

MIESIĘCZNIK
POŁOSKI.

№ 1(40), 2023

Т о м I.
Р о к 1818.

*«Вестник Полоцкого государственного университета»
продолжает традиции первого в Беларуси литературно-
научного журнала «Месячник Полоцкий».*

ВЕСТНИК ПОЛОЦКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА Серия С. Фундаментальные науки

В серии С научно-теоретического журнала публикуются статьи, прошедшие рецензирование, содержащие новые научные результаты в области информатики, вычислительной техники и управления, электрофизики, электрофизических установок (технические науки), математики.

ВЕСНІК ПОЛАЦКАГА ДЗЯРЖАУНАГА УНІВЕРСІТЭТА Серыя С. Фундаментальныя навукі

У серыі С навукова-тэарэтычнага часопіса друкуюцца артыкулы, якія прайшлі рэцэнзаваанне, змяшчаюць новыя навуковыя вынікі ў галіне інфарматыкі, вылічальнай тэхнікі і кіравання, электрафізікі, электрафізічных устаноў (тэхнічныя навукі), матэматыкі.

HERALD OF POLOTSK STATE UNIVERSITY Series C. Fundamental sciences

Series C includes reviewed articles which contain novelty in research and its results in the field of computer science, computer engineering and management, electrophysics, electrophysical installations (technical sciences), mathematics.

Журнал входит в Российский индекс научного цитирования.
Электронная версия номера размещена на сайте <https://journals.psu.by/index.php/fundamental/index>.

Адрес редакции:
Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой,
ул. Блохина, 29, г. Новополоцк, 211440, Беларусь
тел. + 375 (214) 59 95 44, e-mail: vestnik@psu.by

Отв. за выпуск: С. А. Вабищевич.
Редактор С. Е. Рясова.

Подписано к печати 18.04.2023. Бумага офсетная 70 г/м². Формат 60×84¹/₈. Ризография.
Усл. печ. л. 10,69. Уч.-изд. л. 12,89. Тираж 45 экз. Заказ 158.

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

УДК: 62-787.3

DOI 10.52928/2070-1624-2023-40-1-2-7

**МОДЕРНИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ СТЕКЛООЧИСТИТЕЛЯМИ АВТОБУСА
НА БАЗЕ КОНТРОЛЛЕРА ФИРМЫ «BELROBOT»***канд. техн. наук, доц. Ю. Г. ГРОЗБЕРГ**(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой);***В. Д. САФРОН***(Испытательный центр РУП «Витебский центр стандартизации, метрологии и сертификации»)* **ORCID <https://orcid.org/0000-0002-0013-1110>**

Рассматриваются основные вопросы повышения безопасности автобусов отечественных производителей за счет автоматизации операции управления стеклоочистителями. Разработка основана на использовании контроллера фирмы «BELROBOT». В ходе исследования были рассмотрены основные функции, особенности конструкции и принцип работы механизма стеклоочистителя. Были установлены требования к стеклоочистителю, контроллеру и электродвигателям. Разработана функциональная схема устройства и определены режимы работы стеклоочистителя в зависимости от интенсивности атмосферных осадков и в случае использования стеклоомывателя: непрерывная работа на 1-й скорости; непрерывная работа на 2-й скорости; прерывистая работа на 1-й скорости; режим при использовании устройства стеклоомывателя. Разработан вариант алгоритма работы устройства. Предложен вариант схемы установки на автобусе панорамного стеклоочистителя с отдельным приводом.

Ключевые слова: *устройство стеклоочистителя, повышение безопасности транспортных средств, контроллер, режимы работы стеклоочистителя.*

Введение. В настоящее время в автомобильной промышленности в условиях рыночной конкуренции между производителями автомобильного транспорта, в частности, общественного, усиливается тренд на автоматизацию основных рабочих процессов транспортного средства с целью повышения комфортности и безопасности водителя и пассажиров, улучшения эксплуатационных свойств и обеспечения безопасности движения.

Автоматизации в первую очередь подвергаются такие узлы и агрегаты автомобиля, как двигатель, коробка передач, тормозная система, механизм стеклоочистителей, система освещения и т. п., что повышает комфортность управления транспортным средством, освобождая водителя от дополнительной концентрации внимания на управление этими агрегатами.

Решить проблему автоматизации управления узлами и агрегатами автомобиля на качественно новом уровне стало возможным лишь с использованием средств электронной и микропроцессорной техники в системах автоматизированного управления (САУ). Современные САУ способствуют совершенствованию отдельных эксплуатационных свойств автомобиля, увеличивают надежность его агрегатов, производят контроль и диагностику узлов транспортного средства в процессе его эксплуатации.

Несмотря на различный характер задач, решаемых САУ узлами и агрегатами автомобиля, можно выделить общую для них черту – все они содержат в своем составе три основных блока: измерительный (информационный), управляющий и исполнительный.

Одним из агрегатов транспортного средства, обеспечивающим безопасность движения в неблагоприятных погодных условиях, является модуль управления стеклоочистителями лобового стекла, который должен оперативно автоматически реагировать на интенсивность атмосферных осадков, скорость автомобиля, направление и скорость встречного воздушного потока и т. п.

За последние годы появилось большое количество разработок ученых и конструкторов в нашей стране и за рубежом, направленных на модернизацию, усовершенствование и создание принципиально новых конструкций стеклоочистителей. Особая роль отводится усовершенствованию электроприводного механизма стеклоочистителя. Разрабатываются различного рода защитные и коммутационные устройства для электродвигателей стеклоочистителей.

Целью данной работы является создание функциональной схемы устройства управления стеклоочистителем и алгоритма работы для контроллера фирмы «BELROBOT», предназначенного для управления системой очистки лобового стекла автобуса.

1. Функции, особенности конструкции и принцип работы механизма стеклоочистителя

1.1. Функции, выполняемые стеклоочистителем. Штатные очистители ветрового стекла являются неотъемлемой составляющей конструкции транспортного средства (ТС) и предназначены для удаления грязи, пыли, а также избыточных осадков с его поверхности. Это позволяет увеличить видимость дороги в любой момент, включая неблагоприятные погодные условия: сильный дождь или снег.

Для большей эффективности работу стеклоочистителей сочетают с использованием стеклоомывателя, распыляющего на поверхность стекла специальную омывающую жидкость под высоким давлением, которая смачивает очищаемую поверхность, облегчает отмывку от грязи и пятен от насекомых, исключает разводы на стекле. Эксплуатация автомобиля с неисправными стеклоочистителями и омывателем запрещена правилами дорожного движения (ПДД).

1.2. Особенности конструкции стеклоочистителя. Конструктивные особенности зависят от вида устройства и типа крепежных элементов. Стандартная схема стеклоочистителей состоит из следующих деталей:

- рычажного привода (трапеции);
- поводков;
- реле для управления режимами работы;
- электронного блока управления (при наличии);
- электродвигателя с редуктором;
- шарнирных креплений;
- щеток.

Дополнительно предусмотрены управляющие устройства. К примеру, для ручного управления используется подрулевой переключатель режимов работы стеклоочистителей, а для автоматического режима в транспортном средстве устанавливается специальный электронный блок управления и датчик для анализа загрязнения стекла (датчик дождя)¹.

В нашей конструкции применялась реверсивная система стеклоочистителей с двумя электродвигателями: каждый стеклоочиститель приводится в действие собственным электродвигателем с системой рычагов.

Синхронизация двигателей требуется в тех случаях, когда используются два или более двигателей. Обычно используется высокоскоростной двигатель постоянного тока, где проблематично варьировать скорость рычагов щеток. В предлагаемой системе используется пара синхронизированных стеклоочистителей, в которой каждый рычаг стеклоочистителя приводится в движение собственным независимым двигателем. Традиционные жесткие механические соединения, приводимые в действие одним двигателем постоянного тока, удалены из соображений веса и места. Для синхронизации и предотвращения столкновений используется замкнутая система управления.

1.3. Принцип работы механизма стеклоочистителя:

1. Электромагнитное реле принимает управляющую команду и устанавливает режим работы щеток. В зависимости от транспортного средства очистители могут работать в прерывистом режиме с небольшими интервалами в 3–5 секунд, постоянно двигаться с установленной скоростью, а также переходить в режим мойки с включенным стеклоомывателем.

2. Мотор стеклоочистителей получает питание от бортовой электросети. Точная схема подключения зависит от модели автомобиля.

3. Поводки стеклоочистителей, а вместе с ними и щетки для очистки стекла, приводятся в действие при помощи двух электродвигателей, преобразующих вращательное движение на щетки, которые, плотно прижимаясь к рабочей поверхности, удаляют грязь и влагу со стекла.

Применительно к системам рычагов различают чисто механические системы очистителей (роторные приводы) и электронно-управляемые системы на базе реверсивной технологии.

Реверсивная технология: электронно-управляемый привод поворачивается менее чем на один оборот. Система рычагов передает усилие привода на стеклоочистители. Преимущество таких систем над роторным приводом состоит в том, что для системы рычагов требуется примерно вдвое меньше места.

Внутри двигателя размещается электронная схема, которая определяет момент, когда рычаги щеток находятся в нижнем положении. Схема обеспечивает питание рычагов щеток, пока они не окажутся в положении парковки в нижней точке лобового стекла. Таким образом, если на середине пути выключить переключатель рычагов щеток, они дойдут до нижнего положения².

¹ Стеклоочистители: устройство и принцип работы [Электронный ресурс]. URL: http://www.motorpage.ru/faq/stekloochistiteli_ustrojstvo_i_princip_raboti.html (дата обращения 14.02.2023).

² Стеклоочистители [Электронный ресурс]. URL: http://systemsauto.ru/electric/windshield_wipers.html (дата обращения 14.02.2023).

2. Установленные в ходе исследования требования к стеклоочистителю, контроллеру и электродвигателям

2.1. Требования к стеклоочистителю. Стеклоочиститель должен соответствовать следующим техническим требованиям и характеристикам:

- бесколлекторные двигатели постоянного тока в мотор-редукторе;
- питание 24 В (напряжение бортовой сети автобуса от 24 до 30 В);
- частота вращения под нагрузкой должна быть не менее указанных в таблице значений.
- передаточное число редуктора $i = 43$;
- номинальный момент мотор-редуктора 5 Нм (мотора – не менее 0,3 Нм);
- пусковой момент мотор-редуктора 25 Нм (мотора – не менее 0,6 Нм).

Таблица. – Частота вращения под нагрузкой

		На 1-й скорости, об/мин	На 2-й скорости, об/мин
Правый	Вал электродвигателя	1700	2600
	Вал рычага щетки	40	53
Левый	Вал электродвигателя	1300	2000
	Вал рычага щетки	30	45

2.2. Требования к контроллеру. Контроллер должен:

- обеспечить синхронизацию движения правого и левого мотор-редукторов;
- обеспечить вращение электродвигателей на 1-й скорости;
- обеспечить вращение электродвигателей на 2-й скорости;
- обеспечить выход в исходное положение (положение парковки, состояние покоя) стеклоочистителя из любого режима работы и любого начального положения;
- не допускать пересечения щеток левой и правой стороны;
- осуществлять обработку сигналов от абсолютных угловых датчиков положения;
- иметь напряжение питания от 24 до 30 В;
- быть устойчивым к перепадам температуры и нормально функционировать при температуре окружающей среды от $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$ до $+70\text{ }^{\circ}\text{C}$;
- интерфейс управления должен обеспечить управление дискретными сигналами или опционально по CAN (Controller Area Network) шине.

2.3. Требования к электродвигателям. Электродвигатели должны соответствовать следующим характеристикам:

- номинальный ток электродвигателя, 4 А;
- ограничение пускового тока электродвигателя за 5 с, 15 А;
- ограничение пускового тока электродвигателя за 3 с, 24 А³.

3. Функциональная схема и режимы работы стеклоочистителя

3.1. Функциональная схема, разработанная в ходе исследования и поясняющая принцип работы модернизированной системы управления стеклоочистителями, приведена на рисунке 1⁴.

3.2. Режимы работы стеклоочистителя. В зависимости от интенсивности атмосферных осадков водитель имеет возможность выбрать один из трех возможных режимов работы стеклоочистителя:

- непрерывная работа на 1-й скорости (30–35 циклов/мин);
- непрерывная работа на 2-й скорости (45–50 циклов/мин);
- прерывистая работа на 1-й скорости (одиночные циклы с переменным интервалом 2–5 с).

Также при включении стеклоомывателя предусмотрено автоматическое срабатывание стеклоочистителей, включающее в себя 3 цикла на 1-й скорости.

³ Официальный сайт ЗАО «БЕЛРОБОТ» [Электронный ресурс]. URL: <http://www.belrobot.by/> (дата обращения 03.02.2023).

⁴ ГОСТ 2.701-2008 Единая система конструкторской документации. Схемы. Виды и типы. Общие требования к выполнению. – М.: Стандартинформ, 2009. – 14 с.

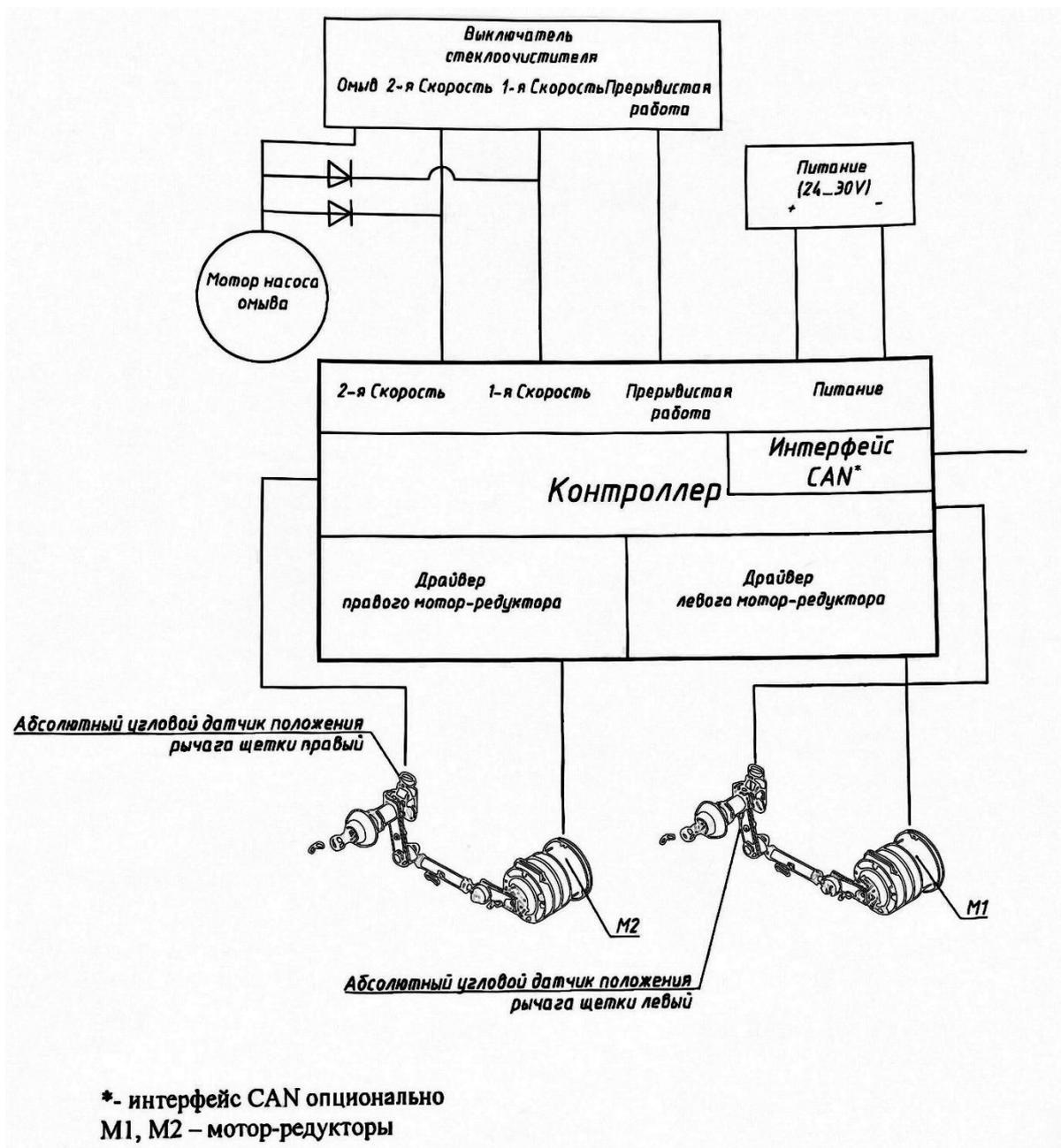


Рисунок 1. – Функциональная схема

4. Разработка алгоритма работы стеклоочистителя

Алгоритм функционирования стеклоочистителя был разработан в соответствии с технической документацией ЗАО «BELROBOT» и представлен в виде граф-схемы на рисунке 2⁵.

Аббревиатуры в алгоритме работы расшифровываются следующим образом:

- ВЫКЛ – режим, при котором стеклоочиститель находится в выключенном состоянии;
- ОМЫВ – режим при включении омывателя;
- ПР – прерывистая работа на 1-й скорости;
- НР1 – непрерывная работа на 1-й скорости;
- НР2 – непрерывная работа на 2-й скорости.

⁵ Разработка алгоритма работы устройства [Электронный ресурс]. – URL: https://studbooks.net/2333286/tehnika/razrabotka_algorithma_raboty_ustroystva (дата обращения 07.02.2023).

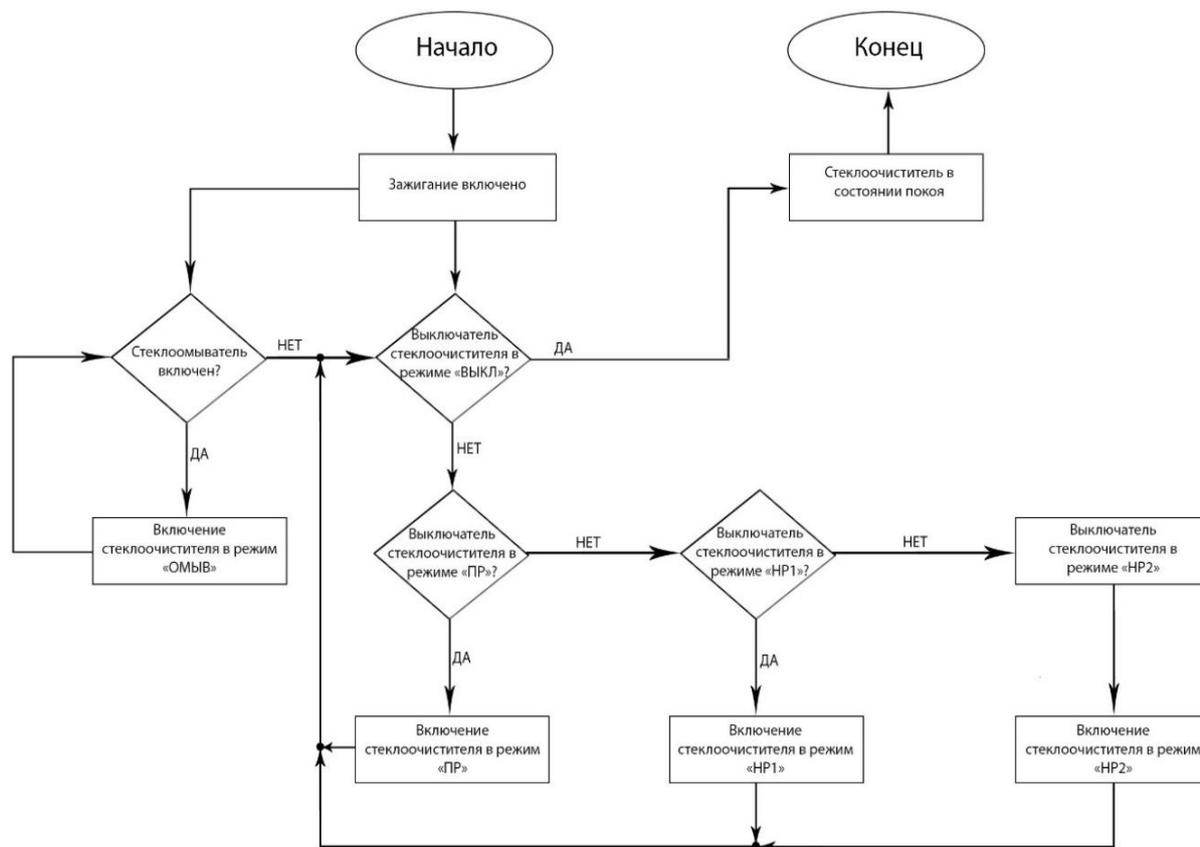


Рисунок 2. – Алгоритм работы стеклоочистителя

Словесное описание алгоритма работы:

1. При включении зажигания автобуса на контроллер подается питание (24–30 В) и последовательно производится опрашивание положения выключателя стеклоочистителя на одном из режимов.

2. Если выключатель находится в режиме «ВЫКЛ», то стеклоочиститель находится в состоянии покоя до тех пор, пока положение выключателя не изменится на режим «ОМЫВ», «ПР», «НР1» или «НР2».

3. Если выключатель находится в режиме «ОМЫВ», то контроллер переходит в режим включения омывателя, при котором задействуются мотор насоса стеклоомывателя и драйверы правого и левого мотор-редукторов совершают три цикла на первой скорости. При этом режимы «ПР», «НР1» и «НР2» отключены. После окончания всех трех циклов контроллер автоматически переходит в режим «ВЫКЛ» (состояние покоя).

4. Если выключатель находится в режиме «ПР», то контроллер переходит в режим прерывистой работы на первой скорости, состоящий из одиночных циклов с переменным интервалом 2–5 сек. При этом режимы «ОМЫВ», «НР1» и «НР2» отключены.

5. Если выключатель находится в режиме «НР1», то контроллер переходит в режим непрерывной работы на первой скорости, состоящий из 30–35 циклов/мин. При этом режимы «ОМЫВ», «ПР» и «НР2» отключены.

6. Если выключатель находится в режиме «НР2», то контроллер переходит в режим непрерывной работы на второй скорости, состоящий из 45–50 циклов/мин. При этом режимы «ОМЫВ», «ПР» и «НР1» отключены.

5. Схема установки на автобусе

Предлагаемый вариант схемы установки панорамного стеклоочистителя с отдельным приводом на автобусе (рычаги щеток изображены в положении парковки) изображен на рисунке 3⁶.

⁶ ГОСТ 2.701-2008 Единая система конструкторской документации. Схемы. Виды и типы. Общие требования к выполнению. – М.: Стандартинформ, 2009. – 14 с.

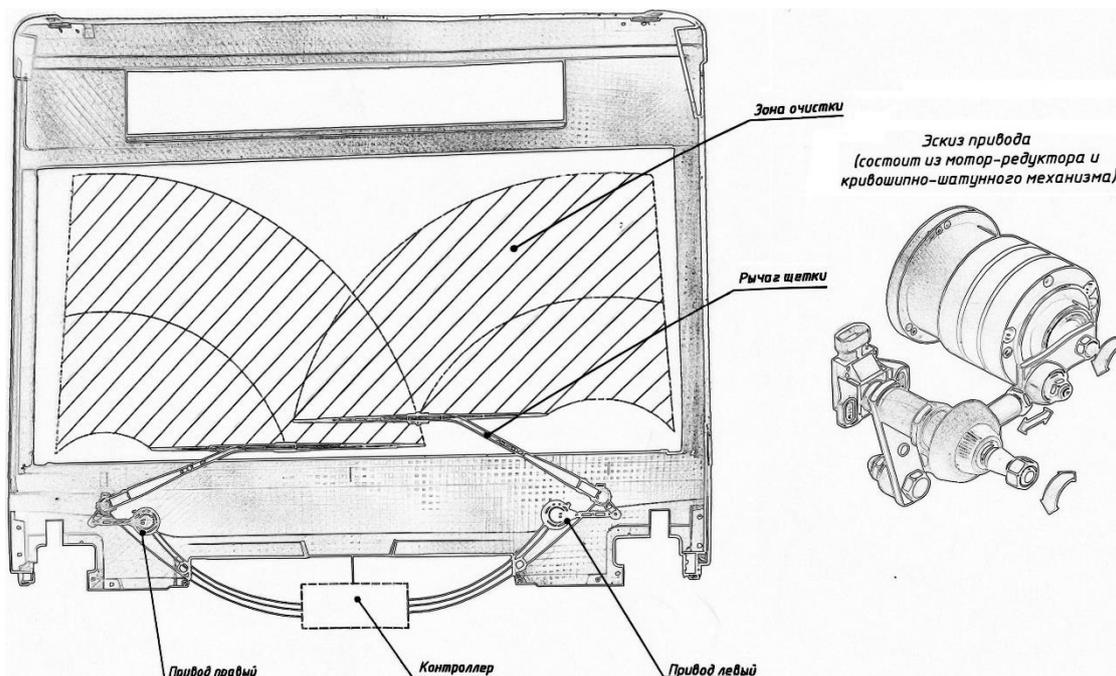


Рисунок 3. – Схема установки панорамного стеклоочистителя с раздельным приводом на автобусе

Заключение. В работе проанализированы материалы, предоставленные компаниями ЗАО «BEL-ROBOT» и ОАО «Измеритель». Выполнены задачи по разработке функциональной схемы управления и определению режимов работы стеклоочистителя в зависимости от интенсивности атмосферных осадков и при совместной работе со стеклоомывателем. Разработан вариант алгоритма работы стеклоочистителя, предложен вариант схемы установки на автобусе панорамного стеклоочистителя с раздельным приводом.

Поступила 16.02.2023

MODERNIZATION OF THE BUS WIPER CONTROL SYSTEM ON THE BASIS OF THE USE OF THE «BELROBOT» CONTROLLER

Y. GROZBERG

(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk);

V. SAFRON

(RUE "Vitebsk Center for Standardization, Metrology and Certification" testing center)

This article outlines key areas of improving the safety of buses produced domestic manufacturers through automating the wiper control operation. The design of the solution is based on the use of the BELROBOT controller. During the study, the main functions, design features and the principle of operation of the wiper mechanism were considered. Requirements were set for the wiper, controller and electric motors. A functional diagram of the device has been developed and the operating modes of the wiper have been determined, depending on the intensity of precipitation and in the case of using a washer: continuous operation at the 1st speed; continuous operation at 2nd speed; intermittent operation at 1st speed; mode when using the windshield washer. A variant of the device operation algorithm has been developed. A variant of the scheme for installing a panoramic windshield wiper with a separate drive on a bus is proposed.

Keywords: windshield wiper device, vehicle safety improvement, controller, wiper operating modes.

УДК 621.865.8

DOI 10.52928/2070-1624-2023-40-1-8-16

АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ РОБОТИЗИРОВАННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ ЛАЗЕРНОЙ РЕЗКИ

канд. техн. наук **И. Э. ИЛЮШИН**, канд. техн. наук, доц. **М. М. КОЖЕВНИКОВ**, **А. В. ГОСПОД**
(Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилев)

Предложен алгоритм оптимизации роботизированного технологического комплекса для лазерной резки, при этом накладываются ограничения на углы в сочленениях робота и ограничения, учитывающие ориентацию режущего технологического инструмента. Разработанный алгоритм позволяет также минимизировать объем движений робота при формировании траектории движения лазера. Об эффективности предложенного подхода свидетельствуют результаты тестирования в среде компьютерного моделирования роботизированных комплексов на примере робота-манипулятора FANUC M-710iC/50 с 6 степенями свободы.

Ключевые слова: роботы-манипуляторы, конфигурационное пространство, лазерная резка.

Введение. Автоматизация и роботизация промышленного производства – это актуальная задача при проектировании новых или техническом перевооружении старых предприятий. Данный процесс позволяет не только повысить производительность, но и улучшить качество производимых изделий, а также значительно снизить отрицательное влияние производственных факторов на здоровье работников [1–3]. Одно из важных направлений при этом – внедрение роботов-манипуляторов (РМ) при автоматизации процесса лазерной резки. На данный момент такая задача в основном решается за счет применения порталных роботов, работа которых описывается в декартовой системе координат, однако при выполнении режущих технологических операций в трехмерном пространстве применение таких роботов недостаточно эффективно [4]. РМ с 6 степенями свободы позволяют эффективно ориентировать в пространстве режущий технологический инструмент, но при этом использование таких роботов при автоматизации процесса лазерной резки не всегда возможно, поскольку для этого необходимы эффективные подходы к оптимизации роботизированных технологических комплексов (РТК) [5; 6].

Стоит также заметить, что при планировании траектории движения режущего технологического инструмента чаще всего используется подход, предполагающий ручное обучение оператором [7]. При таком подходе осуществляется предварительное нанесение на поверхность обрабатываемого изделия контура резки, после чего осуществляющий обучение робота оператор использует пульт для перемещения лазера вдоль линий данного контура и записывает промежуточные положения робота в память контроллера. Однако сформированная траектория должна учитывать заданную для рассматриваемого процесса точность позиционирования, а также ряд различных технологических ограничений, для чего необходимо неоднократное выполнение и корректировка управляющей программы, что значительно увеличивает сроки перепрограммирования РМ. Альтернативный ручному обучению подход предполагает формирование траектории с использованием трехмерных моделей РТК [6; 8]. Но в таком случае появляется необходимость решения задач оптимизации роботизированных технологических комплексов лазерной резки.

1. Постановка задачи. При оптимизации роботизированных технологических комплексов для лазерной резки необходимо определить положение базы манипулятора относительно обрабатываемой детали [9]. Для этого предлагается разбить рабочее пространство РМ для получения дискретного множества возможных положений базы робота-манипулятора (рисунок 1).

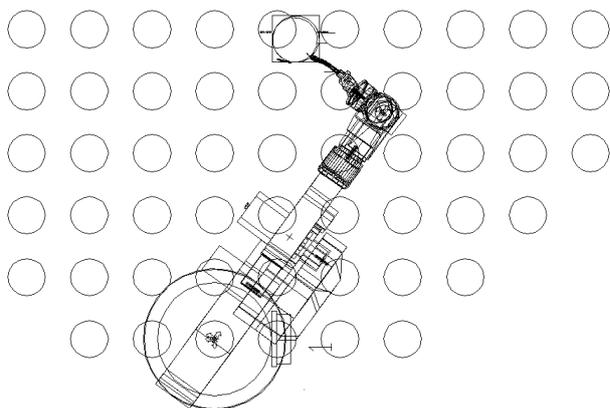


Рисунок 1. – Дискретное множество возможных положений базы робота-манипулятора

После дискретизации рабочего пространства робота для каждого положения базы определяется оптимальная траектория. Далее из этих траекторий выбирается та, при которой минимизируется объем движения РМ, т. е. данной траектории соответствует оптимальное положение базы. Поиск траектории осуществляется в конфигурационном пространстве робота-манипулятора, в качестве конфигурации выступает вектор

$$\mathbf{q} = [q_i]^T, \tag{1}$$

где q_i – угол в i -м сочленении РМ (рад);
 $i = 1 \dots n$;
 n – число степеней свободы робота-манипулятора.

Поскольку для каждого сочленения манипулятора углы ограничены максимальным и минимальным значением, на конфигурации накладываются ограничения следующего вида:

$$\mathbf{q}_{\min} \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{q}_{\max}, \tag{2}$$

где $\mathbf{q}_{\min}, \mathbf{q}_{\max}$ – векторы, ограничивающие величины углов в сочленениях робота-манипулятора q_i снизу и сверху соответственно.

При перемещении лазера вдоль контура резки робот может упереться в препятствие (например, обрабатываемое изделие, оснастку роботизированной ячейки и т. д.). Все возможные конфигурации РМ, включая и те, в которых определено столкновение, образуют полное конфигурационное пространство $\mathbf{C} = \{\mathbf{q}\}$. При этом траектория робота должна состоять только из положений манипулятора, в которых отсутствует столкновение, т. е. входящих в свободное от столкновений пространство \mathbf{C}_f , формируемое за счет проведения теста на столкновение

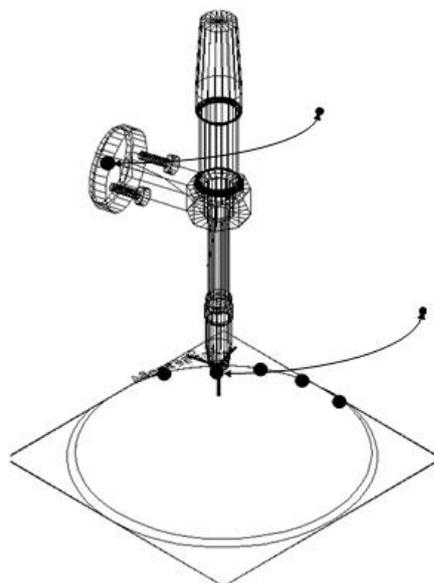
$$\|\mathbf{M}(\mathbf{q}) - \mathbf{V}\| \leq \delta, \tag{3}$$

где $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ – векторная модель РМ в рассматриваемой конфигурации \mathbf{q} ;
 \mathbf{V} – множество векторных моделей препятствий;
 δ – точность позиционирования режущего технологического инструмента.

При движении режущего технологического инструмента (лазера) необходимо учесть ограничения на его ориентацию, обусловленные технологией лазерной резки. Ориентация определяется углом между прямой, сонаправленной с осью режущего инструмента, и плоскостью обрабатываемой поверхности α : при обходе контура резки инструмент необходимо ориентировать строго перпендикулярно (рисунок 2). Кроме того, инструмент осуществляет вращение вокруг своей оси на произвольный угол γ . Таким образом, технологические ограничения на ориентацию режущего инструмента имеют вид

$$\alpha = \pi / 2, \gamma \in (-\pi, \pi]. \tag{4}$$

Рисунок 2. – Ориентация режущего технологического инструмента



В качестве модели пространства C_f удобно использовать граф вида

$$\mathbf{R} = (\mathbf{V}, \mathbf{E}), \quad (5)$$

где \mathbf{V} – множество вершин графа, которые являются конфигурациями робота \mathbf{q} , прошедшими тест на столкновение (3);

\mathbf{E} – множество ребер графа, соединяющих соседние вершины из множества \mathbf{V} .

Для формирования множества \mathbf{V} проводится рандомизированная генерация конфигураций робота, которые удовлетворяют условиям (2) и (4). Далее устанавливается, проходят ли конфигурации проверку на столкновение (3): при отсутствии столкновений рассматриваемая конфигурация включается в множество \mathbf{V} . Множество ребер \mathbf{E} формируется за счет проверки соседних конфигураций на наличие между ними прямолинейных участков траектории без столкновений. Если таковые имеются, они включаются в множество \mathbf{E} . При этом в зонах конфигурационного пространства с большим количеством препятствий поиск траектории предложенным рандомизированным методом значительно усложняется. Соответственно, в случае выявления подобных зон, они дискретизируются решеткой с упорядоченной структурой \mathbf{G} , которая включается в граф (5).

Таким образом, задача оптимизации формулируется следующим образом: на дискретном графе (4) необходимо найти последовательность конфигураций $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{g-1}, \mathbf{q}_g$, образующих траекторию робота-манипулятора с минимальным объемом движений:

$$\sum_{m=1}^{g-1} (\mathbf{q}_{m+1} - \mathbf{q}_m) \rightarrow \min, \quad (6)$$

где \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_g – стартовая и целевая конфигурации робота.

2. Алгоритм оптимизации роботизированного технологического комплекса лазерной резки.

Для решения поставленной задачи предложен алгоритм оптимизации (рисунок 3), исходными данными для которого являются геометрическая модель РТК (робота-манипулятора и препятствий), а также исходная и целевая конфигурации РМ. Алгоритм предполагает выполнение следующих шагов:

1. Формируется множество вершин \mathbf{V} графа (5) с учетом выражений (2)–(4) в количестве, равном N_{\max} .
2. Осуществляется формирование множества \mathbf{E} графа (5) посредством определения простейших фрагментов траектории между соседними вершинами из множества \mathbf{V} .
3. В случае когда между соседними вершинами не определен простейший прямолинейный фрагмент траектории, осуществляется проверка рассматриваемых вершин на наличие в их окрестности большого количества препятствий. При выявлении такой области, она дискретизируется решеткой с упорядоченной структурой \mathbf{G} , которая включается в граф (5).
4. Шаги 2–3 повторяются в количестве K_{\max} раз.
5. На сформированном графе (5) осуществляется поиск кратчайшей траектории (с минимальным объемом движений в соответствии с выражением (6)).

Предложенный алгоритм использует ряд обозначений: процедура *Randq* позволяет проводить рандомизированную генерацию конфигурации \mathbf{q} , которая удовлетворяет условиям (2) и (4); процедура *Rand* необходима для получения двух различных случайных целых чисел (от 1 до N_{\max}); D – это функция, позволяющая проверить, являются ли конфигурации соседними, результатом ее выполнения является расстояние между двумя положениями робота. Функция D определяется следующим образом:

$$D(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) = \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{M}} \|\mathbf{x}(\mathbf{q}_b) - \mathbf{x}(\mathbf{q}_a)\|, \quad (7)$$

где $\mathbf{x}(\mathbf{q}_a)$, $\mathbf{x}(\mathbf{q}_b)$ – векторы, задающие координаты точек, принадлежащих геометрической модели робота-манипулятора $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ в конфигурациях \mathbf{q}_a и \mathbf{q}_b соответственно;

$\|\mathbf{x}(\mathbf{q}_b) - \mathbf{x}(\mathbf{q}_a)\|$ – Евклидово расстояние между векторами $\mathbf{x}(\mathbf{q}_a)$ и $\mathbf{x}(\mathbf{q}_b)$.

Функция *EPath* позволяет найти простейший прямолинейный фрагмент траектории между двумя соседними конфигурациями робота-манипулятора за счет проверки промежуточных положений с заданным шагом на столкновение с препятствиями в соответствии с выражением (3). Процедура *Connect* дает возможность определить на решетке с упорядоченной структурой \mathbf{G} конфигурации, ближайшие к рассматриваемым конфигурациям из множества \mathbf{V} , в окрестности которых выявлена зона с большим количеством препятствий. Функция *GraphSearch* возвращает кратчайший путь на графе \mathbf{R} от стартовой конфигурации \mathbf{q}_1 до целевой \mathbf{q}_g с учетом критерия (6).

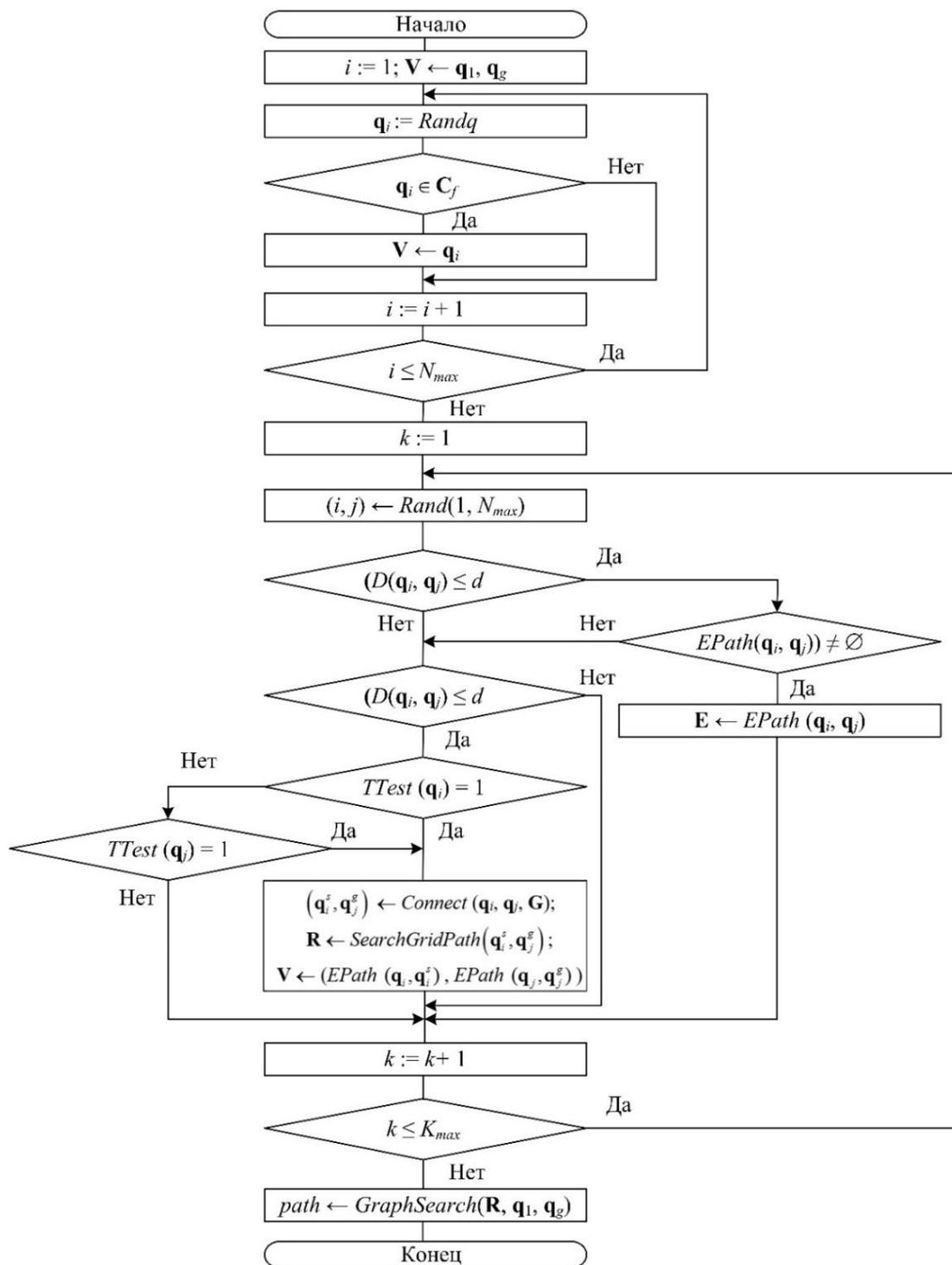


Рисунок 3. – Алгоритм оптимизации РТК лазерной резки

Процедура *SearchGridPath* (рисунок 4) осуществляет поиск криволинейного пути между двумя конфигурациями РМ за счет дискретизации области рассматриваемых конфигураций решеткой с упорядоченной структурой [10–13]. Реализация процедуры включает следующие обозначения: N_0 – изначальное значение на первой итерации параметра, характеризующего частоту дискретизации пространства конфигураций РМ при помощи решетки с упорядоченной структурой; N_{max} – максимально допустимое значение параметра дискретизации пространства конфигураций при помощи решетки с упорядоченной структурой; N_s – шаг, на который повышается параметр дискретизации при последующей итерации; \mathbf{P} – фрагмент траектории манипулятора (криволинейный). При выполнении процедуры *SearchGridPath* реализуется ряд

функций: $\max f(\phi_{b_k})$ – это функция для выбора наибольшего значения весовой функции ϕ из множества значений ϕ_{b_k} ; $\max b(\phi_{b_k})$ – функция для определения индекса b , соответствующего максимальному значению весовой функции; $\mathbf{q}(\phi)$ – функция для определения конфигурации РМ с соответствующим ей значением весовой функции ϕ ; $\text{explore}(\mathbf{q}(\phi_a), \mathbf{q}(\phi_b))$ – функция, позволяющая определить наличие простейшего прямолинейного фрагмента траектории между двумя конфигурациями $\mathbf{q}(\phi_a)$ и $\mathbf{q}(\phi_b)$: если фрагмент траектории определен, то значение функции равно 1, если не определен, то значение функции равно 0.

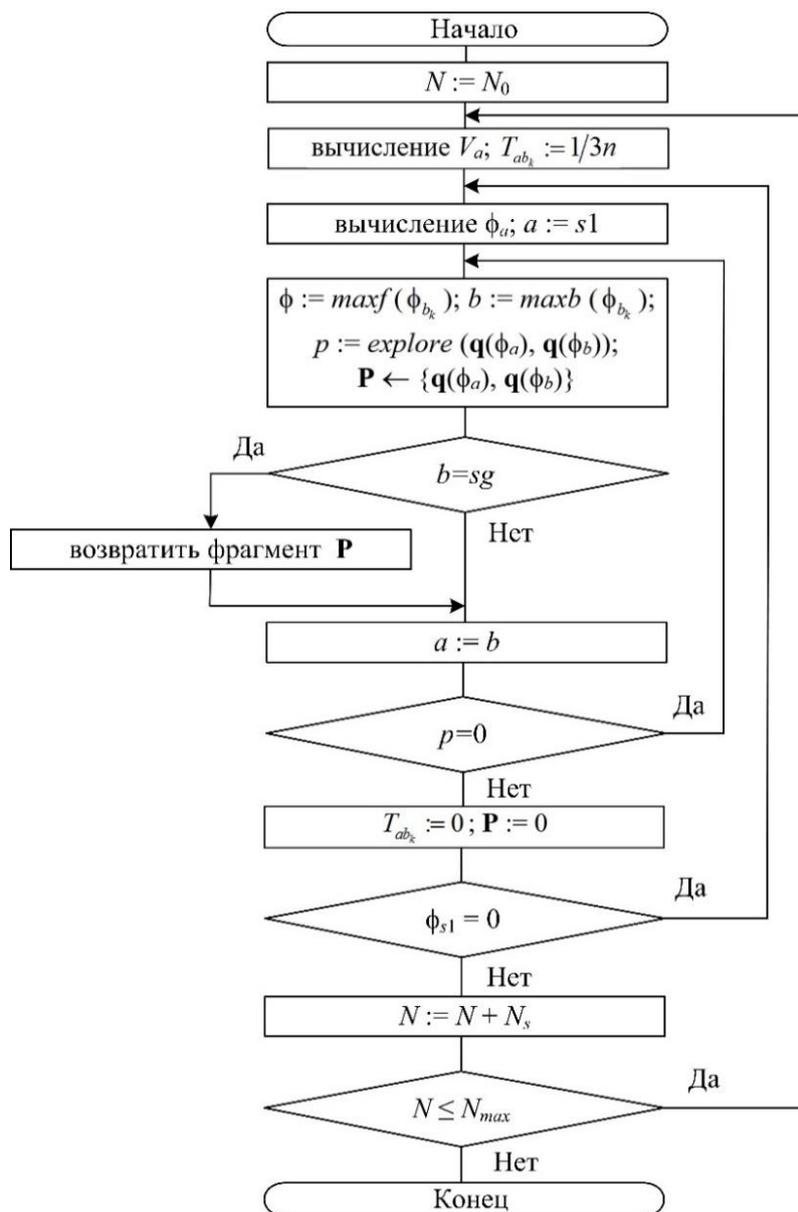


Рисунок 4. – Алгоритм процедуры *SearchGreedPath*

Процедура *SearchGreedPath* реализована в следующей очередности. Задается малый параметр дискретизации конфигурационного пространства N_0 и предполагается наличие элементарных участков траектории (ребер), которые соединяют соседние вершины решетки (узлы) с упорядоченной структурой – каждому ребру ставится в соответствие весовой коэффициент, равный $1/3n$. Далее рассчитывается весовая функция для каждого из узлов решетки ϕ_a ($a=1:N^n$), после чего определяется траектория от начального положения робота (конфигурация \mathbf{q}_{s1}) к конечному (конфигурация \mathbf{q}_{sg}) посредством движения в градиентном направлении весовой функции. При этом осуществляется проверка ребер решетки, соединяющих соседние узлы

\mathbf{q}_a и \mathbf{q}_{b_k} , на наличие столкновений. Если столкновения не определены, то происходит переход к двум последующим узлам решетки текущего разрешения в направлении градиента. Если определено столкновение, то соответствующему ребру решетки T_{ab_k} ставится в соответствие весовой коэффициент, равный 0.

