

MIESIĘCZNIK  
POŁOCKI.

Т о м I.  
Р о к 1818.

*«Вестник Полоцкого государственного университета»  
продолжает традиции первого в Беларуси литературно-  
научного журнала «Месячник Полоцкий».*



---

---

ВЕСНИК ПОЛАЦКАГА ДЗЯРЖАУНАГА УНІВЕРСІТЭТА  
Серыя С. Фундаментальныя навукі

У серыі С навукова-тэарэтычнага часопіса друкуюцца артыкулы, якія прайшлі рэцэнзаваанне, змяшчаюць новыя навуковыя вынікі ў галіне інфарматыкі і матэматыкі, фізікі.

---

---

ВЕСТНИК ПОЛОЦКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
Серия С. Фундаментальные науки

В серии С научно-теоретического журнала публикуются статьи, прошедшие рецензирование, содержащие новые научные результаты в области информатики и математики, физики.

---

---

HERALD OF POLOTSK STATE UNIVERSITY  
Series C. Fundamental sciences

Series C includes reviewed articles which contain novelty in research and its results in computer science and mathematics, physics.

---

---

Адрес редакции:

Полоцкий государственный университет, ул. Блохина, 29, г. Новополоцк, 211440, Беларусь  
тел. + 375 (214) 53 34 58, e-mail: vestnik@psu.by

Отв. за выпуск: *В.А. Груздев, Д.О. Глухов, А.А. Козлов.*  
Редактор *О.П. Михайлова.*

Подписано к печати 30.09.2016. Бумага офсетная 65 г/м<sup>2</sup>. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Ризография.  
Усл. печ. л. 15,62. Уч.-изд. л. 18,28. Тираж 100 экз. Заказ

## ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 621.64:004.021

### АЛГОРИТМЫ ОПТИМИЗАЦИИ МОДЕЛИ СЕТИ ТРАНСПОРТИРОВКИ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ В ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА ЗАПАСА ГАЗА

канд. техн. наук, доц. Д.О. ГЛУХОВ, Т.М. ГЛУХОВА  
(Полоцкий государственный университет)

Современные потребности трубопроводной отрасли в первую очередь связаны с необходимостью оптимизации режимов транспортировки газа с точки зрения минимизации энергетических затрат. Важным компонентом данного вопроса является решение гидравлической и термической задачи по результатам математического моделирования. Представлены алгоритмы оптимизации модели сети транспортировки газа с целью уменьшения ее размерности в контексте разрабатываемых алгоритмов решения систем уравнений.

**Ключевые слова:** стационарная модель, телеметрические данные, математическое моделирование, задачи транспортировки газа.

Авторским коллективом, начиная с 2010 г., ведется работа по созданию эффективных методов расчета задачи транспортировки газа [3–5].

Постановка такой задачи была представлена системами нелинейных уравнений – математической моделью стационарного и неизотермического движения газа в системах газотранспортных обществ (ГТО) Республики Беларусь. Размерность системы зависит от масштаба моделируемого участка схемы и варьируется от фрагмента газотранспортной системы (ГТС) до масштаба газотранспортной системы Беларуси [3].

Однако разработанные итерационные алгоритмы расчета по-прежнему не позволяют говорить о возможности перехода к решению данных задач в рамках нестационарной модели. Продолжительность расчета полной схемы магистрального газопровода Республики Беларусь затрудняет его выполнения в реальном времени.

С целью существенного повышения скорости сходимости алгоритмов расчета в данной работе нами предлагаются алгоритмы оптимизации модели, существенно сужающие пространство поиска решения системы нелинейных уравнений.

#### Формализация задачи оптимизации

Для представления информации о расчетной модели трубопроводной газотранспортной сети будем придерживаться объектно-ориентированной парадигмы в постановке Гради Буча [1].

Обращение к внутренней структуре вводимых сущностей изобразим используя оператор «.». Тогда обозначение вида  $a.b$  будет обозначать обращение к свойству  $b$  элемента  $a$ .

Выделим классы концептуальных сущностей, описывающих элементы газотранспортной системы:

1. Узел  $n = \{p_i\}$  – представление точечного элемента газотранспортной сети, хранящего данные  $p_i$  о давлении и температуре газа, характеристику узла (входной / выходной узел), и другие свойства.

2. Множество всех узлов  $N = \{n_i\}$ .

$l = \{n_1, n_2, p_1, p_2, \dots\}$  – фрагмент трубопровода, включающий пару узлов  $n_1$  и  $n_2$ , и свойства  $p_i$  фрагмента (длина, диаметр, толщина стенки, глубина залегания и др.).

3. Множество всех фрагментов трубопровода (далее линков)  $L = \{l_k\}$

4. Множество линков, объединенных по тому свойству, что в них входит в качестве одной из вершин узел  $n$ , будем задавать так:

$$L(n) = \{l_i \mid l.n_1 = n \vee l.n_2 = n\}.$$

Для удобства дальнейших рассуждений введем также оператор, выделяющий множество узлов, содержащееся в линках  $L(n)$  узла  $n$ :

$$NL(n) = \{n_i \mid \exists l \in L(n), l.n_1 = n_i \vee l.n_2 = n_i\}.$$

Определим структуру данных для хранения модели в следующем виде:

$$LM = \{L(n_i) \mid \forall n_i \in N\}.$$

С точки зрения реализации в рамках объектно-ассоциативного языка программирования такая структура является ассоциативным контейнером типа хеш-таблицы или контейнера, основанного на построении дерева поиска, вычислительная сложность операций добавления, удаления, поиска элемента для любых типов ассоциативных контейнеров оценивается как  $O(\log n)$ , где  $n$  – количество пар элементов в контейнере [2].

Фактически это определенное представление графа  $G(N, L)$ , иллюстрирующего газотранспортную сеть. Одной из особенностей задачи является то, что топология сети меняется в реальном времени. Изменение состояния задвижек приводит к перекоммутации сети. Меняются множества входных и выходных узлов, кроме того, существуют узлы, которые могут играть роль как входных, так и выходных узлов сети (например, узлы, представляющие входы в подземные хранилища газа).

Таким образом, можно выделить следующие особенности расчетной модели:

- 1) топология сети меняется в реальном времени;
- 2) меняются множества входных и выходных узлов;
- 3) присутствуют пограничные узлы, характер которых определяется расчетным путем.

Введем еще несколько удобных ассоциативных контейнеров, которые будем использовать в алгоритмах оптимизации модели.

Контейнер признака присутствия  $F(n)$ , который хранит соответствие объекту, помещенному в него, отвечает значению флага *true/false* или 1/0. Тогда запись вида  $n \in F$  будем интерпретировать следующим образом: в ассоциативном контейнере признака  $F$  объекту  $n$  поставлено в соответствие значение флага, равное 1. Такая запись интуитивно понятна и удобна для использования в силу имеющейся аналогии с ассоциативными контейнерами языка программирования высокого уровня (C++, Java, C#).

Рассматривая возможное усовершенствование расчетной модели, необходимо сформулировать цель оптимизации в первую очередь как уменьшение размерности задачи.

Для достижения данной цели можно предложить следующие упрощения расчетной модели, принципиально не влияющие на точность и качество решения:

1. Удаление близкорасположенных узлов (превращение их в один узел);
2. Объединение участков трубопровода с идентичными параметрами сечения, грунта и глубины залегания в грунте, идущих друг за другом, в один участок суммарной длины;
3. Исключения из расчета фрагментов-баллонов, т.е. таких фрагментов газотранспортной сети, в которых нет узлов, отмеченных как входные. Для баллонов характерно то, что температура газа в них опускается до температуры грунта и присутствует нестационарный процесс «разбора» запаса газа потребителями. При этом допустима упрощенная процедура расчета запаса газа по усредненному давлению его в баллоне.

#### Алгоритм упрощения модели газотранспортной системы за счет удаления близкорасположенных узлов

1. Для всех узлов  $n_i$  зададим пустые начальные множества групп близко расположенных узлов  $Near(n_i) = \{ \}$ ;
2. Для всех  $l_k \in L$ , длина которых меньше заданного порога  $l_{min}$ ;
3. Если  $|L(l_k.p_1)| > 1$  и  $|L(l_k.p_2)| > 1$  (т.е. узлы не являются концевыми узлами) и у узлов  $l_k.p_1$  и  $l_k.p_2$  нет датчиков давлений или расходов, то
4.  $Near' = Near(l_k.p_1) \cup Near(l_k.p_2) \cup \{l_k.p_1\} \cup \{l_k.p_2\}$ ;
5.  $\forall n \in Near'$  определим  $Near(n) = Near'$ ;
6. Если не все  $l_k$  из множества  $L$  еще просмотрены, то переходим к следующему линку и переходим на пункт 3;
7. Сформируем уникальные группы близкорасположенных узлов во множестве групп  $G$ ;
8.  $\forall n \in N, G = G \cup Near(n) \mid G \cap Near(n) = \emptyset$ ;
9. Для каждой уникальной группы близко расположенных узлов создадим главный узел и перенаправим линки, идущие от внешних узлов к узлам группы на главный узел, т.е.  $\forall Near_i \in G$ , создадим  $main_i$ ;  
 $\forall n \in Near_i$   
 $\forall l \in L(n)$ , если второй узел  $n_x$  в данном линке, отличный от  $n$ , не принадлежит множеству близкорасположенных узлов  $Near_i$ , то создадим  $link = l$  с заменой в нем узла  $n$  на  $main_i$ , а если у  $main_i$  узла уже есть связь с внешним узлом  $n_x$  (длины этих линков, исходя из логики топологии газотранспортной сети, должны быть близки), то модифицировать этот линк так, чтобы он приобрел суммарный геометрический объем при усредненной длине;
10. Удалим из модели все исходные линки узлов из множества  $Near_i$  и узлы данного множества, добавим мастер узел  $main_i$  и линки, связанные с ним, в модель;

11. Если рассмотрены не все уникальные группы, то перейдем к пункту 9;
12. Выход.

Хотим обратить внимание на шаг 8 алгоритма:

$$\forall n \in N, G = G \cup Near(n) \mid G \cap Near(n) = \emptyset.$$

Предполагается, что для каждого узла модели сформирована группа близкорасположенных с ним узлов, т.е. для двух узлов, относящихся к одной группе, хранятся идентичные группы близкорасположенных узлов. Размерность данных для группы объемом  $M$  будет  $M \times M$ . Программная реализация проверки на вхождение такой группы во множество групп  $G$  будет довольно ресурсоемка. Поэтому предлагается следующая реализация данного шага алгоритма, сводящая вычислительную сложность такой проверки к  $O(1)$ , заключающаяся в использовании хеш-таблицы в качестве контейнера признака присутствия.

Введем контейнер признака присутствия  $F_{exist} : R \rightarrow B$  ( $R$  – множество действительных чисел,  $B$  – пространство булевых значений  $\{1, 0\}$ ). Для каждого элемента обеспечим наличие уникального идентификатора. И признаком идентификации уникальной группы будем рассматривать число, например, равное произведению уникальных идентификаторов объектов в группе.

Оператор вычисления идентификатора группы обозначим как  $id(N)$ .

Тогда, при условии, что сформированы множества  $Near(n)$  для каждого узла, алгоритм выделения уникальных групп будет следующим:

1.  $G = \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$  и положим  $k = 1$ ;
2.  $\forall n \in N$ , если  $F_{exist}(id(Near(n))) = 1$ , то переход к следующему узлу, иначе, переход к шагу 3. Если все узлы пройдены, то переход к шагу 4;
3.  $G_k = Near(n)$ ,  $k = k + 1$ , возврат к шагу 2;
4. Выход.

#### Алгоритм объединения участков трубопровода с идентичными параметрами сечения

1. Зададим множество групп объединяемых узлов  $G = \{ \}$
2. Для каждого узла, соединяющего два линка  $\forall n \in N \mid |L(n)| = 2$ , при условии идентичности параметров сечения этих линков, создадим новый линк, равный по длине суммарной длине объединяемых линков с узлами, отличными от  $n$ ;
3. Добавим в модель новый линк;
4. Удалим из модели узел  $n$  и соединяемую им исходную пару линков;
5. Если еще существуют узлы, соединяющие 2 линка с идентичными параметрами сечения, то перейти на пункт 2;
6. Выход.

#### Алгоритма поиска фрагментов-баллонов

1. Зададим множество групп связанных узлов  $G = \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$  и положим  $k = 1$ ;
2. Организуем выбор узла, который отсутствует в группах связанных узлов:  $n \in N \mid n \notin G_i \forall G_i \in G$ . Если такой узел отсутствует, то переходим к шагу 10. Для обработки найденного узла перейдем к шагу 3;
3. Введем контейнеры флагов для обработки узла  $n$ :  
 $F_{current}(n)$  – узлы связанной группы, достижимые из узла  $n$ , ассоциированы со значением флага равным 1,  
 $F_{new}(n_i)$  – узлы связанной группы, достижимые от рассматриваемого узла  $n_i$  за 1 шаг (с длиной пути в 1), ассоциированы со значением флага равным 1;
5.  $F_{current}(n) = 1$ ,  $F_{new}(n_p) = \{ \}$ ;
6.  $\forall n \in F_{current}$ ;
7.  $\forall n_p \in N \setminus (n)$ , если  $n_p \notin G_k$  и  $n_p \notin F_{current}(n)$ , то  $F_{new}(n_p) = 1$ ;
8. Если  $F_{new}(n_p) = \{ \}$ , то переходим к шагу 9;
9.  $G_k = G_k \cup F_{current}$ ,  $F_{current} = F_{new}$ ,  $F_{new} = \{ \}$  и перейти к шагу 5;
10.  $G_k = G_k \cup F_{current}$ ,  $k = k + 1$  и переходим к шагу 2;
11. Выход.

Данный алгоритм поиска изолированных связанных фрагментов сети еще не дает ответ на вопрос является ли найденный фрагмент баллоном. Для этого необходимо проанализировать состав групп и выявить группы, в состав которых не входят узлы, имеющие признак входных (выходы компрессорных станций, цехов, регуляторов, и др.).

Определение фрагмента сети в качестве баллона позволяет исключить его из расчетной модели и руководствоваться упрощенной процедурой расчета запаса газа.

Необходимо отметить, поскольку топология сети меняется в реальном времени, баллоны могут включать в себя произвольные подмножества узлов, то возможна ситуация, когда в баллоне отсутствуют узлы, оснащенные датчиками давления. Такая ситуация делает невозможным расчет запаса газа в баллоне и требует применения эвристик обработки ошибочных ситуаций для автоматического режима функционирования программного комплекса.

**Заключение.** Предложенные алгоритмы уменьшения размерности модели сети транспортировки газа нашли свое практическое применение в программном комплексе расчета запаса газа на магистральном газопроводе ОАО «Газпром трансгаз Беларусь». Эффект от реализации предложенных алгоритмов привел более чем к двукратному уменьшению размерности модели и, соответственно, времени расчета до установленного порогового значения невязки. Вторым положительным моментом стало то, что значительно упростились процедуры поиска несоответствий и ошибок в телеметрических данных на стадии контроля качества исходной расчетной схемы и результата расчета.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений (UML 2). = Object-Oriented Analysis and Design with Applications / Гради Буч [и др.]. – Третье изд. – М. : Вильямс, 2010. – 720 с.
2. Ахо, А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. – М. : Мир, 1979. – 536 с.
3. Глухов, Д.О. Комбинированный алгоритм решения системы нелинейных уравнений газодинамической задачи для сетей транспортировки газа / Д.О. Глухов, А.Ф. Оськин, С.А. Авилкин // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундамент. науки. – 2011. – № 4. – С. 8–14.
4. Глухов, Д.О. Комбинированный алгоритм решения системы нелинейных уравнений газодинамической задачи для сетей транспортировки газа с использованием локальных эвристик // Д.О. Глухов, С.А. Авилкин // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундамент. науки. – 2011. – № 12 – С. 9–15.
5. Программный комплекс расчета запаса газа в газотранспортной системе ОАО «Газпром трансгаз Беларусь». Опыт эксплуатации / Д.О. Глухов [и др.] // Надежность и безопасность магистрального трубопроводного транспорта : сб. тез. VIII междунар. науч.-техн. конф., г. Новополоцк, 25–28 нояб. 2014 г. / Полоц. гос. ун-т ; редкол. : В.К. Липский [и др.]. – Новополоцк, 2014. – С. 143–144.

*Поступила 05.09.2016*

#### OPTIMIZATION ALGORITHM MODEL OF THE NETWORK TRANSPORTING OF LARGE DIMENSION TO THE PROBLEM OF CALCULATING GAS RESERVES

*D. GLUKHOV, T. GLUKHOVA*

*Modern needs of the pipeline industry are primarily concerned with the necessity of optimization transport regime in terms of minimizing energy costs. An important component of this task is to solve hydraulic and thermal as a result of mathematical modeling. In this paper, we propose algorithms optimization model of gas transportation network in order to reduce in the context of developed algorithms for solving systems of equations.*

**Keywords:** *stationary model, telemetry data, mathematical modeling, gas transportation problems.*

УДК 004.932

## СЕГМЕНТАЦИЯ ПАРКОВОЧНЫХ МЕСТ НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ АВТОСТОЯНОК

*П.В. ЯРОШЕВИЧ, канд. техн. наук, доц. Р.П. БОГУШ,  
канд. техн. наук, доц. Д.О. ГЛУХОВ  
(Полоцкий государственный университет)*

*Предложен алгоритм сегментации парковочных мест, который включает преобразование перспективы исходного изображения, адаптивную бинаризацию методом Отсу, применение операций математической морфологии, горизонтальное дифференцирование изображения, построение вертикальных линий, фильтрацию и определение координат парковочных мест. Для проведения экспериментов выполнена программная реализация алгоритма. Рассмотрены реализованные классы и представлены результаты выполненных экспериментальных исследований.*

**Ключевые слова:** машинное зрение, анализ изображений, структурирование мест парковки.

**Введение.** В последние годы благодаря развитию технологий компьютерного зрения предложен ряд видеосистем с интеллектуальной обработкой входных видеоданных для решения различных прикладных задач, включая системы управления автомобильными парковками [1–3]. Одним из этапов алгоритмического обеспечения таких систем является сегментация и локализация парковочных мест на изображениях. Общий подход при построении алгоритмов таких систем предполагает автоматическое обнаружение свободных и занятых парковочных мест. Для этого необходимо выполнение следующих основных этапов: предварительная сегментация и локализация парковочных мест (регионов интереса), вычисление их признаков, классификация полученных дескрипторов и интерпретация результата. Точное определение расположения парковочного места на изображении необходимо при выполнении ряда задач, например, при установке нового программно-аппаратного комплекса управления парковкой, при переносе точки обзора, при модернизации оборудования либо замене программного обеспечения и т.д.

В работе [4] для анализа занятости парковки используются изображения, полученные на основе аэросъемки. При этом предлагаемый алгоритм учитывает особенность размещения автомобилей над поверхностью Земли и построен на основе анализа карт интенсивности и высот для сегментации автомобиля на парковочном месте. После сегментации парковочных мест и автомобилей на них, восстанавливается изображение парковки со свободными парковочными местами. На основе изображений автомобилей генерируются 3D-структуры, которые затем используются для моделирования активности на парковке. Для эффективной работы метода требуется четкая видимость разделяющих полос. Таким образом, при достаточно большой занятости парковки алгоритм некорректно сегментирует регионы интереса и автомобили. В статье [5] рассматривается структурирование парковочных мест на автостоянке на основе комбинированного метода, включающего два шага. При этом первый шаг выполняет оператор, который выделяет границы каждого места парковки белым цветом и присваивает центральному пикселю желтый цвет. На втором шаге на основе программной реализации алгоритма выполняется автоматический поиск преобразованных пикселей желтого цвета и определение координат границ обнаруженного региона интереса. В [6] авторы предлагают алгоритм определения расположения парковочных мест, состоящий из следующих шагов: определение расположения линий, применение процедур фильтрации, предварительное объединение линий в парковочные места и ряды, операции интерполяции, экстраполяции и предсказания для обнаружения пропущенных мест парковки. Метод достаточно эффективен, однако необходимо использовать изображения, полученные на основе аэросъемки с четкой видимостью разделяющих полос.

В данной работе предлагается эффективный алгоритм для автоматической сегментации парковочных мест на изображениях автомобильных парковок, получаемых с использованием камер видеонаблюдения, который включает преобразование перспективы исходного изображения, адаптивную бинаризацию методом Отсу, применение операций математической морфологии, горизонтальное дифференцирование изображения, построение вертикальных линий, фильтрацию и определение координат парковочных мест.

**1. Алгоритм сегментации парковочных мест.** Предложенный алгоритм сегментации и локализации парковочных мест состоит из последовательности следующих шагов:

1. Преобразование перспективы изображения парковки. На исходном изображении определяются четыре исходные точки  $(x_i, y_i)$   $i = \overline{1,4}$ , координаты которых на преобразованном изображении являются

вершинами прямоугольной области  $(x'_i, y'_i) \quad i = \overline{1,4}$ . Данная область характеризуется минимальной площадью, которая охватывает исходные точки. Выполняется преобразование перспективы:

$$(x'_i, y'_i, 1) = H \times (x, y, 1)^T,$$

где  $H$  – матрица гомографии.

Матрица гомографии формируется на основе вектора  $G_H = (h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{31}, h_{32})^T$  в результате решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$V \cdot G_H = Y',$$

где  $V$  – матрица размера  $8 \times 8$ :

$$V = \begin{bmatrix} \overline{(x, y, 1)}^T & 0 & \overline{-(x \cdot x')}^T & \overline{-(x' \cdot y')}^T \\ 0 & \overline{(x', y', 1)}^T & \overline{-(x \cdot y')}^T & \overline{-(y \cdot y')}^T \end{bmatrix},$$

$Y'$  – вектор-столбец размера  $8 \times 1$ :

$$Y' = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, y'_1, y'_2, y'_3, y'_4)^T.$$

2. Бинаризация изображения методом Отсу. Данный алгоритм, используя пороговое значение, делит гистограмму изображения на два класса [7].

Полагая, что пиксели подразделяются на два класса, алгоритм минимизирует взвешенную дисперсию  $\sigma_w^2(t)$  между классами, объявленную в выражении

$$\sigma_w^2(t) = q_1(t) \cdot \sigma_1^2(t) + q_2(t) \cdot \sigma_2^2(t),$$

где  $t$  – порог,  $t \in 0 \dots 255$ .

Функция вероятности  $P$  определяется для каждого значения пикселя. На первом шаге вычисляется гистограмма распределения для изображения, далее осуществляется нормализация для гарантирования вероятностного распределения. Затем значения пикселей разделяются на два класса  $C_1$  и  $C_2$  при использовании порога  $t$  и вероятностей  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$  соответственно:

$$q_1(t) = \sum_{i=1}^t P(i), \quad q_2(t) = \sum_{i=t+1}^I P(i),$$

где значения пикселей двух классов  $C_1$  и  $C_2$  находятся в промежутках  $[1, t]$  и  $[t + 1, I]$  соответственно.

Тогда значения средних  $\mu_1(t)$  и  $\mu_2(t)$  для классов  $C_1$  и  $C_2$  вычисляются следующим образом:

$$\mu_1(t) = \sum_{i=1}^t \frac{i \cdot P(i)}{q_1(t)}, \quad \mu_2(t) = \sum_{i=1}^I \frac{i \cdot P(i)}{q_2(t)};$$

дисперсии для тех же классов:

$$\sigma_1^2(t) = \sum_{i=1}^t [i - \mu_1(t)]^2 \frac{P(i)}{q_1(t)}, \quad \sigma_2^2(t) = \sum_{i=1}^I [i - \mu_2(t)]^2 \frac{P(i)}{q_2(t)}.$$

Значение дисперсии показывает эффективность выбора пороговой величины. Полная дисперсия вычисляется следующим выражением:

$$\sigma^2 = \sigma_w^2(t) + \sigma_b^2(t),$$

где  $\sigma_w^2(t)$  – функция уровня порога  $t$ , основанная на дисперсии;

$\sigma_b^2(t)$  – функции уровня порога  $t$ , основанная на математическом ожидании:

$$\sigma_b^2(t) = q_1(t) \cdot q_2(t) \cdot [\mu_1(t) - \mu_2(t)]^2.$$

Алгоритм направлен на уменьшение  $\sigma_w^2(t)$  или увеличение  $\sigma_b^2(t)$ .

3. Применение операций математической морфологии: операция замыкания – для удаления разрывов на разделяющих парковочные места полосах, размыкания – фильтрация мелких и несвязанных элементов.

Замыкание выполняется на основе правила:

$$A \bullet B = (A + B) - B,$$

где  $A + B$  – операция дилатации;  $A$  – обрабатываемое изображение;  $B$  – структурирующий элемент типа «квадрат» размером  $7 \times 7$ ;  $A - B$  – операция эрозии.

Размыкание выполняется как

$$A \circ B = (A - B) + B,$$

где  $B$  – структурирующий элемент типа «квадрат» размером  $5 \times 5$ .

4. Горизонтальное дифференцирование изображений. Изображению  $I_{x,y}$  ( $x = \overline{0, w-1}$ ,  $y = \overline{0, h-1}$ , где  $w$  – ширина изображения,  $h$  – высота изображения) ставится в соответствие конечное множество векторов  $\{V_i(x, y, l)\}_{i=0, nov-1}$ , где каждый вектор  $V_i(x, y, l)$ , из  $nov$  общего числа векторов, задает неразрывную горизонтальную последовательность пикселей, с началом в координате  $(x, y)$  и длиной  $l$ , а именно  $(x, y) = (x, y+1) = \dots = (x, y+l-1) = Color.Black$ . Множество векторов горизонтальных линий  $\{V_i\}_{i=0, nov-1}$ , определяется последовательностью следующих действий:

- 1  $nov = 0, l = 0$
- 2 *for*  $y = 0 : h - 1$
- 3 *for*  $x = 0 : w - 1$
- 4 *if*  $I_{x,y} \equiv Color.Black$
- 5  $V(x, y, l) = V(0, 0, 0)$
- 6 *while*  $I_{x,y} \equiv Color.Black$
- 7  $V : x = V : x + 1$
- 8  $V : l = V : l + 1$
- 9  $V_{nov}(x, y, l) = V(x, y, l)$
- 10  $nov = nov + 1, l = 0$

5. Построение вертикальных линий  $\{L_j(\overline{V})\}_{j=0, nol-1}$  на основе элементов множества векторов  $\{V_i\}$ ,

где  $nol$  – количество детектированных линий, осуществляется следующим образом:

- 1  $j = 0, nov_j = 0$  ( $nov_j$  – количество векторов в линии)
- 2  $T = V_j$
- 3 *while*  $nov \neq 0$
- 4  $nov_j = 0$
- 5  $L : V_{nov_j} = T$
- 6  $nov_j = nov_j + 1$
- 7 *for*  $i = 0 : nov - 1$
- 8  $T = V_i$
- 9  $min = \min(L : V_0 : l, L : V_{nov_j-1} : l, T : l)$
- 10 *if*  $L : V_{nov_j-1} : y - T : y \equiv 1$  *and*  $min > |L : V_0 : x - T : x|$   
*and*  $min > |L : V_0 : x + L : V_0 : l - T : x + T : l|$
- 11  $L : V_{nov_j} = T$
- 12  $nov_j = nov_j + 1$



```

13    remove T from {Vi}
14    i = i - 1
15    if novj ≡ 1
16        remove T from {Vi}
17    else
18        Lj = L
19        j = j + 1

```

В вертикальной линии  $L_j$ , как указано в условии 10, образующие её вектора должны находиться один под другими и не превышать соседние по длине.

6. Описание линий начальными координатами  $(x, y)$ , шириной  $w$  и высотой  $h$ :  $L_j(x, y, w, h)$ . Для этого в область, образуемую последовательностью векторов, вписывается прямоугольник, с максимально возможной шириной и высотой. Результатом данного шага является детектирование вертикальных полос, разделяющих парковочные места.

7. Фильтрация линий по средней высоте и ширине. При вычислении средних значений не используются линии с высотой или шириной, равной единице.

8. Определение координат парковочных мест. Линии сортируются по начальным координатам: слева на право, сверху вниз. Затем они объединяются в парковочные места, образуя множество парковочных мест  $\{S_k(L_l, L_r)\}_{k=0, nos-1}$ , где  $L_l, L_r$  – левая и правая разделяющие полосы соответственно,  $nos$  – количество парковочных мест. Формирование множества парковочных мест  $\{S_k\}$  происходит следующим образом:

```

1    i = 0, nos = 0
2    S = S(L0, L1)
3    i = i + 1 + 1
4    for i = i : nol - 1
5        if max(S : Ll : w, S : Lr : w, Li : w) > |(S : Lr : x - S : Ll : x) - (Li : x - S : Lr : x)|
6            Snos = S
7            nos = nos + 1
8            S = S(Snos-1 : Lr, Li)
9        else if i < nol - 1
10           S = S(Li, Li+1)
11           i = i + 1

```

9. Описание парковочного места  $S_k$  начальными координатами  $(x, y)$ , шириной  $w$ , высотой  $h$ :  $\{S_k(x, y, w, h)\}_{k=0, nos-1}$ , при этом

$$\begin{aligned}
 x &= L_l : x + L_l : w; \\
 y &= \min(L_l : y, L_r : y); \\
 w &= L_r : x - x; \\
 h &= \max(L_l : y + L_l : h, L_r : y + L_r : h) - y.
 \end{aligned}$$

**2. Программная реализация и результаты исследования.** Для проведения экспериментов и оценки результатов исследований рассмотренный подход реализован на языке Java с использованием библиотеки компьютерного зрения OpenCV 3.0.0. При этом реализованы следующие классы.

*Element* предназначен для хранения информации о горизонтальных векторах  $V_i(x, y, l)$ . В качестве свойств класса используются переменные  $x$ ,  $y$ , и  $l$ , которые описывают последовательность пикселей длиной  $l$  с началом в координате  $(x, y)$ . Конструктор *Element* производит инициализацию полей класса.

*ElementsLine* применяется для описания вертикальной полосы  $L_j(\bar{V})$  набором векторов  $\{V_i\}$ . Класс наследует `ArrayList<Element>` и представляет собой список элементов *Element*. *ElementsLine* содержит координаты  $(sx, sy)$  начала, координаты  $(ex, ey)$  окончания линии и параметры размеров  $(w, h)$

линии. Метод  $calculate\$x\$y\$w\$h$  осуществляет определение размеров линии по имеющимся элементам текущего списка и переводит класс в вид  $L_j(x, y, w, h)$ , где  $(x, y)$  – координаты верхнего левого угла.

$Lines$  представляет собой список элементов  $ElementsLine$ , наследуя  $ArrayList<ElementsLine>$ , и содержит метод  $defineElementsLine$ , который определяет параметры линий по координатам ее начала и размерам для всех содержащихся в списке элементов.

$ParkingSpace$  предназначен для хранения информации о парковочном месте, которое описывается левой и правой разделяющими линиями  $S_k(L_l, L_r)$ , параметрами начальной точки и размером парковочного места  $S_k(x, y, w, h)$ . Полями класса являются левая и правая разделяющие парковочные линии ( $left, right$ ), координаты места парковки  $(sx, sy, ex, ey)$ , размеры парковочного места  $(w, h)$ . Класс содержит конструктор  $ParkingSpace$ , осуществляющий инициализацию его свойств.

$ParkingSpaceGroup$  представляет собой список элементов  $ParkingSpace$ , наследуя  $ArrayList<ParkingSpace>$ , и хранит информацию о местах парковки в парковочном ряду. Полями класса являются координаты и размеры парковочного ряда. Конструктор  $ParkingSpaceGroup$  осуществляет инициализацию свойств класса. Метод  $add$  является переопределенной функцией интерфейса  $List$ , предназначен для определения изменений свойств класса при добавлении нового региона интереса.

$PakingLot$  является вершиной иерархии описания парковки, наследует  $ArrayList<ParkingSpaceGroup>$ . Данный класс содержит методы  $read$  и  $write$ . Метод  $read$  считывает данные, описывающие регионы интереса и их статусы на изображении парковки, и возвращает элемент класса  $PakingLot$ . Метод  $write$  предназначен для записи элемента  $PakingLot$  в файл.

$PakingSpaceDetector$  используется для локализации регионов интереса парковочных мест согласно алгоритму, описанному в разделе 1. Для выполнения шагов 1–3, 4–6 и 7 алгоритма реализованы функции  $processImage$ ,  $detectVecticalLines$  и  $detectParkingSpaces$  соответственно. Метод  $detect$  последовательно вызывает указанные функции. Метод предназначен  $definePakingLot$  для объединения парковочных мест в ряды.

Для осуществления чтения и записи данных парковки в/из файлов формата \*.xml реализованы классы  $XMLParkingLotReader$  и  $XMLParkingLotWriter$ .

На рисунке 1 представлен пример работы основных шагов предложенного алгоритма. В результате последовательного применения преобразования перспективы изображения, бинаризации методом Отсу и операций математической морфологии для исходного изображения (рис. 2, а) получаем изображение парковки, показанное на рисунке 1, а.

Рисунок 1, б представляет собой увеличенный фрагмент изображения, выделенный красным цветом на рисунке 1, а.

Результат горизонтального дифференцирования изображения (рис. 1, б) показан на рисунке 1, в.

На основе горизонтального дифференцирования построены вертикальные линии (рис. 1, г), которые объединяются в парковочные места (рис. 1, д).

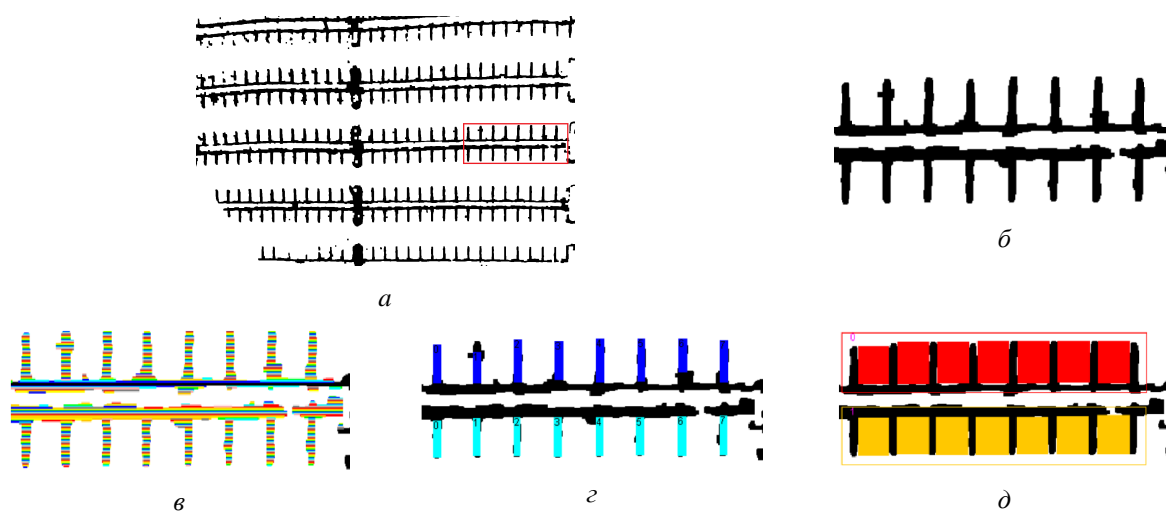
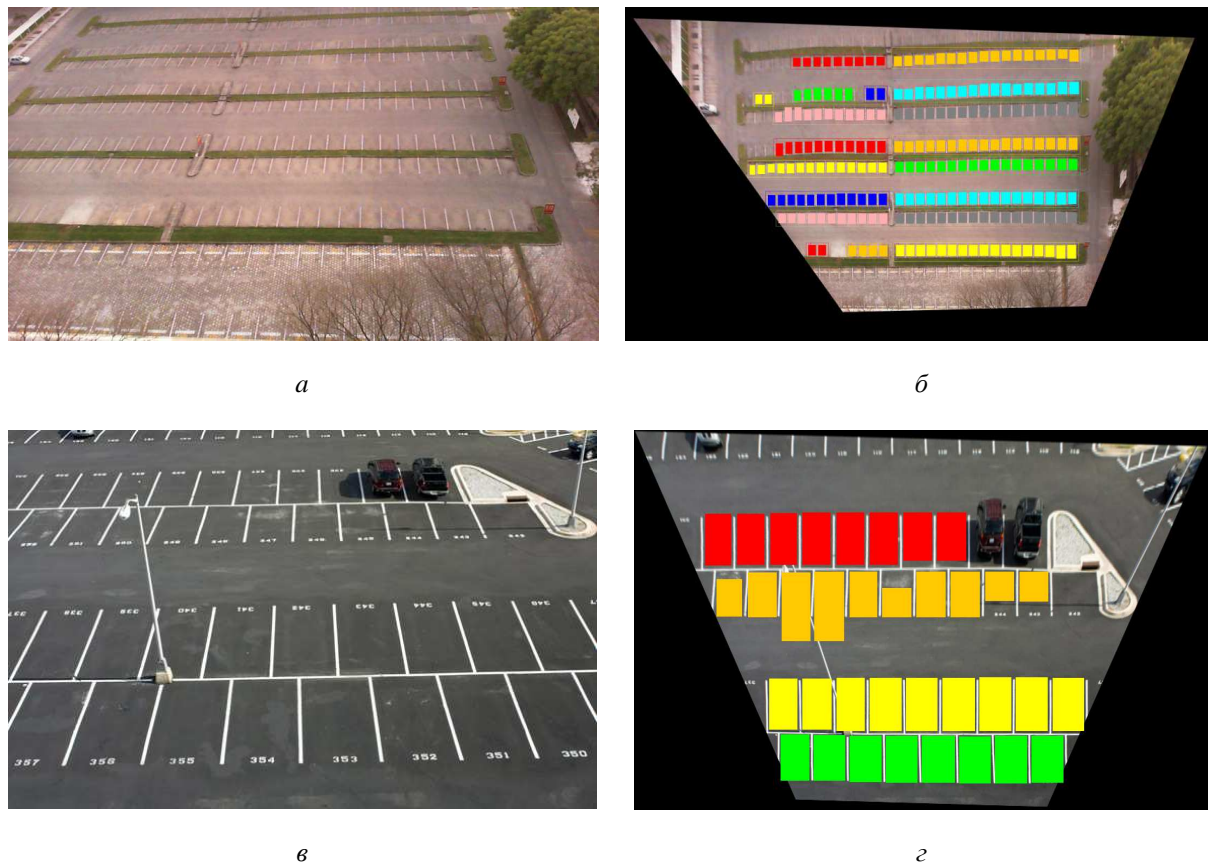


Рисунок 1 – Пример визуализации основных шагов алгоритма сегментации парковочных мест:  
 а – результат применения шагов 1–3 алгоритма; б – увеличенный фрагмент изображения из рисунка 1 а;  
 в – горизонтальное дифференцирование изображения; г – результат построения вертикальных линий;  
 д – сегментированные парковочные места

Анализ результатов исследований свидетельствует о том, что предложенный алгоритм позволяет достаточно эффективно сегментировать парковочные места на изображениях автостоянок. Ошибки в работе алгоритма возможны в случае существенного отличия размеров парковочных мест или их перекрытия сторонними объектами.



**Рисунок 2 – Пример сегментации мест парковки:**  
***a* и *c* – исходные изображения парковок, *b* и *d* – результат сегментации парковочных мест**

**Заключение.** Синтезирован алгоритм сегментации парковочных мест, который требует выполнения следующих основных шагов:

- преобразования перспективы исходного изображения;
- адаптивной бинаризации методом Отсу;
- применения операций математической морфологии;
- горизонтального дифференцирования изображения;
- построения вертикальных линий;
- фильтрации линий по толщине;
- определения координат парковочных мест.

Для проведения экспериментов и оценки результатов исследований рассмотренный подход реализован на языке *Java* с использованием библиотеки компьютерного зрения *OpenCV 3.0.0*. Анализ результатов исследований свидетельствует о том, что предложенный алгоритм позволяет достаточно эффективно сегментировать и локализовать парковочные места на изображениях автомобильных парковок.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алпатов, Б. А. Методы автоматического обнаружения и сопровождения объектов. Обработка изображений в управлении / Б. А. Алпатов [и др.]. – М. : Радиотехника, 2008. – 176 с.
2. Богуш, Р. П. Система обработки информации для интеллектуального видеонаблюдения / Р. П. Богуш [и др.] // Вест. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундамент. науки. – 2010. – № 3. – С. 23–29.

3. Baroffio, L. A visual sensor network for parking lot occupancy detection in smart cities / L. Baroffio [et al.] // Internet of things, IEEE 2nd world forum. – 2015. – P. 745–750.
4. Wang, X. Parking lot analysis and visualization from aerial image / X. Wang, A. Hanson // Proc. 4th IEEE Workshop on Applications of Computer Vision. – 1998. – P. 36–41.
5. Bong, D. B. L. Integrated approach in the design of car park occupancy information system. / D. B. L. Bong, K. C. Ting, K. C. Lai // IAENG International Journal of Computer Science. – 2008. – № 35. – P. 1–8.
6. Seo, Y. W. Utilizing prior information to enhance self-supervised aerial image analysis for extracting parking lot structures / Y. W. Seo, C. Urmson // 2009 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. – 2009. – P. 339–344.
7. Otsu, N. A threshold selection method from gray-level histogram / N. Otsu // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. – 1979. – № 9. – P. 62–66.

Поступила 16.09.2016

### PARKING SPACES SEGMENTATION IN IMAGES OF CAR PARKING

*P. YARASHEVICH, R. BOGUSH, D. HLUKHAU*

*The algorithm includes: perspective transformation of the original image, he adaptive binarization Otsu's method, application of mathematical morphology operations, horizontal image differentiation, construction of vertical lines, filtering, determination of coordinates of parking spaces. For the experiments performed software implementation of the algorithm, described implemented classes. The results of the experiments are proposed.*

**Keywords:** machine vision, image analysis, segmentation of parking spots.

УДК 629.78

**МОДЕЛИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА ФОРМИРОВАНИЯ РАДИОЛОКАЦИОННОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ ПРЕДСТАВЛЕННЫХ В ФОРМАТЕ CEOS НЕОБРАБОТАННЫХ ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЗЕМЛИ**

*кан. техн. наук, доц. Р.П. БОГУШ, С.А. ИГНАТЬЕВА  
(Полоцкий государственный университет);*

*кан. техн. наук Н.М. НАУМОВИЧ, С.П. УРБАНОВИЧ  
(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники)*

*Системы дистанционного зондирования Земли на основе радиолокаторов с синтезированной апертурой антенны позволяют получать детальные радиолокационные изображения местности с качеством близким к оптическим системам при любых метеоусловиях и в любое время суток. Для представления необработанных радиолокационных данных применяется формат CEOS, предписывающий использование структуры из четырех файлов, включая файл каталога тома, файл заголовка, файл данных, файл нулевого тома. Выполнено моделирование процедуры формирования изображения с использованием пакета MatLab. Для этого применяется алгоритм быстрой свертки с компенсацией миграции дальности, который позволяет получить сфокусированное комплексное изображение. Приведены результаты моделирования и описаны основные используемые функции при реализации алгоритма в пакете MatLab.*

**Ключевые слова:** синтезированная апертура, формат данных CEOS, радиолокационное изображение.

**Введение.** Одной из приоритетных задач мирового сообщества в настоящее время является обеспечение глобального мониторинга Земли при различных метеорологических условиях [1, 2]. Среди существующих систем дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) системы на основе радиолокаторов с синтезированной апертурой антенны (РСА), установленные на космических аппаратах, позволяют получать детальные радиолокационные изображения местности с качеством близким к оптическим системам при любых метеоусловиях и в любое время суток. Преимущество радиолокационного зондирования состоит в том, что оно является средством выявления физических свойств объектов в СВЧ-диапазоне волн и измерительным инструментом с возможностями использования фазовой информации, применения широкого набора режимов съемки и алгоритмов обработки данных. Это позволяет существенно расширить круг решаемых прикладных задач в научных и хозяйственных сферах, мониторинге катастроф и чрезвычайных ситуаций, обеспечении государственной безопасности [1].

С момента появления коммерчески доступных систем обработки радиолокационных данных возникла необходимость их стандартизации, что привело к созданию Комитета по спутниковым наблюдениям Земли (Committee on Earth Observation Satellites – CEOS), в который вошли 28 космических агентств. Данным комитетом приняты стандарты по уровням обработки радиолокационных данных и форматам их представления [3]. Однако некоторые космические агентства, базируясь на принятых стандартах, используют свои представления и обозначения уровней обработки [4]. В основном выделяют следующие уровни представления радиолокационных данных космической съемки: необработанные данные, представляющие собой радиоголограмму (РГГ), и набор метаданных; предварительно обработанные данные, для которых выполнена радиометрическая и геометрическая коррекция; вторично обработанные данные, имеющие к тому же пространственную привязку в заданной системе координат [4, 5]. Известно, что чем ниже уровень обработки данных, тем меньше вероятность возникновения ошибок, достаточно просто организовать изменение алгоритмов при обработке, возможны максимальная автоматизация процесса и сокращение времени обработки и объема памяти [1, 6]. При этом определение состава и формата представления основных и вспомогательных данных при описании радиолокационной информации требует учета многих разнородных факторов процесса функционирования РСА и его носителя [5]. Комитетом CEOS рекомендован формат CEOS для набора метаданных РСА, который включает фиксированных записей, состоящих из смеси ASCII и бинарных записей [3]. Реализация РСА ставит ряд сложных задач при синтезе алгоритмов обработки, поэтому на первом этапе применяются методы математического моделирования процессов преобразования и обработки сигналов.

**Представление данных в формате CEOS.** Для представления радиолокационных данных ДЗЗ в формате CEOS используется структура из четырех файлов (рис. 1, а): файл каталога тома (Volume directory file), файл заголовка (Leader file), файл данных (Data set file), файл нулевого тома (Null volume file) [3]. Каждый файл содержит записи, первые 12 байт которых имеют одинаковую структуру и включают информацию о порядковом номере записи (с первого по четвертый байт), типе кода записи для ее

идентификации при обработке, расположенные с пятого по восьмой байт (CEOS-код), и длину записи (с девятого по двенадцатый байт). Каждая запись разделена на области, имеющие в зависимости от содержимого определенный формат, описание которого состоит из двух частей. Для первой части используется буквенное обозначение областей: А – буквенно-цифровая, В – код CEOS, I – целочисленные данные, F – числовая с плавающей точкой, E – числовая экспоненциальная область. Вторая часть описания представляется числом, указывающим количество байт, занимаемых данной областью. Если эта часть представлена дробным числом, то целая часть числа дает информацию об общем количестве байт области, а часть числа после запятой – информацию о количестве байт, отведенных для дробной составляющей.

