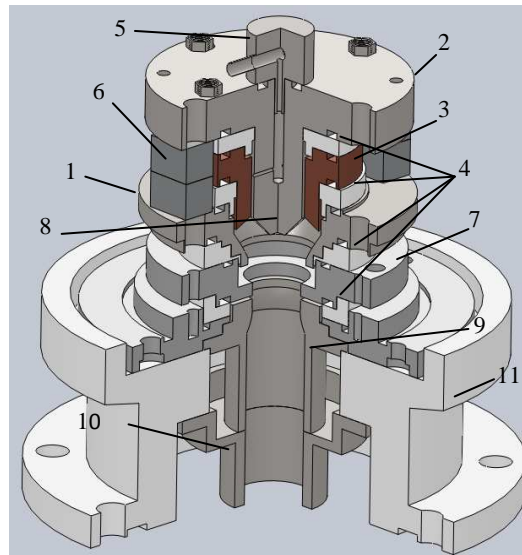
Продолжение работы, опубликованной в предыдущем номере. Представлена конструкция плазменного источника электронов со скрещенными $E \times H$ полями, способного формировать низкоэнергетичные электронные и ионные пучки для реализации плазмохимических процессов и технологий нанесения пленок и покрытий различного назначения методами попеременного или одновременного теплофизического электронного и модифицирующего ионного воздействия. Предложен ряд эскизов конструкций структур плазменных источников, перспективных к использованию для реализации комбинированного воздействия электронно-ионными пучками.

Ключевые слова: плазменный эмиттер, электродная структура, пучок заряженных частиц.

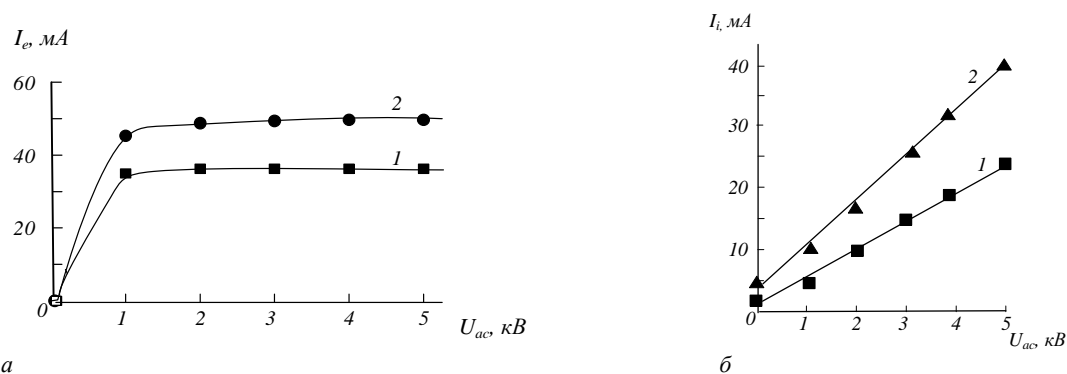
Источник низкоэнергетичных пучков заряженных частиц: электронов и ионов. Для реализации представленных в первой части данной статьи [1] технологий обработки материалов с применением низкоэнергетичных пучков заряженных частиц (с энергией до 5 кэВ) возможно применение плазменного источника электронов [2, 3], конструкция которого приведена на рисунке 1.

1 – внешний катод; 2 – внутренний катод; 3 – анод;
4 – изоляторы; 5 – штуцер для напуска плазмообразующего
газа; 6 – постоянные магниты; 7 – дополнительный
электрод; 8 – отверстие для напуска газа; 9 – расширитель
плазмы; 10 – ускоряющий электрод; 11 – фланец

Рисунок 1. – Конструкция плазменного источника электронов со скрещенными $E \times H$ полями



В данном источнике основные процессы ионизации газа происходят в области, ограниченной внешним и внутренним катодами 1, 2 и анодом 3. Магнитное поле формируется при помощи постоянных магнитов 6, расположенных между катодами 1 и 2. Такое расположение магнитов обеспечивает перпендикулярное, относительно рабочей поверхности катодов, направление вектора магнитной индукции. Это ограничивает подвижность электронов из плазмы на анод и приводит к повышению плотности плазмы в этой области. Плазмообразующий газ в разрядную структуру напускается через канал 8 в штуцере 5 и катоде 1. Применение дополнительного электрода 7, расположенного между внутренним катодом и расширителем, обеспечивает повышение эффективности извлечения и стабильность эмиссионного тока [2]. Основные характеристики данного источника и фотографии электронных и ионных пучков представлены на рисунках 2–3.



потенциал электрода-расширителя – катодный; ток разряда: 1 – 150 мА; 2 – 300 мА

Рисунок 2. – Характеристики извлечения электронов (а) и ионов (б)

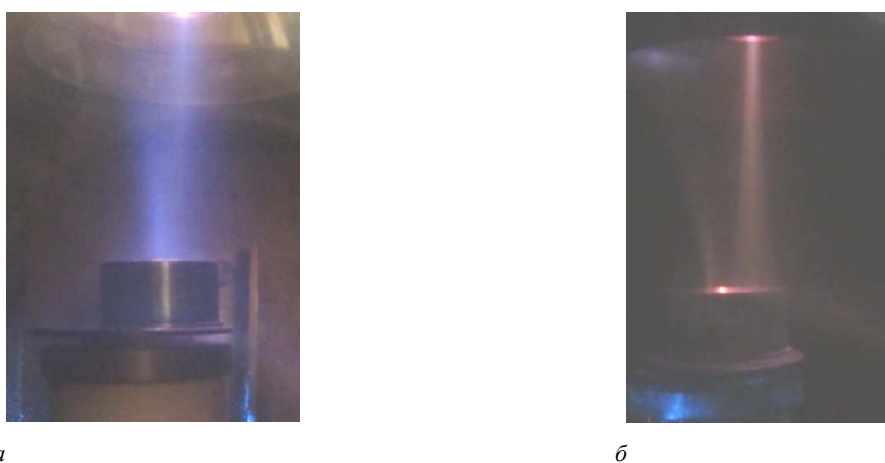


Рисунок 3. – Внешний вид электронного (а) и ионного (б) пучков заряженных частиц

Для определения наиболее перспективных режимов работы представленной конструкции низкоэнергетического источника были проведены эксперименты по реализации воздействия на образцы стали в различных режимах работы: электронном, ионном, комбинированном. Исследования процесса закалки проводились на примере инструментальной стали X12VM, применяемой для изготовления штамповой оснастки. При этом изменялись плотность тока в газоразрядной структуре и температура нагрева образцов. Наилучшие результаты были достигнуты при комбинированном режиме воздействия.

Результаты измерения твердости (HV) и микротвердости ($H_{0,19}$) стали X12VM после комбинированного режима электронно-ионной обработки представлены в таблице 1. Определение HV проводилось на неимплантированной поверхности образцов и характеризовало изменение твердости стали в процессе высокотемпературного воздействия при ионном легировании. С помощью измерения $H_{0,19}$ оценивалось упрочнение имплантированных поверхностных слоев стали.

Таблица 1. – Твердость HV и микротвердость $H_{0,19}$ термообработанной стали X12VM до и после обработки электронно-ионной ($j \approx 2 \text{ мА} \cdot \text{см}^{-2}$) при различных температурах

Сталь X12VM					
Измеряемая характеристика	Режим обработки				
	Исходное состояние	Температура электронно-ионной обработки, К			
		620	670	720	770
Микротвердость поверхности $H_{0,19}$, МПа	6100	9600–10 000	16 000–16 500	14 000–15 000	10 500–11 000
Твердость стали HV, МПа	5950	5800	5700	5300	4900

На рисунке 4 приведен график распределения микротвердости по глубине модифицированного слоя. Видно, что имплантация ионов азота при 670 К приводит к увеличению глубины модифицированного слоя до величины порядка 10–15 мкм. Микротвердость слоя существенно возрастает и достигает уровня $H_{0,19} = 16\ 000$ МПа.

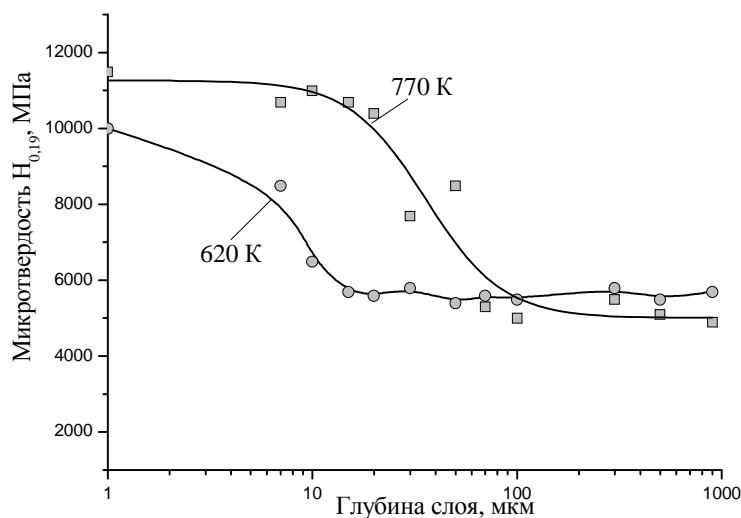


Рисунок 4. – Распределение микротвердости по глубине модифицированных слоев в стали X12VM

Конструкция источника с плазменным эмиттером для компенсации ионного пучка или совместного ионно-электронного воздействия. Одним из методов увеличения эффективности ионных источников, широко применяемых для нанесения тонкопленочных слоев металлов, полупроводников и диэлектриков, является использование высокоточных эмиттеров электронов, необходимых для поддержания процессов ионизации и обеспечения устойчивого горения разряда, компенсации как объемного заряда в пучке, так и поверхностного на формируемой пленке [4–9]. В настоящее время для этих целей используются твердотельные накаливаемые эмиттеры [4–9]. Однако в условиях интенсивных ионных потоков ресурс таких эмиттеров ограничен вследствие интенсивной ионной бомбардировки. Поэтому адаптация представленной конструкции, или разработка новых конструкций плазменных источников для системы компенсационных эмиттеров электронов является еще одним перспективным направлением применения представленных плазменных источников заряженных частиц.

В системах с плазменным эмиттером получение низкоэнергетичных компенсирующих электронных пучков возможно либо вследствие рекуперации энергии, либо за счет создания оптимальных условий для формирования таких пучков непосредственно в источнике. При формировании электронных пучков требуемой геометрии в системах с плазменным эмиттером определяющими являются положение и форма эмиттирующей плазменной поверхности. Они, в свою очередь, обусловлены параметрами плазмы, характеристиками системы формирования пучка (потенциал и геометрия формирующих электродов) и величиной приведенной напряженности поля ускоряющего электроны. Последнее определяет энергию электронов в пучке.

Поскольку условия формирования ионных пучков в известных системах магнетронного типа близки, в первую очередь по давлению, к условиям формирования электронных пучков в системах с плазменным эмиттером, то возможно создание комбинированных источников, обеспечивающих формирование как электронных, так и ионных пучков [2–5, 7]. Такие системы могут формировать скомпенсированные ионные пучки, пучки нейтральных атомов или обеспечивать попеременное или одновременное воздействия пучками обоих типов заряженных частиц, и, значит, представляют уникальный универсальный инструмент для нанесения пленочных покрытий различного назначения. В настоящее время существуют конструкции ионных источников и накальные системы, создающие компенсирующие электронные пучки [4, 5]. Однако для этих целей источники электронов с плазменным эмиттером не использовались. Кроме этого, до настоящего времени не разработаны конструкции эффективных ионных источников, совмещенных с компенсирующими электронными источниками с плазменным эмиттером.

Существует три возможных и принципиально отличающихся способа реализации компенсации электронами заряда пучка распыляющих ионов.

Первый заключается в том, что распыляемая мишень облучается одновременно ионным и электронным пучками, генерируемыми независимыми источниками ионов и электронов, использующими независимые системы электропитания и управления. В известных случаях реализации такого способа

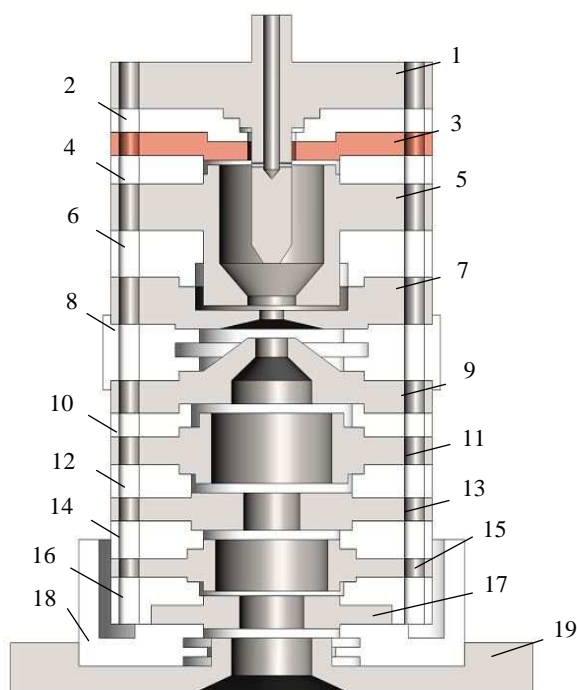
ионный пучок генерируется системой с плазменным эмиттером ионов на основе газового разряда, а электронный пучок генерируется системой на основе термоэмиссии (с термокатодом) [4–9].

Второй способ заключается в поочередно-периодическом воздействии на распыляемую мишень ионного и электронного пучков. Этот способ основан на использовании способности плазменного эмиттера излучать как ионы, так и электроны в зависимости от полярности ускоряющего напряжения. При этом частота переменного ускоряющего напряжения в электронно-ионной оптической системе с плазменным эмиттером определяется в основном, как показали известные примеры использования этого способа [4–9], временем формирования условий на мишени для образования микродуг и, в зависимости от распыляемого материала, обычно должна быть в диапазоне от единицы до десятков килогерц. Таким образом, второй способ может быть реализован на основе единой ионно-электронной оптической структуры.

Третий возможный, но практически не исследованный способ заключается в том, что он частично объединяет упомянутые первые два способа, но исключает применение электронно-оптической системы с термокатодом и обеспечивает непрерывное воздействие ионного и электронного пучков, поступающих на распыляемую мишень через единое пространство дрейфа ускоренных зарядов.

Для реализации этого (третьего) способа распыления материала совмещенным ионно-электронным пучком были разработаны три варианта конструкции их электродных структур (рисунки 5–7).

На рисунке 5 показана схема электродов для формирования последовательно (вдоль оси) двух плазменных эмиттеров: электронного и ионного. Плазма, через часть поверхности которой осуществляется отбор (эмиссия) электронов, формируется в объеме, ограниченном внутренними поверхностями стержневого катода 1, цилиндрического катода 5, вспомогательного анода 3 и основного анода 7. Указанные электроды разделены изоляторами 2, 4 и 6. Катоды 1 и 5 являются наконечниками постоянного магнита, создающего между ними магнитное поле, которое способствует осцилляции вторичных γ -электронов с катодов в пространство формирования плазмы. Электроды 7 и 9 образуют промежуток ускорения электронов, где формируется поверхность плазмы, эмитирующая электроны. Изолятор 8 должен быть рассчитан на напряжение, на 50–100 В, превышающее напряжение ускорения ионного пучка. Это напряжение по величине более 2–3 кВ использовать нецелесообразно, так как интенсивность распыления материалов ионами с дальнейшим его увеличением возрастает незначительно.



1 – стержневой катод; 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 – изоляторы; 3 – вспомогательный анод; 5 – цилиндрический катод; 7 – основной анод; 9, 13, 17 – катоды; 11, 15 – аноды; 19 – ускоряющий электрод

Рисунок 5. – Электродная структура для формирования последовательно (вдоль оси) двух плазменных эмиттеров: электронного и ионного

Электроды 9, 11, 13, 15 и 17 образуют газоразрядную структуру, формирующую плазму, являющуюся источником распыляющих ионов. Эта структура состоит из двух соединенных последовательно (вдоль оси) газоразрядных ячеек «пеннинговского» типа [4]. Элементы этой структуры 10, 12, 14 и 16 являются изоляторами; элементы 11 и 15 – анодами разрядных ячеек; элементы 9, 13 и 17 – катодами, которые одновременно являются полюсными наконечниками постоянных магнитов, обеспечивающих осцилляцию электронов между катодами второй газоразрядной структуры. Одновременно с этим маг-

нитное поле, формируемое катодами 9, 13 и 17, образует некоторую магнитную фокусирующую систему для ускоренного электронного пучка, распространяющегося вдоль оси второй газоразрядной структуры до выхода из источника ионно-электронного пучка в технологическую камеру.

Между электродами 17 и 19 прикладывается напряжение, ускоряющее ионы до требуемой технологией энергии распыляющих ионов. Одновременно в этом же промежутке между электродами 17 и 19 осуществляется торможение пучка электронов, ускоренных в промежутке между электродами 7 и 9. Эмитирующая ионы поверхность плазмы, формирующаяся между электродами 17 и 19, определяет траектории как ионов, так и электронов в пространстве дрейфа электронно-ионного пучка до распыляемой мишени, а значит и определяет распределение плотностей ионного и электронного тока по поверхности мишени.

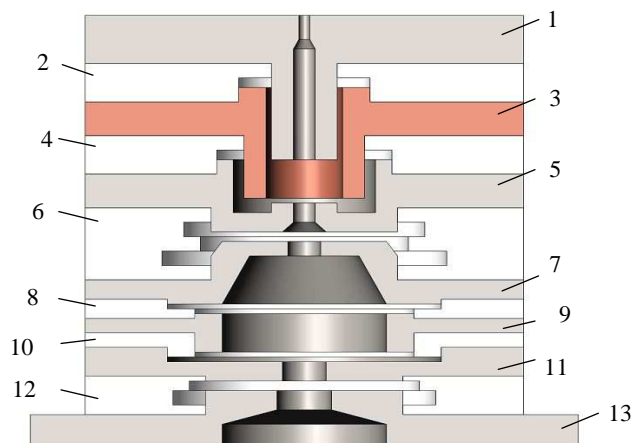
Напуск рабочего газа в ионно-электронный источник осуществляется через отверстия в катоде 1, откачка газа из источника – через отверстие в электроде 19. Формирующийся поток газа создает во всей электродной структуре 1–19 источника определенное распределение давления газа, зависящее как от потока напускаемого газа, так и отдаваемое в технологической камере. Последнее определяет также длину дрейфа ионного пучка в технологической камере с приемлемой потерей энергии и импульса пучка ионов.

При давлении в технологической камере порядка 10^{-2} Па приемлемая длина дрейфа ионно-электронного пучка составляет около 0,1–0,2 м, что обычно достаточно и для технологических целей. Оценочные расчеты показали, что при таком давлении в технологической камере (10^{-2} Па) давление в верхней части второй газоразрядной структуры достигает величины порядка 10^{-1} Па. Можно предполагать, что при таком давлении во второй газоразрядной структуре необходимые параметры электронного пучка из первой газоразрядной структуры (электроды 1–8) будут определяться не только условиями заряда мишени ионным пучком источника, но и условиями инициирования разряда во второй разрядной камере и достижения в ней необходимых параметров плазмы.

На рисунке 6 показана электродная структура источника с совмещенным ионным и электронным пучками, отличающаяся от предыдущей структуры (рисунок 5) тем, что в первой газоразрядной ячейке для формирования эмитирующей плазмы реализуется отражательный разряд пеннинговского типа с полым катодом. Эта ячейка образована полым катодом 1, анодом 3 и катодом 5. Катоды 1 и 5 одновременно являются полюсными наконечниками постоянного магнита и формируют в разрядной ячейке магнитное поле с осевой магнитной индукцией. Этот тип разряда достаточно хорошо изучен и эффективно применяется в плазменных источниках электронов и ионов.

1 – полый катод; 2, 4, 6, 8, 10, 12 – изоляторы;
3, 9 – аноды; 5, 7, 11 – катоды;
13 – ускоряющий электрод

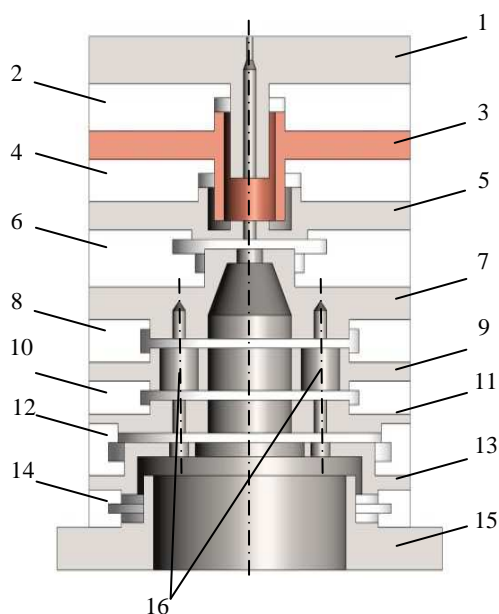
Рисунок 6. – Электродная структура источника с совмещенным ионным и электронным пучками



Вторая газоразрядная ячейка также является модифицированной ячейкой пеннинговского типа и образована катодами 7, 11 и анодом 9. Катоды 7 и 11 являются также полюсными наконечниками постоянного магнита, формирующими магнитное поле в ячейке с осевой индукцией. Применение естественной газоразрядной ячейки для формирования второго плазменного объема (в отличие от структуры, представленной на рисунке 5) обусловлено тем, что из первого плазменного объема (отражательного разряда с полым катодом) будет осуществляться отбор ионов и с помощью ускоряющего электрода 7 формироваться ионный пучок, часть которого будет использована для инициирования разряда во второй разрядной ячейке с постоянным давлением газа, а другая часть ионов пучка, пройдя через систему электродов 7, 9, 11, 13, попадет на распыляемую мишень. При этом длина дрейфа ионного пучка возрастает, в сравнении с источником (см. рисунок 5), и возникает необходимость его сокращения, в частности за счет уменьшения осевой длины второго плазменного образования, которое в источнике рассматриваемо-

го типа является эмиттером электронов. Ускорение электронного пучка осуществляется электродом 13. Элементы 2, 4, 6, 8, 10 и 12 являются изоляторами между электродами источника. Изолятор 6 должен выдерживать приложение к электродам 5 и 7 полного ускоряющего ионы пучка напряжения. Очевидно, что рассмотренная электродная структура (рисунок 6) может работать и по принципу, рассмотренному для электродной структуры (см. рисунок 5). В этом случае изолятор 12 должен быть таким же высоковольтным, как и изолятор 6.

На рисунке 7 показана одна из возможных схем электродной структуры ионно-электронного источника с параллельным относительно оси источника расположением и не связанными между собой (как в источниках на рисунках 1 и 2) газоразрядных объемов, эмитирующих электроны и ионы. Смешивание электронного и ионного пучков в этом источнике должно происходить во внутреннем объеме электрода 15 и в области дрейфа пучка от источника до распыляемой мишени под действием реальной компоненты напряженности электрического поля, обеспечиваемой электродами 13 и 15, а также объемным зарядом ионного пучка.



1 – полый катод; 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 – изоляторы;
3 – анод; 5 – катод; 7 – ускоряющий электрод;
9, 11, 13, 15 – электроды, формирующие магнитную
фокусирующую систему, 16 – газоразрядные ячейки

**Рисунок 7. – Электродная структура
ионно-электронного источника с параллельными
(относительно оси источника) не связанными
между собой газоразрядными объемами,
эмитирующих электроны и ионы**

Электродная структура, включающая полый катод 1, анод 3 и катод 5, образует газоразрядную ячейку пеннинговского типа с полым катодом и обеспечивает эмиссию ионов в ускоряющий промежуток между катодом 5 и ускоряющим электродом 7. Давление газа в области осевых отверстий в электродах 7, 9, 11, и 13 вследствие их достаточно большого диаметра оказывается почти таким же низким, как и в технологической камере. Поэтому предполагается, что плазма в этой области практически не образуется и внутренние стенки осевых отверстий в электродах 7, 9 и 11 образуют электростатическую линзу, оказывающую некоторое фокусирующее действие на ионный пучок и ограничивающую расходимость пучка. Кроме этого, периферийные отверстия в электродах 7, 9 и 11 образуют газоразрядные ячейки 16 пеннинговского типа, расположенные соосно с главной осью источника, равномерно по окружности вокруг главной оси. В масштабе, использованном в рисунке 3, их количество может достигать десяти. Электроды 7 и 11 являются, как и электроды 1, 5, полюсными наконечниками постоянных магнитов. Эта мультиячейчатая газоразрядная структура обеспечивает эмиссию электронов в ускоряющие их промежутки между электродами 11 и 13. После ускорения дискретные электронные пучки смешиваются благодаря электрическим полям с ионным пучком. При необходимости в реальных источниках ионно-электронного пучка может быть использована отдельная система напуска рабочего газа в мультиячейчатую разрядную систему, а также электромагнитная система, установленная ниже электрода 15, для управления и оптимизации смешивания дискретных электронных пучков с ионным, в частности, по распределению плотностей ионного и электронного тока на мишени.