Для описания состояния предложенной модели в виде решетки с упорядоченной структурой использована система дифференциальных уравнений, результатом решения которой является итерационное выражение вида

$$\phi_a^{(l+1)} = f_a \left(\sum_{k=1}^d T_{ab_k} \phi_{b_k}^l + V_a \right), \tag{8}$$

где l – номер итерации;

V_a – параметр, который принимает значения: $V_a = -1$, если $\mathbf{q}_a \notin \mathbf{C}_f$; $V_a = 1$, $\mathbf{q}_a = \mathbf{q}_{sg}$; $V_a = 0$ во всех остальных случаях.

Нелинейная функция f_a имеет вид

$$f_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ \tanh(x), & \text{если } x \geq 0. \end{cases} \tag{9}$$

Функция $TTest$ (рисунок 5) позволяет осуществить проверку окрестности рассматриваемой конфигурации на «насыщенность» препятствиями. Для этого генерируются случайные конфигурации \mathbf{c} в области рассматриваемой в количестве K штук (при помощи функции $Randc$). Если количество столкновений превышает установленное предельное значение K_{min} , то функция $TTest$ будет возвращать значение 1 (т. е. область конфигурации «насыщена» препятствиями), в противном случае – значение 0.

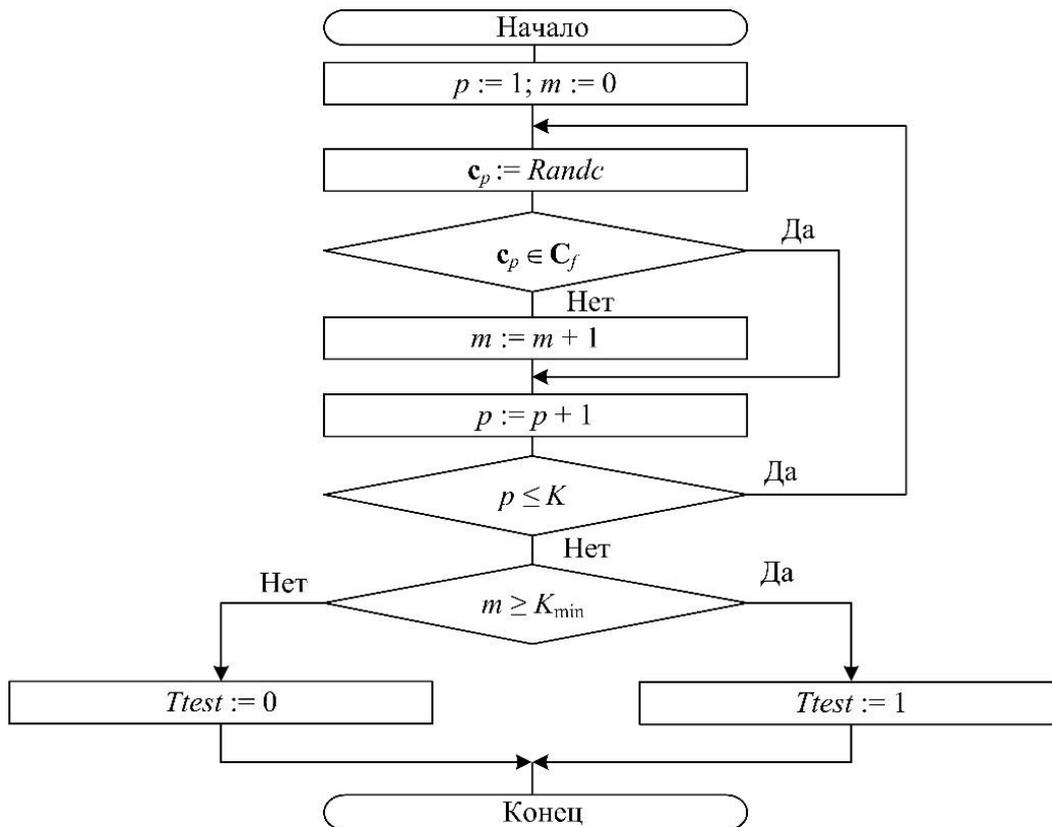


Рисунок 5. – Алгоритм функции $TTest$

3. Тестирование алгоритма. Для тестирования алгоритма использовался роботизированный технологический комплекс на базе робота-манипулятора FANUC M-710iC/50 с 6 степенями свободы, управление которым осуществляется через контроллер FANUC R-30iB. Режущий технологический инструмент

перемещается вдоль условного контура резки квадратной формы. Программная реализация предложенного алгоритма использована совместно с системой моделирования ROBOGUIDE фирмы FANUC, в результате чего была получена последовательность конфигураций РМ, обеспечивающая движение без столкновений с препятствиями в соответствии с условием (3), а также с учетом ограничений (2), (4). Результаты тестирования позволяют сделать вывод об эффективности предложенного алгоритма оптимизации роботизированного технологического комплекса лазерной резки.

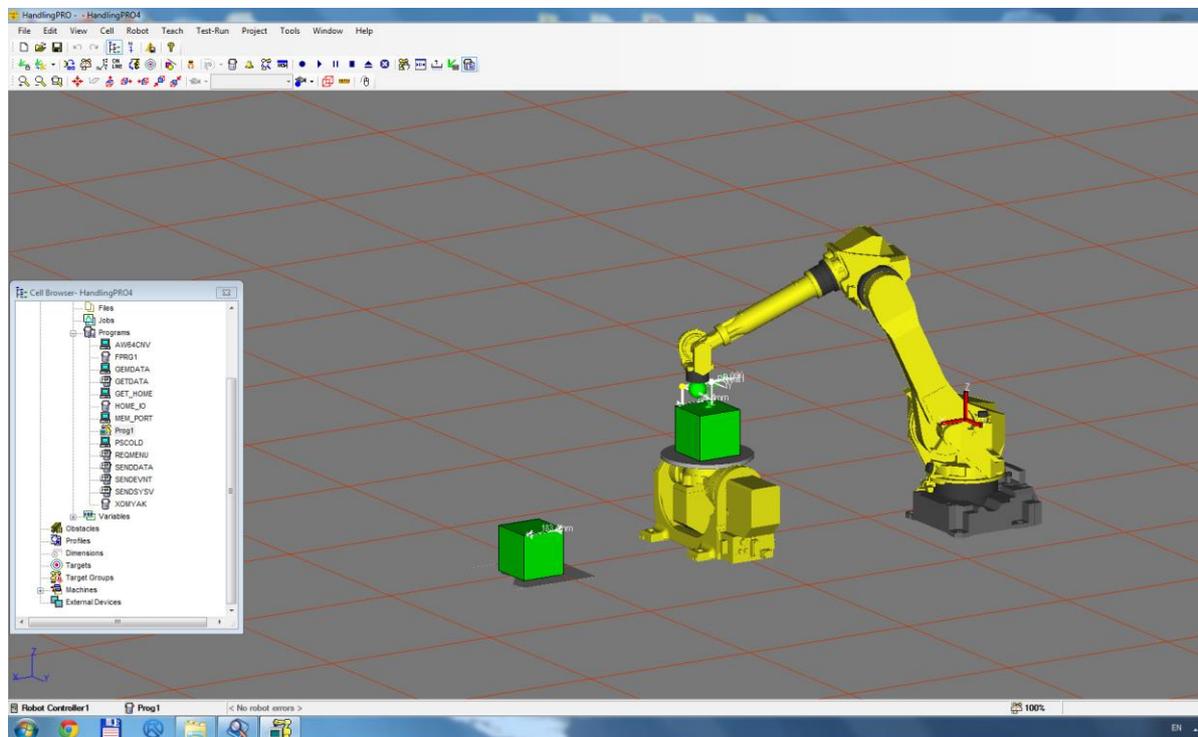


Рисунок 6. – Моделирование движения режущего инструмента в системе ROBOGUIDE

Заключение. В статье предложен алгоритм оптимизации роботизированного технологического комплекса для лазерной резки. Алгоритм основан на случайной дискретизации конфигурационного пространства робота-манипулятора в зонах с малым количеством препятствий и дискретизации решеткой с упорядоченной структурой в зонах, в которых определено большое количество препятствий. Кроме того, разработанный алгоритм предполагает учет ограничений на углы в сочленениях робота и ограничений, учитывающих ориентацию режущего технологического инструмента. Предложенный подход позволяет также минимизировать объем движений робота при формировании траектории движения режущего инструмента. Эффективность алгоритма оптимизации подтверждается результатами тестирования в среде компьютерного моделирования роботов-манипуляторов и роботизированных технологических комплексов ROBOGUIDE.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершова И. В., Подоляк О. О., Данилов А. В. Факторы эффективности внедрения робототехнических комплексов на российских предприятиях // Известия УГТУ. – 2018. – № 2 (50). – С. 130–134. – DOI: [10.21440/2307-2091-2018-2-130-134](https://doi.org/10.21440/2307-2091-2018-2-130-134).
2. Крутько П. Д., Наumenко М. Г. Алгоритмы адаптивного управления движением голономных механических систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2004. – № 6. – С. 76–86. – URL: <https://naukarus.com/algoritmy-adaptivnogo-upravleniya-dvizheniem-golonomnyh-mehaniicheskikh-sistem> (дата обращения 09.11.2022).
3. Крутько П. Д., Кузьмин Д. В. Управление движением манипулятора при выполнении погрузочных операций // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2004. – № 3. – С. 91–97. – URL: https://www.studmed.ru/statya-krutko-pd-kuzmin-dv-upravlenie-dvizheniem-manipulyatora-pri-vypolnenii-pogruzochnyh-operaciy_41cc6b60cf3.html (дата обращения 09.11.2022).
4. Pashkevich A., Dolgui A., Chumakov O. Multiobjective optimisation of robot motion for laser cutting application // International J. Of Computer Integrated Manufacturing. – Taylor and Francis, London, 2004. – Vol. 17, № 2. – P. 171–183. – DOI: [10.1080/0951192031000078202](https://doi.org/10.1080/0951192031000078202).
5. Dolgui A., Pashkevich A. Manipulator motion planning for high speed robotic laser cutting // International J. of Production Research. – Taylor and Francis, London, 2009. – Vol. 47, № 20. – P. 5691–5715. – DOI: [10.1080/00207540802070967](https://doi.org/10.1080/00207540802070967).

6. Moharana B., Gupta R., Kushawaha B. K. Optimization and Design of a Laser-Cutting Machine using Delta Robot // *International J. of Engineering Trends and Technology*. – 2014. – Vol. 10, № 4. – P. 176–179. – DOI: [10.14445/22315381/IJETT-V10P233](https://doi.org/10.14445/22315381/IJETT-V10P233).
7. Цыбулькин Г. А. Автоматизация процедур обучения роботов семейства «PUMA» // *Автомат. сварка*. – 2007. – № 6. – С. 49–50. – URL: <http://dspace.nbuu.gov.ua/handle/123456789/99420> (дата обращения 09.11.22).
8. Dolgui A., Pashkevich A. Manufacturing process planning for laser cutting robotic systems // *Proc. of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control Seoul, Korea, July 6–11, 2008*. – Vol. 41, iss. 2. – P. 14822–14827. – DOI: [10.3182/20080706-5-KR-1001.02509](https://doi.org/10.3182/20080706-5-KR-1001.02509).
9. Кожевников М. М., Чумаков О. А., Илюшин И. Э. и др. Методика оптимизации положения робота-манипулятора в технологическом процессе лазерной резки // *Доклады БГУИР*. – 2021. – Т. 19, № 3. – С. 49–57. – URL: https://doklady.bsuir.by/jour/article/view/3077?locale=ru_RU (дата обращения 09.11.2022).
10. Pashkevich A., Kazheunikau M., Ruano A. E. Neural network approach to collision free path planning for robotic manipulators // *International J. of Systems Science*. – 2006. – № 37 (8). – P. 555–564. – DOI: [10.1080/00207720600783884](https://doi.org/10.1080/00207720600783884).
11. Кожевников М. М., Пашкевич А. П., Чумаков О. А. Планирование траекторий промышленных роботов на основе нейронных сетей // *Доклады БГУИР*. – № 4 (50). – 2010. – С. 55–62. – URL: <https://libeldoc.bsuir.by/handle/123456789/34989> (дата обращения 09.11.2022).
12. Кожевников М. М., Господ А. В. Планирование траекторий промышленных роботов на основе нейронных сетей // *Исследования наукограда*. – 2012. – № 1 (1). – С. 37–41. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/planirovanie-traektoriy-promyshlennyh-robotov-na-osnove-neyronnyh-setey> (дата обращения 09.11.2022).
13. Илюшин И. Э., Кожевников М. М. Алгоритмы управления сварочными роботами-манипуляторами на основе статистической модели конфигурационного пространства // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки*. – 2016. – № 12. – С. 22–29. – URL: <https://elib.psu.by/handle/123456789/18980?locale=ru> (дата обращения 09.11.2022).

REFERENCES

1. Ershova I. V., Podolyak O. O., Danilov A. V. (2018). Faktory effektivnosti vnedreniya robototekhnicheskikh kompleksov na rossiiskikh predpriyatiyakh [The factors of the effectiveness of introducing robotic complex at Russian enterprises]. *Izvestiya UGGU*, 2(50), 130–134. DOI: [10.21440/2307-2091-2018-2-130-134](https://doi.org/10.21440/2307-2091-2018-2-130-134). (In Russ., abstr. in Engl.).
2. Krut'ko P. D., Naumenko M. G. (2004). Algoritmy adaptivnogo upravleniya dvizheniem golonomnykh mekhanicheskikh sistem. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, (6), 76–86. <https://naukarus.com/algoritmy-adaptivnogo-upravleniya-dvizheniem-golonomnyh-mekhanicheskikh-sistem>. (In Russ.).
3. Krut'ko, P. D., Kuz'min, D. V. (2004). Upravlenie dvizheniem manipulyatora pri vypolnenii pogruzochnykh operatsii. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, (3), 91–97. https://www.studmed.ru/statya-krutko-pd-kuzmin-dv-upravlenie-dvizheniem-manipulyatora-pri-vypolnenii-pogruzochnykh-operatsiy_41cc6b60cf3.html. (In Russ.).
4. Pashkevich, A. P., Dolgui, A. B., Chumakov, O. A. (2004). Multiobjective optimization of robot motion for laser cutting applications. *International J. of Computer Integrated Manufacturing*, 17(2), 171–183. DOI: [10.1080/0951192031000078202](https://doi.org/10.1080/0951192031000078202).
5. Dolgui, A., Pashkevich, A. (2009). Manipulator motion planning for high speed robotic laser cutting. *International J. of Production Research*, 47(20), 5691–5715. DOI: [10.1080/00207540802070967](https://doi.org/10.1080/00207540802070967).
6. Moharana B., Gupta R., Kushawaha B. (2014). Optimization and Design of a Laser-Cutting Machine using Delta Robot. *International J. of Engineering Trends and Technology*, 10(4), 176–179. DOI: [10.14445/22315381/IJETT-V10P233](https://doi.org/10.14445/22315381/IJETT-V10P233).
7. Tsybul'kin, G. A. (2007). Avtomatizatsiya protsedur obucheniya robotov semeistva «PUMA». *Avtomat. svarka*, (6), 49–50. <http://dspace.nbuu.gov.ua/handle/123456789/99420>. (In Russ., abstr. in Engl.).
8. Dolgui, A., Pashkevich, A. (2008). Manufacturing process planning for laser cutting robotic systems. *Proc. of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control, Vol. 41, Iss. 2* (14822–14827). DOI: [10.3182/20080706-5-KR-1001.02509](https://doi.org/10.3182/20080706-5-KR-1001.02509).
9. Kozhevnikov, M. M., Chumakov, O. A., Ilyushin, I. E., Yurkina, A. A. (2021). Metodika optimizatsii polozheniya robota-manipulyatora v tekhnologicheskom protsesse lazernoi rezki [Method of optimization of the robot-manipulator position in the technological process of laser cutting]. *Doklady BGUIR*, 19(3), 49–57. https://doklady.bsuir.by/jour/article/view/3077?locale=ru_RU. (In Russ., abstr. in Engl.).
10. Pashkevich, A., Kazheunikau, M., Ruano, A. E. (2006). Neural network approach to collision free path planning for robotic manipulators. *International J. of Systems Science*, 37(8), 555–564. DOI: [10.1080/00207720600783884](https://doi.org/10.1080/00207720600783884).
11. Kozhevnikov, M. M., Pashkevich, A. P., Chumakov, O. A. (2010). Planirovanie traektorii promyshlennykh robotov na osnove neironnykh setei [Trajectory planning for industrial robotic manipulators using neural network]. *Doklady BGUIR*, 4(50), 55–62. <https://libeldoc.bsuir.by/handle/123456789/34989>. (In Russ.).
12. Kozhevnikov, M. M., Gospod, A. V. (2012). Planirovanie traektorii promyshlennykh robotov na osnove neironnykh setei [Trajectory planning of industrial robots using neural network]. *Issledovaniya naukoграда*, 1(1), 37–41. <https://cyberleninka.ru/article/n/planirovanie-traektoriy-promyshlennyh-robotov-na-osnove-neyronnyh-setey>. (In Russ., abstr. in Engl.).
13. Pyushin, I. E., Kozhevnikov, M. M. (2016). Algoritmy upravleniya svarochnymi robotami-manipulyatorami na osnove statisticheskoi modeli konfiguratsionnogo prostranstva [Algorithms for control of welding robotic-manipulators based on a statistical model of a configuration space]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (12), 22–29. <https://elib.psu.by/handle/123456789/18980?locale=ru>. (In Russ., abstr. in Engl.).

**OPTIMIZATION ALGORITHM FOR A ROBOTIZED TECHNOLOGICAL COMPLEX
FOR LASER CUTTING*****I. ILIUSHYN, M. KOZHEVNIKOV, A. GOSPOD******(Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev)***

An optimization algorithm for a robotic technological complex for laser cutting is proposed, while restrictions are imposed on the angles in the joints of the robot and restrictions that take into account the orientation of the cutting technological tool. The developed algorithm also makes it possible to minimize the scope of the robot's movements when forming the laser's trajectory. The effectiveness of the proposed approach is evidenced by the results of testing in the environment of computer simulation of robotic technological complexes on the example of a robotic manipulator FANUC M-710iC/50 with 6 degrees of freedom.

Keywords: *robotic-manipulators, configuration space, laser cutting.*

УДК 004.032

DOI 10.52928/2070-1624-2023-40-1-17-22

СТРЕЛОЧНЫЕ ПРИБОРЫ НА ШАГОВЫХ ДВИГАТЕЛЯХ С МИКРОКОНТРОЛЛЕРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

*Д. А. КОЗЛОВСКИЙ, канд. техн. наук, доц. Т. В. МОЛОДЕЧКИНА
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)*

Представлена комбинированная приборная панель, входящая в лабораторный стенд для моделирования режимов работы стрелочных приборов. Приведены основные функции, выполняемые блоком управления лабораторного стенда, описаны особенности его конструкции. Обоснован выбор программной среды Arduino IDE для разработки программного обеспечения. Проведен выбор библиотек, использующихся для организации взаимодействия между платой Arduino и компонентами стенда. Разработано и детально рассмотрено программное обеспечение для блока управления лабораторного стенда.

Ключевые слова: приборная панель, блок управления, программное обеспечение, среда Arduino IDE, программный код.

Введение. В настоящее время шаговые двигатели находят широкое применение в электронике. Их используют для управления положением какого-либо объекта, для вращения рабочей части изделия с заданной скоростью или на заданный угол [1].

При решении задач, где задается положение объекта в пространстве, необходимо обеспечить два важных показателя: точность позиционирования и время выполнения команды. В таких случаях целесообразно использовать шаговые двигатели в качестве исполнительных механизмов, поскольку они имеют высокую точность позиционирования и повторяемость перемещений [2].

Точность позиционирования шагового двигателя определяется его конструктивным исполнением, увеличить ее можно за счет использования режимов полушаг и микрошаг. Быстродействие зависит от режима работы и системы управления, т. е. может задаваться схемотехническим и программным способами. Логические сигналы для управления работой шагового двигателя должны формироваться микроконтроллером [3].

В представленной статье рассмотрены особенности разработки программного обеспечения (ПО) блока управления лабораторного стенда для моделирования режимов работы стрелочных приборов.

Функции, выполняемые блоком управления лабораторного стенда. Блок управления должен получать данные о скорости движения и оборотах двигателя посредством СОМ-порта в течение всего времени работы лабораторного стенда. Вывод показаний тахометра и спидометра должен производиться посредством сервоприводов и указательной стрелки на панели приборов.

Особенности конструкции блока управления лабораторного стенда. Блок управления спроектирован на базе платформы Arduino. Роль программного модуля выполняет плата Arduino Nano v.3. Это обусловлено широкими возможностями платформы Arduino, гибкостью ее применения, простотой разработки и отладки программного обеспечения. На плате по умолчанию присутствует разъем USB Type Mini, через который осуществляется прошивка платы. Инициирование прошивки платы осуществляется нажатием кнопки в среде для разработки и отладки ПО.

Для вывода информации используются сервоприводы SG90¹. Широкое использование сервоприводов связано с тем, что для них характерны стабильная работа, высокая устойчивость к помехам, малые габариты и широкий диапазон контроля скорости. Важными особенностями сервоприводов являются способность увеличивать мощность и обеспечение обратной информационной связи. Из этого следует, что при прямом направлении контур является передатчиком энергии, а при обратном – передатчиком информации, которая используется для улучшения точности управления. Подобное решение позволит также уменьшить количество задействованных выводов микроконтроллера (рисунок).

Выбор среды для разработки ПО. Разработчиком платформы Arduino в качестве среды для разработки ПО рекомендуется Arduino IDE. Программное обеспечение в этой среде представляет собой последовательность команд: программного кода на языках C и C++.

Для любой платы Arduino можно написать программный код классическим методом, т. е. в виде последовательного списка команд на языках C и C++ в среде Arduino IDE².

Данная среда имеет ряд достоинств: поддержка всех плат Arduino, возможность использования сторонних библиотек, что обеспечивает быстроту и удобство работы. Кроме того, для написания программного кода достаточно знать базовые возможности языков C и C++, так как именно на последнем пишется код программы в среде, а пользовательские библиотеки часто пишутся и на чистом C.

¹ Сервоприводы Ардуино SG90, MG995, MG996: схема подключения и управление [Электронный ресурс]. URL: <https://arduinomaster.ru/motor-dvigatel-privod/servoprivody-arduino-sg90-mg995-shema-podklyuchenie-upravlenie/>.

² Arduino IDE [Electronic resource]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Arduino_IDE.

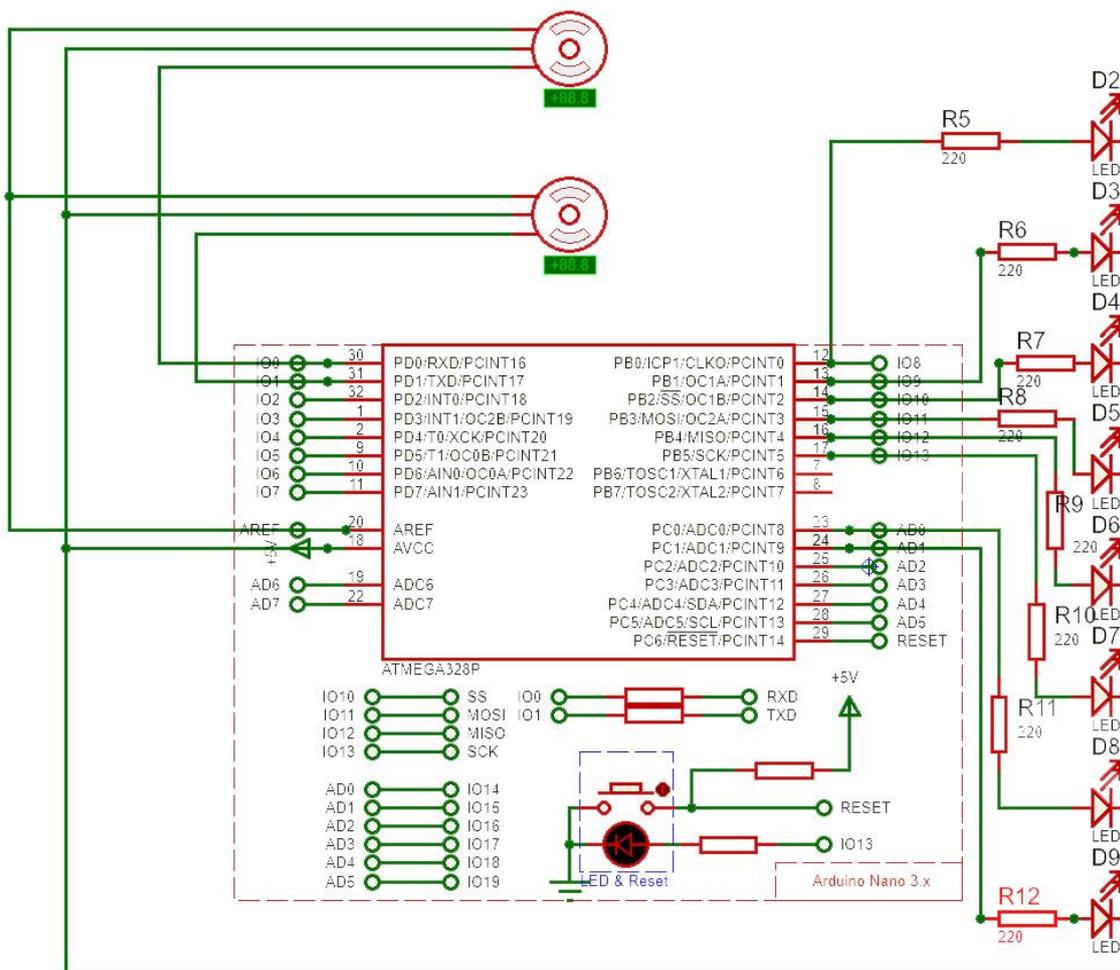


Рисунок. – Схема подключения электрорадиоэлементов в блоке управления лабораторного стенда

В качестве альтернативных сред для разработки программного обеспечения рассматривались FLProg и XOD³.

В среде FLProg прошивка для плат Arduino создается с использованием графических языков FBD и LAD. Эти языки в области программирования микроконтроллеров являются стандартом. К достоинствам среды можно отнести следующее: автоматический контроль за использованием входов-выходов, проверку уникальности имен и согласованности типов данных, корректности проекта в целом и указание на наличие ошибок.

Недостаток среды FLProg состоит в том, что не для всех компонентов существует поддержка прямо в среде. Соответственно, нет возможности, как в Arduino IDE, для неподдерживаемых компонентов добавить стороннюю библиотеку и работать с помощью понятных и удобных команд. Такие компоненты необходимо программировать с нуля.

Среда разработки XOD, подобно FLProg, позволяет создавать программу с помощью визуальных блоков и устанавливать связи между ними, но используемый графический язык отличается от аналога. К преимуществам среды XOD можно отнести понятный и удобный интерфейс, возможность графического программирования без знания C и C++ и работы в браузере без установки. Кроме того, среда XOD распространяется бесплатно, как и Arduino IDE⁴.

Подобно FLProg, в среде XOD имеется сложность программирования отдельных неподдерживаемых компонентов.

Проанализировав вышеописанные программные среды, для разработки программного обеспечения разрабатываемого устройства было решено использовать среду Arduino IDE. Это позволило применять сторонние библиотеки для связи платы с компонентами программно, в результате процесс программирования был упрощен и занял меньше времени.

³ URL: <https://flprog.ru>.

⁴ A visual programming language for microcontrollers [Electronic resource]. URL: <https://xod.io>.

Разработка ПО. При разработке конструкции блока управления были использованы электрорадиоэлементы широкого применения, поэтому для написания программы было достаточно легко найти библиотеки, представляющие собой программное обеспечение с открытым исходным кодом. Такие библиотеки могут быть использованы для некоммерческой деятельности с указанием разработчика библиотеки.

Для организации взаимодействия между платой Arduino и сервоприводами SG90 удобно использовать библиотеку Servo⁵. Библиотека Servo позволяет одновременно управлять 12 сервоприводами на большинстве плат Arduino и 48 сервоприводами на Arduino Mega. На контроллерах, отличных от Mega, использование библиотеки отключает возможность задействовать выходы 9 и 10 в режиме широтно-импульсной модуляции (ШИМ), даже если привод не подключен к этим выводам. На плате Mega могут быть использованы до 12 сервоприводов без потери функциональности ШИМ. При использовании Mega для управления 12–23 сервоприводами нельзя будет задействовать выходы 11 и 12 для ШИМ.

Для начала необходимо установить вышеупомянутые библиотеки в Arduino IDE, а затем подключить их к скетчу следующим образом:

```
#include <Servo.h>
```

Секция предварительной конфигурации и подготовки для работы с библиотеками

Далее необходимо определить назначение каждого из задействованных выходов Arduino.

```
const int SPEEDO_PIN      = 10; // Сигнал спидометра
const int RPM_PIN         = 9;  // Сигнал тахометра
const int LEFT_INDICATOR  = 4;  // Левый поворотник
const int RIGHT_INDICATOR = 5;  // Правый поворотник
const int PARKING_BRAKE   = 6;  // Ручной тормоз
const int FUEL_WARNING    = 7;  // Заканчивается топливо
const int LOW_BEAM        = 3;  // Ближний свет
const int HIGH_BEAM       = 2;  // Дальний свет
const int MOTOR_BRAKE     = 8;  // Торможение двигателем
const int BRAKE_AIR_2     = A1; // Ошибка давления воздуха в тормозной системе
const int BRAKE_AIR_1     = A0; // Нехватка давления воздуха в тормозной системе
const int BATTERY_LOW     = 11; // Аккумуляторная батарея разряжена
const int OIL_TEMP        = 12; // Слишком высокая температура масла (двигатель)
const int WATER_TEMP      = 13; // Слишком высокая температура воды (система охлаждения)
```

Секция подготовки и инициализации

Внутри функции «setup» помещается код для инициализации компонентов, а также вывода тестовой (стандартной) информации для проверки работоспособности устройства. Этот код будет выполнен один раз при запуске разрабатываемой установки. Функция «setup» будет реализована следующим образом:

```
void setup()
{
  Serial.begin(115200);

  // Инициализация сервоприводов
  speedo.attach(SPEEDO_PIN);
  speedo.write(180);

  rpm.attach(RPM_PIN);
  rpm.write(180);

  // Инициализация индикаторов
  pinMode(LEFT_INDICATOR, OUTPUT);
  pinMode(RIGHT_INDICATOR, OUTPUT);
  pinMode(PARKING_BRAKE, OUTPUT);
  pinMode(FUEL_WARNING, OUTPUT);
  pinMode(LOW_BEAM, OUTPUT);
  pinMode(HIGH_BEAM, OUTPUT);
  pinMode(MOTOR_BRAKE, OUTPUT);
  pinMode(BRAKE_AIR_2, OUTPUT);
  pinMode(BRAKE_AIR_1, OUTPUT);
  pinMode(BATTERY_LOW, OUTPUT);
  pinMode(OIL_TEMP, OUTPUT);
  pinMode(WATER_TEMP, OUTPUT);
}
```

⁵ URL: <https://arduino.ru/Reference/Library/Servo>.

```

// Тестирование приборной панели
digitalWrite(LEFT_INDICATOR, 0);
digitalWrite(RIGHT_INDICATOR, 0);
digitalWrite(PARKING_BRAKE, 0);
digitalWrite(FUEL_WARNING, 0);
digitalWrite(LOW_BEAM, 0);
digitalWrite(HIGH_BEAM, 0);
digitalWrite(MOTOR_BRAKE, 0);
digitalWrite(BRAKE_AIR_2, 0);
digitalWrite(BRAKE_AIR_1, 0);
digitalWrite(BATTERY_LOW, 0);
digitalWrite(OIL_TEMP, 0);
digitalWrite(WATER_TEMP, 0);

delay(500);

speedo.write(0);
rpm.write(0);
digitalWrite(LEFT_INDICATOR, 1);
digitalWrite(RIGHT_INDICATOR, 1);
digitalWrite(PARKING_BRAKE, 1);
digitalWrite(FUEL_WARNING, 1);
digitalWrite(LOW_BEAM, 1);
digitalWrite(HIGH_BEAM, 1);
digitalWrite(MOTOR_BRAKE, 1);
digitalWrite(BRAKE_AIR_2, 1);
digitalWrite(BRAKE_AIR_1, 1);
digitalWrite(BATTERY_LOW, 1);
digitalWrite(OIL_TEMP, 1);
digitalWrite(WATER_TEMP, 1);

delay(500);

speedo.write(180);
rpm.write(180);
digitalWrite(LEFT_INDICATOR, 0);
digitalWrite(RIGHT_INDICATOR, 0);
digitalWrite(PARKING_BRAKE, 0);
digitalWrite(FUEL_WARNING, 0);
digitalWrite(LOW_BEAM, 0);
digitalWrite(HIGH_BEAM, 0);
digitalWrite(MOTOR_BRAKE, 0);
digitalWrite(BRAKE_AIR_2, 0);
digitalWrite(BRAKE_AIR_1, 0);
digitalWrite(BATTERY_LOW, 0);
digitalWrite(OIL_TEMP, 0);
digitalWrite(WATER_TEMP, 0);
}

```

Внутри функции «loop» помещается код основной части программы. Он будет выполняться циклически в течение всего периода работы измерительной установки. Функция «loop» будет реализована следующим образом:

```

void read_serial_byte_set_servo(Servo& servo, bool invert)
{
  serial_byte = Serial.read();
  serial_byte = (serial_byte < 0) ? 0 : ((serial_byte > 180) ? 180 : serial_byte);
  if (invert)
    servo.write(180 - serial_byte);
  else
    servo.write(serial_byte);
}

void skip_serial_byte()
{
  (void)Serial.read();
}

```

```
void digitalWriteFromBit(int port, int value, int shift)
{
  digitalWrite(port, (value >> shift) & 0x01);
}

void loop()
{
  if (Serial.available() < 16)
    return;

  serial_byte = Serial.read();
  if (serial_byte != PACKET_SYNC)
    return;

  serial_byte = Serial.read();
  if (serial_byte != PACKET_VER)
  {
    return;
  }

  read_serial_byte_set_servo(speedo, SERVO_DIR_INVERT); // Speed telemetry.speed
  read_serial_byte_set_servo(rpm, SERVO_DIR_INVERT); // RPM telemetry.engine_rpm

  skip_serial_byte(); // Brake air pressure telemetry.brake_air_pressure
  skip_serial_byte(); // Brake temperature telemetry.brake_temperature
  skip_serial_byte(); // Fuel ratio fuel_ratio
  skip_serial_byte(); // Oil pressure telemetry.oil_pressure
  skip_serial_byte(); // Oil temperature telemetry.oil_temperature
  skip_serial_byte(); // Water temperature telemetry.water_temperature
  skip_serial_byte(); // Battery voltage telemetry.battery_voltage

  // Байт информации о световых индикаторах грузовика, отключены незадействованные
  serial_byte = Serial.read();
  // digitalWriteFromBit(LIGHT_P, serial_byte, 6); // telemetry.light_parking
  digitalWriteFromBit(LEFT_INDICATOR, serial_byte, 5); // telemetry.light_lblinker
  digitalWriteFromBit(RIGHT_INDICATOR, serial_byte, 4); // telemetry.light_rblinker
  digitalWriteFromBit(LOW_BEAM, serial_byte, 3); // telemetry.light_low_beam
  digitalWriteFromBit(HIGH_BEAM, serial_byte, 2); // telemetry.light_high_beam
  // digitalWriteFromBit(LIGHT_B, serial_byte, 1); // telemetry.light_brake
  // digitalWriteFromBit(LIGHT_R, serial_byte, 0); // telemetry.light_reverse

  // Байт информации об индикаторах приборной панели
  serial_byte = Serial.read();
  digitalWriteFromBit(PARKING_BRAKE, serial_byte, 7); // telemetry.parking_brake
  digitalWriteFromBit(MOTOR_BRAKE, serial_byte, 6); // telemetry.motor_brake
  digitalWriteFromBit(BRAKE_AIR_2, serial_byte, 5); // telemetry.brake_air_pressure_warning
  digitalWriteFromBit(BRAKE_AIR_1, serial_byte, 4); // telemetry.brake_air_pressure_emergency
  digitalWriteFromBit(FUEL_WARNING, serial_byte, 3); // telemetry.fuel_warning
  digitalWriteFromBit(BATTERY_LOW, serial_byte, 2); // telemetry.battery_voltage_warning
  digitalWriteFromBit(OIL_TEMP, serial_byte, 1); // telemetry.oil_pressure_warning
  digitalWriteFromBit(WATER_TEMP, serial_byte, 0); // telemetry.water_temperature_warning

  // Enabled flags
  serial_byte = Serial.read();
}
```

Заключение. В статье представлено разработанное программное обеспечение для комбинированной приборной панели с сервоприводами. Был проведен сравнительный анализ и, исходя из необходимого алгоритма работы разрабатываемого устройства, для разработки программы выбрана среда Arduino IDE. Работоспособность программного обеспечения была проверена в результате моделирования и при работе реального устройства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Емельянов А. В., Шилин А. Н. Шаговые двигатели: учеб. пособие. – Волгоград: ВолгГТУ, 2005. – 48 с.

2. Кенио Т. Шаговые двигатели и их микропроцессорные системы управления: пер. с англ. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 198 с.
3. Рентюк В. Шаговые двигатели и особенности их применения // Компоненты и технологии. – 2013. – № 10. – С. 71–78.

REFERENCES

1. Emel'yanov, A. V., & Shilin, A. N. (2005). *Shagovye dvigateli [Stepper motors]*. Volgograd: VolgGTU. (In Russ.).
2. Kenio, T. (1987). *Shagovye dvigateli i ikh mikroprotsessornyye sistemy upravleniya [Stepper motors and their microprocessor control systems]*. Moscow: Energoatomizdat. (In Russ.).
3. Rentyuk, V. (2013). *Shagovye dvigateli i osobennosti ikh primeneniya [Stepper motors and their application features] Komponenty i tekhnologii [Components & technologies]*, (10), 71–78. (In Russ.).

Поступила 23.02.2023

SWITCH DEVICES ON STEPPER MOTORS WITH MICROCONTROLLER CONTROL

D. KOZLOVSKY, T. MOLODECHKINA
(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

A combined instrument panel is proposed, which is included in the laboratory stand for simulating the operation mode of pointer devices. The main functions performed by the control unit of the laboratory bench are given, the design features are especially noted. The choice of the Arduino IDE software environment for software development is substantiated. The selection of the library used to combine between the Arduino board and the components of the stand has been made. Software for the laboratory control unit has been developed and studied.

Keywords: *dashboard, program code, control unit, software, Arduino IDE.*

УДК 004.85

DOI 10.52928/2070-1624-2023-40-1-23-28

СОЗДАНИЕ БАЗ ЗНАНИЙ ДЛЯ ЭЛЕКТРОННЫХ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ С ПОМОЩЬЮ ОНТОЛОГИЧЕСКОГО ПОДХОДА

*канд. техн. наук, доц. А. Ф. ОСЬКИН, Г. Ф. КОНАПЛЕВА
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой);*

Т. А. ТАВГЕНЬ
(Белорусский национальный технический университет, Минск);

*д-р техн. наук, проф. В. О. ГРОППЕН
(Северо-Кавказский горнометаллургический институт
(государственный технологический университет), Владикавказ, Россия)*

Рассматриваются возможности онтологического моделирования и его применения для создания баз знаний электронных учебно-методических комплексов. Показано, что с помощью онтологического моделирования можно определить предметную область, разработать концептуальную модель, создать и заполнить онтологию данными и, наконец, ввести онтологию в действие. Рассмотрены инструментарий онтологического моделирования и его возможности для создания баз знаний электронных учебно-методических комплексов. Показано, что для построения рабочей модели базы знаний может быть использована технология Zettelkasten и приложение Obsidian. Приведен пример применения предложенной методики при построении базы знаний «История Полоцкого кадетского корпуса».

Ключевые слова: *прикладная онтология, онтологическое моделирование, Protégé, Zettelkasten, Obsidian.*

Введение. Создание электронных учебно-методических комплексов (ЭУМК) является важным и сложным процессом, который включает в себя ряд проблем, связанных с качеством, доступностью и эффективностью. Некоторые из существующих проблем в создании образовательного контента можно выделить на основе имеющихся источников:

- отсутствие стандартизации. Несмотря на то, что существует много различных методик и подходов к разработке ЭУМК, отсутствует единый стандарт, который позволял бы унифицировать этот процесс и обеспечить высокое качество создаваемого контента¹;
- низкая эффективность. В некоторых случаях создаваемый образовательный контент не достигает своей цели и не способствует эффективному обучению. Одной из причин этого может быть недостаточная адаптация ЭУМК к потребностям и возможностям учащихся²;
- недостаточная доступность. Образовательный контент не всегда доступен для всех категорий пользователей, в том числе для людей с ограниченными возможностями, для жителей отдаленных регионов и т. д.³;
- недостаточное взаимодействие с пользователем. В некоторых случаях создаваемый контент не обеспечивает достаточного взаимодействия с учащимися, что может приводить к низкой мотивации и эффективности обучения⁴;
- отсутствие инноваций. Разработка ЭУМК часто ограничивается использованием традиционных методик и подходов, что не позволяет создавать инновационные и эффективные образовательные продукты⁵.

Многие из перечисленных проблем были бы успешно решены при стандартизации подходов к разработке учебного контента. Основой стандартизации может стать онтологический подход к проектированию и разработке ЭУМК [1].

Онтологический подход в создании образовательного контента. Онтология в информатике – это формальное описание понятий и отношений между ними в предметной области⁶. Онтология служит для структурирования знаний и данных, что позволяет их более эффективно использовать и обрабатывать. В информационных системах онтологии используются для реализации механизмов поиска и фильтрации данных, а также для автоматической обработки естественного языка.

¹ Михайлова Е. В. Общие тенденции в развитии системы образования в современном мире [Электронный ресурс] // Образовательный портал «Справочник». URL: https://spravochnick.ru/pedagogika/obschie_tendencii_v_razvitiy_sistemy_obrazovaniya_v_sovremennom_mire/.

² Образовательная социальная сеть [Электронный ресурс]. URL: <https://nsportal.ru/>.

³ Там же.

⁴ Там же.

⁵ См. ссылку 1.

⁶ Онтология (Информатика) [Электронный ресурс]. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Онтология_\(информатика\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/Онтология_(информатика)).

Онтологии могут быть как общими (мета-онтологии), так и специализированными (онтологии предметных областей)⁷. Общие онтологии описывают наиболее общие понятия, которые применимы к нескольким областям знаний. Специализированные онтологии описывают конкретную предметную область и содержат специальные значения терминов, используемых в этой области.

Онтологии также могут использоваться для решения задач, и в этом случае они называются онтологиями конкретной задачи. Они определяют общую терминологическую базу, относящуюся к задаче или проблеме. Сетевые онтологии используются для описания конечных результатов действий, выполняемых объектами предметной области или задачи⁸.

Объединение онтологий может быть необходимо, если использующая специализированные онтологии система развивается. При объединении онтологий возникает задача их отображения, которая представляет серьезную проблему для инженера по онтологиям. Онтологии даже близких областей могут быть несовместимы друг с другом, например, из-за особенностей местной культуры, идеологии или вследствие использования другого языка описания. Подзадачей объединения онтологий является задача отображения онтологий, которая может выполняться как вручную, так и в полуавтоматическом режиме. Использование базисной онтологии, которая представляет собой единый глоссарий, может упростить эту работу⁹.

Онтологический подход при разработке образовательного контента имеет ряд преимуществ, которые могут улучшить качество образования¹⁰:

- онтологии могут использоваться в качестве модели представления знаний, что позволяет учитывать особенности каждого обучаемого. Это позволяет создавать индивидуальные траектории обучения и объемы образовательной информации, учитывающие навыки и знания конкретного индивида. Таким образом, онтологический подход позволяет создавать более персонализированный и эффективный образовательный контент;

- онтологический подход также позволяет создавать более структурированный и связанный образовательный контент. Онтологии могут использоваться для описания отношений между понятиями и терминами в предметной области, что позволяет создавать более связанный и последовательный образовательный контент. Это может улучшить понимание материала и повысить его эффективность;

- онтологический подход также может улучшить поиск и использование образовательного контента. Онтологии могут использоваться для создания более точных и полных метаданных образовательного контента, что делает его более доступным и удобным для использования. Более точные метаданные также могут помочь обучаемым найти нужный контент быстрее и легче;

- онтологический подход может улучшить совместную работу и обмен образовательным контентом. Онтологии могут использоваться для создания общей модели представления знаний, которая может быть применена для совместной работы и обмена образовательным контентом между различными организациями и учебными заведениями. Это может улучшить доступность и качество образования в целом.