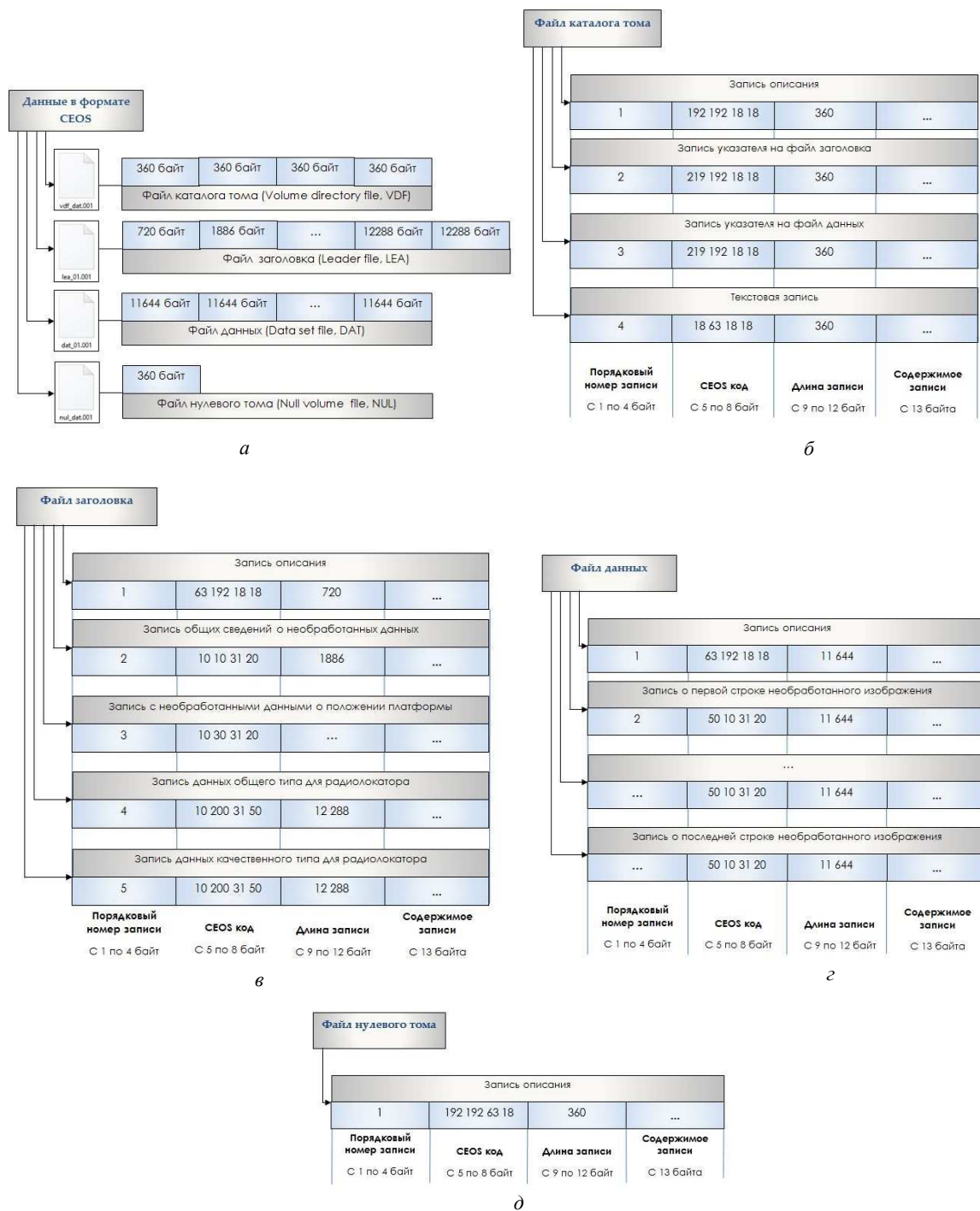


Рисунок 1. – Структура радиолокационных данных в формате CEOS: а – общая схема представления данных; б – структура файла каталога тома; в – структура заголовочного файла; г – структура файла данных; д – структура файла нулевого тома

Файл каталога тома содержит запись его описания, запись указателя на файл заголовка, запись указателя на файл данных, текстовую запись (рис. 1, б). Запись описания тома включает идентификаторы и количество томов, их порядковые номера, дату, время, страну, организацию создания тома и др. Запись указателя на файл заголовка содержит максимальную длину записи в файле и номер физического тома. Запись указателя на файл данных хранит тип данных, тип кода данных, количество записей и др. Текстовая запись содержит текстовую информацию о спецификации типа продукта, местоположение и дату создания продукта, идентификатор и местоположение сцены.

Файл заголовка включает запись описания, запись о необработанных данных, запись с необработанными данными о положении платформы, запись данных общего типа для радиолокатора, запись данных качественного типа для радиолокатора (рис. 1, в). Запись описания содержит идентификатор формата контрольного документа, номер и имя файла, сведения о локации и наборе данных, информацию о количестве и длине записи картографической проекции, положении платформы, пространственном положении, радиометрических данных, радиометрических коррекциях, спектральных диапазонах, корректировках параметров радара, типе длины записи. Запись о необработанных данных хранит основные параметры датчиков, точные параметры датчиков (кодирование времени), общие параметры для обработки, указатель диапазона сжатия, параметры сцены и особенности, характерные для рассматриваемого участка местности. Запись с необработанными данными о положении платформы включает информацию о позиционировании опорных точек кадра, точную дату получения каждой из точек, временной интервал между точками, справку о системе координат, ошибку позиционирования вдоль и перпендикулярно направлению движения платформы, вектора положения и скорости для каждой точки. Запись данных общего типа для радиолокатора содержит информацию о начальной длительности стробирующего импульса, об изменении частоты следования импульсов, о калибровочных коэффициентах, состоянии опорного ЛЧМ сигнала, входных данных статистики, достоверности среднего значения доплеровской частоты, степени достоверности неопределенности сдвига доплеровской частоты, количестве вышеперечисленных изменений, уровнях боковых лепестков кросс-корреляционной функции ЛЧМ, расчетных значениях квадратурной и синфазной составляющей входного сигнала, калибровке сигнала.

Файл данных включает запись описания файла и набор записей необработанных данных (рис. 1, г). Запись описания файла содержит идентификатор формата контрольного документа, номер и имя файла, данные о локации (номер, протяженность, код, флаг локации), информацию о количестве записей с необработанными данными, длине каждой записи, количестве строк и пикселей в каждом комплекте данных. Каждая запись с данными необработанного сигнала хранит описание, включающее количество строк, количество пикселей в строке, вспомогательную информацию о параметрах датчиков, счетчик пакетов, и представляет собой одну строку РГГ, т.е. отраженные сигналы для одного зондирующего импульса. Каждый элемент строки РГГ представлен двумя байтами, по одному байту на синфазную и квадратурную составляющие отраженного сигнала.

Файл нулевого тома содержит запись описания файла, которая включает идентификаторы физического и логического томов, количество томов, их порядковые номера, дату, время, страну, организацию создания тома (рис. 1, д).

**Методика формирования радиолокационного изображения.** В основе компьютерного моделирования используется метод формирования радиолокационного изображения на основе алгоритма быстрой свертки с компенсацией миграции дальности, который позволяет получить сфокусированное комплексное изображение [7]. Алгоритм требует выполнения сжатия по дальности и по азимуту с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ). Для сжатия по дальности необходимо вычислить спектр, выполнить свертку полученного спектра с комплексно-сопряженной опорной функцией по дальности и к результату применить обратное БПФ. Сжатие по азимуту в данном алгоритме включает компенсацию миграции дальности. Выходные данные после завершения процедуры сжатия по дальности представляются в частотной области. Далее каждый столбец массива полученных значений складывается с соответствующим значением смещения частоты, затем выполняется свертка с опорной функцией по азимуту и к полученным данным применяется обратное БПФ. Таким образом, для формирования радиолокационного изображения с использованием представленных в формате CEOS необработанных данных ДЗЗ на основе алгоритма быстрой свертки с компенсацией миграции дальности необходимо решить следующие задачи:

- считать из файла заголовка метаданные, а из файла с данными получить квадратурные и синфазные значения сигнала;
- рассчитать параметры, необходимые для формирования опорных функций по дальности и по азимуту;

– рассчитать частотный сдвиг для каждого пикселя изображения для компенсации миграции дальности;

– выполнить процедуры сжатия по дальности и по азимуту.

На подготовительном этапе алгоритма необходимо получить следующие метаданные из файла заголовка: наименование спутника; длину волны радиолокатора  $\lambda$ ; частоту следования импульсов  $f_{PRF}$ ; частоту дискретизации импульсов  $f_{дискр}$ ; длительность импульсов  $\tau$ ; длительность строба дальности  $\tau_{rgd}$ ; вектор скорости  $V_x$ ,  $V_y$  и  $V_z$  по трем координатам  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  соответственно; количество отсчетов по дальности  $M$ ; количество отсчетов по азимуту  $N$ . Кроме этого, необходимо задать реальную длину антенны  $L$ , высоту спутника над поверхностью Земли  $h$ , оценку скорости изменения частоты ЛЧМ сигнала  $K_R$ .

Для формирования опорных функций по дальности и по азимуту необходимо рассчитать:

– параметры радиолокатора: несущую частоту ( $f_c$ ) и ширину раскрыва антенны на уровне 3 дБ ( $B_a$ );

– характеристики скорости и времени: орбитальную скорость платформы ( $V$ ), путевую скорость платформы ( $V_p$ ), временные значения по дальности ( $t$ ), период дискретизации по дальности  $\Delta t$ , временные значения по азимуту ( $\eta$ ), период дискретизации по азимуту ( $\Delta \eta$ ), интервал времени, в течение которого рассматриваемая точка находится в пределах диаграммы направленности антенны ( $\tau_{az}$ );

– характеристики отраженного сигнала: доплеровскую частоту ( $f_a$ ), центральную доплеровскую частоту ( $f_{dc}$ ), оценку доплеровской частоты ( $k_a$ ), частотный сдвиг ( $\Delta f$ ), фазу отраженного сигнала ( $\varphi_{avg}$ );

– характеристики дальности: разрешение по дальности ( $\Delta R$ ), минимальную наклонную дальность от платформы до каждой точки целевой области ( $R_{min}$ ), наклонную дальность, выраженную функцией от частотного сдвига ( $R(\Delta f)$ ), наклонную дальность, выраженную функцией от доплеровской частоты ( $R(f_a)$ );

– параметры обработки: общее количество строк РГГ ( $M_{iines}$ ); количество пикселей в строке ( $M_{pixei}$ ), которое обусловлено дальностью; количество отсчетов по азимуту ( $M_{azimut}$ ), определяющих размер малой апертуры; количество шагов алгоритма обработки ( $M_{step}$ ); количество строк фрагмента РГГ ( $M_{part}$ ).

Для усреднения мощности отраженного сигнала и повышения радиометрического разрешения изображения РГГ обрабатывается частями. При этом для эффективного применения алгоритма БПФ количество строк обрабатываемого фрагмента РГГ должно быть кратно степени числа 2. Данный подход реализуется путем деления всей азимутальной зоны наблюдения на малые апертуры, их обработкой и дальнейшим суммированием полученных РЛИ.

Количество шагов  $M_{step}$  алгоритма можно определить следующим образом:

$$M_{iter} = \frac{M_{iines}}{M_{azimut}}.$$

Следовательно, на первом шаге алгоритма из файла с данными формата CEOS необходимо считать  $M_{part}$  записей необработанных данных, в которых содержатся синфазные  $I$  и квадратурные  $Q$  составляющие отраженного сигнала. На каждой следующей итерации из файла с данными считывается  $M_{part}$  записей данных с учетом количества обработанных на предыдущих этапах фрагментов РГГ. Причем количество строк обработанного фрагмента РГГ определяется малой апертурой. Поскольку  $M_{part} > M_{azimut}$ , то фрагменты изображения на каждом этапе обработки перекрываются, что улучшает разрешение полученного РЛИ.

Число отсчетов по азимуту, определяющих размер малой апертуры может быть выражено как

$$M_{azimut} = M_{iines} - [\tau_{az} \cdot f_a],$$

здесь квадратные скобки означают, что полученное значение округляют до большего целого.

Количество пикселей в строке определяется с учетом представления синфазной и квадратурной составляющих для каждого дискретного отсчета отраженного сигнала:

$$M_{pixei} = \frac{K_{bytes} - K_{header}}{2} - \tau \cdot f_{дискр},$$

где  $K_{header}$  – количество байт, занимаемых префиксом каждой записи, является постоянным для необработанных данных в формате CEOS ( $K_{header} = 412$  байт);

$K_{bytes}$  – количество байт в каждой записи ( $K_{bytes} = 11644$  байт).



В общем виде зондирующий импульс при использовании ЛЧМ-сигнала может быть описан формулой

$$s = e^{i\varphi},$$

где  $\varphi$  – фаза зондирующего ЛЧМ-сигнала [1].

Фаза зондирующего ЛЧМ-сигнала определяется согласно выражению

$$\varphi = 2\pi f_c t + \pi K_R t^2,$$

где  $f_c$  – несущая частота ( $f_c = \frac{c}{\lambda}$ );

$c$  – скорость распространения электромагнитных волн.

При этом временной интервал определяется для  $|t| \leq \frac{\tau}{2}$  по формуле [8]

$$-\frac{\tau}{2} \leq t[n_r] \leq \frac{\tau}{2}.$$

Если  $t[n_r] = -\frac{\tau}{2}$  и  $\Delta t = \frac{1}{f_{\text{дискр}}}$ , то  $t[n_r] = -t[n_r - 1] + \Delta t$ , где  $n_r = 1, 2, 3, \dots, M_{\text{pixel}}$  – номер отсчета

по дальности.

Разрешение по дальности  $\Delta R = \frac{c}{2K_R\tau}$  не зависит от несущей частоты, следовательно при формировании опорной функции по дальности принимают  $f_c = 0$ , тогда

$$S_R = e^{i\pi K_R t^2}.$$

Движение летательного аппарата, вращение Земли и угол обзора приводят к тому, что центральная доплеровская частота принимает значения, отличные от нуля. Она характеризует сдвиг частоты отраженного сигнала от точки в центре диаграммы направленности антенны (ДНА), поэтому для обработки данных по азимуту необходимо определить доплеровскую частоту:

$$f_a = f_{dc} + K_a \eta.$$

Изменение доплеровской частоты приводит к такому явлению, как миграция дальности, и следовательно фаза отраженного сигнала также зависит от доплеровской частоты. Тогда при известной фазе отраженного сигнала для каждой точки можно вычислить значение центральной доплеровской частоты на основе данных, сжатых по дальности. Для каждого отсчета по дальности усредняется изменение фазы для двух соседних отсчетов по азимуту.

Среднее арифметическое всех средних значений изменения фаз позволяет получить центральную доплеровскую частоту:

$$f_{dc} = \frac{\text{mean}(\varphi_{\text{avg}})}{2\pi \cdot f_{PRF}},$$

где  $\varphi_{\text{avg}} = \arctg\left(\frac{Q}{I}\right)$  фаза, где  $Q$  – квадратурная составляющая отраженного сигнала,  $I$  – синфазная составляющая отраженного сигнала.

Оценка доплеровской частоты рассчитывается как

$$k_a = -\frac{2V_p^2}{\lambda R_{\min}},$$

где  $V_p = V \sqrt{\frac{r}{r+h}}$  – путевая скорость платформы, здесь  $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$  – орбитальная скорость,  $r$  – радиус Земли;

$R_{\min} = n_r \cdot \Delta R$  – минимальная наклонная дальность от платформы до цели, которая рассчитывается для каждой точки.

Известно, что скорость изменения частоты влияет на фазу отраженного сигнала, а доплеровская частота влияет на характеристики отраженного сигнала по азимуту. Поэтому при формировании опорной функции по азимуту оценка ЛЧМ  $K_R$  заменяется на оценку доплеровской частоты  $k_a$ . Тогда опорная функция по азимуту формируется для каждого отсчета по дальности, по азимутальному времени  $|\eta| < \frac{\tau_{az}}{2}$  и имеет вид

$$S_A = e^{i(2\pi f_c \eta + \pi k_a \eta^2)}.$$

При этом диапазон азимутального времени определяется как

$$-\frac{\tau_{az}}{2} \leq \eta[n_{az}] \leq \frac{\tau_{az}}{2},$$

где  $n_{az} = 1, 2, 3, \dots, M_{azimut}$ ;

$\tau_{az}$  – значения медленного времени, в течение которого рассматриваемая точка находится в пределах ДНА.

Значения медленного времени определяются по формуле

$$\tau_{az} = \frac{B_a}{V_p},$$

где  $B_a = \frac{0,8R(f_a)\lambda}{L}$  – ширина раскрыва антенны на уровне 3 дБ;

$R(f_a) = \frac{R_{\min}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda f_a}{2V_p}\right)^2}}$  – наклонная дальность как функция от доплеровской частоты;

$\Delta\eta = \frac{1}{f_{PRF}}$  – период дискретизации медленного времени.

Для компенсации миграции дальности необходимо учитывать миграцию дальности по всей ширине ДНА. Массив сжатых по дальности данных рассматривается в частотной области, т.е. в координатах наклонная дальность, доплеровская частота ( $R_a, f_a$ ). При этом элементы каждого столбца массива складываются с соответствующим смещением частоты. Наклонная дальность рассматривается как функция от доплеровской частоты, поэтому миграция каждой точки также является функцией сдвига частоты  $\Delta f$ :

$$\Delta f = [0 : M_{azimut}]^T \cdot \frac{f_{PRF}}{M_{azimut}} + f_a.$$

Зависимость наклонной дальности от частотного сдвига определяется как

$$R(\Delta f) = \frac{R_{\min}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda \Delta f \eta}{2V_p}\right)^2}} - R_{\min}.$$

После свертки полученных данных с опорной функцией по азимуту формируются сжатые по азимуту данные или сфокусированное комплексное изображение. На рисунке 2 представлена общая схема алгоритма быстрой свертки с компенсацией миграции дальности на основе БПФ.

**Результаты моделирования в пакете MatLab.** В качестве исходных данных при моделировании алгоритма формирования радиолокационного изображения использованы представленные в формате SEOS необработанные данные, полученные со спутника ERS-2 [9]. Для данного спутника  $L = 10$  м,  $h = 790\,000$  м,  $K_R = 4,19 \cdot 10^{11}$ . Размер используемого для экспериментов РЛИ  $M_{lines} = 29\,199$ , количество пикселей в строке  $M_{pixel} = 4912$ . Количество отсчетов по апертуре  $M_{azimut} = 1116$ , тогда количество итераций будет  $M_{step} = 26$ . Количество строк по азимуту, для каждой итерации  $M_{part} = 2048$ , таким образом перекрытие между соседними частями РЛИ составляет около 45,5%.

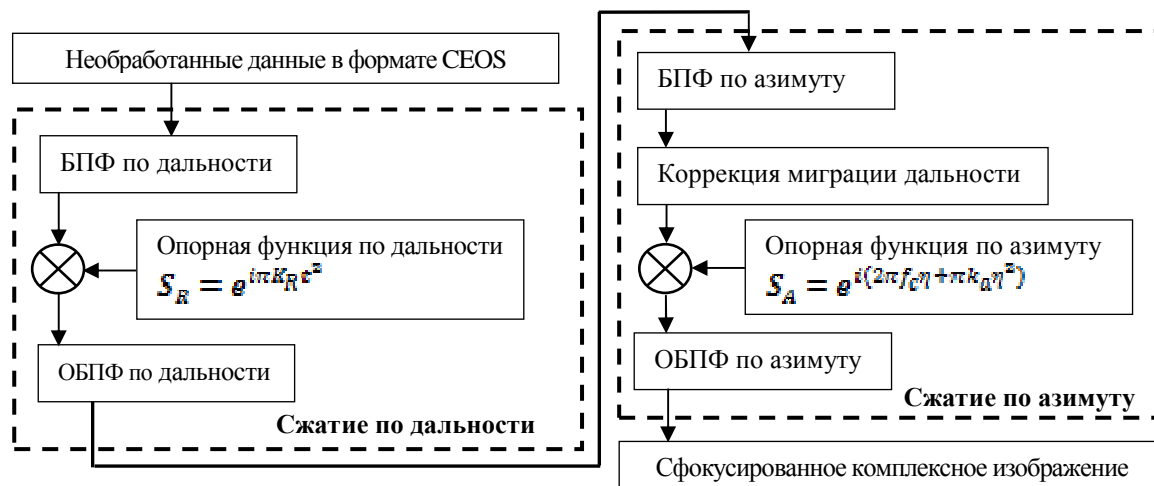


Рисунок 2. – Схема алгоритма быстрой свертки с компенсацией миграции дальности

Для реализации метода формирования радиолокационного изображения на основе алгоритма быстрой свертки с компенсацией миграции дальности в пакете MatLab реализованы и используются следующие основные функции: `ref_r` – формирование опорной функции по дальности; `comp_r` – сжатие данных по дальности; `dop_centr_fr` – определение центральной доплеровской частоты; `chirp_az` – расчет фазы переданного сигнала по азимуту и формирование опоры по азимуту; `ref_az` – формирование опорной функции по азимуту для каждого отсчета по дальности с использованием для этого функции `chirp_az`; `r_migr` – компенсация миграции дальности; `comp_az` – сжатие по азимуту; `fwrite` – используется для записи информации в бинарные файлы; `fread` – применяется для чтения информации из бинарных файлов; `fft` – предназначается для вычисления дискретного преобразования Фурье; `ifft` – выполнение обратного преобразования Фурье.

Наличие боковых лепестков в ДНА по азимуту приводит к такому явлению, как неоднозначность по азимуту, которое обуславливает появление на РЛИ «призрачных» объектов, возникающих из-за получения переотраженных сигналов [1]. Результаты моделирования демонстрируют появление такого эффекта для выделенной области фрагмента изображения (рис. 3, б) на соседних фрагментах РЛИ (рис. 3, а и рис. 3, в).

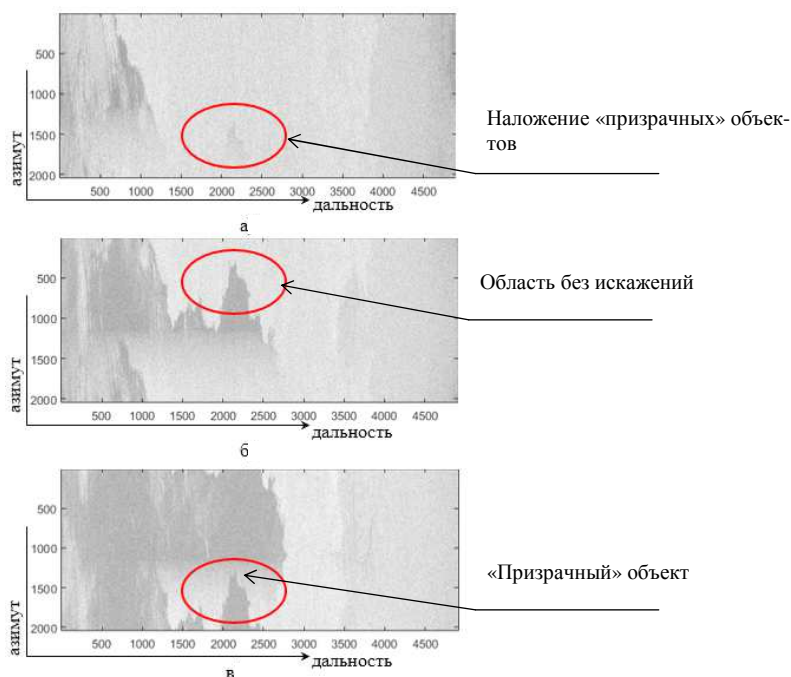
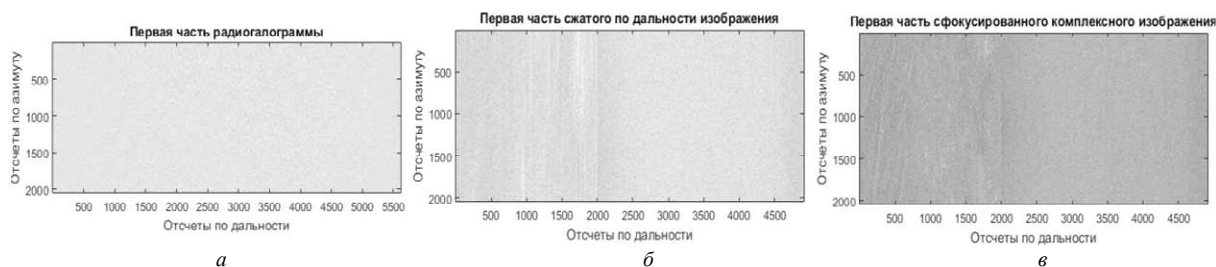


Рисунок 3. – Пример неоднозначности по азимуту:

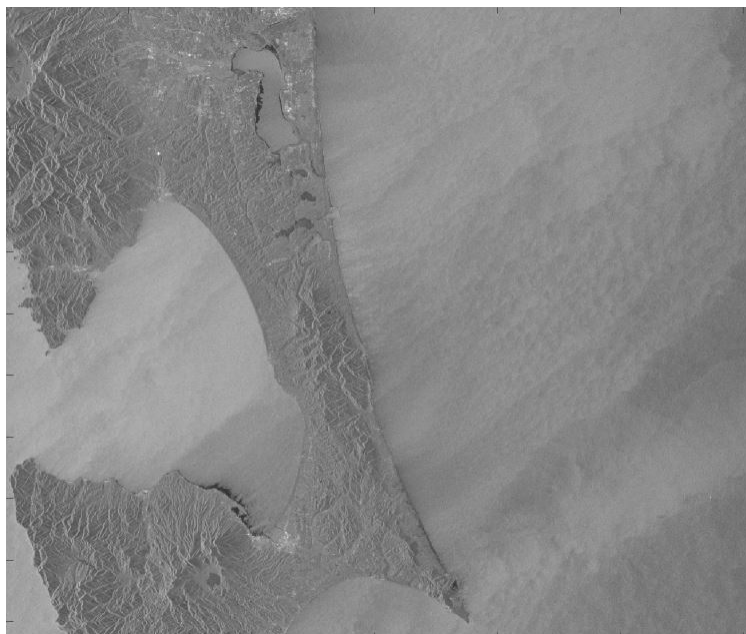
а – фрагмент РЛИ со скрытием реального объекта «призрачными» при  $M_{step} = 10$ ;  
 б – фрагмент РЛИ при  $M_{step} = 11$  без искажений; в – фрагмент РЛИ с «призрачным» объектом при  $M_{step} = 12$

На рисунке 4 представлены первые части этапов формирования радиолокационного изображения в координатах наклонная дальность / азимут на основе необработанных данных, полученных со спутника ERS-2, которые представлены в формате CEOS.



**Рисунок 4. – Пример формирования первой части изображения:**  
***a* – необработанные входные данные; *b* – результат сжатия по дальности;**  
***в* – сфокусированное комплексное изображение**

Следующим этапом обработки РЛИ является геометрическая коррекция, которая направлена на преобразование изображения из координат наклонная дальность/азимут в координаты горизонтальная дальность/азимут. В результате данной операции РЛИ принимает вид, показанный на рисунке 5. Изображения этого уровня характеризуются уменьшенной зернистостью и приводятся к приблизительно квадратным ячейкам разрешения. Для получения изображения с геометрической коррекцией усредняются значения между 20 отсчетами по азимуту и 4 отсчетами по дальности.



**Рисунок 5. – Результат геометрической коррекции сфокусированного изображения**

**Заключение.** Системы дистанционного зондирования Земли на основе радиолокаторов с синтезированной апертурой антенны позволяют получать детальные радиолокационные изображения местности с качеством близким к оптическим системам при любых метеоусловия и в любое время суток. Для представления необработанных радиолокационных данных применяется формат CEOS, предписывающий использование структуры из четырех файлов, включая файл каталога тома, файл заголовка, файл данных, файл нулевого тома. С учетом особенности записи в данном формате основных и вспомогательных радиолокационных данных выполнено моделирование процедуры формирования изображения с использованием пакета MatLab. Для этого применяется метод формирования радиолокационного изображения на основе алгоритма быстрой свертки с компенсацией миграции дальности на основе БПФ. При моделировании алгоритма формирования радиолокационного изображения используются хранимые в формате CEOS необработанные данные, полученные со спутника ERS-2.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Радиолокационные системы землеобзора космического базирования // В. С. Верба [и др.]. – М. : Радиотехника, 2010. – 680 с.
2. Шпенст, В. Радиолокационные станции дистанционного зондирования Земли космического базирования / В. Шпенст // Компоненты и технологии. – 2013. – № 3. – С. 154–58.
3. CEOS WGD on Synthetic Aperture Radar Data Product Format Standards issue 2 revision (CEOS-SAR-CCT) // Committee on Earth Observation Satellite (CEOS) Data Subgroup, 1989.
4. Беленов, А. В. Стандартные уровни обработки и форматы представления данных ДЗЗ из космоса. Мировой опыт / А. В. Беленов // Геоматика. – 2009. – № 4. – С. 18–202.
5. Полегаев, А. М. Стандартизация радиолокационных данных дистанционного зондирования Земли как процедура описания показателей их информативности / А. М. Полегаев // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. – 2008. – № 5, Т. 1 – С. 303–310.
6. Федоткин, Д. И. Технологии предварительной обработки данных ДЗЗ: опыт ИТЦ «СканЭкс» в создании программного обеспечения и организации обработки данных в составе приемных комплексов / Д. И. Федоткин // Пространственные данные. – 2006. – № 1. – С. 40–43.
7. ESA. Earth Online. [Electronic resource]. – Mode of access: <https://earth.esa.int/handbooks/asar/toc.html>. – Date of access: 17.02.16.
8. Akliouat, H. Synthetic Aperture Radar Image Formation Process: Application to a Region of North Algeria / H. Akliouat, Y. Smara and L. Bouchemakh // Envisat Symposium 2007 : Proc., Montreux, April 2007 / Montreux, 2007.
9. Geohazard Supersites and Natural Laboratories. GEO – Group on Earth Observations [Electronic resource]. – Mode of access: [http://eo-virtual-archive4.esa.int/search/ER02\\_SAR\\_IM\\_\\_0P/html/?name=Franche-Comte](http://eo-virtual-archive4.esa.int/search/ER02_SAR_IM__0P/html/?name=Franche-Comte). – Date of access: 22.03.16.

Поступила 05.09.2016

**SIMULATION OF ALGORITHM FOR FORMATION OF RADAR IMAGES BASED  
ON RAW EARTH REMOTE SENSING DATA IN CEOS FORMAT**

**R. BOHUSH, S. IHNATSYEVA, N. NAUMOVISH, S. URBANOVICH**

*Earth remote sensing systems based on synthetic aperture radar allow obtaining detailed radar images areas with a quality close to optical systems in all weather conditions and at any time of the day. To represent the raw radar data is used CEOS format, the structure of directing the use of the four files, including Volume Directory File, Leader File, Data Set File, Null Volume File. Radar images formation using MatLab package out taking into account the peculiarities of presentation primary and secondary radar data in this format is proposed. Fast Fourier transform algorithm with compensation range migration is applied. Experimental results are presented in the paper.*

**Keywords:** *synthetic aperture radar, CEOS format, radar image.*

УДК 681.5.015

**АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ СВАРОЧНЫМИ РОБОТАМИ-МАНИПУЛЯТОРАМИ  
НА ОСНОВЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОНФИГУРАЦИОННОГО ПРОСТРАНСТВА**

**И.Э. ИЛЮШИН, кан. техн. наук, доц. М.М. КОЖЕВНИКОВ**  
(Могилевский государственный университет продовольствия)

*Предложены новые эффективные алгоритмы управления сварочными роботами-манипуляторами на основе статистической модели конфигурационного пространства. Предложенные алгоритмы, в отличие от известных, позволяют эффективно учесть ограничения на ориентацию технологического инструмента, сложную форму элементов роботизированного комплекса, а также ограничения, накладываемые на угловые скорости движения звеньев манипулятора. Эффективность разработанных алгоритмов подтверждается результатами тестирования в экспериментальной среде моделирования роботов.*

**Ключевые слова:** роботы-манипуляторы, алгоритмы управления, конфигурационное пространство.

**Введение.** Расширение применения роботов в промышленном производстве обусловлено как стремлением к повышению производительности, так и необходимостью обеспечить высокое качество продукции при больших партиях или при частых изменениях объектов производства. Кроме того, серьезными стимулами применения промышленных роботов являются снижение их стоимости на фоне удорожания рабочей силы, недостаток квалифицированного рабочего персонала, освобождение работающих на производстве от тяжелого, интенсивного и монотонного труда, а также возможность снижения вредного влияния производства (особенно сварочного) на здоровье персонала [1].

Большинство роботов, применяемых в промышленности, представляют собой манипуляторы, управляемые микропроцессорным контроллером. Для реализации управления промышленным роботом-манипулятором необходимо решить ряд задач, в частности, необходимо совместить зоны обслуживания робота с рабочим пространством, в котором выполняется технологическая операция, таким образом, чтобы технологический инструмент мог быть доставлен в любое требуемое положение с необходимой ориентацией. Другой важной задачей является планирование перемещений: необходимо выбрать траекторию движения технологического инструмента, при этом не только траектория движения, но и законы изменения скоростей должны, с одной стороны, соответствовать требованиям технологического процесса, а с другой – возможностям робота [2].

В сварочных роботизированных технологических комплексах (РТК) используются в основном позиционно-контурные системы управления, обеспечивающие реализацию траекторий, заданных последовательностью опорных точек. В процессе управления вычисляются промежуточные точки траектории и формируются задающие воздействия для исполнительных приводов. В результате реализуется согласованное движение степеней подвижности, приводящее к требуемым изменениям положения и ориентации технологического инструмента.

В известных работах предложен ряд алгоритмов управления сборочно-сварочными роботами-манипуляторами в среде с препятствиями [3, 4], которые основаны на дискретной модели свободного от столкновений конфигурационного пространства. Задача управления при этом сводится к поиску кратчайшего пути на графе, ребрам которого ставятся в соответствие простейшие фрагменты траектории робота, при движении по которым отсутствуют столкновения и удовлетворяются конструктивные ограничения. В ряде последних исследований [5, 6] реализованы алгоритмы управления, выполняющие поиск нескольких решений, что увеличивает вероятность нахождения траектории движения за фиксированное время. В частности, в работе [7] управление реализовано с использованием концепции мультиграфа задачи движения (ТММ).

Необходимо отметить, что известные алгоритмы управления сварочными роботами-манипуляторами позволяют эффективно обойти проблему размерности конфигурационного пространства роботов [8–11], но не учитывают форму препятствий и форму звеньев манипулятора, что приводит к реализации траекторий низкого качества с большим объемом движений [8]. При использовании таких алгоритмов траектория робота может быть найдена за конечное время также лишь с определенной вероятностью, т.е. свойство «полноты» решения теряется [8, 12].

**Постановка задачи.** Рассмотрим робот-манипулятор (рис. 1), который описывается как кинематическая цепь из  $n$  поворотных сочленений  $g_i$  и звеньев  $l_i$  ( $i = 1:n$ ), в его рабочей зоне расположено некоторое множество препятствий  $B = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ .

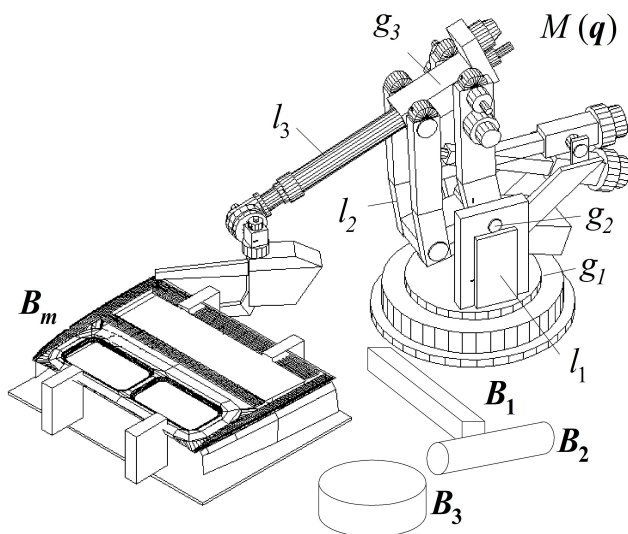


Рисунок 1. – Робот-манипулятор в среде с препятствиями

Конфигурацию этого робота зададим в виде вектора  $\mathbf{q} = [q_i]^T$ , где  $q_i$  – величины углов в сочленениях. Ограничения на изменения углов в сочленениях зададим в виде

$$\mathbf{q}_{\min} \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{q}_{\max}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{q}_{\min}$ ,  $\mathbf{q}_{\max}$  – векторы, определяющие нижнее и верхнее конструктивные ограничения на значения углов в сочленениях робота-манипулятора.

Каждой конфигурации ставится в соответствие вектор скоростей  $\dot{\mathbf{q}}_i = [\dot{q}_i]^T$ , где  $\dot{q}_i$  – величины угловых скоростей движения звеньев. На скорости накладываются ограничения

$$\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq \dot{\mathbf{q}}_{\max}, \quad (2)$$

где  $\dot{\mathbf{q}}_{\max}$  – вектор, определяющий ограничения на значения угловых скоростей движения звеньев робота-манипулятора.

Зададим следующие ограничения на углы ориентации технологического инструмента  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ :

$$\alpha \in [\alpha^- \ \alpha^+], \quad \beta \in [\beta^- \ \beta^+], \quad \gamma \in [\gamma^- \ \gamma^+]. \quad (3)$$

Геометрическую модель робота-манипулятора, установленного в конфигурацию  $\mathbf{q}$ , зададим в виде множества  $M(\mathbf{q})$ . Тогда свободное от столкновений конфигурационное пространство определяется как

$$C_f = \{\mathbf{q} \in C \mid M(\mathbf{q}) \cap \mathbf{B} = \emptyset\}. \quad (4)$$

Задача определения пересечения множеств  $M(\mathbf{q})$  и  $\mathbf{B}$  решается путем проведения теста столкновения [3] между роботом и препятствиями по соотношению

$$\min \|M(\mathbf{q}) - \mathbf{B}\| \leq \delta, \quad (5)$$

где  $\delta$  – точность позиционирования робота-манипулятора.

Рассмотрим систему управления сборочно-сварочным роботом-манипулятором (рис. 2). Она состоит из следующих структурных элементов: элемент, формирующий заданную траекторию, контроллер, обеспечивающий её реализацию, т.е. вырабатывающий управляющие воздействия для привода робота, датчики положения и скорости, а также робот-манипулятор. Принцип работы системы следующий: текущие векторы углов в сочленениях  $\mathbf{q}_i$  и угловых скоростей  $\dot{\mathbf{q}}_i$  определяются с помощью датчиков положения и датчиков скорости соответственно, после чего сравниваются с заданными значениями  $\mathbf{q}_{si}$  и  $\dot{\mathbf{q}}_{si}$  соответственно ( $i = 1:g$ ). Таким образом происходит формирование сигналов рассогласования по положению  $\Delta \mathbf{q}_i$  и по угловой скорости  $\Delta \dot{\mathbf{q}}_i$ , и в зависимости от их значения контроллером вырабатываются соответствующие управляющие воздействия  $\boldsymbol{\tau}_i$  на приводы сочленений робота.

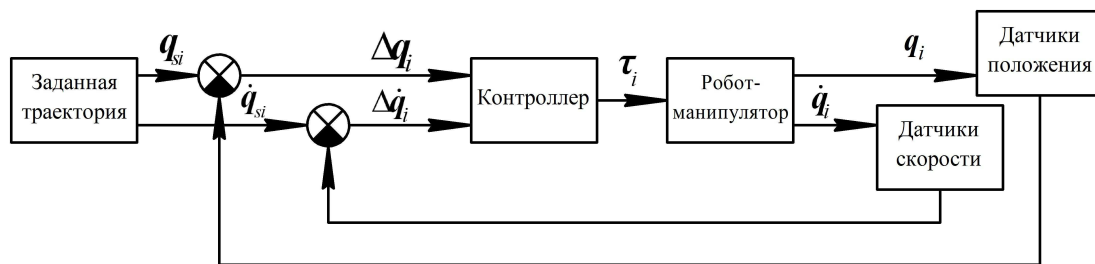


Рисунок 2. – Обобщенная блок-схема системы управления роботом-манипулятором

Стоит отметить, что контроллер, роботы-манипуляторы, а также датчики скоростей и положений имеют ряд готовых реализаций [13–15]. В связи с этим основной интерес представляет именно поиск траектории с учетом ограничений (1)–(3), поскольку это наиболее сложная и трудоемкая задача. Поэтому в данной работе предложены алгоритмы формирования заданной траектории с учетом ограничений и наличия препятствий в рабочей зоне.

**Алгоритмы управления.** Исходной информацией для алгоритмов управления сварочными роботами-манипуляторами является геометрическая модель РТК –  $M(q)$ ,  $B$ , а также координаты стартовой и целевой точек. Используя эти данные осуществляется поиск заданной траектории робота-манипулятора. Необходимо отметить, что конфигурационное пространство робота имеет достаточно сложную форму. Поэтому на практике обычно применяется приближенное описание пространства конфигураций вместо явного его расчета. В связи с этим для описания конфигурационного пространства робота применена статистическая модель, которая представляется в виде неориентированного графа  $R = (V, E)$ . Вершины  $V$  этого графа представляют собой множество свободных от столкновений конфигураций робота  $q_i$ , а также векторов допустимых угловых скоростей движения звеньев  $\dot{q}_i$ , соответствующих этим конфигурациям. Формирование множества  $V$  осуществляется следующим образом: генерируется случайная конфигурация робота-манипулятора и выполняется тест столкновения робота с препятствиями. Если столкновения нет, то генерируется соответствующий вектор допустимых скоростей  $\dot{q}_i$ , координаты которого также случайные величины, после чего конфигурация  $q_i$  и соответствующий ей вектор  $\dot{q}_i$  добавляются в множество  $V$ . Если же столкновение есть, то конфигурация отбрасывается. Ребрам  $E$  графа ставятся в соответствие прямолинейные участки траекторий между свободными от столкновений конфигурациями.

Прямолинейный участок траектории между двумя конфигурациями  $q_a$  и  $q_b$  ( $a \neq b$ ,  $q_a, q_b \in C_f$ ) задается в виде множества векторов

$$d_{ab} = \{d_k | M(d_k) \cap B = \emptyset\}, \quad (6)$$

где  $d_k = q_a + (h/Nh)(q_b - q_a)$ ,  $h = 0:Nh$ ,  $Nh > N$  – параметр дискретизации прямолинейного участка траектории.

Дискретная конфигурация робота  $q_b \in C_f$  является соседней с конфигурацией  $q_a \in C_f$ , если между ними существует прямолинейный участок траектории  $d_{ab}$  и  $D(q_a, q_b) \leq d$ , где  $D(\bullet)$  – симметричная функция, характеризующая расстояние между двумя локациями робота-манипулятора. Кроме того, осуществляется проверка прямолинейного участка на возможность перемещения робота из конфигурации  $q_a$  в конфигурацию  $q_b$  с заданной скоростью  $\dot{q}_a$ . Траектория, соединяющая стартовую  $q_{s1}$  и целевую  $q_{sg}$  конфигурации робота, представляет собой последовательность, состоящую из соседних конфигураций  $q_{s1}, q_{s2}, \dots, q_{sg} \in C_f$ , каждой из которых поставлен в соответствие вектор допустимых скоростей  $\dot{q}_{s1}, \dot{q}_{s2}, \dots, \dot{q}_{sg}$ , и прямолинейных участков, соединяющих эти конфигурации  $d_{s1s2}, d_{s2s3}, \dots, d_{(sg-1)sg}$ .

В качестве критерия качества траектории движения роботов-манипуляторов при сварке шва предлагается использовать время перемещения технологического инструмента вдоль сварного шва:

$$\tau = \rho/v, \quad (7)$$

где  $\rho$  – длина пути технологического инструмента при его движении в направлении от начальной к конечной локации;

$v$  – скорость движения технологического инструмента.



Тогда основная задача управления сварочным роботом-манипулятором может быть сформулирована следующим образом: среди всех последовательностей дискретных конфигураций  $q_{s1}, q_{s2}, \dots, q_{sg} \in C_f$ , координаты которых лежат внутри области ограниченной предельно допустимыми значениями углов в сочленениях (1), а соответствующие векторы скоростей  $\dot{q}_{s1}, \dot{q}_{s2}, \dots, \dot{q}_{sg}$  удовлетворяют ограничениям (2), найти последовательность, на которой достигается минимума критерий качества (7).

В предыдущей работе авторов данной статьи [16] предложен комбинированный алгоритм управления, основанный на синтезе траекторий роботов-манипуляторов в рабочей среде с препятствиями с использованием статистической модели и решетчатой дискретизации «насыщенных» препятствиями зон конфигурационного пространства. В соответствии с этим подходом синтез свободной от столкновений траектории осуществляется путем поиска кратчайшего расстояния на графе, ребрам которого ставятся в соответствие линейные движения робота, между промежуточными конфигурациями найденными, как посредством рандомизированной дискретизации (в зонах с малым количеством препятствий), так и решетчатой дискретизации (в зонах с большим количеством препятствий сложной формы). На основе этого алгоритма управления разработан новый алгоритм, который в отличие от известных учитывает ограничения на угловые скорости движения звеньев (2), а также предусматривает проверку прямолинейных участков на возможность прохождения по нему из одной вершины в другую с заданной скоростью. Разработанный алгоритм управления представлен в таблице 1.

Таблица 1. – Алгоритм управления сварочным роботом манипулятором

---

**Исходные данные:** Геометрическая модель РТК –  $M(q), B$ , начальная и целевая конфигурации робота –  $q_s, q_g$ .

---

```

1:   $i \leftarrow 1; V \leftarrow q_s, q_g;$ 
2:  повторять
3:     $q_i \leftarrow Randq;$ 
4:    если  $q_i \in C_f$ 
5:      то  $\dot{q}_i \leftarrow Randdq;$ 
6:       $V \leftarrow (q_i, \dot{q}_i)$ 
7:       $i \leftarrow i + 1;$ 
8:  до тех пор пока  $i \leq N_{max};$ 
9:   $k \leftarrow 1;$ 
10: повторять
11:    $(i, j) \leftarrow Rand(1, N_{max});$ 
12:   если  $((D(q_i, q_j) \leq d) \text{ и } ((EPath(q_i, q_j) \neq \emptyset) \text{ и } (STest(q_i, q_j, \dot{q}_i) = 1)))$ 
13:     то  $E \leftarrow EPath(q_i, q_j)$ 
14:     иначе
15:       если  $(D(q_i, q_j) \leq d \text{ и } (TTest(q_i) = 1 \text{ или } TTest(q_j) = 1))$ 
16:         то  $(q_i^s, q_j^g) \leftarrow Connect(q_i, q_j, G);$ 
17:          $R \leftarrow SearchGridPath(q_i^s, q_j^g);$ 
18:          $V \leftarrow (EPath(q_i, q_i^s), EPath(q_j, q_j^g));$ 
19:          $k \leftarrow k + 1;$ 
20:   до тех пор пока  $k \leq K_{max};$ 
21:    $path \leftarrow GraphSearch(R, q_s, q_g).$ 

```

---

Алгоритм использует следующие обозначения.  $Randq$  – функция генерации вектора конфигурации в допустимом диапазоне (1).  $Randdq$  – функция генерации вектора скорости с координатами с учетом ограничения (2).  $Rand$  – функция генерации случайных целых чисел  $i \neq j$  в диапазоне от 1 до  $N_{max}$ .  $EPath$  – функция расчета прямолинейного участка траектории между двумя конфигурациями  $q_i$  и  $q_j$ .  $STest$  – функция, выполняющая проверку ребра графа на возможность перемещения из конфигурации  $q_i$  в кон-

фигурацию  $q_j$  с заданной скоростью  $\dot{q}_i$ . В случае если перемещение с заданной скоростью вдоль ребра от одной конфигурации к другой возможно, функция  $STest$  возвращает 1, в противном случае возвращает 0.  $TTest$  – функция, выполняющая оценку «насыщенности» окрестности конфигурации  $q$  препятствиями за счет генерации случайных конфигураций в ее окрестности и тестирования их на столкновения. В случае, когда количество столкновений превышает допустимый предел, функция  $TTest$  возвращает 1, что означает «насыщенность» окрестности конфигурации  $q$  препятствиями.  $Connect$  – функция, выполняющая поиск конфигураций  $(q_i^s, q_j^g)$  на решетке дискретизации  $G$ , являющихся соседними с конфигурациями  $(q_i, q_j)$ .  $GraphSearch$  – функция нахождения кратчайшего пути на графе  $R$ , исходя из критерия качества (7).