Заключение. Представленные конструкции плазменных источников заряженных частиц, различного технологического назначения, показаны как наиболее перспективные, отличные от традиционных, области их применения. Применение таких источников, а также разработка новых конструкций на их основе будут способствовать повышению эффективности ионно-плазменного нанесения покрытий раз-

личного назначения и качества наносимых покрытий, а также откроют возможности электронно-лучевого ассистирования модификации поверхности материалов ионными пучками и получения покрытий с новыми свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Плазменные эмиссионные системы для электронно-лучевых технологий. Часть 1 / В.Г. Залесский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 37–44.
2. Антонович, Д.А. Электронно-ионный источник для реализации комбинированного воздействия на поверхность / Д.А. Антонович, В.А. Груздев, В.Г. Залесский // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2014. – № 4. – С. 113–118.
3. Антонович, Д.А. Применение низкоэнергетичных пучков заряженных частиц для реализации комбинированного воздействия на материалы / Д.А. Антонович, В.Г. Залесский, П.Н. Солдатенко // Перспективные материалы и технологии : сб. материалов междунар. симп. – Витебск, 2015. – С. 216–218.
4. Плазменные эмиссионные системы с ненакаливаемыми катодами для ионно-плазменных технологий / В.Т. Барченко [и др.] ; под общ. ред. В.Т. Барченко // СПб. : Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2011. – 220 с.
5. Семенов, А.П. Пучки распыляющих ионов: получение и применение / А.П. Семенов. – Улан-Удэ : Изд-во БНЦ СО РАН, 1999. – 207 с.
6. Исследование влияния ионно-электронной эмиссии на характеристики электронного источника с плазменным катодом / С.В. Григорьев [и др.] // Плазменная эмиссионная электроника : тр. II Междунар. семинара, Улан-Удэ, 23-30 июня 2009 г. / БНЦ СО РАН. – Улан-Удэ, 2009. – С. 37–44.
7. Гаврилов, Н.В. Формирование пучка ионов, извлекаемых из плазмы тлеющего разряда / Н.В. Гаврилов, Д.Р. Емлин // ЖТФ. – 2000. – Т. 70, № 5. – С. 74–81.
8. Никулин, С.П. Влияние ионной эмиссии на характеристики тлеющего разряда с полым катодом / С.П. Никулин // ЖТФ. – 2000. – Т. 70, № 10. – С. 122–124.
9. Кузьмичёв, А. И. Магнетронные распылительные системы / А. И. Кузьмичёв. – Киев : Аверс, 2008. – Кн. 1 : Введение в физику и технику магнетронного распыления. – 244 с.

Поступила 16.03.2017

PLASMA-EMISSION SYSTEMS FOR ELECTRON-BEAM TECHNOLOGIES

Part 2

D. ANTONOVICH, V. GRUZDEV, P. SOLDATENKO, V. ZALESSKI

Continuation of the work published in the previous issue. The design of a plasma electron source with crossed $E \times H$ fields capable of forming low-energy electron and ion beams for the realization of plasma-chemical processes and technologies for depositing films and coatings for various purposes by alternating or simultaneous thermophysical electronic and modifying ionic effects is presented. A number of sketches of designs of structures of plasma sources promising for use for realization of combined action by electron-ion beams are proposed.

Keywords: plasma emitter, electrode structure, charged particle beam.

УДК 539.21

СКАНИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ СТРУКТУР И НЕФТЯНЫХ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ АТОМНО-СИЛОВОЙ МИКРОСКОПИИ

*канд. тех. наук, доц. А.В. ВАСЮКОВ,
канд. физ.-мат. наук, доц. С.А. ВАБИЩЕВИЧ, В.А. КРИШТОПА
(Полоцкий государственный университет)*

Работы, выполненные с помощью атомно-силового микроскопа NT-207, показали большие возможности исследования поверхности веществ методами сканирующей зондовой микроскопии. Атомно-силовая микроскопия может применяться для исследования поверхности веществ в широком диапазоне: от нефтяных дисперсных систем (гудрон, битум) до поверхности любых твердотельных структур. Атомно-силовой микроскоп NT-207 позволяет измерять шероховатость исследуемой площади поверхности, изучать рельеф поверхности, измерять размеры кластеров и наночастиц, определять физико-механические свойства материала.

Ключевые слова: *атомно-силовая микроскопия, шероховатость, морфология поверхности, фоторезист, гудрон, нефтяной кокс, керамика, золото, сапфир, наночастицы, дисперсные системы, монокристаллы, поликристаллы, металлы.*

Введение. По мнению известного швейцарского экономиста Клауса Мартина Шваба, наша цивилизация уже вступила в четвертую промышленную революцию. Наиболее востребованными в XXI столетии будут междисциплинарные исследования и разработка технологии в области физики, химии, цифровой информатики, биологии. Перспективным направлением также является разработка новых материалов, получаемых по инновационным технологиям, базирующимся на новых научных принципах, что подразумевает развитие современных физико-химических методов анализа. Особую значимость на современном этапе приобретает возможность проведения исследований в нанодиапазоне, что обусловлено развитием таких технологий, как бионанотехнологии, военные нанотехнологии, наноэлектроника, супрамолекулярная химия, разработка гибридных наноматериалов, наножидкостей и др.

К наиболее современным и перспективным методам исследования поверхности твердого тела относятся сканирующая зондовая микроскопия (СЗМ) и ее основные виды, нашедшие наиболее широкое применение в научных исследованиях: сканирующая туннельная микроскопия (СТМ), атомно-силовая микроскопия (АСМ), электросиловая микроскопия (ЭСМ), магнитно-силовая микроскопия (МСМ), ближнепольная оптическая микроскопия (БОМ) [1].

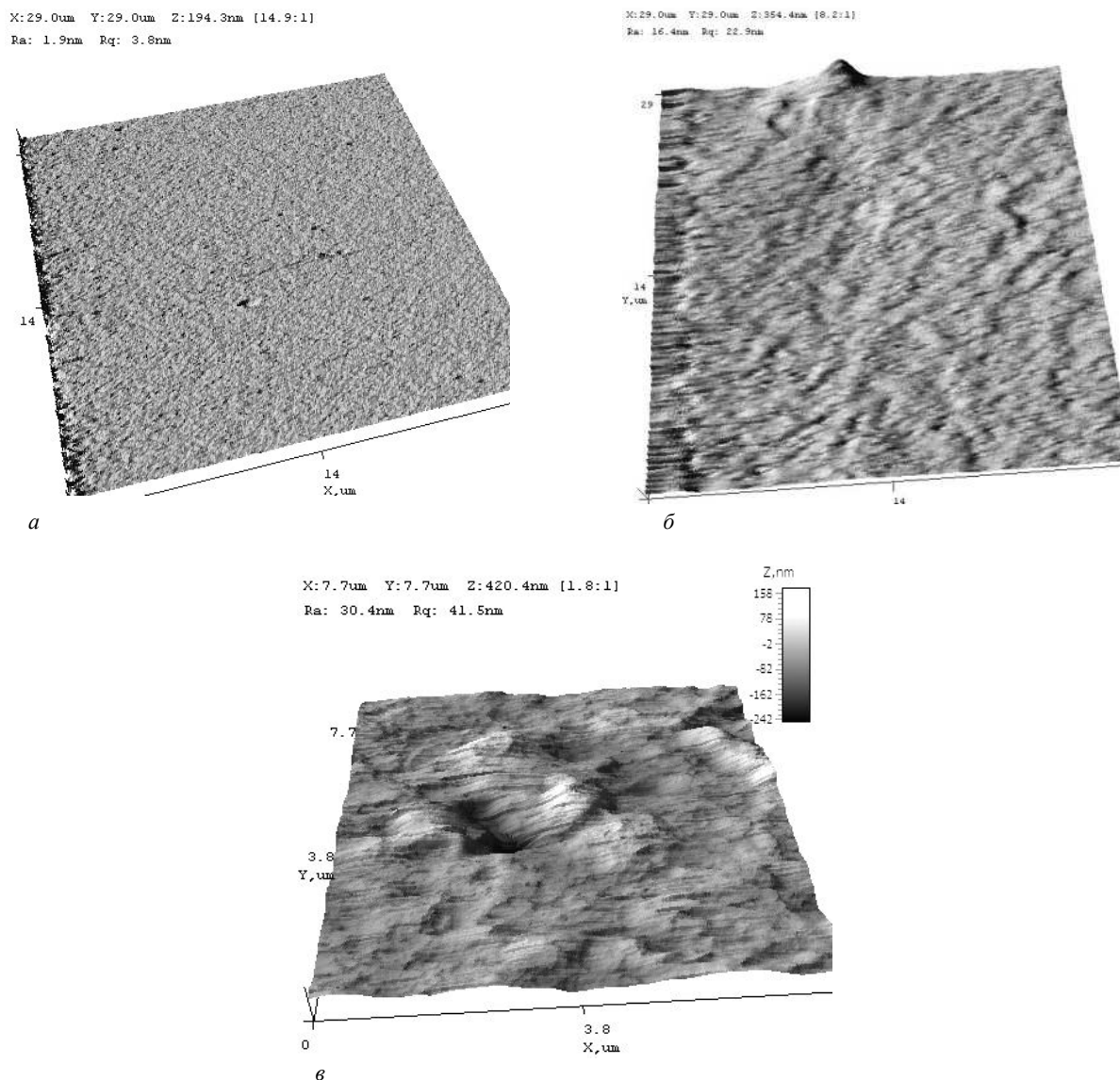
Цель настоящей работы состоит в анализе возможности применения метода АСМ для широкого класса материалов.

Методика эксперимента и обсуждение результатов исследований. Морфология поверхности исследовалась методом атомно-силовой микроскопии при комнатной температуре в полуконтактном резонансном режиме на приборе NT-207 (производство ОДО «Микротестмашины», г. Гомель). Использовались кантилеверы с радиусом закругления менее 10 нм. При исследовании нефтяных дисперсных систем, в силу их пластичности, применялись специальные методы подготовки и исследования образцов. Исследуемые поверхности образцов представлены в 3D-изображении, полученном с помощью программного обеспечения АСМ NT-207.

В современной полупроводниковой микро- и наноэлектронике для модификации электрофизических свойств материалов широко используется ионная имплантация. При этом повышение степени интеграции предъявляет высокие требования к блоку операций, обеспечивающих маскирование ионного пучка. В качестве масок в процессах субмикронной и нанолитографии важную роль играют диазохинон-новолачные (ДХН) резисты [2]. Известно [2–6], что технологическая обработка полупроводниковых материалов и структур, применяемая на различных этапах производства полупроводниковых приборов, способна существенным образом повлиять на физико-механические свойства самих материалов и наносимых на них пленок. По этой причине возникает необходимость исследования поверхности и приповерхностной области полупроводников и адгезионных свойств пленок. Согласно проведенным исследованиям [5, 6] метод АСМ может успешно применяться для решения указанных задач.

На рисунке 1, а показано изображение поверхности позитивного фоторезиста ФП9120, нанесенного с помощью центрифугирования на полированную поверхность монокристаллического кремния. В данном случае фоторезист является защитной маской при ионном легировании кремния 3-валентными

ионами бора. Проведенные исследования поверхности позволили сделать выводы о модификации свойств фоторезиста под влиянием ионной имплантации в зависимости от дозы облучения и адгезионных свойств фоторезиста.



а – фоторезист ФП9120; б – гудрон; в – прокаленный нефтяной кокс

Рисунок 1. – 3D-изображения поверхности образцов различного строения

Возможность использования метода АСМ для исследования свойств нефтяных дисперсных систем анализировалась на примере поверхности гудрона (рисунок 1, б) и прокаленного нефтяного кокса (рисунок 1, в).

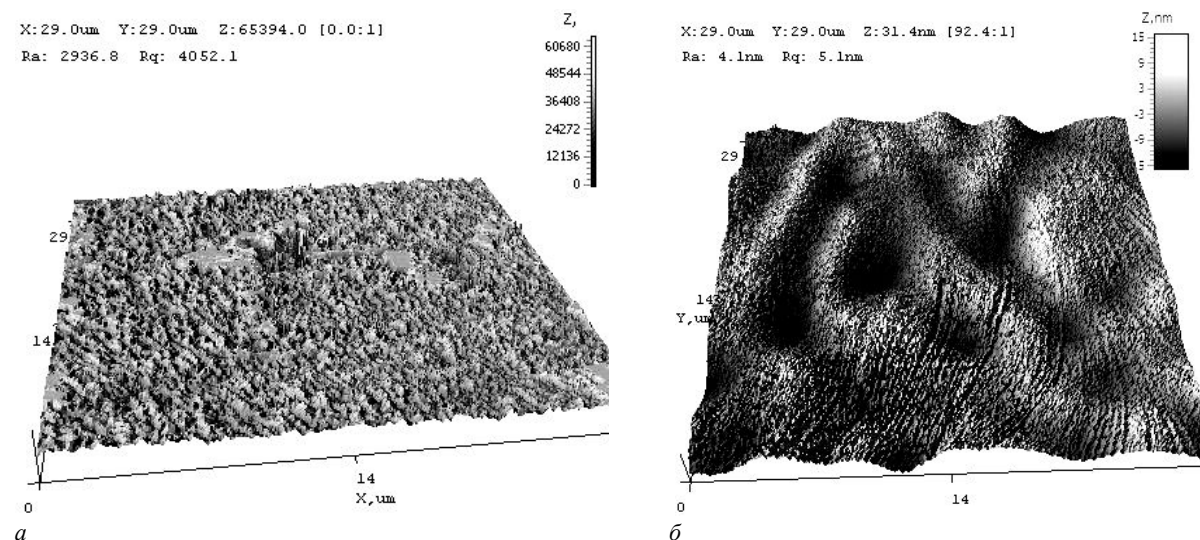
Гудрон относится к нефтяным дисперсным системам продуктам переработки нефти. Гудрон – вязкая жидкость, имеет низкую температура плавления в диапазоне от 12 до 55 °С. Определить структуру поверхности гудрона при комнатной температуре прямыми методами АСМ не представлялось возможным, поскольку материал не сохранял форму нанесения, растекался, поэтому для проведения эксперимента была применена технология Ленгмюра-Блоджетт.

Нефтяной кокс – это твердое вещество плотностью 1400–1500 кг/м³ с высоким содержанием углерода [7]. Поверхность нефтяного кокса слоиста и имеет блочное построение и пористость. Блоки кокса сформированы в виде кластеров разных размеров, сливающихся друг с другом. Для поверхности прокаленного нефтяного кокса характерна большая упорядоченность поверхности, сформированной из более крупных блоков, характеризующихся плавностью граней. Блоки кокса сформированы в виде крупных

наноразмерных структур, имеющих выраженную границу относительно друг друга. Методом АСМ (рисунок 1, в) хорошо выявлялись вскрытые поры на поверхности материала [8].

3D-изображения, представленные на рисунке 1, б, позволяют обнаружить на поверхности дисперсных систем наличие соприкасающихся фаз, между которыми образуются неоднородные зоны [9–11], состоящие из жидкостных и газовых наполнений. Внутри этих неоднородных зон происходят изменения локальных физико-химических свойств системы, которые и определяют характер рисунка поверхности.

Представленные на рисунке 2 изображения в 3D-формате позволяют исследовать поверхность кристаллических веществ – поликристаллов и монокристалла.



a – керамики TiO_2 ; *б* – сапфира

Рисунок 2. – 3D-изображения поверхности

На рисунке 2, *a* показано изображение поверхности керамики, полученной из мелкодисперсного порошка TiO_2 , спрессованного и прокаленного при температуре 1000°C . На рисунке хорошо виден характерный рельеф поверхности.

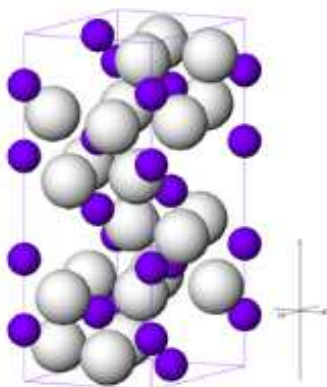


Рисунок 3. – Сапфир. Атомная структура [13]

В качестве образца для исследования поверхности сапфира был взят монокристалл полированного сапфира, применяемый как подложка при изготовлении полупроводниковых интегральных микросхем. 3D-изображение поверхности сапфира представлено на рисунке 2, б. Монокристаллы сапфира – корунда (рисунок 3) – относятся к дитригонально-скаленоэдрическому классу тригональной симметрии C (L_33L_23PC) с элементами симметрии: зеркально-поворотной осью шестого порядка (осью инверсии третьего порядка); перпендикулярными к ней тремя осями второго порядка; тремя плоскостями симметрии, перпендикулярными к осям второго порядка и пересекающимися по оси высшего порядка – центром симметрии. Кристаллическая решетка – Al_2O_3 образована ионами Al^{3+} и O^{2-} [12].

Морфология сапфира является следствием условий роста и особенностей структуры. Для кристаллов сапфира свойственен дендритный рост. Замечено, что при росте кристалл продвигается не гранью, а ступеньками или зубцами. Увеличение степени переохлаждения расплава способствует преобладающему росту вершин ромбоэдра. Такая кинетика приводит к дендритному росту. На поверхности сапфира выявляются неровности высотой до 17 нм (см. рисунок 2, б).

На рисунке 4 представлено 2D-изображение поверхности золотой контактной площадки и профиль по линии сканирования 1-2.

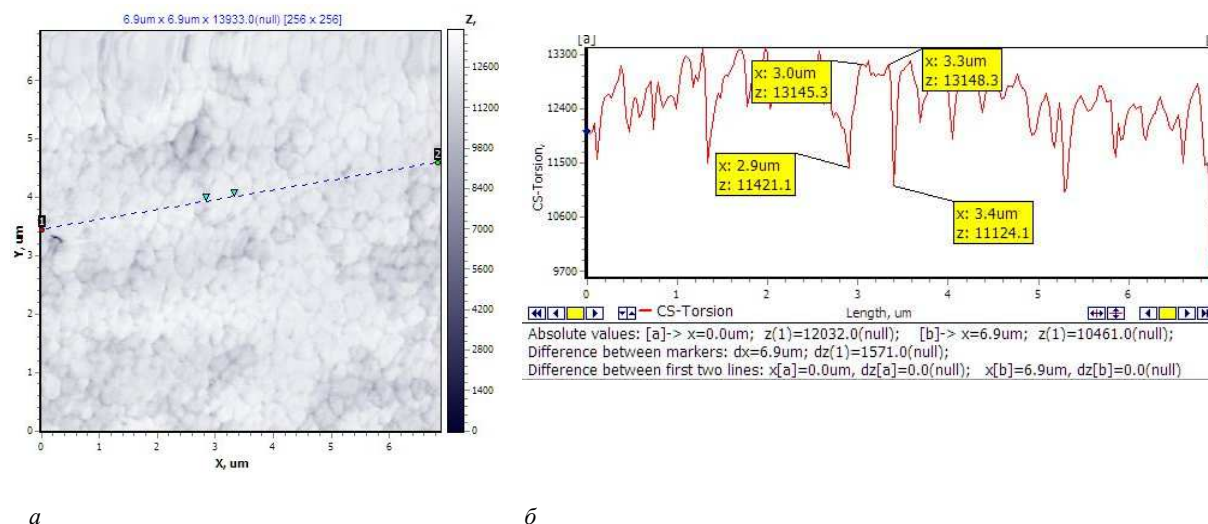


Рисунок 4. – 2D-изображение поверхности золотой контактной площадки (а) и профиль по линии сканирования 1-2 (б)

Графические исследования скана может быть проведено на основании информации, полученной при анализе рисунка 4, б. Маркированная наночастица выделена на линии сканирования 1-2 (рисунок 4, а). Проводя несложные математические вычисления, получим: среднюю высоту наночастицы – 1872,2 нм, ширину нижней части наночастицы – 500 нм, ширину верхней части наночастицы – 300 нм, средняя арифметическая шероховатость поверхности (R_a) – 512,1 нм, средняя квадратичная шероховатость поверхности (R_q) – 673,8 нм.

Закключение. Представленные в настоящей работе результаты свидетельствуют о том, что сканирующая зондовая микроскопия и один из ее основных видов – атомная силовая микроскопия – может применяться для исследования поверхности веществ в широком диапазоне: нефтяных дисперсных систем (гудрон, битум), поверхности поликристаллических и монокристаллических твердотельных структур, нанесенных на твердое тело пленок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миронов, В.Л. Основы сканирующей зондовой микроскопии : учеб. пособие для студентов старших курсов вузов / В.Л. Миронов. Рос. акад. наук, Ин-т физики микроструктур. – Нижний Новгород, 2004. – 114 с.
2. Ion implantation of positive photoresists / D.I. Brinkevich [et al.] // Russian Microelectronics. – 2014. – V. 43, № 3. – P. 194–200.
3. Defect formation in silicon implanted with ~1 MeV / nucleon ions / S.A. Vabishchevich [et al.] // Inorganic materials. – 2010. – V. 46, № 12. – P. 1281–1284.
4. Редкоземельные элементы в монокристаллическом кремнии / Д.И. Бринкевич [и др.] – Новополоцк : Полоцкий государственный университет, 2003. – 204 с.
5. Микротвердость пленок сополимеров на основе метилметакрилата, облученных γ -квантами / С.А. Вабишевич [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 30–36.
6. Прочностные свойства структур фоторезист-кремний, γ -облученных и имплантированных ионами V^+ и P^+ / С.А. Вабишевич [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 51–57.

7. Химия нефти и газа : учеб. пособие для вузов / А.И. Богомолов [и др.] ; под ред. В.А. Проскурякова, А.Е. Драбкина. – 3-е изд., доп. и исп. – СПб. : Химия, 1995. – 448 с.
8. Васюков, А.В. Определение структурных характеристик нефтяного кокса с помощью атомно-силовой микроскопии / А.В. Васюков, П.М. Поляшкевич // Фундаментальные и прикладные исследования в технических науках в условиях перехода предприятий на импортозамещение: проблемы и пути решения : сб. тр. Всерос. науч.-техн. конф. с междунар. участием, Стерлитамак, 17–18 дек. 2015 г. / Уфимский государственный нефтяной технический университет, Филиал УГНТУ. – Стерлитамак, 2015. – С. 86–88.
9. Туманян, Б.П. Научные и прикладные аспекты теории нефтяных дисперсных систем / Б.П. Туманян. – М. : ООО «ТУМА ГРУПП» ; Изд-во «Техника», 2000. – 336 с.
10. Элементы структуры тяжелых нефтяных остатков и их изменение в процессе термического и термоокислительного воздействия / С.М. Ткачев [и др.] // Методологические аспекты сканирующей зондовой микроскопии : сб. докл. XII Междунар. конф., Минск, 18–21 окт. 2016 г. / Нац. акад. Беларуси, Ин-т тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова ; редкол.: С.А. Чижик (пред.) [и др.]. – Минск : Беларуская навука, 2016. – С. 189–195.
11. Васюков, А.В. Трансформация структуры углеродных материалов в процессе термической обработки / А.В. Васюков, С.М. Ткачев, П.М. Поляшкевич // Методологические аспекты сканирующей зондовой микроскопии : сб. докл. XII Междунар. конф., Минск, 18–21 окт. 2016 г. / Нац. акад. Беларуси, Ин-т тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова ; редкол.: С.А. Чижик (пред.) [и др.]. – Минск : Беларуская навука, 2016. – С. 169–175.
12. Сапфир физические свойства [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://sapphire.furs.com.ua/site/page45.aspx08.02.2017>.
13. Кристаллические решетки. Рисунки [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://yandex.by/images/search?text=кристаллическая%20решетка%20сапфира&noreask=1&lr=15408.02.2017>.

Поступила 02.03.2017

SCANNING SURFACES SOLID STRUCTURES AND OIL-WAIST VAR SYSTEMS BY ATOMIC FORCE MICROSCOPY

A. VASUKOV, S. VABISHCHEVICH, V. KRISHTOPA

The work carried out using an atomic force microscope the NT-207 demonstrated broad research opportunities surface materials using scanning probe microscopy. Atomic force microscopy can be used to study the surface of the materials in a wide range - from the oil disperse systems (tar, bitumen) to the surface of any solid-state structures. The atomic force microscope is the NT-207 allows you to measure the roughness of the surface area of study, studying topography, measure the size of clusters and nanoparticles, to determine physical-mechanical properties of material.

Keywords: atomic force microscope, roughness, surface morphology, photoresist, tar, petroleum coke, ceramics, gold, sapphire, nanoparticle dispersions, single crystals, polycrystals, metals.

УДК 621.371:550.837.6

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ РАДИОКОМПЛЕКСИРОВАНИЯ ДЛЯ ПОИСКА ЭЛЕКТРИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ ПРИРОДНЫХ СРЕД

канд. техн. наук, доц. В.Ф. ЯНУШКЕВИЧ
(Полоцкий государственный университет)

Рассмотрены вопросы комплексного использования электромагнитных методов поиска электрически неоднородных природных сред. В качестве примера такой среды выбрана анизотропная среда над углеводородной залежью. Проведен анализ двухчастотного взаимодействия электромагнитных волн со средой над углеводородными залежами. Получение информации об объектах не по одному или двум информативным каналам, а по большему их числу позволяет с достаточно высоким уровнем достоверности выделять их границы на фоне подстилающей среды. Даны рекомендации по использованию оптимальных характеристик зондирующих сигналов. Проанализированы способы модификации устройства, позволяющие дополнить функциональные возможности для поиска углеводородных залежей.

Ключевые слова: электромагнитная волна, анизотропная среда, углеводородные залежи.

Введение. Актуальность рассматриваемых в настоящей работе задач заключается в модернизации существующих электромагнитных методов (ЭММ) георазведки и разработке новых методов поиска, идентификации электрически неоднородных сред. Одной из разновидностей таких сред являются месторождения нефти и газа (углеводородов), являющиеся стратегическим видом полезных ископаемых и определяющие широкий спектр глобальных экологических вопросов современного общества [1]. Исследование режимов взаимодействия электромагнитных волн (ЭМВ) с углеводородными залежами (УВЗ) может быть использовано в поисковой геофизике для повышения точности и уровня достоверности ЭММ обнаружения залежей нефти и газа. Результаты анализа взаимодействия ЭМВ с УВЗ, экспериментальное исследование и интерпретация полученных исследований представлены во многих работах, например [2–5]. Вместе с тем для реализации новых ЭММ представляет интерес анализ процесса комплексного использования существующих методов взаимодействия ЭМВ с анизотропными средами (АС), образующимися над залежами и скоплениями углеводородов [7–11].

Использование зондирующих сигналов с вариацией частот позволяет проводить точные оценки характеристик электрически неоднородных природных сред [5].

Объекты и методы исследования. Представим реальную залежь углеводородов (рисунок 1) в виде слоя, погруженного в среду с потерями, как проекцию контура залежи на «дневную поверхность» [12]. Залежь находится в природной ловушке, включающей любое естественное или искусственное скопление нефти и/или газа.