Таким образом, использование онтологического подхода при разработке образовательного контента помогает сделать его более персонализированным, структурированным, доступным и эффективным.

Создание персональных баз знаний. Основой ЭУМК является база знаний по соответствующей предметной области. В связи с этим рассмотрим процесс создания персональной базы знаний на основе онтологического подхода.

Такой подход предполагает формальную и декларативную презентацию темы с использованием словаря, который содержит константы, относящиеся к понятиям и терминам описываемой предметной области. Учитывая это, процесс создания персональной базы знаний на основе онтологического подхода можно разбить на следующие этапы:

1. Определение предметной области и составление словаря терминов, относящихся к этой области.
2. Создание онтологии, которая определяет отношения между терминами и понятиями в предметной области.

3. Заполнение базы знаний фактами, основанными на онтологии и словаре терминов.

4. Реализация поиска и вывода информации на основе онтологической модели.

Преимущества создания персональной базы знаний на основе онтологического подхода заключаются в следующем:

1. Упорядоченность и структурированность информации, что облегчает поиск и получение нужной информации.

2. Возможность автоматического обновления базы знаний при добавлении новых фактов, основанных на онтологии.

⁷ Онтологии и тезаурусы: модели, инструменты, приложения [Электронный ресурс]. URL: <https://intuit.ru/studies/courses/1078/270/info>.

⁸ Там же.

⁹ Онтология (Информатика) [Электронный ресурс]. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Онтология_\(информатика\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/Онтология_(информатика)).

¹⁰ Образовательная социальная сеть [Электронный ресурс]. URL: <https://nsportal.ru/>.

3. Возможность использования базы знаний для автоматической классификации и категоризации информации.

4. Удобство для пользователей благодаря стандартизации терминов и определений в предметной области.

Технологический процесс создания персональной базы знаний может быть реализован с помощью различных инструментов. Мы предлагаем строить предметную онтологию с помощью специального программного средства – редактора онтологий Protégé.

Редактор онтологий Protégé. Protégé – это редактор онтологий с открытым исходным кодом, который позволяет пользователям создавать, редактировать и манипулировать онтологиями. Создание онтологии включает в себя несколько шагов, в том числе определение предметной области, определение ключевых терминов и создание иерархии классов.

Чтобы создать онтологию в Protégé, можно выполнить следующие шаги:

1. Определите предметную область. Первым шагом является определение объема онтологии, включая типы вопросов, на которые она должна отвечать, и цели, которой она служит.

2. Определите ключевые термины. После определения предметной области следует выявить ключевые термины, которые будут использоваться в онтологии. Это можно сделать, проанализировав литературу или проконсультировавшись со специалистами. Термины должны быть организованы в виде таблицы, включая их свойства или характеристики.

3. Создайте иерархию классов. Следующим шагом является создание иерархии классов, которая включает определение наиболее общих понятий и постепенное уточнение их до более конкретных. Существует несколько подходов к созданию иерархии классов: нисходящий, восходящий и комбинированный.

4. Определите свойства и характеристики. После того как иерархия классов установлена, необходимо определить свойства и характеристики каждого класса. К ним могут относиться такие атрибуты, как, например, вес, среда обитания и размер популяции.

5. Добавьте экземпляры. Наконец, в онтологию можно добавить экземпляры каждого класса. Эти экземпляры являются конкретными примерами классов в онтологии.

Помимо создания онтологии Protégé также позволяет объединять онтологии и выполнять операции над классами, такие как определение эквивалентных или обратных классов и транзитивных свойств.

Преимущества использования Protégé для создания онтологий:

1. Открытый и бесплатный: Protégé – это бесплатный редактор онтологий с открытым исходным кодом, что делает его доступным для всех, кто хочет его использовать.

2. Дружественный интерфейс: Protégé имеет удобный интерфейс, который позволяет пользователям легко создавать, редактировать и манипулировать онтологиями.

3. Сильная поддержка сообщества: Protégé имеет сильное сообщество академических, правительственных и корпоративных пользователей, которые используют его для создания основанных на знаниях решений в различных областях, таких как биомедицина, электронная коммерция и организационное моделирование. Эта поддержка гарантирует, что Protégé будет постоянно обновляться и поддерживаться.

4. Настраиваемость: Protégé позволяет пользователям настраивать свои онтологии, добавляя новые классы и свойства и изменяя существующие.

5. Интеграция с другими инструментами: Protégé можно интегрировать с другими инструментами, такими как средства рассуждений и плагины визуализации, что делает его мощным инструментом для разработки онтологий.

6. Возможности рассуждений: Protégé имеет встроенные возможности рассуждений, которые позволяют пользователям проверять непротиворечивость своих онтологий и обнаруживать ошибки.

Таким образом, Protégé – это мощный и гибкий инструмент для создания онтологий и управления ими, с сильной поддержкой сообщества и набором настраиваемых функций.

Несмотря на перечисленные достоинства, использовать Protégé в качестве рабочей базы знаний создаваемого ЭУМК не всегда удобно. Более приспособленными для наших целей являются базы знаний, создаваемые на основе предметных онтологий методом Zettelkasten. Покажем, как база знаний, являющаяся ядром ЭУМК, может быть реализована с использованием этого метода.

Создание базы знаний на основе предметной онтологии методом Zettelkasten. Zettelkasten – технология создания, ведения, хранения и использования персональных баз знаний, разработанная немецким социологом Никласом Луманом [2]. Луман назвал свой метод «Zettelkasten», что можно перевести как «Картотека».

Физически Zettelkasten представляет собой систему карточек (у Лумана – формата А6), на каждой из которых записаны мысль, идея, тезис и т. д. Каждая из карточек дополняется ключевыми словами (тегами), названием раздела к которому она относится, перекрестными ссылками друг на друга. Таким образом образуется единая структурированная система знаний по данной предметной области (рисунок 1).

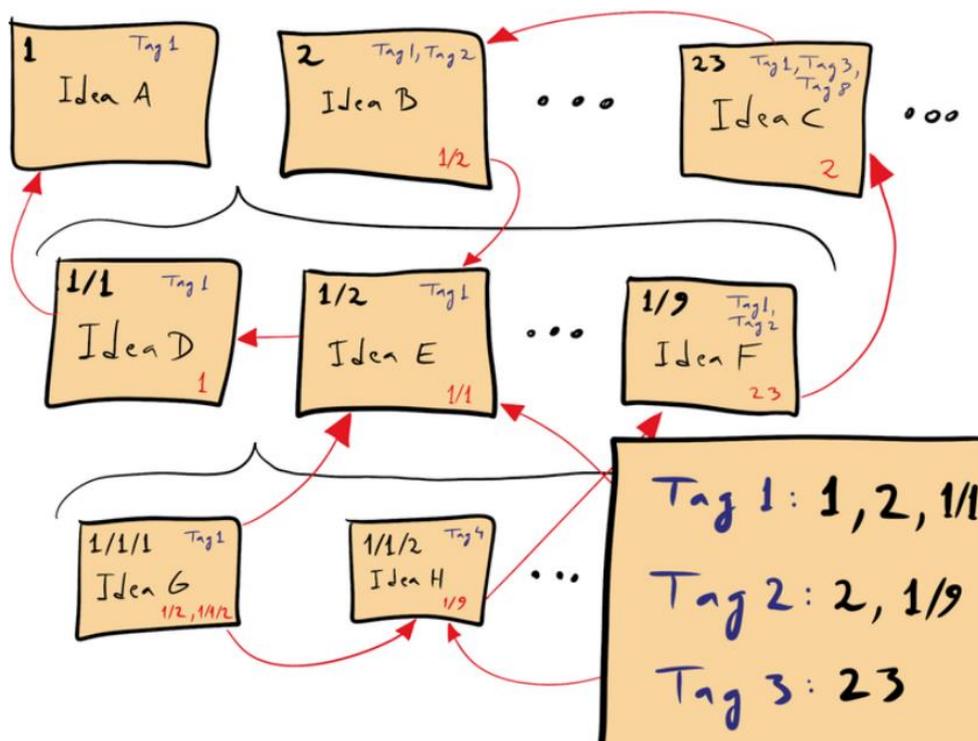


Рисунок 1. – Метод Zettelkasten

В соответствии с утверждениями авторов многочисленных статей, размещенных в сети и посвященных методу Zettelkasten, этот метод обладает следующими преимуществами:

1. Метод прост и не требует значительных усилий для его освоения.
2. Существует многочисленное программное обеспечение, поддерживающее создание и ведение картотеки по методу Zettelkasten.

3. В статьях, посвященных методу, авторы называют Zettelkasten «вторым мозгом», «личным интернетом», «персональной Википедией», подчеркивая тем самым эффективность и универсальность метода.

При применении этого метода рекомендуется придерживаться следующих принципов:

1. Каждая идея, отдельная мысль или законченный фрагмент текста, должны быть записаны на отдельной карточке.

2. Содержание карточки должно быть понятно без необходимости просмотра контекста.

3. Карточки связываются друг с другом перекрестными ссылками, образуя единую систему.

4. Каждая карточка дополняется ключевыми словами (тегами).

5. Для каждой карточки указывается источник информации, из которого были почерпнуты сведения для нее.

6. Группа карточек, посвященных одной теме должна полностью раскрывать эту тему.

7. Карточки никогда не удаляются.

Из всего многообразия программного обеспечения, облегчающего построение баз знаний по технологии Zettelkasten, в нашей работе мы использовали приложение Obsidian – свободно распространяемое программное обеспечение, предназначенное для построения персональных баз знаний на персональных компьютерах и ноутбуках. Такая база знаний в последующем может быть загружена в инфокиоск и использована в музейной экспозиции по соответствующей тематике.

Пример базы знаний, созданной по описанной методике. В качестве примера, иллюстрирующего описанную методику, покажем, как создавалась база знаний интеллектуальной информационно-поисковой системы «История Полоцкого кадетского корпуса».

Полоцкий кадетский корпус был открыт 8 июля (25 июня по старому стилю) 1835 г. по распоряжению императора Николая Первого [3]. Разместился корпус в здании бывшей иезуитской академии.

В настоящее время в этом историческом здании находятся факультет информационных технологий и гуманитарный факультет Полоцкого государственного университета имени Евфросинии Полоцкой, чем и объясняется наш интерес к истории корпуса.

Онтологическая модель разрабатываемой базы знаний состоит из трех базовых классов: «Документы», «События», «Люди». Класс «Документы» включает следующие подклассы: «Текстовые документы»,

«Рисунки», «Видео» и «Аудио»; класс «Люди» – подклассы «Выпускники», «Директора», «Наставники»; класс «События» – подклассы, соответствующие времени правления того или иного директора корпуса (рисунок 2).



Далее созданная онтология загружалась в приложение Obsidian. Получившийся в результате шаблон базы знаний наполнялся соответствующими фактами, документами, событиями. Процесс это продолжается и в настоящее время.

Заключение. Онтологическое моделирование является важным методом разработки интеллектуальных образовательных ресурсов. Сосредоточив внимание на отношениях между понятиями и сущностями, этот подход гарантирует, что знания будут представлены интуитивно понятным и машиночитаемым способом. С помощью онтологического моделирования можно определить предметную область, разработать концептуальную модель, создать и заполнить онтологию данными и, наконец, ввести онтологию в действие. Хотя этот процесс может быть сложным, преимущества онтологического моделирования очевидны: оно обеспечивает основу для создания мощных приложений, решающих множество прикладных проблем.

Эффективным инструментом построения онтологий является редактор Protégé. Он позволяет создавать классы, слоты и экземпляры, а также предоставляет простой способ модификации онтологий без создания противоречивых данных и знаний. Protégé можно использовать для практических приложений, таких как создание онтологий для интеллектуальных информационно-поисковых систем, а также в образовательных целях, таких как создание онтологических моделей для электронного обучения. Отметим также, что Protégé легко интегрируется с другими программами, используемыми для работы с онтологиями.

На основе онтологии, созданной средствами Protégé, с помощью приложения Obsidian, реализующего технологию Zettelkasten, можно быстро создать удобную базу знаний интеллектуальной информационно-справочной системы.

Отметим, что электронный ресурс «История Полоцкого кадетского корпуса», созданный в результате вышеперечисленных действий, может быть использован как минимум в трех организациях: в Полоцком государственном университете имени Ефросинии Полоцкой – как экспонат Музея истории науки и образования г. Полоцка, в Полоцком кадетском корпусе – как экспонат создаваемого корпусного музея, а также в составе экспозиции Полоцкого Национального историко-культурного музея-заповедника. Кроме того, ресурс обязательно найдет применение в учебном процессе Полоцкого государственного университета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кречетов И. А., Кручинин В. В. Моделирование и технология онтологического подхода при разработке образовательного контента // Доклады ТУСУР. – 2011. – № 2 (24). – Ч. 2. – С. 322–325.
2. Luhmann N. Kommunikation mit Zettelkästen. Ein Erfahrungsbericht (essay originally published 1981) // Universität als Milieu. Kleine Schriften / A. Kieserling (ed.). – Nauch, Bielefeld, 1992. – P. 53–61.
3. Полоцкий Кадетский Корпус. Исторический очерк / сост. В. П. Викентьев. – Полоцк: Типография Х. В. Клячко, 1910. – 460 с.

REFERENCES

1. Krechetov, I. A., & Kruchinin, V. V. (2011). Modelirovanie i tekhnologiya ontologicheskogo podkhoda pri razrabotke obrazovatel'nogo kontenta [The usage of ontology method in creating e-learning content]. *Doklady TUSUR [Proc. of TUSUR University]*, 2-2(24), С. 322–325. (In Russ., abstr. in Engl.).
2. Luhmann, N. (1992). Kommunikation mit Zettelkästen. Ein Erfahrungsbericht (essay originally published 1981). In A. Kieserling (ed.), *Universität als Milieu. Kleine Schriften* (53–61). Haux, Bielefeld.
3. Vikent'ev", V. P. (1910). *Polotskii Kadetskii Korpus". Istoricheskii ocherk"*. Polotsk": Tipografiya X. V. Klyachko. (In Russ.).

Поступила 21.03.2023

**CREATION OF ELECTRONIC EDUCATIONAL AND METHODOLOGICAL COMPLEXES
WITH THE HELP OF THE ONTOLOGICAL APPROACH**

A. OSKIN, G. KONAPLEVA

(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk);

T. TAVGEN

(Belarusian National Technical University, Minsk);

V. GROPPEN

*(North Caucasian Institute of Mining and Metallurgy (State Technological University),
Vladikavkaz, Russia)*

The article discusses the possibilities of ontological modeling and its application for creating knowledge bases of electronic educational and methodological complexes. It is shown that with the help of ontological modeling it is possible to define a subject area, develop a conceptual model, create and fill an ontology with data, and finally put the ontology into action. The toolkit of ontological modeling and its possibilities for creating knowledge bases of electronic teaching and learning kits are considered. It is shown that the Zettelkasten technology and the Obsidian application can be used to build a working model of the knowledge base. An example of the application of the stated methodology in the construction of the knowledge base "History of the Polotsk Cadet Corps" is given.

Keywords: *applied ontology, ontological modeling, Protégé, Zettelkasten, Obsidian.*

ЭЛЕКТРОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ УСТАНОВКИ (ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ)

УДК 541.183

DOI 10.52928/2070-1624-2023-40-1-29-37

ИНДЕНТИРОВАНИЕ ОБЛУЧЕННЫХ ЭЛЕКТРОНАМИ ПЛЕНОК ДИАЗОХИНОН-НОВОЛАЧНЫХ ФОТОРЕЗИСТОВ НА КРЕМНИИ

канд. физ.-мат. наук, доц. С. А. ВАБИЩЕВИЧ, Н. В. ВАБИЩЕВИЧ
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой);

канд. физ.-мат. наук Д. И. БРИНКЕВИЧ, канд. физ.-мат. наук, доц. В. С. ПРОСОЛОВИЧ
(Белорусский государственный университет, Минск)

Методом индентирования изучены прочностные свойства облученных электронами с энергией 5 МэВ флюенсом $3 \cdot 10^{16}$ см⁻² пленок диазохинон-новолачных фоторезистов ФП9120, SPR 700 и S1813 G2 SP15 на кремнии. Отпечатки микроиндентора в пленках диазохинон-новолачных фоторезистов имеют бочковидную форму, что свидетельствует о наличии растягивающих напряжений, формирующихся при сушке пленки. Вокруг отпечатков индентора наблюдалась картина разрушений с радиальными и боковыми трещинами в виде «бабочек». Установлено, что при длительном хранении и облучении пленок диазохинон-новолачных фоторезистов имеет место увеличение значений истинной микротвердости пленок, которое обусловлено сшиванием макромолекул новолака в объеме полимера.

Ключевые слова: фоторезист, индентирование, микротвердость, облучение электронами.

Основным технологическим процессом современной микроэлектроники является фотолитография – метод формирования заданного рисунка на кремниевой подложке для получения необходимой топологии микросхем [1]. В современной полупроводниковой электронике в качестве защитного светочувствительного материала в прецизионных фотолитографических процессах наиболее широко используются позитивные диазохинон-новолачные фоторезисты (ФР), представляющие собой композит из светочувствительного *o*-нафтохинондиазида и смеси фенол- и крезолоформальдегидных смол обычно в соотношении 5 : 1 [2]. К этому классу фоторезистов относятся ФП9120, SPR 700 и S1813 G2 SP15, являющиеся аналогами по применению. Одной из наиболее важных технологических характеристик фоторезистивных пленок является устойчивость к внешним воздействиям. Взаимодействие ФР с ультрафиолетовым, рентгеновским и видимым излучением исследовано достаточно подробно, в то время как процессы, индуцированные электронным облучением, изучены слабо, несмотря на то, что они могут оказывать существенное влияние на качество создаваемых приборов.

Цель настоящей работы – исследование радиационно-индуцированных процессов, протекающих при облучении электронами пленок диазохинон-новолачных фоторезистов ФП9120, SPR 700 и S1813 G2 SP15 на кремнии.

Материалы и методы измерений. Пленки позитивных диазохинон-новолачных фоторезистов марок ФП9120, SPR 700 и S1813 G2 SP15 толщиной 1,0–1,8 мкм наносились методом центрифугирования на поверхность пластин кремния с ориентацией (100) и (111). Время вращения центрифуги – 40 с. Перед формированием пленки ФР кремниевые пластины подвергали стандартному циклу обработки поверхности в органических и неорганических растворителях. После нанесения фоторезиста на рабочую сторону пластины проводилась сушка в течение 50–55 мин при температуре 88 °С. Толщина пленок фоторезиста контролировалась механическим способом на профилометре «Dectak» по 5 фиксированным точкам на каждой пластине, при этом отклонения от среднего значения по пластине для всех исследованных образцов не превышали 1%.

Облучение электронами с энергией 5 МэВ проводилось на линейном ускорителе электронов У-003 флюенсом $3 \cdot 10^{16}$ см⁻². Плотность потока электронов контролировалась с помощью цилиндра Фарадея и составляла $1 \cdot 10^{12}$ см⁻²с⁻¹. Температура образцов в процессе облучения не превышала 310 К.

Микроиндентирование проводилось на приборе ПМТ-3 по стандартной методике при комнатной температуре [3; 4]. В качестве индентора использовался алмазный наконечник в форме четырехгранной пирамиды с квадратным основанием и углом при вершине $\alpha = 136^\circ$. Нагрузка (*P*) на индентор варьировалась в пределах 1–50 г. Длительность нагружения составляла 2 с; выдержка под нагрузкой – 5 с. При каждом измерении на поверхность образца наносилось не менее 50 отпечатков. Для обработки экспериментальных данных использовались стандартные методы математической статистики [3]. Погрешность измерений микротвердости (*H*) составляла 5% (с доверительной вероятностью 0,95).

Эксперимент. Отпечатки микроиндентора в пленках всех марок фоторезиста имели бочковидную форму (рисунок 1, *а*), что свидетельствует о наличии растягивающих напряжений, формирующихся при сушке пленки. Параллельно сторонам отпечатка наблюдались навалы (светлые области на рисунке 1, *а*), обусловленные выдавливанием материала из-под индентора. При минимальной нагрузке 1 г часть (от 40% в ФП9120 до 85% в S1813) отпечатков после снятия нагрузки частично или полностью восстанавливались, уменьшаясь в размерах или полностью исчезая. Однако уже при нагрузке 5 г эффект восстановления отпечатка не наблюдался.

Для ряда отпечатков на пленках SPR 700 (~10–15%) и, в меньшей степени, S1813 при нагрузках 5–50 г, когда индентор пересекает границу раздела фоторезист/подложка, в процессе индентирования наблюдался отрыв пленки от подложки (рисунок 2). При этом в области отпечатка обнажалась кремниевая подложка. Это свидетельствует о слабой адгезии фоторезистивной пленки к кремнию. Отметим, что при увеличении толщины пленки SPR 700 до 1,8 мкм размеры зоны откола существенно (на ~30%) снижаются (см. рисунок 2, *а, б*). В фоторезистивных пленках ФП9120 таких отрывов практически не наблюдалось, что указывает на лучшую адгезию ФП9120 к кремнию.

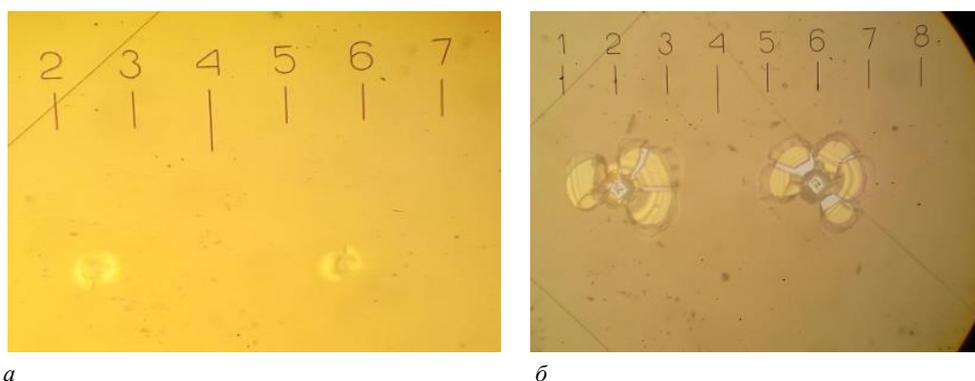


Рисунок 1. – Микрофотография отпечатков индентора в пленке фоторезиста SPR 700 толщиной 1,2 мкм при нагрузке 1 г (*а*) и 50 г (*б*)

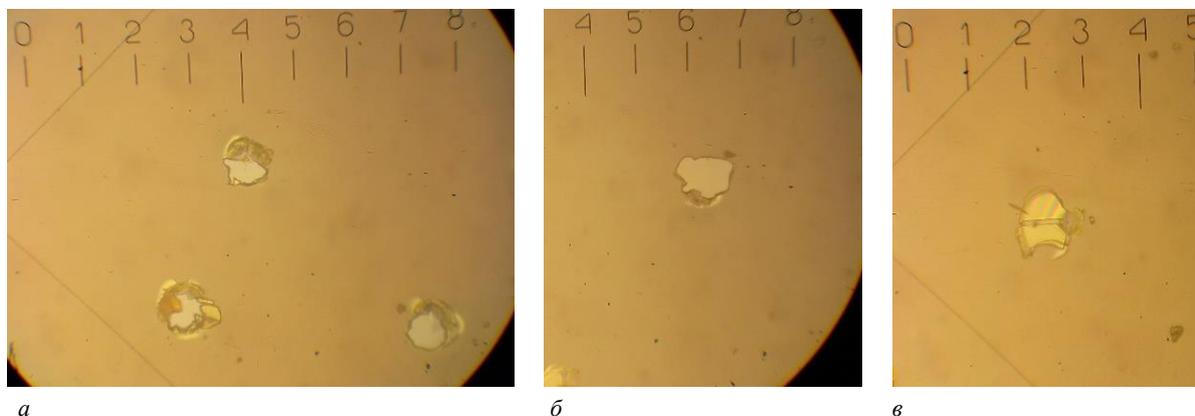
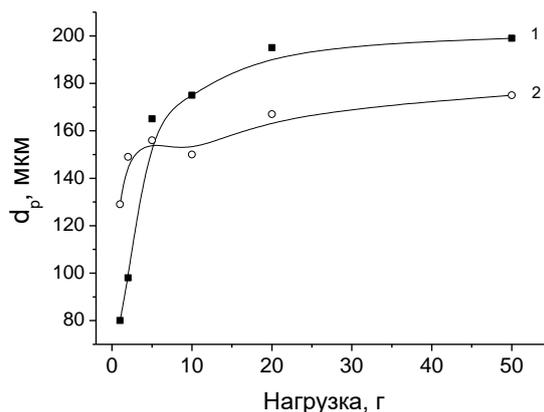


Рисунок 2. – Микрофотография отпечатков индентора с отрывами для пленок фоторезистов SPR 700 толщиной 1,8 мкм (*а*) и 1,2 мкм (*б*), S1813 G2 SP15 толщиной 1,8 мкм (*в*). Нагрузка: 20 г (*а*), 10 г (*б*) и 5 г (*в*)

На нагрузках более 5 г вокруг отпечатков имела место зона разрушения, в которой наблюдались радиальные и боковые трещины, образующие картину в виде «бабочек», обусловленную, вероятнее всего, отслоением пленки от подложки (см. рисунок 1, *б*). Размеры зоны разрушения зависят от нагрузки. В пленках фоторезиста ФП9120 средний диаметр зоны разрушения d_p вокруг отпечатка возрастает при приближении индентора к границе раздела ФР/Si, а когда он пересекает эту границу (при нагрузке 5 г), рост замедляется и величина d_p выходит на насыщение (рисунок 3, кривая 1). В фоторезистах SPR 700 и S1813 G2 SP15 величина d_p при увеличении нагрузки изменяется слабо (рисунок 3, кривая 2). Даже при малых нагрузках 1–2 г, когда индентор не достигает границы раздела ФР/Si, величина d_p достигает 120–150 мкм. Такое поведение d_p может быть обусловлено низкой адгезией указанных фоторезистов к кремнию, что приводит к сильному отслоению пленки даже при малых нагрузках.

Рисунок 3. – Зависимости от нагрузки среднего диаметра зоны разрушения d_p вокруг отпечатка в фоторезистивных пленках ФП9120 (1) и S1813 (2) толщиной 1,8 мкм

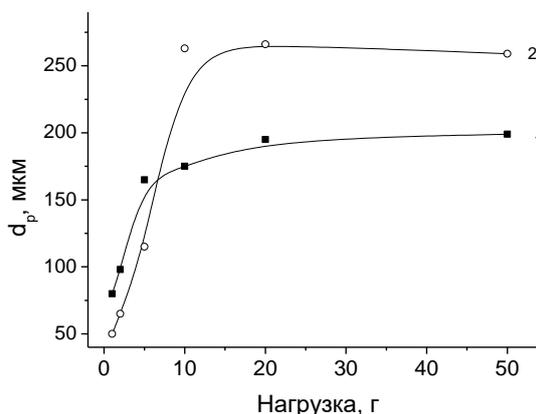


Средние значения d_p после выхода на насыщение (при нагрузках 5–50 г) для структур ФР/Si, вырезанных их различных мест пластины, приведены в таблице 1. Данные, приведенные в таблице 1, свидетельствуют о сильной неоднородности пленок фоторезистов SPR 700 и S1813 G2 SP15. В этих пленках значения d_p могли различаться почти в два раза в зависимости от местоположения на пластине. В пленках ФП9120 значения d_p практически не зависят от местоположения на пластине. Причем это присуще не только свежеприготовленным структурам ФР/Si, но и структурам, хранившимся более 3 лет (см. таблицу 1). Отметим, что после хранения структур ФП9120 на Si значения d_p при малых нагрузках снижаются, а при нагрузках 10–50 г (после пересечения индентором границы раздела ФР/Si) возрастают на 30–40% (рисунок 4; см. таблицу 1). Это может быть обусловлено сшивками молекул входящей в состав фоторезиста фенолформальдегидной смолы при хранении структур ФП9120 на Si. Сшивки должны приводить к снижению адгезии фоторезиста к кремнию [5; 6] и, соответственно, к увеличению d_p при малых нагрузках.

Таблица 1. – Значения среднего диаметра зоны разрушения d_p (мкм) при нагрузках 5–50 г для различных структур фоторезист/кремний

	Толщина слоя ФР, мкм	Исходный		Облученный
		центр	край	
ФП9120	1,8	186	182	155
SPR 700	1,2	158	176	170
	1,8	152	89	154
S1813	1,8	151	116	143
ФП9120 после хранения 3 года	1,8	260	240	171

Рисунок 4. – Зависимости от нагрузки среднего диаметра зоны разрушения d_p вокруг отпечатка в фоторезистивных пленках ФП9120 толщиной 1,8 мкм «свежих» (1) и после хранения в течение 3 лет (2)



После облучения электронами флюенсами до $3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ пленок фоторезистов SPR 700 и S1813 G2 SP15 существенного изменения вида зависимостей d_p от нагрузки не наблюдалось. Не отмечено также какого-либо изменения значения d_p (см. таблицу 1). После облучения электронами свежеприготовленных и хранившихся длительное время структур ФП9120 на Si наблюдалось возрастание d_p при малых нагрузках, снижение значений d_p при проникновении индентора в кремниевую подложку (нагрузки 10–50 г). Наиболее

отчетливо это проявлялось в свежеприготовленных пленках ФП9120 на Si (рисунок 5, б). Такие зависимости d_p от нагрузки отмечались нами выше для свежеприготовленных пленок фоторезистов SPR 700 и S1813 G2 SP15 и были объяснены низкой адгезией указанных фоторезистов к кремнию. Отметим, что снижение адгезии фоторезиста ФП9120 к кремнию при γ -облучении наблюдалось ранее в работе [5].

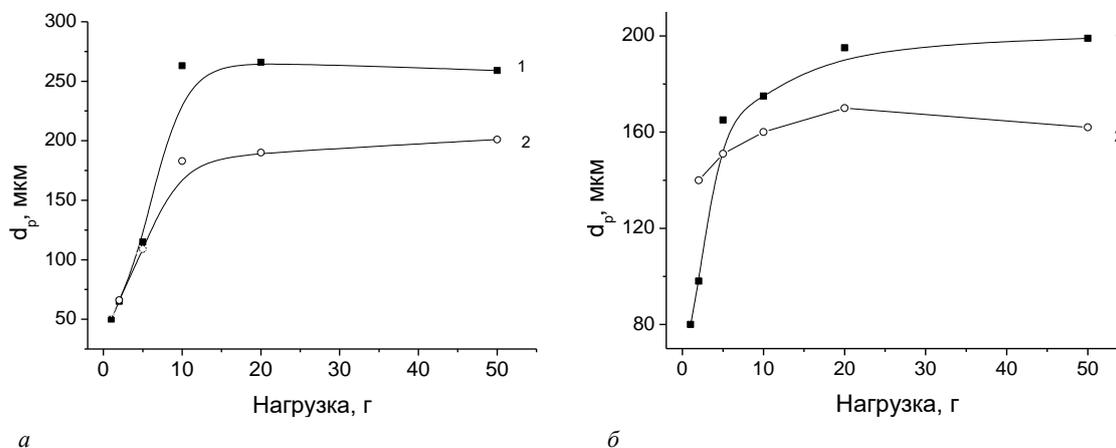


Рисунок 5. – Зависимости от нагрузки среднего диаметра зоны разрушения вокруг отпечатка в свежеприготовленных (б) и после хранения в течение 3 лет (а) пленках ФП9120 толщиной 1,8 мкм исходных (1) и облученных электронами флюенсом $3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ (2)

Зависимости микротвердости от нагрузки всех структур фоторезист/кремний схожи (рисунок 6). Известно, что подложка оказывает существенное влияние на величину микротвердости твердотельных композиций пленка – подложка [7]. В случае «мягкой» пленки на «твердой» подложке пластическая деформация локализуется в пленке, и микротвердость композиции пленка – подложка начинает существенно расти лишь при проникновении индентора в подложку [7]. Таким образом, рост микротвердости H всех структур ФР/Si при нагрузках свыше 5 г обусловлен вкладом кремниевой подложки.

При анализе зависимостей $H(P)$ структур фоторезист/кремний необходимо также учитывать адгезионные свойства фоторезистивных пленок и наличие в них растягивающих напряжений. Так, более низкие значения измеренной микротвердости H пленок S1813 и SPR 700 по сравнению с ФП9120 при нагрузках свыше 10 г, когда индентор проникает в кремниевую подложку, могут быть обусловлены двумя причинами: слабой адгезией ФР к кремниевой подложке и релаксацией растягивающих напряжений при пересечении индентором границы раздела фоторезист/кремний. Для пленок фоторезиста SPR 700 основной причиной является низкая адгезия к кремнию. Подтверждением сделанного вывода является то, что у отпечатков индентора в пленках этого фоторезиста наблюдались отколы, отсутствующие в ФП9120. Следует обратить внимание на серьезные различия в кривых $H(P)$ для разных пленок фоторезиста SPR 700 (см. рисунок 6, кривые 3 и 4), в то время как величины истинных микротвердостей этих пленок, измеренные при нагрузке 1 г, практически совпадали (таблица 2). В свете высказанного выше предположения это может свидетельствовать о различной величине адгезии ФР к кремнию в этих пленках. Т. е. существует определенная невоспроизводимость в адгезионных свойствах пленок SPR 700.

Длительное хранение структур фоторезист/кремний приводит к снижению микротвердости структур в диапазоне нагрузок свыше 2 г, когда индентор пересекает границу раздела фоторезист/кремний (рисунок 7). При этом истинная микротвердость пленки фоторезиста, измеренная при нагрузке 1 г, когда индентор локализован в пленке, наоборот возрастает (см. рисунок 7, кривые 1 и 2). Отмеченный эффект может быть обусловлен совместным действием 3 факторов: снижением при длительном хранении адгезии ФР к кремнию, увеличением растягивающих напряжений вследствие испарения остаточного растворителя и образования сшивок молекул фенолформальдегидной смолы, являющейся основным компонентом диазохинон-новолачных фоторезистов. С одной стороны, сшивки молекул фоторезиста приводят к увеличению истинной микротвердости пленки ФР. С другой стороны, ранее в работе [8] было показано, что при низкой адгезии пленки к подложке индентор практически не испытывает сопротивления при прохождении границы раздела пленка/подложка, что проявляется как снижение измеренной микротвердости, т. е. наблюдается минимум на кривой $H(P)$ в области нагрузок, соответствующих пересечению индентором границы раздела фоторезист/кремний.

Следует также отметить существенные отличия зависимостей $H(P)$ в области малых (1–2 г) нагрузок для образцов, вырезанных из разных частей хранившейся в течение 3 лет пластины кремния с нанесенной пленкой фоторезиста ФП9120 (см. рисунок 7, кривые 2, 3), что свидетельствует о сильной неоднородности прочностных и адгезионных свойств фоторезистивной пленки после длительного хранения. Отметим, что

в свежеприготовленных структурах фоторезист/кремний существенной неоднородности прочностных и адгезионных свойств не наблюдалось: кривые $H(P)$ для образцов, вырезанных из различных частей пластины, были идентичны.

Рисунок 6. – Зависимости от нагрузки микротвердостей фоторезистивных пленок ФП9120 (1), S1813 (2) и SPR 700 толщиной 1,2 мкм (3) и 1,8 мкм (4)

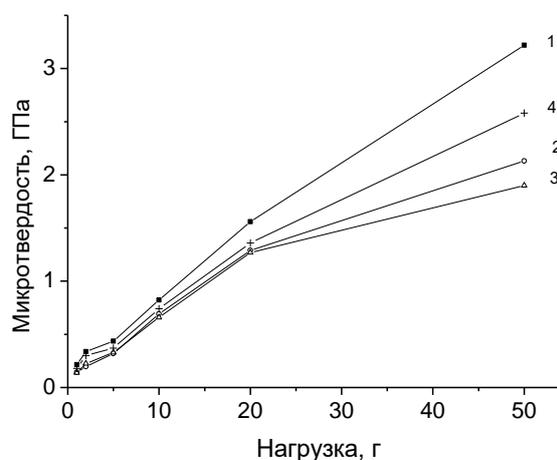
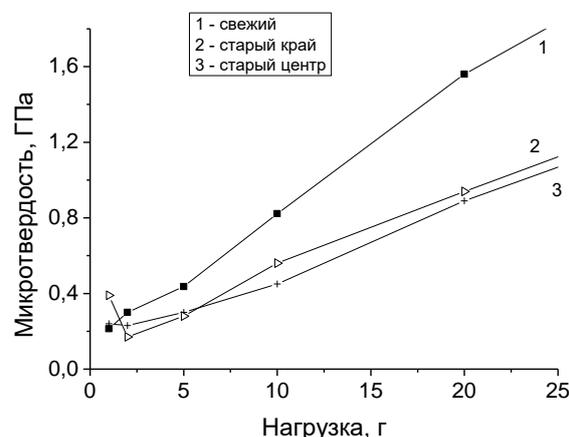


Рисунок 7. – Зависимости от нагрузки микротвердостей свежеприготовленных (1) и после хранения в течение 3 лет (2, 3) пленок ФП9120 толщиной 1,8 мкм. Образцы вырезались из края (2) и центра (3) пластины



Облучение 5 МэВ электронами приводило к увеличению значений микротвердости при нагрузке 1 г (таблица 2; см. рисунки 8–10). Поскольку при этой нагрузке глубина проникновения индентора составляет ~0,9 мкм, то экспериментальные значения, приведенные в таблице, соответствуют истинной микротвердости полимерной пленки. Т. е. при облучении истинная микротвердость фоторезистивных пленок возрастает, причем наиболее существенно (почти в 3 раза) в SPR 700 толщиной 1,8 мкм. Наиболее устойчивы к облучению пленки ФП9120, в которых рост микротвердости был минимален (~60%). Полученные результаты коррелируют с данными [9], в которой показано, что γ -облучение приводит к увеличению микротвердости пленок сополимеров метилметакрилата и метакриламида на кремнии. Ранее [10] также наблюдалось увеличение микротвердости пленок ФП9120 при имплантации сурьмы. Отметим, что после облучения значения истинной микротвердости различных ФР сближались: значения H различались на 0,06 ГПа (~15%), что близко к удвоенной погрешности измерений. В необлученных фоторезистивных пленках значения H различались существенно – до 60%. Рост истинной микротвердости фоторезистивных пленок при облучении обусловлен сшивками молекул фенолформальдегидной смолы, входящей в состав фоторезистов. Образование таких сшивок при облучении ранее [2; 7; 10] было установлено методом нарушенного полного внутреннего отражения.

Таблица 2. – Микротвердость (ГПа) исходных и облученных пленок фоторезиста при нагрузке 1 г

Марка ФР	исходный	облученный
ФП9120	0,21	0,35
SPR 700 1,2 мкм	0,15	0,36
SPR 700 1,8 мкм	0,14	0,40
S1813 G2 SP15	0,23	0,41

При приближении индентора к границе раздела (увеличении нагрузки с 1 до 2 г) наблюдается снижение микротвердости во всех облученных структурах фоторезист/кремний до значений ниже величин H в необлученных структурах (см. рисунки 8–10). При нагрузках свыше 5 г, когда основной вклад дает кремниевая подложка, во всех исследованных структурах фоторезист/кремний значения измеренной микротвердости после облучения снижались (см. рисунки 8, 9). Ранее [11] было показано, что при электронном облучении наблюдается упрочнение монокристаллического кремния, т. е. увеличение его микротвердости. Более низкие значения измеренной при нагрузке ≥ 2 г микротвердости облученных структур ФР/Si могут быть обусловлены как снижением адгезии при облучении, так и формированием растягивающих напряжений в фоторезистивных пленках. Ранее в работе [5] было показано, что γ -облучение приводит к снижению значений удельной энергии отслаивания G пленок ФП9120 на кремнии.

Одной из наиболее очевидных причин этого эффекта является формирование в результате облучения сшивок в объеме пленки [12]. Как известно [13], в фенолформальдегидных смолах, являющихся основой фоторезиста, при электронном облучении наблюдаются преимущественно реакции рекомбинации радикалов (в основном феноксильного и метиленового типов). В результате сшивания полимер становится более жестким и теряет свои пластические свойства [14]. При надавливании на облученный ФР нагрузка в основном передается на межфазную границу полимер – кремний, в то время как при индентировании необлученной фоторезистивной пленки происходит изменение конформации макромолекул под пирамидкой, из-за чего нагрузка распределяется на больший объем/площадь полимера. Более того, при сшивании ФР увеличивается плотность резистивной пленки. Это приводит к формированию упругих напряжений на границе раздела фоторезист/кремний.

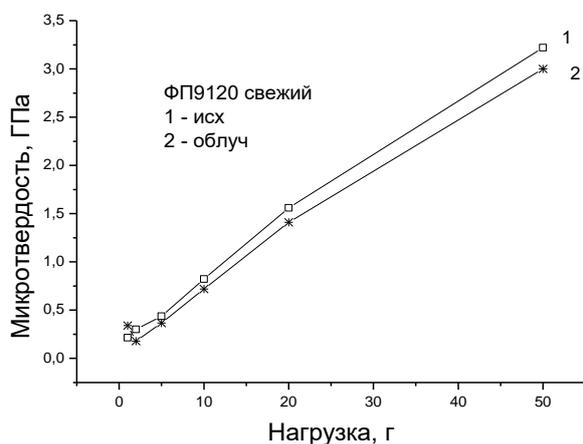


Рисунок 8. – Зависимости от нагрузки микротвердости фоторезистивной пленки ФП9120 толщиной 1,8 мкм до (1) и после (2) облучения электронами флюенсом $3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$

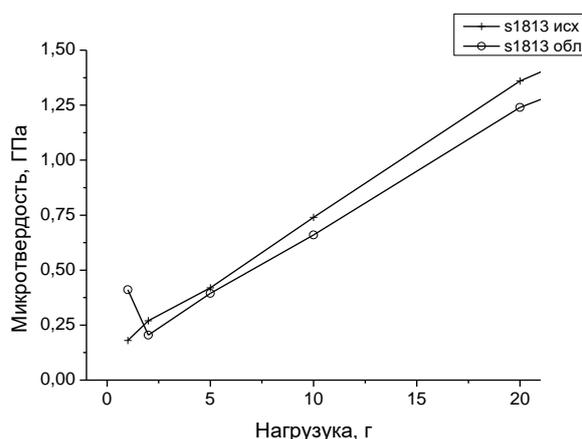


Рисунок 9. – Зависимости от нагрузки микротвердости фоторезистивной пленки S1813 G2 SP15 толщиной 1,8 мкм до (1) и после (2) облучения электронами флюенсом $3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$

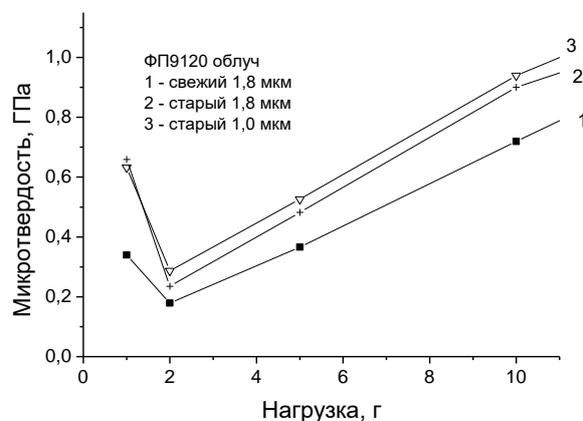


Рисунок 10. – Зависимости от нагрузки микротвердости облученных свежеприготовленных (1) и после хранения в течении 3 лет (2, 3) пленок ФП9120 толщиной 1,8 мкм (1, 2) и 1,0 мкм (3)

Изменения прочностных свойств структур фоторезист/кремний в условиях облучения могут быть обусловлены и релаксационными процессами. Образующаяся в процессах прямого возбуждения под действием ионизирующего излучения или в результате косвенных процессов (рекомбинации радикалов, а также

нейтрализации разноименно заряженных ионов) энергия возбуждения может передаваться на большие расстояния по макромолекулам полимера, особенно если величина энергии недостаточна для распада молекул на радикалы (~4 эВ) [5]. При облучении значительная часть энергии ионизирующего излучения конвертируется в низкоэнергетическое возбуждение макромолекул и «накапливается» на межфазных границах, на дефектах и включениях в пленке [14]. При этом энергии низкоэнергетического возбуждения достаточно для различных конформационных изменений (не связанных с формой макромолекул и взаимным расположением звеньев) в структуре фенолформальдегидной смолы. В результате этого под действием электронного облучения может происходить формирование полей упругих напряжений в пленке, что в конечном итоге будет приводить к наблюдавшейся модификации прочностных свойств структур фоторезист/кремний.

Важно также учитывать явление накопления электрического заряда в полимере при воздействии ионизирующего излучения. Эффект накопления электрического заряда связан с тем, что электроны, выбиваемые при ионизации в полимерной пленке, стекают на границы раздела фаз. В нашем случае при облучении они в основном накапливаются в приповерхностном слое кремния. При этом в полимере остаются катион-радикалы, а потом и катионы, что приводит к возникновению объемного заряда (разности потенциалов) на границе раздела фоторезист/кремний. При этом основное падение напряжения приходится на слой полимера толщиной ~10 нм, непосредственно контактирующий с полупроводником. У границы раздела фоторезист/кремний создается поле с напряженностью до $5 \cdot 10^7$ В/см [5]. Это поле может модифицировать структуру полимера вблизи границы раздела фаз и снижать адгезию фоторезиста к кремнию. Ранее было показано [15], что адгезия диазохинон-новолачных резистов к кремниевой подложке обусловлена формированием Si-O-C фрагментов на границе раздела фаз. Перенос электронов на межфазную границу может приводить к деструкции связей Si-O-C и, соответственно, к снижению адгезии фоторезиста к кремнию.