Отдельного рассмотрения заслуживает процедура  $SearchGridPath$ , разработанная на основе методики, предложенной в предыдущих работах авторов данной статьи [16, 17]. Процедура используется для поиска криволинейной траектории между двумя конфигурациями робота-манипулятора  $(q_i^s, q_j^g)$  путем дискретизации окрестности данных конфигураций решеткой. Соответственно, в результате выполнения процедуры в граф  $R$  добавляются вершины и ребра, принадлежавшие криволинейному участку траектории между  $(q_i^s, q_j^g)$ . При этом скорости движения звеньев задаются постоянными  $\dot{q}_{greed}$  для каждой конфигурации. Алгоритм процедуры  $SearchGridPath$  приведен в таблице 2.

Таблица 2. – Алгоритм процедуры  $SearchGridPath$

<b>Исходные данные:</b> Геометрическая модель РТК – $M(q)$ , $B$ , начальная и целевая конфигурации робота – $q_{s1} = q_i^s, q_{sg} = q_j^g$ , вектор скорости $\dot{q}_{greed}$ .	
1:	Установить начальное значение параметра дискретизации $N \leftarrow N_0$ ;
2:	<b>повторять</b>
3:	Вычислить $V_a$ для параметра дискретизации $N$ ;
4:	Установить весовые коэффициенты для ребер решетки $T_{ab_k} \leftarrow 1/3n$ ( $k = 1:d$ );
5:	<b>повторять</b>
6:	Вычислить весовую функцию $\phi_a$ ( $a=1:N^d$ );
7:	$a \leftarrow s1$ ;
8:	<b>повторять</b>
9:	$\phi \leftarrow \maxf(\phi_{b_k})$ ;
10:	$b \leftarrow \maxb(\phi_{b_k})$ ;
11:	$p \leftarrow \text{explore}(q(\phi_a), q(\phi_b), \dot{q}_{greed})$ ;
12:	$P \leftarrow \{q(\phi_a), q(\phi_b)\}$ ;
13:	если $b = sg$ то вернуть фрагмент траектории $P$ ;
14:	$a \leftarrow b$ ;
15:	<b>до тех пор пока</b> $p=0$ ;
16:	$T_{ab_k} \leftarrow 0$ ;
17:	$P \leftarrow 0$ ;
18:	<b>до тех пор пока</b> $\phi_{s1} = 0$ ;
19:	$N \leftarrow N + N_s$ ;
20:	<b>до тех пор пока</b> $N \leq N_{max}$ .

Алгоритм использует следующие обозначения:  $N_0$  – начальное значение параметра дискретизации конфигурационного пространства;  $N_{max}$  – максимально допустимое значение параметра дискретизации конфигурационного пространства;  $N_s$  – шаг изменения параметра дискретизации;  $P$  – криволинейная траектория робота. Алгоритм использует следующие функции:  $\maxf(\phi_{b_k})$  – функция, возвращающая максимальное значение весовой  $\phi$  из множества  $\phi_{b_k}$ ;  $\maxb(\phi_{b_k})$  – функция, возвращающая индекс  $b$  мак-

симального значения весовой функции из множества  $\phi_{b_k}$ ;  $q(\phi)$  – функция, возвращающая конфигурацию робота, соответствующую значению весовой функции  $\phi$ ;  $explore(q(\phi_a), q(\phi_b), \dot{q}_{greed})$  – функция проверки существования прямолинейного участка траектории между двумя конфигурациями робота  $q(\phi_a)$  и  $q(\phi_b)$  в соответствии с формулой (6) и заданным вектором угловых скоростей  $\dot{q}_{greed}$ . Если такой участок траектории существует, функция возвращает 1, в противном случае она возвращает 0.

Данный алгоритм функционирует следующим образом. Первоначально конфигурационное пространство робота дискретизируется с низким разрешением  $N_0$  и предполагается, что между всеми соседними конфигурациями существуют прямолинейные участки траектории, т.е. всем весовым коэффициентам ребер решетки присваивается значение  $1/3n$ . Далее вычисляется весовая функция для каждого узла решетки  $\phi_a$  ( $a = 1:N_n$ ) и ищется траектория между стартовой  $q_{s1}$  и целевой  $q_{sg}$  конфигурациями путем подъема в направлении градиента весовой функции узлов решетки. Для этого отрезки, соединяющие соседние конфигурации  $q_a$  и  $q_{b_k}$ , дискретизируются с высоким разрешением  $N_h$  в соответствии с (6), и для каждой дискретной конфигурации робота  $d_k$  выполняется тест столкновения. Если столкновения отсутствуют, то выбираются две новые конфигурации на решетке низкого разрешения в направлении градиента. Если обнаружено столкновение или невозможно движение робота от конфигурации  $q_a$  и  $q_{b_k}$  с заданной скоростью  $\dot{q}_{greed}$ , то значение весового коэффициента ребра решетки  $T_{ab_k}$  устанавливается в 0.

Значения весовой функции  $\phi_a$  для каждого узла решетки вычисляются на основе следующей итерационной формулы:

$$\phi_a^{(l+1)} = f_a \left( \sum_{k=1}^d T_{ab_k} \phi_{b_k}^{(l)} + V_a \right), \quad (8)$$

где  $l$  – номер итерации;

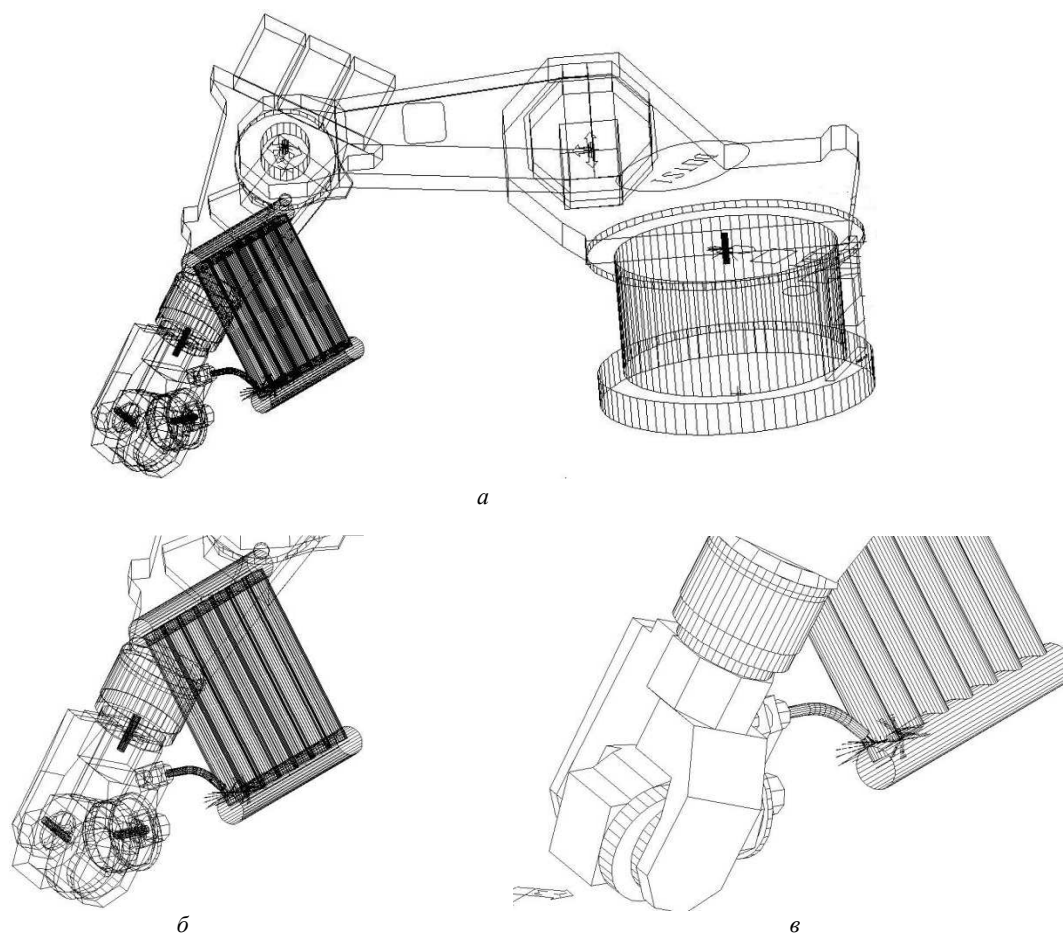
$V_a$  – параметр, значение которого определяется следующим образом:  $V_a = -1$ , если  $q_a \notin C_f$ ;  $V_a = 1$ , если  $q_a = q_{sg}$ ;  $V_a = 0$  во всех остальных случаях.

Нелинейная функция  $f_a$  имеет следующий вид:

$$f_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \tanh(x), & \text{если } x \geq 0. \end{cases} \quad (9)$$

Величина весовых коэффициентов ребер решетки  $T_{ab_k}$  выбирается, исходя из достаточных условий сходимости итерационной процедуры (8), полученных в работах [16, 17]. В частности,  $T_{ab_k} = 1/3n$ , если существует прямолинейный участок траектории между конфигурациями  $q_a$  и  $q_{b_k}$ , и  $T_{ab_k} = 0$  в противном случае.

**Тестирование алгоритмов.** Исследование эффективности проводилось в экспериментальной среде моделирования РТК с применением эмулятора систем управления типа *RCM (Robot Control Multiprocessor)*. Предложенные алгоритмы управления реализованы на языке программирования C++ и интегрированы в систему моделирования РТК. В качестве объекта исследования использовалась роботизированная ячейка для дуговой сварки металлической конструкции, состоящей из 9 труб. Ячейка включает робот-манипулятор *KR125* со сварочной горелкой (рис. 3, а). На трехмерную модель металлоконструкции нанесено 14 сварных швов, имеющих форму эллипса, изогнутого в пространстве. Предложенные алгоритмы позволили обеспечить управление движением сварочной горелки вдоль каждого из 14 швов со скоростью, обеспечивающей минимизацию критерия качества (7). Заданные траектории реализованы на основе технологического языка программирования роботов *SRCL (Siemens Robot Control Language)* и отлажены с использованием эмулятора *RCM*. Тестирование предложенного алгоритма управления показало, что он обеспечил свободное от столкновений движение робота-манипулятора. Примеры позиционирования сварочной горелки на линии пространственного сварного шва при движении робота под управлением предложенного алгоритма приведены на рисунке 3, б, в. Анализ результатов данных экспериментов позволяет сделать вывод о том, что предлагаемый подход эффективен при управлении сварочными роботами-манипуляторами в рабочей среде с препятствиями.



**Рисунок 3. – Роботизированная ячейка для дуговой сварки и траектории движения сварочной горелки под управлением предложенного алгоритма**

**Заключение.** В данной работе предложены новые эффективные алгоритмы управления сварочными роботами-манипуляторами на основе статистической модели. Предложенные алгоритмы используют решетчатую дискретизацию «насыщенных» препятствиями зон конфигурационного пространства, что позволяет эффективно учесть сложную нерегулярную форму препятствий в РТК. Кроме того, предложенные алгоритмы, в отличие от известных, позволяют учесть ограничения на ориентацию технологического инструмента, а также ограничения, накладываемые на угловые скорости движения звеньев робота-манипулятора. Эффективность алгоритмов управления подтверждается результатами тестирования в экспериментальной среде моделирования РТК.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Климов, А. С. Роботизированные технологические комплексы и технологические линии в сварке : учебное пособие / А. С. Климов, Н. Е. Машнин. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб. : Лань, 2011. – 240 с.
2. Зенкевич, С. Л. Управление роботами. Основы управления манипуляционными роботами : учеб. для вузов / С. Л. Зенкевич, А. С. Ющенко. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 400 с.
3. Principles of Robot Motion: Theory, Algorithms and Implementations / Н. Choset [et al.]. – Boston : MIT Press, 2005. – 680 p.
4. LaValle, S. M. Planning Algorithms / S. M. LaValle. – Cambridge : Cambridge University Press, 2006. – 1023 p.
5. Lahijanian, M. A. Sampling-Based Strategy Planner for Nondeterministic Hybrid Systems / M. A. Lahijanian, L. E. Kavraki, M. Y. Vardi // International Conference on Robotics and Automation. – Hong Kong, China, 2014. – P. 3005–3012.
6. Iterative Temporal Motion Planning for Hybrid Systems in Partially Unknown Environments / M. R. Maly [et al.] // ACM International Conference on Hybrid Systems: Computation and Control (HSCC). – Philadelphia, PA, USA, ACM, 2013. – P. 353–362.

7. Sucas, I. A. Accounting for Uncertainty in Simultaneous Task and Motion Planning Using Task Motion Multi-graphs / I. A. Sucas, L. E. Kavraki // IEEE International Conference on Robotics and Automation. – St. Paul, 2012. – P. 4822–4828.
8. Kavraki, L. E. Motion planning / L. E. Kavraki, S. M. LaValle // Springer Handbook of Robotics ; ed.: B. Siciliano and O. Khatib. – Berlin : Springer-Verlag, 2008. – 1628 p.
9. Geraerts, R. J. A comparative study of probabilistic roadmap planners / R. J. Geraerts, M. H. Overmars // Algorithmic Foundations of Robotics V. – Berlin : Springer-Verlag, 2003. – P. 43–58.
10. Geraerts, G. J. Reachability-based Analysis for Probabilistic Roadmap Planners / G. J. Geraerts, M. H. Overmars // Journal of Robotics and Autonomous Systems. – 2007. – № 55. – P. 824–836.
11. Geraerts, R. J. Sampling and Node Adding in Probabilistic Roadmap Planners / R. J. Geraerts, M. H. Overmars // Journal of Robotics and Autonomous Systems. – 2006. – № 54. – P. 165–173.
12. LaValle, S. M. On the relationship between classical grid search and probabilistic roadmaps / S. M. LaValle, M. Branicky, S. R. Lindemann // International Journal of Robotic Research. – 2004. – № 23(7/8). – P. 673–692.
13. Lewis, F. L. Robot Manipulator Control: Theory and Practice / F. L. Lewis, D. M. Dawson, Ch. T. Abdallah. – N.Y. : Merce Deccer, Inc., 2004. – 607 p.
14. Robotic Systems – Applications, Control and Programming / A. Dutta [et al.]. – 2012. – 628 p.
15. Юревич, Е. И. Основы робототехники / Е. И. Юревич. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб. : БВХ-Петербург, 2005. – 416 с.
16. Комбинированный метод синтеза траекторий сборочно-сварочных роботов-манипуляторов в рабочей среде с препятствиями / М. М. Кожевников [и др.] // Доклады БГУИР. – 2016. – № 1 (95). – С. 12–18.
17. Планирование траекторий роботов-манипуляторов в технологическом процессе точечной контактной сварки / М. М. Кожевников [и др.] // Вестн. ГГТУ им. П. О. Сухого. – 2016. – № 2 (65). – С. 3–10.

Поступила 05.08.2016

## ALGORITHMS FOR CONTROL OF WELDING ROBOTIC-MANIPULATORS BASED ON A STATISTICAL MODEL OF A CONFIGURATION SPACE

*I. ILIUSHYN, M. KOZHEVNIKOV*

*The new effective algorithms were proposed for control of welding robotic-manipulators. The proposed algorithms are based on a statistical model of a configuration space. In contrast to known they effectively take into account complex shape of the elements of the robotic technological cell, the limits for the orientation of technological tool, as well as limits for the angular velocity of the manipulator links. The effectiveness of the proposed algorithms is confirmed by the tests in the experimental space of robot modeling.*

**Keywords:** *robotic-manipulators, algorithms for control, configuration space.*

**ФИЗИКА**

УДК 546.28: 621.315.592

**ПРОЧНОСТНЫЕ СВОЙСТВА СТРУКТУР ФОТОРЕЗИСТ-КРЕМНИЙ,  
γ-ОБЛУЧЕННЫХ И ИМПЛАНТИРОВАННЫХ ИОНАМИ В<sup>+</sup> И P<sup>+</sup>***канд. физ.-мат. наук, доц. С.А. ВАБИЩЕВИЧ, Н.В. ВАБИЩЕВИЧ**(Полоцкий государственный университет);**канд. физ.-мат. наук Д.И. БРИНКЕВИЧ, канд. физ.-мат. наук, доц. В.С. ПРОСОЛОВИЧ,**канд. физ.-мат. наук Ю.Н. ЯНКОВСКИЙ, канд. хим. наук, доц. С.Д. БРИНКЕВИЧ**(Белорусский государственный университет, Минск)*

*Методами атомно-силовой микроскопии, склерометрии и индентирования исследованы пленки позитивного фоторезиста ФП9120 толщиной 1,0–5,0 мкм, облученные γ-квантами <sup>60</sup>Co и имплантированные ионами В<sup>+</sup> и P<sup>+</sup>. Показано, что в процессе имплантации ионов P<sup>+</sup> происходит модификация морфологии поверхности позитивного фоторезиста, выражающаяся в формировании неравномерно распределенных по поверхности конусообразных структур, которые обусловлены релаксацией напряжений, образовавшихся в процессе изготовления полимерной пленки, и радиационно-химическими процессами в приповерхностном слое фоторезиста. Процессы радиационного упрочнения при ионной имплантации структур фоторезист-кремний протекают далеко за областью проецированного пробега ионов P<sup>+</sup> и В<sup>+</sup>. Полученные экспериментальные результаты объяснены процессами радиационного сшивания молекул полимера за областью пробега ионов, усадкой полимерной пленки и ее карбонизацией в области пробега ионов.*

**Ключевые слова:** *фоторезист, гамма-облучение, ионная имплантация, склерометрия, индентирование, микротвердость.*

**Введение.** Позитивный фоторезист ФП 9120, который представляет собой композит из светочувствительного О-нафтохинондиазида и фенол-формальдегидной смолы, широко используется в современной полупроводниковой электронике в качестве защитного светочувствительного материала в прецизионных фотолитографических процессах при изготовлении полупроводниковых приборов и интегральных микросхем [1, 2]. Цель настоящей работы – исследование прочностных свойств пленок фоторезиста ФП9120, подвергнутых высокоэнергетическим воздействиям.

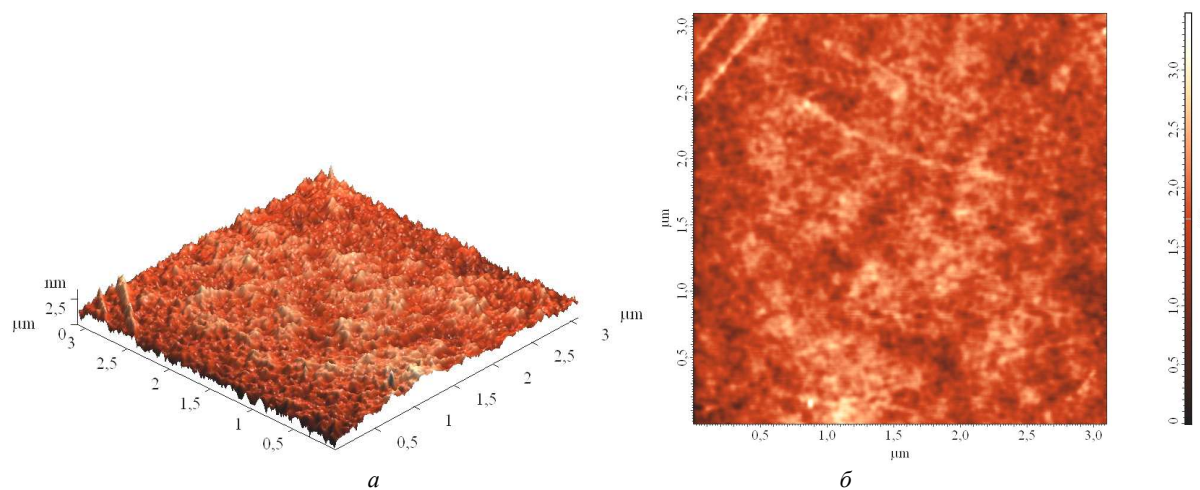
**Методика эксперимента.** Пленки фоторезиста толщиной от 1,0 до 5,0 мкм наносились на поверхность пластин (диаметр 100 мм) кремния марок КДБ 10, КДБ 0,05, КЭС 0,01 с ориентацией (111) и КДБ 4,5, КДБ 12, КЭФ 4,5 с ориентацией (100) методом центрифугирования. Толщина  $h$  пленки фоторезиста определялась скоростью вращения и составляла: 1,0 мкм при скорости вращения  $\nu = 8300$  об/мин; ~ 1,8 мкм – при  $\nu = 2900$  об/мин; ~ 2,5 мкм – при  $\nu = 1200$  об/мин. Пленки толщиной  $h = 5,0$  мкм формировались в две стадии с  $\nu = 1800$  об/мин на обеих стадиях. Толщина пленок фоторезиста контролировалась с помощью микроинтерферометра МИИ-4 по 5 фиксированным точкам (центр, верх, низ, слева, справа) на каждой пластине, при этом отклонения от среднего значения не по пластине для всех исследуемых образцов (независимо от ориентации и легирования пластины) не превышали 2%, что близко к погрешности измерений.

Исследование прочностных свойств структур фоторезист-кремний проводилось при комнатной температуре на приборе ПМТ-3 методами индентирования и склерометрии. Нагрузка ( $P$ ) на индентор варьировалась в пределах 1–50 г. Склерометрия осуществлялась царапанием ребром четырехгранной алмазной пирамиды с квадратным основанием в оправе типа НПМ и углом при вершине  $\alpha = 136^\circ$  согласно ГОСТ 9377-81. Скорость движения индентора варьировалась в диапазоне 40–120 мкм/с. Наносилось не менее 7 канавок при фиксированных нагрузке и скорости движения индентора, а затем измерялась их ширина. Значения склерометрической микротвердости  $H_{\square}^{\text{скл}}$  вычислялись в соответствии с ГОСТ 21318-75 по средней ширине канавок. Измерения микротвердости  $H^{\text{н}}$  методом микроиндентирования проводились этой же пирамидой по восстановленному отпечатку с использованием стандартной методики согласно ГОСТ 9450-76. При каждом измерении на поверхность образца наносилось не менее 50 отпечатков и проводилась обработка результатов измерений с использованием методов математической статистики по методике, изложенной в [3].

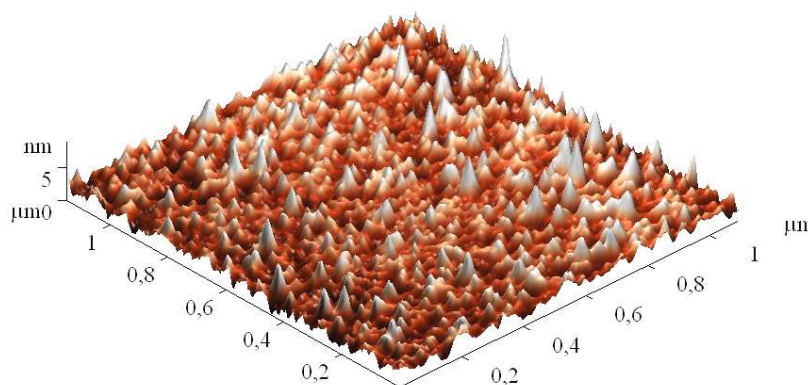
Имплантация ионами фосфора  $P^+$  (энергия 100 кэВ) и бора  $B^+$  (энергия 60 кэВ) в интервале доз ( $\Phi$ )  $5 \cdot 10^{14} - 1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$  в режиме постоянного ионного тока (плотность ионного тока  $j = 4 \text{ мкА/см}^2$ ) проводилась при комнатной температуре в остаточном вакууме не хуже  $10^{-5} \text{ Па}$  на ионно-лучевом ускорителе «Везувий-6». Облучение  $\gamma$ -квантами  $^{60}\text{Co}$  осуществлялось при комнатной температуре и атмосферном давлении на установке МРХ- $\gamma$ -25М. Мощность поглощенной дозы составляла  $0,360 \pm 0,008 \text{ Гр/с}$ . Интервал поглощенных доз ( $\Phi_\gamma$ ) – от 1 до 300 кГр.

Морфология поверхности фоторезистивной пленки исследовалась методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) при комнатной температуре в полуконтактном резонансном режиме на частоте 145 кГц на приборе Solver P-47. Использовались кантилеверы серии NSG 01 с радиусом закругления 10 нм.

**Экспериментальные результаты и их обсуждение.** Характерные АСМ изображения поверхности фоторезиста, подвергнутого облучению  $\gamma$ -квантами  $^{60}\text{Co}$  и имплантации ионами  $P^+$ , приведены на рисунках 1 и 2. Значения среднеарифметической шероховатости ( $R_a$ ) усреднялись по результатам не менее чем 10 измерений в различных точках образца. С увеличением дозы  $\gamma$ -квантов  $R_a$  слабо возрастала, при этом увеличивалась и дисперсия  $R_a$ . При  $\Phi_\gamma = 300 \text{ кГр}$  среднеарифметическая шероховатость  $R_a = 0,35 \text{ нм}$  при дисперсии  $\Delta R_a = 0,2$  (измерения по 11 точкам). Зависимости величины шероховатости от марки кремниевой подложки не было выявлено.



**Рисунок 1.** – Характерные АСМ изображения поверхности пленки фоторезиста толщиной 1,8 мкм на пластине кремния марки КДБ 12, облученного  $\gamma$ -квантами  $^{60}\text{Co}$  дозой 123 кГр, в режимах топографии (а) и фазового контраста (б)



**Рисунок 2.** – 3D АСМ изображения поверхности пленки фоторезиста толщиной 1,0 мкм на пластине кремния марки КДБ 10 (111), имплантированного ионами  $P^+$  с энергией 60 кэВ и дозой  $1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$

Имплантация ионов  $P^+$  приводит к появлению на поверхности фоторезиста конусообразных структур (рис. 2), которые наблюдались уже на начальных дозах. Конусообразные структуры распределены по поверхности фоторезиста очень неравномерно. Среди них преобладают достаточно крупные структуры с диаметром в основании  $\sim 100 - 150 \text{ нм}$  и высотой до  $50 - 60 \text{ нм}$ . С ростом дозы имплантации размеры ко-

нусообразных структур уменьшаются, а их количество растет. Существенный рост (до 0,9 нм) среднеарифметической шероховатости  $R_a$  наблюдался уже при начальной дозе имплантации  $5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$ . Дальнейшее увеличение дозы имплантации до  $1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$  не приводило к заметному изменению  $R_a$ . Аналогичные зависимости наблюдались нами ранее [4] для фоторезистивных пленок, имплантированных ионами  $V^+$ . Наблюдаемые при имплантации изменения морфологии поверхности фоторезиста обусловлены релаксацией напряжений, образовавшихся в процессе изготовления полимерной пленки, и радиационно-химическими процессами в приповерхностном слое фоторезиста [4].

Облучение  $\gamma$ -квантами  $^{60}\text{Co}$  приводило к увеличению значений микротвердости  $H^m$ , измеренной методом микроиндентирования, при малых нагрузках 2–5 г (рис. 3). При нагрузках свыше 20 г зависимости  $H^m$  от дозы облучения выявлено не было. Существенного влияния типа подложки (марки кремния) на прочностные характеристики облученных структур фоторезист-кремний не обнаружено. При нагрузках свыше 10 г в центре отпечатка наблюдается светлый след от проникновения индентора в кремниевую подложку. Облучение не оказывало существенного влияния на его размеры.

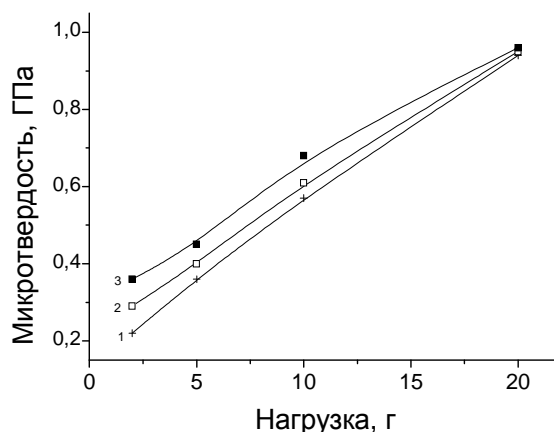


Рисунок 3. – Зависимость микротвердости  $H^m$ , измеренной методом индентирования, от нагрузки  $P$  для облученных  $\gamma$ -квантами  $^{60}\text{Co}$  пленок фоторезиста толщиной 1,8 мкм на пластинах кремния марки КДБ 10 (111). Доза  $\Phi$ , кГр: 1 – 0; 2 – 6,0; 3 – 45

Склерометрическая микротвердость  $H_{\square}^{\text{скл}}$  менее подвержена влиянию облучения, чем  $H^m$  (табл. 1). Значения  $H^m$  и  $H_{\square}^{\text{скл}}$ , измеренные при малых нагрузках, сближаются при облучении. Так, если в исходных необлученных пленках при нагрузке 1 г значения  $H^m$  были ниже  $H_{\square}^{\text{скл}}$  в 4–6 раз, то после облучения разница уменьшалась в примерно 2 раза (см. табл. 1).

Таблица 1. – Микротвердость  $\gamma$ -облученных пленок фоторезиста

Пластины кремния	Толщина пленки фоторезиста	Нагрузка, г	Образец пленки			
			исходный	облученный $\gamma$ -квантами дозой 10 кГр		
			$H_{\square}^{\text{скл}}$ , ГПа	$H_{\square}^{\text{скл}}$ , ГПа	$H^m$ , ГПа	Глубина проникновения индентора, мкм
КДБ 12 (100)	1,8	1	0,70	0,74	0,25	0,99
		2	0,42	0,42	0,36	1,89
	2,5	1	0,71	0,88	0,22	0,90
		2	0,50	0,53	0,37	1,70
	5,0	1	0,73	0,77	0,20	1,01
		2	0,56	0,56	0,29	1,69
КЭС 0,01 (111)	1,8	1	0,82	0,90	0,22	0,81
		2	0,59	0,70	0,35	1,42
КДБ 0,005 (111)	1,8	1	0,72	0,76	0,24	0,99
		2	0,47	0,46	0,36	1,86

Отмеченные выше экспериментальные результаты могут быть обусловлены тем, что  $\gamma$ -облучение способствует релаксации упругих напряжений в полимерной пленке, которые растягивают отпечаток



индентора и, соответственно, снижают значения  $H^n$ . Отметим, что эти упругие напряжения влияют на измерения склерометрической микротвердости  $H_{\square}^{скл}$  в существенно меньшей степени, чем на измерения  $H^n$  [5]. С другой стороны, облучение  $\gamma$ -квантами слабо воздействует на прочностные свойства монокристаллического кремния [6], поэтому при больших нагрузках (проникновении индентора в кремниевую пластину) значения  $H^n$  и  $H_{\square}^{скл}$  не изменяются при увеличении дозы облучения.

При проникновении индентора в кремний наблюдаются отслоения фоторезистивной пленки от кремниевой пластины, появляются растрескивания и «бабочки» вокруг отпечатков и царапин (рис. 4). По их размерам можно судить об адгезии пленки к кремниевой подложке. Наилучшая адгезия прослеживалась на кремнии марок КДБ 12 и КЭФ 4,5 с ориентацией (100), наихудшая – на сильнолегированном кремнии КДБ 0,005 и КЭС 0,01 с ориентацией (111).

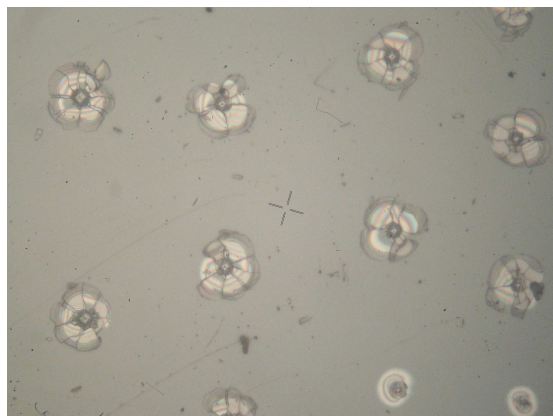


Рисунок 4. – Фотографии отпечатков индентора на пленке фоторезиста толщиной 1,8 мкм, нанесенной на кремний марки КЭФ 4,5. Облучение  $\gamma$ -квантами  $^{60}\text{Co}$  дозой 10 кГр. Нагрузка 50 г (увеличение 50х)

В имплантированных ионами бора образцах при малых нагрузках 1–2 г для обоих видов микротвердостей  $H^n$  и  $H_{\square}^{скл}$  зависимости от дозы имплантации не наблюдается:  $H^n$  и  $H_{\square}^{скл}$  возрастают (в 1,3 раза по сравнению с исходным) при минимальной исследовавшейся дозе  $\Phi = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$  и при дальнейшем увеличении дозы имплантации микротвердости практически не изменяются (табл. 2). При имплантации  $\text{P}^+$  имело место существенное увеличение  $H_{\square}^{скл}$  при дозах  $\Phi \geq 5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$  (см. табл. 2). Отметим, что значения  $H_{\square}^{скл}$ , измеренные при малых нагрузках, соответствуют истинной микротвердости фоторезистивной пленки, поскольку кремниевая подложка не оказывает влияния на измерения [5].

Таблица 2. – Склерометрическая микротвердость имплантированных пленок фоторезиста толщиной 1,0 мкм, нанесенных на пластины кремния марки КДБ 10 (111)

Ион	Нагрузка, г	$H_{\square}^{скл}$ , ГПа, для доз облучения				
		Исходный	$\Phi = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$	$\Phi = 1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$	$\Phi = 5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$	$\Phi = 1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$
$\text{B}^+$	1	0,60	0,75	0,76	0,77	0,75
	2	0,57	0,68	0,74	0,74	0,73
$\text{P}^+$	1	0,59	0,61	0,64	0,91	1,24
	2	0,61	0,66	0,59	0,82	1,15

При ионной имплантации в отличие от  $\gamma$ -облучения наблюдается рост  $H^n$  при больших нагрузках (свыше 10 г), когда индентор проникает в кремниевую подложку (рис. 5, 6). Причем указанный эффект присутствует при дозах имплантации  $\Phi \geq 5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$  как для ионов  $\text{B}^+$ , так и для ионов  $\text{P}^+$ . При  $\Phi < 1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$  существенных различий от исходного необлученного образца в зависимостях  $H^n(P)$  при нагрузках свыше 10 г не выявлено (рис. 5, 6). Вероятнее всего, наблюдавшееся возрастание значений  $H^n$  при нагрузках свыше 10 г обусловлено упрочнением полимерной пленки вблизи границы раздела фотополимер-кремний. Об этом свидетельствует тот факт, что при нагрузках свыше 100 г, когда основной вклад в микротвердость исследуемой структуры начинает вносить кремний, значения  $H^n$  во всех исследовавшихся образцах сближаются (см. рис. 5, 6).

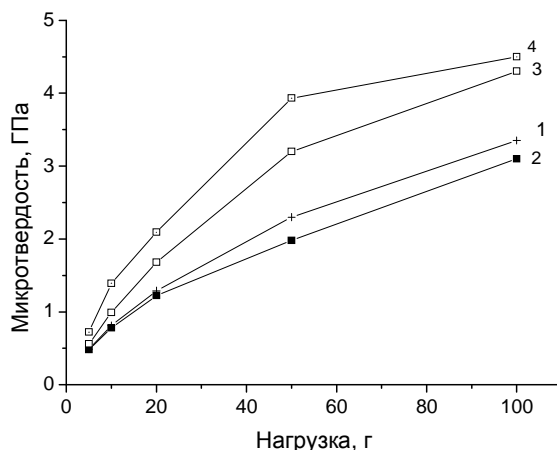


Рисунок 5. – Зависимость микротвердости  $H^H$ , измеренной методом индентирования, от нагрузки для имплантированных ионами бора пленок фоторезиста толщиной 1,0 мкм на пластинах кремния марки КДБ 10 (111). Доза имплантации  $\Phi$ , см<sup>-2</sup>: 1 – 0; 2 –  $5 \cdot 10^{14}$ ; 3 –  $1 \cdot 10^{15}$ ; 4 –  $1 \cdot 10^{16}$

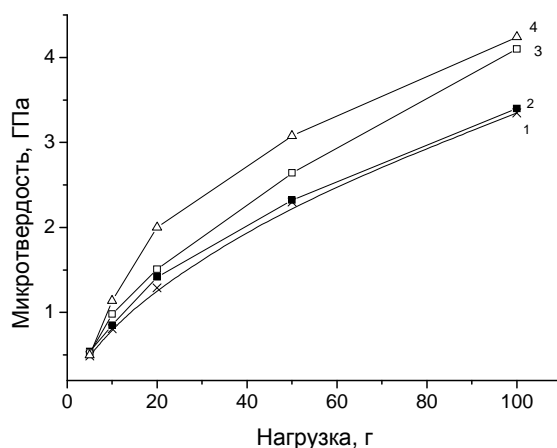


Рисунок 6. – Зависимость микротвердости  $H^H$ , измеренной методом индентирования, от нагрузки для имплантированных ионами фосфора пленок фоторезиста толщиной 1,0 мкм на пластинах кремния марки КДБ 10 (111). Доза имплантации  $\Phi$ , см<sup>-2</sup>: 1 – 0; 2 –  $5 \cdot 10^{14}$ ; 3 –  $1 \cdot 10^{15}$ ; 4 –  $1 \cdot 10^{16}$

Приведенные экспериментальные данные указывают на то, что процессы радиационного дефектообразования при ионной имплантации структур фотополимер-кремний протекают далеко за областью проецированного пробега ионов  $P^+$  и  $V^+$ , причем при имплантации ионов бора указанный эффект более выражен.

Необходимо также отметить, что эффект радиационного упрочнения наблюдается на глубинах существенно превышающих пробег ионов уже при минимальной дозе имплантации ( $5 \cdot 10^{14}$  см<sup>-3</sup>). Это позволяет предполагать, что эффект упрочнения не связан с формированием нанокompозита или с карбонизацией полимера в области торможения ионов. Он может быть обусловлен процессами радиационного сшивания молекул полимера за областью пробега ионов [7, 8].

С другой стороны, широко известно [8–10], что при высокоэнергетическом облучении полимеров наблюдается интенсивный выход газообразных продуктов ( $H_2$ ,  $CO$ ,  $CH_4$  и т.д.). В области пробега ионов число смещенных атомов велико, структура полимера должна разрушаться, и вследствие интенсивного газовыделения в этом слое остаются преимущественно атомы углерода [10]. Наблюдается усадка полимера в области пробега ионов, что приводит к формированию на ее границе упругих напряжений. Эти упругие напряжения приводят к короблению полимерных пленок, что наблюдалось нами при имплантации тонких (40 мкм) пленок полиимида и полиэтилентерефталата [6]. Наличие упругих напряжений может приводить к упрочнению структуры. Кроме того, усадка полимера и, соответственно, снижение толщины полимерной пленки приводит к увеличению вклада кремния в микротвердость структуры фоторезист-кремний, что проявляется как увеличение значений  $H^H$  при нагрузках свыше 10 г.

Карбонизация полимерной пленки в области пробега ионов также должна приводить к увеличению значений  $H^H$  и  $H_{\square}^{скл}$ , измеренных при малых (1–2 г) нагрузках. Микротвердость алмазоподобных

углеродных пленок достигает 45–50 ГПа [11], что более чем на 2 порядка выше, чем микротвердость исходных (необлученных) полимерных пленок. Однако толщина карбонизированного слоя не превышает 5% толщины полимерной пленки. Поэтому увеличение измеряемых значений  $H^m$  и  $H_{\square}^{скл}$  при малых (1–2 г) нагрузках не столь выражено.

Изменение свойств полимера на глубинах, значительно превышающих проецируемый пробег ионов, невозможно объяснить эмиссией вторичных электронов, образующихся при электронном торможении имплантируемых ионов, поскольку они не способны модифицировать полимер на глубине, существенно превышающей 0,1 мкм. В органических резистах эмиссия вторичных электронов очень мала и ограничена областью в  $\sim 10$  нм [1].

Увеличение микротвердости (как  $H^m$ , так и  $H_{\square}^{скл}$ ) фоторезиста в процессе высокоэнергетического воздействия обусловлено химической модификацией структуры полимера, в частности образованием сшивок между макромолекулами полимера. Радиационное сшивание макромолекул полимеров, протекающее по свободнорадикальному механизму, является хорошо исследованным процессом и широко применяется для модификации механических свойств полимерных материалов [8, 12]. Однако в условиях ионной имплантации сложно ожидать реализации свободнорадикальных процессов на глубинах, значительно превышающих проецируемый пробег ионов и выбиваемых ими электронов, поскольку миграция радикалов в матрице полимеров затруднена.

Прямое воздействие ионов на полимер, а также нейтрализация разноименно заряженных ионов и рекомбинация свободных радикалов в треке иона приводит к образованию молекул в возбужденном состоянии. В отличие от диффузии радикалов перенос возбуждения может происходить на значительные расстояния вглубь полимера. По данным [13], энергия возбуждения может передаваться в полимере на расстояние более 1000 мономерных звеньев. Поэтому образование сшивок в объеме фоторезиста, обеспечивающее увеличение микротвердости, должно происходить в реакциях с участием возбужденных частиц. Еще одним механизмом упрочнения полимера в условиях имплантации может быть образование сшивок между макромолекулами полимера по свободнорадикальному (гомолитическому) механизму. Известно, что свободные радикалы могут образовываться при распаде возбужденных частиц [12]. Однако важно отметить, что для гомолитического разрыва химической связи необходимо затратить энергию, которая как минимум в 1,5–2 раза превышает энергию, необходимую для образования кетена из орто-нафтохинондиазида и последующего образования эфирных сшивок. Поэтому свободнорадикальный механизм образования сшивок нам кажется значительно менее вероятным.

Не следует также исключать возможность воздействия на физико-механические свойства фоторезиста наведенного в его объеме, и в особенности у границы раздела фотополимер-кремний, заряда, созданного облучением заряженными частицами [14, 15]. Наведенный в полимере заряд может также модифицировать свойства приповерхностных слоев монокристаллического кремния (плотность поверхностных состояний, область объемного заряда и т.д.).

**Заключение.** Таким образом, показано, что в процессе имплантации ионов  $P^+$  происходит модификация морфологии поверхности позитивного фоторезиста, выражающаяся в формировании неравномерно распределенных по поверхности конусообразных структур, которые обусловлены релаксацией напряжений, образовавшихся в процессе изготовления полимерной пленки, и радиационно-химическими процессами в приповерхностном слое фоторезиста. Процессы радиационного упрочнения при ионной имплантации структур фоторезист-кремний протекают далеко за областью проецированного пробега ионов  $P^+$  и  $V^+$ , причем при имплантации ионов бора указанный эффект более выражен. Полученные экспериментальные результаты объяснены процессами радиационного сшивания молекул полимера за областью пробега ионов по свободнорадикальному (гомолитическому) механизму, усадкой полимерной пленки и ее карбонизацией в области пробега ионов, а также воздействием на физико-механические свойства фоторезиста, заряда, созданного облучением заряженными частицами.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (договор № Ф16-151 от 20.05.2016 г.).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Моро, У. Микролитография. Принципы, методы, материалы : в 2 ч. / У. Моро – М. : Мир, 1990. – Ч. 2. – 632 с.
2. Photoimageable nozzle members and methods relating thereto : pat. US8173031 / S. T.Weaver, R. Wells ; publ. date : 8.05.2012.
3. Бринкевич, Д. И. Микромеханические свойства эпитаксиальных слоев GaP, легированных редкоземельным элементом диспрозием / Д. И. Бринкевич, Н. В. Вабищевич, В. С. Просолович // Неорганические материалы. – 2012. – № 8, Т. 48. – С. 878–883.
4. Модификация поверхности позитивного фоторезиста при ионной имплантации / Д. И. Бринкевич [и др.] // Микроэлектроника. – 2015. – № 6, Т. 44. – С. 448–452.

5. Склерометрический метод измерения микротвердости пленок фоторезиста на кремнии / Д. И. Бринкевич [и др.] // Приборы и методы измерений. – 2016. – № 1, Т. 7. – С. 77–84.
6. Вабищевич, С. А. Подавление радиационного упрочнения кремния, легированного германием / С. А. Вабищевич, Н. В. Вабищевич, Д. И. Бринкевич // Физика и химия обработки материалов. – 2006. – № 4. – С. 12–14.
7. Кинг, Р. В. Полимеры. Влияние облучения на материалы и элементы электронных схем / Р. В. Кинг, Н. Дж. Бродвей, Р. А. Майер. – М. : Атомиздат, 1967. – С. 49–114.
8. Грасси, Н. Деструкция и стабилизация полимеров / Н. Грасси, Дж. Скотт. – М. : Мир, 1988. – 246 с.
9. Спектры ЭПР алмазоподобных и облученных ионами полимерных углеродных пленок / В. В. Сухо-руков [и др.] // Поверхность. – 1991. – № 5. – С. 92–96.
10. Экспериментальные методы химии высоких энергий / под общ. ред. М. Я. Мельникова. – М. : МГУ, 2009. – 824 с.
11. Рудченко, С. О. Влияние условий синтеза на структуру и свойства алмазоподобных углеродных пленок для ФЭП / С. О. Рудченко, В. Е. Пуха, В. В. Стариков // Вісник ХНУ. – 2012. – № 16. – С. 89–93.
12. Пикаев, А. К. Современная радиационная химия. Твердое тело и полимеры. Прикладные аспекты / А. К. Пикаев. – М. : Наука, 1987. – 448 с.
13. Светочувствительные полимерные материалы / под ред. А. В. Ельцова. – Л. : Химия, 1985. – 296 с.
14. Объемный разряд в диэлектрических материалах космических аппаратов при облучении электронами и протонами / Ф. И. Акишин [и др.] // Перспективные материалы. – 2009. – № 3. – С. 12–16.
15. Комплексные исследования эффектов зарядки полимерного резиста (ПММА) при электронной литографии / Э. И. Рау [и др.] // Микроэлектроника. – 2013. – № 2, Т. 42. – С. 116–126.

Поступила 07.09.2016

#### STRENGTH PROPERTIES OF PHOTORESIST-SILICON STRUCTURES, Г-IRRADIATED AND IMPLANTED BY B<sup>+</sup> AND P<sup>+</sup> IONS

S. VABISHCHEVICH, N. VABISHCHEVICH, D. BRINKEVICH,  
V. PROSOLOVICH, Y. YANKOVSKI, S. BRINKEVICH

*Films of the FP-9120 positive photoresist thickness of 1,0 – 5,0 microns irradiated with  $\gamma$ -rays  $^{60}\text{Co}$  and implanted by B<sup>+</sup> and P<sup>+</sup> ions was investigated by the atomic force microscopy, sclerometry and indentation methods. It was shown that cone-shaped structures are formed on the surface of FP9120 positive photoresist in the process of ion implantation. These structures are uniformly distributed over the surface of the photoresist. They are due to the relaxation stresses formed during manufacture of the polymer film, and radiation-chemical processes in the surface layer of the photoresist. Radiation hardening of photoresist-silicon structures at ion implantation flow far beyond the range of P<sup>+</sup> and B<sup>+</sup> ions. These experimental results to explain the process of radiation cross-linking of polymer molecules far the range of ions, shrinkage of the polymer film and its carbonization in the range of ions.*

**Keywords:** photoresist, gamma-irradiation, ion implantation, sclerometry, indentation, microhardness.

УДК 537.533

**ПЛАЗМЕННЫЕ ЭМИССИОННЫЕ СИСТЕМЫ  
ДЛЯ ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

Часть 1

*д-р физ.-мат. наук, доц. В.Г. ЗАЛЕССКИЙ,  
д-р техн. наук, проф. И.Л. ПОБОЛЬ  
(Физико-технический институт НАН Республики Беларусь, Минск);  
д-р техн. наук, проф. В.А. ГРУЗДЕВ,  
канд. техн. наук, доц. Д.А. АНТОНОВИЧ, П.Н. СОЛДАТЕНКО  
(Полоцкий государственный университет)*

*С целью поддержания конкурентоспособности на рынке машиностроения, предприятия вынуждены предъявлять более жесткие требования к качеству производимой продукции, в связи с чем повышаются требования к процессам сварки, обработки поверхности и др. Для достижения предъявляемых требований предлагается использовать плазменный источник электронов. Представлены основные электронно-лучевые технологии. Предложена газоразрядная структура источника, способная формировать электронные и ионные пучки с параметрами, удовлетворяющими представленным технологиям.*

**Ключевые слова:** электронно-лучевая пушка, сварка, электронно-лучевые технологии

**Введение.** К настоящему времени электронно-лучевые технологии нашли достаточно широкое применение в различных отраслях. Это стимулировало разработку источников электронов, реализующих широкий спектр технологических параметров, различающихся по мощности, плотности тока, режимам работы, газодинамическим условиям работы (давление остаточного газа и расход плазмообразующего газа). Для решения конкретных задач могут формироваться как сфокусированные пучки высокой яркости, так и пучки большого сечения круговой или другой формы [1]. Многообразие требований, предъявляемых к технологическим электронным пучкам, не удается реализовать в источниках одного типа. Наибольшее распространение получили три основных типа источников пучков электронов: источники электронов с термокатодом, источники на основе высоковольтных тлеющих разрядов и плазменные источники электронов [2]. В данной работе представлены конструкции плазменных источников электронов на основе разряда в скрещенных  $E \times H$  полях, способные формировать высоко- и низкоэнергетичные пучки заряженных частиц для реализации широкого спектра электронно-лучевых технологий.