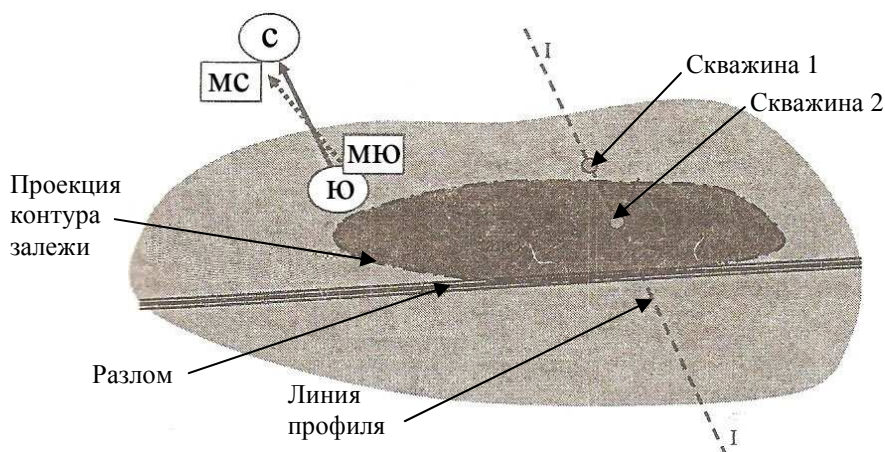


Рисунок 1. – Фрагменты участка земной поверхности с углеводородной залежью

На рисунке 1 показаны две скважины, одна из которых находится над залежью, линия профиля, проходящая через скважины и разлом, граничащий с УВЗ. На схеме показаны направления полюсов Земли юг – север («ю», «с» соответственно) и южного и северного магнитных полюсов («мю», «мс» соответственно).

Различные методы и способы электроразведки обладают своими преимуществами и недостатками, которые порой могут быть применены в ограниченных объемах или условиях ввиду разнообразия сред, расположенных над залежами, отличия глубин залегания, разнообразия в помеховой и растительной обстановках в местах исследований, степени насыщенности месторождений, формы ловушек и т. д. [9–12].

В связи с этим весьма уместен термин «радиопортрет УВЗ» [1], под которым понимается отображение совокупности признаков, связанных со статическим и/или динамическим изменением характеристик электромагнитного поля, присущих данной геологической неоднородности и ее электродинамическим параметрам. В настоящее время предпочтение отдается методам комплексирования для поиска и идентификации УВЗ [1].

Анализ возможностей объединения методов электроразведки позволяет оптимизировать построение РТС для повышения уровня точности и достоверности поиска и идентификации УВЗ.

Основой методов комплексирования служат следующие факторы:

1. Оптимальный выбор зондирующих сигналов:

$$S_1, S_2, \dots, S_m = f(t_3, \lambda_n, \vec{p}), \quad (1)$$

где t_3 – время;

λ_n – пространственная структура;

\vec{p} – поляризационная структура.

Для электроразведки следует принять ЭМВ, на которых эффект взаимодействия с залежами нефти и газа будет выражен наиболее сильно. К таким зондирующим сигналам относятся следующие составляющие частотного спектра:

- (100 – 200) Гц – ионно-циклотронный резонанс;
- (10²–10⁴) Гц – электронно-циклотронный резонанс;
- (10⁶–10⁷) Гц – ионно-плазменный резонанс;
- (1·10⁹–2·10⁹) Гц – электронно-плазменный резонанс.

2. Применение методов электроразведки, которые позволяют наиболее контрастно выделять собственные электродинамические параметры среды над залежами нефти и газа:

$$\xi_v = f(\epsilon, \mu, \sigma) \rightarrow \epsilon, \sigma = f(N_e, N_n, v_i), \quad \mu = f(\vec{I}), \quad (2)$$

где ξ_v – обобщенный параметр среды;

ϵ, μ – относительная диэлектрическая, относительная магнитная проницаемости сред соответственно;

σ – удельная электропроводимость;

N_e, N_n, v_i – концентрации электронов, ионов, частоты столкновения частиц;

(\vec{I}) – намагниченность среды.

3. Получение нужной информации об исследуемом объекте с учетом влияния действующих радиостанций и источников помех [13]:

$$Z(t, \lambda, \vec{p}) = X_\alpha(t, \lambda_n^x, \vec{p}_n^x) + Y_\beta(\lambda_n^y < t >, \vec{p}_n^y), \quad (3)$$

где $X_\alpha(t, \lambda_n^x, \vec{p}_n^x)$ – совокупность α полезных станций;

$Y_\beta(\lambda_n^y < t >, \vec{p}_n^y)$ – совокупность β источников помех.

4. Анализ сложной электромагнитной картины при проведении измерений с учетом условий РРВ и модуляционных эффектов смеси электромагнитных сигналов.

$$F(S, Z) = M_1 \cdot S_m [\lambda_n \cdot (G, R), \vec{p}(G, R)] + M_2 \cdot X_\alpha \left[\lambda_n^x(G, R), \vec{p}_n^x(G, R) \right] + Y_\beta \left[\lambda_n^y(G, R, t), \vec{p}_n^y(G, R, t) \right], \quad (4)$$

где R – обобщенный параметр, учитывающий условие РРВ;

M_1, M_2 – коэффициенты, характеризующие мультипликативные помехи.

Таким образом, радиокомплексирование позволяет получать информацию об объектах не по одному или двум информационным каналам, а по большему их числу, что позволяет с достаточно высоким уровнем достоверности выделять его границы на фоне подстилающей среды.

Следует отметить высокую эффективность использования радиоволновых регистрирующих комплексов МРК1, МРК2, МРК1У, РВРК-3, разработанных компанией по поиску и оконтуриванию залежей углеводородов «ПетроСервис» [14].

Исходя из этого рассмотрим процесс взаимодействия ЭМВ с УВЗ в режиме бигармонического сигнала вида

$$\bar{e}(t) = \bar{e}_1(t) + \bar{e}_2(t) = E_1 \cos \omega_1 t + E_2 \cos \omega_2 t, \quad (5)$$

где E_1, E_2 – амплитуды первой и второй ЭМВ;

ω_1, ω_2 – частоты первой и второй ЭМВ.

Введем коэффициенты отношения амплитуд двух волн и их частот:

$$\begin{cases} k_E = \frac{E_2}{E_1}, \\ k_\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2} \end{cases} \quad (6)$$

и рассмотрим взаимодействие сложного сигнала (5) с различными соотношениями параметров формируемых ЭМВ с анизотропным образованием.

Координатное разложение напряженности электрического поля с учетом (6) позволяет записать компоненты тензора диэлектрической проницаемости для двухчастичного потока в виде системы уравнений (7):

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_1 = \epsilon_r \frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_2} + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Gamma i}^2 \tilde{\omega}_1}{\omega_2} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_1^2 - v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_1^2)^2 + 4\tilde{\omega}_1^2 v_i^2} - \right. \\ \left. - j \left[\frac{-\epsilon_r k_E (1 - k_\omega) \sin \alpha t}{1 + k_E \cos \alpha t} + \frac{\sigma_r}{\omega_2 \epsilon_0} + \frac{\omega_{\Gamma i}^2 v_i}{\omega_2} \frac{\tilde{\omega}_1^2 + v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_1^2)^2 + 4\tilde{\omega}_1^2 v_i^2} \right] \right\}, \\ \dot{\epsilon}_2 = \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Gamma i}^2 \omega_{\Gamma i}}{\omega_2} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_1^2 + v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_1^2)^2 + 4\tilde{\omega}_1^2 v_i^2} - \frac{2j\tilde{\omega}_1 v_i \omega_{\Gamma i}^2 \omega_{\Gamma i}}{[(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_1^2)^2 + 4\tilde{\omega}_1^2 v_i^2] \omega_2} \right\}, \\ \dot{\epsilon}_3 = \epsilon_r \frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_2} + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Gamma i}^2 \tilde{\omega}_1}{\omega_2} \frac{1}{v_i^2 + \tilde{\omega}_1^2} - j \left[\frac{-\epsilon_r k_E (1 - k_\omega) \sin \alpha t}{1 + k_E \cos \alpha t} + \frac{\sigma_r}{\omega_2 \epsilon_0} + \frac{\omega_{\Gamma i}^2 v_i}{\omega_2} \frac{1}{\tilde{\omega}_1^2 + v_i^2} \right] \right\}, \end{cases} \quad (7)$$

где $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3$ – компоненты тензора;

$\tilde{\omega}_1$ – частотная составляющая, $\tilde{\omega}_1 = \omega_2 [k_\omega + k_E^2 + k_E (1 - k_\omega) \cos \alpha t]$;

α – разность частот двух ЭМВ, $\alpha = \omega_2 - \omega_1 = \omega_2 (1 - k_\omega)$;

ϵ_r – диэлектрическая проницаемость среды;

σ_r – удельная проводимость среды;

ϵ_0 – диэлектрическая постоянная;

$\omega_{\Gamma i}$ – плазменная частота;

v_i – частота столкновения частиц;

$\omega_{\Gamma i}$ – гиротропная частота, вычисляемая по формуле

$$\omega_{\Gamma i} = \frac{q_e \mu_0 H_0}{m},$$

q_e – заряд электрона;

μ_0 – магнитная постоянная;
 H_0 – напряженность магнитного поля Земли;
 m – масса электрона.

Система уравнений (7) содержит информацию об отклике исследуемой среды на воздействие двухчастотного сигнала (5).

Результаты и их обсуждение. Был проведен анализ двухчастотного взаимодействия для правой поляризации ЭМВ со средой над УВЗ по методу радиокомплексирования с целью получения информации об объектах по двум информационным каналам на основе определения приращения диэлектрической проницаемости

$$\Delta\epsilon_R = \text{Re}\epsilon_{R_1} - \text{Re}\epsilon_{R_2},$$

где $\text{Re}\epsilon_{R_1}$ – вещественная часть диэлектрической проницаемости среды над УВЗ при $k_E = 10^{-1}$;

$\text{Re}\epsilon_{R_2}$ – вещественная часть диэлектрической проницаемости среды над УВЗ при заданных k_E (рисунки 2, 3).

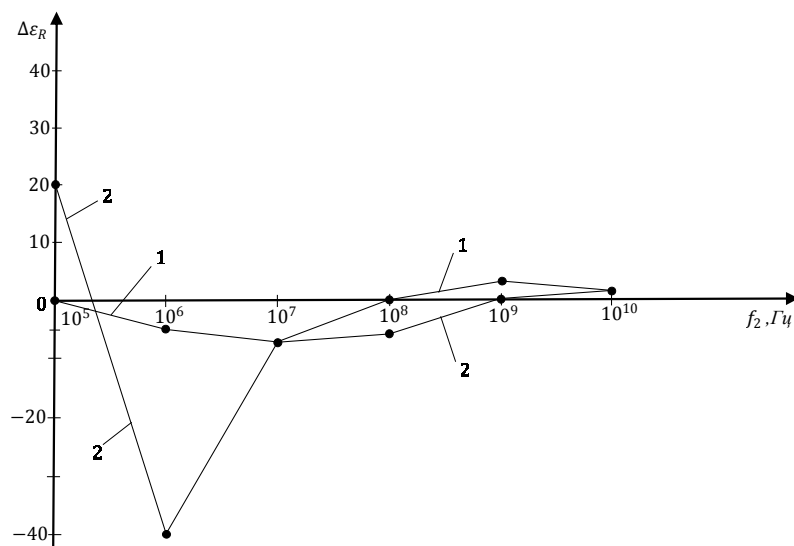


Рисунок 2. – Частотные зависимости диэлектрической проницаемости среды над УВЗ для правой поляризации ЭМВ: 1 – для $k_E = 10^{-3}$; 2 – для $k_E = 10^{-6}$

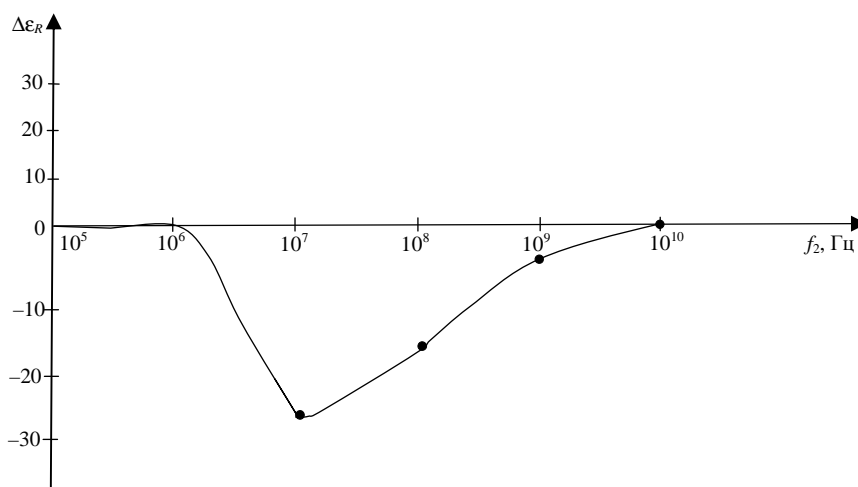


Рисунок 3. – Частотные зависимости диэлектрической проницаемости среды над УВЗ для правой поляризации ЭМВ для $k_E = 10$

Также был проведен анализ приращения диэлектрической проницаемости среды над УВЗ для левой поляризации ЭМВ:

$$\Delta\epsilon_i = \text{Re}\epsilon_{i_1} - \text{Re}\epsilon_{i_2},$$

где $\text{Re}\epsilon_{i_1}$ – вещественная часть диэлектрической проницаемости среды над УВЗ при $k_E = 10^{-1}$;

$\text{Re}\epsilon_{i_2}$ – вещественная часть диэлектрической проницаемости среды над УВЗ при заданных k_E (рисунки 4 и 5).

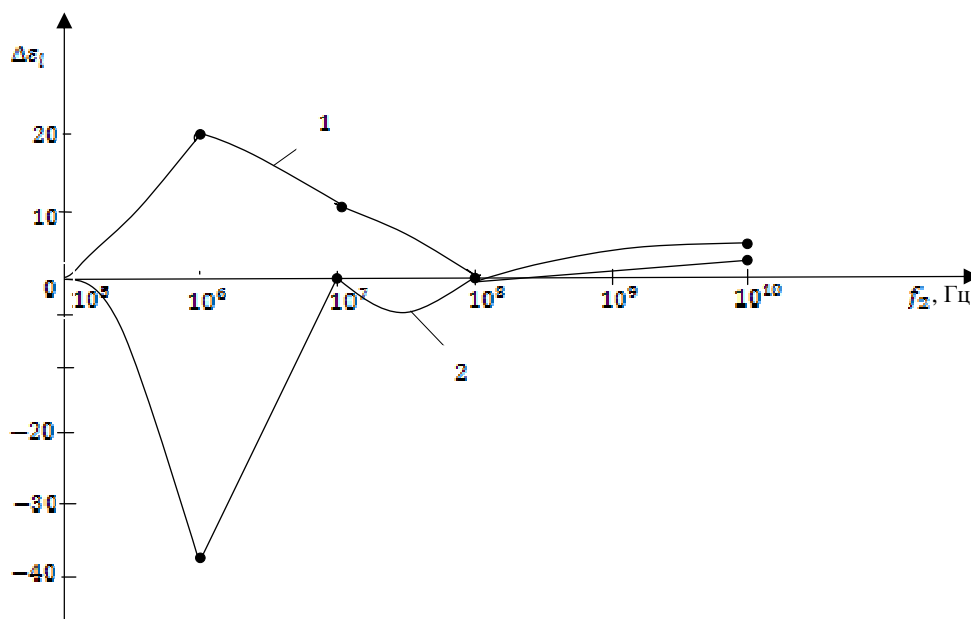


Рисунок 4. – Частотные зависимости диэлектрической проницаемости среды над УВЗ для правой поляризации ЭМВ: 1 – для $k_E = 10^{-1}$; 2 – для $k_E = 10^{-2}$

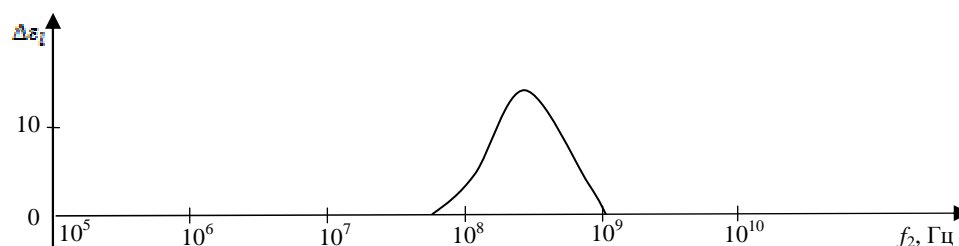
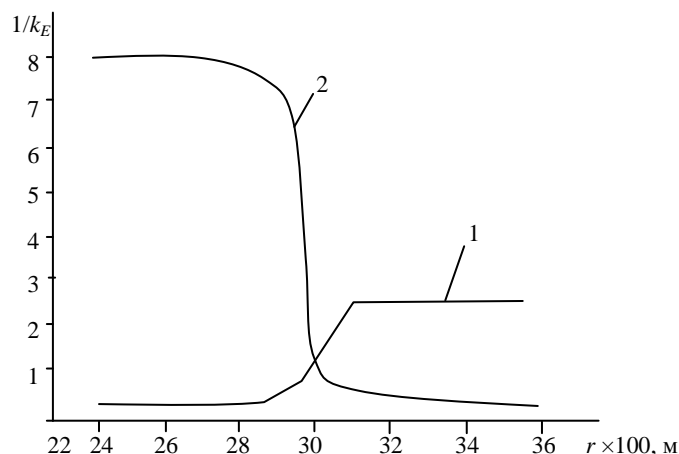


Рисунок 5. – Частотные зависимости диэлектрической проницаемости среды над УВЗ для правой поляризации ЭМВ для $k_E = 10$

Проведенный анализ показал, что диэлектрическая проницаемость среды над УВЗ имеет частотную зависимость, которую можно использовать для поиска электрически неоднородных сред. Возможно применение двух режимов взаимодействия на основе двухчастотного зондирования. Применение режима мощного низкочастотного сигнала представляет большие возможности для методов радиокомплексирования, поскольку вариация диэлектрической проницаемости осуществляется в более широком диапазоне (см. рисунок 2) по сравнению с режимом мощного высокочастотного сигнала (см. рисунок 3). Для $k_E = 10^{-2}$ приращение диэлектрической проницаемости при использовании волн с правой поляризацией отрицательно, за исключением участка частот выше 10^8 Гц, где происходят небольшие положительные изменения указанной выше величины. Для $k_E = 10^{-6}$ наблюдаются положительные участки изменения диэлектрической проницаемости ($1 \cdot 10^5 - 1,3 \cdot 10^5$ Гц и $1 \cdot 10^8 - 1,3 \cdot 10^{10}$ Гц). На частоте второй ЭМВ f_2 , равной $1 \cdot 10^6$ Гц, существует ярко выраженный минимум приращения диэлектрической проницаемости. В режи-

ме мощного высокочастотного сигнала наблюдаются нулевые и отрицательные изменения диэлектрической проницаемости. Для $k_E = 10^{-1}$, а также с большими значениями отношения амплитуд сигналов при применении волн левой поляризации характерны положительные приращения диэлектрической проницаемости. Использование режимов зондирования с меньшими отношениями амплитуд ведет к отрицательным приращениям диэлектрической проницаемости среды.

Результаты экспериментальных исследований, проведенных на частотах $f_1 = 2$ МГц и $f_2 = 16$ МГц, представлены на рисунке 6.



1 – при размещении излучателей на анизотропном включении;
2 – при размещении излучателя вне контура анизотропии

Рисунок 6. – Экспериментальные характеристики двухчастотного взаимодействия ЭМВ с УВЗ

На границе залежи (пикет 27) происходит уменьшение отношения амплитуд сигналов при размещении излучателя вне контура анизотропии и небольшой рост этого соотношения при размещении излучателей на анизотропном включении.

Заключение. Проведен анализ двухчастотного взаимодействия электромагнитных волн со средой над углеводородными залежами. Получение информации об объектах не по одному или двум информационным каналам, а по большему их числу позволяет с достаточно высоким уровнем достоверности выделять их границы на фоне подстилающей среды. Перенастройка устройства георазведки с одного режима на другой при наличии залежи дополняет функциональные возможности для поиска УВЗ. Результаты исследований могут быть применены для разработки радиотехнических систем ближней и дальней радиолокации, для повышения точности и уровня достоверности методов георазведки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гололобов, Д.В. Радиотехнические системы поиска и идентификации углеводородных залежей в режиме двухчастотного взаимодействия / Д.В. Гололобов, В.Ф. Янушкевич // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз. тэхн. – 2002. – № 1. – С. 49–54.
2. Moskvichew, V.N. Interaction of electromagnetic waves (EMW) with anisotropic inclusion in communication line / V.N. Moskvichew // 9-th Microw. Conf. NICON – 91, Rydzyna, May 20-22, 1991. – Vol. 1. – P. 240–244.
3. Гололобов, Д.В. Поверхностный импеданс среды над углеводородными залежами в режиме частотно-модулированных сигналов / Д.В. Гололобов, С.В. Калинин, В.Ф. Янушкевич // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз. тэхн. 2010. – № 4. – С. 98–101.
4. Москвичев, В.Н. Исследование взаимодействий электромагнитных волн с углеводородной залежью / В.Н. Москвичев // Радиотехника и электроника. – 1988. – Вып. 18. – С. 91–96.
5. Финкельштейн, М.И. Применение радиолокационного подповерхностного зондирования в инженерной геологии / М.И. Финкельштейн, В.А. Кутев, В.П. Золоторев. – М.: Недра, 1986. – 182 с.
6. Гололобов, Д.В. Радиолокационный портрет углеводородной залежи / Д.В. Гололобов // Электромагнитные исследования с контролируемыми источниками: тез. докл. Междунар. геодез. конф., СПб., 27–31 мая 1996 г. / ВИГР. – Рудгеофизика: А.А. Петров [и др.]. – СПб., 1996. – С. 42–43.

7. Гололобов, Д.В. Влияние параметров амплитудно-модулированного воздействия на фазовые составляющие поверхностного импеданса анизотропной среды плазмopodobного типа / Д.В. Гололобов, О.В. Орлова, В.Ф. Янушкевич // Вестник Полоцкого государственного университета. – 2010. – № 9. – С. 98–101.
8. Степуленок, С.В. Взаимодействие амплитудно-частотно-моделированных сигналов со средой над углеводородными залежами / С.В. Степуленок, В.Ф. Янушкевич // Вестник Полоцкого государственного университета. – 2009. – № 9. – С. 103–108.
9. Гололобов, Д.В. Фазовые методы идентификации углеводородных залежей / Д.В. Гололобов, В.Ф. Янушкевич, А.О. Рак // Инженерный вестн. – 2005. – № 1(20). – С.16–18.
10. Янушкевич, В.Ф. Зондирование анизотропных сред двухчастотными и модулированными сигналами / В.Ф. Янушкевич // Полоцкий гос. ун-т. – Минск. – 8 с. – Деп. в ГУ «БелИСА» 12.06.97 г. - № Д 199713 // Рефератив. сб. непубликуемых работ. – 1997. – Вып. 5. – С. 11.
11. Гололобов, Д.В. Электродинамические параметры подводных источников в поле поверхностной электромагнитной волны / Д.В. Гололобов, В.Н. Москвичев, Г.П. Турук, В.Ф. Янушкевич // Тез. докл. 35 Всероссийской межвузовской НТК. – Владивосток, 1992. – Т. 1, ч. 1. – С. 59–62.
12. Гололобов, Д.В. Взаимодействие электромагнитных волн и углеводородных залежей / Д.В. Гололобов. – Минск, Бестпринт, 2009. – С. 185.
13. Янушкевич, В.Ф. Экранирование радиоэлектронных устройств и систем. Новые принципы проектирования антенн : учеб. пособие для аспирантов / В.Ф. Янушкевич, М.Е. Капралов, К.И. Кременя. – Вильнюс : Циклонас, 2016. – 156 с.
14. Поиск и разведка углеводородов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http:// www. companypetroservice.com](http://www.companypetroservice.com) // . – Дата доступа: 10.01.2017.

Поступила 15.02.2017

APPLICATION OF SEARCH FOR RADIOKOMPLEKSIROVANIYA ELECTRICAL INHOMOGENEITIES OF THE NATURAL ENVIRONMENT

V. YANUSHKEVICH

The article discusses the integrated use of electromagnetic methods to search for electrically inhomogeneous natural environments. As an example of such a medium is selected anisotropic Wed da over hydrocarbon deposits. The current search methods have ample opportunities for optimization. Variation characteristics of probing signals can improve search-descriptiveness. The analysis of the two-frequency electromagnetic waves interaction with the environment of hydrocarbon deposits. Getting information about objects not on one or two channels, in-formational, and in greater number allows a sufficiently high level of confidence to allocate their borders against the background of the underlying medium. Recommendations for the use of the optimal characteristics of probing signals. The possibility of restructuring the device complements the functional-WIDE possibility to search for hydrocarbon deposits. On the basis of the given research can be developed radiokompleksirovaniya methods for geological exploration of hydrocarbons. The research results can be used in the search geophysics.

Keywords: *electromagnetic wave anisotropic medium, hydrocarbon deposits.*

УДК 544.58: 661.12

**ПРИМЕСНЫЕ РАДИОНУКЛИДЫ
В ПРОИЗВОДСТВЕ РАДИОФАРМПРЕПАРАТОВ НА ОСНОВЕ ^{18}F**

С.А. ДОБРОВОЛЬСКИЙ, А.В. САВКОВ, канд. физ.-мат. наук **Д.И. БРИНКЕВИЧ**,
канд. хим. наук, доц. **С.Д. БРИНКЕВИЧ**
(Белорусский государственный университет, Минск);
Н.В. ВАБИЩЕВИЧ
(Полоцкий государственный университет)

Исследовано распределение радионуклидов по различным картриджам в процессе производства ^{18}F -фтордезоксиглюкозы и ^{18}F -холина с использованием циклотрона ИВА Cyclone 18/9 с целью разработки научно обоснованной концепции долговременного хранения радиоактивных отходов радиофармпрепаратов для позитронно-эмиссионной томографии. Определен изотопный состав долгоживущих ($t_{1/2} = 10\text{--}312$ сут) радионуклидов. Показано, что срок хранения картриджей QMA должен составлять не менее полугода. Рассмотрены различные механизмы попадания радионуклидов металлов переменной валентности в картриджи при синтезе радиофармпрепаратов на основе ^{18}F .