Заключение. Таким образом установлено, что отпечатки микроиндентора в пленках диазохинон-новолачных фоторезистов имеют бочковидную форму, что свидетельствует о наличии растягивающих напряжений, формирующихся при сушке пленки. Вокруг отпечатков индентора наблюдалась картина разрушений с радиальными и боковыми трещинами в виде «бабочек», обусловленная, вероятнее всего, отслоением пленки от подложки. Установлено, что при длительном хранении и облучении пленок диазохинон-новолачных фоторезистов имеет место увеличение значений истинной микротвердости пленок, измеренной при нагрузке 1 г, которое обусловлено сшиванием макромолекул новолака в объеме фоторезиста. При нагрузках свыше 5 г, когда индентор пересекает границу раздела ФР/подложка, значения измеренной микротвердости после облучения снижались, что может быть обусловлено как релаксацией напряжений в пленке вследствие конформационных перестроек макромолекул в процессе облучения, так и снижением адгезии фоторезистивных пленок к кремнию. Отметим, что для однозначного установления механизма, объясняющего приведенные экспериментальные данные, необходимы дополнительные исследования, в частности, прямые измерения адгезионных свойств исследовавшихся в настоящей работе структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пирс К., Адамс А., Кац Л. и др. Технология СБИС: в 2-х кн.: пер. с англ. / под ред. С. Зи. – М.: Мир, 1986. – Кн. 1. – 404 с.
2. Brinkevich S. D., Brinkevich D. I., Prosolovich V. S. et al. Frustrated total internal reflection spectra of diazoquinone-novolac photoresist // *J. of Applied Spectroscopy*. – 2021. – Vol. 87, No. 6 – P. 1072–1078. – DOI: [10.1007/s10812-021-01111-9](https://doi.org/10.1007/s10812-021-01111-9).
3. Бринкевич Д. И., Вабищевич Н. В., Вабищевич С. А. Физико-механические свойства эпитаксиальных слоев фосфида галлия // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки*. – 2010. – № 9. – С. 92–97.
4. Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Бринкевич Д. И. и др. Физико-механические свойства облученных пленок диазохинон-новолачного фоторезиста на кремнии // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки*. – 2020. – № 12. – С. 60–64.
5. Vabishchevich S. A., Brinkevich S. D., Vabishchevich N. V. et al. Adhesion of Irradiated Diazoquinone-Novolac Photoresist Films to Single-Crystal Silicon // *High Energy Chemistry*. – 2021. – Vol. 55, № 6 – P. 495–501. DOI: [10.1134/S0018143921060151](https://doi.org/10.1134/S0018143921060151).
6. Бринкевич Д. И., Бринкевич С. Д., Просолович В. С. Ионная имплантация диазохинонноволачного фоторезиста // *Химия высоких энергий*. – 2022. – Т. 56, № 4. – С. 284–292.
7. Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Бринкевич Д. И. и др. Прочностные свойства структур фоторезист–кремний, γ -облученных и имплантированных ионами В⁺ и Р⁺ // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки*. – 2016. – № 12. – С. 30–36.
8. Brinkevich D. I., Brinkevich S. D., Vabishchevich N. V. et al. Ion implantation of positive photoresists // *Russian Microelectronics*. – 2014. – Vol. 43, № 3. – P. 194–200. – DOI: [10.1134/S106373971401003X](https://doi.org/10.1134/S106373971401003X).
9. Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Бринкевич Д. И. и др. Микротвердость пленок сополимеров на основе метилметакрилата, облученных γ -квантами // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки*. – 2016. – № 12. – С. 51–57.
10. Харченко, А. А., Бринкевич Д. И., Просолович В. С. и др. Радиационно-стимулированная трансформация спектров отражения пленок диазохинон-новолачного фоторезиста при имплантации ионов сурьмы // *Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед.* – 2020. – № 6. – С. 14–18. – DOI: [10.31857/S1028096020060084](https://doi.org/10.31857/S1028096020060084).

11. Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Бринкевич Д. И. Физико-механические свойства кремния, облученного электронами и нейтронами // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2010. – № 3. – С. 109–114.
12. Livesay W. R., Rubiales A. L., Ross M. F. et al. Electron beam hardening of photo resist // SPIE'S 1993 Symposium on Microlithography, 1993, San Jose, CA, United States: Proc. SPIE 1925, Advances in Resist Technology and Processing X (15.09.1993). – DOI: [10.1117/12.154778](https://doi.org/10.1117/12.154778).
13. Олешкевич А. Н., Лапчук Н. М., Оджаев В. Б. и др. Электронная проводимость в имплантированном ионами P⁺ позитивном фоторезисте // Микроэлектроника. – 2020 – Т. 49, № 1. – С. 58–65.
14. Экспериментальные методы химии высоких энергий / под ред. М. Я. Мельникова. – М.: МГУ, 2009. – С. 169–177.
15. Бринкевич С. Д., Гринюк Е. В., Сverdlov P. Л. и др. Механизм адгезионного взаимодействия пленок диазохинон-новолачного фоторезиста с монокристаллическим кремнием // Журн. прикладной спектроскопии. – 2020. – Т. 87, № 4. – С. 589–594.

REFERENCES

1. Pirs, K., Adams, A., Kats, L., Tsai, Dzh., Seidel, T., Makgillis, D. & Zi, S. (Ed.). (1986). *Tekhnologiya SBIS: v 2-h kn. Kn. 1.* – М: Mir. (In Russ.).
2. Brinkevich, S. D., Brinkevich, D. I., Prosolovich, V. S., Lastovskii, S. B., & Pyatlitski, A. N. (2021). Frustrated Total Internal Reflection Spectra of Diazoquinone–Novolac Photoresist Films. *J. of Applied Spectroscopy*, 87(6), 1072–1078. DOI: [10.1007/s10812-021-01111-9](https://doi.org/10.1007/s10812-021-01111-9).
3. Brinkevich, D. I., Vabishchevich, N. V., & Vabishchevich, S. A. (2010). Fiziko-mekhanicheskie svoistva epitaksial'nykh sloev fosfida galliya [Physicomechanical Properties of Epitaxial Layers Gallium Phosphide]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (9), 92–97.
4. Vabishchevich, S. A., Vabishchevich, N. V., Brinkevich, D. I., & Prosolovich, V. S. (2020). Fiziko-mekhanicheskie svoistva obluchennykh plenok diazokhinon-novolachnogo fotorezista na kremnii [Physical and Mechanical Properties of Irradiated Films of Diazoquinone-Novolach Photoresist on Silicon]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (12), 60–64.
5. Vabishchevich, S. A., Brinkevich, S. D., Vabishchevich, N. V., Brinkevich, D. I., & Prosolovich, V. S. (2021). Adhesion of Irradiated Diazoquinone-Novolac Photoresist Films to Single-Crystal Silicon. *High Energy Chemistry*, 55(6), 495–501. DOI: [10.1134/S0018143921060151](https://doi.org/10.1134/S0018143921060151).
6. Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., & Prosolovich, V. S. (2022). Ionnaya implantatsiya diazokhinon-novolachnogo fotorezista. *Khimiya vysokikh energii [High Energy Chemistry]*, 56(4), 270–276. (In Russ.).
7. Vabishchevich, S. A., Vabishchevich, N. V., Brinkevich, D. I., Prosolovich, V. S., Yankovskii, Yu. N., & Brinkevich, S. D. (2016). Prochnostnye svoistva struktur fotorezist-kremnii, γ -obluchennykh i implantirovannykh ionami V⁺ i R⁺ [Strength Properties of Photoresist-Silicon Structures, γ -Irradiated and Implanted by B⁺ and P⁺ Ions]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (12), 30–36. (In Russ., abstr. in Engl.).
8. Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., Vabishchevich, N. V., Odzhaev, V. B. & Prosolovich, V. S. (2014). Ion implantation of positive photoresists. *Russian Microelectronics*, 43(3), 194–200. DOI: [10.1134/S106373971401003X](https://doi.org/10.1134/S106373971401003X).
9. Vabishchevich, S. A., Vabishchevich, N. V., Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., & Prosolovich, V. S. (2016). Mikrotverdost' plenok sopolimerov na osnove metilmetakrilata, obluchennykh γ -kvantami [Microhardness of γ -Irradiated Films of Copolymers Based on Methyl Methacrylate]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (12), 51–57.
10. Kharchenko, A. A., Brinkevich, D. I., Prosolovich, V. S., Brinkevich, S. D., Odzhaev, V. B., & Yankovskii, Yu. N. (2020). Radiation-Stimulated Transformation of the Reflectance Spectra of Diazoquinone–Novolac Photoresist Films Implanted with Antimony Ions. *J. of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, 14(3), 558–561. DOI: [10.1134/S1027451020030283](https://doi.org/10.1134/S1027451020030283).
11. Vabishchevich, S. A., Vabishchevich, N. V., & Brinkevich, D. I. (2010). Fiziko-mekhanicheskie svoistva kremniya, obluchennogo elektronami i neitronami [Physical-Mechanical Properties of Silicon Implanted by Electrons and Neutrons]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (3), 109–114. (In Russ., abstr. in Engl.).
12. Livesay, W. R., Rubiales, A. L., Ross, M. F., Woods, S. C., & Campbell, S. (1993). Electron beam hardening of photo resist. In *Proc. SPIE 1925, Advances in Resist Technology and Processing X (15.09.1993)*. DOI: [10.1117/12.154778](https://doi.org/10.1117/12.154778).
13. Oleshkevich, A. N., Lapchuk, N. M., Odzhaev, V. B., Karpovich, I. A., Prosolovich, V. S., Brinkevich, D. I., & Brinkevich, S. D. (2020). Electronic Conductivity in a P⁺-Ion Implanted Positive Photoresist. *Russian Microelectronics*, 49(1), 55–61.
14. Mel'nikov, M. Ya. (Ed.). (2009). *Ekspperimental'nye metody khimii vysokikh energii*, 169–177. Moscow: Publ. MGU. (In Russ.).
15. Brinkevich, S. D., Grinyuk, E. V., Brinkevich, D. I., Sverdlov, R. L., Prosolovich, V. S., & Pyatlitski, A. N. (2020). Mechanism of the Adhesive Interaction of Diazoquinone-Novolac Photoresist Films with Monocrystalline Silicon. *J. of Applied Spectroscopy*, 87(4), 647–651. DOI: [10.1007/s10812-020-01049-4](https://doi.org/10.1007/s10812-020-01049-4).

Поступила 24.02.2023

INDENTATION OF ELECTRON-IRRADIATED FILMS OF DIAZOQUINONE NOVOLAC PHOTORESISTS ON SILICONE

S. VABISHCHEVICH, N. VABISHCHEVICH
(*Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk*)

D. BRINKEVICH, V. PROSOLOVICH
(*Belarusian State University, Minsk*)

The strength properties of FP9120, SPR 700 and S1813 G2 SP15 diazoquinone novolac photoresist films on silicon irradiated by 5 MeV electrons with a fluence of $3 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-2}$ were studied by indentation. Misprints of the microindenter in films of diazoquinone novolac photoresist are barrel-shaped, which indicates the presence of tensile stresses that form during film drying. A destruction zone with radial and lateral cracks was observed around the indenter prints, forming a pattern in the form of "butterflies". It has been established that during long-term storage and irradiation of films of diazoquinone novolac photoresists, an increase in the values of the true microhardness of the films takes place, which is due to the cross-linking of novolac macromolecules in the bulk of the polymer.

Keywords: photoresist, indentation, microhardness, electron irradiation.

ПОТЕРИ В СЕТЕВЫХ И ЗВУКОВЫХ ТРАНСФОРМАТОРАХ

канд. техн. наук, доц. Д. А. ДОВГЯЛО, В. А. ТИХОНОВИЧ
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

канд. физ.-мат. наук, доц. К. Х. БАБАМУРАТОВ
(Термезский инженерно-технологический институт, Узбекистан)

Описаны причины возникновения потерь в трансформаторах. Выявлены основные виды потерь энергии в трансформаторе. Рассмотрены понятия добротности и коэффициента полезного действия. Дана оценка прохождения сигналов звуковой частоты, рассмотрены принципы и правила построения частотной характеристики. Даны рекомендации для проектирования трансформаторов звуковой и сетевой частоты. Рассмотрены конструктивные меры по снижению потерь. Приведенные данные могут использоваться для проектирования сетевых и звуковых трансформаторов.

Ключевые слова: трансформаторы, потери в трансформаторах, гистерезис, коэффициент полезного действия, трансформаторы сетевые, трансформаторы звуковой частоты.

В трансформаторе, работающем в том числе на повышенных частотах (звуковые и более высокие частоты), существуют потери, которые определяют его коэффициент полезного действия (КПД) и перегрев. В зависимости от режима работы трансформатора, его конструкции и схемы соединения обмоток величина отдельных составляющих потерь может изменяться в широких пределах, и пренебрежение какой-либо из них может привести к самым нежелательным последствиям. Чтобы правильно спроектировать трансформатор, необходимо оценить величину всех составляющих потерь и определить причины их возникновения [1].

Для оценки качества трансформаторов в большинстве случаев используется добротность и КПД. Под добротностью понимают отношение реактивной энергии, запасенной в трансформаторе, к активной. Общее выражение добротности системы [2]

$$Q = \frac{\omega L}{R} \left[1 - \omega^2 LC + \frac{\omega^2 L^2}{r(1 - \omega^2 LC)} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) \right]^{-1}, \quad (1)$$

где R , L , C – соответственно сопротивление, индуктивность и собственная емкость обмотки;
 ω – угловая частота, с^{-1} ;
 r – сопротивление потерь в магнитопроводе и в диэлектрике: $r = R_c R_d (R_c + R_d)$,

где R_c – сопротивление потерь в магнитопроводе: $R_c = \frac{U^2}{P_c}$,

где U – рабочее напряжение;
 P_c – мощность потерь в магнитопроводе;

R_d – сопротивление потерь в диэлектрике: $R_d = \frac{U^2}{P_d}$,

где P_d – мощность потерь в диэлектрике.

Из выражения (1) видно, что добротность может значительно зависеть от параметров материала изоляции обмоток и магнитных свойств магнитопровода.

Коэффициент полезного действия показывает, какая часть энергии, потребляемой из электрической сети, передается в нагрузку [3]:

$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + P_{эл} + P_{ст}} = \frac{U_2 I_2 \cos \varphi_2}{U_2 I_2 \cos \varphi_2 + P_{эл} + P_{ст}} = \frac{U_2 \frac{I_{2н}}{I_{2н}} I_2 \cos \varphi_2}{U_2 \frac{I_{2н}}{I_{2н}} I_2 \cos \varphi_2 + P_{эл} + P_{ст}} \approx$$

$$\approx \frac{\beta S_n \cos \varphi_2}{\beta S_n \cos \varphi_2 + \beta^2 P_k + P_{xx}},$$

где $S_n = U_2 I_n$ – номинальная полная мощность, ВА;

$$\beta = \frac{I_1}{I_{1n}} \approx \frac{I_2}{I_{2n}} \text{ – коэффициент нагрузки;}$$

P_k – номинальные потери в обмотках, измеренные ваттметром, Вт;

P_2 – электрическая мощность вторичной обмотки, Вт;

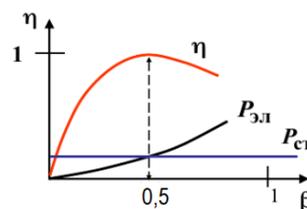
$P_{xx}, P_{ст}$ – потери в стали, Вт;

φ_2 – угол между вектором активной мощности и полной выходной мощности;

$P_{эл} = \beta^2 P_k$ – электрические потери, Вт.

КПД будет достигать максимума при равенстве переменных электрических потерь постоянным магнитным потерям. Так, при токе нагрузки 50–70% от номинальной величины КПД достигает максимального значения (рисунок 1) [4].

Рисунок 1. – Максимум КПД трансформатора



В трансформаторе можно выделить следующие виды потерь:

- в магнитопроводе на вихревые токи и на перемагничивание;
- в проводах первичной обмотки;
- в проводах вторичных обмоток;
- в диэлектрике (изоляции);
- из-за эффекта магнестрикционного резонанса;
- из-за эффекта объемного резонанса;
- из-за полей рассеяния.

Одним из факторов, ограничивающих выбор рабочей индукции при проектировании трансформаторов любого типа, является допустимая величина потерь в магнитопроводе, которая определяется температурой его перегрева. Полная величина потерь в магнитопроводе [5]

$$P_{ст} = p_{уд} V_c,$$

где $p_{уд}$ – удельные потери в стали, Вт/кг;

V_c – объем сердечника, м³.

Для трансформаторов, работающих в определенной полосе частот при неизменной величине входного тока, потери будут наибольшими на низшей частоте. Отсюда следует, что допустимая величина потерь в магнитопроводе должна соответствовать нижней частоте рабочего диапазона.

Потери на вихревые токи. Сталь имеет низкое омическое сопротивление, поэтому вихревые токи достигают значений сотен и тысяч ампер. Как следствие, часть энергии электромагнитного поля созданного первичной обмоткой трансформатора, преобразуется в тепловую энергию, вызывая разогрев магнитопровода. Для уменьшения вихревых токов необходимо увеличить значение омического сопротивления сердечника, что достигается набором сердечника из изолированных пластин [6].

Чем тоньше пластина (лента), тем выше ее сопротивление и меньше вихревые токи. В зависимости от рабочей частоты применяют различную толщину пластин. Между силовыми линиями токи компенсируются, в результате вихревой ток протекает только по периметру (рисунок 2).

Потери на вихревые токи пропорциональны квадрату частоты, квадрату толщины и весу сердечника [7]:

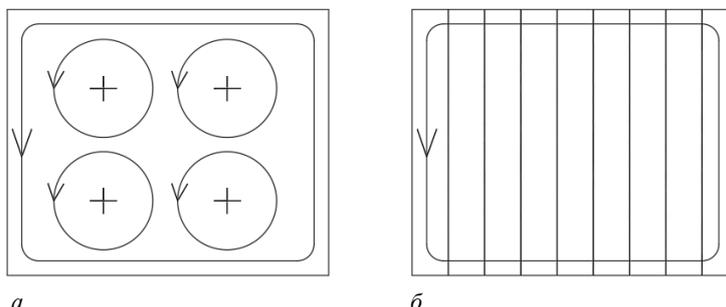
$$P_v = f_c^2 \Delta^2 G, \tag{2}$$

где f_c – частота, Гц;

Δ – толщина сердечника, м;

G – вес сердечника, кг.

Из выражения (2) следует, что на высоких частотах целесообразно использовать очень тонкие материалы.



а – в сечении цельного магнитопровода;
б – в сечении магнитопровода, собранного из пластин или навитого из ленты

Рисунок 2. – Вихревые токи в магнитопроводе

Потери на перемагничивание. При уменьшении электромагнитного поля до нуля домены частично сохраняют свою ориентацию, что, в свою очередь, обуславливает остаточную намагниченность. Энергия (H_c), затраченная на снятие остаточной намагниченности, и характеризует данный вид потерь [7]. При этом также выделяется тепло и сердечник разогревается. Потери на перемагничивание пропорциональны площади петли гистерезиса (рисунок 3), частоте напряжения сети (f_c) и весу (G) сердечника:

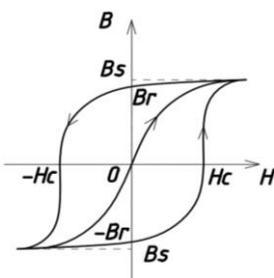


Рисунок 3. – Петля гистерезиса: B_s – индукция насыщения, H_c – коэрцитивная сила, B_r – остаточная индукция

При проектировании трансформаторов следует учитывать, что в разрезных магнитопроводах значения удельных потерь будут существенно большими, чем значения, полученные непосредственно для материала магнитопровода. Это объясняется тем, что при резке магнитопроводов на торцах их половин образуются переемычки, которые накоротко замыкают отдельные пластины. Таким образом, в готовом магнитопроводе имеются четыре сплошные площадки (по числу торцевых поверхностей половин) с площадью, равной сечению магнитопровода, и толщиной, в среднем соответствующей толщине ленты. В некоторых случаях эти переемычки удаляют путем шлифовки торцов или их травления, тем самым снижая потери [8].

Потери в диэлектрике. Под этим видом потерь понимаются потери в изоляции, которые суммируются из диэлектрических потерь сквозной проводимости и ионизационных потерь.

При протекании переменного тока по обмоткам в витковой изоляции возникает переменное электрическое поле. Электрическое поле в диэлектрических материалах вызывает токи смещения, которые будут тем больше, чем больше напряженность и частота электрического поля. Из-за явления поляризации и присутствия проводимости, пусть и незначительной, в диэлектрике выделяется тепловая энергия.

Ионизационные потери наиболее характерны для высоковольтных трансформаторов и пренебрежимо малы в классе рассматриваемых в рамках данной работы сетевых и звуковых трансформаторов.

Диэлектрические потери имеют весьма малую долю в числе общих потерь, при проектировании трансформаторов их величиной можно пренебречь.

Диэлектрические потери в объеме диэлектрического материала (в изоляции обмотки) определяются как [8]

$$P_d = 4\pi f \operatorname{tg} \delta W_d,$$

где f – частота, Гц;

$\operatorname{tg} \delta$ – тангенс угла диэлектрических потерь;

W_d – энергия поля в заданном объеме изоляции, Дж.

Потери в проводах обмоток определяются активным сопротивлением проводника (тепловое воздействие рабочего электрического тока), наличием уравнивающего тока (при параллельном соединении плеч обмотки, находящихся в разных слоях), потерями, возникающими из-за вихревых токов, которые наводятся полями рассеяния.

Активное сопротивление проводника обмотки определяется материалом, температурой и частотой проходящего тока. Сопротивление проводника в зависимости от температуры [9]

$$R_T = R_0(1 + \alpha T),$$

где R_T и R_0 – соответственно сопротивления провода при рабочей температуре T и при нормальных температурных условиях (25 ± 10 °С) окружающей среды;

α – температурный коэффициент сопротивления, показывающий насколько увеличивается сопротивление провода в долях при увеличении температуры на один градус.

При увеличении частоты происходит рост сопротивления обмоток за счет вытеснения тока во внешнюю зону сечения провода.

Потери из-за эффекта магнитострикционного резонанса значительно проявляются в трансформаторах, имеющих большие размеры, т. е. в трансформаторах большой мощности. Магнитострикционный резонанс происходит из-за увеличения тангенса угла диэлектрических потерь, а увеличение температуры данный эффект усугубляет.

Частота магнитострикционного резонанса определяется по формуле [2]

$$f_m = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{E_p}{\rho}} \sqrt{1 + n_p^2},$$

где R – средний радиус тороидального магнитопровода;

E_p – модуль Юнга;

ρ – плотность образца;

n_p – число волн, укладываемых по длине образца.

Объемный резонанс в магнитопроводе возникает из-за больших значений величин диэлектрической и магнитной проницаемости материалов. В данном случае сердечник играет роль «резонатора», заполненного средой с определенными параметрами диэлектрической и магнитной проницаемости. Электромагнитная волна, возникающая в магнитопроводе вследствие наличия проводимости, затухает. Однако, когда длина волны близка к удвоенному значению размеров поперечного сечения, могут возникать стоячие волны, что приводит к увеличению мощности, рассеиваемой в магнитопроводе [8].

С ростом частоты в магнитопроводе увеличиваются диэлектрические потери и потери на вихревые токи, изменяется индуктивная составляющая, в большей степени проявляются емкостные свойства. Сложность электрического расчета трансформаторов звукового и ультразвукового диапазона частот заключается в необходимости учитывать влияние распределенных паразитных параметров обмоток на ход фазовых и частотных характеристик [9].

При проектировании трансформаторов звуковой частоты от $f_n = 20$ Гц до $f_n = 20000$ Гц обеспечить линейность сигнала и требуемый коэффициент трансформации во всем диапазоне частот представляется трудной задачей. При анализе частотных свойств звукового трансформатора ведут построение частотной характеристики. Для снятия частотной характеристики производится измерение выходного напряжения (либо выделяемой мощности на нагрузке) в диапазоне частот $(0,7 \div 1,3) \cdot f_n$. В качестве источника используется стабилизированное питание с регулируемой частотой. Частотную характеристику следует снимать при наименьшем рабочем напряжении первичной обмотки, т. к. при этом индуктивность последней будет наименьшей.

При проектировании типового сетевого (50 Гц) трансформатора следует учитывать следующие обстоятельства:

1. Из экономических соображений (минимизации массы сердечника и обмоточного провода), выбирается такой режим работы тороидального трансформатора, при котором амплитуда магнитной индукции несколько меньше индукции насыщения [10]. Для типовых, применяемых в промышленности, марок трансформаторной стали индукция не должна превышать 1,5–1,85 Тл.

2. Снижение положения рабочей точки магнитной индукции приводит к уменьшению тока холостого хода и, соответственно, потерь на нагрев магнитопровода и перемагничивание. Однако следует учитывать, что снижение рабочей индукции приводит к увеличению материалоемкости трансформатора и, как следствие, к увеличению его стоимости [2].

3. Применение неотожженного сердечника (для тороидального исполнения) приводит к уменьшению линейности рабочего тока и увеличению тока холостого хода за счет ухудшения проницаемости стали из-за остаточной деформации вследствие навивки трансформаторной стали на оправку.

4. Использование разрезного сердечника с немагнитным зазором также влечет за собой повышение тока холостого хода. Это тоже приводит к увеличению стоимости изделия. Увеличение тока холостого хода происходит за счет создания большой напряженности поля в немагнитном зазоре.

5. Диэлектрические потери в изоляции магнитопровода, изоляции обмоточного провода, межслоевой и межобмоточной изоляции пренебрежимо малы и при расчетах, как правило, не учитываются.

6. Для минимизации вихревых токов в магнитопроводе рекомендуется применять электротехническую трансформаторную сталь толщиной 0,3–0,5 мм (изолированные друг от друга пластины или трансформаторную ленту с изолирующим слоем) [6].

7. Для уменьшения потерь на перемагничивание следует использовать электротехническую трансформаторную сталь с высокой магнитной проницаемостью, низкой коэрцитивной силой, узкой петлей гистерезиса, высоким удельным электрическим сопротивлением (для снижения потерь на нагрев сердечника вследствие эффекта вихревых токов).

8. Для минимизации потерь в обмоточных проводах применяются проводники с высокой проводимостью – медные и алюминиевые. Наибольшие потери, как правило, возникают за счет активного сопротивления обмоточного провода. Применение алюминиевых проводников позволяет существенно снизить стоимость и уменьшить вес трансформатора.

9. Для борьбы с эффектом магнострикционного резонанса следует применять пропитку трансформаторов компаундами либо лаками. Самым эффективным способом считается полная заливка трансформатора эпоксидным компаундом.

При проектировании звукового трансформатора следует учитывать:

1. Толщина трансформаторной стали зависит от рабочей частоты проектируемого звукового трансформатора. Соответственно, следует применять [9]:

- при рабочих частотах до 200–400 Гц – сталь толщиной 0,3 мм;
- при рабочих частотах до 1000 Гц – сталь толщиной 0,08–0,15 мм;
- при рабочих частотах до 5000 Гц – сталь толщиной 0,08 мм;
- при рабочих частотах до 20000 Гц – сталь толщиной 0,05 мм.

2. Звуковые трансформаторы согласуют низкоомную нагрузку (громкоговоритель) с источником сигнала (например, звуковым усилителем). Входное сопротивление трансформатора должно быть большим, чего можно достичь за счет увеличения индуктивности входной обмотки.

3. Ток холостого хода должен быть минимальным.

4. Первичные и вторичные обмотки должны быть секционированы.

5. Величина магнитной индукции выбирается по нижней границе частотного диапазона с учетом заданных величин нелинейных искажений и перегрева. Магнитная индукция с ростом частоты уменьшается прямо пропорционально.

6. Введение в сердечник немагнитного зазора существенно уменьшает нелинейные искажения, однако увеличивает потери в сердечнике.

7. Для обеспечения прохождения звукового сигнала с заданным коэффициентом трансформации во всем диапазоне частот необходимо учитывать влияние распределенных паразитных параметров обмоток.

8. Трансформаторы с тороидальными сердечниками имеют преимущество за счет возможности одновременного снижения индуктивности рассеяния и собственной емкости (при секционировании) с увеличением числа секций [9].

9. Трансформаторы с тороидальными сердечниками практически не имеют полей рассеяния при большом количестве чередующихся секций. Обмотки должны быть распределены по всему магнитопроводу равномерно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маклиман В. Проектирование трансформаторов и дросселей. Справочник. – 3-е изд., пересм. и доп.; пер. с англ. Попова В. В. – М.: ДМК Пресс, 2016. – 476 с.
2. Котенёв Е. С., Евсеев А. Н. Расчет и оптимизация тороидальных трансформаторов. – М.: Горячая линия. Телеком, 2011. – 287 с.
3. Белопольский И. И. Расчет трансформаторов и дросселей малой мощности. – М.: ЁЁ Медиа – 2018. – 161 с.
4. Быстрицкий Г. Ф., Кудрин Б. И. Выбор и эксплуатация силовых трансформаторов. – М.: СИНТЕГ, 2015. – 176 с.
5. Ермолин, Н. П. Как рассчитать маломощный силовой трансформатор. – М.: Энергетическое издательство. – 2016. – 620 с.
6. Грунтович Н. В. Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования: учеб. пособие. – Минск: Новое знание; М.: ИНФРА-М. – 2013. – 269 с.

7. Присмотрова Л. К., Пировских Е. Н., Пировских А. В. Проектирование силовых и специальных трансформаторов. – Киров: ВятГУ, 2006. – 246 с.
8. Игнатович В. М., Ройз Ш. С. Электрические машины и трансформаторы: учеб. пособие. – Томск: ТПУ, 2013. – 182 с.
9. Бальян Р. Х. Трансформаторы для радиоэлектроники. – М.: Советское радио. – 1971. – 720 с.
10. Довгяло Д. А., Янушкевич В. Ф., Тихонович В. А. Пусковые токи в тороидальных трансформаторах // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2022. – № 4. – С. 62–68. – DOI: [10.52928/2070-1624-2022-38-4-62-68](https://doi.org/10.52928/2070-1624-2022-38-4-62-68).

REFERENCES

1. Makliman, V. (2016). *Proektirovanie transformatorov i drosslei. Spravochnik [Transformer and Inductor Design: Handbook]*. Moscow: DMK Press.
2. Kotenev, E. S. & Evseev, A. N. (2011). *Raschet i optimizatsiya toroidal'nykh transformatorov [Calculation and optimization of toroidal transformers]*. Moscow: Goryachaya liniya. Telekom.
3. Belopol'skii, I. I. (2018). *Raschet transformatorov i drosslei maloi moshchnosti [Calculation of transformers and low power chokes]*. Moscow: EE Media.
4. Bystritskii, G. F. & Kudrin, B. I. (2015). *Vybor i ekspluatatsiya silovykh transformatorov [Selection and operation of power transformers]*. Moscow: SINTEG.
5. Ermolin, N. P. (2016). *Kak rasschitat' malomoshchnyi silovoi transformator [How to Calculate a Low Power Power Transformer]*. Moscow: Energeticheskoe izdatel'stvo.
6. Gruntovich, N. V. (2013). *Montazh, naladka i ekspluatatsiya elektrooborudovaniya [Installation, adjustment and operation of electrical equipment]*. Minsk: Novoe znanie; Moscow: INFRA-M.
7. Prismoetrova, L. K., Pirovskikh, E. N. & Pirovskikh, A. V. (2006). *Proektirovanie silovykh i spetsial'nykh transformatorov [Design of power and special transformers]*. Kirov: VyatGU.
8. Ignatovich, V. M. & Roiz, Sh. S. (2013). *Elektricheskie mashiny i transformatory [Electrical machines and transformers]*. Tomsk: TPU.
9. Bal'yan, R. Kh. (1971). *Transformatory dlya radioelektroniki [Transformers for radio electronics]*. Moscow: Sovetskoe radio. (In Russ.).
10. Dovgyalo, D. A., Yanushkevich, V. F., & Tikhonovich, V. A. (2022). Puskovye toki v toroidal'nykh transformatorakh [Starting currents in toroidal transformers]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (4), 62–68. DOI: [10.52928/2070-1624-2022-38-4-62-68](https://doi.org/10.52928/2070-1624-2022-38-4-62-68).

Поступила 06.04.2023

LOSSES IN NETWORK AND SOUND TRANSFORMERS

D. DAUHALA, V. TIKHANOVICH

(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk);

K. BABAMURATOV

(Termez Institute of Engineering and Technology, Uzbekistan)

The causes of losses in transformers are described. The main types of energy losses in the transformer are revealed. The concepts of Q-factor and efficiency are considered. The estimation of the passage of audio frequency signals is given, the principles and rules for constructing frequency characteristics are considered. Recommendations for the design of sound and mains frequency transformers are given. Constructive measures to reduce losses are considered. The given data can be used for the design of network and sound transformers.

Keywords: transformers, losses in transformers, hysteresis, coefficient of positive action, network transformers, audio frequency transformers.

УДК 539.172.12

DOI 10.52928/2070-1624-2023-40-1-44-48

**АНАЛИЗ ПРИМЕНЕНИЯ ГАММА-БЕТА-СПЕКТРОМЕТРА МКС-АТ1315
ДЛЯ КОНТРОЛЯ НЕЖЕЛАТЕЛЬНЫХ РАДИОНУКЛИДОВ,
ОБРАЗУЮЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ ПРОИЗВОДСТВА РАДИОФАРМПРЕПАРАТОВ**

А. Н. КИЙКО

(Белорусский государственный институт метрологии, Минск);

канд. физ.-мат. наук, доц. С. А. ВАБИЩЕВИЧ, Н. В. ВАБИЩЕВИЧ
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой);

канд. физ.-мат. наук Д. И. БРИНКЕВИЧ
(Белорусский государственный университет, Минск)

Проведены одновременные измерения спектрометром МКС-АТ1315 γ - и β -излучающих радионуклидов в регенерированной воде и картриджах сорбционной очистки, использовавшихся в процессе производства радиофармпрепаратов на основе ^{18}F . Установлено, что наблюдавшиеся в γ -спектрах пики обусловлены изотопами кобальта ^{55}Co , ^{56}Co , ^{58}Co , ^{57}Co , никеля ^{57}Ni , марганца ^{54}Mn и цинка ^{65}Zn . Показана перспективность использования гамма-бета-спектрометра МКС-АТ1315 для оперативного контроля содержания нежелательных технологических радионуклидов при производстве радиофармпрепаратов на основе ^{18}F .

Ключевые слова: радиофармпрепарат, радионуклиды, гамма-бета-спектрометр МКС-АТ1315, регенерат воды $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$, картриджи сорбционной очистки.

Позитронно-эмиссионная томография (ПЭТ) является динамично развивающимся методом ранней диагностики онкологических, неврологических и кардиологических заболеваний, в котором используется внутривенное введение радиофармацевтических препаратов (РФП) на основе позитрон-излучающих короткоживущих радионуклидов [1]. На ПЭТ-исследования приходится основная доля из ~40 миллионов диагностических процедур ядерной медицины, ежегодно выполняемых в мире. Доминирующее положение в ПЭТ-диагностике занимают радиофармпрепараты на основе ^{18}F , который образуется по реакции $^{18}\text{O}(\text{p}, \text{n})^{18}\text{F}$ при бомбардировке водной мишени, обогащенной ^{18}O , протонами с энергией 18 МэВ. ^{18}F является β^+ -излучателем с периодом полураспада 108 мин.

В работе [2] в облученной протонами воде H_2^{18}O были идентифицированы более 20 нежелательных γ -излучающих радионуклидов (РН). Большинство из них являются также β -излучателями [3], причем энергия их излучения варьируется в широких пределах (вплоть до ~900 кэВ). Указанные обстоятельства обуславливают необходимость контроля содержания как γ - так и β -излучающих РН в промежуточных продуктах, отходах производства и конечном РФП. Кроме того, требуется мониторинг рабочих помещений ПЭТ-центра с целью оценки доз, получаемых персоналом [4]. Для этих целей может быть полезен гамма-бета-спектрометр МКС-АТ1315, который представляет собой комбинированное двухдетекторное спектрометрическое и радиометрическое средство измерения смешанного гамма-бета-излучения. Он обеспечивает регистрацию гамма-излучения в диапазоне энергий от 50 до 3000 кэВ и бета-излучения в диапазоне граничных энергий от 150 до 3500 кэВ. Средний фон для β -частиц – 270 имп/мин, чувствительность для ^{90}Sr в геометрии 0,03 л – $3,5 \cdot 10^{-3}$ имп-л/(с·Бк).

В настоящей работе с помощью гамма-бета-спектрометра МКС-АТ1315 были проведены измерения содержания долгоживущих радионуклидов в регенерированной воде и картриджах сорбционной очистки, использовавшихся в процессе производства РФП $[^{18}\text{F}]\text{фтордезоксиглюкозы}$. Для сравнения определение активности γ -излучающих радионуклидов выполняли также с использованием спектрометра на особо чистом германии: детекторная система GEM40-83/DSPEC jr 2.0; энергетический диапазон 14,5 – 2911,4 кэВ; разрешение 0,182 кэВ/канал.

Материалы и методы измерений. В настоящей работе наработку радионуклида ^{18}F осуществляли на ускорителе Cyclone 18/9 НС (ИВА, Бельгия) при облучении высокоэнергетическими 18 МэВ протонами воды, обогащенной по кислороду ^{18}O до 97% («Центр молекулярных исследований», Россия). Использовали ниобиевую мишень Nirta Fluor (ИВА, Бельгия) объемом 3,2 мл. Время облучения мишени за один производственный цикл составляло 60–140 мин, ионный ток на мишени – 75–80 μA .

Синтез $[^{18}\text{F}]\text{фтордезоксиглюкозы}$ осуществлялся на кассетных модулях синтеза Synthera (ИВА, Бельгия). Более подробно методика синтеза описана в работе [5]. При производстве использовались картриджи QMA, Alumina B, C₁₈ и SCX. Анионно-обменный картридж QMA (четвертичное аммониевое основание на полимерной матрице) используется при синтезе всех фторсодержащих РФП методом нуклеофильного

замещения. Он предназначен для извлечения $[^{18}\text{F}]$ фторид-иона из облученной воды. Помимо целевого нуклида и другие отрицательно заряженные вещества также удерживаются QMA картриджем. При этом незаряженные соединения и катионы проходят вместе с облученной водой через QMA в сборник/накопитель для отработанной облученной воды $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ (далее – регенерат). Картриджи Alumina B, C₁₈ и SCX используются после синтеза для очистки конечного продукта – $[^{18}\text{F}]$ фтордезоксиглюкозы – от химических, радиохимических и радионуклидных примесей.

В качестве образцов для измерений использовались картриджи сорбционной очистки QMA, Alumina B и SCX, а также 6 проб объемом 1 мл облученной в разные дни дозами в диапазоне 4800–9900 мкА·мин воды H_2^{18}O , прошедшей через картридж QMA (регенерированной воды). Из-за высокой активности радионуклида ^{18}F измерения проводили не менее, чем через двое суток после последнего облучения.

Эксперимент. Характерные γ -спектры регенерированной воды $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ и твердотельных картриджей сорбционной очистки QMA представлены на рисунках 1 и 2. Верхние спектры измерены с использованием спектрометра на особо чистом германии, а нижние – на МКС-АТ1315. Отметим достаточно хорошую корреляцию этих спектров. В спектрах, измеренных на гамма-бета-спектрометре МКС-АТ1315, практически всегда наблюдались пики с максимумами вблизи 140, 510, 840 и 1100 кэВ. Они отмечены на рисунках 1, 2 цифрами от 1 до 4. Соотношение их интенсивностей изменялось в зависимости от образца, что видно из сравнения рисунков 1 и 2. В некоторых образцах также наблюдались слабоинтенсивные широкие пики с максимумами в области 1400, 1700 и 2600 кэВ.

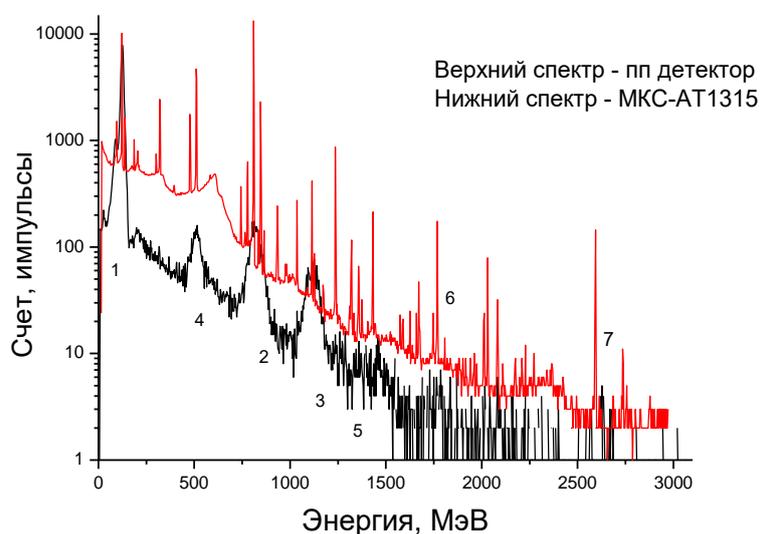


Рисунок 1. – γ -спектры регенерированной воды $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ (образец – регенерат 2 из таблицы 1), измеренные через 3 недели после синтеза

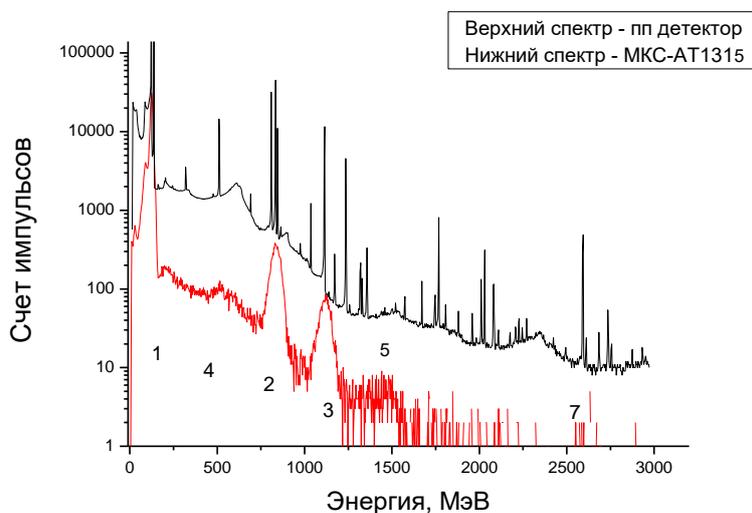


Рисунок 2. – γ -спектры твердотельных картриджей сорбционной очистки QMA (образец QMA6 из таблицы 1), измеренные через 1 неделю после синтеза

Сопоставление полученных экспериментальных результатов с данными работ различных авторов [2; 3; 6–10] позволило идентифицировать радионуклиды, ответственные за указанные выше пики. Пик 1 с максимумом при 140 кэВ обусловлен изотопом кобальта ^{57}Co , имеющим наиболее интенсивную линию γ -излучения при 136,5 кэВ [2]. Линий других ранее обнаруженных в работах [2; 3; 6–10] технологических РН в этом диапазоне энергий не отмечено. Пик 2 с максимумом при 840 кэВ, вероятнее всего, связан с изотопом марганца ^{54}Mn , имеющим наиболее интенсивную линию 834,85 кэВ [2]. В этом же диапазоне находятся линии изотопов кобальта ^{56}Co (846,8 кэВ) и ^{57}Co (810,8 кэВ), однако период полураспада этих РН в 3 раза меньше, чем у ^{54}Mn , поэтому к моменту измерения их активность должна существенно снизиться по сравнению с активностью ^{54}Mn . Можно с большой долей уверенности утверждать, что пик 3 с максимумом вблизи 1100 кэВ обусловлен изотопом цинка ^{65}Zn , поскольку кроме обычно слабоинтенсивной линии ^{182}Ta (с энергией 1189 кэВ) линий других технологических РН в этом диапазоне не наблюдается. Пик 4 с максимумом 510 кэВ обусловлен аннигиляцией позитрона. Она присуща всем β^+ -излучающим изотопам и для идентификации технологических радионуклидов в данном случае не пригодна, поскольку среди ранее установленных технологических РН наблюдается целый ряд β^+ -излучателей (^{55}Co , ^{56}Co , ^{58}Co , ^{57}Ni) [2]. Отметим, что по этому пику обычно определяется интенсивность целевого радионуклида ПЭТ диагностики ^{18}F . Слабоинтенсивные пики при 1400, 1700 и 2600 кэВ, вероятнее всего, связаны с изотопами кобальта ^{55}Co , ^{56}Co , ^{58}Co и никеля ^{57}Ni . Различить их весьма трудно и для проведения экспресс-контроля они мало пригодны.

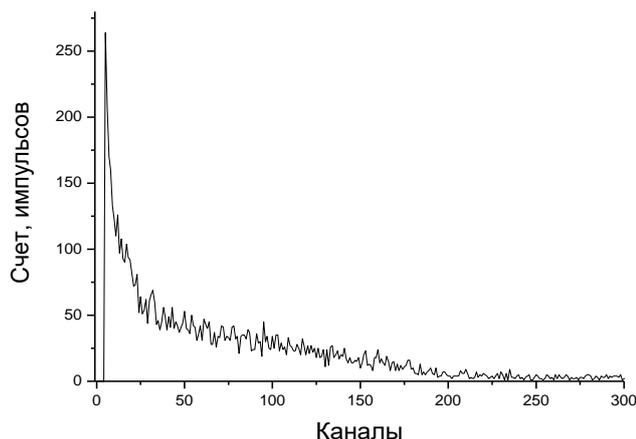
Рассчитанные значения активности измерений представлены в таблице. Кроме приведенных в таблице согласно измерениям с использованием спектрометра на особо чистом германии наблюдались также фоновые РН ^{22}Na , ^{40}K , ^{60}Co , ^{109}Cd , в концентрациях до 100 Бк. В картриджах сорбционной очистки QMA и Alumina были обнаружены в следовых количествах также технологические радиоизотопы рения, ниобия, тантала и вольфрама, которые образуются при облучении входного окна водной мишени и осаждаются на ионно-обменном картридже QMA [2; 6]. Доминирующими РН в регенерированной воде являются радиоизотопы марганца, цинка и кобальта ^{57}Co (см. таблицу). Все они обладают достаточно большим периодом полураспада (от 244 до 312 сут), что и обеспечило их присутствие в долго хранившихся образцах. Эти радионуклиды будут определять время хранения исследовавшихся материалов до их выведения из состава радиоактивных отходов. Отметим, что активности радионуклидов варьируются в широких пределах, что, вероятнее всего, связано с различной радиационной предысторией облучаемых мишеней [2; 5].