**Источник электронов для формирования высокоэнергетичных электронных пучков.**

На рисунке 1 приведена конструкция (а) и электродная структура (б) плазменного источника электронов, в котором реализованы принципы формирования эмиссионного тока за счет создания условий переключения без осевой неоднородности плазмы с ограничением эффективности извлечения, как в более известных источниках электронов на основе полого катода.

Разряд возбуждается в пространстве между катодами 1 и 2 (рис. 1, а) (область I, рис. 1, б). Плазмообразующий газ подается в пространство между катодами, а перепад давлений обеспечивается геометрией эмиссионного канала. Формирующаяся в разряде между катодами плазма диффундирует в область эмиссионного канала. Этому способствуют дополнительные электроды 3 и 4 (с анодным или промежуточным потенциалом), которые выполняют роль эмиттерного. Извлечение электронов осуществляется через эмиссионный канал в эмиттерном электроде с анодным (или близким к нему) потенциалом. Присутствие магнитного поля практически во всем объеме разрядной структуры способствует эффективной ионизации газа. В такой электродной структуре исключается стадия инициирования разряда, что отражается на форме вольтамперных характеристик (см. рис. 1, в).

В области эмиссионного канала (область II, рис. 1, б) магнитное поле имеет продольное оси канала направление индукции и не препятствует эмиссии электронов. Движение электронов в область II из области I осуществляется в слабом магнитном поле с поперечной компонентой вектора индукции, что в определенной мере ограничивает движение электронов в область эмиссионного канала (замагничивая только электроны) и затрудняет переключение электронного тока из плазмы в эмиссионный канал.

При возбуждении разряда эмиттерный электрод выполняет роль вспомогательного анода и значение его потенциала не так критично для формирования газоразрядной плазмы, как потенциал эмиттерного электрода в разряде с полым катодом [3].

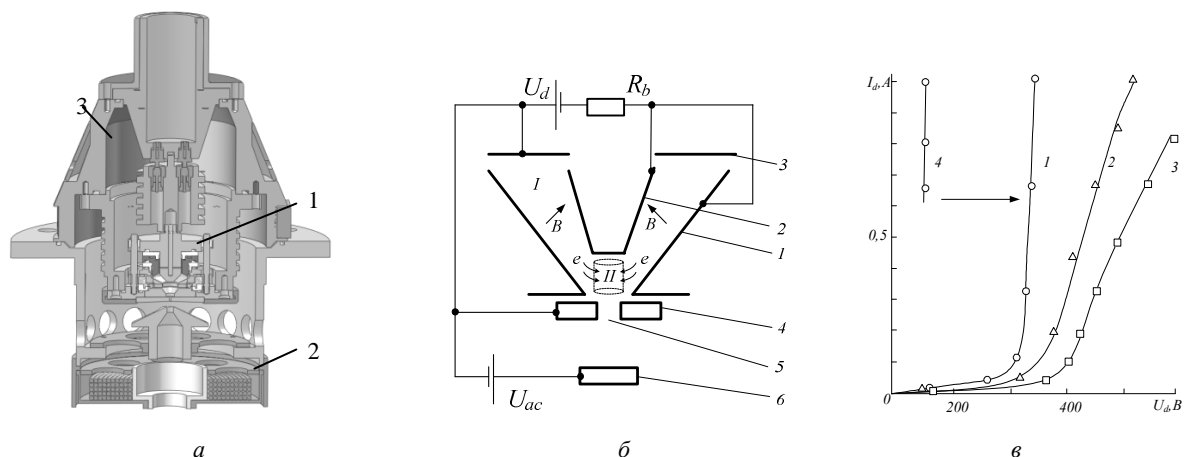


Рисунок 1. – Плазменный источник электронов:

**а** – конструкция (1 – генератор плазмы; 2 – магнитная линза; 3 – корпус);  
**б** – электродная структура (1 – внешний катод; 2 – внутренний катод; 3 – анод; 4 – эмиттерный электрод;  
 5 – эмиссионный канал; 6 – ускоряющий электрод;  $U_d$  – напряжение горения разряда;  $U_{ac}$  – ускоряющее напряжение;  $R_b$  – балластное сопротивление;  $B$  – индукция магнитного поля  $e$  – напуск газа);  
**в** – вольтамперные характеристики источника электронов (мПа·м<sup>3</sup>/с: 1 – 2,8; 2, 4 – 1,7; 3 – 1,25)

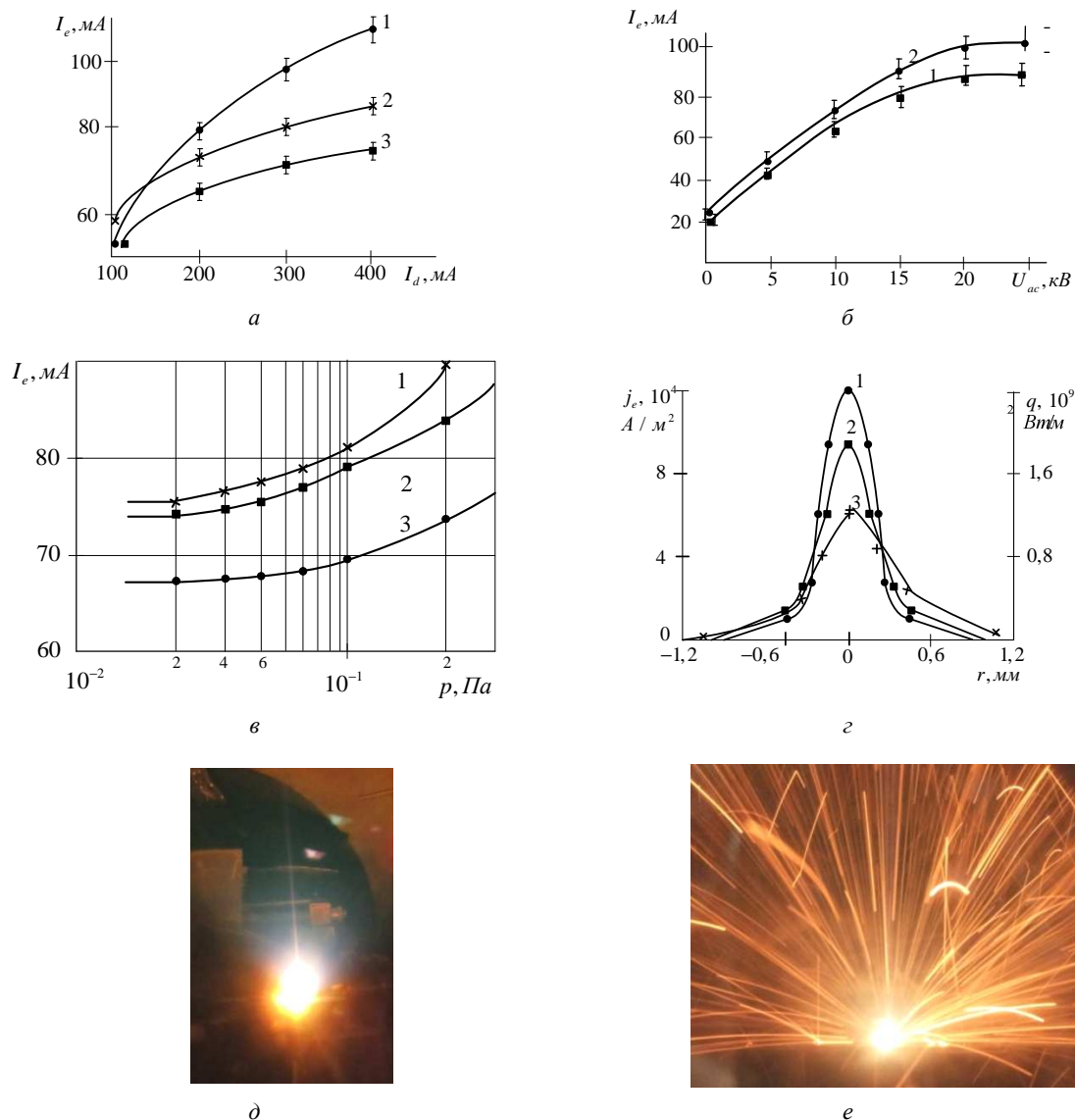
Экспериментальные результаты позволили сформулировать следующие способы управления эффективностью извлечения и стабильности эмиссионного тока в плазменном эмиттере данного типа, которые не реализуемы в плазменных источниках электронов на основе полого катода. Первый способ заключается в создании условий для перераспределения токов между эмиттерным электродом и эмиссионным каналом путем изменения параметров слоя пространственного заряда вблизи эмиттерного электрода. Это может быть обеспечено как автоматическим смещением потенциала эмиттерного электрода (сопротивлением смещения в цепи соответствующего электрода), так и за счет использования вставок в эмиттерный электрод в области эмиссионного канала под плавающим потенциалом. Второй способ реализуется посредством создания в эмиттирующей плазме электрических полей, обеспечивающих формирование потоков электронов в область эмиссионного канала. Интенсивность таких потоков определяется конфигурацией магнитного и электрического полей (смещением потенциала анода относительно эмиттерного электрода) в газоразрядной структуре и давлением газа (величиной напуска газа в разрядную камеру).

На рисунке 2 представлены типичные характеристики данного источника. К основному достоинству данного источника можно отнести слабую зависимость эмиссионного тока от давления вплоть до 0,3 Па, (рис. 2, в). Эта особенность реализуется как за счет особой конфигурации электродов разрядной камеры, так и вследствие дополнительной автостабилизации параметров электронного пучка включением сопротивления  $R$  в цепь эмиттерного электрода относительно анода. На рисунке 2, г представлены также распределения плотности тока и плотности мощности электронного пучка по сечению. Анализ распределений показывает, что максимальное значение плотности мощности  $q_{max} \approx 10^9$  Вт/м<sup>2</sup> и эффективный диаметр электронного пучка (который определяется на уровне 0,1  $q_{max}$ ) соответствуют типичным значениям плотности мощности электронных пучков, применяемых для электронно-лучевой сварки. Это, а также вид газовой характеристики свидетельствуют о возможности применения данного источника для сварки, в том числе и материалов с повышенным газоотделением в процессе термообработки [4].

На рисунке 3 представлены электронно-оптические характеристики пучков, формируемых в данном источнике электронов. Для сравнения на тех же рисунках приведены зависимости для аналогичного источника на основе разряда в полом катоде. Представленные зависимости расходимости (рис. 3, а), эмиттанса (рис. 3, б) и яркости (рис. 3, в) электронного пучка от приведенной напряженности поля в ускоряющем промежутке соответствуют типичным зависимостям сварочных электронных пучков [4].

**Области применения.** Приведенные выше характеристики свидетельствуют о возможности применения представленного плазменного источника для реализации «классических» сварных технологий. При этом традиционные применения электронно-лучевой сварки (ЭЛС) обычно предусматривают получение глубокого «кинжального» проплавления на большую глубину (до сотен миллиметров). Однако существует большое количество вариантов изделий, для которых не обязательно получение таких швов, при этом требуется очень высокое их качество. Речь идет об изделиях с высоким качеством и надежно-

стью сварных соединений, а также деталях из высокочистых и высокоактивных металлов. Ниже приведен ряд примеров возможного использования представленного источника электронов.

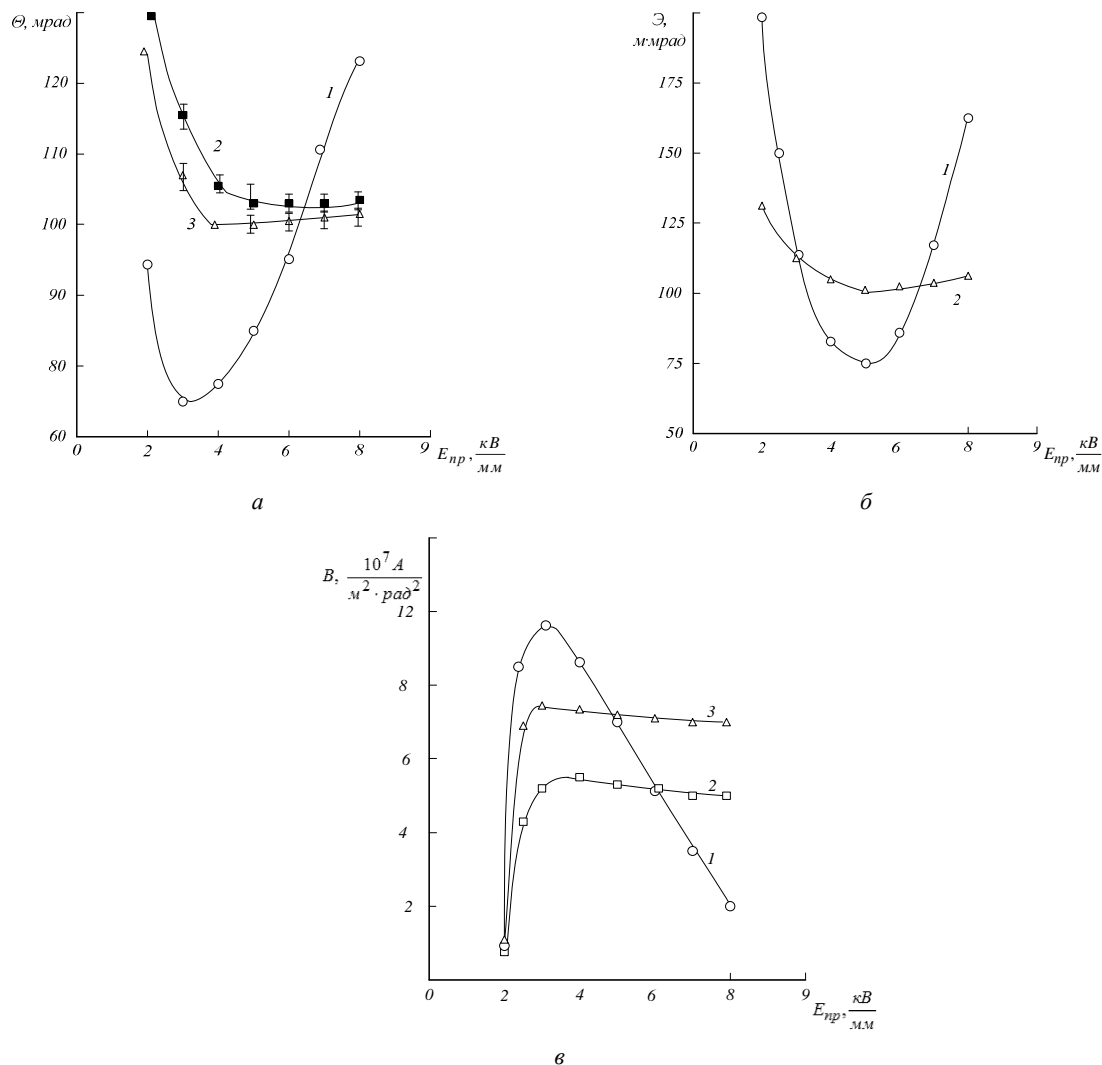


**Рисунок 2.** – Основные характеристики плазменного источника электронов (*a* – эмиссионная характеристика: ускоряющее напряжение 18 кВ; напуск газа 1,5 мПа·м<sup>3</sup>/с; давление, Па: 1, 2 – 0,04; 3 – 0,1;  $R_{cm2}$ , кОм: 1 – 0; 2, 3 – 1; *b* – вольтамперная характеристика: напуск газа 1,5 мПа·м<sup>3</sup>/с; ток разряда 0,2 А; давление газа, Па: 1 – 0,04; 2 – 0,1; *в* – газовая характеристика: ускоряющее напряжение 16 кВ; напуск газа 1,5 мПа·м<sup>3</sup>/с;  $R_{cm2}$ , кОм: 1 – 0; 2 – 0,5; 3 – 1; *г* – распределение плотности тока и плотности мощности по сечению пучка: ускоряющее напряжение 18 кВ; напуск газа 1,5 мПа·м<sup>3</sup>/с; ток разряда 0,2 А; ток эмиссии 0,08А;  $R_{cm2}$ , кОм: 1 – 1; 2 – 0,5; 3 – 0) и фото пучка в процессе сварки различных материалов (*д*, *е*)

**Электронно-лучевой переплав высокоактивных металлов.** Одна из традиционных электронно-лучевых технологий – переплав высокоактивных металлов, который необходимо проводить в вакууме. При этом коэффициент использования мощности луча достигает 90% [5]. При выполнении переплава металлов и сплавов удаляемые из них загрязнения и металлические пары попадают в электронно-лучевую (ЭЛ) пушку, в случае использования накаливаемых катодов они достаточно быстро выходят из строя. Практика показала, что металлургические процессы, связанные с интенсивным испарением, целесообразно проводить пушками с плазменным источником электронов.

Из технологических отходов высокоактивных металлов (циркония, титана, ниобия и др.) переплавом можно получать однородные по структуре отливки, которые пригодны для повторного использования, например в качестве катодов-мишеней. В качестве материала для ЭЛ переплава использовали

стружку циркония ( $T_{пл} = 1855^\circ\text{C}$ ) и титана ( $T_{пл} = 1668^\circ\text{C}$ ). Оработаны методы изготовления ЭЛ плавкой новых и регенерации изношенных катодов – мишеней для магнетронных и дуговых систем вакуумного распыления из чистых Ti, Zr, Hf, сплавов Ti и Zr с Cr, Al, В, Мо и др., в том числе из лома и стружки. Катоды-мишени используются для получения методом конденсации с ионной бомбардировкой новых высокоэффективных покрытий.



**Рисунок 3. – Зависимость расходимости (а), эмиттанса (б) и яркости (в) электронного пучка от приведенной напряженности:**  
**ток разряда 0,2 А, ток эмиссии 0,05 А, напуск газа, мПа·м<sup>3</sup>/с: 1, 2 – 2,2, 3 – 3,3;**  
**радиус эмиссионного канала, мм: 1 – 1,1, 2, 3 – 0,9; длина канала, мм: 1 – 0,8, 2, 3 – 2;**  
**1 – ИЭП на основе ОРПК, 2, 3 – ИЭП на основе ОРМ**

**Обращение с обработавшим ядерным топливом (ОЯТ).** Анализ доступных данных по конструкциям стеллажей для мокрого и контейнеров для сухого пристанционного хранения ОЯТ говорит о том, что для этих целей используют длинномерные трубы из нержавеющей сталей толщиной 4,5–5,0 мм с высоким содержанием бора. Трубы изготавливают с помощью электронно-лучевой или лазерной сварки. Использование стеллажей с уплотненным шагом расположения труб позволяет разместить и безопасно хранить в бассейнах значительное количество ОЯТ.

Получены неразъемные соединения из нержавеющей высокобористых сталей аустенитного и ферритного классов, используемых для изготовления труб контейнеров для мокрого или сухого хранения ОЯТ.

Оработан метод сварки изделий из высокобористых сталей аустенитного и ферритного классов толщиной 4,2 и 6 мм (рис. 4) путем варьирования тока сварки. Полученные зависимости представлены на рисунке 5.



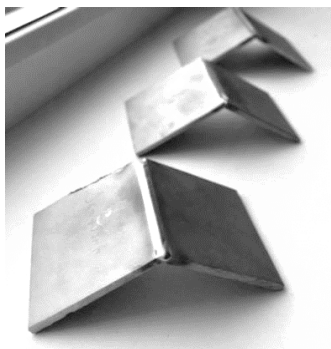


Рисунок 4. – Образцы из стали, сваренные ЭЛС

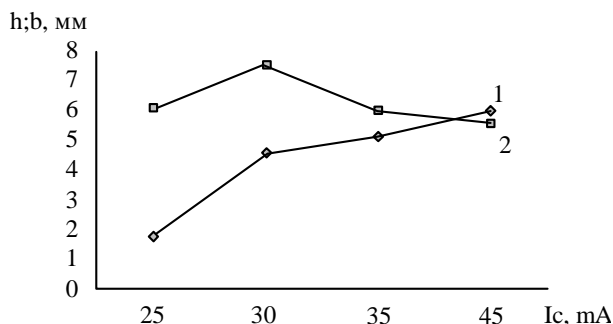
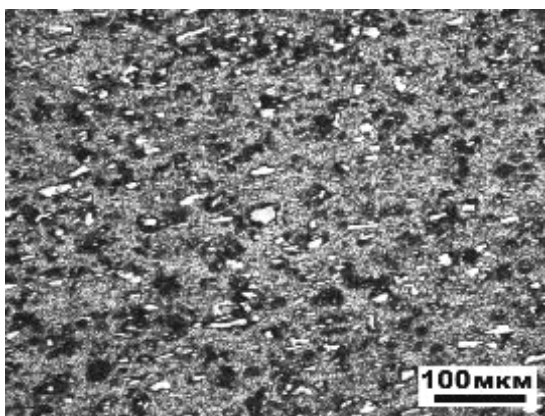
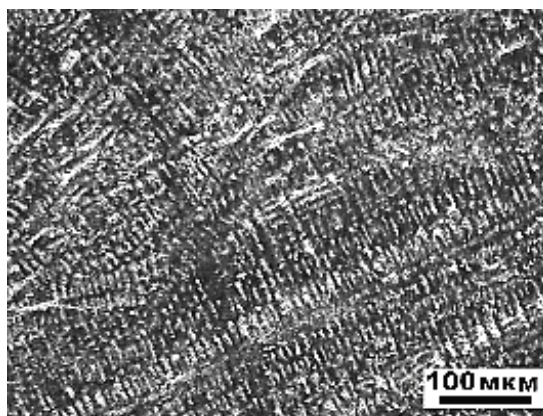


Рисунок 5. – Зависимость глубины проплавления  $h$  и ширины сварного шва  $b$  для высокобористой аустенитной стали:  
1 – глубина проплавления; 2 – ширина шва

Сварной шов состоит из аустенитных дендритов и боридной эвтектики в междендридном пространстве (рис. 6, б). Оси дендритов имеют тенденцию интенсивного роста в направлении передачи тепла, т.е. перпендикулярно зоне расплава (рис. 6, б). Зона термического влияния (ЗТВ) относительно небольшая (50 – 160 мкм). Наблюдается увеличение зерен аустенита и боридных частиц в ЗТВ из-за теплового воздействия при сварке. Полное растворение боридов имеет место в зоне расплава и вблизи ЗТВ. Степень растворения зависит от расстояния до зоны расплава и размера частицы. Частично растворенные бориды окружены эвтектикой (рис. 6, б).



а



б

Рисунок 6. – Высокобористая аустенитная сталь:  
а – основной металл; б – сварной шов

**Создание сверхпроводящих высокочастотных резонаторов.** Ведутся работы по созданию сверхпроводящих высокочастотных СВЧ ниобиевых 1,3 ГГц резонаторов методом электронно-лучевой сварки (рис. 7, а). СВЧ резонаторы из особолистого ниобия для ускорителей заряженных частиц могут изготавливаться только с применением ЭЛС. Процесс ЭЛС обеспечивает сохранение исходной высокой чистоты металла сварного соединения [5], а также требуемую геометрию сварных соединений: полное проплавление с шириной шва  $e_1$  и  $e_2$  не менее 4 мм (рис. 7, б).

Технология изготовления СВЧ резонаторов, используемая для наиболее масштабных строящихся и проектируемых в настоящее время ускорителей заряженных частиц, включает штамповку полулунных резонатора, их сварку между собой, а также с другими элементами конструкции [6]. Наиболее ответственной операцией является сварка двух полулунных резонаторов по экватору. При получении сварных соединений СВЧ резонаторов высокие требования предъявляются к геометрии сварных швов и химической чистоте металла соединений, которая должна быть не хуже, чем у исходного ниобия. Последнее является залогом сохранения сверхпроводящих свойств особолистого ниобия и достигается путем травления свариваемых кромок перед сваркой в смеси кислот, соблюдением чистоты при хранении и транспортировании деталей

перед сваркой. Получение требуемой геометрии сварных швов при сварке компонентов СВЧ ниобиевых резонаторов является непростой задачей и требует детального изучения взаимосвязей между параметрами режима ЭЛС и характеристиками сварных швов. Однако имеются публикации, свидетельствующие о получении дефектов при сварке экватора полуячеек, в том числе и при серийном изготовлении резонаторов с использованием отработанных режимов сварки [6].

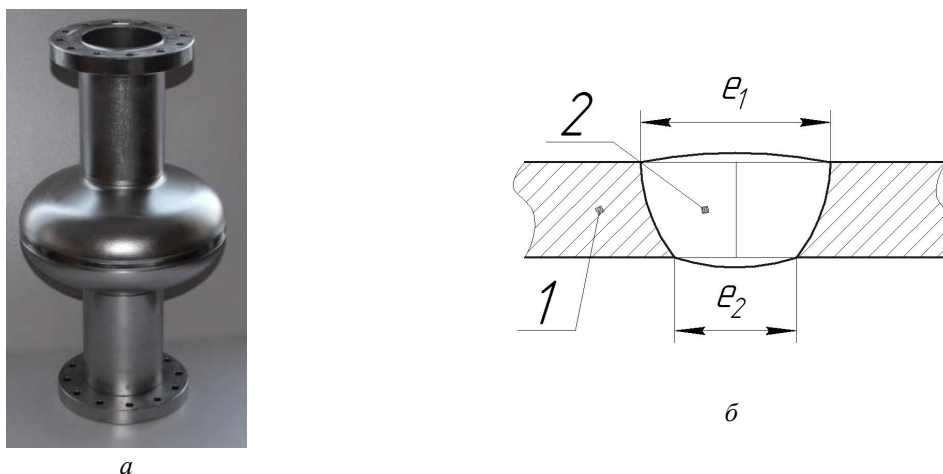


Рисунок 7. – 1,3 ГГц одноячеечный СВЧ ниобиевый резонатор (а) и изучаемая геометрия сварного шва (б); 1 – основной металл; 2 сварной шов

Наряду с традиционными областями применения электронно-лучевых технологий в последнее время, в связи с расширением области применения плазмохимических технологий, таких как электронно-лучевое диспергирование, электронно-лучевое распыление диэлектрических материалов, литография и нанесение многослойных покрытий, усилился интерес к получению низкоэнергетичных пучков заряженных частиц с энергией до 5 кэВ. Новым и перспективным направлением представляется и электронно-лучевое ассистирование ионного воздействия, которое может быть реализовано с использованием плазменных источников электронов, поскольку плазма может эмитировать как электроны, так и ионы. Далее представлен ряд возможных областей применения таких пучков.

**Получение неразъемных соединений пайкой.** Электронно-лучевой пайкой изготовлены соединения из кубического нитрида бора (КНБ) с твердыми сплавами, примененными для изготовления лезвийного инструмента.

Для высокотвердых материалов вместо шлифования может успешно применяться лезвийная обработка инструментом из сверхтвердых материалов (СТМ), полученным методом пайки. Выполнены исследования по проведению ЭЛ пайки КНБ и поликристаллического алмаза (ПКА) и использованию такого инструмента.

Основным условием получения соединения керамики СТМ с металлом является смачивание материалов сплавом, для чего в его состав должен быть введен адгезионно-активный элемент, например Ti. Пайка с нагревом лучом небольшой интенсивности дает возможность применения адгезионно-активных припоев на основе Cu и Ag при содержании до 5 мас. % Ti, обеспечивающих смачивание соединяемых материалов, снижает опасность графитизации СТМ и обеспечивает его высокопрочное соединение с основой. В случае соединения «КНБ – припой Ag-Cu-In-Ti – твердый сплав ВК8» происходит взаимная диффузия элементов, входящих в состав КНБ, припоя и основы, в результате чего в КНБ формируется переходный слой толщиной от 4–6 до 10–14 мкм, состоящий из соединений TiN, TiB<sub>2</sub>, Ti<sub>3</sub>B<sub>4</sub>, Ti<sub>2</sub>B<sub>5</sub>.

Разработаны новые конструкции инструмента (рис. 8), оснащенного КНБ и ПКА, с повышенной прочностью удержания СТМ, что существенно улучшает производительность и качество обработки деталей [6]. Это обусловлено высокой скоростью резания, сокращением времени на переналадку оборудования и возможностью получения низкой шероховатости поверхности. По сравнению с твердосплавным инструментом стойкость инструмента из ПКА больше до 50 раз (при точении сплава АЛ25). Изделия после лезвийной обработки инструментами, оснащенными СТМ, имеют шероховатость поверхности до 0,05–0,63 мкм, сравнимую с поверхностью после шлифовки.

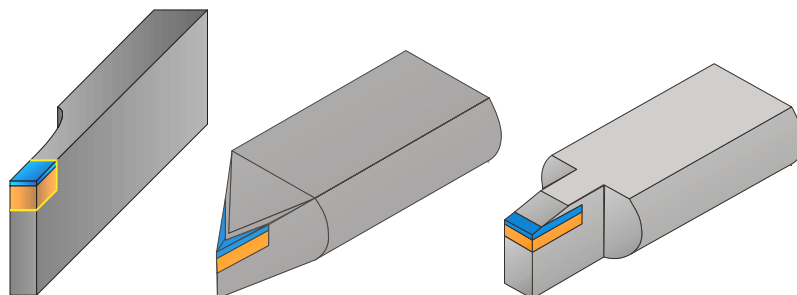


Рисунок 8. – Некоторые типы изготавливаемых инструментов, оснащенных ПКА и КНБ

**Электронно-лучевое ассистирование ионного воздействия.** Применение ЭЛ нагрева в процессах нанесения покрытий позволяет получать бездефектные слои с более высокими пластическими характеристиками, чем при методах наплавки на воздухе. Это обусловлено рафинирующим действием высокого вакуума.

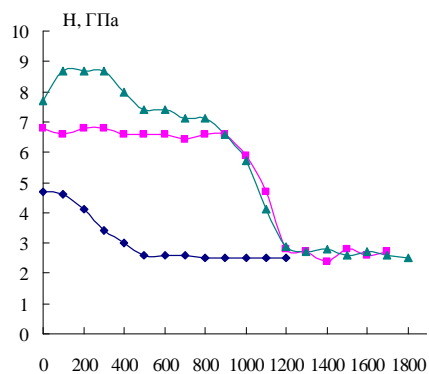
Электронно-лучевой нагрев позволяет существенно улучшить эксплуатационные свойства деталей с плазменными, газоплазменными, электродуговыми покрытиями. В результате ЭЛ нагрева в покрытии и основе происходят структурные и фазовые превращения, ведущие к значительному увеличению адгезии и одновременному возрастанию твердости и износостойкости. Последовательное использование различных методов для формирования требуемой структуры поверхностного слоя металла получило название – инженерия поверхности второго поколения [7].

Электронно-лучевая обработка может обеспечить оплавление только покрытия, расплавление только слоя у поверхности основы, а также оплавление и покрытия, и основы. Первый вариант целесообразен, когда предварительно нанесенное покрытие имеет достаточно хорошую адгезию к основе, а оплавление проводится для устранения пористости. Второй вариант позволяет улучшить низкую адгезию нанесенного покрытия к основе, а само покрытие обладает приемлемой для эксплуатации пористостью и необходимыми физико-механическими характеристиками. Третий вариант применяется, когда покрытие должно иметь близкую к 100% плотность и максимально возможную адгезию к основе. Для реализации оптимальных вариантов обработки требуется тонкая регулировка параметров нагрева – плотности энергии и времени воздействия.

Методы инженерии поверхности второго поколения связаны с изменением химического состава материала – ЭЛ наплавкой на основу износо-, коррозионностойкого и/или антифрикционного материала, нанесением покрытий, позволяющих значительно повысить эксплуатационные характеристики изделий. Применение комбинированного ЭЛ воздействия обеспечивает получение комплекса характеристик упрочненного изделия, которые невозможно получить с применением традиционных методов упрочнения. Проведены исследования по теоретическому и экспериментальному моделированию методов нанесения многофункциональных слоев на основу из сталей и титановых сплавов, изучению структурно-фазовых превращений в них. Используются различные методы предварительного осаждения традиционных покрытий, которым в исходном состоянии присущи высокая пористость, малые прочность самого слоя, его адгезия к основе и износостойкость. Электронно-лучевая обработка таких покрытий приводит к благоприятным структурным и фазовым превращениям в покрытии и в основе, изменениям в свойствах осажденных слоев, релаксационным процессам в дефектном материале покрытия, формированию переходной диффузионной зоны. При оплавлении покрытия материал перекристаллизуется, устраняются поры, дефекты структуры, уменьшается шероховатость, происходит «скругление» выступающих микронеровностей. В результате повышается прочность сцепления и плотность покрытий, что обуславливает увеличение износо-, жаростойкости и других характеристик.

Электронно-лучевая обработка предварительно нанесенных на титановые сплавы **плазменных покрытий**  $TiO_2$  и Ni-Ti, **электролитических** Cr и Ni и **детонационных** WC-Ni и WC-Co приводит к образованию между основой и покрытием диффузионной зоны, повышению твердости, адгезионной прочности до 210–220 МПа, предела выносливости, износостойкости поверхностных слоев по сравнению со сплавами без покрытий и слоями без ЭЛ обработки.

Электронно-лучевой нагрев сталей, предварительно подвергнутых **ХТО**, существенно повышает твердость и увеличивает толщину упрочненного слоя в 1,5–2,5 раза. Выполняется комплекс работ по разработке технологий и созданию оборудования ионного азотирования (ИА) в тлеющем разряде [7]. Твердость поверхности стали 40X после ИПА с ЭЛ нагревом повышается с 4,5 до 8–6,5 ГПа (рис. 9). Комби-



**Рисунок 9.** – Распределение микротвердости по глубине упрочненного слоя стали 40Х:  
1 – после ИА, 2 – после ЭЛ закалки,  
3 – после ИА и ЭЛ закалки

**Закключение.** Рассмотренный в данной части статьи вариант газоразрядной структуры позволяет формировать электронные и ионные пучки с параметрами, удовлетворяющими широкому спектру электронно-лучевых технологий.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Окс, Е. М. Источники электронов с плазменным катодом: физика, техника, применения / Е. М. Окс. – Томск : Изд-во НТЛ, 2005. – 216 с.
2. Источники электронов с плазменным эмиттером / Ю. Е. Крейндел [и др.] ; под общ. ред. Ю. Е. Крейнделя. – Новосибирск : Наука, 1983. – 120 с.
3. Залесский, В. Г. Эмиссионные и электронно-оптические системы плазменных источников электронов : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.04.04 / В. Г. Залесский. – Минск, 2015. – 316 л.
4. Плазменный эмиттер электронов с сеточной стабилизацией : в 2 ч. / А. В. Жаринов [и др.] // ЖТФ. – 1986. – Т. 56, Вып. 1. – Ч. I. – С. 66–70.
5. Разработка и применение источников интенсивных электронных пучков : сб. науч. тр. / науч. ред. Г. А. Месяц. – Новосибирск : Наука, 1976. – 191 с.
6. Технологические процессы и системы в микроэлектронике: плазменные, электронно-ионно-лучевые, ультразвуковые / А. П. Достанко [и др.] ; под общ. ред. А. П. Достанко. – Минск : Бестпринт, 2009. – 199 с.
7. Ионно-плазменные технологии в электронном производстве / В. Т. Барченко [и др.] ; под общ. ред. Ю. А. Быстрова. – СПб. : Энергоатомиздат, 2001. – 332 с.

Поступила 20.09.2016

## PLASMA-EMISSION SYSTEMS FOR ELECTRON-BEAM TECHNOLOGIES

Part 1

V. ZALESSKI, V. GRUZDEV, I. POBOL, D. ANTONOVICH, P. SOLDATENKO

*Order to maintain competitiveness in the mechanical engineering market, enterprises are forced to impose more strict requirements for the quality of manufactured products, and therefore the increased requirements for welding processes, surface treatment, etc. To achieve entry requirements are encouraged to use a plasma electron source. The main electron beam technologies are shown. Presented the gas-discharge structure that can forming electron and ion beams, with parameters that satisfying to represented technologies.*

**Keywords:** electron-beam source, welding, electron-beam technologies.

УДК 621.371:550.837.6

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН  
С АНИЗОТРОПНЫМИ СРЕДАМИ НАД УГЛЕВОДОРОДНЫМИ ЗАЛЕЖАМИ  
В РЕЖИМЕ РАДИОИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ**

*канд. техн. наук, доц. В.Ф. ЯНУШКЕВИЧ, К.И. КРЕМЕНЯ, М.М. ИВАНОВ,  
канд. техн. наук, доц. Т.В. МОЛОДЕЧКИНА  
(Полоцкий государственный университет)*

*Рассмотрены вопросы взаимодействия радиоимпульсных сигналов с анизотропными средами над углеводородными залежами. Используется вертикальная поляризация электромагнитных волн. Рассмотрен широкий диапазон частот. Вариация характеристик зондирующих сигналов позволяет повысить информативность поиска. Даны рекомендации по использованию оптимальных характеристик зондирующих сигналов. Полученные зависимости свидетельствуют о следующем: большие глубины залегания углеводородов требуют применения для зондирования радиоимпульсных сигналов большей длительности. Возможность перенастройки устройства дополняет функциональные возможности для поиска углеводородных залежей. На основе приведенных исследований могут быть разработаны методы радиокомплексирования для георазведки углеводородов. Результаты исследований могут быть использованы в поисковой геофизике.*

**Ключевые слова:** электромагнитная волна, анизотропная среда, углеводородные залежи.

**Введение.** Актуальность рассматриваемых в настоящей работе задач заключается в усовершенствовании существующих электромагнитных методов (ЭММ) георазведки и разработке новых методов поиска, идентификации месторождений нефти и газа (углеводородов), являющихся стратегическим видом полезных ископаемых и определяющих широкий спектр глобальных экологических вопросов современного общества [1]. Исследование режимов взаимодействия электромагнитных волн (ЭМВ) с углеводородными залежами (УВЗ) может быть использовано в поисковой геофизике для повышения точности и уровня достоверности ЭММ обнаружения залежей нефти и газа. Результаты анализа взаимодействия ЭМВ с УВЗ и его экспериментального исследования представлены во многих работах, например [2–5]. Вместе с тем для реализации новых ЭММ представляет интерес анализ процесса взаимодействия радиоимпульсных ЭМВ с анизотропными средами (АС), образующихся над залежами и скоплениями углеводородов.

Использование зондирующих сигналов с вариацией частот позволяет проводить точные оценки трансформации отдельных спектральных составляющих и интерпретировать всевозможные нелинейные эффекты при взаимодействии ЭМВ с АС [5].

**Объекты и методы исследования.** Представим реальную залежь углеводородов (рис. 1) в виде среды 4, погруженной в среду с потерями (среда 2), имеющей границу раздела ОХ с воздушным пространством (среда 1) [2]. Залежь находится на глубине  $\Delta Z$  от границы раздела сред 1-2 и имеет мощность  $Z_1$  и протяженность  $X_1$ .

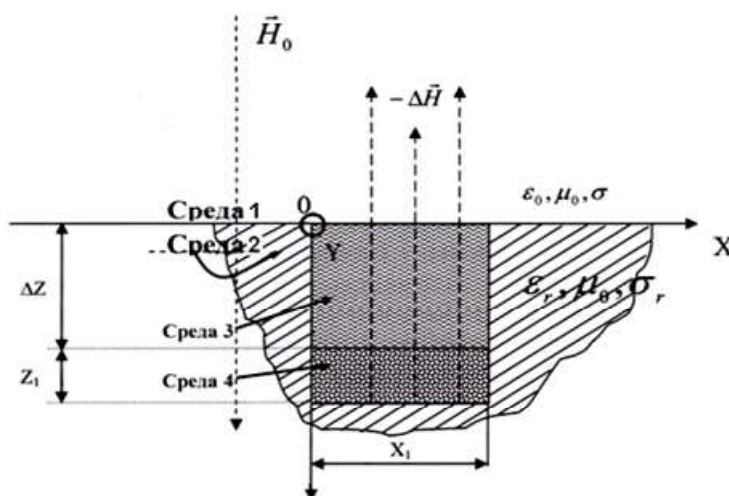


Рисунок 1. – Модель разреза геологического профиля над УВЗ

Под действием высоких температур и пластового давления над залежью углеводородов происходят электрохимические процессы, приводящие к образованию на границе с воздушным пространством промежуточной области (среда 3), характеризующейся избытком свободных электронов.

Современные методы поиска и обнаружения УВЗ требуют повышения степени достоверности результатов электроразведки. Исследование процесса воздействия импульсной ЭМВ на АС представляет теоретический и практический интерес, связанный с поиском новых и модернизацией действующих ЭММ. Метод основан на использовании периодической последовательности импульсных сигналов. Период повторения сигналов выбирается из условия обеспечения однозначного диапазона измерения дальности (расстояния до исследуемого слоя). В приемнике осуществляется обработка либо самих сигналов, либо их огибающих, полученных после детектирования.

Рассмотрим взаимодействие анизотропной среды над УВЗ с радиоимпульсным сигналом (рис. 2), спектр которого рассчитывается по формуле

$$S(f) = \frac{U \cdot \tau_u}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0) \cdot \tau_u}{2}}{(\omega - \omega_0) \cdot \tau_u} + \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0) \cdot \tau_u}{2}}{(\omega + \omega_0) \cdot \tau_u}, \quad (1)$$

где  $\frac{U \cdot \tau_u}{2} = 1$  – амплитуда радиоимпульса, В;

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$  – частота радиоимпульса, рад/с;

$\tau_u$  – длительность импульса, с.

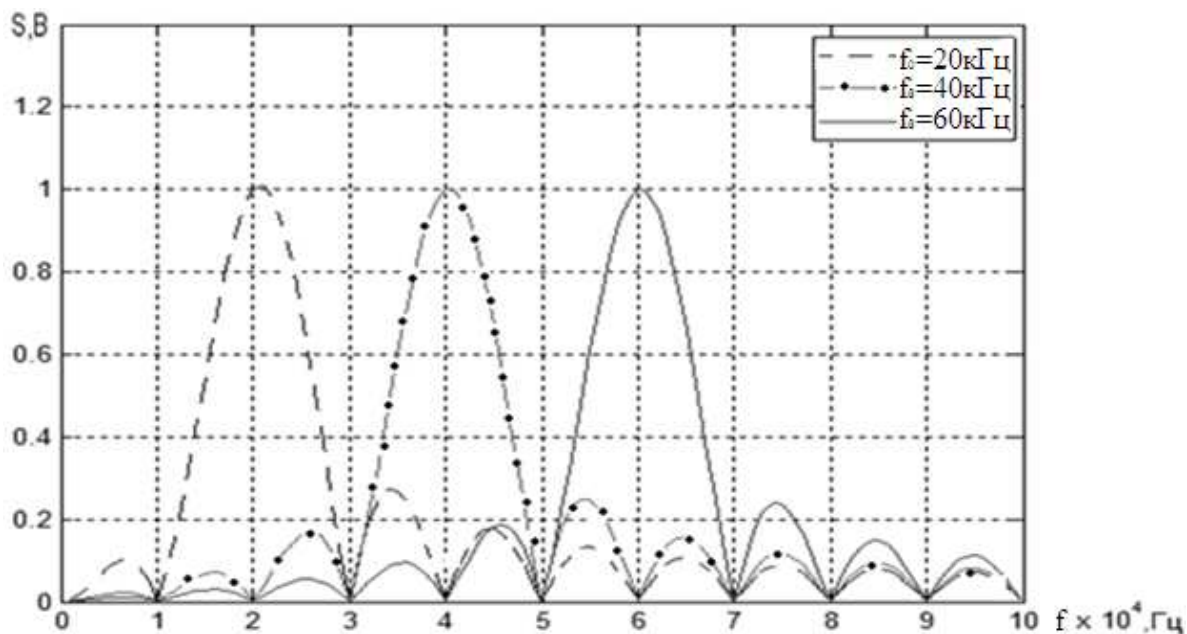


Рисунок 2. – Зависимость спектра зондирующего радиоимпульсного сигнала от частоты

Спектр отраженного радиоимпульса

$$\dot{S}_0 = (1 - \dot{R}_{1-2})^2 \cdot \dot{R}_{2-3} \cdot e^{-2\alpha h} \cdot \dot{S}(f). \quad (2)$$

Примем амплитуду нормально падающей ЭМВ за условную единицу  $\dot{E}_n = 1$ . На практике же значение напряженности поля будет определяться реализуемой радиотехнической системой для поиска, к которой предъявляются требования при решении конкретной геоинформационной задачи.

С учетом принятого значения падающей ЭМВ комплексная амплитуда волны, отраженной от границы сред 1-2, определяется коэффициентом отражения от верхней границы  $\dot{R}_{1-2}$  как [6]

$$E_{1-2} = \dot{E}_n \cdot \dot{R}_{1-2} = \dot{R}_{1-2}, \quad (3)$$

а коэффициент отражения определяется волновыми сопротивлениями сопряженных сред:

$$\dot{R}_{1-2} = \frac{\dot{Z}_{\text{вх}} - \dot{Z}_1}{\dot{Z}_{\text{вх}} + \dot{Z}_1}, \quad (4)$$

где  $Z_1 = 377 \text{ Ом}$  – волновое сопротивление воздуха (среды 1).

$$\dot{R}_{2-3} = \frac{\dot{Z}_3 - \dot{Z}_2}{\dot{Z}_3 + \dot{Z}_2}, \quad (5)$$

где  $\dot{Z}_2$  – волновое сопротивление второго слоя; Ом;

$\dot{Z}_3$  – волновое сопротивление третьего слоя, Ом.

Входной импеданс на верхней границе второго слоя:

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \frac{(\dot{Z}_3 + \dot{Z}_2) + (\dot{Z}_3 - \dot{Z}_2) \cdot e^{-2\dot{\gamma}_2 h}}{(\dot{Z}_3 + \dot{Z}_2) - (\dot{Z}_3 - \dot{Z}_2) \cdot e^{-2\dot{\gamma}_2 h}} \cdot \dot{Z}_2, \quad (6)$$

где  $\dot{\gamma}_2$  – постоянная распространения волны.

Волновые сопротивления второго и третьего слоев определяются следующим образом:

$$\dot{Z}_2 = \sqrt{\frac{\mu_0 \cdot \mu_2}{\dot{\epsilon}_2 \cdot \epsilon_0}}, \quad (7)$$

$$\dot{Z}_3 = \sqrt{\frac{\mu_0 \cdot \mu_3}{\dot{\epsilon}_3 \cdot \epsilon_0}}, \quad (8)$$

где  $\dot{\epsilon}_3$  – относительная диэлектрическая проницаемость третьего слоя,  $\dot{\epsilon}_3 = 2,5$ ;

$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ Г/м}$ ;

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ ;

$\mu_2 = \mu_3 = 1$ .