Ключевые слова: радиофармпрепараты, радионуклиды, ^{18}F -фтордезоксиглюкоза, ^{18}F -холин.

Позитронно-эмиссионная томография (ПЭТ) – современный метод медицинской визуализации, позволяющий получать *in vivo* информацию о нарушениях физиологических и биохимических процессов на молекулярном уровне. На базе Республиканского научно-практического центра онкологии и медицинской радиологии им. Н.Н. Александрова с ноября 2015 г. впервые в Республике Беларусь заработал Республиканский центр позитронно-эмиссионной томографии (ПЭТ-центр). Его создание позволило улучшить результаты лечения пациентов с онкопатологией; сократить экономические расходы на проведение лекарственной терапии; увеличить долю финансово-сберегающих операций; исключить необходимость направления пациентов для диагностики и лечения за рубеж.

В ПЭТ-исследованиях в качестве радиоактивной метки используются короткоживущие радиоизотопы с позитронным распадом. Радионуклид [^{18}F] обладает оптимальными ядерно-физическими характеристиками, что сделало его основным радионуклидом для ПЭТ-исследований. Его период полураспада ($t_{1/2} = 110$ мин) позволяет проводить радиохимический синтез сложных меченых соединений, транспортировку радиофармацевтического препарата в медицинские центры, не имеющие своего циклотрона (в пределах 4-5 ч), а также осуществлять длительные протоколы медицинского исследования [1, 2]. Изотоп ^{18}F получают при облучении протонами обогащенной ^{18}O (> 95%) воды по реакции $^{18}\text{O}(p, n)^{18}\text{F}$. Протонный пучок и вторичные нейтроны активируют не только воду, но и атомы металлической мишени. Ионы металлов могут проникать в облучаемую воду и вместе с ней попадать в реактор для синтеза радиофармпрепаратов (РФП). Наличие долгоживущих радионуклидов в готовой лекарственной форме крайне нежелательно вследствие увеличения дозовой нагрузки на пациентов [1, 3] и строго регламентируется техническими инструкциями.

В работе исследовалось накопление радионуклидов в картриджах, используемых при производстве ^{18}F -фтордезоксиглюкозы (^{18}F -ФДГ) и ^{18}F -холина. Анионно-обменный картридж QMA (четвертичное аммониевое основание на полимерной матрице) используется при синтезе как ^{18}F -ФДГ, так и ^{18}F -холина. Он предназначен для извлечения [^{18}F] фторид-иона из облученной воды. Все отрицательно заряженные вещества удерживаются QMA-картриджем. При этом незаряженные соединения и катионы проходят вместе с облученной водой через QMA в емкость сборник/накопитель отработанной облученной воды [^{18}O]- H_2O . Картриджи Al_2O_3 , C_{18} и SCX используются после синтеза ^{18}F -ФДГ для очистки готового лекарственного средства от химических и радиохимических примесей. Первый картридж SCX содержит сильную катионообменную смолу, используемую для удаления положительно заряженного комплекса $\text{K}^+/\text{K}^+\text{гуртофик}^{\text{TM}} 222$, нейтрализации гидроксида натрия и удаления радионуклидов в катионной форме. К этому картриджу присоединяется картридж слабо основного оксида алюминия Al_2O_3 (коммерческого название Alumina B) для удаления остаточных количеств органических и неорганических кислот, а также сорбции непрореагировавшего ^{18}F фторида. Картридж C_{18} представляет собой мелкодисперсный оксид кремния SiO_2 , модифицированный октадециловым спиртом, содержащим 18 атомов углерода, что позволяет извлекать из водного раствора неполярные соединения, например продукты неполного гидролиза 1-, 3-, 4-, 6-тетра-О-ацетил-2-О- ^{18}F -ФДГ. При синтезе ^{18}F -холина используются картриджи silica, CM и HLB. Первый представляет собой мелкодисперсный оксид кремния SiO_2 и служит в качестве дефлег-

матора при дистилляции фторбромметана $^{18}\text{FBrCH}_2$. При температуре 20–30°C на нем происходит конденсация паров $^{18}\text{FBrCH}_2$ и ацетонитрила, поскольку эти растворители имеют температуру кипения больше 70°C. Картридж HLB (гидрофильный N-винилпирролидон и липофильный дивинилбензол) представляет собой полярный сорбент, который используется для проведения твердофазного алкилирования (алкилирования N,N'-диметиламиноэтанола фторбромметаном $^{18}\text{FBrCH}_2$ на твердом сорбенте). Картридж CM – карбокси-катионит, применяется для выделения активной фармацевтической субстанции [^{18}F]холина и его очистки от N,N'-диметиламиноэтанола и остаточных органических растворителей.

Целью настоящего исследования являлась разработка научно обоснованных правил работы с радиоактивными отходами от производства РФП на основе ^{18}F с использованием циклотрона ИВА Cyclone 18/9 и, в частности, изучение распределения радионуклидов по различным картриджам в процессе производства ^{18}F -ФДГ и ^{18}F -холина и последующего уточнения предполагаемого времени их хранения до выведения из состава радиоактивных отходов.

Материалы и методы измерений. Нарabotka ^{18}F -радионуклида осуществлялась на циклотроне ИВА Cyclone 18/9. Данный циклотрон ускоряет отрицательный ион НГ с энергией 18 МэВ, для перезарядки иона пропускает его через углеродную фольгу, которая изымает электроны у высокоэнергетической частицы. Вследствие смены заряда траектория частицы изменяется на зеркальную, что и приводит к выведению протона из зоны ускорения в мишень для производства ^{18}F -нуклида посредством облучения воды, обогащенной по ^{18}O (Центр молекулярных исследований, Тосно, Россия). Мощность дозы γ -излучения контролировалась дозиметром ДКС-АТ1121. Спектрометрические измерения выполнялись с использованием HPGe германиевого детектора: детекторная система GEM40-83/DSPEC jr 2.0; энергетический диапазон 14,5–2911,4 кэВ; разрешение 0,182 кэВ/канал, а также мультисканального гамма-анализатора Mucha (Raytest) с детектором NaI(Tl) $\varnothing 3 \times 3$. Обработка спектров проводилась с помощью программы ACTIV. Измерения активности осуществлялись на калибраторе дозы Isomed 2010. В связи с высокой активностью измерения картриджей проводились не менее чем через сутки после синтеза.

Экспериментальные результаты и их обсуждение. В таблицах 1 и 2 представлены средние значения активности картриджей, используемых при синтезе ^{18}F -ФДГ и ^{18}F -холина, по результатам измерений после 50 производств.

Таблица 1. – Средние значения активности фильтров после производства ^{18}F -фтордезоксиглюкозы

Картридж	Активность (кБк) после синтеза через			Мощность дозы (мкЗв/ч) через 2 сут
	1 сут	2 сут	7 сут	
QMA	293	4	4	1,2
SCX	151	< 1	< 1	< 0,1
Al ₂ O ₃	2030	< 1	< 1	< 0,1
C ₁₈	372	< 1	< 1	< 0,1

Таблица 2. – Средние значения активности фильтров после производства ^{18}F -холина

Картридж	Активность (кБк) после синтеза через			Мощность дозы (мкЗв/ч) через 2 сут
	1 сут	2 сут	7 сут	
QMA	163	6	5	1,8
silica	2530	1	< 1	< 0,1
CM	18	< 1	< 1	< 0,1
HLB	25	< 1	< 1	< 0,1

Измерения периода полураспада ($t_{1/2} = 1,8288$ ч) показали, что основным радионуклидом во всех картриджах является ^{18}F . Большинство картриджей могут быть признаны нерадиоактивными отходами по истечении 2 сут после синтеза, когда мощность дозы γ -излучения падает ниже 1 мкЗв/ч. Особняком стоит анионно-обменный картридж QMA. Активность в нем на вторые сутки падает до 4 кБк и остается на этом уровне после недели хранения (см. таблицу 1). Это указывает на наличие в нем радионуклидов с периодом полураспада свыше 7 сут. Гамма-спектры, измеренные на гамма-анализаторе Mucha (Raytest), также показали наличие долгоживущих радионуклидов, причем не только в QMA (рисунки 1 и 2), но и в SCX (рисунок 3) и Al₂O₃ (рисунок 4). Только в C₁₈ при измерении гамма-анализатором Mucha (Raytest) их обнаружить не удалось.

В произведенных радиофармпрепаратах (более 250 партий ^{18}F -ФДГ и 30 партий ^{18}F -холина) концентраций долгоживущих радионуклидов, превышающих референтные значения, задаваемые гигиеническим нормативом Республики Беларусь «Критерии оценки радиационного воздействия», обнаружено не было.

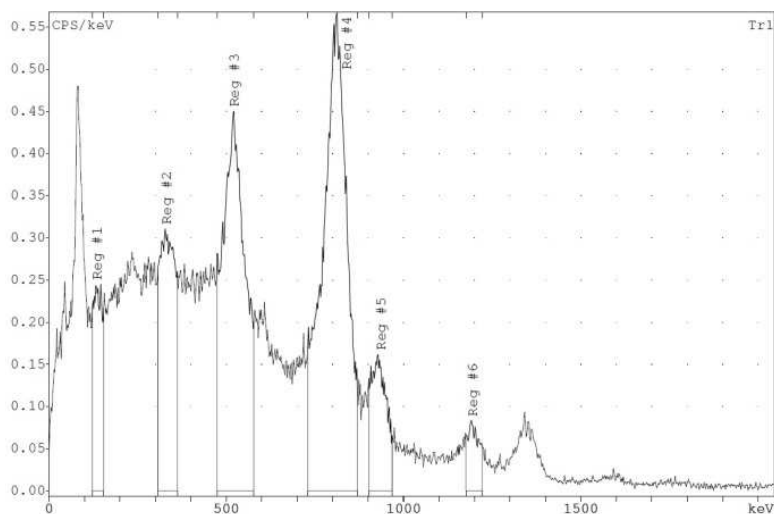


Рисунок 1. – Гамма-спектр QMA, измеренный на гамма-анализаторе Mucha (Raytest) через 18 сут после синтеза ^{18}F -ФДГ

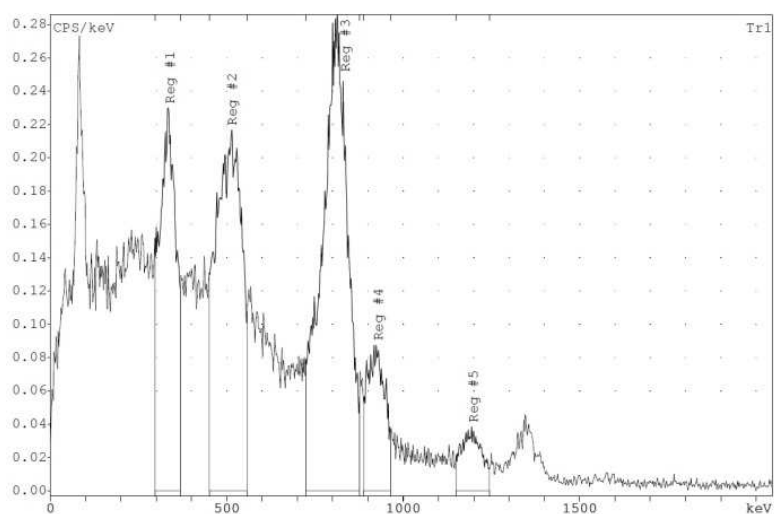


Рисунок 2. – Гамма-спектр QMA, измеренный на гамма-анализаторе Mucha (Raytest) через 15 сут после синтеза ^{18}F -холина

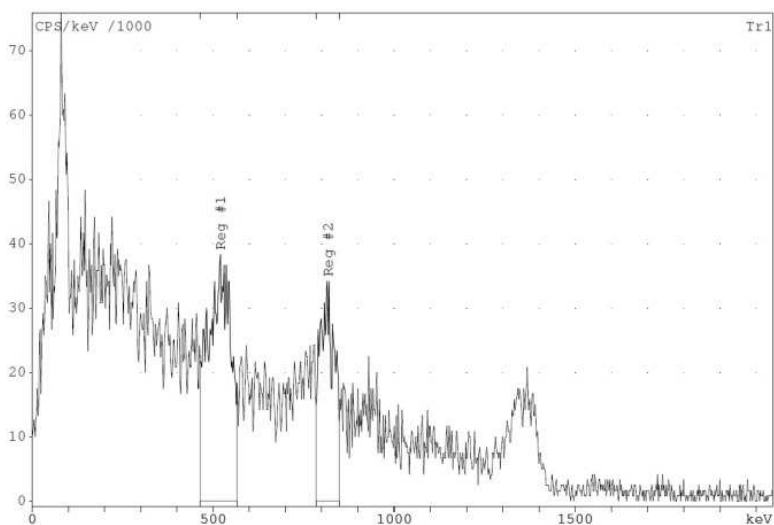


Рисунок 3. – Гамма-спектр SCX, измеренный на гамма-анализаторе Mucha (Raytest) через 15 сут после синтеза ^{18}F -ФДГ

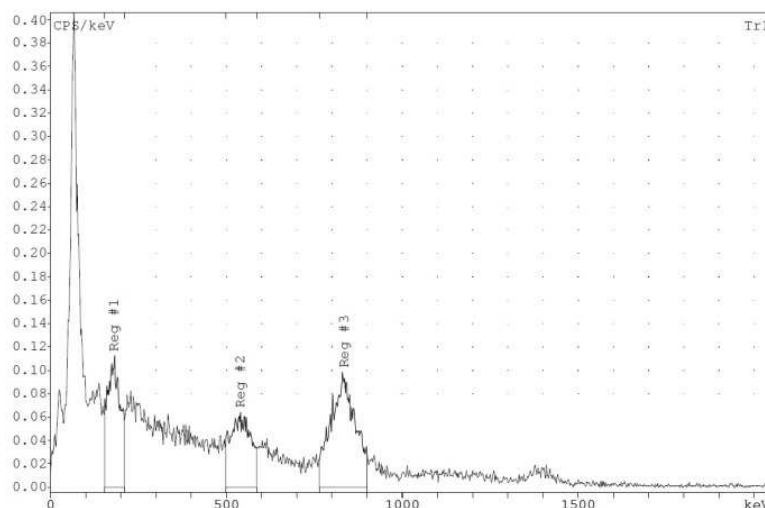


Рисунок 4. – Гамма-спектр Al_2O_3 , измеренный на гамма-анализаторе Mucha (Raytest) через 15 сут после синтеза ^{18}F -ФДГ

Отметим, что γ -спектры картриджа QMA после синтеза холина и ФДГ существенно не различались. Это указывает на то, что нежелательные долгоживущие радионуклиды генерируются не в процессе синтеза, а попадают в зону синтеза из циклотрона вместе с облученной водой. В гамма-спектрах QMA наблюдались 8 широких полос: ~ 90 , 132–140, 330–344, 504–536, 780–842, 914–956, 1190–1222 и ~ 1380 кэВ. Полосы ~ 90 и ~ 1380 кэВ обусловлены естественным фоновым излучением (предположительно, комптоновское рассеяние, ^{40}K). Они наблюдались во всех образцах и их интенсивность изменялась от измерения к измерению. В спектрах картриджа SCX наблюдались 3 полосы: 504–532, 780–840 и 914–956 кэВ, обусловленные циклотронными радионуклидами. Интенсивность последней была мала, и полоса (914–956 кэВ) исчезала на 9–11 сут после синтеза. В спектре Al_2O_3 видны только 2 полосы: слабая 504–530 и 780–840 кэВ, интенсивность которых практически не изменялась в течение месяца после синтеза.

Более детальные исследования радионуклидного состава проводились с использованием HPGe германиевого детектора. Наблюдавшиеся примесные радионуклиды представлены в таблице 3. Вид (γ или β) и энергия излучения, период полураспада взяты из [4, 5]. Кроме того в спектрах присутствовало от 3 до 9 (в зависимости от образца) неидентифицированных превышающих фон пика: 1445,82; 1580,92; 1585,03; 1810,51; 1847,32; 2085,66; 2178,86; 2190,33; 2389,45 кэВ. Их форма и энергетическое положение не позволили связать их с известными табличными изотопами. Для неидентифицированных радионуклидов активность оценивалась на несколько порядков величины ниже, чем для идентифицированных изотопов, и не вносила существенного вклада в полную активность.

Ключевыми радионуклидами по определению [6] являются изотопы, дающие наиболее существенный вклад в полную активность. Они должны рассматриваться как референтные для дальнейших оценок. Ключевыми нуклидами для всех картриджей являются ^{56}Co , ^{57}Co , ^{58}Co , ^{54}Mn , ^{51}Cr . Для картриджа QMA, помимо перечисленных выше, в качестве ключевого может рассматриваться также ^7Be , который отсутствует в гамма-спектрах других картриджей. Ключевые радионуклиды имеют относительно большие (по сравнению с ^{18}F) периоды полураспада (от 1 месяца до 300 сут), поэтому их активность уменьшится в 1000 раз после 3–6 лет хранения (примерно 10 периодов полураспада). Это означает, что срок хранения картриджей QMA должен составлять не менее 5–6 месяцев. Большинство радиоизотопов из таблицы 3 (например, ^{56}Co , ^{58}Co , ^{52}Mn , ^{54}Mn , ^{64}Cu , ^{65}Zn и т.д.), в том числе и ключевых, являются β -излучателями. Они определяют дополнительную радиационную нагрузку на пациентов и изменение критериев отнесения указанных твердых отходов к радиоактивным отходам (РАО). Согласно п. 17 СНИП «Требования к обеспечению радиационной безопасности персонала и населения при обращении с радиоактивными отходами» β -излучающие радионуклиды с удельной активностью 100 Бк/г относятся к твердым РАО.

Примесные радиоизотопы попадают в зону синтеза с облученной водой из циклотрона. Облучаемая вода находится в металлической (титано-ниобиевый сплав) мишени, которая имеет тонкое окно из сплава Navar толщиной 50 мкм для ввода протонного пучка. Сплав Navar содержит кобальт (42%), хром (19,5%), железо (18,1%), никель (13,7%), вольфрам (2,7%), молибден (2,2%), марганец (1,6%), углерод (0,2%). С облучаемой водой, протонным пучком и вторичными нейтронами контактирует не только окно из сплава Navar, но и тело мишени из ниобиевого сплава, в состав которого кроме ниобия входят молиб-

ден, титан и вольфрам. В работе [7] при измерении γ -спектров компонентов мишени, облученных на циклотроне ИВА Cyclone 18/9 в течение 2 месячного производственного цикла, в Navar-фольге были обнаружены радиоизотопы ^{51}Cr , ^{52}Mn , ^{54}Mn , ^{56}Co , ^{57}Co , ^{58}Co . Эти же радиоизотопы были идентифицированы нами в γ -спектрах картриджей после синтеза ^{18}F -ФДГ и ^{18}F -метилхолина (таблица 3) и также являются ключевыми изотопами в нашем случае. Ключевыми радионуклидами для облученного титанового окна являются: ^{46}Sc , ^{48}V , ^{54}Mn , ^{56}Co , ^{57}Co [8], что существенным образом отличается от нашего случая. Ни ^{46}Sc , ни ^{48}V нами обнаружено не было.

Таким образом, можно с большой долей уверенности утверждать, что основной вклад в активность картриджей для синтеза ^{18}F -ФДГ и ^{18}F -холина вносят радионуклиды из Navar-окна. Остальные детали циклотрона менее значимы. Следует отметить, что при расфокусировке протонного пучка (например, из-за проблем со стриппером) существенная его доля попадает мимо Navar-окна в тело мишени. Это приводит к существенному росту (до 4–5 раз) концентрации долгоживущих примесных радионуклидов не только в облученной воде, но и в картриджах (особенно в QMA).

Таблица 3. – Примесные радионуклиды и их основные характеристики

Изотоп	Возможная реакция получения	Тип и энергия излучения изотопа (кэВ) [4, 5]	Период полураспада	Примечание
^{51}Cr	$^{50}\text{Cr} + n = ^{51}\text{Cr}$ $^{50}\text{V} + p = ^{51}\text{Cr}$ $^{51}\text{V} + p = ^{51}\text{Cr} + n$ $^{54}\text{Fe} + n = ^{51}\text{Cr} + \alpha$	γ , 320,08 КЗ	27,7 сут	Во всех картриджах
^{52}Mn	$^{52}\text{Cr} + p = ^{52}\text{Mn} + n$	β^+ , 2630 γ , 744,23; 935,54; 1333,65; 1434,07	5,59 сут	Во всех картриджах
^{54}Mn	$^{53}\text{Cr} + p = ^{54}\text{Mn}$ $^{54}\text{Cr} + p = ^{54}\text{Mn} + n$ $^{58}\text{Ni} + n = ^{54}\text{Mn} + p + \alpha$	β^+ γ , 834,85	312,3 сут	Во всех картриджах
^{56}Mn	$^{55}\text{Mn} + n = ^{56}\text{Mn}$	γ , 846,75; 1810,72; 2113,05 β , 700 (20%); 860 (50%), 1050 (30%)	2,6 ч	Во всех картриджах, низкоинтенсивный
^{56}Co	$^{56}\text{Fe} + p = ^{56}\text{Co} + n$	β^+ , 195; 318; 977; 1500 γ , 846,77; 1238,28; 2598,45; 1771,35; 3612	77,27 сут	Во всех картриджах
^{57}Co	$^{56}\text{Fe} + p = ^{57}\text{Co}$ $^{57}\text{Fe} + p = ^{57}\text{Co} + n$ $^{58}\text{Ni} + n = ^{57}\text{Co} + d$	γ , 122,06; 136,47 КЗ	271,77 сут	Во всех картриджах
^{58}Co	$^{57}\text{Fe} + p = ^{58}\text{Co}$ $^{58}\text{Fe} + p = ^{58}\text{Co} + n$ $^{58}\text{Ni} + n = ^{58}\text{Co} + p$ $^{59}\text{Co} + n = ^{58}\text{Co} + 2n$	β^+ , 472(14,5%) КЗ (85,5%) γ , 810,76; 863,96; 1674,73	70,92 сут	Во всех картриджах
^{64}Cu	$^{63}\text{Cu} + n = ^{64}\text{Cu}$	β^+ , 656(19%), β^- , 573(38%), КЗ (43%) γ , 1345,77	0,541 сут	QMA низкоинтенсивный
^{65}Zn	$^{65}\text{Cu} + p = ^{65}\text{Zn} + n$ $^{64}\text{Zn} + n = ^{65}\text{Zn}$	β^+ , 325(1,5%) КЗ(98,5%) γ , 344,95; 770,60; 1115,55	244,26 сут	QMA
^{92}Nb	$^{95}\text{Mo} + p = ^{92}\text{Nb} + \alpha$	γ , 934,46; 912,73; 1847,27 β^+	10,15 сут	QMA низкоинтенсивный
^{95}Nb	$^{98}\text{Mo} + p = ^{95}\text{Nb} + \alpha$	γ , 204,12; 561,67; 765,8 β^- , 160	34,975 сут	QMA
^7Be	$^7\text{Li} + p = ^7\text{Be} + n$ $^6\text{Li} + d = ^7\text{Be} + n$ $^{10}\text{B} + p = ^7\text{Be} + \alpha$	γ , 477,60 КЗ	53,22 сут	QMA

Примечание. – КЗ – захват электрона с К-оболочки (К-захват).

Кроме ^{51}Cr , ^{52}Mn , ^{54}Mn , ^{56}Co , ^{57}Co , ^{58}Co в наших экспериментах наблюдались также следующие радиоизотопы с низкой активностью ^{64}Cu , ^{65}Zn , ^{92}Nb , ^{95}Nb и ^7Be . Отметим, что радионуклид ^{65}Zn (интенсивная полоса 1115,5 кэВ) авторами [6] был обнаружен в спектрах титанового окна и деталей стриппера (обдирочной фольги) циклотрона ИВА Cyclone 18/9; в γ -спектрах Navar-фольги он не был выявлен. Инте-

ресно, что в картриджах через неделю после синтеза были обнаружены относительно короткоживущий изотоп ^{64}Cu ($t_{1/2} = 0,541$ сут). Фотоядерная реакция $^{65}\text{Cu}(\gamma, n)^{64}\text{Cu}$ маловероятна, поскольку ее пороговая энергия превышает 10 МэВ [5, 9]. Образование указанного изотопа из ^{65}Zn невозможно, так как последний испытывает позитронный распад или захват орбитального электрона с переходом в ^{65}Cu . Вероятнее всего, изотоп ^{64}Cu образуется при облучении в циклотроне по реакции $^{63}\text{Cu}(n, \gamma)^{64}\text{Cu}$ в очень высокой концентрации, что позволяет обнаруживать его даже через 14 периодов полураспада. Отметим, что в ряде измерений был идентифицирован радиоизотоп ^{56}Mn ($t_{1/2} = 2,6$ ч), который наблюдался ранее [8] в спектрах Navar-фольги и деталей стриппера. Этот вопрос требует дополнительных исследований, поскольку достоверная идентификация указанного радиоизотопа близостью его γ -линий с аналогичными γ -линиями от радионуклида ^{56}Co (см. таблицу 3).