Таблица. – Активности радионуклидов (в Бк) в регенерированной воде и картриджах сорбционной очистки через месяц после облучения

Образец	^{54}Mn	^{57}Co	^{65}Zn
Регенерат 1	30	5050	297
Регенерат 2	47	783	238
Регенерат 3	43	410	35
Регенерат 4	48	180	–
Регенерат 5	31	73	31
Регенерат 6	60	380	26
QMA6	29	140	47
QMA	5	56	=
SCX	3	16	–
Alumina	30	358	12

В β -спектрах, измеренных с помощью гамма-бета-спектрометра МКС-АТ1315, каких-либо пиков не обнаружено (рисунок 3). Это обусловлено тем обстоятельством, что у спектрометра МКС-АТ1315 нижний предел детектируемых частиц составляет 130 кэВ, а основным β -излучающим загрязнителем при производстве радиофармпрепаратов на основе ^{18}F является тритий с $E_{\beta\text{max}} = 18,58$ кэВ [3]. В более высокоэнергетичной области интенсивность излучения невелика и проявляется только при облучении мишеней с большой накопленной дозой, которые подвержены коррозии [3]. Поскольку исследовались радиоактивные отходы после облучения «чистых» мишеней, ожидать в исследовавшемся диапазоне существенной β -активности не приходится и полученные экспериментальные результаты закономерны.

Рисунок 3. – Характерный β -спектр регенерированной воды $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ (образец – регенерат 2 из таблицы 1), измеренный через 3 недели после синтеза



Полученные в работе численные значения активностей технологических радионуклидов коррелируют с результатами работ различных авторов [2; 3; 5–10]. Результаты измерений активностей РН на гамма-бета-спектрометре МКС-АТ1315 и при использовании спектрометра на особо чистом германии практически совпадали. Различия для всех образцов не превышали 20%, что позволяет сделать вывод о целесообразности использования гамма-бета-спектрометра МКС-АТ1315 для оперативного контроля содержания технологических радионуклидов при производстве РФП на основе ^{18}F .

ЛИТЕРАТУРА

1. Бринкевич С. Д., Суконко О. Г., Чиж Г. В. и др. Позитронно-эмиссионная томография. Ч.1: Характеристика метода. Получение радиофармпрепаратов // Медико-биологические проблемы жизнедеятельности. – 2013. – № 2(10). – С. 129–137.
2. Brinkevich S. D., Brinkevich D. I., Kiyko A. N. Activation Radionuclides in the Process of Irradiation of a Niobium Target at the Cyclone 18/9 HC Cyclotron // Physics of Atomic Nuclei. – 2020. – Vol. 83, No. 12. – P. 1732–1737. – DOI: [10.1134/S1063778820090045](https://doi.org/10.1134/S1063778820090045).
3. Бринкевич Д. И., Бринкевич С. Д., Вабищевич С. А. и др. Долгоживущие β -излучающие радионуклиды при производстве радиофармпрепаратов на основе ^{18}F // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2019. – № 4. – С. 67–76.
4. Бринкевич Д. И., Малиборский А. Я., Бринкевич С. Д. Активация воды контура охлаждения циклотрона Cyclone 18/9 HC при наработке ^{18}F // Ядерная физика и инжиниринг – 2018. – Т. 9, № 4 – С. 404–410. DOI: [10.1134/S2079562918040024](https://doi.org/10.1134/S2079562918040024).
5. Иванюкович А. А., Сорока С. А., Крот В. О. и др. Очистка $[^{18}\text{F}]$ фторида от долгоживущих радионуклидов при производстве $[^{18}\text{F}]$ фтордезоксиглюкозы // Медицинская физика. – 2018. – № 4(80). – С. 59–65.
6. Krot V. O., Brinkevich S. D., Brinkevich D. I. et al. Separation of Long-Lived Radionuclides on QMA Light Anion-Exchange Cartridge in Manufacture of Radiopharmaceutical Preparations Based on ^{18}F // Radiochemistry. – 2021. – Vol. 63, iss. 2. – P. 235–242. – DOI: [10.1134/S1066362221020144](https://doi.org/10.1134/S1066362221020144).
7. Bowden L., Vintro L. L., Mitchell P. I. et al. Radionuclide impurities in proton-irradiated $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ for the production of ^{18}F : Activities and distribution in the $[^{18}\text{F}]$ FDG synthesis process // Applied Radiation and Isotopes. – 2009. – Vol. 67, iss. 2. – P. 248–255. – DOI: [10.1016/j.apradiso.2008.10.015](https://doi.org/10.1016/j.apradiso.2008.10.015).
8. Gillies J. M., Najim N., Zweit J. Analysis of metal radioisotope impurities generated in $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ during the cyclotron production of fluorine-18 // Applied Radiation and Isotopes. – 2006. – Vol. 64, iss. 4. – P. 431–434. – DOI: [10.1016/j.apradiso.2005.08.008](https://doi.org/10.1016/j.apradiso.2005.08.008).
9. Shigeki Ito, Hitoshi Sakane, Shizuhiko Deji et al. Radioactive byproducts in $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ used to produce ^{18}F for $[^{18}\text{F}]$ FDG synthesis // Applied Radiation and Isotopes. – 2006. – Vol. 64, iss. 3. – P. 298–305. – DOI: [10.1016/j.apradiso.2005.10.001](https://doi.org/10.1016/j.apradiso.2005.10.001).
10. Guarino, P., Rizzo, S., Tomarchio, E. et al. Gamma-ray spectrometric characterization of waste activated target components in a PET cyclotron // Cyclotrons and Their Applications–2007: Eighteenth International Conference (01–05.10.2007). Giardini Naxos, Italy. – P. 295–297.

REFERENCES

1. Brinkevich, S. D., Sukonko, O. G., Chizh, G. V., & Naumovich, A. S. (2013). Pozitronno-emissionnaya tomografiya. Chast' 1: Kharakteristika metoda. Poluchenie radiofarmpreparatov [Positron emission tomography. Part 1: Method description. Production of radiopharmaceuticals]. *Mediko-biologicheskie problemy zhiznedeyatel'nosti [Medical and Biological Problems of Life Activity]*, 2(10), 129–137. (In Russ., abstr. in Engl.).
2. Brinkevich, S. D., Brinkevich, D. I., & Kiyko, A. N. (2020). Activation Radionuclides in the Process of Irradiation of a Niobium Target at the Cyclone 18/9 HC Cyclotron. *Physics of Atomic Nuclei*, 83(12), 1732–1737. DOI: [10.1134/S1063778820090045](https://doi.org/10.1134/S1063778820090045).
3. Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., Vabishchevich, S. A., Krot, V. O., & Maliborskii, A. Ya. (2019). Dolgozhivushchie β -izluchayushchie radionuklidy pri proizvodstve radiofarmpreparatov na osnove ^{18}F [Long-living β -radiating radionuclides in the manufacture of radiopharmaceutical drugs based on ^{18}F]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (4), 67–76.

4. Brinkevich, D. I., Maliborski, A. Ya., & Brinkevich, S. D. (2019). Activation of the cooling circuit water of the Cyclone 18/9-HC cyclotron during the production of ^{18}F . *Physics of atomic nuclei*, 82(12), 1714–1720. DOI: [10.1134/S1063778819120044](https://doi.org/10.1134/S1063778819120044).
5. Ivanyukovich, A. A., Soroka, S. A., Krot, V. O., Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., Chizh, G. V., & Sverdlov, R. L. (2018). Ochistka ^{18}F ftorida ot dolgozhivushchih radionuklidov pri proizvodstve ^{18}F ftordezoksiyglukozy [Purification of ^{18}F fluoride from long-lived radionuclides in production of ^{18}F fluorodeoxyglucose]. *Medicinskaya fizika [Medical Physics]*, 4(80), 59–65. (In Russ., abstr. in Engl.).
6. Krot, V. O., Brinkevich, S. D., Brinkevich, D. I., & Ivanyukovich, A. A. (2021). Separation of Long-Lived Radionuclides on QMA Light Anion-Exchange Cartridge in Manufacture of Radiopharmaceutical Preparations Based on ^{18}F [*Radiochemistry*], 63(2), 235–242. DOI: [10.1134/S1066362221020144](https://doi.org/10.1134/S1066362221020144).
7. Bowden, L., Vintro, L. L., Mitchell, P. I., O'Donnell, R. G., Seymour, A. M., & Duffy, G. J. (2009). Radionuclide impurities in proton-irradiated ^{18}O H $_2$ O for the production of ^{18}F :- Activities and distribution in the ^{18}F FDG synthesis process. *Applied Radiation and Isotopes*, 67(2), (248–255). DOI: [10.1016/j.apradiso.2008.10.015](https://doi.org/10.1016/j.apradiso.2008.10.015).
8. Gillies, J. M., Najim, N., & Zweit, J. (2006). Analysis of metal radioisotope impurities generated in ^{18}O H $_2$ O during the cyclotron production of fluorine-18. *Applied Radiation and Isotopes*, 64(4), 431–434. DOI: [10.1016/j.apradiso.2005.08.008](https://doi.org/10.1016/j.apradiso.2005.08.008).
9. Shigeki Ito, Hitoshi Sakane, Shizuhiko Deji, Takuya Saze, & Kunihide Nishizawa. (2006). Radioactive byproducts in ^{18}O H $_2$ O used to produce ^{18}F for ^{18}F FDG synthesis. *Applied Radiation and Isotopes*, 64(3), 298–305. DOI: [10.1016/j.apradiso.2005.10.001](https://doi.org/10.1016/j.apradiso.2005.10.001).
10. Guarino, P., Rizzo, S., Tomarchio, E., & Greco, D. (2007). Gamma-ray spectrometric characterization of waste activated target components in a PET cyclotron. *Cyclotrons and Their Applications–2007* (295–297). Giardini Naxos, Italy.

Поступила 20.03.2023

**APPLICATION ANALYSIS OF THE GAMMA-BETA SPECTROMETER MKS-AT1315
TO CONTROL UNWANTED RADIONUCLIDES,
FORMED DURING THE PRODUCTION OF RADIOPHARMACEUTICALS**

A. KIYKO

(Belarusian State Institute of Metrology, Minsk)

S. VABISHCHEVICH, N. VABISHCHEVICH

(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk);

D. BRINKEVICH

(Belarusian State University, Minsk)

Simultaneous measurements of γ - and β -emitting radionuclides in regenerated water and sorption purification cartridges used in the production of radiopharmaceuticals based on ^{18}F were carried out with the MKS-AT1315 spectrometer. It was found that the bands observed in the gamma-spectra are due to isotopes of cobalt ^{55}Co , ^{56}Co , ^{58}Co , ^{57}Co , nickel ^{57}Ni , manganese ^{54}Mn and zinc ^{65}Zn , the prospects of using the gamma-beta spectrometer MKS-AT1315 for operational control of the content of undesirable technological radionuclides in the production of radiopharmaceuticals based on ^{18}F are shown.

Keywords: *radiopharmaceutical, radionuclides, gamma-beta spectrometer MKS-AT1315, water regenerate ^{18}O H $_2$ O, sorption cleaning cartridges.*

УДК 536.76:66.045

DOI 10.52928/2070-1624-2023-40-1-49-55

ЭФФЕКТИВНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕПЛОВОЙ ЭНЕРГИИ ПАРА

*канд. техн. наук, доц. В. Е. ПИТОЛИН, Н. В. КОЛОШКИН
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой);*

*канд. физ.-мат. наук К. Х. БАБАМУРАТОВ
(Термезский инженерно-технологический институт, Узбекистан)*

Изложены результаты теоретических исследований использования отборного пара различных параметров в установках потребителей. Определены величины тепловых потерь и потерь давления при транспортировке пара потребителю. Тепловые потери при транспортировке незначительны и составляют не более 0,05%. Представлена ТН-диаграмма термодинамического процесса работы отборного пара при адиабатном расширении и конденсации. Показано, что основная доля тепловой энергии пара определяется процессом его конденсации (до 90% от начального теплосодержания). Для преобразования тепловой энергии отборного пара в механическую при его адиабатном расширении в приводных турбинах потребителя необходимо выбирать пар наибольшего давления. Это позволит получить экономию до 50% теплоты по сравнению с паром низкого давления. Выполнен эксергетический анализ системы использования отборного пара до его конденсации. Степень термодинамического совершенства использования пара на этом участке составляет 45%.

Параметры пара для теплообменных установок с конденсацией определяются температурным напором на конечном участке тракта теплообмена. Основное требование для таких установок – наличие конденсатоотводчика в тракте удаления конденсата и надежная система диагностики его технического состояния.

Ключевые слова: *водяной пар, паропроводы, теплота, эксергия, законы термодинамики, установки теплообмена.*

Введение. Республиканские унитарные предприятия электроэнергетики Беларуси предлагают потребителям тепловой энергии достаточно широкий выбор теплоносителей. Это прежде всего сетевая вода, а также отборный и острый редуцированный пар¹. При этом стоимость тепловой энергии в воде и отборном паре одинакова вне зависимости от параметров теплоносителя, поэтому у потребителя возникает достаточно много вопросов о том, какой теплоноситель будет наиболее эффективен при его использовании в промышленных установках.

Цель работы: выполнить краткий термодинамический анализ системы использования отборного водяного пара различных параметров, предлагаемого теплоисточником потребителю; определить потери тепловой энергии при транспортировке пара от теплоисточника потребителю; оценить эффективность использования пара при адиабатном расширении и конденсации; разработать критерии выбора параметров пара для различных применений с целью максимальной экономии энергии и средств потребителя.

Прежде всего необходимо строго определить само понятие тарифицируемой тепловой энергии с точки зрения второго закона термодинамики: предлагаемая потребителю тепловая энергия для всех видов теплоносителей является теплотой, способной обеспечить работу системы в результате ее обратимого (при отсутствии потерь) перехода в состояние равновесия с окружающей средой, то есть является эксергией. Неиспользуемая часть тепловой энергии до температуры окружающей среды учету не подлежит, так как все сертифицируемые счетчики тепловой энергии содержат предельную температуру учета – так называемую «температуру холодного источника» (среднегодовую температуру окружающей среды), ниже которой тепловая энергия коммерческими системами не учитывается.

Теплота в сетевой воде поставляется потребителю в соответствии с температурным графиком, составленным в виде зависимости ее температуры от температуры наружного воздуха, и используется только в системах отопления.

Отборный пар – это пар из производственных отборов теплофикационных турбин теплоэлектроцентрали (ТЭЦ), имеющий некоторую степень перегрева. Параметры отборного пара можно выбирать в широком диапазоне давлений: от 0,25 до 2,7 МПа. Этот вид теплоносителя предназначен для использования в теплообменных, сушильных, ректификационных установках, а также в приводных паровых турбинах технологических установок потребителей.

¹ URL: <https://minenergo.gov.by/activities/tseny-tarify-na-energoresursy/> (дата обращения 07.04.2023).

Определение потерь тепла в окружающую среду и давления при транспортировке пара. При выборе параметров отборного пара потребитель, как правило, ставит на первое место вопрос о количестве потерь тепловой энергии при транспортировке. Считается, что тепловые потери при транспортировке могут быть значительно выше потерь в окружающую среду непосредственно на установке. А пар более высоких давлений и, соответственно, более высоких температур при транспортировке характеризуется более высокими потерями. Здесь уместно вспомнить, что паропроводы согласно действующим правилам отпуска тепловой энергии² находятся на балансе потребителя. Следовательно, и тепловые потери в них будут отнесены на его счет.

Расчет потерь теплоты при транспортировке пара выполним по рекомендациям³.

Для сравнения возможных потерь теплоты через теплоизоляцию паропроводов выберем пар трех параметров (0,7, 1,4 и 2,1 МПа), который будет транспортироваться на расстояние 2000 м по стальным теплоизолированным трубопроводам.

Передача заданного количества тепловой энергии Q , Дж/с, в виде пара различных параметров потребует прокладки паропроводов соответствующего внутреннего диаметра d_1 , м, который можно определить по формуле⁴

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot Q \cdot v}{\pi \cdot V \cdot h}},$$

где v – удельный объем пара соответствующих параметров, м³/кг;

V – скорость движения пара в паропроводе, м/с;

h – энтальпия пара, Дж/кг.

Транспортировка пара потребителю сопровождается потерями тепловой энергии через теплоизоляцию паропровода. Расчет возможных тепловых потерь q , Дж/с, можно оценить следующим образом:

$$q = \pi \cdot l \cdot (t_1 - t_2) \cdot K,$$

где $l = 2000$ м – длина паропровода от границы источника пара до установки потребителя;

t_1 – температура транспортируемого пара, °С;

$t_2 = 10$ °С – температура окружающей среды;

K – линейный коэффициент теплопередачи трубопровода, Вт/(м·°С), который в свою очередь определяется по формуле

$$K = \alpha_1 \cdot d_1 + 2 \cdot \lambda_1 \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} + 2 \cdot \lambda_2 \cdot \ln \frac{d_3}{d_2} + \alpha_2 \cdot d_3,$$

где $\alpha_1 = 5000 - 30\,000$ Вт/(м²·°С) – коэффициент теплоотдачи перегретого пара для рассматриваемого диапазона давлений, скоростей пара и коэффициента трения пара о стенки паропровода;

$\alpha_2 = 10$ Вт/(м²·°С) – коэффициент теплоотдачи окружающего воздуха при нормальных условиях;

$\lambda_1 = 50$ Вт/(м·°С) – коэффициент теплопроводности материала паропровода;

$\lambda_2 = 0,05$ Вт/(м·°С) – коэффициент теплопроводности теплоизоляционного материала;

d_1 и d_2 – внутренний и наружный диаметры паропровода;

d_3 – наружный диаметр теплоизоляции паропровода.

Результаты сравнения тепловых потерь при передаче заданного количества тепловой энергии $Q = 250$ МДж/с (или 60 МКал/с) в виде перегретого отборного пара различных параметров представлены в таблице 1.

² Правила теплоснабжения [Электронный ресурс]: постановление Совета Министров Респ. Беларусь, 11 сент. 2019 г., № 609 // Национальный правовой Интернет-портал Республики Беларусь. URL: <https://pravo.by/document/?guid=12551-&p0=C21900609&p1=1>.

³ СНиП 2.04.14-88. Тепловая изоляция оборудования и трубопроводов. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1989. – 32 с.

⁴ ГОСТ 32569-2013. Трубопроводы технологические стальные. Межгосударственный стандарт. – М.: Стандартинформ, 2013. – 64 с.

Таблица 1. – Результаты расчета потерь тепла при транспортировке пара

Давление пара, МПа	Температура пара, °С	Удельный объем, м ³ /кг	Энтальпия пара, кДж/кг	Внутренний диаметр трубы, м	Скорость пара, м/с	Коэффициент теплопередачи, Вт/(м ² ·°С)	Потери тепла, кДж/с	% потерь
0,7	180	0,29	2799	1,2	23	0,0084	9,02	0,004
1,4	210	0,15	2829	0,7	35	0,0198	24,89	0,010
2,1	240	0,10	2871	0,5	45	0,0460	66,49	0,026

Таким образом, можно видеть, что потери тепловой энергии при транспортировке пара по паропроводам, выполненным по действующим рекомендациям строительных норм и правил, незначительны и не превышают 0,05%.

Материалоемкость паропроводов для передачи одного и того же количества тепловой энергии при различных параметрах пара примерно одинакова.

Расчет падения давления при транспортировке пара. Транспортировка пара высокого давления, используемого для привода паровых турбин, сопровождается не только потерями теплоты, но и падением статического давления. Это требует от потребителя оценить данные потери и выбрать пар именно тех параметров, которые будут соответствовать параметрам энергетической установки потребителя.

Оценку потерь давления ΔP , МПа, выполним по формуле

$$\Delta P = \frac{\mu \cdot l \cdot V^2}{2 \cdot d_1 \cdot v}$$

Таблица 2. – Результаты расчета потерь давления при транспортировке пара

Давление пара, МПа	Температура пара, °С	Удельный объем, м ³ /кг	Внутренний диаметр трубы, м	Скорость пара, м/с	Коэффициент трения	Потери давления, МПа	% потерь
0,7	180	0,29	1,2	23	0,01214	0,0188	2,68
1,4	210	0,15	0,7	35	0,01214	0,1440	10,29
2,1	240	0,10	0,5	45	0,01214	0,5012	23,81

Можно видеть, что потери давления пара высокого давления при транспортировке достаточно велики. Для их компенсации предлагается использовать острый пар, поставки которого также предусмотрены энергоснабжающими организациями, но при некотором повышении его стоимости в теплоте.

Расчет эффективности использования пара в теплообменных установках. При выборе отборного пара следует учитывать количество располагаемой теплоты. Чтобы более наглядно представить себе ее количество, рассмотрим диаграмму, представленную на рисунке. Здесь в соответствующем масштабе показано количество тепловой энергии в паре и конденсате при термодинамическом процессе теплообмена в технологической установке потребителя, а также при адиабатном расширении в паровой турбине.

Рассмотрим варианты использования пара различных параметров на установках потребителя и связанных с этим потерь тепловой энергии.

Современная теория термодинамики, изучающая теплообменные процессы, все в большей степени обращает внимание не на классические представления первого закона термодинамики, описываемые уравнениями теплового баланса, а на реальные процессы теплообмена с учетом и второго закона термодинамики, определяемого принципом Карно и учитывающего потери тепловой энергии в окружающую среду. При этом под окружающей средой понимаются условия самой установки. Обычно при расчетах теплообменных установок второй закон термодинамики учитывается в виде предельного температурного напора [1].

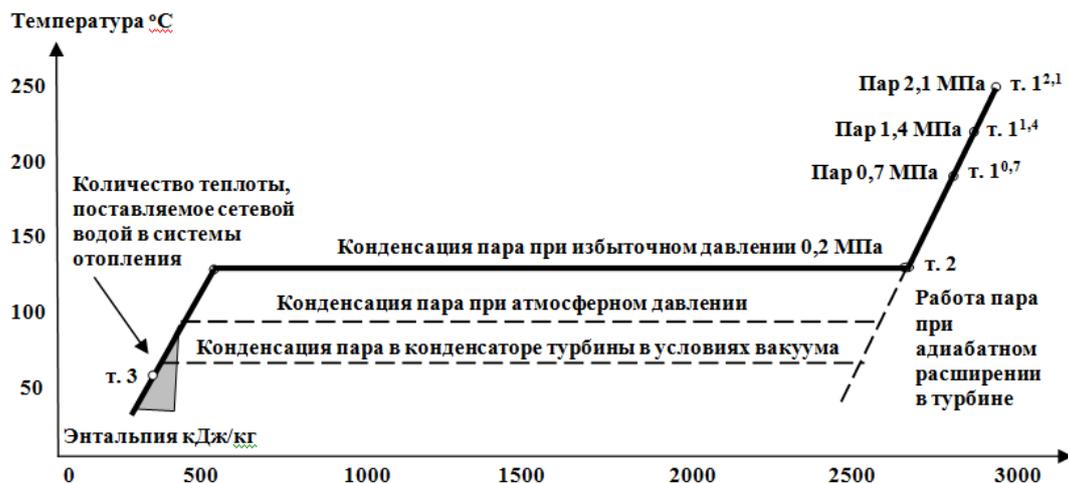


Рисунок. – Диаграмма изменения состояния пара при термодинамических процессах в системах

Представим, что у потребителя имеются прямоточные испарительные установки, в которых для обеспечения требуемого температурного напора используется пар без его конденсации. Отработанный пар с параметрами 130 °С и избыточным давлением 0,2 МПа передается на другие установки или утилизируется в системах отопления.

Определим требуемое количество отборного пара для обеспечения работы такой установки. Для этого воспользуемся уравнением теплового баланса

$$G_1 \cdot (i_1' - i_1'') \cdot \eta = G_2 (i_2' - i_2''),$$

где G_1 – расход отборного пара на установку, т/ч;

i_1' , i_1'' – энтальпия пара в начале и конце рабочего процесса нагрева вещества, кДж/кг;

$\eta = 0,97$ – коэффициент полезного действия установки, обусловленный тепловыми потерями в окружающее пространство;

G_2 – расход испаряемого вещества, т/ч;

i_2' , i_2'' – энтальпия испаряемого вещества в начале и конце процесса испарения, кДж/кг.

Из уравнения теплового баланса выразим расход отборного пара на установку:

$$G_1 = \frac{G_2 (i_2' - i_2'')}{(i_1' - i_1'') \cdot \eta}.$$

Для нагрева и испарения 8 т/ч вещества от температуры 10 °С ($i_2' = 42$ кДж/кг) до состояния пара с температурой 100 °С на линии насыщения при атмосферном давлении [2] ($i_2'' = 2677$ кДж/кг) требуется потратить 5 Гкал. Выполним расчет требуемого для этого количества греющего пара различных параметров.

Расход тепла ΔQ , Гкал/ч, можно оценить по формуле

$$\Delta Q = G_1 \cdot \frac{h_1' - h_1''}{4186,8}.$$

Результаты расчета представлены в таблице 3.

Таблица 3. – Результаты расчета требуемого количества греющего пара на прямоточной установке

Давление пара, МПа	Энтальпия пара i_1' , кДж/кг	Энтальпия пара i_1'' , кДж/кг	Требуемый расход пара, т/ч	Вносимое тепло, Гкал/ч	Тепло, используемое на установке, МДж/с	Остаточное тепло пара, Гкал/ч	% использования
0,7	2799	2717	265	177,18	5,19	171,99	2,93
1,4	2829	2717	194	131,11	5,19	125,92	3,96
2,1	2871	2717	141	96,77	5,19	91,58	5,36

Можно сделать заключение, что для выполнения одной и той же работы теплообмена применение отборного пара с более высокими параметрами позволит уменьшить его количество пропорционально начальным параметрам практически в два раза.

Здесь нет нарушения первого закона термодинамики, т. к. одно и то же количество теплоты может быть передано паром рабочему телу при различной разности температур между ними.

Использование теплоты отборного пара на установках, где не востребована теплота конденсации пара, неэффективно. По этой причине тепловые установки, использующие только высокотемпературное тепло, всегда совмещаются с установками, использующими и тепло конденсации пара.

Дальнейшей экономии тепловой энергии можно добиться за счет модификации установки для использования энергии конденсации пара и охлаждения конденсата до температуры 60 °С (см. рисунок, т. 3). Этого можно достичь, например, заменой прямоточной схемы движения теплоносителя и нагреваемой среды на противоточную [1].

Результаты расчета такой установки при тех же начальных условиях, что и в предыдущем примере, представлены в таблице 4.

Таблица 4. – Результаты расчета требуемого количества греющего пара на противоточной установке

Давление пара, МПа	Энтальпия пара i_1' , кДж/кг	Энтальпия конденсата i_1'' , кДж/кг	Требуемый расход пара, т/ч	Вносимое тепло, Гкал/ч	Тепло, используемое на установке, МДж/с	Остаточное тепло конденсата, Гкал/ч	% использования
0,7	2799	251,2	8,53	5,701	5,19	0,511	91
1,4	2829	251,2	8,43	5,696	5,19	0,505	91
2,1	2871	251,2	8,29	5,688	5,19	0,497	91

По результатам расчета можно сделать вывод о том, что использование теплоты конденсации пара в теплообменных установках потребителя многократно повышает эффективность использования отборного пара. При этом начальное давление пара имеет значение только для обеспечения необходимой величины температурного напора. Количество теплоты, транспортируемой паром различных параметров, можно считать одинаковым при равных расходах, но при этом резко сокращается потребление пара: в 25 раз и более. Это потребует перепроектирования паропровода. Использование паропроводов со скоростями пара 2 м/с и менее приводит к охлаждению пара до температуры конденсации. Конденсация пара в паропроводе может стать причиной разрушения паропровода из-за возможных в нем гидроударных явлений.

Использование теплоты конденсации пара осложняется еще одной трудностью – необходимостью установки гидрозатворов специальной конструкции (конденсатоотводчиков) на трубопроводах сброса конденсата. При отсутствии конденсатоотводчиков или их заклинивании в открытом или частично открытом состоянии часть несконденсировавшегося пара (так называемого «пролетного» пара) под действием избыточного давления в установке может уходить через конденсатопровод в виде пароводяной смеси. На диаграмме (см. рисунок) это будет выражаться в смещении точки 3 вправо по линии конденсации. Это приводит к резкому снижению эффективности использования тепловой энергии. По этой причине на предприятиях, использующих греющий пар, должен быть налажен тщательный контроль за техническим состоянием конденсатоотводчиков с использованием специальных средств диагностики. В качестве средств диагностики конденсатоотводчиков обычно используются специализированные шумомеры.

Расчет эффективности использования пара в приводных паровых турбинах. Представим, что у потребителя имеются технологические установки с приводом от паровых турбин, в которых для обеспечения требуемой мощности используется процесс адиабатного расширения пара в зону влажного пара с некоторым его переохлаждением до величины 70 °С (см. рисунок) при вакууме 0,02 МПа. При этом возникает необходимость в дополнительных затратах на охлаждение конденсатора паровой турбины.

Конденсат из конденсатора турбины возвращается теплоисточнику.

Рассчитаем возможную мощность N , МВт, приводной турбины (таблица 5):

$$N = (h_1' - h_1'') \cdot G \cdot \eta,$$

где $\eta = 0,85$ – коэффициент тепловых потерь в процессе преобразования тепловой энергии пара в механическую энергию приводной турбины.

Таблица 5. – Результаты расчета мощности приводной турбины

Давление пара, МПа	Энтальпия пара i_1' , кДж/кг	Энтальпия пара i_1'' , кДж/кг	Расход пара, кг/с	Мощность турбины, МВт	Вносимое тепло, Гкал/ч	Тепло, используемое на установке, МДж/с	Остаточное тепло пара, Гкал/ч	% использования
0,7	2799	2629	89,32	12,9	250	15,18	234,82	6,07
1,4	2829	2629	88,37	15,0	250	17,67	232,33	7,07
2,1	2871	2629	87,08	17,9	250	21,07	228,93	8,43

Можно видеть, что использование пара большего давления повышает мощность приводной турбины. Для обеспечения возможности использования теплоты конденсации пара в производственном процессе, как это было показано в предыдущем примере, на технологических установках применяют турбины с противодавлением. При этом сбросной пар имеет большой запас теплоты и может быть использован на теплообменных установках, где не требуется большой температурный напор.

Эксергетический метод оценки эффективности использования пара в турбине. Степень совершенства системы при использовании тепловой энергии пара в турбине можно оценить величиной изменения эксергии пара для условий установки в точках 1 и 2 (см. рисунок) [3].

Учитывая, что все процессы идут в потоке греющего пара, расчет удельной эксергии e , кДж/кг, выполним по формуле

$$e = (h - h_0) - T_0 \cdot (s - s_0),$$

где h – удельная энтальпия пара в точке измерения, кДж/кг;

$h_0 = 42$ кДж/кг – энтальпия воды в условиях окружающей среды, т. е. при 10 °С;

$T_0 = 10 + 273,15 = 283,15$ К – абсолютная температура окружающей среды;

s – удельная энтропия пара в точке измерения [кДж/(кг·°С)],

$s_0 = 0,1511$ кДж/(кг·°С) – удельная энтропия окружающей среды.

Количество эксергии ΔE , кДж/с, используемой в процессе расширения пара, можно оценить по формуле

$$\Delta E = G \cdot (e_1 - e_2).$$

Результаты расчета представлены в таблице 6.

Таблица 6. – Результаты расчета эксергии пара

Давление пара, МПа	Энтропия пара s_1 , кДж/(кг·°С)	Энтропия пара s_2 , кДж/(кг·°С)	Эксергия пара e_1 , кДж/кг	Эксергия пара e_2 , кДж/кг	Эксергия, используемая на установке, МДж/с	Степень термодинамического совершенства системы, %
0,7	6,7883	6,8854	878,67	779,19	8,885	58,5
1,4	6,5517	6,7489	947,30	817,82	11,442	64,7
2,1	6,4653	6,5624	1042,08	870,60	14,932	70,8

По количеству потраченной эксергии можно сделать заключение о степени термодинамического совершенства преобразования тепла в механическую работу расширения. Поскольку процесс расширения в турбине является адиабатным, т. е. проходит практически без изменения энтропии, то энтальпийный метод (только по балансу тепловой энергии) может дать завышенный результат использования тепловой энергии.

Заключение.

1. Тепловая энергия, поставляемая потребителю от теплоисточника является эксергией, т. к. ее расчет начинается от среднегодовой температуры окружающей среды (температуры холодного источника).

2. При выборе отборного пара для использования в теплообменной установке без его конденсации следует отдавать предпочтение пару с большим давлением и, следовательно, с большей начальной температурой при их равной стоимости. Это позволит существенно снизить потери тепловой энергии при эксплуатации установки, т. к. для выполнения одной и той же работы применение отборного пара с более высокими параметрами позволит уменьшить его количество, а следовательно, и тепловую энергию пропорционально начальным параметрам практически в два раза.

3. Выбор начальной температуры отборного пара полностью определяется температурным напором на конечном участке тракта теплообмена технологической установки.

4. Использование теплоты конденсата пара в теплообменных установках позволяет многократно увеличить эффективность использования теплоты пара, но для этого тракт удаления конденсата пара технологической установки должен быть оборудован конденсатоотводчиком и должна выполняться регулярная диагностика его технического состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев П. Д. Теплообменные сушильные и холодильные установки. – М.: Энергия, 1972. – 317 с.
2. Вукалович М. П., Ривкин С. Л., Александров А. А. Таблицы теплофизических свойств воды и водяного пара. – М.: Издательство стандартов, 1969. – 407 с.
3. Казаков В. Г., Луканин П. В., Смирнова О. С. Эксергетические методы оценки эффективности теплотехнологических установок: учеб. пособие. – СПб.: ГТУРП, 2013. – 93 с.

REFERENCES

1. Lebedev, P. D. (1972). *Teploobmennye sushil'nye i kholodil'nye ustanovki*. Moscow: Energiya. (In Russ.)
2. Vukalovich, M. P., Rivkin, S. L., & Aleksandrov, A. A. (1969). *Tablitsy teplofizicheskikh svoystv vody i vodyanogo para. Izdatel'stvo standartov*. Moscow: (In Russ.)
3. Kazakov, V. G., Lukanin, P. V., & Smirnova, O. S. (2013). *Eksergeticheskie metody otsenki effektivnosti teplotekhnologicheskikh ustanovok*. St. Petersburg: GTURP. (In Russ.).

Поступила 04.01.2023

EFFICIENT USE OF STEAM THERMAL ENERGY

V. PITOLIN, N. KOLOSHKIN

(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk);

K. BABAMURATOV

(Termez Institute of Engineering and Technology, Uzbekistan)

The results of theoretical studies of the use of selective steam of various parameters in consumer installations are presented. The values of heat losses during the transportation of steam to the consumer are determined. Heat losses during transportation are insignificant and do not exceed 0.05%. A TH-diagram of the thermodynamic process of operation of selected steam during adiabatic expansion and condensation is presented. It is shown that the main share of the thermal energy of steam is determined by the process of its condensation (up to 90% of the initial heat content). To convert the thermal energy of the selected steam into mechanical energy during its adiabatic expansion in the drive turbines of the consumer, it is necessary to choose the steam of the highest pressure. This will allow saving up to 50% of heat compared to low pressure steam. An exergy analysis of the system for the use of selective steam prior to its condensation has been carried out. The degree of thermodynamic perfection of steam use in this area is 45%.

The steam parameters for heat exchange units with condensation are determined by the temperature difference in the final section of the heat exchange path; otherwise, the initial steam parameters are practically indifferent to them. The main requirement for such installations is the presence of a steam trap in the condensate removal path and a reliable system for diagnosing its technical condition.

Keywords: *water vapor, steam pipelines, heat, exergy, laws of thermodynamics, heat exchange installations.*

УДК 548.232.4

DOI 10.52928/2070-1624-2023-40-1-56-64

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ НЕОДНОРОДНОСТИ НА ФАЗОВОЙ ГРАНИЦЕ ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ПЕРЕОХЛАЖДЕННОГО РАСПЛАВА

д-р физ.-мат. наук, проф. О. Н. ШАБЛОВСКИЙ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д. Г. КРОЛЬ
(Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого)
O. Shablovsky ORCID <https://orcid.org/0000-0002-2479-1789>,
D. Kroll ORCID <https://orcid.org/0000-0001-8385-2492>

Объект исследования – линия роста свободного дендрита в переохлажденном расплаве чистого вещества. Изучено возмущенное состояние линии роста на конечном удалении от вершины дендрита. Именно в этой части фронта кристаллизации наблюдается появление боковых ветвей. Рассмотрены два основных варианта: аperiодический и периодический по координате фон, по которому распространяется волна возмущения. Обнаружена важная роль характерного размера зоны пространственной неоднородности фона, даны количественные оценки пороговых значений этого размера. Изучены зависимости скорости волны от угла заострения линии роста и от ширины зоны неоднородности. Даны примеры, демонстрирующие, что направление движения волны (от вершины на периферию либо с периферии к вершине) влияет на морфологическую устойчивость/неустойчивость линии роста. Подробно изучены свойства параметра затухания возмущений. Численное моделирование свойств процесса роста выполнено для расплавов никеля и меди при переохлаждениях, равных соответственно 166 К и 180 К. Результатом расчетов является корреляция «скорость волны – угол заострения – размер зоны неоднородности», «параметр затухания – угол заострения». Представленная графическая информация демонстрирует количественные различия свойств роста дендритов никеля и меди.

Ключевые слова: дендритный рост, эволюция фазовой границы, морфологическая устойчивость, боковая ветвь.

Введение. В настоящей работе изложены модельные представления о морфологической устойчивости/неустойчивости линии роста дендрита в переохлажденном расплаве чистого вещества. Важность этого вопроса обусловлена тем, что в результате возбуждения колебаний и волн образуются пространственно-временные структуры на фазовой границе высокоскоростной кристаллизации. Пространственная неоднородность поверхности (линии) роста означает неоднородность теплового поля, являющуюся ведущим фактором формирования складок и боковых ветвей. Современное состояние теоретических и экспериментальных исследований дендритообразования представлено в статьях [1–7]. Рост поверхности свободного дендрита характеризуется высокой степенью нестационарности. По мере увеличения переохлаждения однокомпонентного расплава усиливается роль локально-неравновесного теплопереноса, поэтому при формулировке исходной задачи применяется релаксационная модель Максвелла, а математической моделью фазовой границы кристаллизации служит поверхность сильного разрыва, на которой выполнены условия динамической совместности. Подробное изложение этого подхода к проблеме моделирования роста кристалла дано в [8]. Прикладное значение обсуждаемых вопросов связано с современными технологическими процессами кристаллизации из глубоко переохлажденного расплава, а именно: на экспериментальных установках были достигнуты переохлаждения до 300 К и наблюдались скорости роста кристалла 20–70 м/с [9].

Цель работы: изучить влияние процессов возбуждения колебаний и волн на морфологические свойства линии роста дендрита.

Уравнение роста дендрита. Рассмотрим двухмерный плоский случай. Фазовую границу кристаллизации (ФГК) моделируем плоской линией сильного разрыва $x - F(y, t) = 0$. Средняя кривизна этой границы $K = (\partial^2 F / \partial y^2) / G^3$, $G = (1 + (\partial F / \partial y)^2)^{1/2}$. Здесь координата x направлена вдоль оси симметрии дендрита в сторону твердой фазы; y – поперечная декартова координата. Для дальнейших рассуждений важное значение имеет угол θ , который образует нормаль \mathbf{n} границы с осью x : $\cos \theta = 1 / G$. ФГК перемещается со скоростью N справа налево ($N = N\mathbf{n}$, $N < 0$), и на ее вершине $\partial F / \partial y = 0$, $\cos \theta = 1$. По мере удаления от вершины $\cos \theta$ монотонно убывает: $\cos \theta \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \pi / 2$. Угол заострения линии роста равен $\theta_1 = (\pi / 2) - \theta$ (рисунок 1).

Теплофизические свойства расплава и кристалла берем постоянными. Это допущение оправдано тем, что относится к уже сформировавшемуся сильному разрыву.

Уравнение роста $N \equiv (\partial F / \partial t) / G = -\mu(T_e - T_j)$ имеет вид [8]

$$\partial^2 F / \partial y^2 = \alpha B + \varphi(\partial F / \partial t)[1 + (\partial F / \partial y)^2], \quad \alpha = L / (UT_e), \quad \varphi = \alpha / \mu, \quad (1)$$

где L – теплота фазового перехода единицы объема вещества;
 μ – кинетический коэффициент роста;
 T_e – температура равновесия между твердой и жидкой фазами;
 T_c – равновесная температура кристаллизации;
 U – поверхностная энергия границы раздела фаз;
 B – переохлаждение на вершине дендрита;
 ΔT – переохлаждение расплава;
 c – объемная теплоемкость;
 λ – коэффициент теплопроводности;
 $N_m = -N > 0$.

Дифференциальное уравнение, описывающее малое возмущение $f = f(y, t)$ стационарного контура линии роста, имеет вид

$$\partial^2 f / \partial y^2 = B_1(\partial f / \partial y) + B_2(\partial f / \partial t), \quad (2)$$

$$A_1 = -\mu B / (1 + A_2^2) < 0, \quad A_2 > 0, \quad B_1 = 2\varphi A_1 A_2 < 0, \quad B_2 = (1 + A_2^2)\varphi > 0; \quad A_1, A_2, B \equiv \text{const}. \quad (3)$$

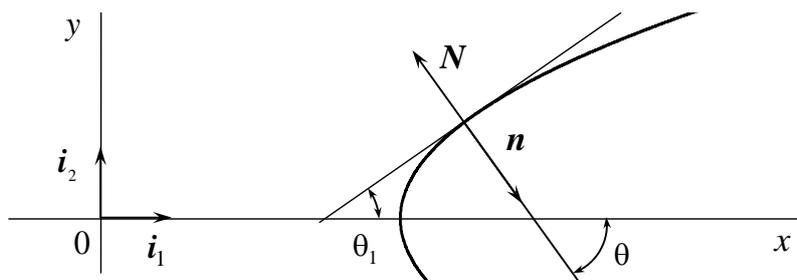
Линеаризация уравнения (1) в виде

$$F(y, t) = F^0(y, t) + f(y, t) \quad (4)$$

была выполнена на точном решении $F^0 = A_1 t + A_2 y$, которое определяет с заданной точностью клиновидный контур линии роста на конечном удалении от вершины дендрита. Параметр B_1 , содержащий $A_1 A_2$, несет информацию о мультипликативном взаимодействии скорости ФГК и ее заострения:

$$A_1 = \frac{N}{\sin \theta_1}, \quad A_2 = \frac{1}{\text{tg} \theta_1}.$$

Рисунок 1. – Угол θ_1 заострения линии роста



В данной работе нами проведены пять серий расчетов для никеля и меди при следующих значениях теплофизических параметров:

– никель, Ni: $T_c = 1728$ К, $L = 2,14 \cdot 10^9$ Дж/м³, $c = 5,62 \cdot 10^6$ Дж/(м³ · К), $\lambda = 69$ Вт/(м · К),
 $U = 1,81$ Дж/м², $\mu = 9,53$ м/(К · с), $\Delta T = 166$ К, $|N|_b = 5,3$ м/с.

– медь, Cu: $T_c = 1357$ К, $L = 1,77 \cdot 10^9$ Дж/м³, $c = 4,17 \cdot 10^6$ Дж/(м³ · К), $\lambda = 317$ Вт/(м · К),
 $U = 1,35$ Дж/м², $\gamma = 4,755 \cdot 10^{-8}$ с, $\mu = 10,056$ м/(К · с), $\Delta T = 180$ К, $|N|_b = 11,0$ м/с.

Все расчеты проведены в безразмерных величинах. Соответствие между размерными и безразмерными параметрами имеет вид

$$A_1 \rightarrow (A_1 t_b / y_b) = (-N_b t_b / y_b), \quad B_1 \rightarrow B_1 y_b, \quad B_2 \rightarrow (B_2 y_b^2 / t_b).$$

Индексом b отмечены масштабы величин, применяемые при обезразмеривании: $t_b = 10^{-7}$ с, $y_b = 10^{-6}$ м. Далее при построении и анализе решений уравнения (2) считаем, что выполнен сдвиг по координате $y \rightarrow y - Y_1 \geq 0$, где $Y_1 > 0$ – координата, соответствующая некоторому поперечному сечению клина.

Возмущенное состояние линии роста. Укажем 5 видов точных решений уравнения (2), определяющих эволюцию малых возмущений на ФГК. Структура этих решений основана на известных в литературе [10] точных элементарных решениях уравнения теплопроводности.

Расчет 1. Физический смысл имеет следующее точное решение:

$$f(y, t) = H \exp(ky) \cos(k_1 y + rt), \quad (5)$$

$$2k = B_1 - (B_1^2 + 4k_1^2)^{1/2} < 0, \quad r = -k_1(B_1^2 + 4k_1^2)^{1/2} / B_2 < 0, \quad k_1 > 0.$$

Данное решение – ограниченное при $y \geq 0$, $t \geq 0$; выбором произвольной константы H его можно сделать сколь угодно малым. Формула (5) описывает эволюцию линии роста за волной $k_1 y + rt = 0$. Скорость перемещения волны равна

$$V = dy / dt = (B_1^2 + 4k_1^2)^{1/2} / B_2 > 0. \quad (6)$$

Фон перед волной представляет собой аperiодическое по координате y возмущение вида

$$f_0(y) = H \exp(ky), \quad k < 0, \quad y \geq 0, \quad (7)$$

где k – параметр пространственной неоднородности возмущения. Характерную ширину неоднородного слоя определим как

$$y_1 = \frac{|f_0(y)|}{|df_0(y)/dy|} = -\frac{1}{k} > 0.$$

В решении (5) волновое число равно k_1 , а круговая частота есть величина $(-r) > 0$. Нетрудно видеть, что $k_1^2 = k(k - B_1) > 0$ при $k < B_1$. Для определенности берем $k_1 > 0$. Чем сильнее выражена неоднородность фона (7), тем больше квадрат k_1^2 волнового числа: $d(k_1^2)/d(-k) = B_1 - 2k > 0$. Отметим, что в данном решении $V > 0$, т. е. волна идет на периферию дендрита, удаляясь от его вершины.