Постоянная распространения волны вычисляется по формуле

$$\dot{\gamma}_2 = j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{c} \cdot \sqrt{\dot{\epsilon}_2}, \quad (9)$$

где  $c$  – скорость света, м/с.

Комплексная относительная диэлектрическая проницаемость 2-го слоя

$$\dot{\epsilon}_2 = \epsilon_r - j \cdot \frac{\sigma_r}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \epsilon_0} - \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{ni}}{V_i^2 + \omega^2} \cdot \left[ 1 + j \cdot \frac{V_i}{\omega} \right] \right\}, \quad (10)$$

где  $\epsilon_r = 10$  – относительная диэлектрическая проницаемость наполнителя слоя 2 без учета анизотропных свойств;

$\sigma_r = 10^{-2} \text{ См/м}$  – удельная проводимость слоя 2;

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$  – частота ЭМВ, рад/с;

$\omega_{ni}$  – плазменная частота, рад/с;

$V_i$  – частота столкновения частиц, рад/с;

$i = e$  – электроны;

$i = u$  – ионы.

$$\omega_{ni} = g_i \cdot \left( \frac{N_i}{m_i \cdot \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

где  $g_e = g_u = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ ;

$N_e = N_u = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ ;

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг};$$

$$m_u = 5 \cdot 10^{-4} \cdot m_e.$$

$$V_u = \frac{V_e}{\left(\frac{m_u}{m_e}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (12)$$

где  $V_e = 2 \cdot \pi \cdot 10^9$ , рад/с.

Фазовая скорость распространения волны:

$$v_\phi = \frac{c}{\text{Re}(\sqrt{\hat{\epsilon}_2 \cdot \mu_2})}, \quad (13)$$

Коэффициент затухания:

$$\alpha_2 = \text{Im}(\hat{\gamma}_2). \quad (14)$$

Расчет спектральных характеристик радиоимпульсных сигналов производится на основании экспериментально полученных параметров среды над залежами углеводородов [7–9]. Исследование УВЗ проводится в достаточно широком диапазоне радиочастот, охватывающем СДВ, ДВ, СВ, КВ и УКВ волны. Это требует знаний свойств сред для используемых методов поиска полезных ископаемых. На практике разработчики радиотехнических систем поиска УВЗ сталкиваются с проблемой точного знания характеристик промежуточных сред, находящихся над залежами.

Зондирование исследуемых сред опирается на многочисленные справочные данные, которые в настоящее время накоплены и систематизированы в основном по результатам лабораторных измерений и электроразведки на постоянном токе [10]. Для измерений на переменном токе получаемых систематизированных данных бывает недостаточно. В таких случаях либо приходится проводить дополнительные вспомогательные исследования либо пользоваться приближенными коэффициентами перехода, определенными относительно постоянного тока и используемой частоты зондирования [10]. При исследовании взаимодействия импульсных сигналов со средой над углеводородами удобно пользоваться таким понятием, как радиопортрет УВЗ – совокупность признаков, связанных со статическим и/или динамическим изменением характеристик электромагнитных полей, присущих данной геологической неоднородности и ее электродинамическим параметрам [7].

**Результаты и их обсуждение.** Проведен анализ зависимостей амплитуды радиоимпульса от несущей частоты  $f_0$  при частоте импульсов  $f_n$ , равной 10 кГц для различных глубин  $h$ . Рисунок 3 представлен в логарифмическом масштабе, т.к. значение амплитуды отраженного импульса  $S_{отр}$  очень мало.

При сравнении спектра прямого импульса со спектром отраженного видно, что после отражения несущая частота не сместилась и спектр не изменил свою форму. Из рисунка 3 видно, что при увеличении частоты радиоимпульса уменьшается амплитуда, из формул (2), (9), (14) – при возрастании частоты увеличивается коэффициент распространения волны  $\gamma_2$  вследствие чего увеличивается коэффициент затухания  $\alpha$ . Кроме того, с увеличением глубины амплитуда отраженного радиоимпульса резко уменьшается и шаг уменьшения амплитуды с увеличением частоты становится больше.

Построение радиотехнических систем поиска и выделения УВЗ, находящихся на больших глубинах залегания, связано с огромными трудностями, определяемыми большим разбросом проводимостей исследуемых поверхностей. Был проведен соответствующий анализ, результаты которого отражены в таблице.

Таблица. – Затухание ЭМВ для различных участков земной поверхности

$\sigma_r$ , См/м	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$
$F$ , Гц	$136 \cdot 10^3$	$136 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^6$
$\epsilon_r$	3	10	3	10	20
$\alpha$ , дБ/м	$1,107 \cdot 10^{-2}$	$9,975 \cdot 10^{-3}$	$2,297 \cdot 10^{-2}$	$9,92 \cdot 10^{-2}$	$9,068 \cdot 10^{-2}$



Таким образом, при затухании ЭМВ 100 дБ параметры из второго столбца таблицы обеспечивают проникновение сигнала на глубину 520 м, а параметры из шестого столбца – на глубину 63,4 м.

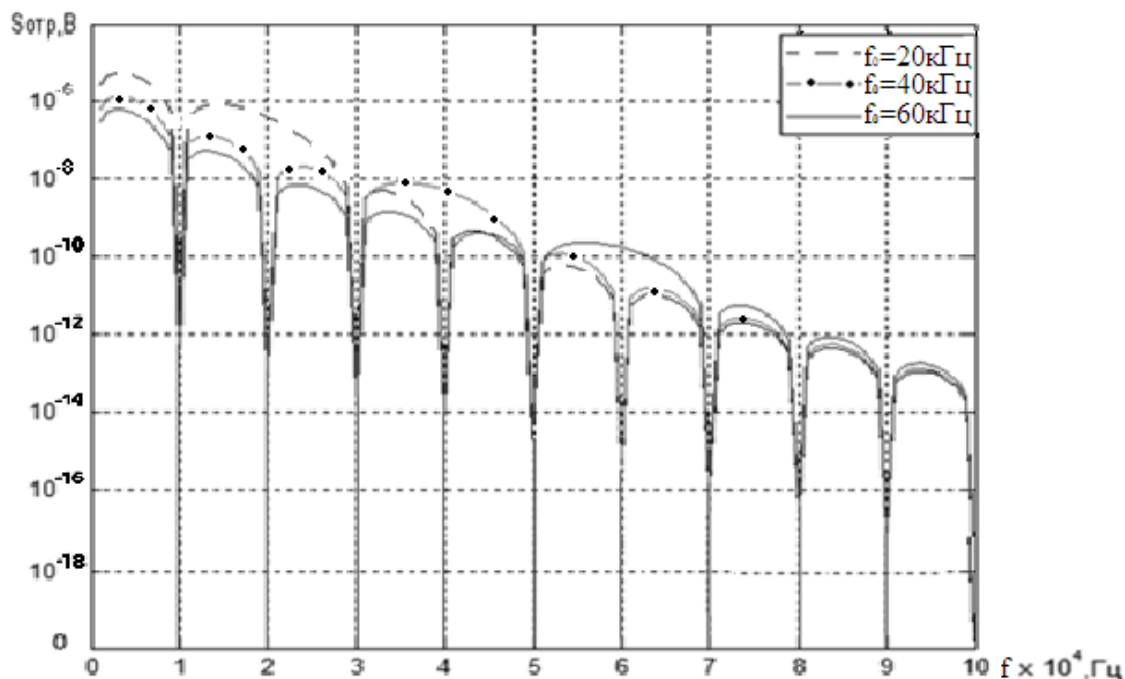


Рисунок 3. – Зависимость спектра отраженного радиоимпульсного сигнала от частоты на глубине залегания  $h = 1000$  м

Проведенный анализ показал, что амплитуда радиоимпульса для различных глубин  $h$  имеет частотную зависимость. Сравнение режимов радиоимпульсного распространения ЭМВ выявило различия в исследуемых характеристиках.

**Заключение.** Полученные зависимости свидетельствуют о следующем: большие глубины углеводородных залежей требуют применения для зондирования радиоимпульсных сигналов большей длительности. Учитывая данные приведенной нами таблицы, можно рекомендовать для повышения информативности электромагнитных методов разведки нефти и газа и обеспечения требуемой глубинности обнаружения применение необходимой длительности радиоимпульсных сигналов. Возможность перестройки устройства георазведки с одного режима на другой при наличии залежи дополняет функциональные возможности для поиска углеводородов. Результаты исследований могут быть применены для разработки радиотехнических систем ближней и дальней радиолокации, для повышения точности и уровня достоверности методов георазведки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гололобов, Д. В. Радиотехнические системы поиска и идентификации углеводородных залежей в режиме двухчастотного взаимодействия / Д. В. Гололобов, В. Ф. Янушкевич // Весці НАН Беларусі. Сер. Фіз.-тэхн. навук. – 2002. – № 1. – С. 49–54.
2. Moskvichew, V. N. Interaction of electromagnetic waves (EMW) with anisotropic inclusion in communication line / V. N. Moskvichew // 9-th Microw. Conf. NICON-91, Rydzyna, May 20-22, 1991. – Rydzyna, 1991. – Vol. 1. – P. 240–244.
3. Гололобов, Д. В. Поверхностный импеданс углеводородной залежи в режиме двухчастотного взаимодействия / Д. В. Гололобов, Н. В. Цывис, В. Ф. Янушкевич // Изв. Беларус. инж. акад. – 2001. – № 1(11). – С. 101–104.
4. Гололобов, Д. В. Поверхностный импеданс среды над углеводородными залежами в режиме частотно-модулированных сигналов / Д. В. Гололобов, С. В. Калинин, В. Ф. Янушкевич // Весці НАН Беларусі. Сер. Фіз.-тэхн. навук. – 2010. – № 4. – С. 98–101.
5. Москвичев, В. Н. Исследование взаимодействий электромагнитных волн с углеводородной залежью / В. Н. Москвичев // Радиотехника и электроника. – 1988. – Вып. 18. – С. 91–96.

6. Финкельштейн, М. И. Применение радиолокационного подповерхностного зондирования в инженерной геологии / М. И. Финкельштейн, В. А. Кутев, В. П. Золоторев. – М. : Недра, 1986. – 182 с.
7. Гололобов, Д. В. Радиолокационный портрет углеводородной залежи / Д. В. Гололобов // Электромагнитные исследования с контролируемыми источниками : тез. докл. междунар. геодез. конф., Санкт-Петербург, 27–31 мая 1996 г. / ВИГР-Рудгеофизика ; редкол.: А.А. Петров [и др.]. – СПб., 1996. – С. 42–43.
8. Норман, Дж. Хайн. Технология, разведка и добыча нефти / Дж. Хайн Норман. – М. : Олимп-Бизгис, 2010. – 752 с.
9. Hordt, A. Analysis of time-lapse TEM data for nuclearground gas storage monitoring / A. Hordt, K. Vozoff // 60<sup>th</sup> EAGE Goth and Tech Exhit., Leipzig, Germany, 8–12 June 1998 / Leipzig, 1998. – P. 10–16.
10. Владов, М. Л. Введение в георадиолокацию / М. Л. Владов, А. В. Старовойтов. – М. : Изд-во МГУ, 2004. – 153 с.

Поступила 05.09.2016

#### INTERACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES WITH ANISOTROPIC ENVIRONMENTS OVER HYDROCARBONIC DEPOSITS IN THE MODE OF RADIO PULSE SIGNALS

V. YANUSHKEVICH, K. KREMENYA, M. IVANOV, T. MALADZECHKINA

*The paper deals with the interaction of the signal with radiopulse anisotropic media on the hydrocarbon deposits. Used vertical polarization of electromagnetic waves. A wide range of frequencies used. Variation characteristics of probing signals allows to increase the information content of the search. Recommendations for the use of the optimal characteristics of probing signals. The dependences obtained indicate the following: a large depth of hydrocarbons require for sensing radiopulse signals longer duration. The possibility of restructuring complements the functionality of the device to search for hydrocarbon deposits. On the basis of the given research can be developed radiokompleksirovaniya methods for geological exploration of hydrocarbons. research results can be used in the search geophysics.*

**Keywords:** *electromagnetic wave, anisotropic medium, hydrocarbon deposits.*

УДК 546.28:621.315.592

**МИКРОТВЕРДОСТЬ ПЛЕНОК СОПОЛИМЕРОВ  
НА ОСНОВЕ МЕТИЛМЕТАКРИЛАТА, ОБЛУЧЕННЫХ  $\gamma$ -КВАНТАМИ***канд. физ.-мат. наук, доц. С.А. ВАБИЩЕВИЧ, Н.В. ВАБИЩЕВИЧ**(Полоцкий государственный университет);**канд. физ.-мат. наук Д.И. БРИНКЕВИЧ, канд. хим. наук, доц. С.Д. БРИНКЕВИЧ,**канд. физ.-мат. наук, доц. В.С. ПРОСОЛОВИЧ**(Белорусский государственный университет, Минск)*

*Методами индентирования и склерометрии исследована микротвердость  $\gamma$ -облученных пленок сополимеров метилметакрилата и метакриламида на монокристаллическом кремнии. Показано, что  $\gamma$ -облучение приводит к увеличению микротвердости и частичному растрескиванию пленок сополимеров. Наибольший эффект проявлялся для пленок сополимера с преобладанием метакриламида. Установлено, что вследствие наличия растягивающих напряжений в приповерхностном слое сополимера метод индентирования дает заниженные значения микротвердости. Вокруг царапин и отпечатков наблюдается интерференционная картина, обусловленная, вероятнее всего, модификацией (изменением показателя преломления) приповерхностного слоя полимера и/или навалами вследствие вытеснения материала из-под индентора.*

**Ключевые слова:** полимерные пленки, метилметакрилат, метакриламид, микротвердость, облучение.

**Введение.** В современной электронике полимерные пленки используются в качестве защитных слоев тонкопленочных структур. Такое применение их обусловлено, прежде всего, термостойкостью и электрической прочностью, химической стойкостью к растворам кислот и щелочей, высокой адгезией пленок к полупроводникам при высокой эластичности и устойчивости к пластическим деформациям [1–3]. Полимерные пленки особенно привлекательны из-за относительно дешевой технологии их получения. Кроме того, микроволноводные структуры типа полимер/SiO<sub>2</sub>/Si широко используются в технологии интегральной оптоэлектроники для обеспечения функционирования различных устройств. В качестве волноводного слоя в этих структурах перспективно применение сополимеров на основе метилметакрилата (ММА) [4, 5]. В последние годы на базе сополимеров метилметакрилата разрабатываются новые виды резистов для нанолитографии, чувствительных к рентгеновскому и  $\gamma$ -излучению и обеспечивающих повышенную разрешающую способность [6–10].

Одной из основных причин деградации параметров структур полимер-кремний являются механические воздействия, приводящие к формированию дефектов и полей упругих напряжений в полимерных пленках. Определение микротвердости полимерных пленок на кремниевых подложках является весьма актуальным, поскольку непосредственно характеризует такие важные свойства, как адгезия к подложке и стойкость к истиранию при кратковременном контактом взаимодействии тел при литографии. Методы склерометрии и индентирования позволяют изучать процессы развития деформации в малых объемах, что весьма важно при малой толщине полимерной пленки. К тому же они являются основными способами моделирования процессов при кратковременном контактом взаимодействии тел, например при абразивной обработке [11, 12]. Нет причин ожидать, что поведение материала при столь экстремальных условиях будет похоже на поведение при испытаниях квазистатическим одноосным сжатием или растяжением. Следовательно, создание экспериментальных ситуаций, в которых бы, с одной стороны, материал ставился в подобные условия, а с другой – имелась бы возможность изучать его реакцию, – весьма актуальная научная и практическая задача.

В настоящей работе исследовалась микротвердость пленок сополимеров метакриламида (ММА) и метилметакрилата (ММА), нанесенных на поверхность монокристаллического кремния.

**Методика эксперимента.** Статистические сополимеры метакриламид/метилметакрилат с различным соотношением ММА/ММА (6:4, 1:1 и 4:6) синтезировались методом радикальной полимеризации из соответствующих мономеров. Пленки (толщиной 15–80 мкм) наносились на пластины монокристаллического кремния марки КЭФ 4,5 в виде концентрированного раствора, после чего проводилось удаление растворителя в изотермических условиях (при 25°C).

Исследование прочностных свойств структур полимер-кремний проводилось при комнатной температуре на приборе ПМТ-3 методами индентирования и склерометрии. Метод склерометрии предполагает нанесение царапин ребром четырехгранной алмазной пирамиды с квадратным основанием в оправе типа НППМ и углом при вершине  $\alpha = 136^\circ$  [13]. Нагрузка ( $P$ ) на индентор варьировалась в пределах 1–20 г. Скорость движения индентора изменялась в диапазоне 40–120 мкм/с. Наносилось не менее

7 канавок при каждой нагрузке и скорости движения индентора, а затем измерялась их ширина. Значения склерометрической микротвердости  $H_{\square}^{\text{скл}}$  вычислялись по средней ширине канавок согласно формуле [14]

$$H_{\square}^{\text{скл}} = \frac{3,708P}{b^2},$$

где  $b$  – средняя ширина канавки.

Для сравнения на этом же приборе ПМТ-3, используя ту же пирамиду, проводились измерения микротвердости методом микроиндентирования по восстановленному отпечатку с использованием стандартной методики [15]. При каждом измерении на поверхность образца наносилось не менее 50 отпечатков и проводилась обработка результатов измерений согласно методике, изложенной в [16]. Величина микротвердости  $H^u$  рассчитывалась по средней величине диагонали отпечатка  $d$  согласно формуле [15]

$$H^u = \frac{1,854P}{d^2}.$$

При микро- и наноиндентировании наблюдается изменение формы отпечатка за счет упругого последействия при разгрузке. В достаточно пластичных материалах вершины отпечатка своего положения не меняют, т.е. расстояние между вершинами при возврате сохраняется [17]. Поэтому измерялись обе диагонали отпечатка, а микротвердость рассчитывалась по их среднему значению. В настоящей работе измерялась «восстановленная» микротвердость [18].

Облучение  $\gamma$ -квантами  $^{60}\text{Co}$  осуществлялось при комнатной температуре и атмосферном давлении на установке МРХ- $\gamma$ -25М. Мощность поглощенной дозы составляла  $0,360 \pm 0,008$  Гр/с. Интервал поглощенных доз 6–50 кГр.

Известно, что подложка оказывает существенное влияние на величину микротвердости твердотельных композиций пленка-подложка [19–21]. Это влияние наиболее сильно проявляется в случае «твердой» пленки на «мягкой» подложке, когда не только упругая, но и пластическая деформация подложки возникает уже на начальной стадии индентирования. В этом случае влияние подложки «ощущается» уже при глубине проникновения индентора  $\sim 6$ –10% от толщины пленки [20, 21]. В случае «мягкой» пленки на «твердой» подложке пластическая деформация локализуется в пленке, и микротвердость композиции пленка-подложка существенно возрастает лишь при глубине проникновения индентора, равной толщине пленки [19]. Указанные обстоятельства и определили выбор максимальной нагрузки на индентор. Минимальная нагрузка на индентор определялась из следующего условия: глубина проникновения индентора должна превышать высоту неровностей поверхности пленки, поскольку в противном случае будут иметь место искажения реальной площади контакта пленка-индентор.

**Экспериментальные результаты и их обсуждение.** Типичная микрофотография царапины при склерометрии поверхности полимерной пленки показана на рисунке 1. Царапины имеют ровные края и пригодны для измерения ширины. Трещин у края и внутри царапин не наблюдается (рис. 1, а). Вокруг царапины наблюдается интерференционная картина, обусловленная, вероятнее всего, модификацией (изменением показателя преломления) приповерхностного слоя полимера при царапании и/или навалами вследствие вытеснения материала из-под индентора. В середине царапины видна область модификации полимера давлением, которая при увеличении скорости царапания сужается.

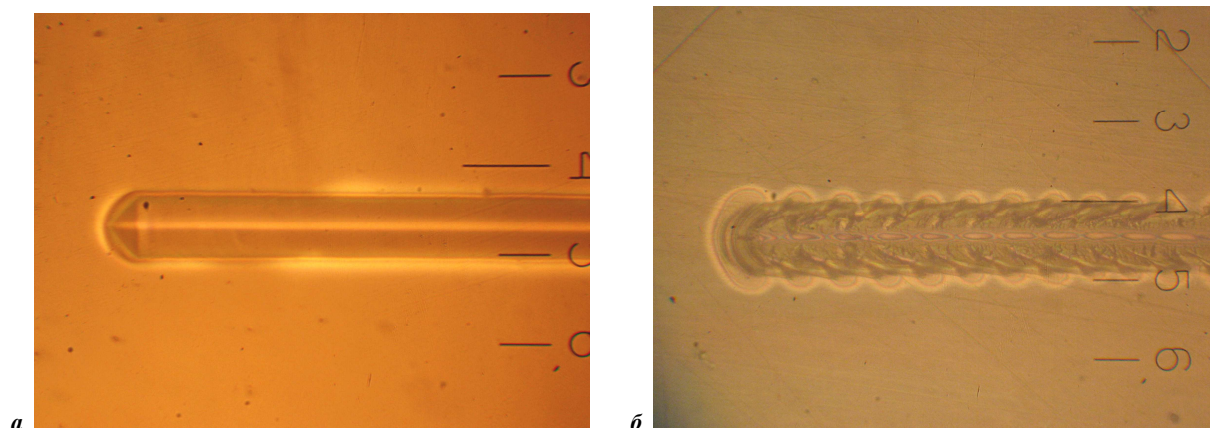
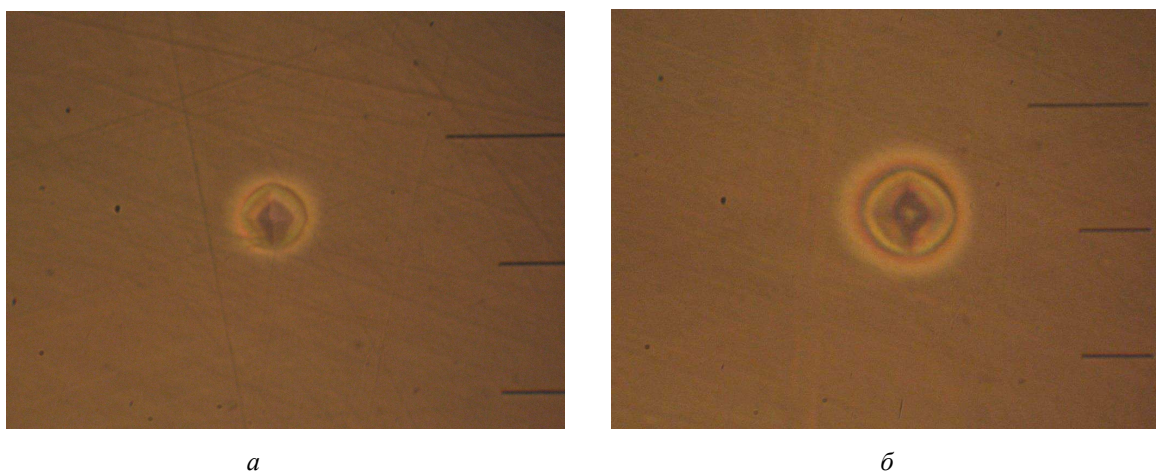


Рисунок 1. – Микрофотографии царапин поверхности пленки: а – сополимера ММА/ММА в соотношении 6:4 толщиной 80 мкм; б – пленки ММА/ММА = 1:1 толщиной 12 мкм. Нагрузка 10 г. Поглощенная доза 11,4 кГр (увеличение 100х)

При уменьшении толщины полимерной пленки и увеличении нагрузки на индентор, когда он приближается к границе раздела полимер-кремний, на краях и внутри царапин появляется волнистая структура, обусловленная торможением индентора кремниевой подложкой (рис. 1, б). Индентор движется рывками, что и обуславливает волнообразный характер царапины. Следует отметить, что даже в этом случае царапина пригодна для измерения микротвердости.

При индентировании наблюдались бочковидные отпечатки (рис. 2), свидетельствующие о наличие растягивающих напряжений в полимерной пленке. При больших нагрузках ( $P = 50$  г) вокруг отпечатков наблюдалась ярко выраженная интерференционная картина (рис. 2, б), интенсивность которой снижалась при уменьшении нагрузки. Количество интерференционных колец колеблется от 3 до 20 и зависит от толщины и состава пленки. В центре отпечатка наблюдается темное пятно, обусловленное вероятно модификацией полимера под индентором. Более подробно взаимодействие полимерной пленки с индентором рассмотрено в работе [22].



**Рисунок 2. – Микрофотографии отпечатков индентора на поверхности пленки сополимера ММА/ММА = 1:1 толщиной 80 мкм. Нагрузка, г: а – 10; б – 50. Поглощенная доза 11,4 кГр (увеличение 100х)**

Облучение приводит к уменьшению размеров «ореолов» (светлых сферических областей, внутри которых наблюдались интерференционные полосы) вокруг отпечатков. Диаметр ореолов после облучения снижался в 5–10 раз и обычно не превышал размеры отпечатка. В отличие от исходных (необлученных) пленок после облучения перекрытия «ореолов» от соседних отпечатков не наблюдается даже при максимальной нагрузке 50 г. Это свидетельствует о снятии упругих приповерхностных напряжений в полимерной пленке при  $\gamma$ -облучении.

Измеренные значения восстановленной микротвердости исследованных полимерных пленок варьировались в широких пределах (от 0,3 до 2,3 ГПа) и существенно зависели от нагрузки, состава и толщины пленки.

Следует отметить, что поведение склерометрической микротвердости существенно отличается от микротвердости, полученной методом индентирования (табл.). Так, склерометрическая микротвердость снижается при увеличении нагрузки, в то время как при индентировании  $H_{инд}$ , наоборот, возрастает. Указанные различия в поведении  $H_{скл}$  и  $H_{инд}$  в полимерных пленках на кремнии обсуждены нами в работе [23], где показано, что метод микроиндентирования при малых нагрузках дает заниженные значения микротвердости вследствие влияния растягивающих полей упругих напряжений вблизи поверхности полимерной пленки на кремнии, которые возникают при сушке пленки.

Когда индентор приближается к границе раздела полимер-кремний (малая толщина полимера и большие нагрузки), обе микротвердости  $H_{скл}$  и  $H_{инд}$  возрастают, что обусловлено влиянием более твердой кремниевой подложки. Как отмечалось ранее [19], такое поведение микротвердости характерно для «мягкой» пленки на «твердой» подложке.

Полученные экспериментальные данные свидетельствуют о высокой неоднородности исследованных пленок. Наблюдался существенный разброс значений прочностных характеристик полимерных пленок, который обусловлен неоднородностью (вероятнее всего, неомогенностью, хотя нельзя исключить и формирование мезофаз) материала [3]. С другой стороны, после облучения наблюдалось некото-

рое уменьшение полуширины случайного распределения величин микротвердости, что, вероятнее всего, обусловлено релаксацией полей упругих напряжений вблизи поверхности полимера. Указанные упругие поля существенно искажают форму отпечатка индентора вследствие упругого последействия после снятия нагрузки, что приводит к дополнительному разбросу измеряемых значений диагоналей отпечатков и, следовательно, рассчитанных значений микротвердости.

Таблица. – Микротвердость сополимеров ММА/ММА, облученных  $\gamma$ -квантами дозой 11,4 кГр

Состав пленки сополимера, ММА/ММА	Толщина пленки, мкм	Масса, г	Диагональ, мкм	$H_{инд}$ , ГПа	Ширина царапины, мкм	$H_{скл}$ , ГПа
6:4	80	50	33,67	0,80		
		20	25,55	0,56		
		10	19,67	0,47	22,8	0,70
		5	16,5	0,33	16,0	0,71
		2			6,7	1,62
		1			3,6	2,8
4:6	80	50	25,1	0,91		
		20	17,6	0,97		
		10			15,5	1,52
		5			10,38	1,67
		2			9,1	1,88
1:1	80	50	20,52	1,16		
		20	17,06	0,75		
		10	15,6	0,63	24,6	0,66
		5	12,84	0,55	16,2	0,69
		2	9,78	0,38	9,4	0,82
		1	7,28	0,34	5,5	1,20

Зависимости восстановленной микротвердости ( $H$ )  $\gamma$ -облученных пленок от нагрузки на индентор ( $P$ ) представлены на рисунках 3 и 4. Облучение приводило к увеличению микротвердости во всех исследованных пленках. Наибольший эффект проявлялся для пленок сополимера ММА/ММА = 4:6 (кривые 3 и 4 на рис. 3). Эффект упрочнения наблюдался также и границы раздела полимер-кремний (рис. 4).

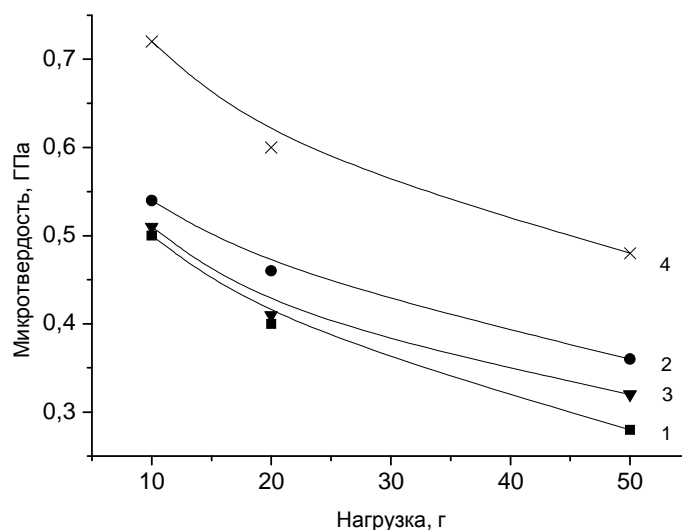
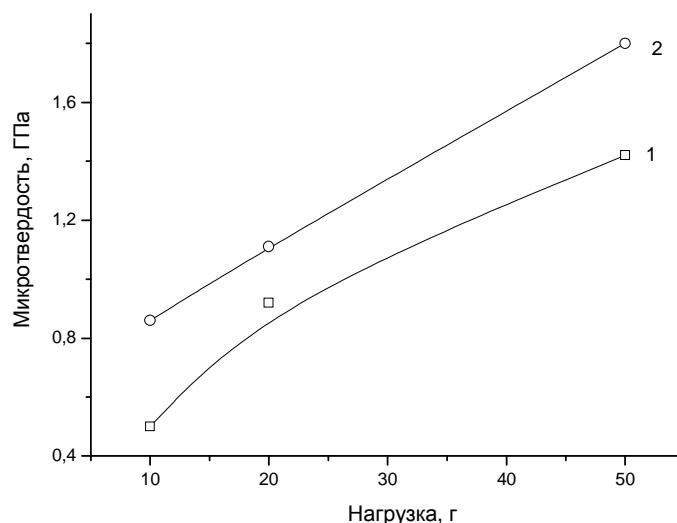
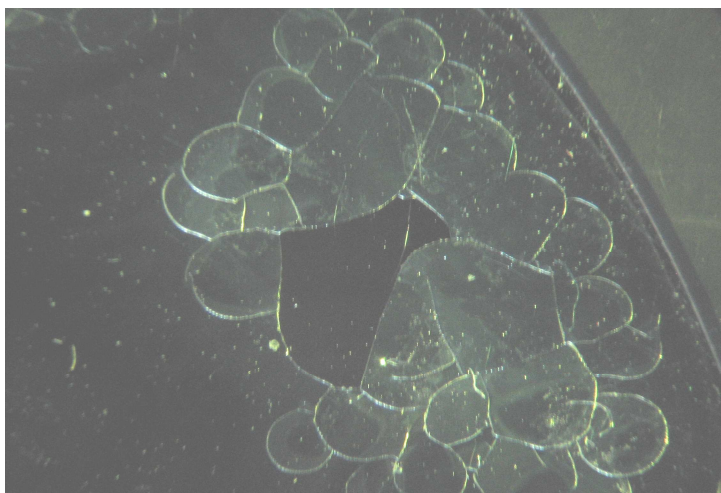


Рисунок 3. – Зависимости восстановленной микротвердости от нагрузки для пленок сополимера ММА/ММА = 6:4 (1,2) и ММА/ММА = 4:6 (3,4) толщиной 80 мкм. Доза облучения, кГр: 0 – 1,3; 44 – 2,4



**Рисунок 4.** – Зависимости восстановленной микротвердости от нагрузки для пленки сополимера MMA/MAA = 6:4 толщиной 10 мкм. Доза облучения, кГр: 0 – 1; 44 – 2

Отметим, что облучение некоторых образцов сополимеров с преобладанием метакриламида (MMA/MAA = 4:6 толщиной ~ 15 мкм) приводило к растрескиванию полимерной пленки (рис. 5).



**Рисунок 5.** – Микрофотографии поверхности пленки сополимера пленки MMA/MAA = 4:6 толщиной 15 мкм, облученной  $\gamma$ -квантами дозой 11,4 кГр (увеличение 10х)

Сополимеры MAA/MMA относят к аморфно-кристаллическим полимерам. Они состоят из кристаллических областей, разделенных аморфными зонами, причем одна и та же полимерная цепь, в силу большой длины, может входить как в первые, так и во вторые области. Занятая кристаллитами доля объема зависит от условий кристаллизации, состава и природы полимера, присутствия примесей и т.д. При внешних механических воздействиях возможно разрушение слабых межмолекулярных связей и смещение цепей полимера с образованием областей с молекулярным упорядочением – так называемая «кристаллизация» в аморфных областях. Такое молекулярное упорядочение наблюдалось авторами [24] при облучении полиметилметакрилата миллисекундными лазерными импульсами. При приложении внешней нагрузки (индентировании) ориентация молекул полимера приводит к известному эффекту ориентационного упрочнения полимеров [3].

Существенное влияние на результаты экспериментов кремниевой подложки, которое проявлялось в увеличении микротвердости при приближении к границе раздела полимер-кремний, обусловлено тем, что на прочностные свойства пленок оказывает существенное влияние наличие сильной адгезионной связи между кремнием и сополимером. Так, на поверхности кремния всегда имеется естественный окисел толщиной от 3 до 5 нм, который при наличии кислорода формируется в течение нескольких минут.

С другой стороны, между полиметилметакрилатом и кварцем  $\text{SiO}_2$  наблюдается сильное адгезионное взаимодействие [25]. Глубина, на которую оно простирается может достигать 100 мкм. Наличие такого взаимодействия должно приводить к увеличению механической прочности структур полимер-кремний, что и наблюдалось нами экспериментально.

Во время облучения одновременно протекают несколько реакций, причем тип и скорости преобладающих реакций зависят от химической природы полимера [26, 27]. Для большинства полимеров облучение приводит к увеличению твердости. Они становятся хрупкими, теряют прочность к растяжению, удару, срезу. При этом может снижаться адгезия с подложкой, что и наблюдалось нами в эксперименте (см. рис. 4). Полиметакриламид и, в меньшей степени, полиметилметакрилат имеют низкую радиационную стойкость, поэтому радиационные эффекты наблюдались нами при относительно низких поглощенных дозах. В амидах радиационные изменения начинаются уже при дозах  $\gamma$ -облучения порядка 10 кГр [26], что и проявлялось как растрескивание сополимеров с преобладанием метакриламида.

**Заключение.** Таким образом, показано, что  $\gamma$ -облучение приводит к увеличению микротвердости и частичному растрескиванию пленок сополимеров. Наибольший эффект проявлялся для пленок сополимера с преобладанием метакриламида. Установлено, что вследствие наличия растягивающих напряжений в приповерхностном слое полимера метод индентирования дает заниженные значения микротвердости. Вокруг царапин и отпечатков наблюдается интерференционная картина обусловленная, вероятнее всего, модификацией (изменением показателя преломления) приповерхностного слоя полимера и/или навалами вследствие вытеснения материала из-под индентора.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (договор № Ф16-151 от 20.05.2016 г.).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пасынков, В. В. Материалы электронной техники / В. В. Пасынков, В. С. Сорокин. – СПб. : Лань, 2003. – 367 с.
2. Щука, А. А. Нанoeлектроника / А. А. Щука. – М. : Физматкнига, 2007. – 464 с.
3. Гуль, В. Е. Структура и механические свойства полимеров / В. Е. Гуль, В. Н. Кулешов. – М. : Лабиринт, 1994. – 344 с.
4. Формирование диэлектрических микроволноводов в системе полимер/ $\text{SiO}_2/\text{Si}$  с использованием ионного облучения / А. В. Леонтьев [и др.] // Физика и химия обработки материалов. – 2005. – № 3. – С. 79–84.
5. Диэлектрическая релаксация в полимерах и сополимерах метакрилатов и метакриламидов с хромофорными группами в боковых цепях / Н. В. Афанасьева [и др.] // Физика твердого тела. – 2003. – № 5, Т. 45. – С. 936–942.
6. Химически усиленные резисты для литографии высокого разрешения / С. А. Булгакова [и др.] // Микроэлектроника. – 2013. – Т. 42, № 3. – С. 206–217.
7. Комплексные исследования эффектов зарядки полимерного резиста (ПММА) при электронной литографии / Э. И. Рау [и др.] // Микроэлектроника. – 2013. – № 2, Т. 42. – С. 116–126.
8. Исследование влияния синхротронного излучения на термофизические параметры рентгенорезиста ПММА / А. Н. Генцелев [и др.] // Поверхность. – 2012. – № 1. – С. 14–20.
9. Формирование и исследование толстых резистивных слоев ПММА для LIGA-технологии / О. Н. Бобровникова [и др.] // Поверхность. – 2005. – № 9. – С. 38–43.
10. Тригуб, В. И. Модификация тонких пленок полиметилметакрилата и метилметакрилата-метилакриловой кислоты под воздействием ультразвука и электронов / В. И. Тригуб, А. В. Плотнов, С. В. Смирнов // Физика и химия обработки материалов. – 2003. – № 4. – С. 92–94.
11. Головин, Ю. И. Новые принципы, техника и результаты исследования динамических характеристик твердых тел в микрообъемах / Ю. И. Головин // Журнал технической физики. – 2000. – № 5, Т. 70. – С. 82–91.
12. Литвинов, М. Ю. Методология определения механических свойств полупроводниковых материалов с помощью метода непрерывного вдавливания индентора / М. Ю. Литвинов, Ю. М. Литвинов // Известия вузов. Материалы электронной техники. – 2004. – № 4 – С. 11–16.
13. Наконечники и бойки алмазные к приборам для измерения твердых металлов и сплавов. Технические условия : ГОСТ 9377-81. – М. : Изд-во стандартов, 1981.
14. Измерение микротвердости царапанием алмазными наконечниками : ГОСТ 21318-75. – Введ. 01.07.76 г. – М. : Изд-во стандартов, 1976. – 30 с.
15. Измерение микротвердости вдавливанием алмазных наконечников : ГОСТ 9450-76. – Введ. 01.01.77 г. – М. : Изд-во стандартов, 1993. – 35 с.
16. Бринкевич, Д. И. Микромеханические свойства эпитаксиальных слоев GaP, легированных редкоземельным элементом диспрозием / Д. И. Бринкевич, Н. В. Вабищевич, В. С. Просолович // Неорганические материалы. – 2012. – № 8, Т. 48. – С. 878–883.
17. Сойфер, Я. М. Исследование локальных механических свойств монокристаллов хлористого калия методом атомно-силовой микроскопии / Я. М. Сойфер, А. Вердян // Физика твердого тела. – 2003. – № 9, Т. 45. – С. 1621–1625.
18. Бульчев, С. И. Соотношение между восстановленной и невосстановленной твердостью при испытании наномикроиндентированием / С. И. Бульчев // Журнал технической физики. – 1999. – № 7, Т. 69. – С. 42–48.



19. Шугуров, А. Р. Особенности определения механических характеристик тонких пленок методом наноиндентирования / А. Р. Шугуров, А. В. Панин, К. В. Осколков // Физика твердого тела. – 2008. – № 6, Т. 50. – С. 1007–1012.
20. Наноиндентирование и деформационные характеристики наноструктурных боридонитридных пленок / Р. А. Андриевский [и др.] // Физика твердого тела. – 2000. – № 9, Т. 42. – С. 1624–1627.
21. Панин, А. В. Исследование механических свойств тонких пленок Ag на кремниевой подложке методом наноиндентирования / А. В. Панин, А. Р. Шугуров, К. В. Оскомов // Физика твердого тела. – 2005. – № 11, Т. 47. – С. 1973–1977.
22. Взаимодействие индентора с пленками сополимеров на основе метилметакрилата / С. А. Вабишевич [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 4. – С. 90–97.
23. Склерометрический метод измерения микротвердости пленок фоторезиста на кремнии / Д. И. Бринкевич [и др.] // Приборы и методы измерений. – 2016. – № 1, Т. 7. – С. 77–84.
24. Изменение структуры полиметилметакрилата при облучении миллисекундными лазерными импульсами / С. В. Васильев [и др.] // Квантовая электроника. – 1998. – № 11, Т. 25. – С. 1023–1027.
25. Исследование структуры граничных слоев полиметилметакрилата методом нарушенного полного отражения / Г. М. Семенович [и др.] // Высокомолекулярные соединения. Сер. А. – 1978. – № 9, Т. 20. – С. 2000–2005.
26. Влияние облучения на материалы и элементы электронных схем / В. Н. Быков. – М. : Атомиздат, 1967. – С. 467.
27. Экспериментальные методы химии высоких энергий / под общ. ред. М. Я. Мельникова. – М. : МГУ, 2009. – С. 169–178.

Поступила 05.09.2016

#### MICROHARDNESS OF $\gamma$ -IRRADIATED FILMS OF COPOLYMERS BASED ON METHYL METHACRYLATE

S. VABISHCHEVICH, N. VABISHCHEVICH, D. BRINKEVICH,  
S. BRINKEVICH, V. PROSOLOVICH

*$\gamma$ -irradiated films of copolymers of methyl methacrylate and methacrylamide on the single-crystal silicon was studied by the sclerometry and indentation methods. It was shown that  $\gamma$ -irradiation leads to an increase in the microhardness and partial cracking of copolymers films. The greatest effect was observed for the copolymer films with a predominance of methacrylamide. It was established that the copolymer indentation method gives lower values of microhardness due to the tensile stresses in the surface layer. Interference pattern was observed around scratches and fingerprints. It is caused, most likely, a modification (change of the refractive index) of the surface layer of the polymer and/or the material displacement under the indenter.*

**Keywords:** polymer films, methyl methacrylate, methacrylamide, microhardness, irradiation.

УДК 621.762.274:534-8

**ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОРОШКОВ МЕДИ,  
ПОЛУЧЕННЫХ СОНОЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКИМ МЕТОДОМ**

*д-р физ.-мат. наук, проф. В.Н. ШУТ, С.Е. МОЗЖАРОВ*  
*(Институт технической акустики НАН Беларуси, Витебск);*  
*д-р тех. наук, проф. А.А. КУЗНЕЦОВ*  
*(Витебский государственный технологический университет)*

*Представлен метод получения порошковых материалов, в частности порошка меди, с использованием ультразвука и электролитического осаждения из раствора – соноэлектрохимический метод. Проанализированы факторы, влияющие на гранулометрический состав получаемых этим методом порошков. Показано, что размерами частиц порошка можно управлять изменением параметров реакции, при этом наиболее существенное влияние на дисперсность порошка оказывают плотность катодного тока и длительность включения импульса тока. Описанный в настоящей работе метод позволяет получать медные порошки со средним размером частиц ~ 100 нм.*

**Ключевые слова:** соноэлектрохимический метод, порошок меди, дисперсность.

**Введение.** Среди интенсивно развивающихся направлений современных исследований особое место уделяется малоразмерным объектам. Особенности микрогеометрии, высокая удельная поверхность, энергонасыщенность ультрадисперсных порошков придает им ряд новых свойств по сравнению с обычными материалами и открывает широкие возможности для создания новых материалов на их основе. В частности, ультрадисперсные системы могут быть использованы в качестве биоцидного компонента в медицине, ветеринарии, биотехнологии, наноэлектронике, поскольку обладают ярко выраженными бактерицидными, каталитическими, антикоррозионными и магнитными свойствами [1–6]. В связи с этим особо актуальными являются разработка методов и изучение закономерностей синтеза ультрадисперсных металлических и металлосодержащих порошков, а также исследование их физико-химических свойств.

На сегодняшний день существует большое количество методов, позволяющих получить ультрадисперсные порошки металлов: химические, физические, механические. Химические методы получения нанопорошков включают, как правило, различные процессы: осаждение, термическое разложение, пиролиз, газофазные химические реакции (восстановление, гидролиз), электроосаждение [7]. Физические методы синтеза нанопорошков основаны на испарении металлов, сплавов или оксидов с последующей их конденсацией [7], механические – на измельчении материалов в мельницах, гироскопических устройствах и атриторах [8]. Несмотря на многообразие этих методов поиск простых, экономичных и экологически безопасных способов синтеза ультрадисперсных материалов остается актуальным. Использование ультразвука при электрохимическом осаждении порошков металлов может служить одним из возможных подходов к решению данной задачи [1]. Аппаратно это можно реализовать, используя излучатель ультразвука в качестве катода, на который осаждается металл при электролизе [9]. В процессе получения порошка сначала подается импульс тока на катод – в это время идет электролитическое осаждение порошка, затем следует импульс ультразвука – происходит удаление порошка с катода. Метод получил название соноэлектрохимический.

Настоящая работа посвящена исследованию дисперсности порошков меди, полученных соноэлектрохимическим методом при различных параметрах реакции.

**Методика эксперимента.** Для получения металлических порошков использовалась система, подобная описанной Reisse [9]. В ней используется два электрода, один из которых служит одновременно и катодом и источником ультразвука. Анод изготовлен из пластинчатого медного анода АМФ толщиной 4 мм.

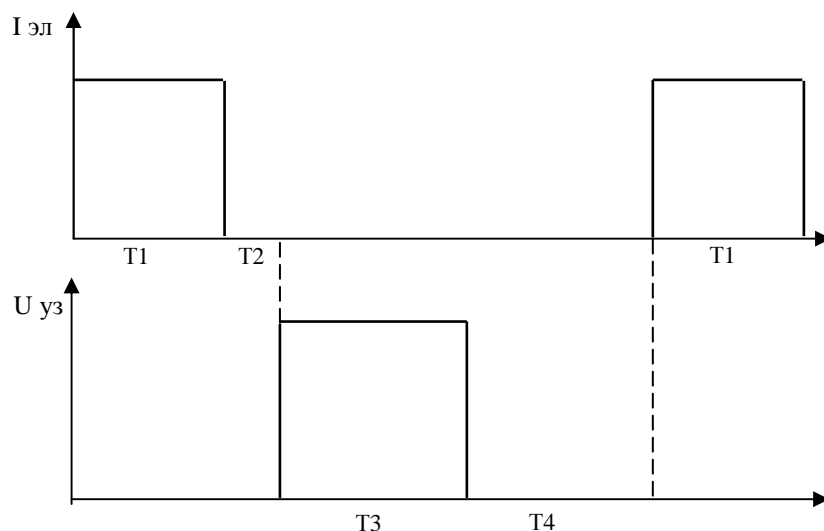
Алгоритм работы системы заключался в следующем:

- подается короткий импульс тока на катод – в это время идет электролитическое осаждение порошка;
- после выключения электрохимического импульса включается ультразвук – за это время происходит удаление порошка с катода;
- все выключается – система стабилизируется.

Временные интервалы задавались микропроцессорной системой управления. На рисунке 1 приведена диаграмма, поясняющая алгоритм работы системы.