Изотопы ^{92}Nb и ^{95}Nb могут образовываться при захвате протонов с последующим испусканием α -частицы стабильными изотопами ^{95}Mo и ^{98}Mo , входящими в состав как тела мишени, так и Navar-фольги. Авторы [7] не наблюдали его вследствие низкой концентрации Mo (2,2%) в Navar-фольге. Интересно появление в наших спектрах QMA интенсивного радиоизотопа ^7Be , который не наблюдался ранее другими исследователями [7, 10, 11] в облученных Navar-фольгах. Радионуклид ^7Be принадлежит к группе космогенных радионуклидов, то есть к нуклидам, непрерывно образующимся под действием космического излучения в верхних слоях атмосферы [12]. Бериллий-7 поступает на поверхность Земли в основном в виде осадков и обнаруживается в талой воде [13]. Процессы, приводящие к образованию ^7Be особенно под действием протонов, достаточно хорошо известны. Наиболее вероятными мишенями для реакций с выходом ^7Be являются ядра легких элементов C, O, N, Si и др. [12]. Основным процессом возникновения этих радионуклидов являются так называемые реакции скалывания, когда протоны и нейтроны взаимодействуют с ядрами азота и кислорода, в результате чего образуется бериллий-7. Однако для таких реакций нужны очень высокоэнергетичные частицы и их формирование в циклотроне маловероятно. Отметим, что в работе [14] бериллий (наряду с Co, Cr, Mn и V) в fM концентрациях выделялся методом капиллярного электрофореза из облученной в титановой мишени ^{18}O]-H₂O-обогащенной воды. Однако механизм попадания Be в облученную воду в указанной работе не обсуждался. По нашему мнению, радиоизотоп ^7Be может образовываться при облучении из примесных атомов B и Li, попадающих в воду при длительном хранении в стеклянной посуде. Возможные реакции: $^7\text{Li} + p = ^7\text{Be} + n$ и $^{10}\text{B} + p = ^7\text{Be} + \alpha$.

Анализ публикаций [14–18] по примесным радионуклидам в облученной воде позволяет утверждать, что примесный радиоизотопный состав облученной ^{18}O]-H₂O-обогащенной воды во многом определяется условиями облучения (длительность облучения, энергия протонов и т.д.) и примесным составом тела и в наибольшей степени окна мишени. Причем варьируются не только концентрации, но и элементный состав примесных металлических радионуклидов. Общим для всех экспериментальных исследований является наличие в облученной ^{18}O]-H₂O-обогащенной воде радиоизотопов хрома (^{51}Cr), кобальта (^{56}Co , ^{57}Co , ^{58}Co) и марганца (^{52}Mn , ^{54}Mn). Другие нуклиды наблюдались эпизодически. Так, в работе [15] при облучении серебрянодержательной мишени с Navar-окном протонами с энергией 9,6 МэВ (ионный ток 25 мкА, длительность 60 мин) кроме отмеченных выше наблюдались радиоизотопы ^{55}Fe , ^{55}Co , ^{59}Ni , ^{95}Tc , ^{96}Tc и ^{109}Cd с активностями от 4 до 900 Бк, которые были ниже референтных значений, задаваемых International Basic Safety Standards. В [14] при облучении титановой мишени наблюдались радиоизотопы ванадия и бериллия, а в [17] при облучении 17,5 МэВ протонами на циклотроне Cyclon-30 обнаружены ^{55}Co , ^{48}V , ^{95}Tc и ^{96}Tc . Детальный анализ экспериментальных результатов различных авторов осложняется тем обстоятельством, что сопоставление условий эксперимента не всегда возможно: в большинстве не приводится детальное описание условий облучения (энергия, длительность, марка циклотрона и т.д.) и полный элементный состав мишени, не обсуждаются возможные механизмы попадания радионуклидов в облученную воду. Это указывает на необходимость проведения экспериментальных исследований в конкретных производственных условиях ПЭТ Республики Беларусь.

Осаждение примесных радионуклидов металлов переменной валентности, присутствующих в облученной воде, на картриджах, используемых при синтезе ^{18}F -ФДГ и ^{18}F -холина, в литературе детально не обсуждалось. В работе [18] утверждается, что в зависимости от вида радиоизотопа на картридже QMA может осаждаться от 25 до 90% примесных металлических радиоизотопов. Однако приведенные в этой же работе экспериментальные данные свидетельствуют о несколько ином: радиоизотоп ^{51}Cr в воде прошедшей через QMA (активность на картридже 1925 Бк) не обнаруживается, т.е. имеет место 100% осаждение этого изотопа на картридже. Для других высокоактивных радионуклидов (^{52}Mn , ^{56}Co , ^{57}Co , ^{58}Co) соотношение активностей в воде, прошедшей через него, и в самом картридже составляет от 0,3 до 5%, т.е. на нем осажается свыше 95% указанных примесей. Каких-либо литературных данных по другим

картриджем нам неизвестно. Наши данные говорят о том, что часть захваченных QMA радионуклидов металлов (по нашим предварительным данным, менее 0,1%) впоследствии вымываются, попадают в зону синтеза и частично осаждаются на других картриджах (SCX, Al₂O₃). Процессы осаждения примесных радионуклидов на различных картриджах, используемых для производства РФП, требуют проведения дальнейших исследований, которые будут являться целью следующих работ.

Заключение. Обнаружено наличие долгоживущих ($t_{1/2} = 10\text{--}312$ сут) примесных радионуклидов в картриджах, используемых при производстве радиофармпрепаратов на основе изотопа ¹⁸F (¹⁸F-ФДГ и ¹⁸F-холина) в Республиканском ПЭТ-центре. Определен их изотопный состав. Большинство обнаруженных радиоизотопов являются β-излучателями, что требует строго контроля. Показано, что срок хранения картриджей QMA должен составлять не менее полугода. Рассмотрены возможные механизмы попадания примесных долгоживущих радионуклидов металлов переменной валентности в картриджи, используемые при синтезе РФП на основе ¹⁸F. В произведенных радиофармпрепаратах содержание долгоживущих радионуклидов существенно ниже референтных значений, задаваемых гигиеническими нормативами Республики Беларусь и Евросоюза. Полученные результаты могут быть использованы для минимизации радиационного воздействия на персонал при производстве РФП на основе ¹⁸F с использованием циклотрона IVA Cyclone 18/9.

ЛИТЕРАТУРА

1. Oehr, P. PET and PET-CT in oncology / P. Oehr, H.J. Biersack, R.E. Coleman. – Berlin : Springer, 2004. – 357 p.
2. Позитронно-эмиссионная томография / С.Д. Бринкевич [и др.] // Медико-биологические проблемы жизнедеятельности. – 2013. – № 2(10) – Ч. 1 : Характеристика метода. Получение радиофармпрепаратов. – С. 129–137.
3. Кодина, Г.Е. Методы получения радиофармацевтических препаратов и радионуклидных генераторов для ядерной медицины / Г.Е. Кодина, Р.Н. Красикова. – М. : МЭИ, 2014. – 282 с.
4. Firestone, R.B. Table of radioactive isotopes / R.B. Firestone, V.S. Shirley – New York: John Wiley and Sons, – 1988.
5. Физико-химические свойства элементов : справ. / под ред. Г.В. Самсонова. – Киев : Наукова думка, 1965. – 807 с.
6. Radionuclide characterization studies of radioactive waste produced at high-energy accelerators / L. Ulrici [et al.] // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. – 2006. – V. 562, № 2. – P. 596–600.
7. Gamma-ray spectrometric characterization of waste activated target components in a PET cyclotron / P. Guarino [et al.] // Cyclotrons and Their Applications – 2007 : Eighteenth International Conference. – P. 295–297.
8. Guarino, P. Measurement of activity of the predominant gamma-emitting radionuclides in activated components of a medical cyclotron plant [Electronic resource] / P. Guarino, S. Rizzo, E. Tomarchio. – Mode of access: <http://www.irpa12.org.ar/fullpapers/FP2893.pdf>.
9. Белов, А.Г. Интегральные сечения фотоядерных реакций в области гигантского дипольного резонанса / А.Г. Белов [и др.]. – Дубна : ОИЯИ, 2000. – 11 с. – (Препринт / Объед. ин-т ядер. исслед. ; P15-2000-15).
10. Niobium sputtered Havar foils for the high-power production of reactive [¹⁸F]fluoride by proton irradiation of [¹⁸O]H₂O targets / J.S. Wilson [et al.] // Applied Radiation and Isotopes. – 2008. – V. 66, № 5. – P. 565–570.
11. Measurement of the residual radioactivity induced in the front foil of a target assembly in a modern medical cyclotron / R.G. O'Donnell [et al.] // Applied Radiation and Isotopes. – 2004. – V. 60, № 2–4. – P. 539–542.
12. Лаврухина, А.К. Ядерные реакции в космических телах / А.К. Лаврухина. – М. : Наука, 1972. – 253 с.
13. Beryllium-7 wet deposition variation with storm height, synoptic classification, and tree canopy state in the mid-Atlantic USA / D.L. Karwan [et al.] // Hydrological Processes. – 2016. – V. 30, № 1 – P. 75–89.
14. Gillies, J.M. Analysis of metal radioisotope impurities generated in [¹⁸O]H₂O during the cyclotron production of fluorine-18 / J.M. Gillies, N. Najim, J. Zweit // Applied Radiation and Isotopes. – 2006. – V. 64, № 4. – P. 431–434.
15. Radioactive byproducts in [¹⁸O]H₂O used to produce ¹⁸F for [¹⁸F]FDG synthesis / Ito Shigeki [et al.] // Applied Radiation and Isotopes. – 2006. – V. 64, № 3. – P. 298–305.

16. Assessment of radionuclidic impurities in 2-[¹⁸F]fluoro-2-deoxy-D-glucose ([¹⁸F]FDG) routine production/ M. Marengo [et al.] // Applied Radiation and Isotopes. – 2008. – V. 66, № 3. – P. 295–302.
17. Radionuclide impurities in proton-irradiated [¹⁸O]H₂O for the production of ¹⁸F⁻: Activities and distribution in the [¹⁸F]FDG synthesis process / L. Bowden [et al.] // Applied Radiation and Isotopes. – 2009. – V. 67, № 2 – P. 248–255.
18. Al Rayyes, A.H. Enriched water-H₂¹⁸O purification to be used in routine ¹⁸F FDG production / A.H. Al Rayyes // Nukleonika. – 2010. – V. 55, № 3. – P. 401–405.

Поступила 20.03.2017

IMPURITY RADIONUCLIDES AT A RADIOPHARMACEUTICAL PRODUCTION BASED ON A ¹⁸F

**S. DOBROVOLSKI, A. SAVKOV, D. BRINKEVICH,
S. BRINKEVICH, N. VABISHCHEVICH**

The distribution of radionuclides in various cartridges during 18F-fluorodeoxyglucose and 18F-choline manufacture using IBA Cyclone 18/9 cyclotron was investigated in order to develop evidence-based concept of long-term storage of radioactive waste of radiopharmaceuticals for positron emission tomography. Isotopic composition of long-lived ($t_{1/2} = 10\text{--}312$ days) radionuclides was detected. It was shown that the shelf life of QMA cartridges should be at least six months. Various mechanisms of radionuclides of metals entering in cartridges at the synthesis of radiopharmaceuticals based on ¹⁸F was discussed.

Keywords: radiopharmaceuticals, radionuclide, 18F-fluorodeoxyglucose, 18F-choline.

УДК 539.21

**РАСЧЕТ ПЛОТНОСТИ ТОКА И НАПРЯЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ
ВНУТРИ ПРОВОДНИКА В УСЛОВИЯХ ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧНОСТИ****д-р техн. наук, проф. В.С. САВЕНКО, А.В. ГУНЕНКО, А.Г. СИЛИВОНЕЦ**
(Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина)

Представлены результаты теоретических исследований электропластической деформации металлов. Рассмотрено влияние импульсного тока, длительностью 10^{-4} с и плотностью 10^3 А/мм², на возникающее собственное магнитное поле внутри деформируемого образца, с учетом вторичных пондеромоторных сил, для многоходовой прокатки магния после 35 технологических переходов. Показано, что скорость диффузии магнитного поля в металл будет зависеть от проводимости и частоты тока. С увеличением частоты следования импульсов тока, магнитное и электрическое поле смещается к поверхности образца, при этом напряженность магнитного поля растет с увеличением радиуса образца, а плотность тока – уменьшается.

Ключевые слова: электропластическая деформация, виброакустические колебания, пондеромоторные эффекты, импульсный ток.

Введение. Развитие физики конденсированного состояния и современного физического материаловедения в настоящее время связано с задачами создания высокоинтенсивных технологий для получения материалов с комплексом высоких физико-механических и служебных характеристик.

Решение этой задачи реализуется при электропластической деформации металлов в условиях возбуждения их электронной подсистемы высокоэнергетическими воздействиями с целью программированного управления деформационными процессами для получения модифицированных свойств материалов. Это открывает новый путь для управления пластической деформацией металлов нетрадиционными методами с помощью высокоэнергетических воздействий при реализации электропластической деформации за счет возникающих пондеромоторных факторов.

Результаты исследований и их обсуждение. Образцы магния деформировались на многоходовом прокатном стане на 35 технологических переходах. В зоне деформации на каждом переходе через материал нагруженный выше предела текучести пропускались короткие импульсы тока длительностью 10^{-4} с и плотностью $J_m = 10^3$ А/мм². В образце происходит возбуждение электронной подсистемы металла и реализуется электропластический эффект в виде осцилляций деформирующих усилий, без существенного теплового эффекта и тепловой дилатации (рисунок 1).

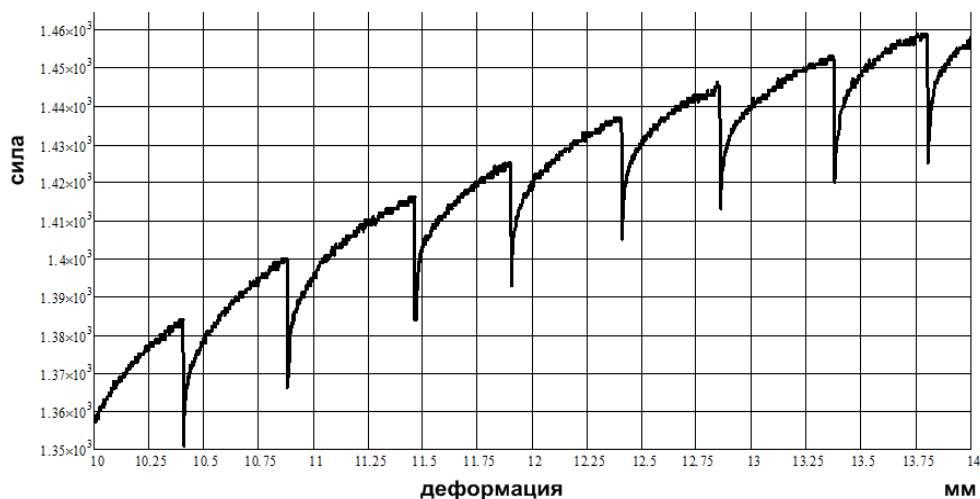


Рисунок 1. – Диаграмма осцилляций деформирующих усилий со скачками напряжений при действии импульсов тока в условиях активной деформации

Импульсный ток оказывает на деформируемый материал пондеромоторное действие, обусловленное периодическим сжатием образцов в радиальном направлении токового канала, собственным магнитным полем тока и возбуждением в образцах на фронте нарастания импульса, виброакустических упругих

ультразвуковых колебаний с частотой следования импульсов (рисунок 2). В [1–3] показано, что при одной и той же плотности тока электропластический эффект зависит от параметров образца: радиуса и электрического сопротивления.

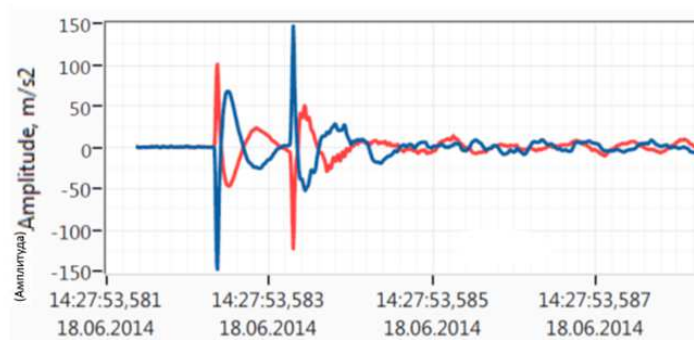


Рисунок 2. – Переходные процессы виброакустических упругих ультразвуковых колебаний от действий импульсов тока при деформации близкой к разрушению

Пондеромоторное пинч-действие импульсного тока обуславливает появление собственного магнитного поля в виде силовых кольцевых линий напряженности вокруг электронной плазмы движущихся зарядов, смещая их к оси образца в поперечном направлении под действием поля Холла, что приводит к перераспределению напряженности магнитного поля \vec{H} в приповерхностных слоях металла.

Возникновение скин-эффекта обуславливается действием высокочастотного тока, который индуцирует вихревые токи в проводнике, которые препятствуют равномерному распределению плотности тока по поперечному сечению проводника, при этом, плотность тока на оси оказывается меньше, чем у его поверхности.

Таким образом, для технологических расчетов реализации электропластической деформации при различных способах обработки металлов давлением необходимо учитывать физические условия создания пондеромоторных эффектов для динамического пинч- и скин-эффектов в упругой пластической деформации металлов с участием собственного магнитного поля тока.

Положим, что постоянное электрическое поле в проводнике существует только при наличии тока, которое поддерживается внешним источником электродвижущей силы. Из закона Фарадея – источником электродвижущей силы является изменяющийся магнитный поток, порождающий вихревое электрическое поле с возникновением индукционных токов Фуко, которые экранируют переменное магнитное поле от проникновения вглубь проводника [4–6].

Электромагнитное поле для неподвижных тел и сред описывается системой уравнений Максвелла, уравнениями связи и законом Ома. Так как ток изменяется по гармоническому закону, следовательно, с учетом $i = \int j dS$, величины j, E, D, B, H также изменяются гармонически.

Воспользуемся символическим методом расчета.

Пусть $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$ – изображение $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$. Операцию дифференцирования по времени заменяем умножением на $i\omega$, где i – мнимая единица. Умножим изменение магнитной индукции, которое порождает вихревое электрическое поле, на проводимость σ , учитывая закон Ома $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, будем иметь следующее выражение:

$$\text{rot } \vec{j} = i\omega \sigma \mu_0 \vec{H} . \tag{1}$$

Следовательно, циркуляция магнитного поля, с учетом уравнения связи $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ и закона Ома, примет вид

$$\text{rot } \vec{H} = \sigma \vec{E} + i\omega \epsilon \epsilon_0 \vec{E} . \tag{2}$$

Учитывая, что $\omega \epsilon \epsilon_0 \ll \sigma$, то вторым слагаемым в правой части уравнения (2) можно пренебречь, тогда получим

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} . \tag{3}$$

Возьмем операцию rot от обеих частей уравнения (1) и учтем (3), при этом известно, что $\text{rot}(\text{rot } \vec{H}) = \text{grad}(\text{div } \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H}$, имеем

$$\text{grad}(\text{div } \vec{j}) - \nabla^2 \vec{j} = i\omega\sigma\mu_0 \vec{j}. \quad (4)$$

Возьмем операцию дивергенции от обеих частей выражения (3), из теории поля имеем $\text{div}(\text{rot } \vec{H}) = 0$, тогда $\text{div } \vec{j} = 0$, в таком случае (4) примет вид

$$\nabla^2 \vec{j} = i\omega\sigma\mu_0 \vec{j}. \quad (5)$$

Оператор набла ∇ в цилиндрических координатах

$$\nabla^2 = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right); \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}; \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), \quad (6)$$

здесь плотность тока \vec{j} не зависит от α и z и направлена вдоль оси цилиндра. Получаем следующее выражение:

$$\frac{d^2 j}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dj}{dr} = i\omega\sigma\mu_0 j. \quad (7)$$

Введем переменную k , с учетом $k^2 = -i\omega\sigma\mu_0$, тогда (7) представим как

$$\frac{d^2 j}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dj}{dr} + k^2 j = 0, \text{ или } \frac{d^2 j}{d(kr)^2} + \frac{1}{kr} \frac{dj}{d(kr)} + j = 0. \quad (8)$$

Исходя из сказанного выше решение уравнения (8) запишем в виде

$$j = Aj_0(kr) + BN_0(kr), \quad (9)$$

где $j_0(kr)$ – функция Бесселя нулевого порядка первого рода;

$N_0(qr)$ – функция Бесселя нулевого порядка второго рода.

Функция Бесселя нулевого порядка второго рода $N_0(qr)$ при $qr = 0$ обращается в бесконечность, тогда принимаем $B = 0$.

Из уравнения (1) выразим \vec{H} , учитывая, что $\text{rot } \vec{j} = [\nabla, \vec{j}]$, получим

$$\vec{H} = \frac{1}{k^2} \text{rot } \vec{j} = a_0 \left(-\frac{1}{k^2} \frac{d\vec{j}}{dr} \right) = a_0 \left(-\frac{1}{k^2} \frac{d}{dr} (Aj_0(kr)) \right),$$

$$\vec{H} = a_0 \left(-\frac{A}{k^2} \frac{d(j_0(kr))}{dr} \frac{d(kr)}{dr} \right), \quad (10)$$

где a_0 – единичный орт оси $O\alpha$;

$$\frac{d(j_0(kr))}{dr} = -J_1(kr), \quad (11)$$

где $J_1(kr)$ – функция Бесселя первого порядка первого рода.

$$\vec{H} = a_0 \frac{A}{k} J_1(kr). \quad (12)$$

Определим \vec{H} из закона полного тока $\oint \vec{H}d\vec{l} = \int \vec{j}d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{D}d\vec{S}$ на поверхности образца, учитывая, что $r = R$, и приравняв его к значению \vec{H} , полученному из соотношения (12), найдем величину A :

$$\frac{I}{2\pi R} = \frac{A}{k} J_1(kR), \quad (13)$$

$$A = \frac{kI}{2\pi R J_1(kR)}. \quad (14)$$

$$\vec{j} = \frac{I}{z_0} \frac{J_0(kr)kI}{2\pi R J_1(kR)} \vec{j}, \quad (15)$$

где \vec{z}_0 – единичный орт оси Oz ,

$$\vec{H} = \alpha_0 \frac{J_1(kr)I}{2\pi R J_1(kR)}. \quad (16)$$

Рассчитаем напряженность магнитного поля и плотность тока внутри образца с учетом возникающих вторичных пондеромоторных сил в условиях внешних энергетических воздействий для электропластической деформации многоходовой прокатки магния для конечных геометрических параметров после 35 переходов.

Плотность тока и напряженность магнитного поля при частоте 600 Гц. Примем во внимание, что:

$$\sigma = 22,7 \cdot 10^3 \frac{\text{См}}{\text{мм}} \text{ – удельная проводимость магния;}$$

$$\mu = 1,257 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Гн}}{\text{мм}} \text{ – магнитная постоянная;}$$

$$s = 4 \text{ мм}^2 \text{ – площадь поперечного сечения проводника;}$$

$$R = 0,5 \text{ мм} \text{ – радиус сечения проводника.}$$

Силовые параметры электропластической деформации составляют:

$$j = 10^3 \frac{\text{А}}{\text{мм}^2} \text{ – плотность тока;}$$

$$\tau \sim 10^{-4} \text{ с} \text{ – длительность импульсов тока;}$$

$$\nu = 600 \text{ Гц} \text{ – частота следования импульсов.}$$

Рассчитаем вклад пондеромоторных факторов, возникающих при электропластической деформации магния, нагруженного выше предела текучести, в условиях электропластичности, для плотности тока и напряженности собственного магнитного поля от частоты следования импульсов тока и радиуса образца в соответствии с единичным обжатием на технологическом переходе при многоходовой прокатке.

Введем коэффициент $k = \sqrt{\omega\sigma\mu}$. Для значения

$$\omega = 2\pi \cdot 600 = 3769,91 \frac{\text{Рад}}{\text{с}},$$

коэффициент k будет равен

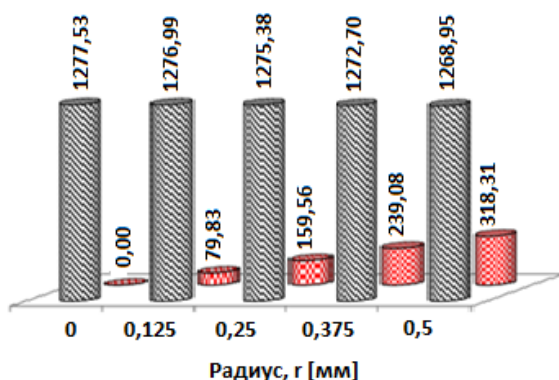
$$k = \sqrt{\omega\sigma\mu} = 0,328 \text{ мм}^{-1}.$$

Если на поверхности образца величина $R\sqrt{\omega\sigma\mu} = 0,164$, тогда функция Бесселя первого рода первого порядка примет значение $J_1(kR) = 0,082$.

В таблице 1 и на рисунках 3, 4 предложены расчеты и графические представления значений плотности тока и напряженности собственного магнитного поля с частотами следования импульсов тока 600 Гц для технологических переходов многоходовой прокатки магния в диапазоне радиусов 0,125–2,0 мм.