Простые расчеты показывают, что $\partial(V^2)/\partial(-B_1) = 2(2k - B_1)/B_2^2 < 0$ при $k < B_1 < 0$. В итоге имеем нетривиальное поведение V^2 : при фиксированном B_1 , т. е. при фиксированном параметре $A_1 A_2$ («скорость ФГК – заострение») скорость волны монотонно растет при убывании масштаба неоднородности y_1 ; скорость V волны монотонно убывает по мере возрастания параметра $(-A_1 A_2)$ при фиксированной неоднородности фона.

Устойчивая волна существует при $k_1^2 > 0$, т. е. при $k < B_1 < 0$. Критическое значение параметра неоднородности равно $k_* = B_1 = 2\phi A_1 A_2$. Соответственно критический размер зоны неоднородности фона есть $y_* = 1/(-k_*)$:

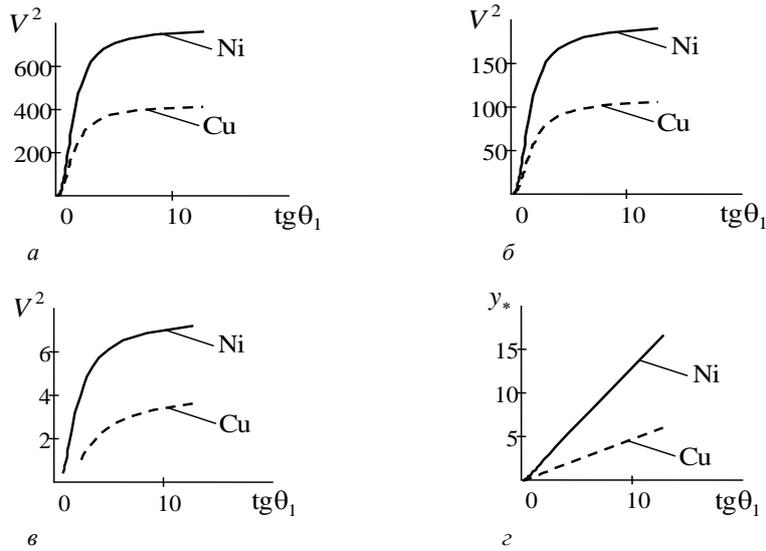
$$y_* = \frac{\sin \theta_1 \operatorname{tg} \theta_1}{2\phi N_m}.$$

Свойства решения (5, 6) представлены на рисунке 2. Если размер зоны неоднородности больше критического, т. е. $y_1 > y_*$, то $k_1^2 < 0$ и решение (5) неустойчивое, т. к. содержит гиперболический косинус:

$$k_1^2 = -\bar{k}_1^2, \quad k_1 = i\bar{k}_1, \quad r = i\bar{r}, \quad 2k = B_1 - (B_1^2 - 4\bar{k}_1^2)^{1/2}, \quad \bar{r} = -\bar{k}_1(B_1^2 - 4\bar{k}_1^2)^{1/2} / B_2,$$

$$(-B_1/2) < (-k) < (-B_1), \quad 0 > k > B_1, \quad f = i\bar{f}, \quad \bar{f}(y, t) = f_1 \exp(ky) \operatorname{ch}(\bar{k}_1 y + \bar{r}t), \quad y \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Волна $\bar{k}_1 y + \bar{r}t = \operatorname{const}$ движется со скоростью $\bar{V} > 0$, где $\bar{V}^2 = (B_1^2 - 4\bar{k}_1^2) / B_2^2 > 0$.



a, б, в – квадрат скорости волны возмущения как функция тангенса угла заострения линии роста:
a – $k = -10$; *б* – $k = -5$; *в* – $k = -1$; *з* – критический размер зоны неоднородности
 как функция тангенса угла заострения линии роста

Рисунок 2. – Возмущенное состояние (5)–(7)

Расчет 2. Перейдем к рассмотрению случая, когда фон перед волной – периодическая функция координаты y . Уравнению (2) удовлетворяет решение

$$f(y,t) = H \cos ky \exp \left[h_2 y + t \left(h_1 - \frac{k^2}{B_2} \right) \right], \quad y \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (8)$$

$$h_1 = -B_1^2 / (4B_2) < 0, \quad h_2 = B_1 / 2 < 0.$$

где H, k – произвольные постоянные; посредством выбора H это решение можно сделать сколь угодно малым. Волна

$$h_2 y = t \left(\frac{k^2}{B_2} - h_1 \right)$$

распространяется по пространственно периодическому фону

$$f_0(y) = H \cos ky \quad (9)$$

со скоростью

$$V = \frac{2}{B_1 B_2} \left(k^2 + \frac{B_1^2}{4} \right) < 0. \quad (10)$$

Напомним, что при записи уравнения (2) был выполнен сдвиг по координате $y \rightarrow (y - Y_1) \geq 0$. Таким образом, в начальном ($t = 0$) состоянии фронт волны имеет координату $y = 0$, а затем движется с периферии дендрита к его вершине в сторону отрицательных y . За фронтом волны ($y \geq Vt$) состояние линии роста устойчивое. Полупериод колебаний π/k представляет собой ширину зоны неоднородности исходного возмущения линии роста.

Затухание возмущения (8) во времени определяется экспонентой $f \sim \exp(-n_1 t)$, где

$$n_1 = (k^2 + \varphi^2 A_1^2 A_2^2) / [\varphi(1 + A_2^2)] \quad (11)$$

есть параметр затухания. Далее находим

$$\frac{dn_1}{d(A_2^2)} = \frac{(\varphi^2 A_1^2 - k^2)}{\varphi(1 + A_2^2)^2}.$$

При фиксированных φA_1 и k зависимость $n_1 = n_1(A_2^2)$ – монотонно возрастающая по мере заострения ФГК, если $\varphi^2 A_1^2 > k^2$. Рост A_2^2 означает уменьшение θ_1 . При $k^2 > \varphi^2 A_1^2$ имеем убывающую функцию $n_1 = n_1(A_2^2)$. Пороговое значение $k_*^2 = \varphi^2 A_1^2$ примечательно тем, что для него параметр затухания $n_1^{**} = \varphi A_1^2$ не зависит от угла заострения θ_1 . Иллюстрация закономерностей поведения параметра затухания дана на рисунке 3. Сплошная и пунктирная линии соответствуют частотам возмущения, расположенным слева k_l^2 и справа k_r^2 от порогового значения k_*^2 .



Рисунок 3. – Возмущенное состояние (8)–(10).
Зависимость параметра затухания (11) от угла заострения линии роста

Расчет 3. Берем за основу решение

$$f(y, t) = H \exp(-ky) \exp \left[\left(h_1 + \frac{k^2}{B_2} \right) t + h_2 y \right], \quad y \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (12)$$

где H, k – произвольные постоянные; $h_1 < 0, h_2 < 0$ (см. (8)).

$$\text{Волна} \quad h_2 y = - \left(h_1 + \frac{k^2}{B_2} \right) t + \text{const}$$

распространяется по неоднородному фону

$$f_0(y) = H \exp(-ky), \quad k > 0, \quad y \geq 0 \quad (13)$$

со скоростью

$$V = - \frac{2}{B_1 B_2} \left(k^2 - \frac{B_1^2}{4} \right). \quad (14)$$

Формулы для $B_1 < 0, B_2 > 0$ записаны в (2). Характерная ширина зоны неоднородности равна $y_1 = 1/(-k)$. Из (14) ясно, что волна движется от вершины на периферию дендрита ($V > 0$), если $k^2 > (B_1^2/4)$, т. е. при $\left[k^2 / (\varphi^2 A_1^2) \right] > A_2^2$ или, что то же самое, при $k^2 > k_*^2$,

$$k_*^2 = \frac{\varphi^2 N^2}{\sin^2 \theta_1 \text{tg}^2 \theta_1} = (B_1^2/4). \quad (15)$$

Волна движется с периферии дендрита к вершине ($V < 0$), если $k^2 < k_*^2$. Здесь k_* характеризует пороговую ширину (15) зоны неоднородности исходного возмущения, причем $V(k^2 = k_*^2) = 0$. Процесс устойчивый и решение (12) аperiodическое по t , если $V < 0$: волна идет с периферии к вершине, $k^2 < k_*^2$. Процесс неустойчивый, если $V > 0$: волна идет от вершины на периферию, $k^2 > k_*^2$.

Для сравнения отметим, что в случае (5) с таким же (с точностью до обозначений) экспоненциальным по y фоном имеем устойчивое периодическое по t решение для $k^2 > B_1^2, V > 0$. Дело в том, что в этих задачах различаются функции $V^2 = V^2(k^2, B_1, B_2)$, обусловленные характером возбуждения волн в начальном сечении $y = 0$.

На основе формулы (14) получаем

$$V^2 = \frac{(k^2 - \varphi^2 A_1^2 A_2^2)^2}{[\varphi^2 A_1 A_2 (1 + A_2^2)]^2}. \quad (16)$$

Здесь $V^2 \rightarrow \infty$ при $A_2 \rightarrow 0$, т. е. при $\theta_1 \rightarrow (\pi/2)$. Если $A_2 \rightarrow \infty$, т. е. $\theta_1 \rightarrow 0$, то $V^2 \rightarrow 0$. Такое же поведение волны наблюдалось нами для решения (8): в обоих случаях имеем экспоненциальный по t характер возбуждения волн при $y=0$. Функция $V^2 = V^2(k^2, A_2^2)$ ведет себя немонотонно по отношению к аргументу A_2^2 , а именно: при каждом фиксированном $k > 0$ имеем $\partial(V^2)/\partial(A_2^2) = 0$ вдоль линии

$$k^2 = \varphi^2 A_1^2 \frac{A_2^2 (A_2^2 - 1)}{(1 + 3A_2^2)} = k_*^2 \frac{(A_2^2 - 1)}{(1 + 3A_2^2)},$$

которая существует при $A_2^2 > 1$, т. е. при $0 < \text{tg}\theta_1 < 1$. Функция V^2 имеет максимум по отношению к аргументу $\text{tg}\theta_1$ (рисунок 4).

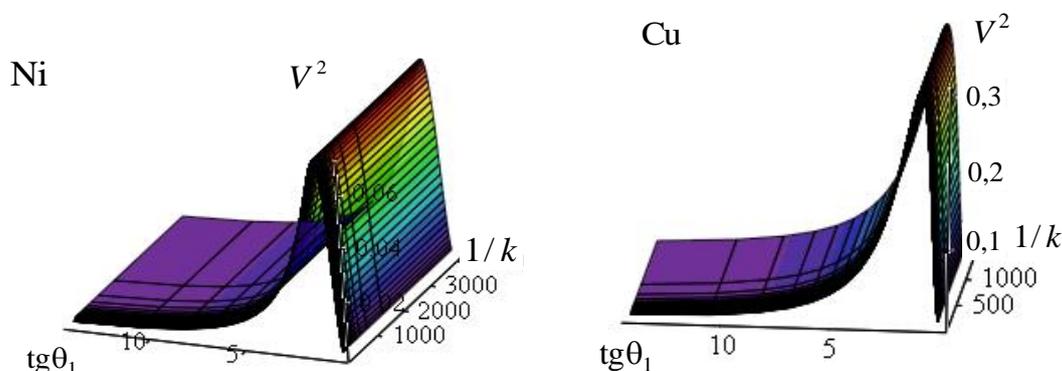


Рисунок 4. – Возмущенное состояние (12)–(14). Зависимость квадрата скорости волны возмущения (16) от ширины зоны неоднородности и от тангенса угла заострения линии роста

Расчет 4. Уравнение (2) имеет точное решение

$$f(y, t) = H \exp[h_1 t + y(h_2 - k)] \cos\left(ky - \frac{2k^2}{B_2} t\right), \quad y \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (17)$$

где H, k – произвольные постоянные; $h_1 < 0, h_2 < 0$.

Волна $y = (2kt/B_2) \geq 0, k > 0$ распространяется по неоднородному фону

$$f_0(y) = H \exp(-n_2 y), \quad y \geq 0, \quad n_2 = k - h_2 - (h_1 B_2 / 2k) \quad (18)$$

со скоростью $V = 2k/B_2 > 0$. Обсудим связь (18) между параметрами k и n_2 :

$$2k = n_2 + h_2 + [(n_2 + h_2)^2 + 2h_1 B_2]^{1/2}.$$

Волна существует ($V > 0$), если $k > 0$. Значит, параметр неоднородности фона должен удовлетворять неравенству $n_2 > (-\varphi A_1 A_2)(1 + \sqrt{2})$. Если же $0 < \frac{n_2}{(-\varphi A_1 A_2)} < (1 + \sqrt{2})$, то волна не возникает. Запишем параметр неоднородности в виде

$$n_2 = \frac{B_2 V}{2} - h_2 - \frac{h_1}{V}. \quad (19)$$

Отсюда ясно, что связь $n_2 \leftrightarrow V$ немонотонная: $dn_2/dV = 0$ при

$$V^2 = V_*^2, \quad V_*^2 = 2A_1^2 A_2^2 / (1 + A_2^2)^2, \tag{20}$$

$$\frac{d^2 n_2}{dV^2} = -\frac{2h_1}{V^3} > 0.$$

Значение $V = V_*$ соответствует минимуму функции $n_2 = n_2(V)$ при каждом фиксированном $A_2 > 0$. Соответствующая пороговая ширина зоны неоднородности $y_* = 1/n_2^*$, где $n_2^* = n_2(V = V_*)$. Свойства этого режима возмущения показаны на рисунках 5, 6.

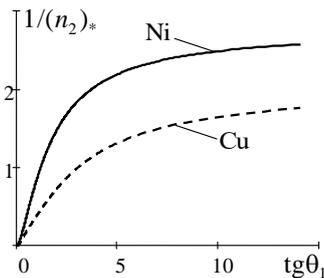


Рисунок 5. – Возмущенное состояние (17), (18). Пороговое значение ширины зоны неоднородности как функция тангенса угла заострения линии роста

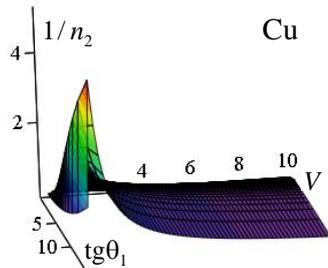


Рисунок 6. – Возмущенное состояние (17), (18). Нелинейная связь скорости волны и ширины зоны неоднородности аperiodически возмущенного фона

Расчет 5. Решение (17) позволяет рассмотреть волну

$$y = -h_1 t / (h_2 - k), \quad V = -h_1 / (h_2 - k), \tag{21}$$

которая распространяется по пространственно периодическому фону

$$f_0(y) = H \cos k_1 y, \tag{22}$$

$$k_1 = k \left[1 + \frac{2k(h_2 - k)}{h_1 B_2} \right].$$

Случай $V < 0$ дает такие оценки:

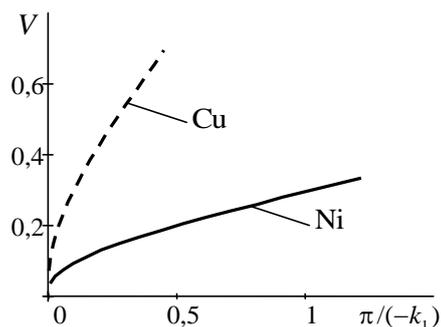
$$\frac{A_1 A_2}{(1 + A_2^2)} < V < 0, \quad k > 0.$$

Именно в этом интервале находятся значения скорости волны, идущей с периферии к вершине. Ширина зоны неоднородности фона равна π/k_1 (см. (22), где $k = (h_1 + Vh_2)/V$). Случай $V > 0$ существует, если $k < h_2 < 0$: волна идет на периферию и в каждый фиксированный момент времени процесс за волной неустойчивый по отношению к координате y :

$$f \sim \exp[y(h_2 - k)], \quad (h_2 - k) > 0, \quad y > 0.$$

Скорость волны монотонно растет по мере увеличения ширины зоны неоднородности (рисунок 7).

Рисунок 7. – Возмущенное состояние (17), (21), (22). Неустойчивый режим ($V > 0$). Связь скорости волны и ширины зоны неоднородности пространственно-периодически возмущенного фона



Заключение. Выполнен анализ возмущенных состояний линии роста свободного дендрита в переохлажденном расплаве чистого вещества, определяемых зависимостями (5), (8), (12) и (17). Показано, что основными факторами влияния являются: направление движения волны возмущения (от вершины на периферию либо с периферии к вершине); характер состояния фона перед волной (аперриодический по координате (7), (13), (18) либо периодический (9), (22); линейный размер зоны неоднородности фона. Представленная на рисунках 2–7 информация позволяет сопоставить друг с другом свойства дендритного роста для переохлажденных расплавов никеля ($\Delta T = 166$ К) и меди ($\Delta T = 180$ К).

ЛИТЕРАТУРА

1. Brener E. A., Mel'nikov V. I. Pattern selection in two-dimensional dendritic growth // *Advances in Physics*. – 1991. – Vol. 40, iss. 1. – P. 53–97. – DOI: [10.1080/00018739100101472](https://doi.org/10.1080/00018739100101472).
2. Mullis A. M. Deterministic side-branching during thermal dendritic growth // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. – 2015. – Vol. 84, 012071. – P. 1–8. – DOI: [10.1088/1757-899X/84/1/012071](https://doi.org/10.1088/1757-899X/84/1/012071).
3. Glicksman M. E. Capillary-mediated interface perturbations: Deterministic pattern formation // *J. of Crystal Growth*. – 2016. – Vol. 450. – P. 119–139. – DOI: [10.1016/j.jcrysgro.2016.03.031](https://doi.org/10.1016/j.jcrysgro.2016.03.031).
4. Strickland J., Nenchev B., Dong H. On Directional Dendritic Growth and Primary Spacing – A Review // *Crystals*. – 2020. – 10(7). – P. 627–656. – DOI: [10.3390/cryst10070627](https://doi.org/10.3390/cryst10070627).
5. Kurz W., Rappaz M., Trivedi R. Progress in modeling solidification microstructures in metals and alloys. Part II: dendrites from 2001 to 2018 // *Int. Mater. Rev.* – 2021. – Vol. 66, iss. 1. – P. 30–76. – DOI: [10.1080/09506608.2020.1757894](https://doi.org/10.1080/09506608.2020.1757894).
6. Шабловский О. Н., Кроль Д. Г. Динамика неустойчивости волновых возмущений и боковое ветвление дендрита в переохлажденном расплаве // *Успехи прикладной физики*. – 2022. – № 2. – С. 189–202.
7. Wang X., Li K., Qin X. et al. Research on Mesoscale Nucleation and Growth Processes in Solution Crystallization: A Review // *Crystals*. – 2022. – Vol. 12. – P. 1234–1255. – DOI: [10.3390/cryst12091234](https://doi.org/10.3390/cryst12091234).
8. Шабловский О. Н. Морфологические свойства линии роста двумерного дендрита в переохлажденном расплаве // *Прикладная физика*. – 2012. – № 4. – С. 40–46.
9. Herlach D. M., Galenko P., Holland-Moritz D. *Metastable Solids from Undercooled Melts*. – Oxford: Pergamon, 2007. – 448 p.
10. Полянин А. Д., Вязьмин А. В., Журов А. И. и др. Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса. – М.: Факториал, 1998, – 368 с.

REFERENCES

1. Brener, E. A., & Mel'nikov, V. I. (1991). Pattern selection in two-dimensional dendritic growth. *Advances in Physics*, 40(1), 53–97. DOI: [10.1080/00018739100101472](https://doi.org/10.1080/00018739100101472).
2. Mullis, A. M. (2015). Deterministic side-branching during thermal dendritic growth *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, (84), 1–9. DOI: [10.1088/1757-899X/84/1/012071](https://doi.org/10.1088/1757-899X/84/1/012071).
3. Glicksman, M. E. (2016). Capillary-mediated interface perturbations: Deterministic pattern formation. *J. of Crystal Growth*, 450, 119–139. DOI: [10.1016/j.jcrysgro.2016.03.031](https://doi.org/10.1016/j.jcrysgro.2016.03.031).
4. Strickland, J., & Nenchev, B. (2020). On Directional Dendritic Growth and Primary Spacing – A Review. *Crystals*, 10(7), 627–656. DOI: [10.3390/cryst10070627](https://doi.org/10.3390/cryst10070627).
5. Kurz, W., Rappaz, M., & Trivedi, R. (2021). Progress in modeling solidification microstructures in metals and alloys. Part II: dendrites from 2001 to 2018. *Int. Mater. Rev.*, 66(1), 30–76. DOI: [10.1080/09506608.2020.1757894](https://doi.org/10.1080/09506608.2020.1757894).
6. Shablovskii, O. N., & Krol', D. G. (2022). Dinamika neustoichivosti volnovykh vozmushchenii i bokovoe vetvlenie dendrita v pereokhlazhdenom rasplave [Dynamics of instability of wave disturbances and lateral branching of a dendrite in a supercooled melt]. *Uspehi prikladnoj fiziki [Advances in Applied Physics]*, (2), 189–202. <https://elibrary.ru/item.asp?id=48451163>. (In Russ., abstr. in Engl.).
7. Wang, X., Li, K., Qin, X., Li, M., Liu, Y., An, Y., ... Gong, J. (2022). Research on Mesoscale Nucleation and Growth Processes in Solution Crystallization: A Review. *Crystals*, (12), 1234–1255. DOI: [10.3390/cryst12091234](https://doi.org/10.3390/cryst12091234).

8. Shablovskii, O. N. (2012). Morfologicheskie svoystva linii rosta dvumernogo dendrita v pereokhlazhdennom rasplave [Morphological properties of the growth line of a two-dimensional dendrite in a supercooled melt. *Prikladnaya fizika [Applied Physics]*, (4), 40–46. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17913532>. (In Russ., abstr. in Engl.).
9. Herlach, D. M., Galenko, P., & Holland-Moritz, D. (2007). *Metastable Solids from Undercooled Melts*. Oxford: Pergamon.
10. Polyenin, A. D., Vyaz'min, A. V., Zhurov, A. I., & Kazenin, D. A. (1998). *Spravochnik po tochnym resheniyam uravnenii teplo- i massoperenosa [Handbook on the exact solutions of heat and mass transfer equations]*. – Moscow: Faktorial. (In Russ.)

Поступила 06.02.2023

SPATIAL-TEMPORAL INHOMOGENEITIES AT THE PHASE BOUNDARY OF HIGH-SPEED CRYSTALLIZATION OF A UNDERCOOLED MELT

O. SHABLOVSKY, D. KROLL
(*Sukhoi State Technical University of Gomel*)

The object of study is the growth line of a free dendrite in a undercooled melt of a pure substance. The perturbed state of the growth line at a finite distance from the top of the dendrite has been studied. It is in this part of the crystallization front that the appearance of side branches is observed. Two main variants are considered: aperiodic and coordinate-periodic background, along which the perturbation wave propagates. An important role of the characteristic size of the zone of spatial inhomogeneity of the background is revealed, and quantitative estimates of the threshold values of this size are given. The dependences of the wave velocity on the angle of sharpening of the growth line and on the width of the inhomogeneity zone are studied. Examples are given demonstrating that the direction of wave movement (from the top to the periphery or from the periphery to the top) affects the morphological stability/instability of the growth line. The properties of the perturbation damping parameter are studied in detail. Numerical modeling of the properties of the growth process was performed for nickel and copper melts at undercoolings equal to 160 K and 180 K respectively. The result of the calculations is the correlation "wave speed – taper angle – size of the inhomogeneity zone", "attenuation parameter – taper angle". The presented graphical information demonstrates quantitative differences in the growth properties of nickel and copper dendrites.

Keywords: dendritic growth, interface evolution, morphological stability, side branch.

УДК 621.371: 550.837.6

DOI 10.52928/2070-1624-2023-40-1-65-71

**ПРИМЕНЕНИЕ ФАЗОВЫХ МЕТОДОВ ПОИСКА УГЛЕВОДОРОДОВ
НА ОСНОВЕ АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ***канд. техн. наук, доц. В. Ф. ЯНУШКЕВИЧ**(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)*

Исследованы характеристики анизотропной среды над углеводородами при применении фазовых методов на основе амплитудно-модулированных сигналов. Проведены экспериментальные исследования фазовых характеристик поверхностного импеданса в режиме амплитудно-модулированных сигналов. Проанализированы две составляющие поверхностного импеданса для указанного режима. Проведено исследование влияния режимов зондирующих сигналов на характеристики анизотропной среды над залежами на основе двухканальной схемы измерений. Предложен метод регистрации границ углеводородных залежей (УВЗ), основанный на использовании фазовых методов поиска и идентификации УВЗ в режиме амплитудно-модулированных сигналов. Результаты исследований могут быть использованы при разработке радиотехнических систем поиска и оконтуривания залежей нефти и газа и их применении для поисковой геофизики.

Ключевые слова: *анизотропная среда, углеводородная залежь, амплитудно-модулированный сигнал.*

Введение. Актуальность повышения эффективности электромагнитных методов (ЭММ) и устройств для поиска и оконтуривания скоплений нефти и газа (углеводородов) основывается на расширении зависимостей характеристик анизотропной среды над УВЗ от режимов воздействующих сигналов [1–3]. Выбор ЭММ и методики проведения экспериментальных испытаний основывается на анализе электрохимических и электрофизических процессов в образованных над УВЗ анизотропных средах. При помощи сейсморазведки изучается глубинное строение Земли, выделяются месторождения полезных ископаемых (в основном нефти и газа), решаются задачи гидрогеологии и инженерной геологии, проводится сейсмическое микрорайонирование [4]. Внедрение методов и аппаратуры для поиска и оконтуривания УВЗ основано на методиках высокоэффективного, научно-обоснованного прогнозирования, оконтуривания и освоения продуктивных зон [5]. Использование частотно-модулированных сигналов с определением амплитудных и фазовых составляющих поверхностного импеданса геологического участка местности возможно при поиске, оконтуривании залежей углеводородов [6]. Геофизические исследования скважин – это комплекс методов, которые используются для изучения горных пород и контроля технического состояния буровых. По назначению делятся на две группы: методы каротажа и скважинной геофизики [7]. Аппаратура для мониторинга пластов и геотермальной разведки состоит из системы, совмещающей регистрацию микросейсмических и электромагнитных данных в одном блоке [8]. Контроль за разработкой нефтяных и газовых месторождений включает в себя комплекс геофизических исследований в действующих скважинах, размещенных в пределах эксплуатируемой залежи для изучения процесса вытеснения нефти в пласте и закономерностей перемещения водонефтяного, газонефтяного и газовойдяного контактов [9]. Активное внедрение различных методов и аппаратуры для поиска и оконтуривания УВЗ базируется на исследовании взаимодействия окружающей среды и кристаллического скелета, образованного в анизотропной среде над УВЗ и пронизанного проводящими включениями и электролитом с наличием минералов с электронной проводимостью [10].

Используя процесс, который включает технику-экономическое обоснование с оценкой полевого шума и тщательной проверкой параметров сбора данных до начала съемки, сбор широкополосных массивов данных и расширенную обработку, можно преодолеть серьезные проблемы с шумом в районе съемки [11]. В статье [12] описаны необходимые инструменты и процедуры сбора данных, которые сильно отличаются от других электромагнитных методов с контролируемым источником. Для повышения точности и достоверности определения границ УВЗ следует рекомендовать радиокомплексирование указанных выше ЭММ [13]. Многопараметровая аэроаэрозондировка может быть использована в поисковой геофизике [14]. Комплексный подход к морской электромагнитной съемке с использованием буксируемой косы и источника способствует достижению хороших характеристик обнаружения углеводородов [15].

Цель работы заключается в разработке и совершенствовании ЭММ поиска и оконтуривания углеводородов на основе применения амплитудно-модулированных сигналов [16].

Фазовый метод поиска углеводородов. Применение фазовых характеристик для исследования свойств среды над углеводородами находит широкое применение при разработке современных ЭММ [17]. В качестве исследуемых характеристик УВЗ взяты импедансные граничные условия. Величина поверхностного импеданса позволяет проводить оценку характеристик антенн, что может быть использовано для идентификации залежей полезных ископаемых.

Рассмотрим воздействие на анизотропную среду над углеводородами радиосигнала тональной амплитудной модуляции вида

$$e(t) = E(1 + k_m \cos \Omega t) \cos \omega t,$$

где E – амплитуда несущего колебания;

k_m – коэффициент амплитудной модуляции;

$\Omega = 2\pi F$, $\omega = 2\pi f$ – соответственно модулирующая и несущая частоты.

Компоненты тензора диэлектрической проницаемости для двухчастичного потока определяются следующим образом [5]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_1 = \epsilon_r + \sum_{i=1}^2 \left\{ \omega_{\Pi i}^2 \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2 - v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 v_i^2} + j \left[\frac{\epsilon_r k_m \Omega \sin \Omega t}{\omega(1 + k_m \cos \Omega t)} - \frac{\sigma_r}{\omega \epsilon_0} - \frac{\omega_{\Pi i}^2 v_i}{\omega} \frac{\omega^2 + v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 v_i^2} \right] \right\}; \\ \dot{\epsilon}_2 = \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Pi i}^2 \omega_{\Gamma i}}{\omega} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2 + v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 v_i^2} - \frac{2j v_i \omega_{\Pi i} \omega_{\Gamma i}}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 v_i^2} \right\}; \\ \dot{\epsilon}_3 = \epsilon_r + \sum_{i=1}^2 \left\{ \omega_{\Pi i}^2 \frac{1}{v_i^2 + \omega^2} + j \left[\frac{\epsilon_r k_m \Omega \sin \Omega t}{\omega(1 + k_m \cos \Omega t)} - \frac{\sigma_r}{\omega \epsilon_0} - \frac{\omega_{\Pi i}^2 v_i}{\omega} \frac{1}{\omega^2 + v_i^2} \right] \right\}. \end{array} \right.$$

Режим амплитудной модуляции характеризуют составляющие $\dot{\epsilon}_1$, $\dot{\epsilon}_2$, $\dot{\epsilon}_3$; плазменная частота $\omega_{\Pi i}$; гиротропная частота $\omega_{\Gamma i}$; частота столкновения частиц v_i ; относительная диэлектрическая проницаемость среды ϵ_r ; проводимость среды σ_r ; диэлектрическая постоянная ϵ_0 .

Компоненты поверхностного импеданса определяются по формулам

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{11} = \dot{Z}_{22} &= -\frac{1}{2j\sqrt{\dot{\epsilon}_R \dot{\epsilon}_L}} (\sqrt{\dot{\epsilon}_R} - \sqrt{\dot{\epsilon}_L}); \\ \dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} &= \frac{1}{2\sqrt{\dot{\epsilon}_R \dot{\epsilon}_L}} (\sqrt{\dot{\epsilon}_R} + \sqrt{\dot{\epsilon}_L}). \end{aligned} \quad (1)$$

В выражениях (1) фигурируют комбинационные составляющие

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_R &= \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 = \text{Re} \dot{\epsilon}_R + j \text{Im} \dot{\epsilon}_R; \\ \dot{\epsilon}_L &= \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2 = \text{Re} \dot{\epsilon}_L + j \text{Im} \dot{\epsilon}_L. \end{aligned}$$

Таким образом, анализ сводится к раздельному исследованию амплитудных и фазовых характеристик поверхностного импеданса. Представим выражения (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{11} = \dot{Z}_{22} &= |Z_{11}| \cdot e^{j\varphi Z_{11}} = |Z_{22}| \cdot e^{j\varphi Z_{22}}; \\ \dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} &= |Z_{12}| \cdot e^{j\varphi Z_{12}} = |Z_{21}| \cdot e^{j\varphi Z_{21}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Результаты исследований. Проводилось исследование фазовых характеристик (2). Применялись микрополосковая антенна с частотной характеристикой коэффициента стоячей волны (КСВ) (рисунок 1) и плоские логарифмические спиральные антенны с частотной характеристикой КСВ (рисунок 2). Частотная характеристика КСВ плоской логарифмической спиральной антенны 2-го канала отличается не более, чем на 5% по сравнению с характеристикой антенны 1-го канала.

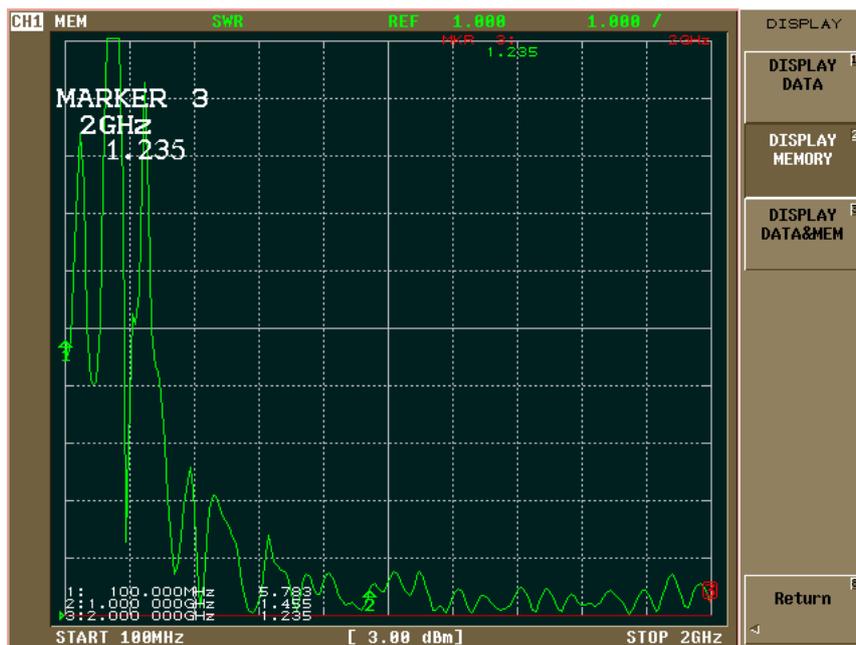


Рисунок 1. – КСВ микрополосковой антенны

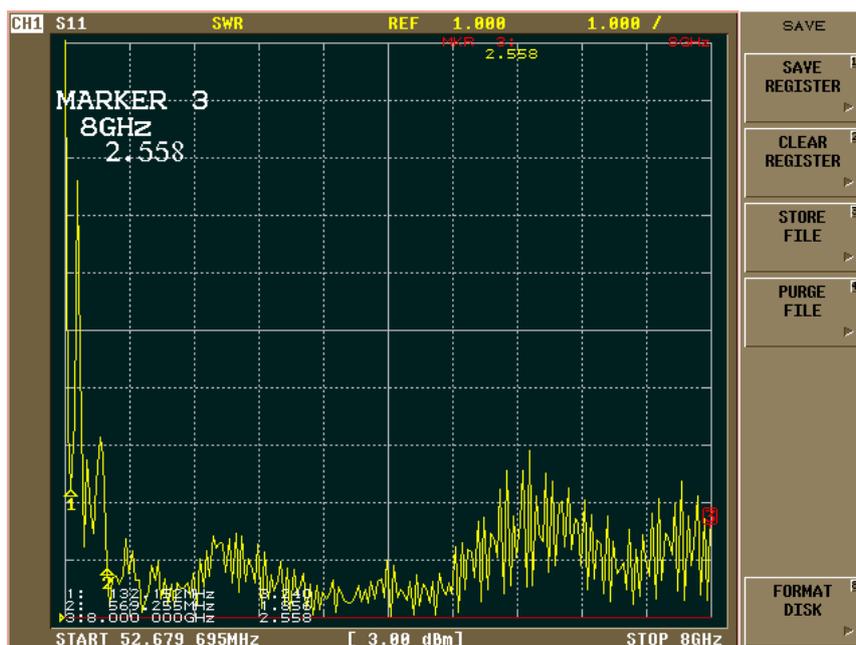


Рисунок 2. – КСВ плоской логарифмической спиральной антенны 1 канала

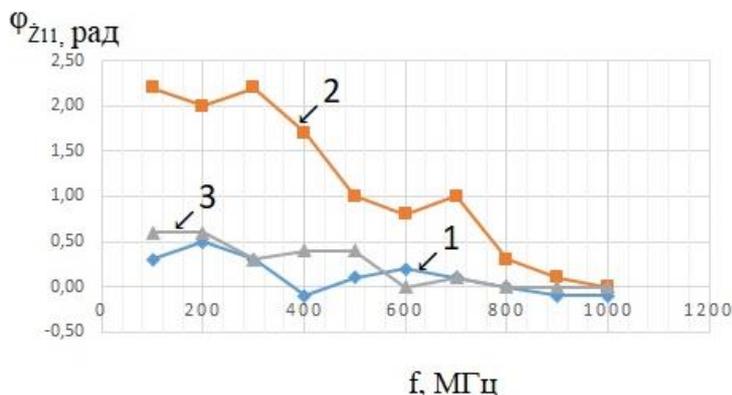
Предлагаемый способ был опробован на Геологическом и Мармовичском месторождениях УВЗ Гомельской области.

Измерения проводились в частотном диапазоне на несущих частотах 0,1...1 ГГц при использовании частоты модуляции $F = 10...100$ МГц с коэффициентами амплитудно-модулированного сигнала в диапазоне 0,2...0,9. Высоту подъема антенны выбирали из соображений проведения измерений (на расстоянии 1 м от поверхности земли).

Точки измерения выбирались следующим образом: обе точки измерения фазы находятся вне УВЗ; одна точка измерения фазы находится над УВЗ, вторая точка измерения фазы – вне УВЗ; обе точки измерения фазы находятся над УВЗ.

Когда только одна точка измерения фазы (рисунок 3) находится на границе залежи (пикет 250 для Мармовичского месторождения УВЗ), происходит уменьшение фазовой составляющей Z_{11} от величины 2,2 рад

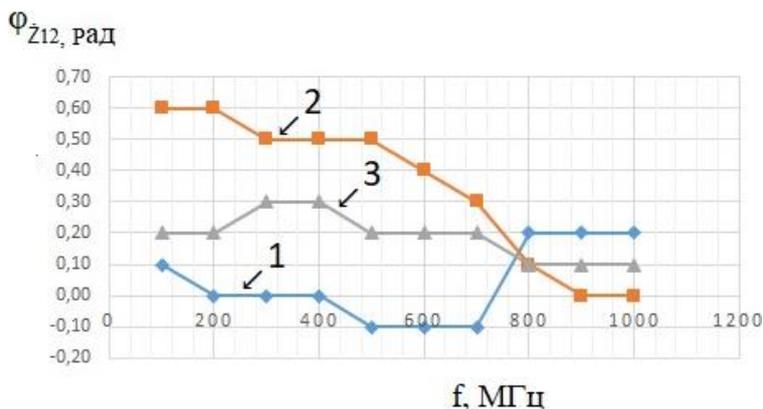
(частота $f = 100$ МГц) до величины 0,3 рад (частота $f = 800$ МГц) и до 0 рад (частота $f = 1000$ МГц) с увеличением фазы до величины 2,2 рад (частота $f = 300$ МГц). По аномальным значениям фазовой составляющей \dot{Z}_{11} определяли границу УВЗ. В случае расположения обеих точек измерения фазы вне УВЗ наблюдаются отличия фазы в 2 каналах измерения с максимумом 0,5 рад (частота $f = 200$ МГц). В ситуации расположения обеих точек измерения фазы над УВЗ наблюдаются отличия фазы в 2 каналах измерения с максимумами 0,6 рад (частота $f = 100$ МГц) и 0,6 рад (частота $f = 200$ МГц).



1 – обе точки вне УВЗ; 2 – одна точка над УВЗ, вторая точка вне УВЗ; 3 – обе точки над УВЗ

Рисунок 3. – Экспериментальные зависимости фазовой составляющей \dot{Z}_{11} для Мармовичского месторождения

При размещении только одной точки измерения фазы (рисунок 4) на границе залежи (пикет 250 для Мармовичского месторождения УВЗ) происходит уменьшение фазовой составляющей \dot{Z}_{12} от величины 0,6 рад (частоты $f = 100 - 200$ МГц) до 0 рад (частоты $f = 900 - 1000$ МГц). По аномальным значениям фазовой составляющей \dot{Z}_{12} определяли границу УВЗ. В случае расположения обеих точек измерения фазы вне УВЗ наблюдаются отличия фазы в 2 каналах измерения с максимумом 0,2 рад (частоты $f = 800 - 1000$ МГц). В ситуации расположения обеих точек измерения фазы над УВЗ наблюдаются отличия фазы в 2 каналах измерения с максимумом 0,3 рад (частоты $f = 300, 400$ МГц).

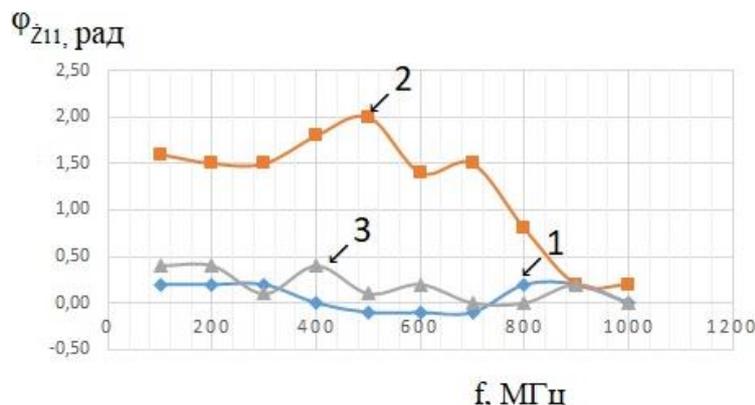


1 – обе точки вне УВЗ; 2 – одна точка над УВЗ, вторая точка вне УВЗ; 3 – обе точки над УВЗ

Рисунок 4. – Экспериментальные зависимости фазовой составляющей \dot{Z}_{12} для Мармовичского месторождения

В случае нахождения только одной точки измерения фазы (рисунок 5) на границе залежи (пикет 200 для Геологического месторождения УВЗ) происходит уменьшение фазовой составляющей \dot{Z}_{11} от величины 1,6 рад (частота $f = 100$ МГц) до 0,2 рад (частоты $f = 900 - 1000$ МГц) с увеличением фазы до величины 1,8 рад (частота $f = 400$ МГц), до величины 2,0 рад (частота $f = 500$ МГц). По аномальным

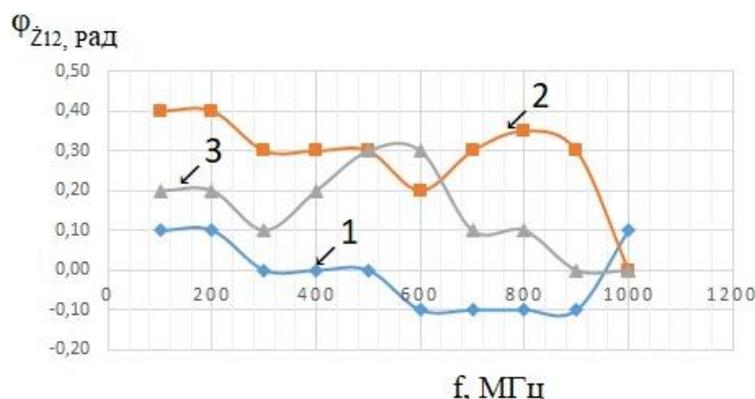
значениям фазовой составляющей \dot{Z}_{11} определяли границу УВЗ. В случае расположения обеих точек измерения фазы вне УВЗ наблюдаются отличия фазы в 2 каналах измерения с максимумом 0,2 рад (частоты $f = 100, 200, 300, 800, 900$ МГц). В ситуации расположения обеих точек измерения фазы над УВЗ наблюдаются отличия фазы в 2 каналах измерения с максимумом 0,4 рад (частоты $f = 100, 200, 400$ МГц).



1 – обе точки вне УВЗ; 2 – одна точка над УВЗ, вторая точка вне УВЗ; 3 – обе точки над УВЗ

Рисунок 5. – Экспериментальные зависимости фазовой составляющей \dot{Z}_{11} для Геологического месторождения

Наличие только одной точки измерения фазы (рисунок 6) на границе залежи (пикет 200 для Геологического месторождения УВЗ) приводит к уменьшению фазовой составляющей \dot{Z}_{12} от величины 0,4 рад (частоты $f = 100 - 200$ МГц), величины 0,35 рад (частота $f = 800$ МГц) до величины 0 рад (частота $f = 1000$ МГц). По аномальным значениям фазовой составляющей \dot{Z}_{12} определяли границу УВЗ. В случае расположения обеих точек измерения фазы вне УВЗ наблюдаются отличия фазы с наличием как отрицательных, так и положительных разностей фаз. В ситуации расположения обеих точек измерения фазы над УВЗ наблюдаются отличия фазы в 2 каналах измерения с максимумом 0,3 рад (частоты $f = 500, 600$ МГц).



1 – обе точки вне УВЗ, 2 – одна точка над УВЗ, вторая точка вне УВЗ, 3 – обе точки над УВЗ

Рисунок 6. – Экспериментальные зависимости фазовой составляющей \dot{Z}_{12} для Геологического месторождения

Данные исследования могут быть скорректированы с учетом данных по современной геодинамике и нефтегазоносности, экспериментальных исследований динамики смещений в разломных зонах, оценки влияния разломов на геологические особенности залежей и продуктивность коллекторов газовых месторождений, тепловой аэрокосмической съемки, геотермических критериев нефтегазоносности недр, особенностей исследования чувствительности морских данных CSEM для мониторинга продуктивности пласта [15].

Результаты исследований могут быть использованы при разработке радиотехнических систем для оптимизации методов поиска и оконтуривания залежей нефти и газа.