Ультразвуковая часть установки разработана на базе генератора УЗГ1.1 с рабочей частотой 22 кГц. В качестве электросонотрода используется титановый концентратор с площадью рабочего торца

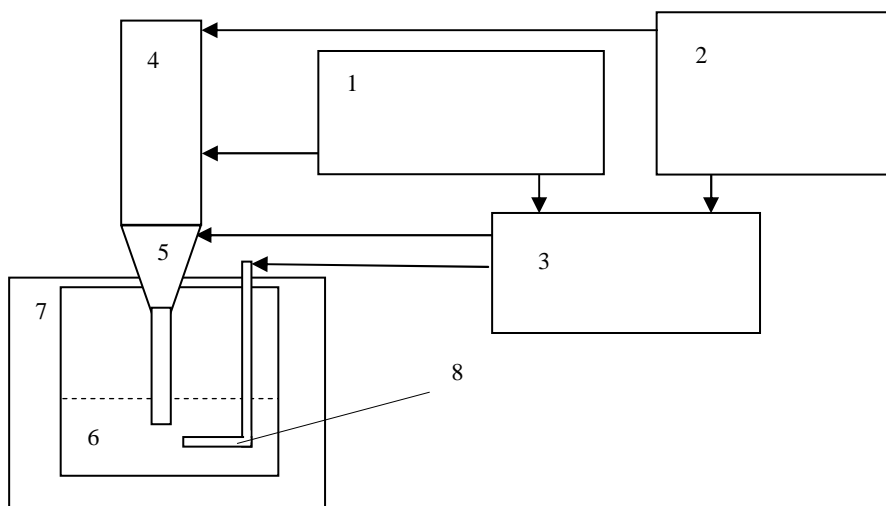
1,3 см<sup>2</sup>. Погруженная в раствор цилиндрическая часть концентратора была изолирована. Ванна, в которой происходит процесс, термостатировалась.



**Рисунок 1. – Временная диаграмма работы системы:**  
**T1 – время, в течение которого включен ток;**  
**T2 – пауза между выключением тока и включением ультразвука;**  
**T3 – время, в течение которого включен ультразвук; T4 – время стабилизации системы**

На рисунке 2 приведена схема установки.

Для электрохимического осаждения меди разработано большое количество электролитов различного состава, которые обычно делят на две группы – простые и комплексные. Из простых наибольшее распространение получили сернокислые электролиты, основными компонентами которых являются сернокислая медь ( $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ ) и серная кислота ( $\text{H}_2\text{SO}_4$ ). Такой электролит использовался в наших экспериментах. Объем электролита составлял 100 мл. В качестве органического стабилизатора применялся поливинилпирролидон медицинский (ФС 42-1194-98) с молекулярной массой 8000–35000; соотношение поливинилпирролидон/электролит составляло 5/95.



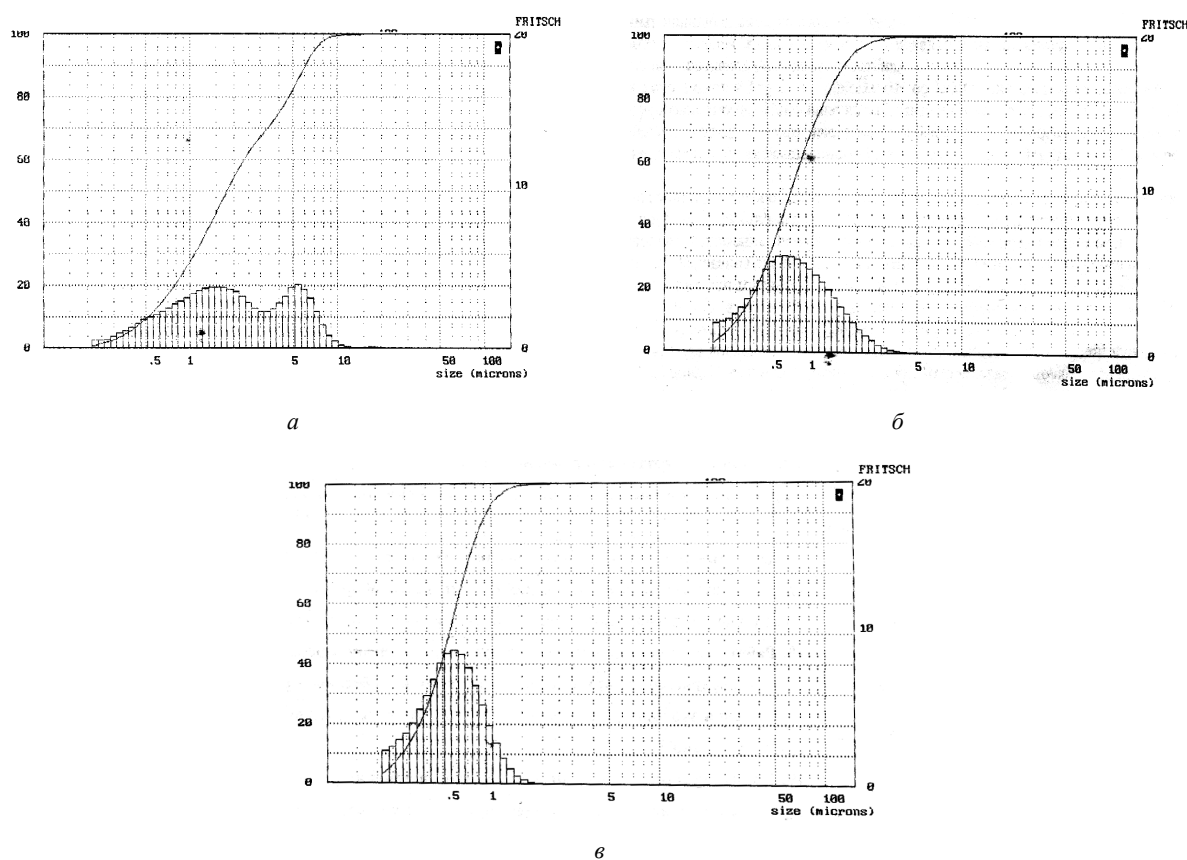
**Рисунок 2. – Блок-схема экспериментальной установки:**  
**1 – ультразвуковой генератор; 2 – источник тока; 3 – система управления;**  
**4 – ультразвуковой преобразователь; 5 – соноэлектрод; 6 – электролитическая ванна; 7 – термостат; 8 – анод**

Для осаждения и промывки порошков использовалась центрифуга с фактором разделения  $F = 350$ .

Микроскопические исследования полученных порошков проводились на сканирующем электронном микроскопе высокого разрешения «Mira» фирмы «Tescan» (Чехия). Анализ размеров частиц порошка проводился с помощью прибора ANALYSETTE 22 MicroTec plus фирмы «FRITSCH».

**Результаты и обсуждение.** Наиболее существенное влияние на свойства получаемых порошков оказывает плотность катодного тока [1]. При этом изменение плотности тока может влиять на размер частиц в двух противоположных направлениях [10]. При более низких токах можно ожидать уменьшения размера за счет уменьшения общего количества материала, выделившегося на катоде. В тоже время более низкие токи увеличивают время для диффузионных процессов, что может привести к увеличению размеров кристаллитов. Большинство авторов указывают, что увеличение плотности тока приводит к уменьшению размеров частиц [11, 12].

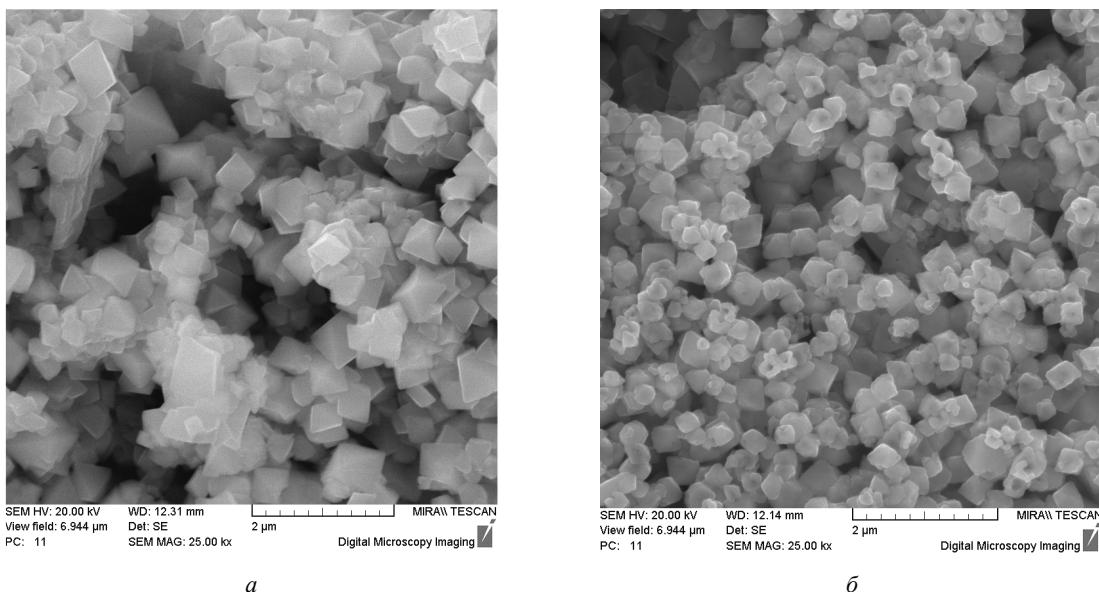
На рисунке 3 приведены данные по дисперсности порошков меди, полученных при различных плотностях тока (Fritsch-анализ). Время, в течение которого ток был включен, составляло 600 мс. При плотности тока  $1,07 \text{ A/cm}^2$  среднеарифметический размер частиц равен  $2,64 \text{ мкм}$ , при плотности тока  $750 \text{ mA/cm}^2$  –  $820 \text{ нм}$ , при плотности тока  $460 \text{ mA/cm}^2$  –  $600 \text{ нм}$ . Метод лазерного сканирования не дает представления о морфологии частиц, поэтому образовавшиеся конгломераты считаются за частицы крупных размеров. Соответственно средний размер частиц больше, чем при микроскопическом анализе.



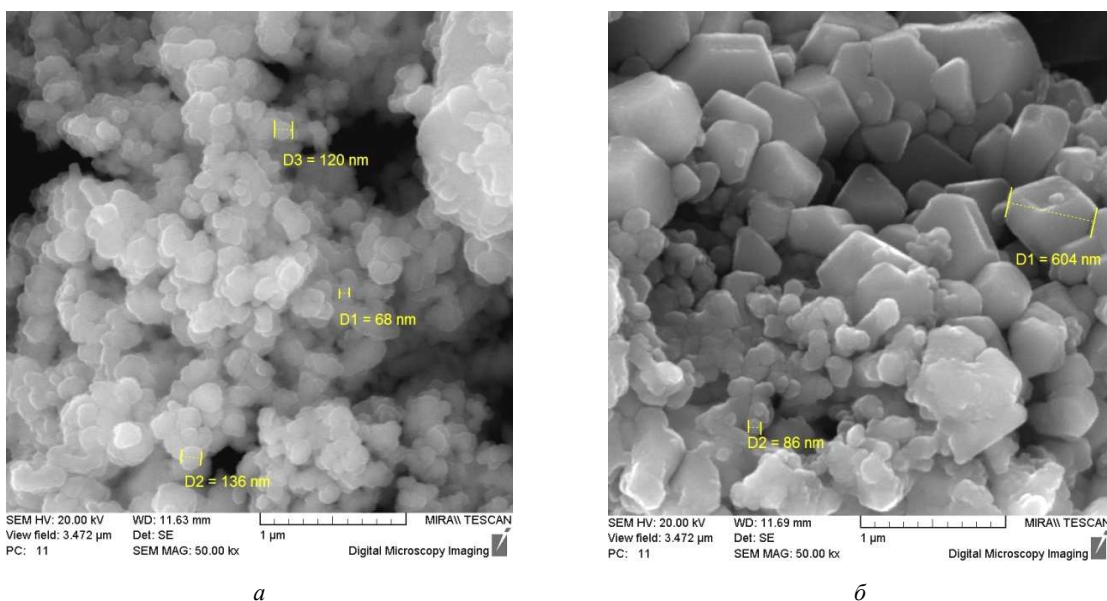
**Рисунок 3. – Графики Fritsch-анализа порошков меди, полученных при различных плотностях тока: а –  $1,07 \text{ A/cm}^2$ ; б –  $750 \text{ mA/cm}^2$ ; в –  $460 \text{ mA/cm}^2$**

На рисунке 4 приведены СЭМ-фотографии медных порошков, полученных при различных плотностях тока. При плотности тока  $1,07 \text{ A/cm}^2$  средний размер частиц составляет  $400\text{--}600 \text{ нм}$ , а при плотности тока  $460 \text{ mA/cm}^2$  –  $200\text{--}400 \text{ нм}$ . Следовательно, данные электронной микроскопии подтверждают, что с уменьшением плотности тока уменьшаются размеры частиц порошка.

Другим фактором, влияющим на дисперсность порошков, является длительность импульса тока. Так как металл удаляется с электрода практически полностью в течение каждого цикла работы, то большинство частиц формируются за время включения импульса тока. Соответственно, чем короче импульс, тем более мелкие частицы должны формироваться. Это подтверждается фотографиями, представленными на рисунке 5. При уменьшении длительности воздействия тока с  $800$  до  $400 \text{ мс}$  средний размер частиц меди уменьшается более чем в два раза.



**Рисунок 4. – Фотографии СЭМ порошка меди, полученного при различной плотности тока: а – 1,07 А/см<sup>2</sup>; б – 460 мА/см<sup>2</sup>**



**Рисунок 5. – Фотографии СЭМ порошков меди, полученных при различной длительности включения тока: а – 400 мс; б – 800 мс**

На свойства получаемых порошков влияют и другие параметры процесса. Так, интенсивность ультразвукового импульса должна быть достаточно высокой, чтобы полностью удалить осажденный металл с поверхности электрода. В то же время высокая интенсивность ультразвука приводит к перерасходу энергии и вызывает перегрев электролита, что крайне нежелательно, поскольку, чем ниже температура процесса, тем более мелкий получается порошок [1].

Следует отметить, что при использовании соноэлектрохимического метода большое значение имеет подготовка поверхности сонотрода. При шероховатой поверхности, наличии микроцарапин не все частицы удаляются во время одного цикла работы ультразвукового генератора. Они продолжают свой рост в течение последующих циклов. В результате конечный продукт имеет достаточно большой разброс по размерам частиц (рис. 6). На фоне мелкодисперсной фракции наблюдаются включения крупных частиц с размерами несколько микрон.

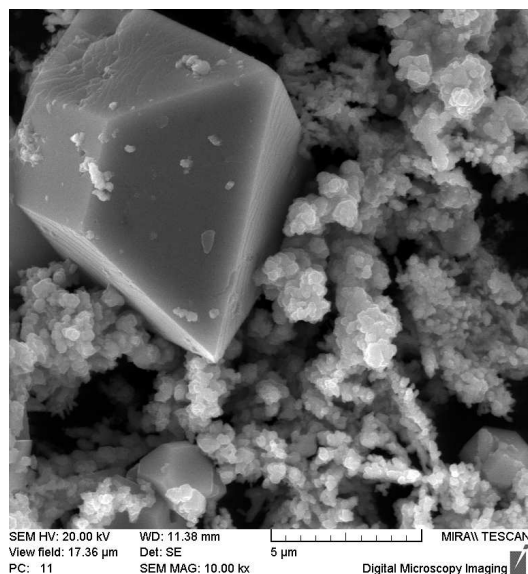


Рисунок 6. – Фотографии СЭМ порошка меди, содержащего крупную фракцию

**Заключение.** Исследование дисперсности порошков меди, полученных соноэлектрохимическим методом, показало, что размером частиц можно управлять изменением параметров реакции. Наиболее существенное влияние на характеристики получаемых порошков оказывает плотность катодного тока. Уменьшение плотности тока приводит к уменьшению размера частиц порошка меди. При плотности тока  $1,07 \text{ A/cm}^2$  средний размер частиц составляет 400–600 нм, а при плотности тока  $460 \text{ mA/cm}^2$  – 200–400 нм. Изменяя длительность импульса тока, также можно влиять на гранулометрический состав материала. При уменьшении длительности воздействия тока с 800 до 400 мс средний размер частиц меди уменьшается более чем в два раза. Описанный в настоящей работе метод позволяет получать медные порошки со средним размером частиц ~ 100 нм.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Sáez, V. Sonoelectrochemical Synthesis of Nanoparticles / V. Sáez, T. J. Mason // *Molecules*, 2009, 14, 4284-4299.
2. Haas, I. Pulsed Sonoelectrochemical Synthesis of Size-Controlled Copper Nanoparticles Stabilized by Poly (N-vinylpyrrolidone) / I. Haas, S. Shanmugam, A. Gedanken // *J. Phys. Chem. B* 2006, 110, 16947-16952.
3. Haas, I. Synthesis of Copper Dendrite Nanostructures by a Sonoelectrochemical Method / I. Haas, S. Shanmugam, A. Gedanken // *Chem. Eur. J.* 2008, 14, 4696-4703
4. Ржеусский, С. Э. Нанодиагностика и антимикробные свойства наночастиц меди / С. Э. Ржеусский, Е. А. Авчинникова, С. А. Воробьева // *Вестн. Фармации.* – 2014. – № 3(65). – С. 62–68.
5. Рыбалко, Е. А. Электрохимическое получение ультрадисперсных многокомпонентных порошков в процессах утилизации медьсодержащих материалов : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.17.03 / Е. А. Рыбалко. – Новочеркасск, 2013. – 16 с.
6. Чуловская, С. А. Электрохимическая кристаллизация и физико-химические свойства ультрадисперсных медьсодержащих порошков, полученных из водно-изопропанольных растворов электролитов : автореф. дис. ... канд. хим. наук : 02.00.04 / С. А. Чуловская. – Иваново, 2006. – 18 с.
7. Андрусишина, И. Н. Наночастицы металлов: способы получения, физико-химические свойства, методы исследования и оценка токсичности / И. Н. Андрусишина // *Сучасні проблеми токсикології.* – 2011. – № 3. – С. 5–14.
8. Нанопорошки и методы их получения [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.portalnano.ru/read/prop/pro/materials/functional/4cosmos/nanoporoshki>. – Дата доступа: 15.06.2016.
9. Quantitative sonochemistry / J. Reisse [et al.] // *Ultrason. Sonochem.* – 1996. – № 3. – S. 147–151.
10. Novel method for the preparation of lead selenide: Pulse sonoelectrochemical synthesis of lead selenide nanoparticles / J. Zhu [et al.] // *Chem. Mater.* – 2000. – Vol. 12, № 1. – P. 143–147.

11. Controllable synthesis of palladium nanoparticles via a simple sonoelectrochemical method / X.-F. Qiu [et al.] // J. Mater. Res. – 2003. – Vol. 18, Is.6. – P. 1399–1404.
12. Three-dimensional dendritic Pt nanostructures: Sonoelectrochemical synthesis and electrochemical applications / Q. Shen [et al.] // J. Phys. Chem. C. – 2008. – Vol. 112, № 42. – P. 16385–16392.

Поступила 20.09.2016

### CHARACTERISTICS OF COPPER POWDERS PREPARED BY SONOELECTROCHEMICAL METHOD

V. SHUT, A. KUZNETSOV, S. MOZZHAROV

*A method for producing powder materials, in particular copper powder, with the use of ultrasound and electrodeposition from solution is represented – sonoelectrochemical method. The factors that influence on the size distribution of powders produced by this method has been analyzed. It is shown that the particle size of the powder can be controlled by changing the reaction parameters, in this case, the most significant impact on the dispersion of the powder have a cathode current density and duration of the current pulse. Described method allows to produce the copper powder with an average particle size of about 100 nm.*

**Ключевые слова:** соноэлектрохимический метод, порошок меди, дисперсность.

УДК 681.586.773:624.072.233.5

**УЛЬТРАЗВУКОВАЯ РЕЛЬСОВАЯ ДЕФЕКТОСКОПИЯ****А.В. ШЛЯХТЕНОК, канд. техн. наук, доц. Д.А. ДОВГЯЛО**  
(Полоцкий государственный университет)

Рассмотрен наиболее распространенный на сегодняшний день эхо-метод ультразвукового контроля рельсов, проведен анализ дефектов, выявленных в 2015 г.; указаны характерные причины и особенности их развития. Рассмотрены перспективные способы ультразвукового контроля: дифракционно-временной метод и метод, основанный на преобразователях в виде фазированных решеток. Предложен пример практического обнаружения дефектов.

**Ключевые слова:** ультразвуковая дефектоскопия, промышленная диагностика, ультразвуковой датчик, обнаружение дефектов, неразрушающий контроль, эхо-метод, ультразвуковые фазированные решетки, дифракционно-временной метод.

**Введение.** На сегодняшний день железнодорожный транспорт является одним из наиболее распространенных видов транспорта, применяемых для перевозки грузов, пассажиров и багажа. В процессе эксплуатации рельсы, уложенные в путь, подвергаются механическим воздействиям со стороны колесных пар подвижного состава, а также климатическим воздействиям, что приводит к их износу и, как следствие, образованию внутренних дефектов.

Для разработки эффективных схем и методик контроля, а также для повышения эффективности уже существующих мероприятий, направленных на предупреждение развития дефектов рельсов, приведем их классификацию по причинам и месту развития.

В Национальной системе подтверждения соответствия Республики Беларусь НТД/ЦП 1-2-3-93 [1] подробно описаны признаки дефектных и острodefектных рельсов, причины их зарождения и особенности развития.

Причины зарождения и развития дефектов в рельсах можно разделить на две основные группы: эксплуатационные, например, неудовлетворительное состояние пути и подвижного состава, и заводские – допущенные при изготовлении рельсов.

На поверхности катания головки рельса наиболее распространены следующие дефекты:

- отслоение и выкрашивание металла по поверхности катания;
- выкрашивание на боковой выкружке головки рельса;
- выбоковины и закалочные трещины в местах буксования колес;
- выкрашивание и отслоение металла на поверхности в закаленном слое головки рельса [2].

**Статистика распределения дефектов.** Классификация определяет девять различных групп дефектов, которые включают в себя дефекты головки рельса (I, II, III, IV группы), дефекты шейки рельса (V группа), дефекты подошвы (VI группа) и другие дефекты, возникающие по всему сечению. Проведем рассмотрение дефектов рельсов, являющихся наиболее опасными с точки зрения их дальнейшей эксплуатации (острodefектных), выявим особенности их развития и обнаружения.

На рисунке 1 показана диаграмма распределения острodefектных рельсов, обнаруженных в 2015 г. по группам.

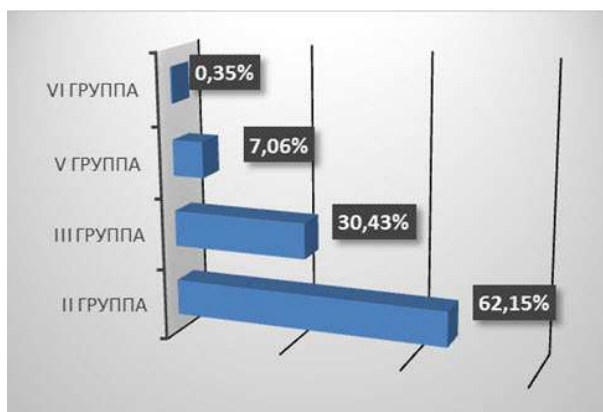


Рисунок 1. – Диаграмма распределения острodefектных рельсов, выявленных цехами дефектоскопии Белорусской железной дороги в 2015 г.



Представленные статистические данные собраны за период с 01.01.2015 по 31.12.2015 г. по дистанциям пути Белорусской железной дороги, на базе которых организованы цеха, занимающиеся проведением ультразвукового контроля рельсов.

Основная часть выявленных острodefектных рельсов приходится на дефекты II группы – поперечные трещины в головке рельса в виде темных и светлых пятен. На втором месте находятся не менее распространенные дефекты третьей группы – расслоение головки рельса. Третье место занимают дефекты пятой группы, развитие которых в основном обусловлено отклонением от норм текущего содержания рельсового хозяйства. На последнем месте – дефекты шестой группы, которые являются самыми опасными вследствие трудности их выявления. В ходе анализа, проведенного специалистами ОАО «РЖД», было установлено, что при низком показателе выявленных дефектов (единицы штук) VI группы изломы, вызванные этими повреждениями, составляют до 1/3 от их общего числа.

На рисунке 2 приведены диаграммы распределения выявленных в 2015 г. дефектов по II, III, V и VI группам.

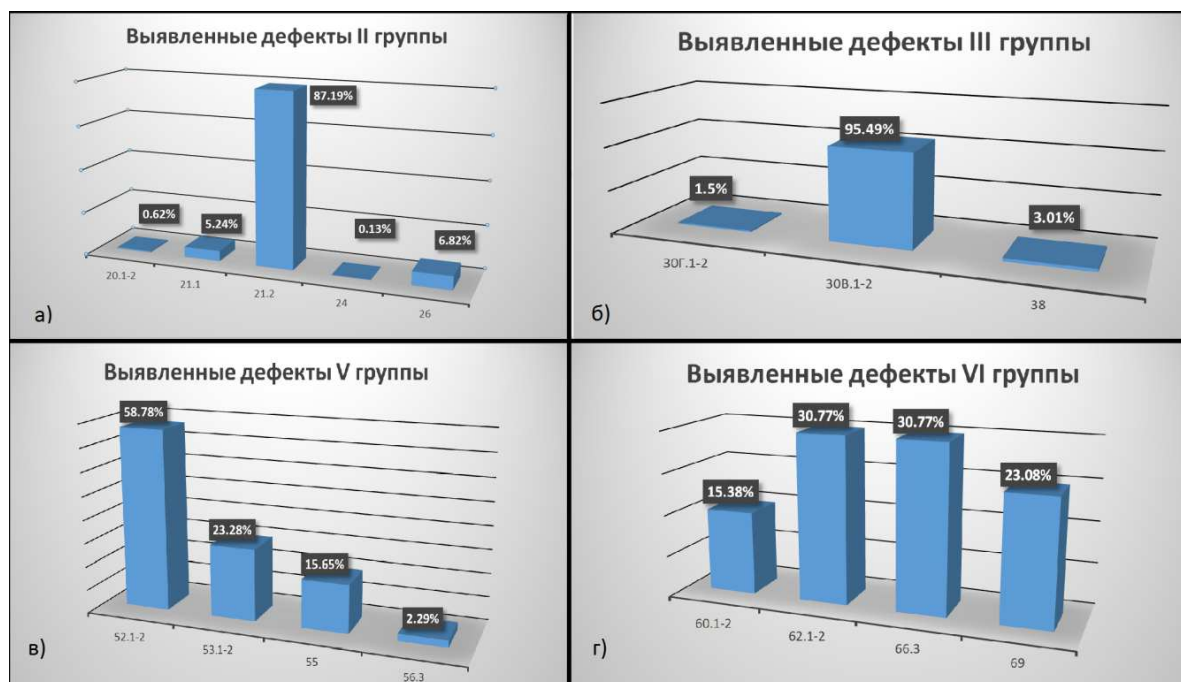


Рисунок 2. – Диаграмма распределения дефектов, выявленных в 2015 г.:  
 а – дефекты II группы; б – III группы; в – V группы; г – VI группы

Дефекты второй группы (рис. 2, а) являются одними из самых распространенных. В данной группе преобладают дефекты кода 21.2, образующиеся в результате недостаточной контактно-усталостной прочности металла вследствие его физического износа и старения. Особенно опасны и трудны для выявления дефекты 21.2 в случае, если они прикрыты (замаскированы) дефектом третьей группы (код 30Г.2).

Обычно дефекты 21.2 развиваются от дефектов кода 11.2 (выкрашивание металла на боковой рабочей выкружке рельса), которые не относятся к группе острodefектных, и рельсы, на которых присутствуют данные дефекты, могут эксплуатироваться с определенными ограничениями. К наиболее вероятным местам проявления дефектов 21.2 относятся кривые участки пути, где вследствие повышенной нагрузки на внутренний рельс высока вероятность появления повреждений кода 11.2.

Следующее место по распространенности занимают дефекты кода 20.1-2. Они развиваются в результате заводского брака, допущенного при изготовлении рельса, и представляют собой газовые пузыри, флокены, неметаллические включения различного рода. Также стоит отметить отдельные виды дефектов, возникающих при отливке – повреждений кристаллической структуры. Они развиваются со временем и зачастую выявляются по прошествии достаточно продолжительного периода эксплуатации.

Дефекты кода 26 обусловлены нарушением технологии сварки рельсов. Опасность данных дефектов заключается в повышении хрупкости металла рельса в зоне сварного шва в результате нарушения его кристаллической структуры при нагревании. Нагревание металла меняет его структуру, что сказывается на коэффициенте затухания ультразвуковых колебаний в рельсе и искажает результаты контроля.

Последнее место занимают дефекты кода 24, обусловленные воздействием колес подвижного состава, пробуксовками.

Значительную часть из всех выявленных повреждений представляют дефекты III группы (рис. 2, б). Их основную массу составляют горизонтальные расслоения головки рельса. Эти дефекты опасны тем, что под ними могут развиваться дефекты II группы, которые вследствие нахождения их «под прикрытием» могут быть пропущены из-за конструктивных особенностей пьезоэлектрических датчиков, используемых для контроля. Особенностью дефекта 30Г.1-2 является возможность его развития вглубь, в сторону подошвы рельса и, как следствие, образование изломов.

Дефекты V группы (рис. 2, в) развиваются по причине нарушений норм текущего содержания пути. Помимо дефектоскопирования, данные дефекты возможно выявить и визуально, т.к. в большинстве случаев на стадии зарождения они представляют собой надрыв грани болтового отверстия или радиусного перехода головки рельса в шейку.

Кроме нарушения норм текущего содержания, дефекты V группы очень интенсивно развиваются с уменьшением температуры наружного воздуха ниже  $0^{\circ}\text{C}$  вследствие увеличения хрупкости металла.

Самыми распространенными, но тем не менее уверенно обнаруживаемыми с помощью датчиков являются дефекты 52.1-2 (трещины в подголовочной части рельса). Дефекты кодов 53.1-2, 55 и 56 (трещины от болтовых отверстий, а также образовавшиеся в результате механического воздействия или в виду нарушения технологии сварки) достаточно трудно выявить в связи с невозможностью прогнозирования направления их развития. Особенно сложно выявляются дефекты, развивающиеся от болтового отверстия в сторону торца рельса.

В распределении дефектов VI группы (рис. 2, г) наиболее преобладают дефекты кодов 61.1-2 (выколы подошвы без видимых дефектов металла) и 66.3 (выколы подошвы в результате нарушения технологии сварки), в общей сложности составляющие практически 62%. Менее распространены дефекты кода 69 (коррозийные трещины). Выколы подошвы (60.1-2) в результате нарушения технологии отливки находятся на последнем месте.

Особое внимание при контроле рельсов следует обращать на электрифицированные участки пути, где по причине воздействия на рельс блуждающих токов вероятно образование коррозии. Также к ним относятся участки, по которым перевозятся соли и калийные удобрения.

**Методы контроля.** Все дефекты, рассмотренные выше, выявлены при помощи дефектоскопов, реализованных на основе акустического эхо-метода.

Современные дефектоскопы представляют собой сложные устройства на микропроцессорах и микроконтроллерах, реализующие весь спектр методов неразрушающего контроля.

В зависимости от параметров контролируемого объекта, выбирается метод неразрушающего контроля, отвечающий поставленным требованиям.

В рельсовой дефектоскопии используется ультразвуковой (акустический) метод, отличающийся высокой надежностью, эффективностью и простотой реализации.

В общем случае ультразвуковые методы используют в своей основе законы акустики и особенности распространения колебаний ультразвуковой частоты в различных материалах. В качестве датчиков в них применяются пьезоэлектрические преобразователи (ПЭП), использующие явления прямого и обратного пьезоэффекта.

Применение эхо-импульсного метода ультразвукового контроля обусловлено простотой его реализации, отсутствием необходимости двухстороннего доступа к изделию, высокой чувствительностью ко внутренним дефектам и высокой разрешающей способностью.

Сущность эхо-метода состоит в излучении коротких импульсов упругих колебаний в контролируемое изделие и регистрации интенсивности (амплитуды), а также времени прихода эхосигналов, отраженных от дефектов. Временной интервал между зондирующим импульсом и эхо-импульсом пропорционален глубине залегания дефекта, а амплитуда – отражающей способности дефекта. Принцип работы эхо-метода изображен на рисунке 3. Признак обнаружения дефекта – появление в пределах зоны контроля (между зондирующим импульсом и донным сигналом) сигнала, отраженного от дефекта [3].

При использовании эхо-метода для обнаружения различно ориентированных (относительно нормали) дефектов применяются ПЭП с разными углами ввода ультразвука в контролируемый объект – от  $42^{\circ}$  до  $70^{\circ}$  (угол ввода задает призма преобразователя). Данный метод использует однокомпонентные преобразователи, т.е. преобразователи, в конструкции которых предусмотрен один пьезоэлемент. Таким образом, для качественной проверки всех сечений исследуемого объекта следует поочередно проводить контроль преобразователями с разными углами ввода, что увеличивает время дефектоскопирования.

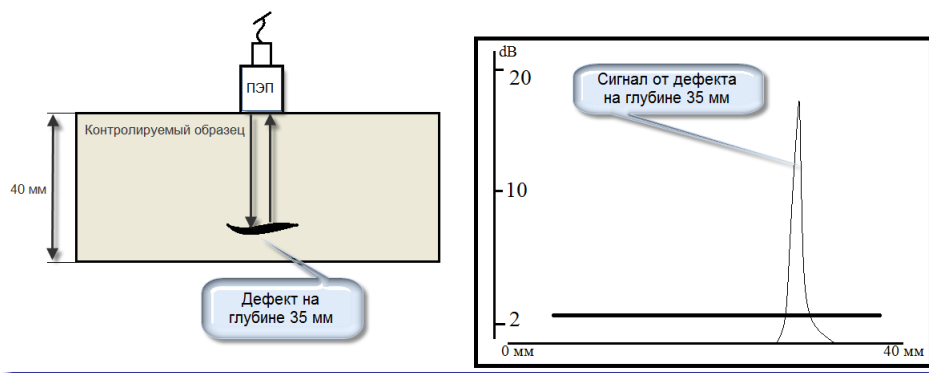


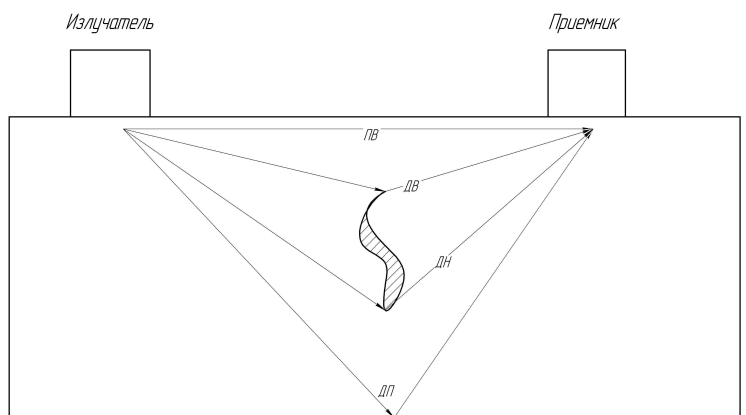
Рисунок 3. – Принцип работы эхо-метода

К преимуществам метода относятся высокие чувствительность и разрешающая способность, что наряду с возможностью точного определения координат и размеров дефекта делает данный метод одним из основных, используемых при контроле железнодорожных рельсов.

Главным недостатком эхо-метода является наличие мертвой зоны под излучателем. Наличие мертвой зоны связано с тем, что при близко расположенном к поверхности дефекте ввод ультразвуковых колебаний в момент прихода эхо-сигнала от дефекта еще продолжается.

Существуют и другие методы ультразвукового контроля, которые пока не нашли широкого применения в рельсовой дефектоскопии, однако считаются не менее перспективными в процессе обнаружения дефектов.

Таким, весьма прогрессивным, представляется дифракционно-временной метод, который обладает рядом преимуществ перед эхо-методом, однако не заменяет его, а является дополняющим. Принцип работы данного метода показан на рисунке 4.



Дифракционный сигнал от верхней грани дефекта (ДВ)

Дифракционный сигнал от нижней грани дефекта (ДН)

Поверхностная волна (ПВ)

Донная поверхность (ДП)

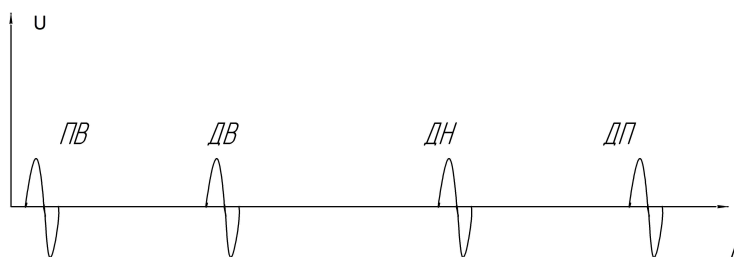


Рисунок 4. – Принцип работы дифракционно-временного метода

Метод реализован на двух преобразователях, включенных по отдельной схеме, и основан на явлении дифракции ультразвуковой волны на краях дефекта. Используя дифракционно-временной метод, обнаруживают и регистрируют как дифракционные волны, отраженные от краев дефекта, так и сигналы от донной поверхности, временное положение которых соответствует толщине анализируемого объекта. Кроме того, на приемник приходит поверхностная волна, которая при отсутствии поверхностных дефектов не испытывает искажений. При этом происходит определение места расположения дефекта и имеется возможность оценки его размеров.

Основной отличительной особенностью является практически полная независимость эффективности обнаружения дефекта от его ориентации (углового положения). Данное обстоятельство не только сокращает время контроля, но и повышает его эффективность.

К другим преимуществам относятся:

- возможность достижения более высокой точности при проведении измерений, составляющей, как правило,  $\pm 1$  мм, а при повторном обследовании  $\pm 0,3$  мм;
- калибровка основана на времени прохождения пути дифракционных сигналов и не зависит от амплитуды сигнала;
- высокая производительность контроля, т.к. сканирование проводится вдоль одной линии с контролем всего объема шва [4].

Еще один метод, который по эффективности не только находится в одном ряду с вышеперечисленными, но по отдельным параметрам превосходит их – метод, использующий преобразователи в виде фазированных решеток.

Данный метод был разработан в 1959 г., однако вследствие отсутствия электронной техники, быстродействие которой позволило бы раскрыть все его возможности, до недавнего времени не использовался.



Рисунок 5. – Формирование фронта волны

Метод ультразвуковых фазированных решеток основан на преобразовании и генерировании ультразвуковых волн. Преобразователь (кристалл) решетки представляет собой множество пьезоэлектрических элементов, которые образуют линейные (решетка со множеством элементов, расположенных в один ряд) или матричные (решетка с элементами, расположенными по вертикали и горизонтали) структуры. Генератор задает последовательность импульсов с определенными задержками по фазе. Импульсы возбуждают группы пьезоэлементов, формирующих фронт волны. В результате на выходе получаем амплитудный сигнал в реальном времени, эквивалентный стандартному А-скану. В совокупности с высоким быстродействием данная технология позволяет реализовать метод, эффективность которого не зависит от ориентации дефекта. Принцип формирования фронта волны показан на рисунке 5.

Метод фазированных решеток не может полностью заменить классический эхо-метод ультразвукового контроля, являясь подтверждающим, а дефектоскопы, реализующие данный метод, имеют достаточно высокую стоимость.

Однако он относится к одним из наиболее перспективных методов ультразвукового контроля и обладает рядом преимуществ:

- различные углы ввода пучков могут быть сгенерированы с помощью одного преобразователя, что дает возможность одновременно сканировать гораздо большую область;
- большой охват увеличивает скорость сканирования объекта и разрешающую способность контроля;
- имеется возможность получения реальных изображений положения и размеров дефектов, что облегчает расшифровку и интерпретацию полученных результатов;
- все данные, учитывающие последовательность контроля, могут быть записаны в реальном времени [5].

**Практическое выявление дефектов.** На предприятиях Белорусской железной дороги используются дефектоскопы, работа которых основана на использовании эхо-метода ультразвуковой дефектоскопии. Эффективность данного метода подтверждается на практике. Так, по результатам вторичного кон-

троля ручными преобразователями удастся выявлять дефекты на ранней стадии развития. Наглядным примером служит дефект кода 55 (трещины шейки рельса, возникшие в результате механического воздействия на рельс). Фрагмент дефектограммы данного дефекта приведен на рисунке 6.

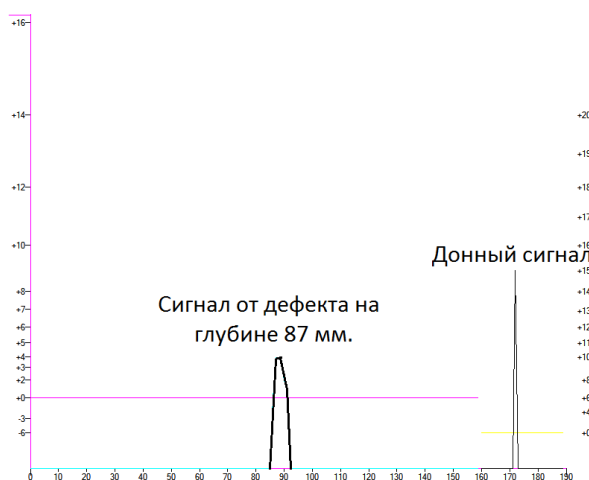


Рисунок 6. – Дефектограмма подозрительного сечения

Из дефектограммы следует, что дефект зарегистрирован первым каналом, реализованным на базе преобразователя с углом ввода ультразвука  $0^\circ$  с максимальной амплитудой на глубине 87 мм. Наряду с сигналом от первого канала можно наблюдать ослабление донного сигнала от 20 до 15 дБ в девятом информационном канале, реализующем зеркально-теневой метод. Объединив полученную информацию, можно сделать некоторые выводы:

- дефект развивается горизонтально, параллельно поверхности сканирования, т.к. сигнал зарегистрирован преобразователем с углом ввода ультразвука  $0^\circ$ ;
- дефект не полностью перекрывает проекцию шейки, т.к. присутствует часть донного сигнала в девятом канале;
- дефект располагается на глубине 87 мм от поверхности сканирования.

Данные обстоятельства свидетельствуют о наличии развивающегося дефекта V группы. При выезде на линию для проведения перепроверки подозрительного сечения был визуально подтвержден дефект, показанный на рисунке 7.

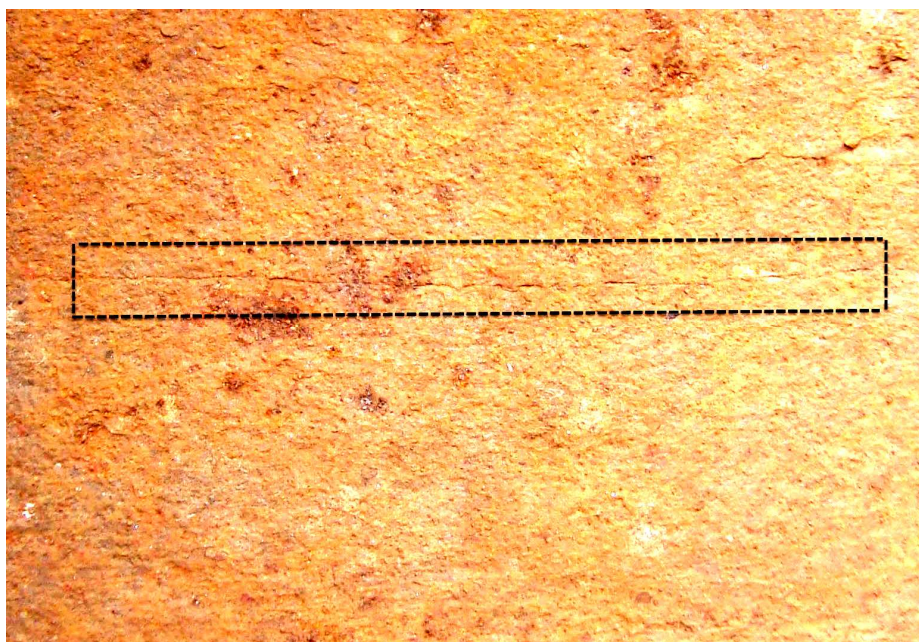


Рисунок 7. – Дефект шейки рельса

**Вывод.** Статистика распределения дефектов рельсов свидетельствует о большом количестве скрытых дефектов, которые по опасности проявления сопоставимы с внешними повреждениями поверхности, а в некоторых случаях даже превосходят их.

В связи с этим существует необходимость комплексного анализа дефектов не только при помощи стандартных ультразвуковых методов, но и с использованием перспективно развивающихся: дифракционно-временного метода и метода с использованием фазированных решеток.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Национальная система подтверждения соответствия Республики Беларусь. Порядок декларирования соответствия продукции. Основные положения: НТД/ЦП 1-2-3-93. Классификация дефектов рельсов. Каталог дефектов рельсов. Признаки дефектных и остродефектных рельсов, 1993.
2. Марцинкевич, А.В. Ультразвуковой метод неразрушающего контроля : курс лекций / А.В. Марцинкевич ; ОАО «Белгорхимпром». – Минск, 2016. – 149 с.
3. Александрова, С.Б. Ультразвуковая дефектоскопия рельсов : учеб.-метод. комплекс / С.Б. Александрова ; Барановичский ЦППК Бел ЖД. – Барановичи, 2008. – 116 с.
4. Дифракционно-временной метод [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://tofd-pa.ru/tofd>. – Дата доступа: 01.08.2016.
5. Что такое фазированная решетка [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://harfangveo.ru/static/faq>. – Дата доступа: 11.08.2016.

Поступила 20.09.2016

#### ULTRASONIC FLAW DETECTION OF THE RAILS

*A. SHLIAHTENOK, D. DAUHALA*

*The article describes the most common by far echo-method of ultrasonic flaw detection, conducted analysis of a defects, that identified in 2015, are indicated specific reasons and peculiarities of their development, describes promising methods of ultrasonic flaw detection: time of flight diffraction (ToFD-method) and the method based on the converters in the form of phased Array, a practical example is described defect detection..*

**Keywords:** *ultrasonic flaw detection, industrial diagnostic, ultrasonic probe, defects detection, nondestructive evaluation, echo-method, ultrasonic phase array, time of flight diffraction method.*

УДК 537.534

## АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИОННО-ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПЛАЗМЕННЫМ ЭМИТТЕРОМ

канд. техн. наук, доц. **О.Н. ПЕТРОВИЧ, И.С. РУСЕЦКИЙ**  
(Полоцкий государственный университет)

Предложен алгоритм численного расчета положительных ионных пучков в ионно-оптической системе с плазменным эмиттером, основанный на дискретизации потока ионов токовыми трубками с учетом подвижности границы плазма–ионный пучок.

**Ключевые слова:** положительные ионные пучки, ионно-оптическая система с плазменным эмиттером, численное моделирование пучков заряженных частиц.

**Введение.** Источники заряженных частиц находят разнообразное применение в науке и технике. По мере развития вычислительной техники разрабатывалось и совершенствовалось программное обеспечение для моделирования задач сильноточной электронной и ионной оптики. Можно выделить основные этапы численного моделирования электронных и ионных пучков: описание свойств эмиттера заряженных частиц, расчет электромагнитных полей, описание движения потоков заряженных частиц, нахождение объемных зарядов электронов и ионов в расчетной области, определение характеристик пучков заряженных частиц.