Таблица 1. – Плотность тока и напряженность собственного магнитного поля при частоте следования импульсов тока в 600 Гц

$J_1(k_1R)$	0,081719444				
k_1 при 600 Гц	0,327979068				
Радиус, r [мм]	0	0,125	0,25	0,375	0,5
Функция Бесселя нулевого порядка первого рода	1	0,999579851	0,99831992	0,99622181	0,993288152
Функция Бесселя первого порядка первого рода	0	0,020494385	0,04096294	0,06137987	0,081719444
Плотность тока, J [А/мм ²]	1277,529244	1276,992487	1275,38289	1272,70249	1268,954659
Напряженность магнитного поля, H [А/мм]	0	79,82880329	159,556989	239,084082	318,3098862



▨ Плотность тока, J [А/мм²] ▣ Напряженность магнитного поля, H [А/мм]

Рисунок 3. – Напряженность магнитного поля и плотности тока от радиуса образца магния с частотой следования импульсов 600 Гц

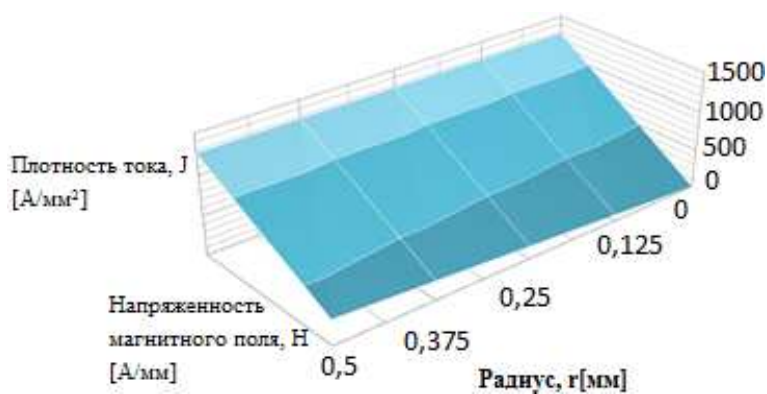


Рисунок 4. – Изменение напряженности магнитного поля и плотности тока от радиуса образца магния с частотой следования импульсов 600 Гц

Плотность тока и напряженность магнитного поля при частоте 800 Гц. Учитывая данные из предыдущего расчета, положим:

$$\omega = 2\pi \cdot 800 = 5026,548 \frac{\text{Рад}}{\text{с}},$$

$$k = \sqrt{\omega\mu} = 0,379 \text{ мм}^{-1}.$$

На поверхности проводника $R\sqrt{\omega\mu} = 0,758$, тогда функция Бесселя первого рода первого порядка примет значение $J_1(kR) = 0,352$.

В таблице 2 и на рисунках 5, 6 предложены расчеты и графические представления значений плотности тока и напряженности собственного магнитного поля с частотами следования импульсов тока 800 Гц для технологических переходов многоходовой прокатке магния в диапазоне радиусов 0,125–2,0 мм.

Таблица 2. – Плотность тока и напряженность собственного магнитного поля при частоте следования импульсов тока в 800 Гц

$J_1(k_2R)$	0,352199958				
k_2 при 800 Гц	0,378717606				
Радиус, r [мм]	0	0,5	1	1,5	2
Функция Бесселя нулевого порядка первого рода	1	0,991055882	0,96446339	0,92093501	0,861634574
Функция Бесселя первого порядка первого рода	0	0,094255673	0,18598413	0,27273346	0,352199958
Плотность тока, J [А/мм ²]	85,56897548	84,80363627	82,5281443	78,8034649	73,7291875
Напряженность магнитного поля, H [А/мм]	0	21,2965049	42,0220015	61,6224927	79,57747155

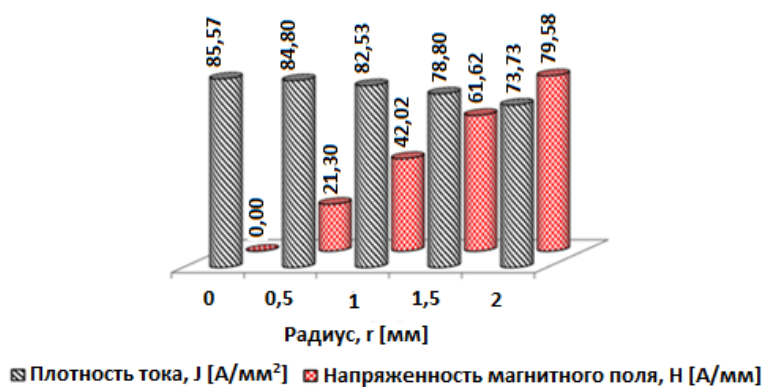


Рисунок 5. – Напряженность магнитного поля и плотности тока от радиуса образца магния с частотой следования импульсов 800 Гц

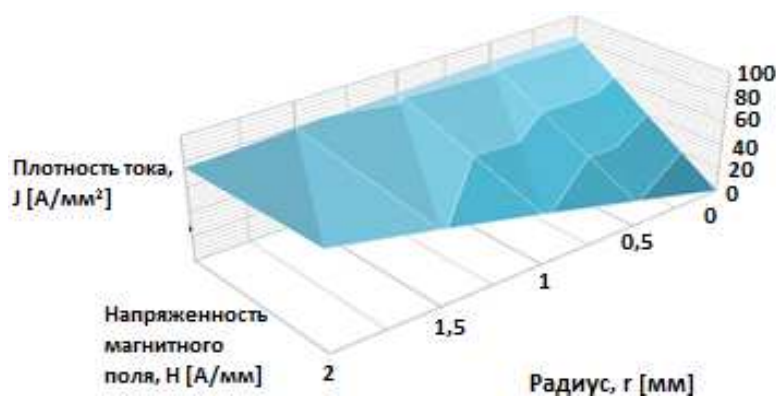


Рисунок 6. – Изменение напряженности магнитного поля и плотности тока от радиуса образца магния с частотой следования импульсов 800 Гц

Из рисунков 3–6 видно, что напряженность магнитного поля и плотность тока в образце магния, нагруженного выше предела текучести, зависит от его радиуса на соответствующем технологическом переходе, при этом напряженность магнитного поля увеличивается, а плотность тока – уменьшается. С увеличением частоты следования импульсов магнитное и электрическое поле перемещаются к стенке образца.

Основные результаты. Для технологических процессов электропластической деформации при многоходовой прокатке металлов важно рассматривать физические условия создания пондеромоторных факторов для конкретных технически важных материалов, с целью определения оптимальных значений

пинч- и скин-эффектов при одинаковых параметрах импульсного тока. Импульсный ток, длительностью 10^{-4} с и плотностью $J_m = 10^3$ А/мм², пропущенный через металл, нагруженный выше предела текучести, реализует явление электропластичности. Возникающие деформационные напряжения в образце за счет пондеромоторных факторов обуславливают виброакустические колебания кристаллической решетки в различных направлениях. Скорость диффузии магнитного поля в металл будет зависеть от проводимости и частоты тока. С увеличением частоты следования импульсов тока магнитное и электрическое поля смещаются к поверхности образца, при этом напряженность магнитного поля растет с увеличением радиуса образца, а плотность тока – уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савенко, В.С. Фундаментальные и прикладные исследования электропластической деформации металлов / В.С. Савенко, О.А. Троицкий. – Минск : ИВЦ Минфина, 2013. – 375 с.
2. Рощупкин, А.М. О влиянии электрического тока и магнитного поля на взаимодействие дислокаций с точечными дефектами в металлах / А.М. Рощупкин, И.Л. Батаронов // Физика твердого тела. – 1988. – Т. 30, № 11. – С. 3311.
3. Molotskii, M. Magnetic effects in electroplasticity of metals / M. Molotskii, V. Fleurov // Physical Review. – 1991. – Vol. 52, № 22. – P. 311–317.
4. Баранов, Ю.В. Физические основы электроимпульсной и электропластической обработок и новые материалы / Ю.В. Баранов [и др.]. – М. : МГИУ, 2001. – 844 с.
5. Савенко, В.С. Механическое двойникование и электропластичность металлов в условиях внешних энергетических воздействий : моногр. / В.С. Савенко. – 2-е изд. доп. и перераб. – Минск : БГАФК, 2003. – 203 с.
6. Savenko, V.S. Electroplastic effect under the simultaneous superposition and magnetic fields / V.S. Savenko // Journal of applied physics, 1999. – № 5. – P. 1–4.

Поступила 27.02.2017

THE CALCULATION OF THE CURRENT DENSITY AND MAGNETIC FIELD INSIDE THE CONDUCTOR IN TERMS OF ELECTROELASTICITY

V. SAVENKO, A. GURENKO, A. SILIVONETS

In article results of theoretical researches of electroplastic deformation of metals are provided. Influence of a pulse current, lasting 10^{-4} pages and density of 10^3 And/mm² on originating own magnetic field in a deformable sample, taking into account secondary ponderomotive forces, for multiple-pass rolling of magnesium after 35 technological transitions is considered. It is shown that the speed of diffusion of a magnetic field in metal, will depend on conductivity and the frequency of current. With increase in frequency of following of pulses of current, the magnetic and electric field displaces to a sample surface, at the same time magnetic field strength grows with increase in radius of a sample, and the current density – decreases.

Keywords: electroplastic deformation, vibroacoustic vibrations, ponderomotive effects, pulse current.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.983

ДВУМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ С ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ КУММЕРА В ЯДРЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА В ПРОСТРАНСТВЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

*канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. СКОРОМНИК
(Полоцкий государственный университет)*

Рассматривается двумерное интегральное преобразование с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера в ядре в пространстве интегрируемых функций в области $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset R \times R$ плоскости. В работе даются условия ограниченности, описание образа изучаемого оператора, а также устанавливается формула его обращения. Рассматривается также соответствующее интегральное уравнение первого рода с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера в ядре. Устанавливается формула решения исследуемого уравнения в замкнутой форме, даются условия его разрешимости в пространстве интегрируемых функций. Доказанные утверждения обобщают известные результаты для соответствующего одномерного интегрального уравнения первого рода.

Ключевые слова: интегральное преобразование, интегральное уравнение, вырожденная гипергеометрическая функция Куммера, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.

1. Введение. Рассмотрим интегральное преобразование в левой части (1.1)

$$\left(I_{\mathbf{a}+}^{\alpha, \beta, \lambda} f \right) (\mathbf{x}) \equiv \int_{a_1}^{x_1} \int_{a_2}^{x_2} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} F(\beta; \alpha; \lambda(\mathbf{x}-\mathbf{t})) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} > \mathbf{a}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in R^2$; $\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in R^2$ – векторы;

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = \sum_{k=1}^2 x_k t_k$ – их скалярное произведение, в частности $\mathbf{x} \cdot \mathbf{1} = \sum_{k=1}^2 x_k$ для $\mathbf{1} = (1, 1)$;

$\mathbf{x} > \mathbf{t}$ означает $x_1 > t_1, x_2 > t_2$ и аналогично для знака нестроого неравенства « \geq »;

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in R^2$, $\lambda_i > 0 (i = 1, 2)$; $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in R^2$; $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in R^2$; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in R^2$, $0 < \alpha_i < 1 (i = 1, 2)$;

$k = (k_1, k_2) \in N = N \times N (k_1 \in N, k_2 \in N)$ – индекс с $k! = k_1! k_2!$ и $|k| = k_1 + k_2$;

$$D^k = \frac{\partial^{|k|}}{(\partial x_1)^{k_1} (\partial x_2)^{k_2}}; \quad d\mathbf{t} = dt_1 \cdot dt_2; \quad (\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha-1} = (x_1-t_1)^{\alpha_1-1} (x_2-t_2)^{\alpha_2-1}; \quad f(\mathbf{t}) = f(t_1, t_2);$$

$F(\beta; \alpha; \lambda(\mathbf{x}-\mathbf{t}))$ – функция вида

$$F(\beta; \alpha; \lambda(\mathbf{x}-\mathbf{t})) = \prod_{j=1}^2 {}_1F_1(\beta_j; \alpha_j; \lambda_j(x_j - t_j)) = {}_1F_1(\beta_1; \alpha_1; \lambda_1(x_1 - t_1)) \cdot {}_1F_1(\beta_2; \alpha_2; \lambda_2(x_2 - t_2)),$$

представляющая собой произведение вырожденных гипергеометрических функций Куммера ${}_1F_1(a; c; z)$.

Вырожденная гипергеометрическая функция Куммера определяется по формуле [1, § 1], [2, § 1.6]

$${}_1F_1(a; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} = \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(a, b; c; \frac{z}{b}\right), \quad |z| < \infty, \quad (1.2)$$

здесь $(a)_k$ – символ Похгаммера: $(a)_0 \equiv 1$, $(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1) (a \in C; k \in N)$;

${}_2F_1(a, b; c; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, определяемая при комплексных $a, b, c \in \mathbb{C}$ и $|z| < 1$ гипергеометрическим рядом

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}$$

с соответствующим аналитическим продолжением

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt$$

для $z \in \mathbb{C}$, $0 < \operatorname{Re} b < \operatorname{Re} c$, $(|\arg(1-z)| < \pi, z \neq 1)$ [3, формулы (2.1(2)) и (2.1.(10))].

Областью интегрирования оператора преобразования в левой части (1.1) является прямоугольник с противоположными вершинами $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$:

$$\left\{ \mathbf{x} : x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, -\infty < a_1 < x_1 < \infty, -\infty < a_2 < x_2 < \infty \right\};$$

в частности, это может быть октант с вершиной $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$: $\left\{ \mathbf{x} : x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x_1 < \infty, 0 \leq x_2 < \infty \right\}$.

Конструкция вида (1.1) обобщает соответствующее одномерное интегральное преобразование в [1, § 37.1].

В работе преобразование (1.1) изучается в пространстве $L_{\bar{p}}(\Omega) = L_{\bar{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $-\infty < a_i < b_i < \infty$ ($i = 1, 2$), $\bar{p} = (p_1, p_2)$ ($1 \leq p_i < \infty, i = 1, 2$), функций $f(x_1, x_2)$, имеющих конечную норму [1, § 24.4]:

$$\|f\|_{\bar{p}} = \left\{ \int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} |f(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right]^{p_2/p_1} dx_2 \right\}^{1/p_2} < \infty. \quad (1.3)$$

Даются условия ограниченности оператора преобразования в левой части (1.1), описание образа этого оператора, а также устанавливается формула его обращения. Рассматривается также соответствующее интегральное уравнение первого рода с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера в ядре. Устанавливается формула решения исследуемого уравнения в замкнутой форме, даются условия его разрешимости в пространстве интегрируемых функций. Доказанные утверждения обобщают результаты, полученные ранее для соответствующего одномерного интегрального уравнения первого рода [1, § 37.1], [4].

2. Предварительные сведения.

Интеграл

$$\left(I_{a+}^{\alpha} \varphi \right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a, \quad (2.1)$$

где $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ – левосторонний интеграл Римана – Лиувилля дробного порядка α [1].

Выражение

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f \right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad x > a, n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1, \quad (2.2)$$

называется левосторонней производной порядка $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$.

Выражение

$$\left(I_{\mathbf{a}+}^{\alpha} \varphi \right)(\mathbf{x}) = \left(I_{a_1+, a_2+}^{(\alpha_1, \alpha_2)} \varphi \right)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_{a_1}^{x_1} \int_{a_2}^{x_2} \frac{\varphi(\mathbf{t})}{(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{1-\alpha}} dt, \quad \alpha > 0, \quad (2.3)$$

определенное для функций $\varphi(\mathbf{x})$, заданных при $x_1 > a_1, x_2 > a_2$, будем называть (левосторонним) смешанным дробным интегралом Римана – Лиувилля порядка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, где $I_{a_i+}^{\alpha_i}$ ($i = 1, 2$) – операторы преобразования (2.1).

$$\left(D_{\mathbf{a}+}^{\alpha} f\right)(\mathbf{x}) = \left(D_{a_1+, a_2+}^{(\alpha_1, \alpha_2)} f\right)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \int_{a_1}^{x_1} \int_{a_2}^{x_2} \frac{f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}}{(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha}} \quad 0 < \alpha < 1, \quad (2.4)$$

называют смешанной дробной производной Римана – Лиувилля порядка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ [1, § 24.2], где $D_{a_i+}^{\alpha_i}$ ($i = 1, 2$) – операторы преобразования (2.2).

Выражение (2.4) определено для функций, заданных на $x_1 > a_1, x_2 > a_2$. Мы будем использовать для них следующие обозначения:

$$I_{\mathbf{a}+}^{\alpha} \varphi = \begin{cases} I_{\mathbf{a}+}^{\alpha} \varphi, & \alpha > 0, \\ D_{\mathbf{a}+}^{-\alpha} \varphi, & \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Введем пространство $L_p = L_p(\Omega)$ [1, § 1.2] измеримых на $\Omega = [a, b], -\infty < a < b < \infty$ функций $f(x)$, для которых $\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$, где $1 \leq p < \infty$, с нормой $\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

Через $I_{a+}^{\alpha}(L_p(a, b))$, $\text{Re}(\alpha) > 0$ обозначим класс функций $g(x)$, представимых левосторонним дробным интегралом (2.1) порядка α от суммируемой функции: $g = I_{a+}^{\alpha} f, f \in L_p(a, b), 1 \leq p < \infty$ [1, § 2.6].

Введем пространство

$$I_{\mathbf{a}+}^{\alpha}(L_{\bar{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = I_{a_1+, a_2+}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(L_{\bar{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \left\{ f : f = I_{a_1+, a_2+}^{(\alpha_1, \alpha_2)} \varphi, \varphi \in L_{\bar{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), -\infty < a_i < b_i < \infty, i = 1, 2 \right\} \quad (2.5)$$

функций, являющихся смешанными дробными интегралами от функций из пространства (1.3) $L_{\bar{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$,

$$1 < p_1 < \frac{1}{\alpha_1}, 1 < p_2 < \frac{1}{\alpha_2}; 0 \leq \alpha_1 < 1, 0 \leq \alpha_2 < 1.$$

Пространство $I_{\mathbf{a}+}^{\alpha}(L_{\bar{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ играет ту же роль для уравнения (1.1), что и пространство $AC([a, b])$ абсолютно непрерывных функций для классического интегрального уравнения Абеля [1, § 2.2].

Теорема 1 [1, теорема 25.2]. Пусть $1 \leq p_i \leq \infty, 1 \leq q_i \leq \infty, \alpha_i > 0$ ($i = 1, 2$). Левосторонний оператор смешанного дробного интегрирования (2.5) $I_{\mathbf{a}+}^{\alpha} = I_{a_1+, a_2+}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ ограничен из $L_{p_1, p_2}(R^2)$ в $L_{q_1, q_2}(R^2)$ тогда и только тогда, когда $0 < \alpha_i < 1, 1 < p_i < \frac{1}{\alpha_i}, q_i = \frac{p_i}{(1 - \alpha_i p_i)}$ ($i = 1, 2$).

Из теоремы 1 следует

$$I_{\mathbf{a}+}^{\alpha}(L_{p_1, p_2}) \subset L_{q_1, q_2}(R^2), \quad q_i = \frac{p_i}{1 - \alpha_i p_i} \quad (i = 1, 2).$$

Теорема 2 [1, теорема 37.1]. Одномерный оператор

$$\left(I_{a+}^{\alpha, \beta, \lambda} f\right)(x) \equiv \int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} F(\beta; \alpha; \lambda(x-t)) f(t) dt \quad (x > a)$$

ограниченно действует из пространства $L_p(a, b), p \geq 1$ на пространство $I_{a+}^{\alpha}(L_p(a, b)) \subset L_p(a, b), -\infty < a < b < \infty$.

Преобразование Лапласа функции $f(x)$ ($x > 0$) определяется формулой [1, формула (1.119)]

$$Lf = (L f)(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Сверткой для преобразования Лапласа является интеграл [2, формула (1.4.10)]

$$[h * \varphi] = [h * \varphi](x) = \int_0^x h(x-t)\varphi(t) dt;$$

теорема о свертке [2, формула (1.4.12)]

$$L[h * \varphi](s) = L(h)(s)L(\varphi)(s). \quad (2.6)$$

При выполнении условий $\operatorname{Re}(b) > 0$, $\operatorname{Re}(s) > \max(0, \operatorname{Re} k)$, $|s| > k$ имеем место формула [3, формула (6.10(5))]

$$L\left\{t^{b-1} {}_1F_1(a, c; kt); s\right\} = \Gamma(b)s^{-b} {}_2F_1(a, b; c; ks^{-1}) = \Gamma(b)(s-k)^{-b} {}_2F_1\left(c-a, b; c; \frac{k}{k-s}\right), \quad |s-k| > |k|. \quad (2.7)$$

Двумерное преобразование Лапласа функции $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2)$ ($x_1 > 0, x_2 > 0$) определяется формулой [1, формула (24.49)]:

$$Lf = (Lf)(s) = \int_0^x e^{-st} f(t) dt, \quad s = (s_1, s_2), \quad s_1 > 0, \quad s_2 > 0; \quad \mathbf{x} \in R_{++}^2 = R_+ \times R_+, \quad (2.8)$$

где R_{++}^2 – октант $\{t: t_1 \geq 0, t_2 \geq 0\}$.

Свертка Лапласа двух функций $h(\mathbf{t}) = h(t_1, t_2)$ и $\varphi(\mathbf{t}) = \varphi(t_1, t_2)$ определяется через интеграл [2, формула 1.4.21]:

$$h * \varphi \equiv [h * \varphi](\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} h(\mathbf{x}-\mathbf{t})\varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (\mathbf{x} \in R_{++}^2 = R_+ \times R_+), \quad (2.9)$$

где $\int_0^{\mathbf{x}} := \int_0^{x_1} \int_0^{x_2}$; $h(\mathbf{x}-\mathbf{t}) = h(x_1-t_1, x_2-t_2)$. Для свертки (2.9) теорема (2.6) также выполняется.

Справедлива формула [1, формула 24.50]:

$$\left(LI_{\mathbf{0}+}^{\alpha} f\right)(s) = s^{-\alpha} (Lf)(s), \quad (2.10)$$

где $LI_{\mathbf{0}+}^{\alpha} f$ – оператор преобразования $\left(LI_{\mathbf{0}+}^{\alpha} f\right)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{f(\mathbf{t})}{(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{1-\alpha}} dt, \alpha > 0$.

3. Действие оператора (1.1). Значение преобразования Лапласа равенства (1.1)

В силу равенства ${}_1F_1(a; c; 0) = 1$ получаем

$$I_{\mathbf{a}+}^{\alpha, \beta, 0} = I_{\mathbf{a}+}^{\alpha}. \quad (3.1)$$

Это позволяет оператор в левой части (1.1) считать некоторым обобщением смешанного дробного интеграла порядка α , определяемого по формуле (2.3).

Исходя из представления ядра оператора преобразования (1.1) через ряд (1.2) и воспользовавшись формулой $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+k)}{(z)_k}$ ($\operatorname{Re} z > -n, n = 1, 2, \dots, z \neq 0, 1-1, -2, \dots$) [1, формула 1.56], выводим следующую формулу, отражающую структуру оператора (1.1):

$$\begin{aligned}
 I_{\mathbf{a}+}^{\alpha, \beta, \lambda} &= I_{\mathbf{a}+}^{\alpha_1, \beta_1, \lambda_1} I_{\mathbf{a}+}^{\alpha_2, \beta_2, \lambda_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta_1)_k}{k!} \lambda_1^k I_{\mathbf{a}+}^{\alpha_1+k} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta_2)_k}{k!} \lambda_2^k I_{\mathbf{a}+}^{\alpha_2+k} = \\
 &= I_{\mathbf{a}+}^{\alpha_1} \left(E - \lambda_1 I_{\mathbf{a}+}^1 \right)^{-\beta_1} I_{\mathbf{a}+}^{\alpha_2} \left(E - \lambda_2 I_{\mathbf{a}+}^1 \right)^{-\beta_2} = I_{\mathbf{a}+}^{\alpha} \left(E - \lambda I_{\mathbf{a}+}^1 \right)^{-\beta}, \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

где E – единичный оператор.

Отмеченная в (3.1) связь с дробным интегралом (2.3) дает возможность заключить, что оператор (1.1) обладает в пространстве $L_{\overline{p}}(R^2)$ таким же действием, как и оператор $I_{\mathbf{a}+}^{\alpha}$. Справедлива теорема.

Теорема 3. Оператор в левой части (1.1) ограниченно действует из пространства $L_{p_1, p_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $p \geq 1$, на пространство $I_{\mathbf{a}+}^{\alpha}(L_{\overline{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$, $1 < p_1 < \frac{1}{\alpha_1}$, $1 < p_2 < \frac{1}{\alpha_2}$; $0 \leq \alpha_1 < 1, 0 \leq \alpha_2 < 1$, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, -\infty < \mathbf{a} < \mathbf{b} < \infty$.

Доказательство непосредственно следует из свойства ${}_1F_1(a; c; 0) = 1$ и теоремы 1 и теоремы 2.

Если в (1.1) $\mathbf{a} = 0$ или $\mathbf{a} > 0$, но функция $f(\mathbf{t})$ доопределена нулем на интервале $0 < \mathbf{t} < \mathbf{a}$, то применяем двумерное преобразование Лапласа (2.8) к левой части равенства (1.1). Записываем оператор (1.1) как свертку Лапласа (2.9). Тогда по теореме о свертке (2.6), вычислив преобразование Лапласа ядра по формуле (2.7), получаем следующее значение преобразования Лапласа равенства (1.1)

$$\begin{aligned}
 (L I_{\mathbf{0}+}^{\alpha, \beta, \lambda} f)(s) &= \int_0^{\infty} e^{-s_2 x_2} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t_2)^{\alpha_2 - 1}}{\Gamma(\alpha_2)} F(\beta_2; \alpha_2; \lambda_2(x_2 - t_2)) dt_2 \times \\
 &\times \int_0^{\infty} e^{-s_1 x_1} \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - t_1)^{\alpha_1 - 1}}{\Gamma(\alpha_1)} F(\beta_1; \alpha_1; \lambda_1(x_1 - t_1)) f(t_1, t_2) dt_1 = s^{-\alpha} (1 - \lambda s^{-1})^{-\beta} (Lf)(s), \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

$s_1 > 0, s_2 > 0; \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$.

Сравнивая правую часть формулы (3.3) с правой частью формулы (3.2), замечаем, что она формально получается из (3.2) заменой $I_{\mathbf{a}+}^1$ на s^{-1} .

Рассмотрим теперь вопрос об обращении оператора преобразования (1.1).

4. Обращение оператора (1.1).

Как показывает формула (3.3), преобразование Лапласа $(Lh)(s)$ ядра $h(\mathbf{x})$ оператора (1.1) и соответствующая ему обратная величина $[(Lh)(s)]^{-1}$ имеют одинаковую форму, отличаясь лишь значениями параметров. В простейшем случае оператора дробного интегрирования $I_{\mathbf{0}+}^{\alpha}$, которому соответствует $(Lh)(s) = s^{-\alpha}$ с условием $\text{Re}(\alpha) > 0$, для преобразования Лапласа s^{α} ядра обратного оператора $D_{\mathbf{0}+}^{\alpha}$ условие $\text{Re}(\alpha) > 0$ вынуждает нас представить s^{α} в виде $s^{\alpha} = s^n s^{-(n-\alpha)}$, где $\text{Re}(n-\alpha) > 0$, причем значению s^n соответствует оператор $\left(\frac{d}{d\mathbf{x}}\right)^n = D_{\mathbf{0}+}^n$ [1, равенство (18.12)]. Подобные операции необходимо осуществлять и при обращении оператора (1.1).