Заключение. Проведенный анализ ЭММ при распространении электро-магнитных волн в среде над углеводородами показал следующее:

- предложен метод регистрации границ углеводородных залежей, основанный на использовании фазовых методов поиска и идентификации углеводородных залежей в режиме амплитудно-модулированных сигналов на несущих частотах $0,1 \dots 1$ ГГц с частотами модуляции $F = 10 \dots 100$ МГц и коэффициентами амплитудной модуляции в диапазоне $0,2 \dots 0,9$;
- достигнуто повышение разрешающей способности определения местоположения залежей за счет измерения двух составляющих поверхностного импеданса;
- обеспечивается повышение производительности геологоразведочных работ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Moskvichew V. N. Interraction of electromagnetic waves (EMW) with anisotropic inclusion in communication line // 9th Microw. Conf. NICON – 91, Rydzyna, May 20–22, 1991. – Vol. 1. – P. 240–244.
2. Yanushkevich V. F., Dauhiala D. A., Adamovich A. L. et al. Effect of a powerful low-frequency signal on an anisotropic medium over hydrocarbon // J. Phys.: Conf. Ser. – 2021. – Vol. 1889. – DOI: [10.1088/1742-6596/1889/2/022059](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1889/2/022059).
3. Yanushkevich V. F., Dauhiala D. A., Adamovich A. L. et al. Interaction of two-frequency electromagnetic waves with anisotropic media over hydrocarbon accumulation // J. Phys.: Conf. Ser. – 2022. – Vol. 2373. – DOI: [10.1088/1742-6596/2373/5/052016](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2373/5/052016).
4. Сейсмические методы при разведке полезных ископаемых и планировании горных работ – Введение / А. Малехмир [и др.] // Геофизика. – 2012. – DOI: [10.1190/2012-0724-SPSEIN.1](https://doi.org/10.1190/2012-0724-SPSEIN.1).
5. Янушкевич, В. Ф. Электромагнитные методы поиска и идентификации углеводородных залежей / В. Ф. Янушкевич. – Новополоцк: ПГУ, 2017. – 232 с.
6. Yanushkevich V. F., Dauhiala D. A., Maladzechkina T. V. et al. Characteristics of anisotropic media over hydrocarbons in the mode of frequency-modulated signals. // J. Phys.: Conf. Ser. – 2022. – Vol. 2373. – DOI: [10.1088/1742-6596/2373/5/052026](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2373/5/052026).
7. Шайдуллин Р. Р., Воронков С. Е. Поиск перспективных на углеводороды объектов с использованием методов ГИС на примере отложений Саргаевского горизонта // Междунар. журн. гуманитарных и естественных наук. – 2022. – № 4-1 (67). – P. 66–73. – DOI: [10.24412/2500-1000-2022-4-1-66-73](https://doi.org/10.24412/2500-1000-2022-4-1-66-73).
8. Geldmacher I., Strack K. A Fit-for-purpose electromagnetic System for Reservoir Monitoring and Geothermal Exploration // GRC Transactions. – 2017. – Vol. 41. – P. 1649–1658.
9. Косков В. Н. Геофизические исследования скважин: учеб. пособие. – Пермь: Перм. гос. техн. ун-т. – 2004. – 122 с.
10. Гололобов Д. В. Взаимодействие электромагнитных волн и углеводородных залежей. – Минск: Бестпринт, 2009. – 185 с.
11. Henke C. H., Krieger M., Strack K. et al. Subsalt imaging in Northern Germany using multi-physics (magnetotellurics, gravity, and seismic). // Interpretatio. – 2020. – Vol. 8., iss. 4. – P. 15–24.
12. Helwig S. L., Wood W., Gloux B. Vertical-vertical controlled-source electromagnetic instrumentation and acquisition // Geophysical Prospecting. – 2019. – Vol. 67, iss. 6. – P. 1582–1594. – DOI: [10.1111/1365-2478.12771](https://doi.org/10.1111/1365-2478.12771).
13. Гололобов, Д. В. Радиокомплексирование методов электромагнитной разведки при поиске залежей углеводородов / Д. В. Гололобов // Доклады БГУИР. – 2008. – № 8(38). – С. 30–36.
14. Барышников, И. А. Многопараметровая аэроаэрозондировка методом СДВР при аэрогеофизических исследованиях на нефтяных объектах Татарии / И. А. Барышников, А. Ю. Татарский // Электромагнитные исследования с контролируемые источниками : тез. докл. междунар. геофиз. конф., СПб., 24–31 мая 1996 г. / ВИРГ – Рудгеофизика ; редкол.: А. А. Петров [и др.]. – СПб., 1996. – С. 39–40.
15. Anderson C., Mattsson J. An integrated approach to marine electromagnetic surveying using a towed streamer and source // First Break. – 2010. – Vol. 28, iss. 5. – P. 71–75.
16. Гололобов Д. В., Янушкевич В. Ф., Калинин С. В. Импедансные граничные условия анизотропной среды для амплитудно-модулированного сигнала // Доклады БГУИР. – 2010. – № 6(52). – С. 13–17.
17. Гололобов Д. В., Орлова О. В., Янушкевич В. Ф. Влияние параметров амплитудно-модулированного воздействия на фазовые составляющие поверхностного импеданса анизотропной среды плазмopodobного типа // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – Новополоцк, 2010. – № 9. – С. 98–101.

REFERENCES

1. Moskvichew, V. N. (1991). Interraction of electromagnetic waves (EMW) with anisotropic inclusion in communication line, *9th Microw. Conf. NICON – 91: Vol. 1*, (240–244). Rydzyna.
2. Yanushkevich, V. F., Dauhiala, D. A., Adamovich, A. L., Abramanka, S. N., & Bogush, V. A. (2021). Effect of a powerful low-frequency signal on an anisotropic medium over hydrocarbon. *J. Phys.: Conf. Ser.*, (1889). DOI: [10.1088/1742-6596/1889/2/022059](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1889/2/022059).
3. Yanushkevich, V. F., Dauhiala, D. A., Adamovich, A. L., Abramanka, S. N., & Kalintsau, S. V. (2022). Interaction of two-frequency electromagnetic waves with anisotropic media over hydrocarbon accumulation. *J. Phys.: Conf. Ser.*, (2373). DOI: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2373/5/052016>.
4. Malekhmir, A., Urosevich, M., Bellefler, G., Dzhukhlin C., & Milkerait, B. (2012). Seismicheskie metody pri razvedke poleznykh iskopaemykh i planirovanii gornyykh rabot – Vvedenie [Seismic methods in mineral exploration and mine planning]. *Geofizika*. DOI: [10.1190/2012-0724-SPSEIN.1](https://doi.org/10.1190/2012-0724-SPSEIN.1).

5. Yanushkevich, V. F. (2017). *Elektromagnitnye metody poiska i identifikatsii uglevodorodnykh zalezhei [Electromagnetic methods for searching and identifying hydrocarbon deposits]*. Novopolotsk: PGU. (In Russ.).
6. Yanushkevich, V. F., Dauhiala, D. A., Maladzechkina, T. V., Kalintsau, S. V., & Bogush, V. A. (2022). Characteristics of anisotropic media over hydrocarbons in the mode of frequency-modulated signals. *J. Phys.: Conf. Ser.*, (2373). DOI: [10.1088/1742-6596/2373/5/052026](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2373/5/052026).
7. Shaidullin, R. R., & Voronkov, S. E. (2022). Poisk perspektivnykh na uglevodorody ob"ektov s ispol'zovaniem metodov GIS na primere otlozhenii Sargaevskogo gorizonta [Search for objects promising for hydrocarbons using well logging methods on the example of deposits of the Sargaev horizon]. *Mezhdunarodnyi zhurnal gumanitarnykh i estestvennykh nauk [International J. of Humanities and Natural Sciences]*, 4-1(67), 66–73. DOI: [10.24412/2500-1000-2022-4-1-66-73](https://doi.org/10.24412/2500-1000-2022-4-1-66-73).
8. Geldmacher, I., & Strack, K. (2017). A Fit-for-purpose electromagnetic System for Reservoir Monitoring and Geothermal Exploration. *GRC Transactions*, (41), 1649–1658.
9. Koskov, V. N. (2004). *Geofizicheskie issledovaniya skvazhin*. Perm: Perm. gos. tekhn. un-t. (In Russ.).
10. Gololobov, D. V. (2009). *Vzaimodeistvie elektromagnitnykh voln i uglevodorodnykh zalezhei*. Minsk: Bestprint. (In Russ.).
11. Henke, C. H., Krieger, M., Strack, K., & Zerilli, A. (2020). Subsalt imaging in Northern Germany using multi-physics (magnetotellurics, gravity, and seismic). *Interpretatio*, 8(4), 15–24.
12. Helwig, S. L., Wood, W., & Gloux B. (2019). Vertical-vertical controlled-source electromagnetic instrumentation and acquisition. *Geophysical Prospecting*, 67(6), 1582–1594. DOI: [10.1111/1365-2478.12771](https://doi.org/10.1111/1365-2478.12771).
13. Gololobov, D. V. (2008). Radiokompleksirovanie metodov elektromagnitnoi razvedki pri poiske zalezhei uglevodorodov [Radiocomplexation of the electromagnetic geological methods for exploration of hydrocarbon objects]. *Doklady BGUIR*, 8(38), 30–36. (In Russ., abstr. in Engl.).
14. Baryshnikov, I. A., & Tatarskii, A. Yu. (1996). Mnogoparametrovaya aerorazvedka metodom SDVR pri aerogeofizicheskikh issledovaniyakh na neftyanykh ob"ektakh Tatarii [Multi-parameter aerial survey using the SDVR method in airborne geophysical studies at oil facilities in Tataria]. In A. A. Petrov [et al.] (Eds.) *Elektromagnitnye issledovaniya s kontroli-ruemyimi istochnikami [Electromagnetic research with controlled sources]* (39–40). St. Petersburg: VIRG – Rudgeo-fizika. (In Russ.).
15. Anderson, C., & Mattsson, J. (2010). An integrated approach to marine electromagnetic surveying using a towed streamer and source. *First Break*, 28(5), 71–75.
16. Gololobov, D. V., Yanushkevich, V. F., & Kalintsev, S. V. (2010). Impedansnye granichnye usloviya anizotropnoi sredy dlya amplitudno-modulirovannogo signala [Impedance boundary conditions for the environment above the hydrocarbon deposits in the amplitude-modulated signal mode]. *Doklady BGUIR*, 6(52), 13–17. (In Russ., abstr. in Engl.).
17. Gololobov, D. V., Orlova, O. V., & Yanushkevich, V. F. (2010). Vliyanie parametrov amplitudno-modulirovannogo vozdeistviya na fazovye sostavlyayushchie poverkhnostnogo impedansa anizotropnoi sredy plazmopodobnogo tipa [Influence of the amplitude-modulated effect parameters on the phase components of the surface impedance of an anisotropic plasma-like medium]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (9), 98–101. (In Russ., abstr. in Engl.).

Послупила 23.02.2023

APPLICATION OF PHASE METHODS TO SEARCH FOR HYDROCARBONS BASED ON AMPLITUDE-MODULATED SIGNALS

V. YANUSHKEVICH
(*Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk*)

The characteristics of an anisotropic medium over hydrocarbons are studied using phase methods based on amplitude-modulated signals. Experimental studies of the phase characteristics of the surface impedance in the mode of amplitude-modulated signals have been carried out. Two components of the surface impedance are analyzed for this mode. A study was made of the influence of probing signal modes on the characteristics of an anisotropic medium over deposits based on a two-channel measurement scheme. A method for registering the boundaries of hydrocarbon deposits is proposed, based on the use of phase methods for searching and identifying hydrocarbon deposits (HCW) in the mode of amplitude-modulated signals. The research results can be used in the development of radio engineering systems for searching and delineating oil and gas deposits and their application for exploration geophysics.

Keywords: *anisotropic environment, hydrocarbon reservoir, amplitude-modulated signal.*

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

DOI 10.52928/2070-1624-2023-40-1-72-83

О КРИТЕРИИ ГЛАДКОСТИ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО
МОДЕЛЬНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ В ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ*д-р физ.-мат. наук, проф. Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ*
(Белорусский государственный университет, Минск)

Предложено новое доказательство критерия гладкости на f классического решения F уравнения $u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) - a^{-1}(x,t)a_t(x,t)u_t(x,t) - a(x,t)a_x(x,t)u_x(x,t) = f(x,t)$, $(x,t) \in \dot{G}_\infty =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Критерий состоит из необходимых и достаточных требований ограниченной непрерывности f и непрерывной дифференцируемости двух интегралов от f на G_∞ . Необходимость непрерывности и ограниченности f следует из этого уравнения, которому удовлетворяет F на G_∞ . Эти два интеграла непрерывно и ограниченно дифференцируемы как производные от $F \in C^2(G_\infty)$ вдоль характеристик уравнения. Отсюда вытекает их достаточность для $F \in C^2(G_\infty)$. Если f зависит лишь от x или t , то f непрерывна и ограничена по x или t . Построен общий интеграл модельного телеграфного уравнения.

Ключевые слова: модельное телеграфное уравнение, одна переменная скорость, неявные характеристики, классическое решение, критерий гладкости, общий интеграл.

Введение. В настоящей статье предложен простой вывод (без метода корректировки) критерия (необходимых и достаточных условий) гладкости правой части неоднородного модельного телеграфного уравнения с одной переменной скоростью $a(x,t)$ для его явного классического решения F в первой четверти плоскости. Более простое доказательство критерия гладкости, чем в работах [1; 2], возможно только благодаря простейшему виду волнового уравнения, так как в случае одной как постоянной $a_1 = a_2 = a$, так и переменной скорости $a_1(x,t) = a_2(x,t) = a(x,t)$ эта функция F является дважды непрерывно дифференцируемой в первой четверти плоскости и поэтому не требует корректировки (замечание 2). В работах [3; 4] показана не дважды непрерывная дифференцируемость функции типа F в первой четверти плоскости для волнового уравнения $u_{tt} + (a_1 - a_2)u_{xt} - a_1a_2u_{xx} = f(x,t)$ с разными скоростями $a_1 \neq a_2$, и, следовательно, обобщённое решение F требует корректировки обобщёнными решениями до классических решений этого уравнения в первой четверти плоскости. Нужны корректировки и некоторых классических решений для построения новых классических решений. Основы метода корректировки пробных решений лежат в критическом анализе учебников (замечание 3).

Итак, в настоящей статье без метода корректировки доказан критерий гладкости на правую часть f модельного телеграфного уравнения, при котором функция F дважды непрерывно дифференцируема и поточечно удовлетворяет этому уравнению в первой четверти плоскости. Поэтому производные от F вдоль двух семейств неявных характеристик данного уравнения представляют необходимые интегральные требования гладкости (8) на правую часть f уравнения (1). Достаточность интегральных требований гладкости (8) на f устанавливается дифференцированием функции F . Справедливость модельного телеграфного уравнения (1) для F в первой четверти плоскости выводится предельным переходом по f с непрерывно дифференцируемых правых частей f на непрерывные f со свойствами (8). С помощью этого обоснованного классического решения F неоднородного модельного телеграфного уравнения построен его общий интеграл в первой четверти плоскости для решения смешанных (начально-граничных) задач. В статье автора [5] исследуемая формула его классического решения во всей первой четверти плоскости использовалась при решении первой смешанной задачи для модельного телеграфного уравнения без продолжений исходных данных. В ней модельное телеграфное уравнение позаимствовано из диссертации¹, где решалась первая смешанная задача методом продолжений исходных данных. В указанной диссертации первая смешанная

¹ Барановская С. Н. О классическом решении первой смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Минск, 1991. – 59 с.

задача в полуплоскости плоскости за счёт периодических продолжений коэффициентов и входных данных на верхнюю полуплоскость сведена к задаче Коши и формуле Даламбера, которые в [5] естественно отсутствуют на $G_+ \subset G_\infty$ при не продолжении данных.

Более сложным смешанным задачам для волновых уравнений с разными постоянными коэффициентами $a_1 \neq a_2$ посвящены работы Новикова Е. Н.² и Устилко Е. В. [6] соответственно с нехарактеристическими и характеристическими первыми косыми производными, Лысенко В. В. [7] и Спесивцевой К. А. [8] соответственно с нехарактеристическими и характеристическими вторыми частными производными в нестационарных граничных условиях. В них найдены явные классические решения и критерии корректности этих смешанных задач. В случае нехарактеристических первых и вторых частных производных в граничных условиях требования гладкости и условия согласования не меняются при неограниченном росте времени колебаний. В случае же характеристических этих производных в граничных условиях выше требования гладкости и больше условий согласования исходных данных смешанных задач и они неограниченно растут вместе с ростом времени колебаний. В последних работах требуются критерии гладкости правой части общих волновых уравнений с $a_1 \neq a_2$ для уже скорректированных решений из множеств решений произвольных целых порядков гладкости.

Смешанные задачи для модельного телеграфного уравнения и более общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами нельзя решить методом Фурье, так как эти уравнения не допускают разделения переменных x и t . В статьях [9–11] для волнового уравнения найдены формула и необходимые и достаточные условия на начальные данные для обобщенного (почти классического) решения смешанной задачи. Это решение удовлетворяет волновому уравнению почти всюду по x и t . В [12] секвенциальным и аксиоматическим методами А. П. Хромова из этих работ И. С. Ломовым получено обобщенное решение в виде быстро сходящегося ряда Фурье смешанной задачи для простейшего телеграфного уравнения с потенциалом $q(x,t)$, мажорирующимся функцией $q_0(x) \in L_1(0,1)$, при нелокальном граничном условии на отрезке $[0,1]$. Эти методы используют резольвентный метод, идеи А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье и Л. Эйлера о расходящихся рядах и аксиоматику.

1. Модельное телеграфное уравнение. В первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ ищется классическое решение $F(x,t)$ с минимальной гладкостью правой части $f(x,t)$ уравнения

$$u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) - a^{-1}(x,t)a_t(x,t)u_t(x,t) - a(x,t)a_x(x,t)u_x(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \dot{G}_\infty, \quad (1)$$

где f – заданная вещественная функция переменных x и t , коэффициент $a(x,t) \geq a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, и $a \in C^2(G_\infty)$. Мы обозначаем числом нижних индексов функций соответствующие порядки их частных производных. Пусть $C^k(\Omega)$ – множество функций с непрерывными ограниченными производными до порядка k включительно на подмножестве $\Omega \subset R^2$ и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ – множество непрерывных ограниченных функций на $\Omega \subset R^2$, $R =]-\infty, +\infty[$.

Общеизвестно, что уравнению (1) соответствуют характеристические уравнения

$$dx = (-1)^i a(x,t)dt, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

которые имеют общие интегралы характеристик уравнения (1)

$$g_1(x,t) = C_1, \quad g_2(x,t) = C_2, \quad C_1, C_2 \in R. \quad (3)$$

Если коэффициент a строго положителен, т. е. $a(x,t) \geq a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, то в плоскости Oxt переменная t на характеристиках $g_1(x,t) = C_1, C_1 \in R$, строго убывает и на характеристиках $g_2(x,t) = C_2, C_2 \in R$, строго возрастает вместе с ростом x . Поэтому неявные функции $y_i = g_i(x,t) = C_i, x \geq 0, t \geq 0$, имеют строго монотонные обратные функции $x = h_i\{y_i, t\}, t \geq 0, t = h^{(i)}[x, y_i], x \geq 0, i = 1, 2$. По определению обратных отображений они удовлетворяют на G_∞ следующим тождествам обращения [5]:

$$g_i(h_i\{y_i, t\}, t) = y_i, \quad \forall y_i, \quad h_i\{g_i(x, t), t\} = x, \quad x \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

² Новиков Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Минск, 2017. – 258 л.

$$g_i(x, h^{(i)}[x, y_i]) = y_i, \quad \forall y_i, \quad h^{(i)}[x, g_i(x, t)] = t, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

$$h_i\{y_i, h^{(i)}[x, y_i]\} = x, \quad x \geq 0, \quad h^{(i)}[h_i\{y_i, t\}, y_i] = t, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

В правых частях тождеств (4)–(6) вместе с взаимнообратными функциями исключаются переменные, повторяющиеся дважды в левых частях, если даже в левых частях этих тождеств повторяется дважды лишь одно из возможных значений этих переменных. Если в уравнении коэффициент $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$, то непрерывные ограниченные функции g_i , h_i , $h^{(i)}$ имеют непрерывные ограниченные первые и вторые частные производные по x, t, y_i , $i = 1, 2$, на G_∞ [5].

Определение 1. Функция $u = u(x, t)$ называется классическим решением уравнения (1) на множестве $\Omega \cap \dot{G}_\infty$, если она ограничена на $\Omega \cap \dot{G}_\infty$, имеет ограниченные производные гладкости $u \in C^2(\Omega)$ и удовлетворяет этому уравнению в обычном смысле для каждого $(x, t) \in \Omega \cap \dot{G}_\infty$.

Замечание 1. В случае $a(x, t) = a = \text{const} > 0$ характеристиками (3) являются функции: $g_1(x, t) = x + at$, $g_2(x, t) = x - at$, $h_1\{y_1, t\} = y_1 - at$, $h_2\{y_2, t\} = y_2 + at$, $h^{(1)}[x, y_1] = (y_1 - x)/a$, $h^{(2)}[x, y_2] = (x - y_2)/a$ в диссертации³. Важно отметить, что в указанной диссертации получены критерий корректности и явные формулы единственного и устойчивого классического решения с F из (7) при $a(x, t) = \text{const} > 0$ смешанной задачи при нехарактеристических первых косых производных граничных условий в первой четверти плоскости G_∞ без явных продолжений исходных данных задачи вне G_∞ .

Ниже указано классическое решение уравнения (1) на \dot{G}_∞ и критерий (необходимые и достаточные условия) гладкости на f в G_∞ . Благодаря модулю $|s|$ под интегралом (7) функции $a(|s|, \tau)$ характеристики (3) неявно продолжаются чётно по x с G_∞ на всю верхнюю полуплоскость.

2. Критерий гладкости классического решения неоднородного модельного телеграфного уравнения. Классические решения этого волнового уравнения можно вычислять методом корректировки его пробных решений из [3]. Не используя метод корректировки, одно из классических решений неоднородного модельного телеграфного уравнения с критерием гладкости его правой части даёт

Теорема 1. Пусть коэффициент $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$. Функция

$$F(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{f(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)} ds d\tau \quad (7)$$

является классическим решением неоднородного уравнения (1) в G_∞ тогда и только тогда, когда его правая часть $f \in C(G_\infty)$ и

$$H_i(x, t) \equiv \int_0^t \frac{f(|h_i\{g_i(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_i\{g_i(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), \tau\}}{\partial g_i} d\tau \in C^1(G_\infty), \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $f \in C(G_\infty)$ и $H_i \in C^1(G_\infty)$, $i = 1, 2$. Тогда по формулам производных от интеграла с переменными пределами интегрирования и сложной функции для функции $f \in C(G_\infty)$ интеграл F вида (7) имеет на G_∞ непрерывные ограниченные первые производные

$$\begin{aligned} F_t &= \frac{1}{2} \int_0^t \left[\frac{f(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial t} - \frac{f(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial t} \right] d\tau = \\ &= (g_1(x, t))_t \frac{1}{2} \int_0^t \frac{f(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial g_1} d\tau - \end{aligned}$$

³ Новиков Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Минск, 2017. – 258 л.

$$-(g_2(x,t))_t \frac{1}{2} \int_0^t \frac{f(|h_2\{g_2(x,t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial g_2} d\tau \in C(G_\infty), \tag{9}$$

$$F_x = \frac{1}{2} \int_0^t \left[\frac{f(|h_1\{g_1(x,t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial x} - \frac{f(|h_2\{g_2(x,t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial x} \right] d\tau =$$

$$= (g_1(x,t))_x \frac{1}{2} \int_0^t \frac{f(|h_1\{g_1(x,t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial g_1} d\tau -$$

$$-(g_2(x,t))_x \frac{1}{2} \int_0^t \frac{f(|h_2\{g_2(x,t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial g_2} d\tau \in C(G_\infty) \tag{10}$$

в силу вторых тождеств обращения из (4) при $i = 1, 2$.

Из равенств (9), (10) и интегральных требований гладкости (8) на G_∞ вытекает, что интеграл F вида (7), очевидно, обладает непрерывными ограниченными вторыми частными производными на G_∞ , т. е. $F \in C^2(G_\infty)$, и без явных чётных продолжений функций f и a по x с $x \geq 0$ на $x < 0$, так как на G_∞ дважды непрерывно дифференцируемы функции $g_i \in C^2(G_\infty)$, $i = 1, 2$.

Остаётся проверить, что если функция f зависит от x и t , то функция $F \in C^2(G_\infty)$ вида (7) удовлетворяет поточечно уравнению (1) на \dot{G}_∞ (см. следствие 1). Сначала покажем, что непрерывно и ограничено дифференцируемые правые части $f \in C^1(G_\infty)$ удовлетворяют требованиям гладкости (8). Заменаи $s_i = h_i\{g_i(x,t), \tau\}$ переменной интегрирования τ интегралы из (8) приводятся к интегралам

$$H_i(x,t) = \int_0^t \frac{f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i} d\tau =$$

$$= \int_{h_i\{g_i(x,t), 0\}}^x \left[\frac{f(|s_i|, \tau)}{a(|s_i|, \tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i} \left(\frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial \tau} \right)^{-1} \right]_{\tau=h^{(i)}[s_i, g_i(x,t)]} ds_i \in C^1(G_\infty), i = 1, 2, \tag{11}$$

которые для $f \in C^1(G_\infty)$ непрерывно и ограничено дифференцируемы по x и t на G_∞ , потому что в интегралах (11) под модулем $|s_i|$ переменной интегрирования s_i явно отсутствуют x и t . В противном случае модуль дал бы разрыв первых производных от (11). Здесь мы применили вторые тождества обращения из (4) и равенства $\tau = h^{(i)}[s_i, g_i(x,t)]$, $i = 1, 2$, ввиду вторых тождеств обращения из (6).

Известно, что для любых непрерывно и ограничено дифференцируемых функций $f \in C^1(G_\infty)$ интеграл F вида (7) дважды непрерывно дифференцируем и удовлетворяет поточечно уравнению (1) на \dot{G}_∞ ⁴ [5]. В этом также можно убедиться подстановкой функции (7) в уравнение (1). Поэтому модельное телеграфное уравнение (1) предельным переходом по f распространяется с функций $f \in C^1(G_\infty)$ на функции $f \in C(G_\infty)$ со свойствами (8) в норме соответствующего банахова пространства из [5].

Необходимость. Если интеграл F вида (7) – классическое решение уравнения (1) на G_∞ , то из определения 1 имеем, что $F \in C^2(G_\infty)$ и, в силу поточечной справедливости уравнения (1) на G_∞ , его правая часть непрерывна и ограничена $f \in C(G_\infty)$. Теперь для выявления дополнительных необходимых (обязательных) требований гладкости (8) на правую часть f к уже установленной непрерывности и ограниченности $f \in C(G_\infty)$ вычисляем производную от F из (7) вдоль характеристик $g_i(x,t) = C_i$ из (3), т. е.

⁴ Новиков Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Минск, 2017. – 258 л.

вдоль векторов $\vec{\sigma}_i = \{(g_i)_t, -(g_i)_x\}$, $i = 1, 2$. Ортогональные к ним векторы градиентов $\overline{\text{grad}} g_i(x, t) = \{(g_i)_x, (g_i)_t\}$, $i = 1, 2$, направлены вдоль нормалей к этим характеристикам, так как их скалярное произведение равно $(\overline{\text{grad}} g_i(x, t), \vec{\sigma}_i) = (g_i)_x(g_i)_t - (g_i)_t(g_i)_x = 0$, $(x, t) \in G_\infty$.

Ввиду (9) и (10) производные вдоль характеристик (3) от дважды непрерывно и ограниченно дифференцируемой функции $F \in C^2(G_\infty)$ являются непрерывно и ограниченно дифференцируемыми:

$$\begin{aligned} (g_1)_t F_x - (g_1)_x F_t &= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{f(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)} \left[(g_1)_x \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial t} - (g_1)_t \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial x} \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{2} J(x, t) \int_0^t \frac{f(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial g_2} d\tau \in C^1(G_+), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (g_2)_t F_x - (g_2)_x F_t &= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{f(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)} \left[(g_2)_t \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial x} - (g_2)_x \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial t} \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{2} J(x, t) \int_0^t \frac{f(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial g_1} d\tau \in C^1(G_+), \end{aligned} \quad (13)$$

так как для частных производных от функций $h_i = h_i\{g_i(x, t), \tau\}$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} (g_i)_x \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), \tau\}}{\partial t} - (g_i)_t \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), \tau\}}{\partial x} &= \\ = (g_i)_x \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), \tau\}}{\partial g_i} (g_i)_t - (g_i)_t \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), \tau\}}{\partial g_i} (g_i)_x &\equiv 0, \quad i = 1, 2. \\ (g_1)_x \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial t} - (g_1)_t \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial x} &= \\ = [(g_1)_x (g_2)_t - (g_1)_t (g_2)_x] \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial g_2} = J(x, t) \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial g_2}, \\ (g_2)_t \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial x} - (g_2)_x \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial t} &= \\ = [(g_1)_x (g_2)_t - (g_1)_t (g_2)_x] \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial g_1} = J(x, t) \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial g_1}. \end{aligned}$$

Из равенств (12), (13) следует справедливость включений (8), так как замена переменных

$$\xi = g_1(x, t), \quad \eta = g_2(x, t) \quad (14)$$

имеет невырожденный, непрерывно и ограниченно дифференцируемый якобиан $J(x, t) = \xi_x \eta_t - \xi_t \eta_x \neq 0$ в G_∞ и $J \in C^1(G_\infty)$, так как коэффициент $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, и $a \in C^2(G_\infty)$. Действительно, из равенств (12) и (13) следует необходимость (обязательность) требований гладкости (8):

$$H_1(x, t) = 2[(g_2)_t F_x(x, t) - (g_2)_x F_t(x, t)] / J(x, t) \in C^1(G_\infty),$$

$$H_2(x, t) = 2[(g_1)_t F_x(x, t) - (g_1)_x F_t(x, t)] / J(x, t) \in C^1(G_\infty).$$

Необходимость интегральных требований гладкости (8) установлена. Теорема 1 доказана.

Замечание 2. В работах [1; 2] выполнение уравнения (1) на \dot{G}_∞ для интеграла $F \in C^2(G_\infty)$ вида (7) также подтверждает подстановка функции $F \in C^2(G_\infty)$ в канонический вид

$$\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \tilde{f}(\xi, \eta) / [2a(x, t)J(x, t)], \quad (\xi, \eta) \in \tilde{G}_\infty, \tag{15}$$

уравнения (1) после невырожденной и дважды непрерывно дифференцируемой замены переменных (14) с помощью (2). В правой части уравнения (15) функция $\tilde{f}(\xi, \eta) = f(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$ и в его левой части функция $\tilde{u}(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$ на образе \tilde{G}_∞ первой четверти плоскости G_∞ при замене (14). Каждое дважды непрерывно дифференцируемое по переменным (x, t) решение $u(x, t)$ уравнения (1) на \dot{G}_∞ в результате замены (14) будет дважды непрерывно дифференцируемым по переменным (ξ, η) решением $\tilde{u}(\xi, \eta)$ уравнения (15) на \tilde{G}_∞ и наоборот. Но не все классические (непрерывно дифференцируемые с непрерывной смешанной производной) по новым переменным (ξ, η) решения уравнения (15) на \tilde{G}_∞ после обратной замены к (14) становятся классическими (дважды непрерывно дифференцируемыми) по переменным (x, t) решениями уравнения (1) на \dot{G}_∞ . Поэтому только дважды непрерывно и ограниченно дифференцируемые решения уравнения (15) будут классическими решениями уравнения (1) после обратной замены к (14). Дважды непрерывная и ограниченная дифференцируемость функции F вида (7) на G_∞ доказана в [1; 2] обобщением метода корректировки и непосредственным дифференцированием по новым переменным (ξ, η) функции \tilde{F} , полученной заменой переменных (14) из F .

Следствие 1. Пусть коэффициент $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$. Если правая часть f уравнения (1) не зависит от x или t в G_∞ , то для того, чтобы функция F из (7) являлась классическим решением неоднородного уравнения (1) в G_∞ , необходимо и достаточно непрерывности и ограниченности f соответственно по t или x .

Доказательство. Достаточность непрерывности и ограниченности $f \in C[0, +\infty[$ по x или t объясняется тем, что в случае зависимости правой части f уравнения (1) только от x или t на G_∞ интегральные требования гладкости (8) всегда выполняются.

Если правая часть $f = f(x)$ не зависит от t , то функция F из (7) приобретает вид

$$F(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{f(|s|)}{a(|s|, \tau)} ds d\tau. \tag{16}$$

Согласно доказательству достаточности теоремы 1 для справедливости требований гладкости (8) для (16) нам достаточно обосновать включение $F \in C^2(G_\infty)$. Проверим, что $F \in C^2(G_\infty)$ для $f \in C[0, +\infty[$. Первая частная производная по t от (16) равна функции

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^t \left[\frac{f(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|)}{a(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial t} - \frac{f(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|)}{a(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial t} \right] d\tau,$$

в которой мы применили вторые тождества обращения из (4). Когда мы здесь перейдем к новым переменным интегрирования $y = h_1\{g_1(x, t), \tau\}$, $z = h_2\{g_2(x, t), \tau\}$, тогда мы получим уже очевидное непрерывно и ограниченно дифференцируемое на G_∞ представление этой производной

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \int_{h_1\{g_1(x, t), 0\}}^x \left[\frac{f(|y|)}{a(|y|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial t} \left(\frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial \tau} \right)^{-1} \right]_{\tau=h^{(1)}[y, g_1(x, t)]} dy - \\ &- \frac{1}{2} \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^x \left[\frac{f(|z|)}{a(|z|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial t} \left(\frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial \tau} \right)^{-1} \right]_{\tau=h^{(2)}[z, g_2(x, t)]} dz \in C^1(G_\infty), \end{aligned}$$

в котором мы воспользовались вторыми тождествами обращения из (4) и тождествами $\tau = h^{(1)}[y, g_1(x, t)]$, $\tau = h^{(2)}[z, g_2(x, t)]$ благодаря вторым тождествам обращения из (6). В последних интегралах под модулями $|y|$ и $|z|$ явно нет переменных x и t , иначе модули дали бы разрыв производных от $\partial F / \partial t$.

Для всех $f \in C[0, +\infty[$ первой частной производной по x от (16) является функция

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{2} \int_0^t \left[\frac{f(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|)}{a(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial x} - \frac{f(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|)}{a(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial x} \right] d\tau,$$

в которой мы использовали вторые тождества обращения из (4). После перехода к новым переменным интегрирования $y = h_1\{g_1(x, t), \tau\}$, $z = h_2\{g_2(x, t), \tau\}$ эта частная производная приобретает очевидное для $f \in C[0, +\infty[$ непрерывно и ограниченно дифференцируемое на G_∞ представление

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} &= \frac{1}{2} \int_{h_1\{g_1(x, t), 0\}}^x \left[\frac{f(|y|)}{a(|y|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial x} \left(\frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial \tau} \right)^{-1} \right]_{\tau=h^{(1)}[y, g_1(x, t)]} dy - \\ &- \frac{1}{2} \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^x \left[\frac{f(|z|)}{a(|z|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial x} \left(\frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial \tau} \right)^{-1} \right]_{\tau=h^{(2)}[z, g_2(x, t)]} dz \in C^1(G_\infty), \end{aligned}$$

где мы применили те же самые тождества, что и для частной производной по t от F .

Если правая часть $f = f(t)$ не зависит от x , то функция F из (7) принимает вид

$$F(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{f(\tau)}{a(|s|, \tau)} ds d\tau. \quad (17)$$

Проверим дважды непрерывную и ограниченную дифференцируемость функции (17) для $f \in C[0, +\infty[$. Ввиду вторых тождеств обращения из (4) для всех $f \in C[0, +\infty[$ все её первые частные производные непрерывно и ограниченно дифференцируемы на G_∞ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \int_0^t \left[\frac{f(\tau)}{a(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial t} - \frac{f(\tau)}{a(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial t} \right] d\tau \in C^1(G_\infty), \\ \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} &= \frac{1}{2} \int_0^t \left[\frac{f(\tau)}{a(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial x} - \frac{f(\tau)}{a(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial x} \right] d\tau \in C^1(G_\infty), \end{aligned}$$

если здесь так же, как и выше, воспользоваться заменами переменной интегрирования $y = h_1\{g_1(x, t), \tau\}$, $z = h_2\{g_2(x, t), \tau\}$. Отсюда мы имеем $F \in C^2(G_\infty)$.

Итак, достаточность гладкости и ограниченности $f \in C[0, +\infty[$ по x или t для $F \in C^2(G_+)$ проверена. Факт выполнения уравнения (1) поточечно на \dot{G}_∞ для функции F вида (7) с непрерывной, ограниченной и зависящей только от x или t правой частью $f \in C[0, +\infty[$ вытекает из теоремы 1.

Необходимость непрерывности и ограниченности $f \in C[0, +\infty[$ по t или x следствия 1 строго обоснована в доказательстве теоремы 1 с помощью уравнения (1). Доказательство следствия 1 завершено.

Замечание 3. Интеграл F в (7) содержит модуль $|s|$ точек струны подынтегральных функций f , a . В отличие от значений начальных данных φ и ψ на характеристиках $x \pm at = \pm C$, $C \in \mathbb{R}$, (однородного) уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ аналог нашего частного решения F вида (7) с модулем нижнего предела интегрирования $|x - a(t - \tau)|$ из формулы (31) в [13, с. 83] неоднородного уравнения не имеет точно такой же интерпретации: общее решение этого однородного уравнения – суперпозиция (арифметическая сумма) двух встречных волн. Для функций $f \in C^1(G_\infty)$ и даже менее гладких в теореме 1 наш интеграл F из (7)

дважды непрерывно дифференцируем в первой четверти плоскости G_∞ , а даже для более гладких функций f вторые производные от этого аналога F из формулы (31) в [13] терпят разрывы на $x = at$, и эта функция F является непрерывным кусочно-дифференцируемым решением простейшего уравнения колебаний струны в [13]. Поэтому для этого аналога F из [13] не следует продолжать правую часть f волнового уравнения нечётно по x с $x \geq 0$ на $x < 0$ при решении первой и других смешанных задач на полупрямой. Вообще не надо явно как-то продолжать f вне G_∞ , а неявно её чётно по x продолжает указанный выше модуль. В настоящей статье и в [13] интеграл F вида (7) – интегральная сумма двух встречных волн с одной скоростью a . В учебнике [13, рисунок 19, п. 9, § 2, глава II] двойной интеграл по характеристическому треугольнику ΔMBA с вершиной $M(x,t)$ при $at > x$ равен двойному интегралу по четырёхугольнику $MBA'A$ из-за нечётного продолжения f по x с $x \geq 0$ на $x < 0$. Это искажает реальный процесс колебаний струны, потому что в треугольнике $OA'A$ действует вынуждающая сила с плотностью f , а функция F никак не реагирует на эту силу. Это абсурд, так как треугольник $OA'A$ примыкает к граничному условию при $x = 0$. Таким образом, в [13, с. 83] для классических решений первой смешанной задачи на полупрямой лучше использовать F из (7) при $a(x,t) = a > 0$ и с модулем $f(|s|, \tau)$ под интегралом вместо модуля в нижнем пределе интегрирования. В диссертации⁵ правильность классического решения с F из (7) смешанной задачи на полупрямой при первой косой производной в граничном условии доказана и проверена на компьютере в системе Mathematics.

Следствие 2. Пусть коэффициент $a(x,t) \geq a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$. Если функция f зависит от x и t , то для $f \in C(G_\infty)$ требование принадлежности интегралов из (8) пространству $C^1(G_\infty)$ эквивалентно их принадлежности одному из пространств $C^{(0,1)}(G_\infty)$ или $C^{(1,0)}(G_\infty)$. Здесь $C^{(0,1)}(G_\infty)$, $C^{(1,0)}(G_\infty)$ – соответственно пространства непрерывных, ограниченных по x и t и непрерывно и ограничено дифференцируемых по t и x функций на множестве G_∞ .

Доказательство. Для гладкости (8) с функциями $f \in C(G_\infty)$ необходимость $H_i \in C^{(0,1)}(G_\infty)$, $C^{(0,1)}(G_\infty)$, $i = 1, 2$, очевидна: если в любой точке множества G_∞ функция $H_i \in C(G_\infty)$, $i = 1, 2$, непрерывно и ограничено дифференцируема одновременно по x и t , то в любой точке множества G_∞ она непрерывно дифференцируема по каждой из этих переменных в отдельности.

Достаточность. Пусть $C^{(k,p)}(G_\infty)$ – банаховы пространства функций $f \in C(G_\infty)$, полученных замыканием множества функций $f \in C^1(G_\infty)$, удовлетворяющих гладкости (8) на G_∞ , по нормам

$$\|f\|_{(k,p)} = \sup_{(x,t) \in G_\infty} \left(|f(x,t)| + \sum_{i=1}^2 \sum_{s=0}^k \sum_{j=0}^p \left| \frac{\partial^{s+j} H_i(x,t)}{\partial x^s \partial t^j} \right| \right), \quad 0 \leq k, p \leq 1.$$

Сначала убедимся в равенстве банаховых пространств $C^{(0,1)}(G_\infty) = C^{(1,0)}(G_\infty)$.

Для более гладких ограниченных функций $f \in C^1(G_\infty)$ берём частную производную по t от (11)

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_i(x,t)}{\partial t} &= \frac{f(|h_i\{g_i(x,t), t\}|, t)}{a(|h_i\{g_i(x,t), t\}|, t)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), t\}}{\partial g_i} + \int_0^t \left[\frac{f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i} \right]'_t d\tau = \\ &= \frac{f(x,t)}{a(x,t)} \frac{1}{(g_i)_x} + (-1)^{i+1} a(x,t) \int_0^t \left[\frac{f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i} \right]'_x d\tau = \\ &= \frac{f(x,t)}{a(x,t)} \frac{1}{(g_i(x,t))_x} + (-1)^{i+1} a(x,t) \frac{\partial H_i(x,t)}{\partial x}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{18}$$

⁵ Новиков Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Минск, 2017. – 258 л.

в силу вторых тождеств обращения из (4), формулы производной обратной функции и

$$\begin{aligned}
 (g_i)_t &= (-1)^{i+1} a(x,t)(g_i)_x, \quad (x,t) \in G_\infty, \quad i=1,2, \\
 \frac{\partial f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)}{\partial t} &= \frac{\partial f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)}{\partial h_i} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i} (g_i)_t = \\
 &= (-1)^{i+1} a(x,t) \frac{\partial f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)}{\partial h_i} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i} (g_i)_x = (-1)^{i+1} a(x,t) \frac{\partial f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)}{\partial x}, \\
 \frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial t \partial g_i} &= \frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i^2} (g_i(x,t))_t = \\
 &= (-1)^{i+1} a(x,t) \frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i^2} (g_i(x,t))_x = (-1)^{i+1} a(x,t) \frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial x \partial g_i}, \quad (x,t) \in G_\infty, \quad i=1,2.
 \end{aligned}$$

В равенствах (18) из первых и самых последних их частей, которые не содержат явных производных от функции f по x и t на G_∞ , мы переходим к пределу по f с более гладких $f \in C^1(G_\infty)$, удовлетворяющих (8) на G_∞ , в нормах $\|f\|_{(0,1)}$ и $\|f\|_{(1,0)}$ их левых и правых частей на непрерывные ограниченные функции $f \in C(G_\infty)$ из пространств $C^{(0,1)}(G_\infty)$ и $C^{(1,0)}(G_\infty)$. В результате этого предельного перехода по f приходим к равенству пространств $C^{(0,1)}(G_\infty) = C^{(1,0)}(G_\infty)$.

Если для $f \in C(G_\infty)$ в (8) интегралы $H_i \in C^{(0,1)}(\dot{G}_\infty)$, $i=1,2$, и, в частности, ограниченно непрерывны по x и непрерывно дифференцируемы по t в некоторых окрестностях внутренних точек $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$, то ввиду равенства $C^{(0,1)}(G_\infty) = C^{(1,0)}(G_\infty)$ интегралы $H_i \in C^{(1,0)}(G_\infty)$, $i=1,2$, т. е. ограниченно непрерывно дифференцируемы по x и непрерывны по t в окрестностях внутренних точек $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$. Известно, что из существования ограниченных и непрерывных первых частных производных по x и t в некоторых окрестностях всех внутренних точек $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$ следует ограниченно непрерывная дифференцируемость во внутренних точках $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$ интегралов $H_i \in C^1(\dot{G}_\infty)$, $i=1,2$. Поскольку по теореме 1 гладкость $F \in C^2(G_\infty)$ равносильна гладкости $H_i \in C^1(G_\infty)$, $i=1,2$, на замыкании G_∞ , то гладкость $H_i \in C^1(\dot{G}_\infty)$, $i=1,2$, со внутренних точек $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$ распространяется предельным переходом по f на граничные точки, т. е. $H_i \in C^1(G_\infty)$, $i=1,2$. Отсюда вытекает **достаточность** следствия 2.

Замечание 4. В формуле (18) значения $i=1$ и $i=2$ соответствуют значениям $i=2$ и $i=1$ замечания 2.1 в диссертации⁶ при $a(x,t) = a = const > 0$ из-за взаимно обратного соответствия характеристик.

3. Общий интеграл неоднородного модельного телеграфного уравнения. При решении смешанных (начально-граничных) задач для модельного телеграфного уравнения (1) методом характеристик из [13] важно знать его общий интеграл.

Теорема 2. Пусть $a(x,t) \geq a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$ и для $f \in C(G_\infty)$ выполняются условия (8). Тогда общим интегралом уравнения (1) на G_∞ во множестве классических (дважды непрерывно и ограниченно дифференцируемых на G_∞) решений являются функции

$$u(x,t) = \tilde{f}_1(g_1(x,t)) + \tilde{f}_2(g_2(x,t)) + F(x,t), \quad (x,t) \in G_\infty, \quad (19)$$

где \tilde{f}_1 и \tilde{f}_2 – любые дважды непрерывно и ограниченно дифференцируемые функции по ξ, η вида

$$\tilde{f}_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(g_2(0,0)), \quad \tilde{f}_2(\eta) = f_2(\eta) - f_2(g_2(0,0)). \quad (20)$$

⁶ Новиков Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Минск, 2017. – 258 л.