Широкое распространение получили ионные и электронные источники, в которых эмиттером заряженных частиц служит газоразрядная плазма. Разработка алгоритмов моделирования электронных и ионных оптических систем с плазменным эмиттером представляет собой сложную задачу, связанную с подвижностью плазменной поверхности. В виду сложности задачи количество программных комплексов, предназначенных для моделирования ионных и электронных источников с плазменным эмиттером сравнительно невелико.

Подробное описание современных вычислительных кодов для расчета плазменных эмиссионных систем представлено в работе [1]. В первую группу пакетов программ можно отнести код PBGUNS [2] и POISSON-2 [3], которые изначально разрабатывались для моделирования электронных, а затем и ионных пучков в системах с плазменным и твердым эмиттером. Ко второй группе относится код КОBRA-3 [4], который предназначен для моделирования сильноточных ионных пучков в системах с плазменным эмиттером. В третью группу пакетов прикладных программ можно выделить код ELIS [5, 6], который был разработан для решения задач плазменной эмиссионной электроники.

Целью настоящей работы является адаптация программных модулей пакета ELIS к расчету положительных ионных пучков, инжектированных плазмой газового разряда, и разработка алгоритмов моделирования ионно-оптических систем с плазменным эмиттером.

**Алгоритм численного моделирования системы формирования потока положительных ионов.** Алгоритм расчета электрического поля основан на методе потенциалов. В случае осесимметричного пучка для описания стационарного электрического поля используется уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi(z, r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(z, r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi(z, r)}{\partial z^2} = - \frac{\rho_i(z, r)}{\varepsilon_0}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная;

$\rho_i(z, r)$  – объемный заряд, вносимый потоком ионов;

$\varphi(z, r)$  – значение потенциала в точке с координатами  $(z, r)$ .

В качестве граничных условий задаются потенциал плазмы  $\varphi_{pl}$  и потенциалы электродов ионно-оптической системы. В исходном приближении электрическое поле определяется распределением потенциала  $\varphi(z, r)$  в расчетной области с подвижной плазменной поверхностью в отсутствие пучка. Азимутальная напряженность электрического поля равна нулю, и уравнение  $\vec{E} = -grad\varphi = -\nabla\varphi$  в цилиндрических координатах преобразуется к виду

$$E_r = -\frac{\partial \varphi(z, r)}{\partial r}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi(z, r)}{\partial z}. \quad (2)$$

Положение и форма плазменного эмиттера задаются потенциалом плазмы  $\varphi_{pl}$  и граничным условием на эмиссионной поверхности [1]:

$$\varphi|_{pl} = \varphi_{pl}, \quad (3)$$

$$n_{pl}kT_e = \frac{\varepsilon_0 E|_{pl}^2}{2}. \quad (4)$$

где  $\varphi|_{pl}$  – потенциал поля на границе плазмы;  
 $n_{pl}$  – концентрация плазмы;  
 $E|_{pl}$  – напряженность поля на границе плазмы;  
 $k$  – постоянная Больцмана;  
 $T_e$  – температура плазменных электронов.

Концентрация плазмы может быть задана пользователем как функция от координат  $n_{pl}(z, r)$  или в матричном виде в соответствии с экспериментальными данными.

Так как плазменные электроны более подвижны, чем ионы, то плазма приобретает положительный потенциал  $\varphi_{pl}$  относительно стенок эмиттерного (фокусирующего) электрода и разрядной камеры [1]. Радиус плазмы внутри отверстия в фокусирующем электроде  $r_{pl}(z)$  и распределение потенциала в пристеночном слое задаются концентрацией плазмы  $n_{pl}$  и ее потенциалом  $\varphi_{pl}$  и находятся как решение уравнение Пуассона для цилиндрического вакуумного диода с граничными условиями (3)–(4) с учетом объемного заряда ионов, плотность эмиссионного тока которых определяется формулой Бома  $j_i = 0,61en_{pl}\sqrt{kT_e/m_i}$ , и объемного заряда электронов, двигающихся в тормозящем поле [7], что учитывается в выражении для плотности электронного тока следующим образом:

$$j_e = en_{pl}\sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_e}} \exp\left(\frac{e(\varphi - \varphi_{pl})}{kT_e}\right),$$

где  $e$  – элементарный заряд;  
 $m_i$  – масса иона;  
 $m_e$  – масса электрона.

Плотность боровского тока ионов пучка, инжектированных свободной поверхностью плазмы, находится с учетом возможного движения плазменного эмиттера в ускоряющий промежуток с направленной скоростью [8], например, в результате нагрева плазмы электронным пучком [1]:

$$j_{i0} = en_{pl}\left(0,61\sqrt{kT_e/m_i} - v_{pl-i}\right), \quad (5)$$

где  $v_{pl-i}$  – скорость движения границы раздела плазма–ионный пучок.

Движение потока ионов описывается токовыми трубками. Трубка тока определяется как область между двумя соседними поверхностями вращения вокруг оси  $z$  граничных траекторий, при этом поперечное сечение трубки и, как следствие, плотность ионного тока вдоль оси системы ускорения пучка не остается постоянной, а изменяется. Уравнение граничной траектории трубки тока ионов находится путем исключения времени из уравнений движения в цилиндрических координатах с учетом интеграла энергии:

$$m_i\ddot{r} = eE_r, \quad m_i\ddot{z} = eE_z, \quad \frac{m_i V_i^2}{2} = \varepsilon - e \cdot (\varphi(z, r) - \varphi_{pl}), \quad (6)$$

где  $\varepsilon$  – начальная энергия ионов, эмитированных плазмой;  
 $V_i$  – скорость ионов в точке с координатами  $(z, r)$ .



Преобразуем  $\ddot{r}$  :

$$\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \dot{z} \frac{dr}{dz} \right) = \dot{z} \frac{dr}{dz} + \dot{z} \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dz} \right) = \dot{z} \frac{dr}{dz} + \dot{z}^2 \frac{d}{dz} \left( \frac{dr}{dz} \right) = \dot{z} \frac{dr}{dz} + \dot{z}^2 \frac{d^2 r}{dz^2}.$$

Учитывая уравнения Ньютона, получим

$$\dot{z}^2 \frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{e}{m_i} \left( E_r - E_z \cdot \frac{dr}{dz} \right). \quad (7)$$

Так как  $V_i^2 = \dot{r}^2 + \dot{z}^2$ , тогда  $\dot{z}^2 \left( 1 + \left( \frac{\dot{r}}{\dot{z}} \right)^2 \right) = \dot{z}^2 \left( 1 + \left( \frac{dr}{dz} \right)^2 \right) = \frac{2\varepsilon}{m_i} - \frac{2e}{m_i} (\varphi(z, r) - \varphi_{pl})$ . Отсюда следует

$$\dot{z}^2 = \frac{\frac{2\varepsilon}{m_i} - \frac{2e}{m_i} (\varphi(z, r) - \varphi_{pl})}{1 + \left( \frac{dr}{dz} \right)^2}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в уравнение (7), получаем искомое уравнение траектории в дифференциальной форме:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{\left( E_r(z, r) - E_z(z, r) \cdot \frac{dr}{dz} \right) \cdot \left( 1 + \left( \frac{dr}{dz} \right)^2 \right)}{\frac{2\varepsilon}{e} + 2(\varphi_{pl} - \varphi(z, r))}. \quad (9)$$

Плотность тока  $j_i(z, r)$  и объемный заряд  $\rho_i(z, r)$  ионов пучка, эмитированных плазмой с начальной энергией  $\varepsilon$ , определяются по следующим формулам:

$$j_i(z, r) = \frac{I_i}{S_n(z)}, \quad (10)$$

$$\rho_i(z, r) = \frac{I_i}{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m_i} + \frac{2e}{m_i} (\varphi_{pl} - \varphi(z, r))} \cdot S_n(z)}, \quad (11)$$

где  $S_n(z)$  – площадь поперечного сечения трубки тока пучка плоскостью  $z = \text{const}$ ;

$I_i = j_{i0} \cdot S_0$  – ионный ток эмиссии;

$S_0$  – площадь эмиссионной поверхности плазмы для каждой трубки тока.

В исходном приближении объемный заряд ионного пучка считается равным нулю и производится расчет поля электродов и трубок тока в этом поле. В каждом последующем приближении поле рассчитывается уже с учетом объемного заряда, распределенного по трубкам тока. Расчет продолжается до получения достаточно малых отклонений в ходе траекторий в двух последовательных приближениях.

По завершении итерационного процесса производится смещение поверхности плазменного эмиттера в соответствии с условиями (3)–(4) и повторение всех расчетов до тех пор, пока положение и форма эмиссионной поверхности не будут определены с заданной точностью в двух последовательных приближениях. Скорость смещения границы раздела плазма–ионный пучок определяется при этом согласно условию Стефана [8]:

$$v_{pl-i} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{m_i n_{pl}}} \left( \text{grad} \varphi - \sqrt{\frac{2n_{pl} k T_e}{\varepsilon_0}} \right). \quad (12)$$

Пример моделирования ионно-оптической системы с плазменным эмиттером с помощью пакета ELIS приведен на рисунке.

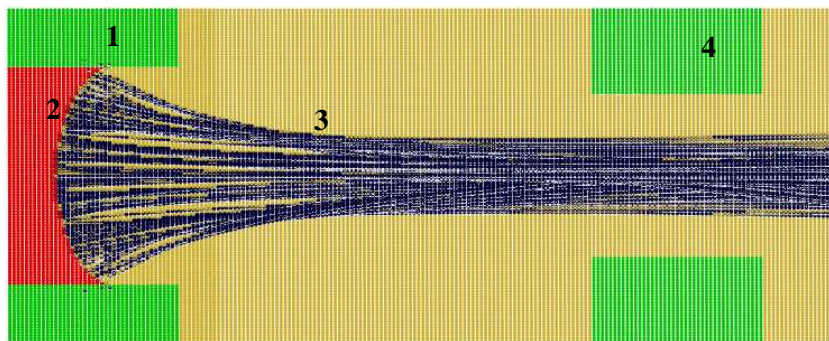


Рисунок. – Пример моделирования ионно-оптической системы формирования пучка положительных ионов с плазменным эмиттером:

1 – фокусирующий электрод с радиусом апертуры 2 мм; 2 – плазма; 3 – ионный пучок;  
4 – коллектор ионов (ускоряющий электрод) с радиусом апертуры 1,5 мм;  
ускоряющий промежуток 5 мм; ускоряющее напряжение 50 кВ; концентрация плазмы  $5 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}$

**Заключение.** Разработан алгоритм моделирования ионного потока и расчета характеристик ионного пучка, основанный на дискретизации ионного потока токовыми трубками, который позволяет получить численное решение задачи Стефана на границе плазма–ионный пучок в ионно-оптической системе с плазменным эмиттером.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Котельников, И. А. Теория плазменного эмиттера положительных ионов / И. А. Котельников, В. Т. Астрелин // Успехи физических наук. – 2015. – № 7, Т. 185. – С. 753–771.
2. FAR-TECH Inc PBGUNS Manual [Electronic resource] / FAR-TECH Inc., 2013. – Режим доступа: <http://far-tech.com/pbguns/manuals.htm>.
3. Астрелин, В. Т. Пакет программ для расчета характеристик интенсивных пучков релятивистских заряженных частиц / В. Т. Астрелин, В. Я. Иванов // Автометрия. – 1980. – № 3. – С. 92–98.
4. Spädtke, P. The Physics and Technology of Ion Sources / ed. I. G. Brown. – New York : Wiley, 2006. – P. 41–60.
5. Петрович, О. Н. Программный комплекс ELIS для моделирования ЭОС ПИЭЛ / О. Н. Петрович, В. А. Груздев // Прикладная физика. – 2012. – № 2. – С. 79–85.
6. Петрович, О. Н. Моделирование электронно-оптических систем с плазменным эмиттером : дис. ... канд. техн. наук : 05.13.18 / О. Н. Петрович ; Полоц. гос. ун-т, 2012. – 199 л.
7. Распространение плазмы в эмиссионном канале анодного электрода плазменного источника электронов / Д. Г. Данилишин [и др.] // Изв. ВУЗов. Физика. – 2001. – № 5. – С. 29–32.
8. Stekolnikov, A. F. Simulation of formation of an intensive electron beam in bipolar electron-optical system with the plasma anode / A. F. Stekolnikov, V. A. Gruzdev, O. N. Petrovich // Problems of Atomic Science and Technology. Series : Plasma Physics. – 2002. – № 5. – С. 113–114.

Поступила 20.09.2016

#### ALGORITHM OF SIMULATION OF ION-OPTICAL SYSTEM WITH THE PLASMA EMITTER

*O. PETROVICH, I. RUSSETSKI*

*The algorithm of numerical calculation of the positive ion beams in ion-optical system with plasma emitter based on current tubes for ions flow and taking into account the mobility of boundary of the plasma and ion beam is developed.*

**Keywords:** *positive ion beams, ion-optical system with plasma emitter, numerical simulation of charged particle beams.*

## МАТЕМАТИКА

УДК 511.8

### МНОЖЕСТВО ПОЛУОКТАВ. I

*канд. физ.-мат. наук, доц. А.А. КОЗЛОВ*  
(Полоцкий государственный университет)

*На основании подхода, аналогичного предложенному Х. Мортазаилом и М. Джафари, нами введено понятие полуоктав и операций над ними, установлены свойства этих операций. Полученные в данной работе результаты будут в дальнейшем использованы при решении линейных уравнений над полуоктавами, а также для установления формул Эйлера и Муавра для полуоктав.*

**Ключевые слова:** полуоктавы, гиперкомплексные числа.

**Введение.** В настоящее время теория гиперкомплексных чисел представляет собой достаточно сильный математический аппарат для описания различных фундаментальных процессов и явлений, изучаемых в рамках специальной теории относительности. Так, например, дуальные числа позволяют достаточно точно математически смоделировать физическое пространства-время, кватернионы используются в электродинамике, при исследовании вихревых движений, октавы также представляют собой математическую модель возможного описания нашей действительности. В связи с чем интерес к гиперкомплексным числам, как со стороны математиков, так и со стороны физиков-теоретиков, только усиливается с каждым годом, порождая все новые и новые открытия в этой области математических знаний.

Самá теория гиперкомплексных чисел появилась как обобщение теории действительных чисел. Первым таким обобщением стало *множество комплексных чисел*, т.е. чисел вида  $z = a + bi$ , где  $a, b$  – действительные числа, а  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица. Необходимость введения этой числовой совокупности была обусловлена тем, что во множестве действительных чисел не каждое алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами имело решение. Во введенном же множестве комплексных чисел, как выяснилось, всякое алгебраическое уравнение  $n$ -й степени с комплексными коэффициентами обладает ровно  $n$  корнями с учетом их кратностей. Это так называемая основная теорема алгебры [1]. Другим распространением понятия «действительное число» [2, с. 20–23] стало введение *множества дуальных чисел*, т.е. чисел вида  $a + bi$ , в котором  $a, b$  – действительные числа, а мнимая единица удовлетворяет соотношениям  $i^2 = 0$  и  $i \notin \mathbb{R}$  (здесь и далее  $\mathbb{R}$  обозначает совокупность действительных чисел). Такое множество, как недавно выяснилось, позволяет достаточно точно математически смоделировать физическое пространство-время [3].

Дальнейшее распространение теории комплексных чисел нашло свое отражение во введенном В. Гамильтоном в 1843 г. понятии «кватернион» [2, с. 28].

$$q = a + bi + cj + dk,$$

где  $a, b, c, d$  – действительные числа, а  $i, j, k \notin \mathbb{R}$  – базисные (кватернионные) единицы, для которых выполняются соотношения:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad ik = -j, \quad kj = -i, \quad ji = -k.$$

Такие числа, а также последующие их обобщения и стали в дальнейшем носить название «*гиперкомплексные числа*». Позднее оказалось, что кватернионы являются не просто отдельным теоретическим объектом математики, но хорошим алгебраическим средством для описания вращений в трех- и четырехмерном векторном пространстве [4], которые, в свою очередь, широко используются в электродинамике, квантовой и теоретической физиках [5, 6].

Следующим шагом по обобщению совокупности чисел явилось введение *множества октав* [2, с. 29], т.е. чисел вида

$$x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k + x_4l + x_5il + x_6jl + x_7kl$$

с действительными коэффициентами  $x_i$  и мнимыми (базисными) единицами  $i, j, k, l, il, jl, kl$ , для которых имеет место таблица умножения (табл. 1) [2, с. 29].

Такое множество впервые было рассмотрено в 1843 г. Дж. Грейвсом, а двумя годами позже независимо от него – А. Кэли. Поскольку введенная числовая совокупность была основательно изучена

А. Кэли, множество октав стало еще называться и *алгеброй Кэли*. В последнее время октавы (как и кватернионы) широко используются в теоретической и квантовой физиках, например, при решении задач электродинамики (уравнения Максвелла), в специальной теории относительности, а также в теории струн [6, 7].

Таблица 1. – Таблица умножения действительной и базисных единиц октавы

	<b>1</b>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>il</i>	<i>jl</i>	<i>kl</i>
<b>1</b>	1	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>il</i>	<i>jl</i>	<i>kl</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	-1	<i>k</i>	- <i>j</i>	<i>il</i>	- <i>l</i>	- <i>kl</i>	<i>jl</i>
<i>j</i>	<i>j</i>	- <i>k</i>	-1	<i>i</i>	<i>jl</i>	<i>kl</i>	- <i>l</i>	- <i>il</i>
<i>k</i>	<i>k</i>	<i>j</i>	- <i>i</i>	-1	<i>kl</i>	- <i>jl</i>	<i>il</i>	- <i>l</i>
<i>l</i>	<i>l</i>	- <i>il</i>	- <i>jl</i>	- <i>kl</i>	-1	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>
<i>il</i>	<i>il</i>	<i>l</i>	- <i>kl</i>	<i>jl</i>	- <i>i</i>	-1	- <i>k</i>	<i>j</i>
<i>jl</i>	<i>jl</i>	<i>kl</i>	<i>l</i>	- <i>il</i>	- <i>j</i>	<i>k</i>	-1	- <i>i</i>
<i>kl</i>	<i>kl</i>	- <i>jl</i>	<i>il</i>	<i>l</i>	- <i>k</i>	- <i>j</i>	<i>i</i>	-1

Иное обобщение множества комплексных чисел было предложено в 2013 г. иранскими математиками Х. Мортазашлом и М. Джафари – в статье [8] введено понятие полукватерниона как обобщения комплексных чисел, основанного на своего рода синтезе дуальных и комплексных чисел. Данными учеными были также определены арифметические операции над полукватернионами и изучены свойства этих операций, получены решения некоторых классов уравнений над полукватернионами. Кроме того, ими было предложено обобщение на полукватернионы формул Эйлера и Муавра, установленных изначально для комплексных чисел.

**Определение 1** [8]. *Действительным полукватернионом* (или просто *полукватернионом*) назовем формальное выражение

$$q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k,$$

где  $a_0, a_1, a_2, a_3$  – действительные числа, а  $i, j, k \notin \mathbb{R}$  – кватернионные (базисные) единицы, для которых выполняются соотношения:

$$i^2 = -1, \quad j^2 = k^2 = 0, \quad ij = k, \quad ji = -k, \quad ik = -j, \quad ki = j, \quad jk = 0, \quad kj = 0.$$

В этой статье были введены арифметические операции над полукватернионами и изучены свойства этих операций, получены решения некоторых классов уравнений над полукватернионами. Кроме того, здесь же было дано обобщение на полукватернионы формул Эйлера и Муавра, изначально, как известно [9, с. 123], открытых для комплексных чисел.

**Основная часть.** В настоящей работе на основании подхода, аналогичного созданному Х. Мортазашлом и М. Джафари, введено понятие *полуоктав* и операций над ними, установлены свойства этих операций, необходимые в дальнейшем для решения линейных уравнений над полуоктавами, а также для установления формул Эйлера и Муавра для полуоктав.

**Определение 2.** *Действительной полуоктавой* (или просто *полуоктавой*) назовем формальное выражение вида

$$w = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7,$$

где  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$  – действительные числа;

$i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7$  – базисные (мнимые) единицы, удовлетворяющие следующим равенствам:

$$i_k^2 = -1 \text{ при } k = 1, 3 \quad \text{и} \quad i_k^2 = 0 \text{ при } k = 4, 7,$$

$$i_k \cdot i_l = i_{k+l} = -i_l \cdot i_k \text{ при } k < l \text{ и } k+l \leq 4,$$

$$i_k \cdot i_l = 0 \text{ при } k+l > 4.$$

Далее множество полуоктав будем обозначать через  $W$ . Введем на этом множестве операции суммы и произведения полуоктав, а также произведение действительного числа на полуоктаву.

**Определение 3.** Суммой полуоктав

$w_1 = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7 \in W$  и  $w_2 = b_0 + b_1i_1 + b_2i_2 + b_3i_3 + b_4i_4 + b_5i_5 + b_6i_6 + b_7i_7 \in W$  назовем полуоктаву  $w_1 + w_2 \in W$ , определяемую следующим равенством:

$$w_1 + w_2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i_1 + (a_2 + b_2)i_2 + (a_3 + b_3)i_3 + (a_4 + b_4)i_4 + (a_5 + b_5)i_5 + (a_6 + b_6)i_6 + (a_7 + b_7)i_7.$$

**Пример 1.** Пусть даны полуоктавы

$$w_1 = -1 + 2i_1 + 3i_2 - 7i_3 + i_4 - 4i_6 + 8i_7 \text{ и } w_2 = 3 + i_1 + 4i_2 - i_3 + 5i_4 - 2i_5 + 4i_6.$$

Тогда их суммой является полуоктава вида

$$w_1 + w_2 = 2 + 3i_1 + 7i_2 - 8i_3 + 6i_4 - 2i_5 + 8i_7.$$

Следующая теорема устанавливает свойства операции суммы полуоктав.

**Теорема 1.** Сумма полуоктав обладает свойствами ассоциативности и коммутативности.

Доказательство. Пусть даны полуоктавы:

$$w_1 = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7,$$

$$w_2 = b_0 + b_1i_1 + b_2i_2 + b_3i_3 + b_4i_4 + b_5i_5 + b_6i_6 + b_7i_7,$$

$$w_3 = c_0 + c_1i_1 + c_2i_2 + c_3i_3 + c_4i_4 + c_5i_5 + c_6i_6 + c_7i_7,$$

где  $a_k, b_k, c_k \in R, k = \overline{1,7}$ . Тогда, пользуясь определением суммы полуоктав, а также свойствами ассоциативности и коммутативности операции сложения действительных чисел, получим равенства

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i_1 + (a_2 + b_2)i_2 + (a_3 + b_3)i_3 + \\ &+ (a_4 + b_4)i_4 + (a_5 + b_5)i_5 + (a_6 + b_6)i_6 + (a_7 + b_7)i_7 = \\ &= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)i_1 + (b_2 + a_2)i_2 + (b_3 + a_3)i_3 + \\ &+ (b_4 + a_4)i_4 + (b_5 + a_5)i_5 + (b_6 + a_6)i_6 + (b_7 + a_7)i_7 = w_2 + w_1, \\ (w_1 + w_2) + w_3 &= ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i_1 + (a_2 + b_2)i_2 + (a_3 + b_3)i_3 + \\ &+ (a_4 + b_4)i_4 + (a_5 + b_5)i_5 + (a_6 + b_6)i_6 + (a_7 + b_7)i_7) + \\ &+ c_0 + c_1i_1 + c_2i_2 + c_3i_3 + c_4i_4 + c_5i_5 + c_6i_6 + c_7i_7 = \\ &= ((a_0 + b_0) + c_0) + ((a_1 + b_1) + c_1)i_1 + ((a_2 + b_2) + c_2)i_2 + ((a_3 + b_3) + c_3)i_3 + \\ &+ ((a_4 + b_4) + c_4)i_4 + ((a_5 + b_5) + c_5)i_5 + ((a_6 + b_6) + c_6)i_6 + ((a_7 + b_7) + c_7)i_7 = \\ &= (a_0 + (b_0 + c_0)) + (a_1 + (b_1 + c_1))i_1 + (a_2 + (b_2 + c_2))i_2 + (a_3 + (b_3 + c_3))i_3 + \\ &+ (a_4 + (b_4 + c_4))i_4 + (a_5 + (b_5 + c_5))i_5 + (a_6 + (b_6 + c_6))i_6 + (a_7 + (b_7 + c_7))i_7 = \\ &= (a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7) + \\ &+ ((b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)i_1 + (b_2 + c_2)i_2 + (b_3 + c_3)i_3 + \\ &+ (b_4 + c_4)i_4 + (b_5 + c_5)i_5 + (b_6 + c_6)i_6 + (b_7 + c_7)i_7) = w_1 + (w_2 + w_3). \end{aligned}$$

**Теорема 1** доказана.

Следующей операцией, которую определим на множестве полуоктав, будет произведение действительного числа на полуоктаву.

**Определение 4.** Пусть  $c \in R$  и  $w = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7 \in W$ . Произведением действительного числа  $c \in R$  на полуоктаву  $w \in W$  назовем полуоктаву

$$cw = (ca_0) + (ca_1)i_1 + (ca_2)i_2 + (ca_3)i_3 + (ca_4)i_4 + (ca_5)i_5 + (ca_6)i_6 + (ca_7)i_7 \in W.$$

Свойства, введенной операции, устанавливает следующая теорема.

**Теорема 2.** Операция произведения действительного числа на полуоктаву обладает следующими свойствами:

- 1)  $(c_1 + c_2)w = c_1w + c_2w$  при всяких  $c_1, c_2 \in R$  и  $w \in W$ ;
- 2)  $(c_1c_2)w_1 = c_1(c_2w_1)$  при всяких  $c_1, c_2 \in R$  и  $w_1 \in W$ ;
- 3)  $c(w_1 + w_2) = cw_1 + cw_2$  для произвольных  $c \in R$  и  $w_1, w_2 \in W$ ;

Доказательство. Возьмем произвольные числа  $c_1, c_2, c \in R$  и полуоктавы:

$$w_1 = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7, \quad w_2 = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 + b_4 i_4 + b_5 i_5 + b_6 i_6 + b_7 i_7.$$

Тогда на основании определений произведения действительного числа на полуоктаву и суммы полуоктав, а также свойств коммутативности суммы и произведения и дистрибутивности произведения относительно суммы действительных чисел имеем равенства:

$$\begin{aligned} 1) (c_1 + c_2)w &= ((c_1 + c_2)a_0) + ((c_1 + c_2)a_1)i_1 + ((c_1 + c_2)a_2)i_2 + ((c_1 + c_2)a_3)i_3 + \\ &+ ((c_1 + c_2)a_4)i_4 + ((c_1 + c_2)a_5)i_5 + ((c_1 + c_2)a_6)i_6 + ((c_1 + c_2)a_7)i_7 = \\ &= (c_1 a_0 + c_2 a_0) + (c_1 a_1 + c_2 a_1)i_1 + (c_1 a_2 + c_2 a_2)i_2 + (c_1 a_3 + c_2 a_3)i_3 + \\ &+ (c_1 a_4 + c_2 a_4)i_4 + (c_1 a_5 + c_2 a_5)i_5 + (c_1 a_6 + c_2 a_6)i_6 + (c_1 a_7 + c_2 a_7)i_7 = \\ &= (c_2 a_0 + c_1 a_0) + (c_2 a_1 + c_1 a_1)i_1 + (c_2 a_2 + c_1 a_2)i_2 + (c_2 a_3 + c_1 a_3)i_3 + \\ &+ (c_2 a_4 + c_1 a_4)i_4 + (c_2 a_5 + c_1 a_5)i_5 + (c_2 a_6 + c_1 a_6)i_6 + (c_2 a_7 + c_1 a_7)i_7 = \\ &= ((c_2 + c_1)a_0) + ((c_2 + c_1)a_1)i_1 + ((c_2 + c_1)a_2)i_2 + ((c_2 + c_1)a_3)i_3 + \\ &+ ((c_2 + c_1)a_4)i_4 + ((c_2 + c_1)a_5)i_5 + ((c_2 + c_1)a_6)i_6 + ((c_2 + c_1)a_7)i_7 = (c_2 + c_1)w, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) (c_1 c_2)w &= ((c_1 c_2)a_0) + ((c_1 c_2)a_1)i_1 + ((c_1 c_2)a_2)i_2 + ((c_1 c_2)a_3)i_3 + \\ &+ ((c_1 c_2)a_4)i_4 + ((c_1 c_2)a_5)i_5 + ((c_1 c_2)a_6)i_6 + ((c_1 c_2)a_7)i_7 = \\ &= (c_1(c_2 a_0)) + (c_1(c_2 a_1))i_1 + (c_1(c_2 a_2))i_2 + (c_1(c_2 a_3))i_3 + \\ &+ (c_1(c_2 a_4))i_4 + (c_1(c_2 a_5))i_5 + (c_1(c_2 a_6))i_6 + (c_1(c_2 a_7))i_7 = c_1(c_2 w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) c(w_1 + w_2) &= (c(a_0 + b_0)) + (c(a_1 + b_1))i_1 + (c(a_2 + b_2))i_2 + (c(a_3 + b_3))i_3 + \\ &+ (c(a_4 + b_4))i_4 + (c(a_5 + b_5))i_5 + (c(a_6 + b_6))i_6 + (c(a_7 + b_7))i_7 = \\ c(w_1 + w_2) &= (ca_0 + cb_0) + (ca_1 + cb_1)i_1 + (ca_2 + cb_2)i_2 + (ca_3 + cb_3)i_3 + \\ &+ (ca_4 + cb_4)i_4 + (ca_5 + cb_5)i_5 + (ca_6 + cb_6)i_6 + (ca_7 + cb_7)i_7 = \\ &((ca_0) + (ca_1)i_1 + (ca_2)i_2 + (ca_3)i_3 + (ca_4)i_4 + (ca_5)i_5 + (ca_6)i_6 + (ca_7)i_7) + \\ &((cb_0) + (cb_1)i_1 + (cb_2)i_2 + (cb_3)i_3 + (cb_4)i_4 + (cb_5)i_5 + (cb_6)i_6 + (cb_7)i_7) = cw_1 + cw_2, \end{aligned}$$

устанавливающие справедливость формул 1)–3). **Теорема 2** доказана.

**Пример 2.** Пусть дана полуоктава  $w = -1 + 2i_1 + 3i_2 - 7i_3 + i_4 - 4i_6 + 8i_7$ . Тогда

$$3w = -3 + 6i_1 + 9i_2 - 21i_3 + 3i_4 - 12i_6 + 24i_7.$$

Прежде чем ввести следующую операцию – произведение полуоктав, пользуясь определением 2, построим таблицу умножения для действительной и мнимых единиц полуоктавы.

Таблица 2. – Таблица умножения действительной и базисных единиц полуоктавы

	<b>1</b>	$i_1$	$i_2$	$i_3$	$i_4$	$i_5$	$i_6$	$i_7$
<b>1</b>	1	$i_1$	$i_2$	$i_3$	$i_4$	$i_5$	$i_6$	$i_7$
$i_1$	$i_1$	-1	$i_3$	$i_4$	0	0	0	0
$i_2$	$i_2$	$-i_3$	-1	0	0	0	0	0
$i_3$	$i_3$	$-i_4$	0	-1	0	0	0	0
$i_4$	$i_4$	0	0	0	0	0	0	0
$i_5$	$i_5$	0	0	0	0	0	0	0
$i_6$	$i_6$	0	0	0	0	0	0	0
$i_7$	$i_7$	0	0	0	0	0	0	0

Теперь, исходя из свойств суммы и произведения действительных чисел, на основании таблицы 2 определим операцию произведения полуоктав.

**Определение 5.** Произведением полуоктавы  $w_1 = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7$  на полуоктаву  $w_2 = b_0 + b_1i_1 + b_2i_2 + b_3i_3 + b_4i_4 + b_5i_5 + b_6i_6 + b_7i_7$  назовем полуоктаву  $w_1w_2 \in W$ , определяемую следующим равенством:

$$w_1w_2 = (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_1b_0 + a_0b_1)i_1 + \\ + (a_2b_0 + a_0b_2)i_2 + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)i_3 + \\ + (a_0b_4 + a_4b_0 + a_1b_3 - a_3b_1)i_4 + (a_5b_0 + a_0b_5)i_5 + (a_6b_0 + a_0b_6)i_6 + (a_7b_0 + a_0b_7)i_7.$$

Произвольное действительное число  $c$  является элементом множества полуоктав, поскольку оно представимо в виде  $c = c + 0i_1 + 0i_2 + 0i_3 + 0i_4 + 0i_5 + 0i_6 + 0i_7$ . Поэтому в случае корректного введения операции умножения полуоктав должно выполняться равенство

$$cw = (c + 0i_1 + 0i_2 + 0i_3 + 0i_4 + 0i_5 + 0i_6 + 0i_7)(a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7).$$

Покажем, что это действительно так. На основании определений 5 и 4 с учетом свойств действительных чисел имеем равенства

$$(c + 0i_1 + 0i_2 + 0i_3 + 0i_4 + 0i_5 + 0i_6 + 0i_7)(a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7) = \\ = (ca_0 - 0a_1 - 0a_2 - 0a_3) + (0a_0 + ca_1)i_1 + (0a_0 + ca_2)i_2 + (ca_3 + 0a_0 + 0a_2 - 0a_1)i_3 + \\ + (ca_4 + 0a_0 + 0a_3 - 0a_1)i_4 + (0a_0 + ca_5)i_5 + (0a_0 + ca_6)i_6 + (0a_0 + ca_7)i_7 = \\ = (ca_0) + (ca_1)i_1 + (ca_2)i_2 + (ca_3)i_3 + (ca_4)i_4 + (ca_5)i_5 + (ca_6)i_6 + (ca_7)i_7 = cw.$$

устанавливающие согласованность определения 5 произведения полуоктав и определения 4 умножения действительного числа на полуоктаву.

**Пример 3.** Пусть даны полуоктавы

$$w_1 = -1 + 2i_1 + 3i_2 - 7i_3 + i_4 - 4i_6 + 8i_7 \text{ и } w_2 = 3 + i_1 + 4i_2 - i_3 + 5i_4 - 2i_5 + 4i_6.$$

Тогда произведением полуоктав  $w_1$  на  $w_2$  будет являться полуоктава

$$w_1w_2 = -24 + 5i_1 + 5i_2 - 17i_3 + 3i_4 + 2i_5 - 16i_6 + 24i_7.$$

Любую полуоктаву можно представить в векторной форме, т.е. в виде вектора с действительными коэффициентами следующим образом:

$$w = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7 = \\ = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)^T,$$

где  $^T$  обозначает операцию транспонирования вектора.

Тогда, пользуясь определением произведения матриц, умножение полуоктавы

$$w_1 = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7$$

на полуоктаву

$$w_2 = b_0 + b_1i_1 + b_2i_2 + b_3i_3 + b_4i_4 + b_5i_5 + b_6i_6 + b_7i_7$$

можно представить в матрично-векторной форме, т.е. в виде произведения некоторой вполне определенной матрицы, элементы которой суть коэффициенты при действительной и мнимых единицах первого сомножителя и нули, на вектор, представляющий второй сомножитель-полуоктаву:

$$w_1w_2 = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & -a_3 & 0 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 \\ a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{pmatrix}.$$

**Теорема 3.** Операция произведения полуоктавов обладает следующими свойствами:

- 1)  $w_1 w_2 \neq w_2 w_1$  при всяких  $w_1, w_2 \in W$ ,  $w_1, w_2 \notin \mathbb{R}$ ,
- 2)  $w_1 (w_2 w_3) \neq (w_1 w_2) w_3$  при всяких  $w_1, w_2, w_3 \in W$ ,  $w_1, w_2, w_3 \notin \mathbb{R}$ ,
- 3)  $w_1 (w_2 + w_3) = w_1 w_2 + w_1 w_3$  при всяких  $w_1, w_2, w_3 \in W$ ,  $w_1, w_2, w_3 \notin \mathbb{R}$ ,
- 4)  $(w_2 + w_3) w_1 = w_2 w_1 + w_3 w_1$  при всяких  $w_1, w_2, w_3 \in W$ ,  $w_1, w_2, w_3 \notin \mathbb{R}$ ,
- 5)  $c w = w c$  для произвольных  $c \in R$  и  $w \in W$ ;
- 6)  $c (w_1 w_2) = (c w_1) w_2 = w_1 (c w_2) = (w_1 w_2) c$  при всяких  $c \in R$  и  $w_1, w_2 \in W$ .

Доказательство. Для доказательства формул 1)–3) воспользуемся векторно-матричным представлением произведения полуоктавов. Пусть даны полуоктавы:

$$w_1 = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7, \quad w_2 = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 + b_4 i_4 + b_5 i_5 + b_6 i_6 + b_7 i_7,$$

$$w_3 = c_0 + c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_3 + c_4 i_4 + c_5 i_5 + c_6 i_6 + c_7 i_7,$$

где  $a_k, b_k, c_k \in R$ ,  $k = \overline{1, 7}$ .

Тогда, исходя из векторно-матричного представления произведения полуоктавов, имеем равенства:

$$w_1 w_2 = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & -a_3 & 0 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 \\ a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 \\ a_2 b_0 + a_0 b_2 \\ a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_0 b_4 + b_0 a_4 + a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ a_5 b_0 + a_0 b_5 \\ a_6 b_0 + a_0 b_6 \\ a_7 b_0 + a_0 b_7 \end{pmatrix}$$

и

$$w_2 w_1 = \begin{bmatrix} b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & -b_3 & 0 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 \\ b_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 a_0 - b_1 a_1 - b_2 a_2 - b_3 a_3 \\ b_1 a_0 + b_0 a_1 \\ b_2 a_0 + b_0 a_2 \\ b_0 a_3 + b_3 a_0 + b_1 a_2 - b_2 a_1 \\ b_0 a_4 + a_0 b_4 + b_1 a_3 - b_3 a_1 \\ b_5 a_0 + b_0 a_5 \\ b_6 a_0 + b_0 a_6 \\ b_7 a_0 + b_0 a_7 \end{pmatrix}.$$

Поскольку четвертый и пятый элементы в векторах, стоящих в правой части последних двух равенств не совпадают, то неравенство 1) **теоремы 2** доказано.

Для установления формулы 2) воспользуемся предпоследним равенством. Обозначим

$$\alpha = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3,$$

$$\beta = a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

$$\gamma = a_0 b_4 + b_0 a_4 + a_1 b_3 - a_3 b_1.$$

Тогда на основании векторного представления полуоктавов и векторно-матричного представления произведения полуоктавов имеем равенства

$$(w_1 w_2) w_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 \\ a_2 b_0 + a_0 b_2 \\ \beta \\ \gamma \\ a_5 b_0 + a_0 b_5 \\ a_6 b_0 + a_0 b_6 \\ a_7 b_0 + a_0 b_7 \end{pmatrix} w_3 =$$



$$= \begin{bmatrix} \alpha & -(a_1b_0 + a_0b_1) & -(a_2b_0 + a_0b_2) & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1b_0 + a_0b_1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2b_0 + a_0b_2 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & -(a_2b_0 + a_0b_2) & a_1b_0 + a_0b_1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & -\beta & 0 & a_1b_0 + a_0b_1 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ a_5b_0 + a_0b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ a_6b_0 + a_0b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ a_7b_0 + a_0b_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha c_0 - (a_1b_0 + a_0b_1)c_1 - (a_2b_0 + a_0b_2)c_2 - \beta c_3 \\ (a_1b_0 + a_0b_1)c_0 + \alpha c_1 \\ (a_2b_0 + a_0b_2)c_0 + \alpha c_2 \\ \alpha c_3 + \beta c_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)c_2 - (a_2b_0 + a_0b_2)c_1 \\ \alpha c_4 + c_0\gamma + (a_1b_0 + a_0b_1)c_3 - \beta c_1 \\ (a_5b_0 + a_0b_5)c_0 + \alpha c_5 \\ (a_6b_0 + a_0b_6)c_0 + \alpha c_6 \\ (a_7b_0 + a_0b_7)c_0 + \alpha c_7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)c_0 - (a_1b_0 + a_0b_1)c_1 - (a_2b_0 + a_0b_2)c_2 - (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)c_3 \\ (a_1b_0 + a_0b_1)c_0 + (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)c_1 \\ (a_2b_0 + a_0b_2)c_0 + (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)c_2 \\ (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)c_3 + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)c_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)c_2 - (a_2b_0 + a_0b_2)c_1 \\ (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)c_4 + c_0(a_0b_4 + b_0a_4 + a_1b_3 - a_3b_1) + (a_1b_0 + a_0b_1)c_3 - (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)c_1 \\ (a_5b_0 + a_0b_5)c_0 + (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)c_5 \\ (a_6b_0 + a_0b_6)c_0 + (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)c_6 \\ (a_7b_0 + a_0b_7)c_0 + (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)c_7 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом,

$$w_1(w_2w_3) = w_1 \begin{bmatrix} b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & -b_3 & 0 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 \\ b_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3 \\ b_1c_0 + b_0c_1 \\ b_2c_0 + b_0c_2 \\ b_3c_0 + b_0c_3 + b_1c_2 - b_2c_1 \\ b_4c_0 + b_0c_4 + b_1c_3 - b_3c_1 \\ b_5c_0 + b_0c_5 \\ b_6c_0 + b_0c_6 \\ b_7c_0 + b_0c_7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & -a_3 & 0 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 \\ a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3 \\ b_1c_0 + b_0c_1 \\ b_2c_0 + b_0c_2 \\ b_3c_0 + b_0c_3 + b_1c_2 - b_2c_1 \\ b_4c_0 + b_0c_4 + b_1c_3 - b_3c_1 \\ b_5c_0 + b_0c_5 \\ b_6c_0 + b_0c_6 \\ b_7c_0 + b_0c_7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_0(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3) - a_1(b_1c_0 + b_0c_1) - a_2(b_2c_0 + b_0c_2) - a_3(b_3c_0 + b_0c_3 + b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3) + a_0(b_1c_0 + b_0c_1) \\ a_2(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3) + a_0(b_2c_0 + b_0c_2) \\ a_3(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3) - a_2(b_1c_0 + b_0c_1) + a_1(b_2c_0 + b_0c_2) + a_0(b_3c_0 + b_0c_3 + b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_4(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3) - a_3(b_1c_0 + b_0c_1) + a_1(b_3c_0 + b_0c_3 + b_1c_2 - b_2c_1) + a_0(b_4c_0 + b_0c_4 + b_1c_3 - b_3c_1) \\ a_5(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3) + a_0(b_5c_0 + b_0c_5) \\ a_6(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3) + a_0(b_6c_0 + b_0c_6) \\ a_7(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3) + a_0(b_7c_0 + b_0c_7) \end{pmatrix}.$$

Сравнивая правые части произведений  $(w_1w_2)w_3$  и  $w_1(w_2w_3)$ , убеждаемся, что первые элементы вектора (коэффициенты, стоящие при действительной единице) не совпадают (у одной из полуоктав отсутствует слагаемое  $-a_3b_1c_2$ ), что означает выполнение неравенства 2).

Покажем теперь справедливость формулы 3). Используя определение и свойства операций сложения и произведения полуоктав, получим равенства

$$w_1(w_2 + w_3) = w_1((b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)i_1 + (b_2 + c_2)i_2 + (b_3 + c_3)i_3 +$$

$$+ (b_4 + c_4)i_4 + (b_5 + c_5)i_5 + (b_6 + c_6)i_6 + (b_7 + c_7)i_7) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & -a_3 & 0 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 \\ a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 + c_0 \\ b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \\ b_4 + c_4 \\ b_5 + c_5 \\ b_6 + c_6 \\ b_7 + c_7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_0(b_0 + c_0) - a_1(b_1 + c_1) - a_2(b_2 + c_2) - a_3(b_3 + c_3) \\ a_1(b_0 + c_0) + a_0(b_1 + c_1) \\ a_2(b_0 + c_0) + a_0(b_2 + c_2) \\ a_0(b_3 + c_3) + a_3(b_0 + c_0) + a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1) \\ a_0(b_4 + c_4) + (b_0 + c_0)a_4 + a_1(b_3 + c_3) - a_3(b_1 + c_1) \\ a_5(b_0 + c_0) + a_0(b_5 + c_5) \\ a_6(b_0 + c_0) + a_0(b_6 + c_6) \\ a_7(b_0 + c_0) + a_0(b_7 + c_7) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 \\ a_1b_0 + a_0b_1 \\ a_2b_0 + a_0b_2 \\ a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1 \\ a_0b_4 + b_0a_4 + a_1b_3 - a_3b_1 \\ a_5b_0 + a_0b_5 \\ a_6b_0 + a_0b_6 \\ a_7b_0 + a_0b_7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0c_0 - a_1c_1 - a_2c_2 - a_3c_3 \\ a_1c_0 + a_0c_1 \\ a_2c_0 + a_0c_2 \\ a_0c_3 + a_3c_0 + a_1c_2 - a_2c_1 \\ a_0c_4 + c_0a_4 + a_1c_3 - a_3c_1 \\ a_5c_0 + a_0c_5 \\ a_6c_0 + a_0c_6 \\ a_7c_0 + a_0c_7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & -a_3 & 0 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & -a_3 & 0 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 \\ a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{pmatrix} = w_1 w_2 + w_1 w_2,$$

устанавливающие справедливость формулы 3).