Учитывая сказанное, построим решение уравнения (1.1) $(I_{\mathbf{a}+}^{\alpha, \beta, \lambda} f)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \mathbf{x} > \mathbf{a}$. Пользуясь формулой (3.3) и равенством ${}_1F_1(a, c; x) = e^x {}_1F_1(c - a, c; -x)$ [3, формула (6.3(7))], формально приходим к следующему представлению решения уравнения (1.1):

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}) &= \left\{ \left(I_{\mathbf{a}+}^{\alpha, \beta, \lambda} \right)^{-1} g \right\}(\mathbf{x}) = I_{\mathbf{a}+}^{-\alpha} \left(E - \lambda I_{\mathbf{a}+}^1 \right)^{\beta} g(\mathbf{x}) = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} (\mathbf{x} - \mathbf{t})^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{t})) \frac{dg(\mathbf{t})}{d\mathbf{t}} d\mathbf{t}. \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Следующая теорема дает условия обратимости оператора (1.1).

Теорема 4. Пусть задано уравнение (1.1) $(I_{\mathbf{a}+}^{\alpha, \beta, \lambda} f)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$, $0 \leq a_i < x_i < b_i < \infty$, $0 < \alpha_i < 1$, $\lambda_i > 0$ ($i = 1, 2$); $g(\mathbf{x})$ – заданная на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset R \times R$ функции; $f(\mathbf{x})$ – искомая функция (в случае $\mathbf{a} > 0$ полагается, что $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) = 0$ при $0 < x < \mathbf{a}$), тогда его решение f в классе $L_{\bar{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\mathbf{b} < \infty$, существует и единственно, если $g(\mathbf{x}) \in I_{\mathbf{a}+}^{\alpha} (L_{\bar{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$, $\bar{p} \geq 1$. В случае $\bar{p} = (p_1, p_2) = (1, 1)$ оно может быть представлено формулой (4.1), если еще выполняются дополнительные условия $g(\mathbf{x}) \in I_{\mathbf{a}+}^{\alpha} (L_{\bar{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$, $g(\mathbf{a}) = g(a_1, a_2) = 0$.

Доказательство следует из существования, единственности и совпадения соответствующих обобщенных преобразований Лапласа уравнений и их обращений, а также из существования всех приведенных операторов в указанных классах функций g и f .

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Kilbas, A.A. Theory and applications of fractional differential equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo // North – Holland Mathematics Studies 204. – Amsterdam : Elsevier.xv, 2006. – 523 p.
3. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973. – Т. 1 : Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра. – 294 с.
4. Скоромник, О.В. Интегральные преобразования с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера и нормированной функцией Бесселя в ядрах и интегральные уравнения первого рода в пространстве суммируемых функций / О.В. Скоромник // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 104–110.

Поступила 20.03.2017

TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL TRANSFORM WITH THE CONFLUENT HYPERGEOMETRIC KUMMER FUNCTION IN THE KERNEL AND INTEGRAL EQUATION OF THE FIRST KIND IN THE SPACE OF SUMMABLE FUNCTIONS

O.V. SKOROMNIK

Two-dimensional integral transform involving confluent hypergeometric Kummer function in the kernel is studied on the space of summable functions on a finite domain $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset R \times R$ of a plane. Mapping properties such as the boundedness, the range of the considered transform are given, and the inversion formula is established. Integral equation of the first kind with the confluent hypergeometric Kummer function in the kernel also is considered. The solution of the investigating equation in the closed form is established, and conditions for its solvability in the space of summable functions are given. The results generalize the well known findings for corresponding one-dimensional integral equation.

Keywords: *integral transform, integral equation, confluent hypergeometric Kummer function, space of summable functions, fractional integrals and derivatives.*

УДК 514

ЗАКОН ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБОБЩЕННОГО ИМПУЛЬСА

*д-р техн. наук С.Г. ЕХИЛЕВСКИЙ, канд. физ.-мат. наук О.В. ГОЛУБЕВА,
канд. физ.-мат. наук Д.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук Ю.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет)*

Введено понятие обобщенного импульса ранга n $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$, $i = \overline{1, m}$, $k = 0, n$, являющееся обобщением импульсов в преобразовании Остроградского $F_L(x): T^{2n} X_m \rightarrow T^{2n} X_m$, индуцированного невырожденной функцией Лагранжа $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$.

Исследован закон преобразования компонент импульсов порядка $k = 0, n$ ранга n при замене координат в базе X_m расслоения $T^n X_m$, они преобразуются как тензоры типа $(0, 1)$ (ковекторы):

$$\overline{p_k^i(n)}(\overline{x}, \overline{\dot{x}}, \dots, \overline{x}^{(2n-k)}) = \sum_{j=1}^m p_k^j(n)(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)}) \cdot \frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j} = p_k^j(n)(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)}) \cdot \frac{\partial x^j(\overline{x})}{\partial \overline{x}^i},$$

$$k = 0, n, \quad i = \overline{1, m}.$$

Ключевые слова: уравнения Эйлера – Лагранжа, гладкие многообразия, расслоенное пространство скоростей, импульс системы, преобразование Остроградского, невырожденная функция.

Введение. Между основным уравнением динамики и законами сохранения имеется принципиальная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса. Так, если задана сила, действующая на материальную точку и начальные условия, то можно вывести закон движения, определить траекторию, величину и направление скорости в любой момент времени и т. п. Законы же сохранения не дают нам прямых указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены и потому в природе не происходят.

Таким образом, законы сохранения проявляются как принципы запрета: любое явление, при котором не выполняется хотя бы один из законов сохранения, запрещено, и в природе такие явления никогда не наблюдаются. Всякое явление, при котором не нарушается ни один из законов сохранения, в принципе может происходить.

Рассмотрим следующий пример. Может ли покоящееся тело за счет внутренней энергии начать двигаться? Этот процесс не противоречит закону сохранения энергии. Нужно лишь, чтобы возникающая кинетическая энергия точно равнялась убыли внутренней энергии.

На самом деле такой процесс никогда не происходит, ибо он противоречит закону сохранения импульса. Раз тело покоилось, то его импульс был равен нулю. А если оно станет двигаться, то его импульс сам собой увеличится, что невозможно. Поэтому внутренняя энергия тела не может превратиться в кинетическую, если тело не распадется на части.

Если же допустить возможность распада этого тела на части, то запрет, налагаемый законом сохранения импульса, снимается. При этом возникшие осколки могут двигаться так, чтобы их центр масс оставался в покое, – а только этого и требует закон сохранения импульса.

Поэтому, чтобы внутренняя энергия покоящегося тела могла превратиться в кинетическую, это тело должно распасться на части. Если же есть еще один какой-либо закон, запрещающий распад этого тела на части, то его внутренняя энергия и масса покоя будут постоянными величинами.

Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных и др.); одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления, и в макромире с его классическими представлениями. Дифференциально-геометрическое рассмотрение импульса-энергии в физической и математической постановке изложен в литературе [1–8, 11]. Свойства тензора энергии-импульса при простейших линейных преобразованиях координаты – времени объясняет законы сохранения импульса в макроскопической системе. Но тензор энергии-импульса в дифференциальной форме является инвариантным относительно произвольного невырожденного преобразования координат, что приводит к локальным законам сохранения энергии-импульса, например, в физике элементарных частиц. Функция Лагранжа определяет некоторую вариационную задачу, например, минимизацию интеграла действия в механической системе и динамику этой системы (уравнения

Эйлера – Лагранжа) [6]. Если интегрант (подынтегральная функция в простейшей вариационной задаче) вырожден относительно переменных времени либо координат, то это вырождение приводит соответственно к закону сохранения энергии либо импульса относительно данной координаты [7]. Задача Лагранжа содержит также уравнения связи (ограничения на краевые условия неизвестной функции). Переменные в уравнениях связи могут содержать производные выше второго порядка по времени от координат. Эти производные неявно входят в функцию Лагранжа, зависящую от ограничений. Поэтому рассмотренная задача актуальна в робототехнике, где перемещение механизмов могут иметь старшие производные по времени. Данная работа является продолжением работы [9].

Основные определения и математические объекты.

Пусть X_m – гладкое многообразие размерности m ; $T^n X_m$ – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m .

$L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ – невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$ [9].

Определение 1. Пусть D_t^k – оператор k -кратного полного дифференцирования по переменной t

$$p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)^{(n)} \quad k = \overline{0, n}, i = \overline{1, m},$$

а в любой другой системе локальных координат $\bar{x}(\bar{x})$ в базе X_m ,

$$\bar{p}_{k,n}^i(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(2n-k)}) = \sum_{j=1}^m p_{k,n}^j(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_{k,n}^j(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} \text{ (свертка)} \quad i, j = \overline{1, m}, 0 \leq k \leq n$$

называется преобразованием Остроградского в расслоении скоростей $T^{2n} X_m$, а функции

$p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)})$ зависят от производных координат не более $(2n - k)$ порядка (нижний индекс – номер порядка импульса, верхний – номер координаты) и называются импульсами порядка k по i -й координате.

Обобщением определения 1 является следующее определение.

Определение 2. Система функций $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$, таких, что

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2 \min(n,p)-k)}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)^{(p)}, \quad k = \overline{0, n}, i = \overline{1, m},$$

называется обобщенным импульсом ранга n для функции $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$,

где $L(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)})$ – локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$;

$p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2 \min(n,p)-k)})$ – функция, называемая k -й компонентой обобщенного импульса P_n ранга n по i -й координате или импульсами порядка k (k -импульсами) по i -й координате обобщенного импульса P_n ранга n .

Замечание 1. Обобщенный импульс ранга n определен для функций $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$.

Из определения $p_k^i(n) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)^{(p)}$ следует, что при $k > p$, $l \geq 0 \Rightarrow l+k > p \Rightarrow \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \equiv 0$ и все $p_k^i(n) \equiv 0$ (тривиальные импульсы), то есть для нетривиальных

импульсов $k \leq p$. Поскольку $k \leq n, k \leq p \Rightarrow k \leq \min(n, p)$, то в **определении 2** можно считать, что $k = \overline{0, \min(n, p)}$, $i = \overline{1, m}$.

Максимальный порядок производной по t в $p_k^i(n)$ равен $l + l + k = 2 \cdot l + k$ при $l + k > p \Rightarrow \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \equiv 0$, и коэффициент при производной $x^{(l+k)i}$ равен 0, значит, при определении максимального порядка производной по t можно считать $l + k \leq p$, кроме того,

$$l \leq n - k \Leftrightarrow l + k \leq n \Rightarrow l + k \leq \min(n, p) \Rightarrow l \leq \min(n, p) - k \Rightarrow 2 \cdot l + k \leq 2 \cdot (\min(n, p) - k) + k = 2 \cdot \min(n, p) - 2 \cdot k + k = 2 \cdot \min(n, p) - k.$$

Хотя более грубая оценка порядка старшей производной по t в $p_k^i(n)$ дает

$$l \leq n - k \Leftrightarrow l + k \leq n \Rightarrow 2 \cdot l + k \leq 2 \cdot (n - k) + k = 2 \cdot n - 2 \cdot k + k = 2 \cdot n - k.$$

При $p > n$, $l + k \leq n - k + k = n$ максимальный порядок производной по t в $L(x, \dots, x)^{(p)}$ больше максимального порядка производной по t переменной, по которой производится частное дифференцирование в $p_k^i(n) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)^{(p)}$.

При $p < n$, поскольку $l + k \leq n - k + k = n$ при $l + k > p$ $\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \equiv 0$ и часть членов в сумме

$$\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)^{(p)}$$

будет тождественно равна 0.

Пограничным является случай $p = n$, который будет рассмотрен в дальнейшем без ограничения общности рассмотрения.

При $p = n$ в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$ получаем импульсы в преобразовании Остроградского:

$$p_{0,n}^i = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)^{(p)} = \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^i} - D_t \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^i} \right)^{(p)} + \dots + (-1)^{n-1} D_t^{n-1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i}} \right)^{(p)},$$

которые представляют собой нуль-импульсы (функционалы в уравнении Эйлера – Лагранжа):

$$p_{1,n}^i = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)^{(p)} = \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^i} - D_t \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^i} \right)^{(p)} + \dots + (-1)^{n-1} D_t^{n-1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i}} \right)^{(p)}$$

$$p_{2,n}^i = \sum_{l=0}^{n-2} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)^{(p)} = \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^i} - D_t \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^i} \right)^{(p)} + \dots + (-1)^{n-2} D_t^{n-2} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i}} \right)^{(p)}$$

...

$$p_{n,n}^i = \sum_{l=0}^{n-n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)^{(p)} = \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^i}.$$

Теорема 1 [10]. Пусть $\bar{x}^{-i} = S^i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ $S : (x) \rightarrow (\bar{x})$ – невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m$, $p = \max(s, l)$, $i = \overline{1, m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(l)i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial x^{(s)j}} = \begin{cases} C_l^s \cdot D_t^{l-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right), C_l^s = \frac{l!}{s!(l-s)!}, l! = \prod_{k=1}^l k, l \geq s \\ 0, l < s \end{cases}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2 (о связи импульсов k -го порядка рангов n и $n+1$). Пусть $L : T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$.

$L(x, x, \dots, x)^{(p)}$ – локальная запись функции $L : T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ при выборе локальных координат в базе расслоения X_m , где

$$p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)^{(p)}}{\partial x^{(l+k)i}} \right) \quad k = \overline{0, n}, i = \overline{1, m} \text{ – импульс } k\text{-го порядка ранга } n,$$

$$p_{k,n+1}^i = \sum_{l=0}^{n+1-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)^{(p)}}{\partial x^{(l+k)i}} \right) \text{ – импульс } k\text{-го порядка ранга } n+1.$$

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$p_{k,n+1}^i = p_{k,n}^i + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)^{(p)}}{\partial x^{(n+1)i}} \right).$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} p_{k,n+1}^i &= \sum_{l=0}^{n+1-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)^{(p)}}{\partial x^{(l+k)i}} \right) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)^{(p)}}{\partial x^{(l+k)i}} \right) + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)^{(p)}}{\partial x^{(n+1-k+k)i}} \right) = \\ &= \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)^{(p)}}{\partial x^{(l+k)i}} \right) + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)^{(p)}}{\partial x^{(n+1)i}} \right) = p_{k,n}^i + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)^{(p)}}{\partial x^{(n+1)i}} \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Математическая постановка задачи.

Пусть $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ – функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$. Исследовать закон преобразования компонент обобщенного импульса P_n ранга n при замене локальной системы координат $x = \bar{x}(x)$ в базе X_m расслоения скоростей $T^n X_m$.

Теорема 3 (закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе X_m расслоения $T^{2n} X_m$).

При замене $(\bar{x}) \rightarrow (x(\bar{x}))$: в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n} X_m$ импульсы $\overline{p_k^i(n)}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})^{(2n-k)}$ преобразуются как **тензоры** типа (0,1) (ковекторы):

$$\overline{p_k^i(n)}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})^{(2n-k)} = \sum_{j=1}^n p_k^j(n)(x, x, \dots, x)^{(2n-k)} \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(n)(x, x, \dots, x)^{(2n-k)} \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i},$$

$k = \overline{0, n}$, $i, j = \overline{1, m}$.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по рангу обобщенного импульса n .
База индукции $n = 1$.

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^m), \bar{x} = (\bar{x}^{-1}, \bar{x}^{-2}, \dots, \bar{x}^{-m})$$

$$L(x, \dot{x}) = L(x, D_t x)$$

$$\bar{L}(x, \dot{x}) = \bar{L}(x, D_t \bar{x}) = L(x(x), \dot{x}(x)) = L(x(x), D_t(x(x))).$$

Для импульса 0-го порядка (0-импульса) 1-го ранга в локальных координатах имеем:

$$\begin{aligned} p_{0,1}^{-i} &= \sum_{l=0}^{1-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x})}{\partial x^{(l+0)i}} \right) = -D \left(\frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x})}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) + \frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x})}{\partial \bar{x}^{-i}} = \\ &= \sum_{s=1}^m -D_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^{-i}} + \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) + \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^{-i}} + \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) = \\ &= \sum_{s=1}^m -D_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) + \sum_{s=1}^m -D_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) + \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^{-i}} + \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) = \\ &= -\sum_{s=1}^m D_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) - \sum_{s=1}^m D_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) + \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^{-i}} + \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^{-i}} \right). \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^{-i}} = 0$, то по ранее доказанной **теореме 1** $\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^{-i}} = \frac{\partial D_t^0 x^s}{\partial D_t^{1-i} \bar{x}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{x}^{-i}} = 0$ и $0 < 1$ (это

и понятно, так как x^s не зависит от \bar{x}^{-i}). Продолжим преобразование:

$$\begin{aligned} &-\sum_{s=1}^m D_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) - \sum_{s=1}^m D_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) + \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial \bar{x}^{-i}} + \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) = \\ &= \sum_{s=1}^m -D_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) + \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial \bar{x}^{-i}} + \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) = \\ &= \sum_{s=1}^m -D_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) + \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial \bar{x}^{-i}} + \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial \bar{x}^{-i}}. \end{aligned}$$

Так как $\frac{\partial x^s(x)}{\partial \bar{x}^{-i}} = \frac{\partial x^s(x)}{\partial \bar{x}^{-i}} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{-i}} \left(\frac{\partial x^s(x)}{\partial x^{-k}} \cdot \bar{x}^{-k} \right) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial x^s(x)}{\partial x^{-k}} \cdot \frac{\partial \bar{x}^{-k}}{\partial \bar{x}^{-i}} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial x^s(x)}{\partial x^{-k}} \cdot \delta_i^k = \frac{\partial x^s(x)}{\partial \bar{x}^{-i}} = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^{-i}}$,

где $\delta_i^k = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$ – символ Кронекера, то

$$\frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} = \frac{\partial \overset{\cdot}{x}}{\partial \overset{-}{x}} = C_1^{(1)s} \cdot D_t^{1-1} \cdot \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x}} = 1 \cdot D_t^0 \cdot \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x}} = \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x}}.$$

$$\frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} = \frac{\partial}{\partial \overset{-}{x^i}} (D_t \overset{\cdot}{x^s}) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial \overset{-}{x^i}} \left(\frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^k}} \cdot D_t \overset{-}{x^k} \right) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial \overset{-}{x^i}} \left(\frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^k}} \cdot \overset{-}{x^k} \right) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i} \partial \overset{-}{x^k}} \cdot \overset{-}{x^k}$$

$$D_t \left(\frac{\partial}{\partial \overset{-}{x^i}} (\overset{\cdot}{x^s}) \right) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i} \partial \overset{-}{x^k}} \cdot \overset{-}{x^k} = D_t \left(\frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} \right) = \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}}.$$

Этот результат следует и из **теоремы 1**:

$$\frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} = \frac{\partial \overset{\cdot}{x}}{\partial \overset{-}{x}} = C_1^{(0)i} \cdot D_t^{1-0} \cdot \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x}} = 1 \cdot D_t^1 \cdot \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x}} = D_t \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x}}.$$

Далее

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^m -D_t \left(\frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{\cdot}{x^s}} \cdot \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} \right) + \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{\cdot}{x^s}} \cdot \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} + \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{\cdot}{x^s}} \cdot \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} = \\ & = \sum_{s=1}^m -D_t \left(\frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{\cdot}{x^s}} \right) \cdot \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} - \sum_{s=1}^m D_t \left(\frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} \right) \cdot \frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{\cdot}{x^s}} + \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{\cdot}{x^s}} \cdot \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} + \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{\cdot}{x^s}} \cdot \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} = \\ & = \sum_{s=1}^m -D_t \left(\frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{\cdot}{x^s}} \right) \cdot \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} - \sum_{s=1}^m D_t \left(\frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} \right) \cdot \frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{\cdot}{x^s}} + \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{\cdot}{x^s}} \cdot D_t \left(\frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} \right) + \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{\cdot}{x^s}} \cdot \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} = \\ & = \sum_{s=1}^m -D_t \left(\frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{\cdot}{x^s}} \right) \cdot \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} + \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{\cdot}{x^s}} \cdot \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} = \sum_{s=1}^m \left(-D_t \left(\frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{\cdot}{x^s}} \right) + \frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{\cdot}{x^s}} \right) \cdot \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} = \\ & = \sum_{s=1}^m p_{0,1}^s \cdot \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} = p_{0,1} \cdot \frac{\partial \overset{\cdot}{x}}{\partial \overset{-}{x^i}}. \end{aligned}$$

Так как $p_{0,1}^s = \sum_{l=0}^{1-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{(l+s)i}{x}} \right) = -D_t \left(\frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{\cdot}{x^s}} \right) + \frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{\cdot}{x^s}}$.

Утверждение теоремы доказано для импульса 0-го порядка(0-импульса) 1-го ранга.

Для импульса 1-го порядка (1-импульса) 1-го ранга в локальных координатах имеем:

$$\begin{aligned} p_{1,1}^{-i} & = \sum_{l=0}^{1-1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial \overset{\cdot}{L}(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{(l+1)i}{x}} \right) = \left(\frac{\partial \overset{\cdot}{L}}{\partial \overset{-}{x^i}} \right) = \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{\cdot}{x^s}} \cdot \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} + \frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{\cdot}{x^s}} \cdot \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} \right) = \\ & = \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{\cdot}{x^s}} \cdot \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}} + \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x})}{\partial \overset{\cdot}{x^s}} \cdot \frac{\partial \overset{\cdot}{x^s}}{\partial \overset{-}{x^i}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Второе слагаемое в формуле (1) $\sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial \dot{x}^{-i}} = 0$, что следует из **теоремы 1**:

$$\frac{\partial x^s}{\partial \dot{x}^{-i}} = \frac{\partial D_t^0 x^s(x)}{\partial D_t^{1-i} x} = \frac{\partial x^s(x)}{\partial x^{-(1)i}} = \delta_1^0 \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial x^{-i}} = 0,$$

в связи с тем, что $l = 0 < 1 = s$ (иначе $-x^s$ не зависит от \dot{x}^{-i}).

Для первого слагаемого в формуле (1) (по **теореме 1**):

$$\frac{\partial x^s}{\partial \dot{x}^{-i}} = \frac{\partial x^s}{\partial x^{(1)i}} = C_1^1 \cdot D_t^{1-1} \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial x^{-i}} = 1 \cdot D_t^0 \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial x^{-i}} = \frac{\partial x^s(x)}{\partial x^{-i}},$$

то, упрощая формулу (1), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial \dot{x}^{-i}} + \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial \dot{x}^{-i}} &= \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial \dot{x}^{-i}} = \\ &= \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial x^{-i}} = \sum_{s=1}^m p_1^s \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial x^{-i}} = p_1^s \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial x^{-i}} \end{aligned}$$

Утверждение теоремы доказано для импульса 1-го порядка(1-импульса) 1-го ранга. Таким образом, база индукции доказана.

Индуктивный переход.

Пусть утверждение верно для n и для любой $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$

$$\begin{aligned} p_0^{-i}(n) &= p_{i,0}^{-i} = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, \dot{x})}{\partial x^{(l+0)i}} \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, \dot{x})}{\partial x^{(l+0)j}} \right) \right) \cdot \frac{\partial x^j(x)}{\partial \dot{x}^{-i}} = \\ &= \sum_{j=1}^m p_0^j(n) \cdot \frac{\partial x^j(x)}{\partial \dot{x}^{-i}} = p_0^j(n) \cdot \frac{\partial x^j(x)}{\partial x^{-i}} = \sum_{l=0}^n \sum_{s=0}^n \sum_{k=1}^m (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, \dot{x})}{\partial x^{(s)k}} \frac{\partial x^k(x)}{\partial x^{(l)i}} \right), \quad 1 \leq i \leq m. \end{aligned} \quad (2)$$

Правая часть в формуле (2) записана на основании теоремы о производной сложной функции:

$$\frac{\partial L(x, \dots, \dot{x})}{\partial x^{(l+0)i}} = \sum_{s=0}^n \sum_{k=1}^m (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, \dot{x})}{\partial x^{(s)k}} \frac{\partial x^k(x)}{\partial x^{(l)i}} \right)$$

Нужно доказать, что:

$$\begin{aligned} p_0^{-i}(n+1) &= p_{0,n+1}^{-i} = \sum_{l=0}^{n+1-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^{(l+0)i}} \right) = \sum_{s=1}^m \left(\sum_{l=0}^{n+1-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^{(l+0)s}} \right) \right) \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial \dot{x}^{-i}} = \\ &= \sum_{s=1}^m p_0^s(n+1) \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial \dot{x}^{-i}} = p_0^s(n+1) \cdot \frac{\partial x^s(x)}{\partial x^{-i}}. \end{aligned}$$

По теореме о производной сложной функции:
$$\frac{\partial L(x, \dots, x, \bar{x})}{\partial x^{(l)i}} = \sum_{k=1}^m \sum_{s=0}^{n+1} \frac{\partial L(x, \dots, x, \bar{x})}{\partial x^{(s)k}} \frac{\partial x^{(s)k}}{\partial x^{(l)i}}$$

$$p_0(n+1) = \sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, \bar{x})}{\partial x^{(l)i}} \right) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, \bar{x})}{\partial x^{(n+1)k}} \frac{\partial x^{(n+1)k}}{\partial x^{(l)i}} \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{n+1} \sum_{s=0}^n (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, \bar{x})}{\partial x^{(s)k}} \frac{\partial x^{(s)k}}{\partial x^{(l)i}} \right) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, \bar{x})}{\partial x^{(n+1)k}} \frac{\partial x^{(n+1)k}}{\partial x^{(l)i}} \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^n \sum_{s=0}^n (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, \bar{x})}{\partial x^{(s)k}} \frac{\partial x^{(s)k}}{\partial x^{(l)i}} \right) + \sum_{k=1}^m \sum_{s=0}^n (-1)^{n+1} D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, \bar{x})}{\partial x^{(s)k}} \frac{\partial x^{(s)k}}{\partial x^{(n+1)i}} \right) = \quad (3)$$

$$= \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, \bar{x})}{\partial x^{(n+1)k}} \frac{\partial x^{(n+1)k}}{\partial x^{(l)i}} \right) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^n \sum_{s=0}^n (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, \bar{x})}{\partial x^{(s)k}} \frac{\partial x^{(s)k}}{\partial x^{(l)i}} \right). \quad (4)$$

Последнее слагаемое в выражении (3) равно 0 по **теореме 1**: $\frac{\partial x^{(s)k}}{\partial x^{(n+1)i}} = 0$, при $0 \leq s \leq n < n+1$.