Доказательство. Согласно теореме 1 предположения теоремы 2 гарантируют то, что действительно функция $F \in C^2(G_\infty)$ и поточечно удовлетворяет неоднородному уравнению (1) на \dot{G}_∞ . Поэтому во множестве классических решений сумма

$$u_0(x,t) = \tilde{f}_1(g_1(x,t)) + \tilde{f}_2(g_2(x,t)), \quad (x,t) \in G_\infty, \quad (21)$$

служит общим интегралом однородного уравнения (1) при $f = 0$ на G_∞ . Сумма (21) получается интегрированием по ξ и η однородного уравнения (14) при $\tilde{f} = 0$. Тогда формула (19) является множеством всех классических решений неоднородного уравнения (1) на G_∞ благодаря теореме 1.

Функции (20) выводятся «методом погружения в решения с фиксированными значениями» в [7]. В общем интеграле (19) постоянная $f_2(g_2(0,0))$ сокращается, но очевидное значение $\tilde{f}_2(g_2(0,0)) = 0$ из (20) существенно упрощает решение систем дифференциальных уравнений при решении смешанных задач для (1) методом характеристик, например, в [7] и упростило бы в диссертации⁷ и других источниках. Теорема 2 доказана.

Гладкий, ограниченный и невырожденный коэффициент $a \in C^2(G_\infty)$ и, следовательно, дважды непрерывно и ограниченно дифференцируемые подынтегральные функции $g_i, h_i, h^{(i)}$ по $x, t, y_i, i = 1, 2$, на G_∞ не препятствуют требованиям (8) на $f \in C(G_\infty)$.

Замечание 5. Для коэффициента $a(x,t) \geq a_0 > 0, (x,t) \in G_\infty, a \in C^2(G_\infty)$ интегральные требования гладкости из (8) на непрерывную и ограниченную правую часть $f \in C(G_\infty)$ равносильны требованиям

$$\int_0^t f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau) d\tau \in C^1(G_\infty), \quad i = 1, 2.$$

Заключение. Дано доказательство дважды ограниченно непрерывной дифференцируемости решения F вида (7) неоднородного модельного телеграфного уравнения (1) в первой четверти плоскости G_∞ . Критерий гладкости состоит из непрерывности и ограниченности правой части f и двух интегральных требований (8) на f в G_∞ . Построен общий интеграл (19) из дважды непрерывно и ограниченно дифференцируемых функций при решении смешанных задач для уравнения (1) на G_∞ .

Работа выполнена в рамках программы ГПНИ № 11, «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», НИР 1.2.02.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lomovtsev F. E. The Smoothness Criterion for the Classical Solution to Inhomogeneous Model Telegraph Equation at the Rate $a(x,t)$ on the Half-Line // Труды 10-го междунар. науч. семинара АМАДЕ-2021. – БГУ : ИВЦ Минфина. – 2022. – С. 43–53.
2. Ломовцев Ф. Е. Критерий гладкости частного классического решения неоднородного модельного телеграфного уравнения в первой четверти плоскости // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2022. – № 11. – С. 99–116. – DOI: [10.52928/2070-1624-2022-39-11-99-116](https://doi.org/10.52928/2070-1624-2022-39-11-99-116).
3. Ломовцев Ф. Е. Метод корректировки пробного решения общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2017. – № 3. – С. 38–52.
4. Ломовцев Ф. Е. В криволинейной первой четверти плоскости метод корректировки пробных решений для минимальной гладкости правой части волнового уравнения с постоянными коэффициентами // Вестн. Віцеб. дзярж. ўн-та. – 2021. – № 4(113). – С. 5–22.
5. Ломовцев Ф. Е. Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2021. – № 1. – С. 18–38.
6. Ломовцев Ф. Е., Устилко Е. В. Смешанная задача для одномерного волнового уравнения при характеристической первой косо́й производной в нестационарном граничном режиме для гладких решений // Вестн. Магілёўскага дзярж. ўн-та імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2020. – № 2(56). – С. 21–36.

⁷ Новиков Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косо́ми производными: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Минск, 2017. – 258 л.

7. Ломовцев Ф. Е., Лысенко В. В. Смешанная задача для общего одномерного волнового равнения в полуполосе плоскости при нестационарных нехарактеристических вторых производных // Весн. Магілёўскага дзярж. ўн-та імя А. А. Куляшова. Сер В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2021. – № 2(58). – С. 28–54.
8. Ломовцев Ф. Е., Спесивцева К. А. Смешанная задача для общего одномерного волнового уравнения с характеристическими вторыми производными в нестационарном граничном режиме // Матем. заметки. – 2021. – Т. 110, вып. 3. – С. 345–357. – DOI: [10.4213/mzm13243](https://doi.org/10.4213/mzm13243).
9. Хромов А. П., Корнев В. В. Классическое и обобщённое решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Доклады Академии наук. – 2019. – Т. 484, № 1. – С. 18–20. – DOI: [10.31857/S0869-5652484118-20](https://doi.org/10.31857/S0869-5652484118-20).
10. Хромов А. П. Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, № 5. – С. 717–731. – DOI: [10.1134/S0374064119050121](https://doi.org/10.1134/S0374064119050121).
11. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы / г. Саратов (31 янв. – 4 февр. 2022 г.). – Саратов: Саратовский университет, 2022. – Вып. 2. – С. 319–324.
12. Ломов И. С. Построение обобщённого решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы // Дифференциальные уравнения. – 2022. – Т. 58, № 11. – С. 1471–1483. – DOI: [10.31857/S0374064122110048](https://doi.org/10.31857/S0374064122110048).
13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука. 2004. – 798 с.

REFERENCES

1. Lomovtsev, F. E. (2022). Kriteriy gladkosti klassicheskogo resheniya neodnorodnogo model'nogo telegrafnogo uravneniya pri skorosti $a(x,t)$ na poluosi [The Smoothness Criterion for the Classical Solution to Inhomogeneous Model Telegraph Equation at the Rate $a(x,t)$ on the Half-Line]. In *Trudy 10-go mezhdunarodnogo nauchnogo seminara AMADE-2021 [Proc. 10th International Workshop AMADE-2021]* (43–53). Minsk: BSU, ITC of the Ministry of Finance. (In Russ.).
2. Lomovtsev, F. E. (2022). Kriterii gladkosti chastnogo klassicheskogo resheniya neodnorodnogo model'nogo telegrafnogo uravneniya v pervoi chetverti ploskosti [Smoothness Criterion for a Particular Classical Solution of an Inhomogeneous Model Telegraph Equation in the First Quarter of the Plane]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (11), 99–116. DOI: [10.52928/2070-1624-2022-39-11-99-116](https://doi.org/10.52928/2070-1624-2022-39-11-99-116). (In Russ., abstr. in Engl.).
3. Lomovtsev, F. E. (2017). Metod korrekcirovki probnogo resheniya obshchego volnovoogo uravneniya v pervoi chetverti ploskosti dlya minimal'noi gladkosti ego pravoi chasti [Correction method of test solutions of the general wave equation in the first quarter of the plane for the minimum smoothness of its right-hand side]. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika [J. of the Belarusian State University. Mathematics and informatics]*, (3), 38–52. (In Russ., abstr. in Engl.).
4. Lomovtsev, F. E. (2021). V krivolineinoi pervoi chetverti ploskosti metod korrekcirovki probnykh reshenii dlya minimal'noi gladkosti pravoi chasti volnovoogo uravneniya s postoyannymi koeffitsientami [In the curvilinear first quarter of the plane the correction method of test solutions for the minimum smoothness of the right-hand side for the wave equation with constant coefficients]. *Vestnik Vitsebskaga dzyarzhavnaga universiteta [J. of Vitebsk State University]*, 4(113), 5–22. (In Russ., abstr. in Engl.).
5. Lomovtsev, F. E. (2021). Pervaya smeshannaya zadacha dlya obshchego telegrafnogo uravneniya s peremennymi koeffitsientami na polupryamoi [The first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line]. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika [J. of the Belarusian State University. Mathematics and informatics]*, (1), 18–38. (In Russ., abstr. in Engl.).
6. Lomovtsev, F. E., & Ustilko, E. V. (2020). Smeshannaya zadacha dlya odnomernogo volnovoogo uravneniya pri kharakteristicheskoi pervoi kosoi proizvodnoi v nestatsionarnom granichnom rezhime dlya gladkikh reshenii [A mixed problem for a one-dimensional wave equation with a characteristic first oblique derivative in a non-stationary boundary regime for smooth solutions]. *Vestnik Magileuskaga dzyarzhavnaga universiteta imya A. A. Kulyashova. Ser B. Pryrodaznauchyaya navuki [Mogilev State A. Kuleshov Bulletin. Series B. Natural Sciences]*, 2(56), 21–36. (In Russ., abstr. in Engl.).
7. Lomovtsev, F. E., & Lysenko, V. V. (2021). Smeshannaya zadacha dlya obshchego odnomernogo volnovoogo uravneniya v polupolose ploskosti pri nestatsionarnykh nekharakteristicheskikh vtorykh proizvodnykh [A mixed problem for a general one-dimensional wave equation in a half-strip of the plane with non-stationary non-characteristic second derivatives]. *Vestnik Magileuskaga dzyarzhavnaga universiteta imya A. A. Kulyashova. Ser B. Pryrodaznauchyaya navuki [Mogilev State A. Kuleshov Bulletin. Series B. Natural Sciences]*, 2(58), 28–54. (In Russ., abstr. in Engl.).
8. Lomovtsev, F. E., & Spesivtseva, K. A. (2021). Mixed Problem for a General 1D Wave Equation with Characteristic Second Derivatives in a Nonstationary Boundary Mode. *Math Notes*, 110(3), 329–338. DOI: [10.1134/S0001434621090030](https://doi.org/10.1134/S0001434621090030).
9. Khromov, A. P., & Kornev, V. V. (2019). Klassicheskoe i obobshchennoe resheniya smeshannoi zadachi dlya neodnorodnogo volnovoogo uravneniya [Classical and generalized solutions of a mixed problem for a non-homogeneous wave equation]. *Doklady Akademii nauk*, 484(1), 18–20. DOI: [10.31857/S0869-5652484118-20](https://doi.org/10.31857/S0869-5652484118-20).
10. Khromov, A. P. (2019). Neobkhodimye i dostatochnye usloviya sushchestvovaniya klassicheskogo resheniya smeshannoi zadachi dlya odnorodnogo volnovogo uravneniya v sluchae summiruемого potentsiala [Necessary and sufficient conditions for the existence of a classical solution of the mixed problem for the homogeneous wave equation with an integrable potential]. *Differentsial'nye uravneniya [Differential equations]*, 55(5), 703–717. DOI: [10.1134/S0012266119050112](https://doi.org/10.1134/S0012266119050112).
11. Khromov, A. P. (2022). Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha dlya volnovoogo uravneniya [Divergent series and generalized mixed problem for wave equation]. In *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh*

- prilozheniya: vyp. 21 [Modern problems of the theory of functions and their applications: iss. 21] (319–324). Saratov: Saratov State University. (In Russ., abstr. in Engl.).*
12. Lomov, I. S. (2022). Construction of a generalized solution of a mixed problem for the telegraph equation: sequential and axiomatic approaches. *Differential equations*, 58(11), 1468–1481. DOI: [10.1134/S00122661220110040](https://doi.org/10.1134/S00122661220110040).
 13. Tikhonov, A. N., & Samarskii, A. A. (2004). *Uravneniya matematicheskoi fiziki*. Moscow: Nauka. (In Russ.).

Поступила 25.01.2023

**ON THE SMOOTHNESS CRITERION FOR A CLASSICAL SOLUTION
TO AN INHOMOGENEOUS MODEL TELEGRAPH EQUATION
IN THE FIRST QUARTER OF THE PLANE**

F. LOMOVTSSEV
(Belarusian State University, Minsk)

We propose a new proof of the smoothness criterion on f for the classical solution F to the equation $u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) - a^{-1}(x,t)a_t(x,t)u_t(x,t) - a(x,t)a_x(x,t)u_x(x,t) = f(x,t)$, $(x,t) \in \dot{G}_\infty =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. The criterion consists of the necessary and sufficient requirements for bounded continuity f and continuous differentiability of two integrals from f on G_∞ . The need for continuity and boundedness f follows from this equation, which satisfies F on G_∞ . These two integrals are continuously and boundedly differentiable, as derivatives of $F \in C^2(G_\infty)$ along the characteristics of the equation. This implies their sufficiency for $F \in C^2(G_\infty)$. If f depends only on x or t , then f is continuous and bounded on x or t . A general integral of the model telegraph equation is constructed.

Keywords: model telegraph equation; one variable rate; implicit characteristics; classical solution; smoothness criterion; general integral.

**ДВУМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ФУНКЦИЕЙ КУММЕРА
И ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ ГАУССА В ЯДРАХ КАК ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ
ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО G-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ**

д-р физ.-мат. наук, доц. С. М. СИТНИК

(Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Россия);

канд. физ.-мат. наук, доц. О. В. СКОРОМНИК, К. А. ВАСИЛЕВИЧ

(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

Рассматриваются два двумерных интегральных преобразования с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера и гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах. Применяя технику преобразования Меллина, показываем, что они являются частными случаями двумерного G-преобразования. На основании теории G-преобразования в работе исследованы свойства рассматриваемых интегральных преобразований в весовых пространствах интегрируемых функций в области $R_+^2 = R_+^1 \times R_+^1$. Результаты исследования обобщают полученные ранее для соответствующих одномерных аналогов.

Ключевые слова: *двумерное интегральное G-преобразование, G-функция Мейера, вырожденная гипергеометрическая функция Куммера, гипергеометрическая функция Гаусса, двумерное преобразование Меллина, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.*

Введение. Рассматриваются двумерные интегральные преобразования

$$\left(G_{1,1,1,2} f\right)(x) = \frac{\Gamma(\bar{a})}{\Gamma(\bar{c})} \int_0^{\infty} {}_1F_1(\bar{a}; \bar{c}; -xt) f(t) dt \quad (x > 0), \quad (1.1)$$

$$\left(G_{1,2,2,2} f\right)(x) = \frac{\Gamma(\bar{a})\Gamma(\bar{b})}{\Gamma(\bar{c})} {}_2F_1(\bar{a}, \bar{b}; \bar{c}; -xt) f(t) dt \quad (x > 0) \quad (1.2)$$

и двумерное G-преобразование [1–4]

$$(Gf)(x) = \int_0^{\infty} G_{p,q}^{m,n} \left[xt \begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \right] f(t) dt \quad (x > 0), \quad (1.3)$$

где (см., например, [1–6; 7, §28.4]) $x = (x_1, x_2) \in R^2$; $t = (t_1, t_2) \in R^2$ – векторы, R^2 – Евклидово двумерное пространство; $x > t$ означает $x_1 > t_1$, $x_2 > t_2$ и аналогично для знаков \geq , $<$, \leq ; $\int_0^{\infty} := \int_0^{\infty} \int_0^{\infty}$; $N = \{1, 2, \dots\}$ –

пространство натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^2 = N_0 \times N_0$; $R_+^2 = R_+^1 \times R_+^1 = \{x \in R^2, x > 0\}$;

C^2 – двумерное пространство комплексных чисел $z = (z_1, z_2)$, $z_1, z_2 \in C$; $\bar{a} = (a_1, a_2)$, $\bar{b} = (b_1, b_2)$,

$\bar{c} = (c_1, c_2) \in C^2$; $\Gamma(\bar{a}) = \Gamma(a_1)\Gamma(a_2)$;

$m = (m_1, m_2) \in N_0^2$ и $m_1 = m_2$; $n = (n_1, n_2) \in N_0^2$ и $n_1 = n_2$;

$p = (p_1, p_2) \in N_0^2$ и $p_1 = p_2$; $q = (q_1, q_2) \in N_0^2$ и $q_1 = q_2$; ($0 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p$);

$a_i = (a_{i_1}, a_{i_2})$, $1 \leq i \leq p$, $a_{i_1}, a_{i_2} \in C$ ($1 \leq i_1 \leq p_1, 1 \leq i_2 \leq p_2$);

$b_j = (b_{j_1}, b_{j_2})$, $1 \leq j \leq q$, $b_{j_1}, b_{j_2} \in C$ ($1 \leq j_1 \leq q_1, 1 \leq j_2 \leq q_2$);

$k = (k_1, k_2) \in N_0^2 = N_0 \times N_0$ ($k_1 \in N_0, k_2 \in N_0$) – индекс с $k! = k_1!k_2!$ и $|k| = k_1 + k_2$; для $l = (l_1, l_2) \in R_+^2$

$D^l = \frac{\partial^{|l|}}{(\partial x_1)^{l_1} (\partial x_2)^{l_2}}$; $dt = dt_1 \cdot dt_2$; $f(t) = f(t_1, t_2)$; функции в ядрах преобразований (1.1) и (1.2) представляют

собой произведения вырожденной гипергеометрической функции (функции Куммера) ${}_1F_1(a; c; z)$ и гипергеометрической функции Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; z)$ соответственно:

$${}_1F_1(\bar{a}, \bar{c}; -x t) = \prod_{i=1}^2 {}_1F_1(a_i, c_i; -x_i t_i);$$

$${}_2F_1(\bar{a}, \bar{b}; \bar{c}; -x t) = \prod_{i=1}^2 {}_2F_1(a_i, b_i; c_i; -x_i t_i).$$

Для $a, b, c \in \mathbb{C}$ вырожденная гипергеометрическая функция Куммера ${}_1F_1(a; c; z)$, определяется по формуле [7, §1]

$${}_1F_1(a; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} = \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(a, b; c; \frac{z}{b}\right), \quad |z| < \infty,$$

где $(\gamma)_n$ – символ Похгаммера: $(\gamma)_0 \equiv 1, (\gamma)_n = \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)$ ($\gamma \in \mathbb{C}; n \in \mathbb{N}$); ${}_2F_1(a, b; c; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad |z| < 1,$$

с соответствующим аналитическим продолжением

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt$$

для $z \in \mathbb{C}, 0 < \text{Re}(b) < \text{Re}(c), (|\arg(1-z)| < \pi, z \neq 1)$ [8, формулы 2.1(2) и 2.1.(10)].

Функция вида $G_{p,q}^{m,n} \left[\text{xt} \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right]$ в ядре преобразования (1.3) [1–4]

$$G_{p,q}^{m,n} \left[\text{xt} \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] = \prod_{k=1}^2 G_{p_k, q_k}^{m_k, n_k} \left[x_k t_k \left| \begin{matrix} (a_{i_k})_{1, p_k} \\ (b_{j_k})_{1, q_k} \end{matrix} \right. \right],$$

является произведением G -функций Мейера $G_{p,q}^{m,n} [z]$ [9, гл. 1].

G -функцией Мейера порядка (m, n, p, q) , где $0 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p$, называется функция, определяемая интегралом Меллина – Барнса

$$G_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a)_p \\ (b)_q \end{matrix} \right. \right] = G_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] = G_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L G_{p,q}^{m,n}(s) z^{-s} ds, \quad z \neq 0, \quad (1.4)$$

где

$$G_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] = G_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a)_p \\ (b)_q \end{matrix} \middle| s \right] = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - s)}{\prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i + s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s)}. \quad (1.5)$$

Здесь L – специально выбранный бесконечный контур, оставляющий полюса $s = -b_j - k, j = 1, 2, \dots, m, k = 0, 1, 2, \dots$ слева, а полюса $s = 1 - a_j + k, j = 1, 2, \dots, n, k = 0, 1, 2, \dots$ – справа; пустые произведения, если таковые имеются, считаются равными единице. Более подробно с теорией G -функции (1.4) можно ознакомиться, например, в [9, гл. 6].

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [1; 3–6; 10] и, в частности, является продолжением [2]. Мы рассматриваем еще два класса двумерных интегральных преобразований вида (1.1) и (1.2) в весовых пространствах $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$, $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ($v_1 = v_2$), $\bar{2} = (2, 2)$, интегрируемых функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2)$ на \mathbb{R}_+^2 , для которых $\|f\|_{\bar{v}, \bar{2}} < \infty$, где

$$\|f\|_{\bar{v}, \bar{2}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_2^{v_2 \cdot 2 - 1} \left[\int_{\mathbb{R}_+^1} x_1^{v_1 \cdot 2 - 1} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 \right] dx_2 \right\}^{1/2} < \infty.$$

Используя технику преобразования Меллина, показываем, что преобразования (1.1) и (1.2) являются частными случаями двумерного G-преобразования (1.3). На основании теории G-преобразования, построенной в [1], мы исследуем свойства рассматриваемых интегральных преобразований в пространствах $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$. Результаты исследования обобщают полученные ранее для соответствующих одномерных аналогов в [9].

2. Предварительные сведения. Двумерное преобразование Меллина функции $f(x) = f(x_1, x_2)$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, определяется формулой (см., например, [1–6; 10; 11])

$$(\mathfrak{M}f)(s) = f^*(s) = \int_{\mathbb{R}_+^2} f(t) t^{s-1} dt, \quad (2.1)$$

где $s = (s_1, s_2)$, $s_j \in \mathbb{C}$ ($j = 1, 2$).

Обратное преобразование Меллина для $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ дается формулой

$$(\mathfrak{M}^{-1}g)(x) = \mathfrak{M}^{-1}[g(s)](x) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \int_{\gamma_2 - i\infty}^{\gamma_2 + i\infty} x^{-s} g(s) ds, \quad \gamma_j = \operatorname{Re}(s_j) \quad (j = 1, 2).$$

В [1] получили формулу преобразования Меллина (2.1) от G-преобразования (1.3)

$$(\mathfrak{M}Gf)(s) = \bar{\mathcal{G}}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M}f)(1-s), \quad (2.2)$$

где функция $\bar{\mathcal{G}}_{p,q}^{m,n}(s)$ является произведением функций вида (1.5)

$$\bar{\mathcal{G}}_{p,q}^{m,n}(s) \equiv \bar{\mathcal{G}}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] = \prod_{k=1}^2 \mathcal{G}_{p_k, q_k}^{m_k, n_k} \left[\begin{matrix} (a_k)_{1, p_k} \\ (b_k)_{1, q_k} \end{matrix} \middle| s_k \right].$$

Исключительным множеством $\mathcal{E}_{\bar{g}}$ функции $\bar{\mathcal{G}}_{p,q}^{m,n}(s)$ [1–6; 9] назовем множество векторов $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ($v_1 = v_2$) таких, что $\alpha_1 < 1 - v_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < 1 - v_2 < \beta_2$ и функции вида (1.5) $\mathcal{G}_{p_1, q_1}^{m_1, n_1}(s_1)$, $\mathcal{G}_{p_2, q_2}^{m_2, n_2}(s_2)$ имеют нули на прямых $\operatorname{Re}(s_1) = 1 - v_1$, $\operatorname{Re}(s_2) = 1 - v_2$ соответственно.

Нам понадобятся:

– интеграл, содержащий функцию Куммера ${}_1F_1(a; c; z)$ [12, формула 1.14.1(1)]

$$\int_{x_1}^{x_2} x^{\alpha-1} {}_1F_1(a, b; \pm \lambda x) dx = \pm \frac{x^\alpha}{\alpha} {}_2F_2(\alpha, a; \alpha + 1; b; \pm \lambda x) + \lambda^{-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(a-\alpha)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b-\alpha)}, \quad (2.3)$$

($x_1 = x$, $x_2 = \infty$, $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, $\operatorname{Re}(a - \alpha) > 0$, $x > 0$);

– интеграл, содержащий гипергеометрическую функцию Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; z)$ [12, формула 2.21.1(1)]

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} {}_2F_1(a, b; c; -\omega x) dx = \omega^{-\alpha} \frac{\Gamma(c)\Gamma(\alpha)\Gamma(a-\alpha)\Gamma(b-\alpha)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-\alpha)}, \tag{2.4}$$

$(0 < \text{Re}(\alpha) < \text{Re}(a), \text{Re}(b); |\arg \omega| < \pi)$.

Для формулировки утверждений, представляющих $\mathfrak{L}_{\sqrt{2}}$ -теорию $G_{1,1,1,2}$ - и $G_{1,2,2,2}$ -преобразований, нам понадобятся следующие постоянные [1, формулы (3.3)–(3.7)]:

$$\alpha_1 = \begin{cases} -\min_{1 \leq j_1 \leq m_1} [\text{Re}(b_{j_1})], & m_1 > 0, \\ -\infty, & m_1 = 0, \end{cases} \quad \beta_1 = \begin{cases} 1 - \max_{1 \leq i_1 \leq n_1} [\text{Re}(a_{i_1})], & n_1 > 0, \\ \infty, & n_1 = 0; \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} -\min_{1 \leq j_2 \leq m_2} [\text{Re}(b_{j_2})], & m_2 > 0, \\ -\infty, & m_2 = 0, \end{cases}, \quad \beta_2 = \begin{cases} 1 - \max_{1 \leq i_2 \leq n_2} [\text{Re}(a_{i_2})], & n_2 > 0, \\ \infty, & n_2 = 0; \end{cases} \tag{2.7}$$

$$a_1^* = 2(m_1 + n_1) - p_1 - q_1, \quad a_2^* = 2(m_2 + n_2) - p_2 - q_2; \tag{2.8}$$

$$\Delta_1 = q_1 - p_1, \Delta_2 = q_2 - p_2; \tag{2.9}$$

$$\mu_1 = \sum_{j=1}^{q_1} b_{j_1} - \sum_{i=1}^{p_1} a_{i_1} + \frac{p_1 - q_1}{2}, \quad \mu_2 = \sum_{j=1}^{q_2} b_{j_2} - \sum_{i=1}^{p_2} a_{i_2} + \frac{p_2 - q_2}{2}. \tag{2.10}$$

Через $[X, Y]$ обозначим множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y .

3. $G_{1,1,1,2}$ - и $G_{1,2,2,2}$ -преобразования как G -преобразование. Применяем двумерное преобразование Меллина (2.1) к $G_{1,1,1,2}$ -преобразованию (1.1), далее последовательно меняем порядок интегрирования и используем формулу (2.3) во внутреннем интеграле, с учетом (1.5) окончательно получаем

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M} G_{1,1,1,2} f)(s) &= \frac{\Gamma(\bar{a})}{\Gamma(\bar{c})} \int_0^\infty x^{s-1} dx \int_0^\infty {}_1F_1(\bar{a}; \bar{c}; -xt) f(t) dt = \\ &= \frac{\Gamma(\bar{a})}{\Gamma(\bar{c})} \int_0^\infty f(t) dt \int_0^\infty x^{s-1} {}_1F_1(\bar{a}; \bar{c}; -xt) dx = \frac{\Gamma(s)\Gamma(\bar{a}-s)}{\Gamma(\bar{c}-s)} (\mathfrak{M} f)(1-s) = \bar{\mathcal{G}}_{1,2}^{1,1} \left[\begin{matrix} 1-\bar{a} \\ 0, 1-\bar{c} \end{matrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M} f)(1-s). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$(\mathfrak{M} G_{1,1,1,2} f)(s) = \bar{\mathcal{G}}_{1,2}^{1,1} \left[\begin{matrix} 1-\bar{a} \\ 0, 1-\bar{c} \end{matrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M} f)(1-s). \tag{3.1}$$

Из (2.2) и (3.1) следует представление преобразования (1.1) $G_{1,1,1,2} f$ в виде G -преобразования (1.3):

$$(G_{1,1,1,2} f)(x) = \int_0^\infty G_{1,2}^{1,1} \left[xt \middle| \begin{matrix} 1-\bar{a} \\ 0, 1-\bar{c} \end{matrix} \right] f(t) dt \quad (x > 0). \tag{3.2}$$

Определим параметры (2.6)–(2.10) в (3.1):

$$m_1 = m_2 = 1; n_1 = n_2 = 1; \quad p_1 = p_2 = 1; q_1 = q_2 = 2; \alpha_1 = -\min[0, \text{Re}(1-c_1)], \alpha_2 = -\min[0, \text{Re}(1-c_2)];$$

$$\beta_1 = \text{Re}(a_1), \beta_2 = \text{Re}(a_2); \quad a_1^* = a_2^* = 1; \quad \Delta_1 = \Delta_2 = 1; \quad \mu_1 = \text{Re}(a_1 - c_1) - \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = \text{Re}(a_2 - c_2) - \frac{1}{2}.$$

Применяем двумерное преобразование Меллина (2.1) к $G_{1,2,2,2}$ -преобразованию (1.2), далее последовательно меняем порядок интегрирования и используем формулу (2.4) во внутреннем интеграле, с учетом (1.5) окончательно получаем

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M}G_{1,2,2,2}f)(s) &= \frac{\Gamma(\bar{a})\Gamma(\bar{b})}{\Gamma(\bar{c})} \int_0^\infty x^{s-1} dx \int_0^\infty {}_2F_1(\bar{a}, \bar{b}; \bar{c}; -xt) f(t) dt = \\ &= \frac{\Gamma(\bar{a})\Gamma(\bar{b})}{\Gamma(\bar{c})} \int_0^\infty f(t) dt \int_0^\infty {}_2F_1(\bar{a}, \bar{b}; \bar{c}; -xt) x^{s-1} dx = \\ &= \frac{\Gamma(\bar{a}-s)\Gamma(\bar{b}-s)\Gamma(s)}{\Gamma(\bar{c}-s)} (\mathfrak{M}f)(1-s) = \bar{\mathcal{G}}_{2,2}^{1,2} \left[\begin{matrix} 1-\bar{a}, 1-\bar{b} \\ 0, 1-\bar{c} \end{matrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M}f)(1-s). \end{aligned}$$

Таким образом, получили

$$(\mathfrak{M}G_{1,2,2,2}f)(s) = \bar{\mathcal{G}}_{2,2}^{1,2} \left[\begin{matrix} 1-\bar{a}, 1-\bar{b} \\ 0, 1-\bar{c} \end{matrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M}f)(1-s). \quad (3.3)$$

Из (2.2) и (3.3) вытекает представление преобразования (1.2) $G_{1,2,2,2}f$ в виде G-преобразования (1.3):

$$(G_{1,2,2,2}f)(x) = \int_0^\infty G_{2,2}^{1,2} \left[\begin{matrix} 1-\bar{a}, 1-\bar{b} \\ 0, 1-\bar{c} \end{matrix} \right] xt f(t) dt \quad (x > 0). \quad (3.4)$$

Определим параметры (2.6)–(2.10) в (3.3):

$$m_1 = m_2 = 1; n_1 = n_2 = 2; \quad p_1 = p_2 = 2; q_1 = q_2 = 2; \quad \alpha_1 = -\min[0, \operatorname{Re}(1-c_1)], \quad \alpha_2 = -\min[0, \operatorname{Re}(1-c_2)];$$

$$\beta_1 = 1 - \max[\operatorname{Re}(1-a_1), \operatorname{Re}(1-b_1)], \quad \beta_2 = 1 - \max[\operatorname{Re}(1-a_2), \operatorname{Re}(1-b_2)];$$

$$a_1^* = a_2^* = 2; \quad \Delta_1 = \Delta_2 = 0; \quad \mu_1 = \operatorname{Re}(a_1 + b_1 - c_1) - 1, \quad \mu_2 = \operatorname{Re}(a_2 + b_2 - c_2) - 1.$$

4. $\mathcal{L}_{\bar{v},2}$ -теория $G_{1,1,1,2}$ -преобразования. В следующей теореме представлена $\mathcal{L}_{\bar{v},2}$ -теория преобразования $G_{1,1,1,2}f$ (1.1).

Теорема 4.1. Пусть

$$-\min[0, \operatorname{Re}(1-c_1)] < 1-v_1 < \operatorname{Re}(a_1), \quad -\min[0, \operatorname{Re}(1-c_2)] < 1-v_2 < \operatorname{Re}(a_2), \quad v_1 = v_2, \quad (4.1)$$

$$a_1^* = a_2^* = 1. \quad (4.2)$$

Верны следующие утверждения:

А. Существует взаимно однозначное преобразование $G_{1,1,1,2} \in [\mathcal{L}_{\bar{v},2}, \mathcal{L}_{1-\bar{v},2}]$ такое, что равенство (3.1) выполняется для $f \in \mathcal{L}_{\bar{v},2}$ и $\operatorname{Re}(s) = 1-\bar{v}$.

В. Если $f \in \mathcal{L}_{\bar{v},2}$ и $g \in \mathcal{L}_{\bar{v},2}$, то имеет место формула

$$\int_0^\infty f(x) (G_{1,1,1,2}g)(x) dx = \int_0^\infty (G_{1,1,1,2}f)(x) g(x) dx.$$

С. Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_1) \in C^2$ и $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$. Если $\text{Re}(\bar{\lambda}) > -\bar{v}$, преобразование $G_{1,1,1,2} f$ (1.1) представимо в виде

$$(G_{1,1,1,2} f)(x) = x^{-\bar{\lambda}} \frac{d}{dx} x^{\bar{\lambda}+1} \int_0^\infty G_{2,3}^{1,2} \left[xt \left| \begin{matrix} -\bar{\lambda}, 1-\bar{a} \\ 0, 1-\bar{c}, -\bar{\lambda}-1 \end{matrix} \right. \right] f(t) dt,$$

а при $\text{Re}(\bar{\lambda}) < -\bar{v}$ дается формулой

$$(G_{1,1,1,2} f)(x) = -x^{-\bar{\lambda}} \frac{d}{dx} x^{\bar{\lambda}+1} \int_0^\infty G_{2,3}^{2,1} \left[xt \left| \begin{matrix} 1-\bar{a}, -\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda}-1, 0, 1-\bar{c} \end{matrix} \right. \right] f(t) dt.$$

Д. Преобразование $G_{1,1,1,2} f$ не зависит от \bar{v} в том смысле, что если \bar{v} и \bar{v} удовлетворяют (4.1) и выполняются условия (4.2), а также преобразования $G_{1,1,1,2} f$ и $\tilde{G}_{1,1,1,2} f$ определяются в пространствах $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ и $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ равенством (3.1), то $G_{1,1,1,2} f = \tilde{G}_{1,1,1,2} f$ для $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}} \cap \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$.

Е. Если выполняются условия (4.1) и (4.2), то для $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ преобразование $G_{1,1,1,2} f$ дается формулами (1.1) и (3.2).

Доказательство следует из непосредственной проверки с учетом представления (3.1), из результатов в [1, теорема 1; 9, теорема 6.1], из существования всех приведенных операторов в указанных классах функций.

5. $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ -теория $G_{1,2,2,2}$ -преобразования. В следующей теореме представлена $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ -теория преобразования $G_{1,2,2,2} f$ (1.2).

Теорема 5.1. Пусть

$$-\min[0, \text{Re}(1-c_1)] < 1-v_1 < 1-\max[\text{Re}(1-a_1), \text{Re}(1-b_1)],$$

$$-\min[0, \text{Re}(1-c_2)] < 1-v_2 < 1-\max[\text{Re}(1-a_2), \text{Re}(1-b_2)], \quad v_1 = v_2; \tag{5.1}$$

$$a_1^* = a_2^* = 2. \tag{5.2}$$

Верны следующие утверждения:

А. Существует взаимно однозначное преобразование $G_{1,2,2,2} \in [\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}, \mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{2}}]$ такое, что равенство (3.3) выполняется для $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ и $\text{Re}(s) = 1 - \bar{v}$.

В. Если $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ и $g \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$, то имеет место формула

$$\int_0^\infty f(x) (G_{1,2,2,2} g)(x) dx = \int_0^\infty (G_{1,2,2,2} f)(x) g(x) dx.$$

С. Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_1) \in C^2$ и $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$. Если $\text{Re}(\bar{\lambda}) > -\bar{v}$, преобразование (1.2) представимо в виде

$$(G_{1,2,2,2} f)(x) = x^{-\bar{\lambda}} \frac{d}{dx} x^{\bar{\lambda}+1} \int_0^\infty G_{3,3}^{1,3} \left[xt \left| \begin{matrix} -\bar{\lambda}, 1-\bar{a}, 1-\bar{b} \\ 0, 1-\bar{c}, -\bar{\lambda}-1 \end{matrix} \right. \right] f(t) dt,$$

а при $\text{Re}(\bar{\lambda}) < -\bar{v}$ дается формулой

$$(G_{1,2,2,2} f)(x) = -x^{-\bar{\lambda}} \frac{d}{dx} x^{\bar{\lambda}+1} \int_0^\infty G_{3,3}^{2,2} \left[xt \left| \begin{matrix} 1-\bar{a}, 1-\bar{b}, -\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda}-1, 0, 1-\bar{c} \end{matrix} \right. \right] f(t) dt.$$

Д. Преобразование $G_{1,2;2,2} f$ не зависит от \bar{v} в том смысле, что если \bar{v} и $\bar{\bar{v}}$ удовлетворяют (5.1) и выполняются условия (5.2), а также преобразования $G_{1,2;2,2} f$ и $\tilde{G}_{1,2;2,2} f$ определяются в пространствах $\mathcal{L}_{\bar{v},\bar{2}}$ и $\mathcal{L}_{\bar{\bar{v}},\bar{2}}$ равенством (3.3), то $G_{1,2;2,2} f = \tilde{G}_{1,2;2,2} f$ для $f \in \mathcal{L}_{\bar{v},\bar{2}} \cap \mathcal{L}_{\bar{\bar{v}},\bar{2}}$.

Е. Если выполняются условия (5.2), то для $f \in \mathcal{L}_{\bar{v},\bar{2}}$ преобразование $G_{1,2;2,2} f$ дается формулами (1.2) и (3.4).

Доказательство следует из непосредственной проверки с учетом представления (3.3), из результатов в [1, теорема 1; 9, теорема 6.1], из существования всех приведенных операторов в указанных классах функций.

Заключение. В работе получены условия ограниченности и взаимной однозначности операторов преобразований (1.1) и (1.2) из одних пространств интегрируемых функций в другие, получены аналоги формулы интегрирования по частям. Для таких преобразований установлены различные интегральные представления.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция – 2025», подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.2.01.

ЛИТЕРАТУРА

1. Папкович М. В., Скоромник О. В. Двумерное интегральное преобразование с G-функцией Мейера в ядре в пространстве суммируемых функций // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2019. – № 4. – С. 131–136.
2. Ситник С. М., Скоромник О. В., Папкович М. В. Два частных случая двумерного интегрального G-преобразования в весовых пространствах суммируемых функций // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2022. – № 11. – С. 117–123. – DOI: [10.52928/2070-1624-2022-39-11-117-123](https://doi.org/10.52928/2070-1624-2022-39-11-117-123).
3. Скоромник О. В., Папкович М. В. Многомерные модифицированные G-преобразования и интегральные преобразования с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций // Вестн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2022. – № 1(114). – С. 11–25.
4. Ситник С. М., Скоромник О. В., Папкович М. В. Многомерные модифицированные G- и H-преобразования и их частные случаи // АМАДЕ-2021: сб. тр. 10-го междунар. науч. семинара, Минск, 13–17 сент. 2021 г. / Белорус. гос. ун-т. – Минск: ИВЦ Минфина, 2022. – С. 104–116.
5. Ситник С. М., Скоромник О. В., Шлапак С. А. Многомерное общее интегральное преобразование со специальными функциями в ядре // Вестн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2019. – № 3(104). – С. 18–27.
6. Sitnik S. M., Skoromnik O. V. One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman-Erdelyi type with Legendre Functions in kernels // Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. – Cham, Switzerland: Birkhäuser Basel (Springer), 2020. – P. 293–319.
7. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. – М.: Наука, 1973. – Т. 1: Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра. – 294 с.
9. Kilbas A. A., Saigo M. H. H-Transforms. Theory and Applications. – London [etc.]: Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
10. Sitnik S. M., Skoromnik O. V., Shlapakov S. A. Multi-dimensional generalized integral transform in the weighted spaces of summable functions // Lobachevskii J. of Mathematics. – 2022. – Vol. 43, iss. 6. – P. 1170–1178.
11. Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Mathematics Studies; ed.: A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – Vol. 204. – 523 p.
12. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1986. – Т. 3: Дополнительные главы. – 801 с.

REFERENCES

1. Papkovich, M. V., & Skoromnik, O. V. (2019). Dvumernoe integral'noe preobrazovanie s G-funktsiei Meiera v yadre v prostranstve summiruemykh funktsii [Two-Dimensional Integral Transform With the Meijer G-Function in the Kernel in the Space of Summable Functions]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (4), 131–136. (In Russ., abstr. in Engl.).
2. Sitnik, S. M., Skoromnik, O. V., & Papkovich, M. V. (2022). Dva chastnykh sluchaya dvumernogo integral'nogo G-preobrazovaniya v vesovykh prostranstvakh summiruemykh funktsii [Two special cases of two-dimensional integral G-transformation in the weighted spaces of summable functions]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (11), 117–123. (In Russ., abstr. in Engl.). DOI: [10.52928/2070-1624-2022-39-11-117-123](https://doi.org/10.52928/2070-1624-2022-39-11-117-123).
3. Skoromnik, O. V., & Papkovich, M. V. (2022). Mnogomernye modifitsirovannye G-preobrazovaniya i integral'nye preobrazovaniya s gipergeometricheskoi funktsiei Gaussa v yadrakh v vesovykh prostranstvakh summiruemykh funktsii [Multi-dimensional modified G-transformations and integral transformations with hypergeometric Gauss functions in kernels in weight spaces of summed functions]. *Vestnik Vitsebskaga dzyarzhavnaga universiteta [Bulletin of VSU]*, 1(114), 11–25. (In Russ., abstr. in Engl.).

4. Sitnik S. M., Skoromnik, O. V., & Papkovich, M. V. (2022). Mnogomernye modifitsirovannye G- i H-preobrazovaniya i ikh chastnye sluchai [Multidimensional modified G- and H-transforms and their special cases]. In *AMADE-2021: sb. trudov* (104–116). Minsk: IVTs Minfina. (In Russ., abstr. in Engl.).
5. Sitnik, S. M., Skoromnik, O. V., & Shlapakov, S. A. (2019). Mnogomernoe obshchee integral'noe preobrazovanie so spetsial'nymi funktsiyami v yadre [Multidimensional general integral transformation with special functions in the kernel]. *Vesnik Vitsebskaya dzyarzhavnaga universiteta [Bulletin of VSU]*, 3(104), 18–27. (In Russ., abstr. in Engl.).
6. Sitnik, S. M., & Skoromnik, O. V. (2020). One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman-Erdelyi type with Legendre Functions in kernels. In *Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics* (293–319). Cham, Switzerland: Birkhäuser Basel (Springer).
7. Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1987). *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]*. Minsk: Nauka i tekhnika. (In Russ.).
8. Beitmen, G., & Erdeii, A. (1973). *Vysshie transsendentnye funktsii: v 3 t. T. 1: Gipergeometricheskaya funktsiya Gaussa. Funktsiya Lezhandra*. Moscow: Nauka. (In Russ.).
9. Kilbas, A. A., & Saigo, M. H. (2004). *H-Transforms. Theory and Applications*. London [etc.]: Chapman and Hall. CRC Press.
10. Sitnik, S. M., Skoromnik, O. V., & Shlapakov, S. A. (2022). Multi-dimensional generalized integral transform in the weighted spaces of summable functions. *Lobachevskii J. of Mathematics*, 43(6), 1170–1178.
11. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (Ed.). (2006). *Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies* (Vol. 204). Amsterdam: Elsevier.xv.
12. Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A., & Marichev, O. I. (1986). *Integraly i ryady: v 3 t. T. 3: Dopolnitel'nye glavy*. Moscow: Nauka. (In Russ.).

Получена 17.04.2023

**TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL TRANSFORMATIONS WITH KUMMER FUNCTION
AND HYPERGEOMETRIC GAUSSIAN FUNCTION IN KERNELS AS SPECIAL CASES
OF TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL G-TRANSFORMATION**

S. SITNIK

(Belgorod State National Research University "BelGU", Russia);

O. SKOROMNIK, K. VASILEVICH

(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

Two two-dimensional integral transformations with confluent hypergeometric Kummer function and Gauss hypergeometric function in kernels are considered. Applying the Mellin transformation technique, we show that they are special cases of a two-dimensional G-transformation. Based on the theory of the G-transformation, the properties of the considered integral transformations in the weight spaces of integrable functions in the domain $R_+^2 = R_+^1 \times R_+^1$ are investigated. The results of the study generalize the results obtained earlier for the corresponding one-dimensional analogues.

Keywords: *two-dimensional integral G-transformation, Meijer G-function, confluent hypergeometric Kummer function, Gauss hypergeometric function, two-dimensional Mellin transform, space of integrable functions, fractional integrals and derivatives.*

СОДЕРЖАНИЕ

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

<i>Грозберг Ю. Г., Сафрон В. Д.</i> Модернизация системы управления стеклоочистителями автобуса на базе контроллера фирмы «BELROBOT»	2
<i>Илюшин И. Э., Кожевников М. М., Господ А. В.</i> Алгоритм оптимизации роботизированного технологического комплекса для лазерной резки	8
<i>Козловский Д. А., Молодечкина Т. В.</i> Стрелочные приборы на шаговых двигателях с микроконтроллерным управлением	17
<i>Оськин А. Ф., Конаплева Г. Ф., Тавгень Т. А., Гроппен В. О.</i> Создание баз знаний для электронных учебно-методических комплексов с помощью онтологического подхода	23

ЭЛЕКТРОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ УСТАНОВКИ (ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ)

<i>Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Бринкевич Д. И., Просолович В. С.</i> Индентирование облученных электронами пленок диазохинон-новолачных фоторезистов на кремнии	29
<i>Довгяло Д. А., Тихонович В. А., Бабамуратов К. Х.</i> Потери в сетевых и звуковых трансформаторах	38
<i>Кийко А. Н., Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Бринкевич Д. И.</i> Анализ применения гамма-бета-спектрометра МКС-АТ1315 для контроля нежелательных радионуклидов, образующихся в процессе производства радиофармпрепаратов	44
<i>Питолин В. Е., Колошкин Н. В., Бабамуратов К. Х.</i> Эффективное использование тепловой энергии пара	49
<i>Шабловский О. Н., Кроль Д. Г.</i> Пространственно-временные неоднородности на фазовой границе высокоскоростной кристаллизации переохлажденного расплава	56
<i>Янушкевич В. Ф.</i> Применение фазовых методов поиска углеводов на основе амплитудно-модулированных сигналов	65

МАТЕМАТИКА

<i>Ломовцев Ф. Е.</i> О критерии гладкости классического решения неоднородного модельного телеграфного уравнения в первой четверти плоскости	72
<i>Ситник С. М., Скоромник О. В., Василевич К. А.</i> Двумерные интегральные преобразования с функцией Куммера и гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах как частные случаи двумерного интегрального G-преобразования	84