Учитывая равенство (2), по предположению индукции последнее слагаемое в сумме (4) равно

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^n \sum_{s=0}^n (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, \bar{x})}{\partial x^{(s)k}} \frac{\partial x^{(s)k}}{\partial x^{(l)i}} \right) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, \bar{x})}{\partial x^{(l)j}} \right) \right) \cdot \frac{\partial x^{(n+1)k}}{\partial x^{(l)i}} \quad (5)$$

По **теореме 1**:
$$\frac{\partial x^{(n+1)k}}{\partial x^{(l)i}} = C_{n+1}^l D_t^{n+1-l} \left(\frac{\partial x^{(n+1)k}}{\partial x^{(l)i}} \right). \quad (6)$$

Принимая во внимание выражение (6), преобразуем первое слагаемое в сумме (4), используя формулу Лейбница производной порядка l произведения двух функций f, g :

$$D_t^l (fg) = \sum_{p=0}^l C_l^p D_t^p (f) D_t^{l-p} (g), C_l^p = \frac{l!}{p!(l-p)!}, l! = \prod_{k=1}^l k:$$

$$\sum_{l=0}^{n+1} \sum_{k=1}^m (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, \bar{x})}{\partial x^{(n+1)k}} \frac{\partial x^{(n+1)k}}{\partial x^{(l)i}} \right) = \sum_{l=0}^{n+1} \sum_{k=1}^m (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, \bar{x})}{\partial x^{(n+1)k}} C_{n+1}^l D_t^{n+1-l} \left(\frac{\partial x^{(n+1)k}}{\partial x^{(l)i}} \right) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l C_{n+1}^l \sum_{p=0}^l C_l^p D_t^p \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, \bar{x})}{\partial x^{(n+1)k}} \right) D_t^{l-p} D_t^{n+1-l} \left(\frac{\partial x^{(n+1)k}}{\partial x^{(l)i}} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l C_{n+1}^l \sum_{p=0}^l C_l^p D_t^p \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, \bar{x})}{\partial x^{(n+1)k}} \right) D_t^{n+1-p} \left(\frac{\partial x^{(n+1)k}}{\partial x^{(l)i}} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^m \sum_{p=0}^{n+1} D_t^p \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, x)}{\partial x^{(n+1)k}} \right) D_t^{n+1-p} \left(\frac{\partial x^k(x)}{\partial x^{-i}} \right) \sum_{l=p}^{n+1} (-1)^l C_{n+1}^l C_l^p = \quad (7)$$

$$C_{n+1}^l C_l^p = \frac{(n+1)!}{l!(n+1-l)!} \frac{l!}{p!(l-p)!} = \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!} \frac{(n+1-p)!}{(l-p)!(n+1-p-(l-p))!} = C_{n+1}^p C_{n+1-p}^{l-p} \quad (8)$$

Введем новую переменную $m = l - p$ и преобразуем последнюю сумму в выражении (7) с учетом соотношения (8):

$$\sum_{l=p}^{n+1} (-1)^l C_{n+1}^l C_l^p = \sum_{l=p}^{n+1} (-1)^l C_{n+1}^p C_{n+1-p}^{l-p} = \sum_{m=0}^{n+1-p} (-1)^{m+p} C_{n+1}^p C_{n+1-p}^m = (-1)^p C_{n+1}^p \sum_{m=0}^{n+1-p} (-1)^m C_{n+1-p}^m \quad (9)$$

При $p = n + 1$ преобразуем выражение (9):

$$(-1)^p C_{n+1}^p \sum_{m=0}^{n+1-p} (-1)^m C_{n+1-p}^m = (-1)^{n+1} C_{n+1}^{n+1} \sum_{m=0}^{n+1-(n+1)} (-1)^m C_{n+1-(n+1)}^m = (-1)^{n+1}.$$

При $p < n + 1$ сумма в (9) равна:

$$(-1)^p C_{n+1}^p \sum_{m=0}^{n+1-p} (-1)^m C_{n+1-p}^m = (-1)^p C_{n+1}^p \sum_{m=0}^{n+1-p} C_{n+1-p}^m (-1)^m 1^{n+1-p-m} = (-1)^p C_{n+1}^p (1 + (-1))^{n+1-p} = 0,$$

то есть

$$\sum_{l=p}^{n+1} (-1)^l C_{n+1}^l C_l^p = \begin{cases} (-1)^{n+1}, & p = n + 1 \\ 0, & p < n + 1 \end{cases} = (-1)^{n+1} \delta_{n+1}^p, \quad \delta_{n+1}^p = \begin{cases} 1, & p = n + 1 \\ 0, & p < n + 1 \end{cases} \text{ - символ Кронекера.} \quad (10)$$

Заменяем последнюю сумму $\sum_{l=p}^{n+1} (-1)^l C_{n+1}^l C_l^p$ в формуле (6) полученным в (10) выражением:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \sum_{p=0}^{n+1} D_t^p \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, x)}{\partial x^{(n+1)k}} \right) D_t^{n+1-p} \left(\frac{\partial x^k(x)}{\partial x^{-i}} \right) \sum_{l=p}^{n+1} (-1)^l C_{n+1}^l C_l^p = \\ & = \sum_{k=1}^m \sum_{p=0}^{n+1} D_t^p \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, x)}{\partial x^{(n+1)k}} \right) D_t^{n+1-p} \left(\frac{\partial x^k(x)}{\partial x^{-i}} \right) (-1)^{n+1} \delta_{n+1}^p = \\ & = \sum_{k=1}^m \sum_{p=0}^{n+1} D_t^p \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, x)}{\partial x^{(n+1)k}} \right) D_t^{n+1-p} \left(\frac{\partial x^k(x)}{\partial x^{-i}} \right) (-1)^{n+1} \delta_{n+1}^p = \\ & = \sum_{k=1}^m D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, x)}{\partial x^{(n+1)k}} \right) D_t^{n+1-(n+1)} \left(\frac{\partial x^k(x)}{\partial x^{-i}} \right) (-1)^{n+1} \delta_{n+1}^{n+1} = \sum_{k=1}^m (-1)^{n+1} D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, x)}{\partial x^{(n+1)k}} \right) \frac{\partial x^k(x)}{\partial x^{-i}}. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано равенство:

$$\sum_{l=0}^{n+1} \sum_{k=1}^m (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, x)}{\partial x^{(n+1)k}} \right) \frac{\partial x^k(x)}{\partial x^{-i}} = \sum_{k=1}^m (-1)^{n+1} D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, x)}{\partial x^{(n+1)k}} \right) \frac{\partial x^k(x)}{\partial x^{-i}}. \quad (11)$$

Подставляя полученный в выражении (11) результат в сумму (4) и учитывая формулу (5), получим

$$\begin{aligned}
 p_0(n+1) &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, x)}{\partial x^{(n+1)k}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{(l)j}} \right) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^n \sum_{s=0}^n (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, x)}{\partial x^{(s)k}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{(l)j}} \right) = \\
 &= \sum_{k=1}^m (-1)^{n+1} D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, x)}{\partial x^{(n+1)k}} \right) \frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} + \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, x)}{\partial x^{(l)j}} \right) \right) \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} = \\
 &= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, x)}{\partial x^{(l)s}} \right) + (-1)^{n+1} D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, x)}{\partial x^{(n+1)k}} \right) \right) \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} = \\
 &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x, x)}{\partial x^{(l)s}} \right) \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} = \sum_{k=1}^m p_0^k(n+1) \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}}.
 \end{aligned}$$

Индуктивный переход для импульсов 0-го порядка ранга n доказан.

Для импульсов $p_{n+1, n+1}$ порядка $(n+1)$ ранга $(n+1)$ имеем:

$$\begin{aligned}
 p_{n+1, n+1} &= \sum_{l=0}^{n+1-(n+1)} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+n+1)i}} \right) = \sum_{l=0}^0 (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+n+1)i}} \right) = \\
 &= (-1)^0 D_t^0 \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(0+n+1)i}} \right) = \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} = \sum_{j=1}^m \sum_{p=0}^{n+1} \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(p)j}} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x^{(n+1)i}} = \\
 &= \sum_{j=1}^m \sum_{p=0}^{n+1} \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(p)j}} \cdot \delta_{n+1}^p \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x^{-i}} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)j}} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x^{-i}} = \sum_{j=1}^m p_{n+1, n+1}^j \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x^{-i}}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Так как в выражении (12) $\frac{\partial x^j}{\partial x^{(n+1)i}} \equiv 0$ для $0 \leq p \leq n$, а для $p = n+1$ (по **теореме 1**):

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^{(n+1)i}} = C_{n+1}^{n+1} \cdot D_t^{n+1-(n+1)} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x^{-i}} = D_t^0 \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x^{-i}} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{-i}},$$

то есть
$$\frac{\partial x^j}{\partial x^{(n+1)i}} = \begin{cases} 0, 0 \leq p \leq n \\ \frac{\partial x^j}{\partial x^{-i}}, p = n+1 \end{cases} = \delta_{n+1}^p \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x^{-i}}, \quad \delta_i^k = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases} \text{ – символ Кронекера.}$$

Индуктивный переход для импульсов n -го порядка ранга n доказан.

Теорема доказана.

Из замечания 1 в начале работы следует

Теорема 4. Если $(\bar{x}) \rightarrow (x(\bar{x}))$ – любая невырожденная замена координат в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n} X_m$ для функции $L: T^P X_m \rightarrow \mathfrak{X}$, тогда компоненты обобщенного импульса ранга $n \geq p$ порядка $k=0, n$ $\overline{p_k^i(n)}(x, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{\cdot}, \dots, \bar{x}^{\cdot})^{(2p-k)}$, $i=1, m$ преобразуются как **тензоры** типа (0,1) (ковекторы)

$$\overline{p_k^i(n)}(x, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{\cdot}, \dots, \bar{x}^{\cdot})^{(2p-k)} = \sum_{j=1}^n p_k^j(n)(x, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{\cdot}, \dots, \bar{x}^{\cdot})^{(2p-k)} \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(n)(x, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{\cdot}, \dots, \bar{x}^{\cdot})^{(2p-k)} \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i},$$

$$k=0, n, \quad i=1, m.$$

Из теоремы 4 следует корректность определения 2.

Теорема 5. Обобщенный импульс ранга $n: P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{\cdot}, \dots, \bar{x}^{\cdot})^{(2n-k)} = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, \bar{x}^{\cdot}, \dots, \bar{x}^{\cdot})^{(p)}}{\partial \bar{x}^{(l+k)i}} \right), \quad k=0, n, \quad i=1, m,$$

не зависит от выбора локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^P X_m$ $n \geq p$ (обобщенный импульс порядка $k=0, n$ ранга n является геометрическим инвариантом).

Замечание 2. Пусть $L: T^P X_m \rightarrow \mathfrak{X}$. При $p > n$ импульсы порядка $k=0, n$ ранга n , вообще говоря, тензорами не являются. Для примера рассмотрим закон преобразования импульсов 0-го и 1-го порядков ранга 1:

$$p_k^{-i}(n) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, \bar{x}^{\cdot}, \dots, \bar{x}^{\cdot})^{(p)}}{\partial \bar{x}^{(l+k)i}} \right).$$

По теореме 1:

$$\frac{\partial x^{(k)j}}{\partial \bar{x}^{-i}} = C_k^0 D_t^k \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-i}} \right), \quad \frac{\partial x^{(k)j}}{\partial \bar{x}^{-i}} = \begin{cases} C_k^1 D_t^{k-1} \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-i}} \right), & \text{при } k \geq 1 \\ 0, & \text{при } k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p_0^{-i}(1) &= \sum_{l=0}^{1-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, \bar{x}^{\cdot}, \dots, \bar{x}^{\cdot})^{(p)}}{\partial \bar{x}^{(l+0)i}} \right) = -D_t \left(\frac{\partial L(x, \dots, \bar{x}^{\cdot}, \dots, \bar{x}^{\cdot})^{(p)}}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) + \frac{\partial L(x, \dots, \bar{x}^{\cdot}, \dots, \bar{x}^{\cdot})^{(p)}}{\partial \bar{x}^{-i}} = -D_t \left(\sum_{k=0}^p \sum_{j=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, \bar{x}^{\cdot}, \dots, \bar{x}^{\cdot})^{(p)}}{\partial \bar{x}^{(k)j}} \frac{\partial x^{(k)j}}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) + \\ &+ \sum_{k=0}^p \sum_{j=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, \bar{x}^{\cdot}, \dots, \bar{x}^{\cdot})^{(p)}}{\partial \bar{x}^{(k)j}} \frac{\partial x^{(k)j}}{\partial \bar{x}^{-i}} = - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p D_t \left(\frac{\partial L(x, \dots, \bar{x}^{\cdot}, \dots, \bar{x}^{\cdot})^{(p)}}{\partial \bar{x}^{(k)j}} \right) C_k^1 D_t^{k-1} \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) - \\ &- \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p \frac{\partial L(x, \dots, \bar{x}^{\cdot}, \dots, \bar{x}^{\cdot})^{(p)}}{\partial \bar{x}^{(k)j}} C_k^1 D_t (D_t^{k-1} \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-i}} \right)) + \sum_{k=0}^p \sum_{j=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, \bar{x}^{\cdot}, \dots, \bar{x}^{\cdot})^{(p)}}{\partial \bar{x}^{(k)j}} C_k^0 D_t^k \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) = \\ &= - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p D_t \left(\frac{\partial L(x, \dots, \bar{x}^{\cdot}, \dots, \bar{x}^{\cdot})^{(p)}}{\partial \bar{x}^{(k)j}} \right) C_k^1 D_t^{k-1} \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)j}} C_k^1 D_t^k \left(\frac{\partial x^j(x)}{\partial x^{-i}} \right) + \sum_{k=0}^p \sum_{j=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)j}} C_k^0 D_t^k \left(\frac{\partial x^j(x)}{\partial x^{-i}} \right) = \\
 & = \sum_{j=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^j} \frac{\partial x^j(x)}{\partial x^{-i}} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)j}} D_t^k \left(\frac{\partial x^j(x)}{\partial x^{-i}} \right) (-C_k^1 + C_k^0) - \\
 & \quad - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p D_t \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)j}} \right) C_k^1 D_t^{k-1} \left(\frac{\partial x^j(x)}{\partial x^{-i}} \right). \tag{13}
 \end{aligned}$$

Видно, что при $p = 1$ выражение (13) является тензором:

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^j} \frac{\partial x^j(x)}{\partial x^{-i}} - \sum_{j=1}^m D_t \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{-i}} \right) \frac{\partial x^j(x)}{\partial x^{-i}} = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^j} - D_t \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{-i}} \right) \right) \frac{\partial x^j(x)}{\partial x^{-i}},$$

а при $p > 1$ выражение (13) тензором не является, так как будут члены с ненулевой производной

$D_t^{p-1} \left(\frac{\partial x^j(x)}{\partial x^{-i}} \right)$ и $-C_k^1 + C_k^0 \neq 0$, при $p > 1$.

$$\begin{aligned}
 p_1(1) & = \sum_{l=0}^{1-1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+1)i}} \right) = \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{-i}} = \sum_{k=0}^p \sum_{j=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)j}} \frac{\partial x^j(x)}{\partial x^{-i}} = \\
 & = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)j}} C_k^1 D_t^{k-1} \left(\frac{\partial x^j(x)}{\partial x^{-i}} \right). \tag{14}
 \end{aligned}$$

И в этом случае при $p > 1$ выражение (14) тензором не является: будут члены с ненулевой производной $D_t^{p-1} \left(\frac{\partial x^j(x)}{\partial x^{-i}} \right)$.

Замечание 3. Пусть $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$. При $p > n$ импульсы порядка $0 < k < n$ ранга n , вообще говоря, тензорами не являются. Для примера рассмотрим закон преобразования импульсов 1-го порядка

ка ранга 2:
$$p_k(n) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right).$$

$$\begin{aligned}
 p_1(2) & = p_{1,2} = \sum_{l=0}^{2-1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^{(l+1)i}} \right) = D_t^0 \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^{-i}} \right) - D_t^1 \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^{-i}} \right) = \\
 & = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} + \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} \right) - \sum_{k=1}^m D_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} C_1^1 D_t^{1-1} \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) + \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} C_2^1 D_t^{2-1} \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) \right) - \sum_{k=1}^m D_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} C_2^2 D_t^{2-2} \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) \right) = \\
 &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} + \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} C_2^1 D_t^1 \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) \right) - \sum_{k=1}^m D_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) = \\
 &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} + \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} C_2^1 D_t^1 \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) \right) - \sum_{k=1}^m \left(D_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} \right) \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} + \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} D_t \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) \right) = \\
 &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} - D_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} \right) \right) \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} D_t \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) (C_2^1 - 1). \tag{15}
 \end{aligned}$$

Для первой суммы в выражении (15) выполнен тензорный закон преобразования, а для второй – нет. Поэтому импульс $p_1(2)$ не является тензором.

Замечание 4. Пусть $L : T^2 X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ ($p = n = 2$). Для иллюстрации утверждения **теоремы 3** рассмотрим закон преобразования импульсов 0-го и 2-го порядка ранга 2 :

$$p_k(n) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial \bar{L}(x, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(l+k)i}} \right). \tag{n}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_0(2) = p_{0,2} &= \sum_{l=0}^{2-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial \bar{L}(x, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(l+0)i}} \right) = D_t^0 \left(\frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) - D_t^1 \left(\frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^{-i}} \right) + D_t^2 \left(\frac{\partial \bar{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \ddot{x}^{-i}} \right) = \\
 &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} + \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) - D_t^1 \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} + \right. \\
 &+ \left. \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) + \sum_{k=1}^m D_t^2 \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} + \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} C_1^0 D_t^{1-0} \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) + \right. \\
 &+ \left. \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} C_2^0 D_t^{2-0} \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) \right) - \sum_{k=1}^m D_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} C_1^1 D_t^{1-1} \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) \right) - \sum_{k=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} D_t \left(C_1^1 D_t^{1-1} \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) \right) - \\
 &- \sum_{k=1}^m D_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} C_2^1 D_t^{2-1} \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) \right) - \sum_{k=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} D_t \left(C_2^1 D_t^{2-1} \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) \right) + \\
 &+ \sum_{k=1}^m D_t^2 \left(\left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} \right) C_2^2 D_t^{2-2} \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) \right) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} - D_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} \right) C_1^1 D_t^{1-1} \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{-i}} \right) \right) +
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} C_1^0 D_t^{1-0} \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} \right) + \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} C_2^0 D_t^{2-0} \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} \right) - \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} D_t (C_1^1 D_t^{1-1} \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} \right)) - \quad (16)$$

$$- \sum_{k=1}^m D_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} \right) C_2^1 D_t^{2-1} \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} \right) - \sum_{k=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} D_t (C_2^1 D_t^{2-1} \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} \right)) + \quad (17)$$

$$+ \sum_{k=1}^m C_2^2 D_t^2 \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} \right) D_t^0 \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} \right) + C_2^1 D_t^1 \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} \right) D_t^1 \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} \right) + C_2^0 D_t^0 \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} \right) D_t^2 \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} \right) = \quad (18)$$

$$= \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} - D_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} \right) + D_t^2 \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} \right) \right) \frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} = \sum_{k=1}^m p_0^k(2) \frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} \quad (19)$$

Равенство (19) получено, так как разность первого и последнего слагаемых в выражении (16) равна 0:

$$\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} C_1^0 D_t^{1-0} \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} \right) - \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} D_t (C_1^1 D_t^{1-1} \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} \right)) = 0, \text{ сумма среднего в (16), последнего в (18)}$$

минус последнее в (17) равна 0:

$$\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} C_2^0 D_t^{2-0} \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} \right) + C_2^0 D_t^0 \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} \right) D_t^2 \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} \right) - \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} D_t (C_2^1 D_t^{2-1} \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} \right)) = 0,$$

$$\text{второе в выражении (18) минус первое в (17): } C_2^1 D_t^1 \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} \right) D_t^1 \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} \right) - D_t \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} \right) C_2^1 D_t^{2-1} \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} \right) = 0.$$

$$p_2^{-i}(2) = p_{2,2}^{-i} = \sum_{l=0}^{2-2} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^{(l+2)i}} \right) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} =$$

$$= \sum_{k=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} = \sum_{k=1}^m p_2^k(2) \frac{\partial x^k}{\partial x^{-i}} \quad (20)$$

Равенство (19), (20) являются тензорным законом преобразования, то есть утверждение **теоремы 3** проверено при $n = 2$ $k = 0, 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин, В.А. Современная геометрия. Методы и приложения / В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М. : УРСС, 1994.
2. Рашевский, П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский – М. : Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов, А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд, В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
5. Ландау, Л.Д. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1973. – 504 с.
6. Ландау, Л.Д. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1973. – 507 с.
7. Галеев, Э.М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М. : Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.

8. Дирак, П. Лекции по квантовой механике / П. Дирак. – М. : Мир, 1968.
9. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / С.Г. Ехилевский [и др.] // Вестник полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12 – 125–133.
10. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Сер., Проблемы геометрии. – 1979. – Т. 9.
11. Трофимов, В.В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В.В. Трофимов, А.Т. Фоменко. – М. : Факториал, 1995.

Поступила 20.03.2017

THE PRINCIPLE OF GENERAL IMPULSE TRANSFORMATION

S. EHILEVSKY, O. GOLUBEVA, D. PASTUHOV, Y. PASTUHOV

The paper introduced the concept of the generalized pulse rank n $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$, $i = \overline{1, m}$, $0 \leq k \leq n$, which is a generalization of pulses in the transformation Ostrogradsky $F_L(x): T^{2n} X_m \rightarrow T^{2n} X_m$, induced non-degenerate Lagrangian $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$.

Studied the law of transformation of order $k = 0, n$ component pulses rank n at change of coordinates in the base X_m of the bundle $T^n X_m$, they transform as a tensor of type $(0, 1)$ (covectors):

$$\overline{p_k^i(n)}(x, x, \dots, \overline{x}) = \sum_{j=1}^m p_k^j(n)(x, x, \dots, x) \cdot \frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j} = p_k^j(n)(x, x, \dots, x) \cdot \frac{\partial x^j(\overline{x})}{\partial \overline{x}^i},$$

$$r = \min(n, p), \quad k = 0, n, \quad i = \overline{1, m}.$$

Keywords: Euler-Lagrange equation, smooth manifolds, fiber space velocities, the momentum of the system, the transformation Ostrogradsky nondegenerate function.

СОДЕРЖАНИЕ

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

<i>Аль-Одхари А.Х., Фокин Г.А., Федоренко И.В., Рябенко Д.С., Лавров С.В.</i> Исследование влияния геометрического распределения пунктов приема и источника радиоизлучения на точность позиционирования	2
<i>Железняк В.К., Бурачёнок И.Б.</i> Анализ измерительных сигналов для оценки защищенности речевой информации в технических каналах утечки	8
<i>Оськин А.Ф., Оськин Д.А.</i> Применение нечетких когнитивных карт для моделирования плохоструктурированных систем	15
<i>Чертков В.М., Богош Р.П., Наумович Н.М.</i> Особенности структуры и формата представления радиолокационных данных спутником TerraSAR-X	21
<i>Котовский В.И., Шлыков В.В., Данилова В.А.</i> Обработка термографического изображения открытого сердца	28

ФИЗИКА

<i>Вабищевич С.А., Вабищевич Н.В., Бринкевич Д.И., Харченко А.А., Лукашевич М.Г., Просолович В.С., Бринкевич С.Д.</i> Спектры отражения гамма-облученных пленок диазохинон-новолачного фоторезиста	35
<i>Лалетин В.М., Шут В.Н., Сырцов С.Р., Трубловский В.Л.</i> Диэлектрические и магнитоэлектрические характеристики композита ЦТС42 – NiFe _{1,9} Co _{0,02} O ₄	40
<i>Антонович Д.А., Груздев В.А., Солдатенко П.Н., Залеский В.Г.</i> Плазменные эмиссионные системы для электронно-лучевых технологий. Часть 2	45
<i>Васюков А.В., Вабищевич С.А., Криштопа В.А.</i> Сканирование поверхностей твердотельных структур и нефтяных диспесных систем методом атомно-силовой микроскопии	52
<i>Янушкевич В.Ф.</i> Применение методов радиокомплексирования для поиска электрически неоднородных природных сред	57
<i>Добровольский С.А., Савков А.В., Бринкевич Д.И., Бринкевич С.Д., Вабищевич Н.В.</i> Примесные радионуклиды в производстве радиофармпрепаратов на основе ¹⁸ F	64
<i>Савенко В.С., Гуненко А.В., Силивонец А.Г.</i> Расчет плотности тока и напряженности магнитного поля внутри проводника в условиях электропластичности	72

МАТЕМАТИКА

<i>Скоромник О.В.</i> Двумерное интегральное преобразование с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера в ядре и интегральное уравнение первого рода в пространстве суммируемых функций	79
<i>Ехилевский С.Г., Голубева О.В., Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф.</i> Закон преобразования обобщенного импульса	85