Перейдем теперь к доказательству формулы 4). На основании определений операции суммы и произведения полуоктав, а также свойств операций сложения и умножения действительных чисел имеем равенства

$$(w_2 + w_3)w_1 = ((b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)i_1 + (b_2 + c_2)i_2 + (b_3 + c_3)i_3 + (b_4 + c_4)i_4 + (b_5 + c_5)i_5 + (b_6 + c_6)i_6 + (b_7 + c_7)i_7)w_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} b_0 + c_0 & -(b_1 + c_1) & -(b_2 + c_2) & -(b_3 + c_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 + c_1 & b_0 + c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 + c_2 & 0 & b_0 + c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 + c_3 & -(b_2 + c_2) & b_1 + c_1 & b_0 + c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 + c_4 & -(b_3 + c_3) & 0 & b_1 + c_1 & b_0 + c_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_5 + c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 + c_0 & 0 & 0 \\ b_6 + c_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 + c_0 & 0 \\ b_7 + c_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 + c_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_0(b_0 + c_0) - a_1(b_1 + c_1) - a_2(b_2 + c_2) - a_3(b_2 + c_2) \\ a_0(b_1 + c_1) + a_1(b_0 + c_0) \\ a_0(b_2 + c_2) + a_2(b_0 + c_0) \\ a_0(b_3 + c_3) - a_1(b_2 + c_2) + a_2(b_1 + c_1) + a_3(b_0 + c_0) \\ a_0(b_4 + c_4) - a_1(b_3 + c_3) + a_3(b_1 + c_1) + a_4(b_0 + c_0) \\ a_0(b_5 + c_5) + a_5(b_0 + c_0) \\ a_0(b_6 + c_6) + a_6(b_0 + c_0) \\ a_0(b_7 + c_7) + a_7(b_0 + c_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_2 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ a_0 b_2 + a_2 b_0 \\ a_0 b_3 - a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 \\ a_0 b_4 - a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_4 b_0 \\ a_0 b_5 + a_5 b_0 \\ a_0 b_6 + a_6 b_0 \\ a_0 b_7 + a_7 b_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 c_0 - a_1 c_1 - a_2 c_2 - a_3 c_2 \\ a_0 c_1 + a_1 c_0 \\ a_0 c_2 + a_2 c_0 \\ a_0 c_3 - a_1 c_2 + a_2 c_1 + a_3 c_0 \\ a_0 c_4 - a_1 c_3 + a_3 c_1 + a_4 c_0 \\ a_0 c_5 + a_5 c_0 \\ a_0 c_6 + a_6 c_0 \\ a_0 c_7 + a_7 c_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & -b_3 & 0 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 \\ b_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c_0 & -c_1 & -c_2 & -c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & -c_2 & c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_4 & -c_3 & 0 & c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 \\ c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & 0 & 0 \\ c_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & 0 \\ c_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix} = w_2 w_1 + w_3 w_1.$$

Докажем теперь формулу 5). Поскольку для произвольного числа  $c \in R$  выполняется равенство  $c = c + 0i_1 + 0i_2 + 0i_3 + 0i_4 + 0i_5 + 0i_6 + 0i_7$ , то, пользуясь определением произведения полуоктавов, свойством коммутативности произведения действительных чисел, а также определением произведения числа на полуоктаву, для всякого  $w \in W$  получим соотношения

$$\begin{aligned} wc &= (a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7)(c + 0i_1 + 0i_2 + 0i_3 + 0i_4 + 0i_5 + 0i_6 + 0i_7) = \\ &= (a_0 \cdot c - a_1 \cdot 0 - a_2 \cdot 0 - a_3 \cdot 0) + (a_1 \cdot c + a_0 \cdot 0)i_1 + (a_2 \cdot c + a_0 \cdot 0)i_2 + (a_0 \cdot 0 + a_3 \cdot c + a_1 \cdot 0 - a_2 \cdot 0)i_3 + \\ &+ (a_0 \cdot 0 + a_4 \cdot c + a_1 \cdot 0 - a_3 \cdot 0)i_4 + (a_5 \cdot c + a_0 \cdot 0)i_5 + (a_6 \cdot c + a_0 \cdot 0)i_6 + (a_7 \cdot c + a_0 \cdot 0)i_7 = \\ &= a_0c + (a_1c)i_1 + (a_2c)i_2 + (a_3c)i_3 + (a_4c)i_4 + (a_5c)i_5 + (a_6c)i_6 + (a_7c)i_7 = \\ &= ca_0 + (ca_1)i_1 + (ca_2)i_2 + (ca_3)i_3 + (ca_4)i_4 + (ca_5)i_5 + (ca_6)i_6 + (ca_7)i_7 = cw. \end{aligned}$$

Установим формулу 6). Из определения операций умножения действительного числа на полуоктаву и произведения полуоктавов, а также свойств операций сложения и умножения действительных чисел вытекают равенства

$$\begin{aligned} c(w_1w_2) &= c((a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_1b_0 + a_0b_1)i_1 + \\ &+ (a_2b_0 + a_0b_2)i_2 + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)i_3 + (a_0b_4 + b_0a_4 + a_1b_3 - a_3b_1)i_4 + \\ &+ (a_5b_0 + a_0b_5)i_5 + (a_6b_0 + a_0b_6)i_6 + (a_7b_0 + a_0b_7)i_7) = \\ &= (c(a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)) + (c(a_1b_0 + a_0b_1))i_1 + (c(a_2b_0 + a_0b_2))i_2 + \\ &+ (c(a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1))i_3 + (c(a_0b_4 + b_0a_4 + a_1b_3 - a_3b_1))i_4 + \\ &+ (c(a_5b_0 + a_0b_5))i_5 + (c(a_6b_0 + a_0b_6))i_6 + (c(a_7b_0 + a_0b_7))i_7. \end{aligned}$$

В силу последнего соотношения, а также свойств операций сложения и умножения действительных чисел и определения произведения полуоктавов для полуоктавы  $c(w_1w_2)$  выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} c(w_1w_2) &= ((ca_0)b_0 - (ca_1)b_1 - (ca_2)b_2 - (ca_3)b_3) + ((ca_1)b_0 + (ca_0)b_1)i_1 + ((ca_2)b_0 + (ca_0)b_2)i_2 + \\ &+ ((ca_0)b_3 + (ca_3)b_0 + (ca_1)b_2 - (ca_2)b_1)i_3 + ((ca_0)b_4 + (ca_4)b_0 + (ca_1)b_3 - (ca_3)b_1)i_4 + \\ &+ ((ca_5)b_0 + (ca_0)b_5)i_5 + ((ca_6)b_0 + (ca_0)b_6)i_6 + ((ca_7)b_0 + (ca_0)b_7)i_7 = (cw_1)w_2, \\ c(w_1w_2) &= (a_0(cb_0) - a_1(cb_1) - a_2(cb_2) - a_3(cb_3)) + (a_1(cb_0) + a_0(cb_1))i_1 + (a_2(cb_0) + a_0(cb_2))i_2 + \\ &+ (a_0(cb_3) + a_3(cb_0) + a_1(cb_2) - a_2(cb_1))i_3 + (a_0(cb_4) + a_4(cb_0) + a_1(cb_3 - a_3(cb_1)))i_4 + \\ &+ (a_5(cb_0) + a_0(cb_5))i_5 + (a_6(cb_0) + a_0(cb_6))i_6 + (a_7(cb_0) + a_0(cb_7))i_7 = w_1(cw_2). \end{aligned}$$

Последнее равенство в формуле 6) **теоремы 3** непосредственно следует из формулы 5) этой теоремы. **Теорема 3** доказана.

Таким образом, из теорем 1–3 следует

**Теорема 4.** Множество полуоктавов является неассоциативной, некоммутативной, дистрибутивной алгеброй [10, с. 380–383].

**Заключение.** В данной работе введены множества полуоктавов, а также арифметические операции в этом множестве, установлены основные свойства этих операций, на основании чего сделан вывод, что множество полуоктавов является неассоциативной, некоммутативной, дистрибутивной алгеброй. Полученные результаты будут использованы в дальнейшем при введении понятий «уравнения над полуоктавами», «степень полуоктавы», а также при выводе формул Эйлера и Муавра для полуоктавов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тихомиров, В. М. Десять доказательств основной теоремы алгебры / В. М. Тихомиров, В. В. Успенский // Математическое просвещение. – МЦНМО, 1997. – № 1. – С. 50–70.
2. Яглом, И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии / И. М. Яглом. – М.: Физматлит, 1963. – 192 с.

3. Павлов, Д. Г. Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной / Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2010. – Вып. 2 (14), Т. 7. – С. 11–37.
4. Петров, А. М. Кватернионное представление вихревых движений / А. М. Петров. – М. : Компания «СПУТНИК», 2006. – 32 с.
5. Пенроуз, Р. Спиноры и пространство-время : в 2 т. / Р. Пенроуз, В. Риндлер. – М. : Мир, 1987–1988. – Т. 1. – 1987. – 528 с. ; Т. 2. – 1988. – 572 с.
6. Кубышкин, Е. И. Нелинейная алгебра пространства-времени / Е. И. Кубышкин. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 304 с.
7. Кубышкин, Е. И. Октавы и наш восьмимерный мир / Е. И. Кубышкин. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 256 с.
8. Mortazaasl, H. A study on semi-quaternions algebra in semi-Euclidean 4-space / H. Mortazaasl, M. Jafari // Mathematical Sciences and Applications E-Notes. – 2013. – Vol. 1, № 2. – P. 20–27.
9. Курош, А. Г. Лекции по общей алгебре / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1973. – 400 с.
10. Скорняков, Л. А. Общая алгебра / под общ. ред. Л. А. Скорнякова. – М. : Наука, 1990. – Т. 1. – 592 с.

Поступила 05.09.2016

### THE SET OF SEMI-OCTAVE. I

A. KOZLOV

*In the present work based on a similar approach introduced by X. Mortazaasl and M. Jafari, we introduced the concept of semi-octave and operations on them, set properties of these operations. Obtained in this paper results will be further used in solving linear equations over semi-octave, as well as to establish the formulas of Euler and de Moivre to semi-octave.*

**Keywords:** semi-octave, hypercomplex numbers.

УДК 519.6:517.958

**АППРОКСИМАЦИЯ ДВОЙНЫХ И ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ  
ВО ВНУТРЕННИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

*канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. ГОЛУБЕВА, д-р техн. наук С.Г. ЕХИЛЕВСКИЙ,  
канд. физ.-мат. наук, доц. Н.А. ГУРЬЕВА, канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ,  
канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ  
(Полоцкий государственный университет)*

*Получены формулы и алгоритмы для составных интегральных квадратур с равномерным шагом 7-го, 11-го, 15-го алгебраического порядка точности и 8-го, 12-го, 16-го порядка погрешности соответственно во внутренних краевых задачах математической физики. Найдены аналоги формул для двойных на прямоугольнике и тройных в параллелепипеде интегралов с сохранением такого же порядка погрешности, что и в одномерном случае. Построены линейные отображения обобщенных координат с кольца (круга) на прямоугольник, с шарового слоя (шара) на параллелепипед, а также интегральные квадратуры в полярной и в сферической системах координат с сохранением алгебраического порядка точности, что проверено численно. Доказана лемма, указывающая минимальное число узлов, достаточное для вычисления интеграла с двойной точностью. Приведены соответствующие алгоритмы.*

**Ключевые слова:** алгебраический порядок точности, порядок погрешности, шаблон весовых коэффициентов, метод медианной фильтрации, кольцо, шаровой слой, аппроксимация интегралов.

**Введение.** В задачах математической физики обычно используют области: прямоугольник (параллелепипед), круг (шар). Например, во внутренней задаче Дирихле для уравнения Лапласа в круге, во внутренней задаче Дирихле для уравнения Лапласа в шаре [1, 2]. В подобных задачах решение записывается в виде суммы ряда по собственным функциям выбранной области и уравнения в частных производных. Коэффициенты разложения ряда находят через двойные интегралы (в прямоугольнике, круге, кольце) и тройные интегралы (в параллелепипеде, шаре, шаровом слое). В программе коэффициенты разложения вычисляют по циклу, и их число может достигать несколько тысяч, что в свою очередь требует высокой точности расчета двойных и тройных интегралов в задачах математической физики.

Среди интегральных квадратурных формул наибольший алгебраический порядок точности имеют квадратурные формулы Гаусса [3, с. 44] при заданном числе узлов аппроксимации на отрезке. Для поиска узлов нужно построить ортогональный на отрезке  $[a, b]$  многочлен степени  $n$  с весовой функцией  $p(x) > 0, x \in [a, b]$  (у многочлена все  $n$  корней расположены на отрезке  $[a, b]$ ). Согласно теореме Абеля – Руффини произвольные многочлены степени больше четвертой имеют корни, для которых невозможно указать замкнутую формулу для решений, т.е. формулу, содержащую только арифметические операции и корни произвольной степени. По теореме Гаусса ортогональный многочлен степени  $n$  имеет квадратурную формулу Гаусса, точную для всех многочленов степени не выше  $2n - 1$  (алгебраический порядок точности) [3, с. 45]. Таким образом, интегральная формула Гаусса с узлами и весовыми коэффициентами, записанными через радикалы или рациональные дроби, может быть точна для всех многочленов степени не выше  $2n - 1 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$ .

Следовательно, корни ортогональных многочленов, равные узлам квадратурной формулы Гаусса (с числом больше четырех), необходимо искать с двойной точностью [6], например с помощью формулы касательных Ньютона, что потребует не менее 250 итерации и более 1000 флопов [4]. В работе построены интегральные квадратурные формулы с равномерным шагом, рациональными узлами и весовыми коэффициентами, т.е. с двойной точностью. Найденные квадратурные формулы имеют алгебраический порядок точности соответственно  $n \in \{7, 11, 15\}$ . Полученные интегральные квадратурные формулы в одномерном случае легко могут быть перенесены на двойные и тройные интегралы с сохранением алгебраического порядка точности. В работе построено линейное отображение обобщенных координат с прямоугольника (параллелепипеда) на круг, кольцо, (шар, сферический слой), а квадратурные интегральные формулы в указанных областях имеют тот же алгебраический порядок точности, что и на отрезке.

Немецкая группа математиков из университета города Падерборна (Paderborn) создала пакет программ MuPad Pro 2.5.2, в котором интегралы вычисляются всего с 9 значащими цифрами, т.е. с точностью меньшей, чем точность, достигнутая в данной работе.

**1. Составная формула для отрезка, алгебраический порядок точности.**

Аппроксимация определенного интеграла квадратурной формулой с непрерывной функции  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  имеет вид

$$\int_a^b f(z)dz = \sum_{i=0}^n C_i f(x_i) + r(f), \tag{1}$$

где  $x_i, i = \overline{0, n}$  – узлы квадратурной формулы;

$C_i$  – весовые коэффициенты;

$r(f)$  – погрешность аппроксимации.

Из формулы (1) следует, что  $r(f) = \int_a^b f(z)dz - \sum_{i=0}^n C_i f(x_i)$  является линейным оператором относительно функции  $f$  как разность линейных операторов. Поэтому если формула (1) точна для всех степенных функций вида  $x^j : r(x^j) = 0, j = \overline{0, m}$ , то  $r(P_m(x)) = 0$  для всех многочленов степени не выше  $m$ .

**Определение 1.** Пусть квадратурная формула (1) точна для всех степенных функций  $x^k, k = \overline{0, m}$  включительно, т.е.  $r(x^k) = 0, k = \overline{0, m}$ , тогда говорят, что алгебраический порядок точности интегральной квадратурной формулы (1) равен  $m$ .

**Определение 2.** Пусть алгебраический порядок точности квадратурной формулы (1) равен  $m$ , а погрешность  $r(f)$  формулы (1) отлична от нуля для степенной функции  $x^l, l \geq m+1$ , тогда говорят, что порядок погрешности формулы (1) равен  $l$ . Другими словами, порядок погрешности формулы (1) – минимальная степень многочлена  $l$ , такая, что выполняется неравенство  $r(P_l(x)) \neq 0$ .

Рассмотрим канонический отрезок  $[-1, 1]$ , на котором в силу симметрии узлы квадратурной формулы расположены симметрично относительно нуля, а весовые коэффициенты симметричных узлов имеют равные значения. Выберем четное число интервалов разбиения  $n_0 = 2l$  и нечетное число узлов  $2n_0 + 1$  во всех квадратурных формулах ( $n_0 \in \{6, 10, 14\}$ ). В данной работе отрезок  $[-1, 1]$  разбивается на  $n_0 \in \{6, 10, 14\}$  число равных частей.

Пользуясь формулой (1), определением 1, найдем условия на весовые коэффициенты  $C_k$  в квадратурной формуле с равномерным шагом на отрезке  $[-1, 1]$  (с учетом симметрии):

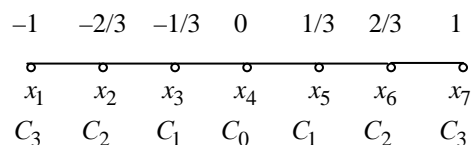
$$\begin{cases} \int_{-1}^1 dz = 2 = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{n_0/2} C_k; \\ \int_{-1}^1 z^{2s} dz = 2 / (2s + 1) = 2 \sum_{k=1}^{n_0/2} C_k (2k / n_0)^{2s}, s = \overline{1, n_0 / 2}. \end{cases} \tag{2}$$

Решение системы уравнений (2) подставим в квадратурную формулу (1), имеем

$$\int_{-1}^1 f(z)dz \approx C_0 f(0) + \sum_{k=1}^{n_0/2} C_k (f(-2k / n_0) + f(2k / n_0)), x_k = \pm 2k / n_0, k = \overline{0, n_0 / 2}. \tag{3}$$

Сначала разделим отрезок  $[-1, 1]$  на 6 равных частей, т.е. используем 7 равноотстоящих узлов:

$$x_1 = -1, x_2 = -2/3, x_3 = -1/3, x_4 = 0, x_5 = 1/3, x_6 = 2/3, x_7 = 1, n_0 = 6$$



Согласно симметрии и квадратурной формуле (3) ( $n_0 = 6$ ) получим

$$\int_{-1}^1 f(z) dz \approx C_0 f(0) + C_1 (f(-1/3) + f(1/3)) + C_2 (f(-2/3) + f(2/3)) + C_3 (f(-1) + f(1)).$$

Подставляя в систему уравнений (2) степенные функции, начиная с нулевой степени, используя только четные степени (для нечетных степеней имеем тривиальные тождества  $0=0$ ), запишем следующую систему уравнений:

$$f(z) \equiv 1: \int_{-1}^1 f(z) dz = \int_{-1}^1 dz = 2 = C_0 + 2C_1 + 2C_2 + 2C_3;$$

$$f(z) = z^2: \int_{-1}^1 f(z) dz = \int_{-1}^1 z^2 dz = \frac{2}{3} = \frac{2}{9}C_1 + \frac{8}{9}C_2 + 2C_3 \Leftrightarrow 3 = C_1 + 4C_2 + 9C_3;$$

$$f(z) = z^4: \int_{-1}^1 f(z) dz = \int_{-1}^1 z^4 dz = \frac{2}{5} = \frac{2}{81}C_1 + \frac{32}{81}C_2 + 2C_3 \Leftrightarrow 81 = 5C_1 + 80C_2 + 405C_3;$$

$$f(z) = z^6: \int_{-1}^1 f(z) dz = \int_{-1}^1 z^6 dz = \frac{2}{7} = \frac{2}{729}C_1 + \frac{128}{729}C_2 + 2C_3 \Leftrightarrow 729 = 7C_1 + 448C_2 + 5103C_3.$$

Значит необходимо решить неоднородную систему 4 линейных уравнений с 4 неизвестными.

$$\begin{cases} C_0 + 2C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 2 \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 3 \\ 5C_1 + 80C_2 + 405C_3 = 81 \\ 7C_1 + 448C_2 + 5103C_3 = 729 \end{cases} \Leftrightarrow C_0 = \frac{68}{105}, C_1 = \frac{9}{140}, C_2 = \frac{18}{35}, C_3 = \frac{41}{420}. \quad (4)$$

Из формул (3) ( $n_0 = 6$ ) и (4) получим формулу (5)

$$\int_{-1}^1 f(z) dz \approx S_f = \frac{68}{105} f(0) + \frac{9}{140} (f(-1/3) + f(1/3)) + \frac{18}{35} (f(-2/3) + f(2/3)) + \frac{41}{420} (f(-1) + f(1)). \quad (5)$$

Проверкой убеждаемся, что коэффициенты  $C_0, C_1, C_2, C_3$  являются решением системы уравнений (4), т.е. по определению 1 для квадратурной формулы (5) алгебраический порядок точности равен семи (с учетом (4) и  $\int_{-1}^1 z^7 dz = 0 = \sum_{k=-3}^3 C_k (2k/6)^7 = 0$ ), следовательно, по определению 2 порядок

погрешности для формулы (5) равен 8. В частности, если  $f(z) \equiv 1: \int_{-1}^1 f(z) dz = 2 = \frac{68}{105} + 2\left(\frac{9}{140} + \frac{18}{35} + \frac{41}{420}\right)$ ,

то интеграл равен длине отрезка  $[-1, 1]$ . Учитывая шаг  $h = 1/3$ , перепишем формулу (5) в виде

$$\int_{-1}^1 f(z) dz \approx 3h \sum_{i=0}^6 C_i f(x_i) \text{ или в общем случае}$$

$$\int_{-1}^1 f(z) dz \approx \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^{n_0} C_i f(x_i), \quad \frac{hn_0}{2} = 1, x_i = -1 + ih, i = \overline{0, n_0}. \quad (6)$$

Рассмотрим составную квадратурную формулу для вычисления определенного интеграла, т.е. формула (6) используется  $k$  раз на отрезке  $[a, b]$ ,  $b - a = kn_0 h$ . Шаблон весовых коэффициентов для составной формулы получим из (4) (коэффициенты в смежных узлах удваиваются), например:

$$\left\{ \frac{41}{420}, \frac{18}{35}, \frac{9}{140}, \frac{68}{105}, \frac{9}{140}, \frac{18}{35}, \frac{41}{210}, \frac{18}{35}, \frac{9}{140}, \frac{68}{105}, \frac{9}{140}, \frac{18}{35}, \frac{41}{420} \right\} (n = 12, k = 2, n_0 = 6).$$



А определенный интеграл на отрезке  $[a, b]$  отличается от выражения (6) длиной интервала в  $k = n / n_0$  раз.

$$\int_a^b f(z) dz \approx \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^{n_0*k} C_i f(x_i), \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad i = \overline{0, n} \quad \left( \sum_{i=0}^{n_0} C_i = 2 \right). \quad (7)$$

Для функции  $f(z) \equiv 1: \int_a^b f(z) dz = \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^{n_0*k} C_i = \frac{hn_0}{2} 2k = hkn_0 = b-a$ , т.е. составная формула (7)

применима в общем случае. В частности для  $n_0 = 6$  коэффициенты  $C_i$  для составной формулы определяются алгоритмом

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{если } j = 0 \text{ или } j = n : C_j = \frac{41}{420}; \\ \text{если } j \equiv 1 \pmod 6 \text{ или } j \equiv 5 \pmod 6 : C_j = \frac{18}{35}; \\ \text{если } j \equiv 2 \pmod 6 \text{ или } j \equiv 4 \pmod 6 : C_j = \frac{9}{140}; \\ \text{если } j \equiv 3 \pmod 6 : C_j = \frac{68}{105}; \\ \text{если } j \equiv 0 \pmod 6, j > 0, j < n : C_j = \frac{41}{210}. \end{array} \right. \quad (8)$$

Аналогично формуле (5) можно разбить канонический отрезок  $[-1, 1]$  на  $n_0 = 10$  равных частей (из соображений удобства разбиения), используя симметрию весовых коэффициентов, и получить решение системы уравнений (2) (для  $n_0 = 10$ ), в которой 6 неизвестных коэффициентов  $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  являются решением неоднородной системы  $n_0 / 2 + 1 = 6$  линейных уравнений 11-го алгебраического порядка точности:

$$C_0 = \frac{17807}{12474}, C_1 = -\frac{4825}{5544}, C_2 = \frac{5675}{6237}, C_3 = -\frac{16175}{99792}, C_4 = \frac{26575}{74844}, C_5 = \frac{16067}{299376}. \quad (9)$$

Проверим на компьютере, что рациональный вид коэффициентов (9) (символьное решение системы (2) для  $n_0 = 10$ ) удовлетворяет (2) с двойной точностью (16 значащих цифр). Занесем в таблицу 1 полу-

ченные значения. В левой части таблицы 1 указано точное значение интеграла  $a(s) = \int_{-1}^1 z^s dz, s = \overline{0, 12}$ ,

а справа – численное значение правой части системы уравнений (2) –  $b(s)$  с использованием значений весовых коэффициентов (8) ( $s$  – показатель степенной функции).

Таблица 1

$a(0) = 2,0000000000000000$	$b(0) = 2,0000000000000004$
$a(1) = 0,0000000000000000$	$b(1) = 0,0000000000000000$
$a(2) = 0,6666666666666666$	$b(2) = 0,6666666666666669$
$a(3) = 0,0000000000000000$	$b(3) = -0,0000000000000000$
$a(4) = 0,4000000000000000$	$b(4) = 0,4000000000000001$
$a(5) = 0,0000000000000000$	$b(5) = -0,0000000000000000$
$a(6) = 0,2857142857142857$	$b(6) = 0,2857142857142858$
$a(7) = 0,0000000000000000$	$b(7) = 0,0000000000000000$
$a(8) = 0,2222222222222222$	$b(8) = 0,2222222222222223$
$a(9) = 0,0000000000000000$	$b(9) = -0,0000000000000000$
$a(10) = 0,1818181818181818$	$b(10) = 0,1818181818181819$
$a(11) = 0,0000000000000000$	$b(11) = -0,0000000000000000$
$a(12) = 0,1538461538461539$	$b(12) = 0,1554621683809524$

Из таблицы 1 видно, что алгебраический порядок точности системы уравнений (2) при  $n_0 = 10$  равен 11, а порядок погрешности квадратурной формулы  $\int_{-1}^1 f(z)dz \approx 5h \sum_{i=0}^{10} C_i f(x_i)$ , где  $5h = 1$ ,  $\sum_{i=0}^{10} C_i = 2$ ,  $x_i = -1 + ih$ ,  $i = \overline{0,10}$ , равен 12 ( $C_i$  определяются с помощью (9)).

Из выражения (7) для  $n_0 = 10$  получим составную формулу

$$\int_a^b f(z)dz \approx 5h \sum_{i=0}^n C_i f(x_i), h = \frac{(b-a)}{n}, x_i = a + ih, n = 10k \left( \sum_{i=0}^{10} C_i = 2 \right), \tag{10}$$

в которой весовые коэффициенты  $C_i$  определяются алгоритмом (11)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{если } j = 0 \text{ или } j = n : C_j = \frac{16067}{299376}; \\ \text{если } j \equiv 1 \pmod{10} \text{ или } j \equiv 9 \pmod{10} : C_j = \frac{26575}{74844}; \\ \text{если } j \equiv 2 \pmod{10} \text{ или } j \equiv 8 \pmod{10} : C_j = -\frac{16175}{99792}; \\ \text{если } j \equiv 3 \pmod{10} \text{ или } j \equiv 7 \pmod{10} : C_j = \frac{5675}{6237}; \\ \text{если } j \equiv 4 \pmod{10} \text{ или } j \equiv 6 \pmod{10} : C_j = -\frac{4825}{5544}; \\ \text{если } j \equiv 5 \pmod{10} : C_j = \frac{17807}{12474}; \\ \text{если } j \equiv 0 \pmod{10}, j > 0, j < n : C_j = \frac{16067}{149688}. \end{array} \right. \tag{11}$$

Решение системы уравнений (2) (для  $n_0 = 14$ ), соответствующее делению канонического отрезка  $[-1,1]$  на 14 равных частей есть

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{101741867}{13030875}; C_1 = -\frac{5600756791}{833976000}; C_2 = \frac{789382601}{156370500}; C_3 = -\frac{6625093363}{2501928000}; \\ C_4 &= \frac{109420087}{78185250}; C_5 = -\frac{770720657}{2501928000}; C_6 = \frac{44436679}{156370500}; C_7 = \frac{90241897}{2501928000}. \end{aligned} \tag{12}$$

Численно проверим, что весовые коэффициенты (12) – символьное решение системы (2) (для  $n_0 = 14$ ), выполняется с двойной точностью (16 значащих цифр). Значения занесем в таблицу 2.

Таблица 2

$a(0) = 2,0000000000000000$	$b(0) = 2,0000000000000009$
$a(1) = 0,0000000000000000$	$b(1) = 0,0000000000000001$
$a(2) = 0,6666666666666666$	$b(2) = 0,6666666666666665$
$a(3) = 0,0000000000000000$	$b(3) = 0,0000000000000000$
$a(4) = 0,4000000000000000$	$b(4) = 0,4000000000000000$
$a(5) = 0,0000000000000000$	$b(5) = 0,0000000000000000$
$a(6) = 0,2857142857142857$	$b(6) = 0,2857142857142856$
$a(7) = 0,0000000000000000$	$b(7) = 0,0000000000000000$
$a(8) = 0,2222222222222222$	$b(8) = 0,2222222222222221$
$a(9) = 0,0000000000000000$	$b(9) = 0,0000000000000000$
$a(10) = 0,1818181818181818$	$b(10) = 0,1818181818181817$
$a(11) = 0,0000000000000000$	$b(11) = 0,0000000000000000$
$a(12) = 0,1538461538461539$	$b(12) = 0,1538461538461538$
$a(13) = 0,0000000000000000$	$b(13) = 0,0000000000000000$
$a(14) = 0,1333333333333333$	$b(14) = 0,1333333333333333$
$a(15) = 0,0000000000000000$	$b(15) = 0,0000000000000000$
$a(16) = 0,1176470588235294$	$b(16) = 0,1179107308149041$

Из таблицы 2 видно, что формула  $\int_{-1}^1 f(z)dz \approx 7h \sum_{i=0}^{14} C_i f(x_i)$ , где  $7h=1$ ,  $\sum_{i=0}^{14} C_i = 2$ ,  $x_i = -1+ih$ ,  $i = \overline{0,14}$ , имеет 15 алгебраический порядок точности и 16 порядок погрешности. Используя формулу (7) для  $n_0 = 14$ , получим составную формулу при делении отрезка  $[a, b]$  на число частей кратное 14:

$$\int_a^b f(z)dz \approx 7h \sum_{i=0}^n C_i f(x_i), \quad h = \frac{(b-a)}{n}, \quad x_i = a+ih, \quad n=14k \quad \left( \sum_{i=0}^{14} C_i = 2 \right). \quad (13)$$

Весовые коэффициенты  $C_i$  определяются алгоритмом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{если } j=0 \text{ или } j=n: C_j = \frac{90241897}{2501928000}; \\ \text{если } j \equiv 1 \pmod{14} \text{ или } j \equiv 13 \pmod{14}: C_j = \frac{44436679}{156370500}; \\ \text{если } j \equiv 2 \pmod{14} \text{ или } j \equiv 12 \pmod{14}: C_j = -\frac{770720657}{2501928000}; \\ \text{если } j \equiv 3 \pmod{14} \text{ или } j \equiv 11 \pmod{14}: C_j = \frac{109420087}{78185250}; \\ \text{если } j \equiv 4 \pmod{14} \text{ или } j \equiv 10 \pmod{14}: C_j = -\frac{6625093363}{2501928000}; \\ \text{если } j \equiv 5 \pmod{14} \text{ или } j \equiv 9 \pmod{14}: C_j = \frac{789382601}{156370500}; \\ \text{если } j \equiv 6 \pmod{14} \text{ или } j \equiv 8 \pmod{14}: C_j = -\frac{5600756791}{833976000}; \\ \text{если } j \equiv 7 \pmod{14}: C_j = \frac{101741867}{13030875}; \\ \text{если } j \equiv 0 \pmod{14}, j > 0, j < n: C_j = \frac{90241897}{1250964000}. \end{array} \right. \quad (14)$$

Докажем следующее утверждение:

**Лемма.** Пусть дана функция  $f(x) \in C^{(n_0+2)}[a, b]$  и составная квадратурная формула (1) с равномерным шагом точна для всех многочленов степени равной  $n_0 \in \{6, 10, 14\}$ , то есть выполнено условие (формула (7)):

$$\int_{-H}^H z^t dz = \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^n C_i z_i^t, \quad t = \overline{0, n_0}, \quad (15)$$

$$c = (a+b)/2, \quad x = z+c, \quad dx = dz, \quad h = (b-a)/n, \quad H = (b-a)/2, \quad x \in [a, b], \quad z \in [-H, H]$$

$$x_i = c + z_i, \quad x_i = a + i(b-a)/n = a + ih, \quad i = \overline{0, n}.$$

где  $c$  – середина отрезка  $[a, b]$ ;

Тогда порядок погрешности  $r(f)$  составной формулы равен  $(n_0 + 2)$ , другими словами, алгебраический порядок точности равен  $n_0 + 1 \in \{7, 11, 15\}$ .

**Доказательство.** Разложим функцию  $f(x)$ ,  $f(x) \in C^{(n_0+2)}[a, b]$ , в ряд Тейлора с центром в точке  $x = c$ :

$$f(c+z) = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} z^k + \frac{f^{(n_0+1)}(c)}{(n_0+1)!} z^{n_0+1} + \frac{f^{(n_0+2)}(c)}{(n_0+2)!} z^{n_0+2} + O(z^{n_0+3}), \quad |z| \leq H.$$

Покажем, что из условия (15) следует

$$\int_a^b x^t dx = \left(\frac{hn_0}{2}\right) \sum_{i=0}^n C_i x_i^t = \left(\frac{hn_0}{2}\right) \sum_{i=0}^n C_i x_i^t, \quad t = \overline{0, n_0}.$$

$$\int_a^b x^t dx - \left(\frac{hn_0}{2}\right) \sum_{i=0}^n C_i x_i^t = \int_{-H}^H (z+c)^t dz - \left(\frac{hn_0}{2}\right) \sum_{i=0}^n C_i (c+z_i)^t = \sum_{s=0}^t C_i^s c^{t-s} \left( \int_{-H}^H z^s dz - \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^n C_i z_i^s \right) = 0,$$

$$\forall t = \overline{0, n_0}, \quad \forall s = \overline{0, t},$$

т.е. из системы уравнений (14) следует  $\int_a^b x^t dx = \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^n C_i x_i^t, \quad t = \overline{0, n_0}$  (параллельный перенос системы

координат не изменяет алгебраического порядка точности квадратурной формулы), где  $C_i^s = t! / s!(t-s)!$  – биномиальный коэффициент.

$$\begin{aligned} |r(f)| &= \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^n C_i f(x_i) \right| = \left| \int_{-H}^H \left( \sum_{t=0}^{n_0} \frac{f^{(t)}(c)}{t!} z^t + \frac{f^{(n_0+1)}(c)}{(n_0+1)!} z^{n_0+1} + \frac{f^{(n_0+2)}(c)}{(n_0+2)!} z^{n_0+2} + O(H^{n_0+4}) \right) dz - \right. \\ &- \left. \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^n C_i \left( \sum_{t=0}^{n_0} \frac{f^{(t)}(c)}{t!} z_i^t + \frac{f^{(n_0+1)}(c)}{(n_0+1)!} z_i^{n_0+1} + \frac{f^{(n_0+2)}(c)}{(n_0+2)!} z_i^{n_0+2} + O(H^{n_0+4}) \right) \right| = \left| \sum_{t=0}^{n_0} \frac{f^{(t)}(c)}{t!} \left( \int_{-H}^H z^t dz - \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^n C_i z_i^t \right) + \right. \\ &- \left. \sum_{t=n_0+1}^{n_0+2} \frac{f^{(t)}(c)}{t!} \left( \int_{-H}^H z^t dz - \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^n C_i z_i^t + O(H^{n_0+4}) \right) \right| = \left| \frac{f^{(n_0+2)}(c)}{(n_0+2)!} \left| \frac{2H^{n_0+3}}{n_0+3} - \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^n C_i z_i^{n_0+2} + O(H^{n_0+4}) \right| \right| \\ |r(f)| &\leq \left| \frac{f^{(n_0+2)}(c)}{(n_0+2)!} H^{n_0+3} \left| \frac{2}{n_0+3} - \frac{hn_0}{2H} \sum_{i=0}^n C_i \left( \frac{z_i}{H} \right)^{n_0+2} + O(H) \right| \right|, \quad \left| \frac{z_i}{H} \right| \leq 1. \end{aligned} \quad (16)$$

В формуле (16) учтены равенства в силу соотношений:

$$\int_{-H}^H z^{n_0+1} dz = 0, \quad \sum_{i=0}^n C_i z_i^{n_0+1} = 0, \quad C_{n/2-j} = C_{n/2+j}, \quad z_{n/2-j} = -z_{n/2+j}, \quad z_{n/2} = 0, \quad j = \overline{-n/2, n/2}$$

$$z_i = \left( \frac{i-n/2}{n/2} \right) H = \frac{2j}{n} H, \quad i = \overline{0, n}, \quad j = i - n/2, \quad j = \overline{-n/2, n/2}, \quad i = \overline{0, n}, \quad |z_i| \leq H.$$

В формуле (16) последний множитель представляет собой многочлен степени  $n_0+2$ , которая определяет порядок погрешности  $|r(f)|$  составной формулы согласно определению 2, другими словами, алгебраический порядок точности равен  $n_0+1=7, 11, 15$  согласно определению 1.

Лемма доказана.

Формулу (16) можно преобразовать и упростить, поскольку выражение

$$\frac{2}{n_0+3} \approx \sum_{i=0}^{n_0} C_i \left( \frac{z_i}{H} \right)^{n_0+2} \quad (k=1)$$

справедливо с точностью до 3 знаков (как видно из таблицы 2 в случае  $s=16$   $a(16)$  и  $b(16)$  отличаются в четвертой значащей цифре, а из таблицы 1 в случае  $s=12$   $a(12)$  и  $b(12)$  – в третьей значащей цифре). Поэтому для (16) справедливо

$$|r(f)| \leq \left| \frac{f^{(n_0+2)}(c)}{(n_0+2)!} H^{n_0+3} \left| \frac{2}{n_0+3} + O(H) \right| \right| = \frac{2 |f^{(n_0+2)}(c)|}{(n_0+3)!} H^{n_0+3} + O(H^{n_0+4}).$$

С другой стороны, суммирование на  $n = kn_0$  узлах эквивалентно взятию  $k$  интегралов на интервалах длиной  $b_j - a_j = \frac{b-a}{k}, j = \overline{1, k}$ . Обозначим среднее значение производной

$$\overline{f^{(n_0+2)}} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k f^{(n_0+2)}\left(\frac{a_j+b_j}{2}\right) \approx \left(\frac{1}{b-a}\right) \int_a^b f^{(n_0+2)}(x) dx.$$

Тогда имеет место оценка

$$|r(f)|^{[a,b]} \leq k |r(f)|^{[a_j,b_j]} \leq \frac{k}{(n_0+2)!} \overline{f^{(n_0+2)}} \frac{2}{(n_0+3)} \left(\frac{b-a}{2k}\right)^{n_0+3} = \frac{1}{k^{n_0+2}} \frac{2H^{n_0+3}}{(n_0+3)!} \overline{f^{(n_0+2)}}. \quad (17)$$

Нас будет интересовать порядок погрешности составной квадратурной формулы и двойная точность относительной погрешности результата интегрирования (16 значащих цифр).

Вычислим определенный интеграл:

$$\int_0^2 \exp(2x) dx = (\exp(4) - 1) / 2 = 26.79907501657212.$$

При  $N = 28, k = 2$  написанная нами программа с использованием формул (13), (14) возвращает значения ( $\epsilon \equiv (\text{int}1 - \text{exact}) / \text{exact}$ ):

$$\text{int}1 = 26.79907501657214 \quad \text{exact} = 26.79907501657212 \quad \text{delta} = -0.000000000000002 = -2 \cdot 10^{-14}$$

$$\epsilon = -0,0000000000000008.$$

Снова оценим погрешность составной интегральной квадратуры по формуле (17), в которой  $n_0 = 14, k = 2, a = 0, b = 2, n = kn_0 = 28, h = (b-a)/n = 2/28 = 1/14$  для интеграла  $\int_0^2 \exp(2x) dx$ :

$$\overline{f^{(n_0+2)}} = \left(\frac{1}{b-a}\right) \int_a^b f^{(n_0+2)}(x) dx = \left(\frac{1}{2-0}\right) \int_0^2 (\exp(2x)) 2^{16} dx = \frac{(\exp(4)-1)}{4} 2^{16},$$

$$|r(f)| \leq \frac{1}{k^{n_0+2}} \frac{2H^{n_0+3}}{(n_0+3)!} \overline{f^{(n_0+2)}} = \frac{2^{17}}{2^{16} 17!} \frac{(\exp(4)-1)}{4} = 7,5 \cdot 10^{-14}.$$

Видно, что  $|r(f)|$  дает хорошее приближение  $|\text{delta}|$  с избытком. Поэтому имея двойную точность с помощью (17), тем более будет достигнуто численное значение интеграла с двойной точностью. Программой также получена двойная точность, т.к.  $|\epsilon| = 8 \cdot 10^{-16}$ .

## 2. Построение двумерных и трехмерных алгоритмов

Для построения двумерных и трехмерных квадратурных интегральных формул рассмотрим сначала случай функций с разделяющимися переменными.

1) Пусть  $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ , воспользуемся дважды составной формулой (7) для определенного интеграла функции одной переменной:

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y), \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy \approx \frac{h_1 n_0}{2} \sum_{i=0}^{n_0^*k} C_i f_1(x_i) \frac{h_2 n_0}{2} \sum_{j=0}^{n_0^*k} C_j f_2(y_j) =$$

$$= \frac{h_1 h_2 n_0^2}{4} \sum_{i=0}^{n_0^*k} \sum_{j=0}^{n_0^*k} C_i C_j f_1(x_i) f_2(y_j) = \frac{h_1 h_2 n_0^2}{4} \sum_{i,j=0}^{n_0^*k} C_{i,j} f(x_i, y_j). \quad (18)$$

$$C_{i,j} = C_i C_j, f(x_i, y_j) = f_1(x_i) f_2(y_j), x_i = a + ih_1, y_j = c + jh_2, h_1 = \frac{b-a}{n}, h_2 = \frac{d-c}{n}, i, j = \overline{0, n}.$$

2) Пусть  $(x, y, z) \in [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ , воспользуемся трижды составной формулой (7) для определенного интеграла функции одной переменной:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f_1(x)f_2(y)f_3(z), \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy \int_e^f f_3(z) dz \approx \\ &\approx \frac{h_1 n_0}{2} \sum_{i=0}^{n_0 \cdot k} C_i f_1(x_i) \frac{h_2 n_0}{2} \sum_{j=0}^{n_0 \cdot k} C_j f_2(y_j) \frac{h_3 n_0}{2} \sum_{s=0}^{n_0 \cdot k} C_s f_3(z_s) = \frac{h_1 h_2 h_3 n_0^3}{8} \sum_{i=0}^{n_0 \cdot k} \sum_{j=0}^{n_0 \cdot k} \sum_{s=0}^{n_0 \cdot k} C_i C_j C_s f_1(x_i) f_2(y_j) f_3(z_s) = \\ &= \frac{h_1 h_2 h_3 n_0^3}{8} \sum_{i, j, s=0}^{n_0 \cdot k} C_{i, j, s} f(x_i, y_j, z_s) \end{aligned} \quad (19)$$

где  $C_{i, j, s} = C_i C_j C_s$ ;

$$f(x_i, y_j, z_s) = f_1(x_i) f_2(y_j) f_3(z_s), \quad x_i = a + ih_1, \quad y_j = c + jh_2, \quad z_s = e + sh_3, \quad h_1 = \frac{b-a}{n}, \quad h_2 = \frac{d-c}{n},$$

$$i, h_3 = \frac{d-c}{n}, \quad i, j, s = \overline{0, n}.$$

Формулы (20) – (22) получим подстановкой в (18)  $n_0 = 6, 10, 14$  соответственно:

$$1) \quad I_2 = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \approx 9h_1 h_2 \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n C_{i, j} f(x_i y_j), \quad (20)$$

где  $C_i, C_j$  – весовые коэффициенты, определяемые формулой (8);  $C_{i, j} = C_i C_j$ ;  $x_i = a + h_1 \cdot i$ ,  
 $y_j = c + h_2 \cdot j$ ;  $i, j = \overline{0, n}$ ;  $h_1 = \frac{(b-a)}{n}$ ,  $h_2 = \frac{(d-c)}{n}$ ;

$$2) \quad I_2 = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \approx 25h_1 h_2 \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n C_{i, j} f(x_i y_j), \quad (21)$$

где  $C_i, C_j$  – весовые коэффициенты, определяемые формулой (11);  $C_{i, j} = C_i C_j$ ;  $x_i = a + h_1 \cdot i$ ,  
 $y_j = c + h_2 \cdot j$ ;  $i, j = \overline{0, n}$ ;  $h_1 = \frac{(b-a)}{n}$ ,  $h_2 = \frac{(d-c)}{n}$ ;

$$3) \quad I_2 = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \approx 49h_1 h_2 \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n C_{i, j} f(x_i y_j), \quad (22)$$

где  $C_i, C_j$  – весовые коэффициенты, определяемые формулой (14);  $C_{i, j} = C_i C_j$ ;  $x_i = a + h_1 \cdot i$ ,  
 $y_j = c + h_2 \cdot j$ ;  $i, j = \overline{0, n}$ ;  $h_1 = \frac{(b-a)}{n}$ ,  $h_2 = \frac{(d-c)}{n}$ ;

Формулы (23) – (25) получим подстановкой в (19)  $n_0 = 6, 10, 14$  соответственно:

$$4) \quad I_3 = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dx dy dz \approx 27h_1 h_2 h_3 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n C_{i, j, k} f(x_i y_j z_k), \quad (23)$$

где  $C_i, C_j, C_k$  – весовые коэффициенты, определяемые формулой (8);  $C_{i, j, k} = C_i C_j C_k$ ;  $x_i = a + h_1 \cdot i$ ,  
 $y_j = c + h_2 \cdot j$ ,  $z_k = e + h_3 \cdot k$ ;  $i, j, k = \overline{0, n}$ ;  $h_1 = \frac{(b-a)}{n}$ ,  $h_2 = \frac{(d-c)}{n}$ ,  $h_3 = \frac{(f-e)}{n}$ ;

$$5) \quad I_3 = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dx dy dz \approx 125 h_1 h_2 h_3 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n C_{i,j,k} f(x_i y_j z_k), \quad (24)$$

где  $C_i, C_j, C_k$  – весовые коэффициенты, определяемые формулой (11);  $C_{i,j,k} = C_i C_j C_k$ ;  $x_i = a + h_1 \cdot i$ ,  $y_j = c + h_2 \cdot j$ ,  $z_k = e + h_3 \cdot k$ ;  $i, j, k = \overline{0, n}$ ;  $h_1 = \frac{(b-a)}{n}$ ,  $h_2 = \frac{(d-c)}{n}$ ,  $h_3 = \frac{(f-e)}{n}$ ;

$$6) \quad I_3 = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dx dy dz \approx 343 h_1 h_2 h_3 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n C_{i,j,k} f(x_i y_j z_k), \quad (25)$$

где  $C_i, C_j, C_k$  – весовые коэффициенты, определяемые формулой (14)  $C_{i,j,k} = C_i C_j C_k$ ;  $x_i = a + h_1 \cdot i$ ,  $y_j = c + h_2 \cdot j$ ,  $z_k = e + h_3 \cdot k$ ;  $i, j, k = \overline{0, n}$ ;  $h_1 = \frac{(b-a)}{n}$ ,  $h_2 = \frac{(d-c)}{n}$ ,  $h_3 = \frac{(f-e)}{n}$ .

**Теорема 1.** Формульные пары (20)–(8); (21)–(11); (22)–(14); (23)–(8); (24)–(11); (25)–(14) справедливы для любой функции  $f(x, y) \in C^{n_0+2}([-1, 1] \times [-1, 1])$  ( $f(x, y, z) \in C^{n_0+2}([-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1])$ ), обязательно с разделяющимися переменными. Порядок погрешности двумерной (трехмерной) интегральной квадратурной формулы совпадает с порядком погрешности одномерной квадратурной формулы (равен 7, 11, 15 соответственно для алгоритмов (8), (11), (14)).

**Доказательство** проведем в два этапа:

**Утверждение 1.** Для двойного интеграла на каноническом квадрате и  $\forall f(x, y) \in C([-1, 1] \times [-1, 1])$  и тройного интеграла на каноническом кубе для  $\forall f(x, y, z) \in C([-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1])$  равноудаленные от центра точки имеют равные весовые коэффициенты.

Не теряя общности, доказательство рассмотрим для двумерного случая. Выберем каноническую область – квадрат  $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$  со стороной 2.

**1.1.** Сделаем линейную замену переменных  $x|_{-1}^1 = y|_{-1}^1$ ,  $y|_{-1}^1 = x|_{-1}^1$ ;  $dx' = dy$ ;  $dy' = dx$  в интеграле

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(y', x') dy' dx' = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(y', x') dx' dy' \approx \frac{h_1 h_2 n_0^2}{4} \sum_{i,j=0}^{n_0} C_{i,j} f(x_i, y_j) = \frac{h_1 h_2 n_0^2}{4} \sum_{i,j=0}^{n_0} C_{j,i} f(y_j, x_i).$$

Последняя формула означает инвариантность интеграла от произвольной функции при зеркальном отражении канонического квадрата относительно прямой  $y = x$ . Что в свою очередь для  $f(x_i, y_j) \equiv 1$  приводит к симметрии (равенству) весовых коэффициентов  $C_{j,i} = C_{i,j}$ ,  $i, j = \overline{0, n_0}$ .

**1.2.** Рассмотрим инверсию канонического квадрата относительно центра (поворот на  $180^\circ$ ), сделав следующую линейную замену переменных:  $x|_{-1}^1 = -x|_1^{-1}$ ,  $y|_{-1}^1 = -y|_1^{-1}$ ;  $dx' = -dx$ ;  $dy' = -dy$ .

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(-x', -y') d(-x') d(-y') = \int_1^{-1} \int_1^{-1} f(-x', -y') dx' dy' = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(-x', -y') dx' dy' \approx \frac{h_1 h_2 n_0^2}{4} \sum_{i,j=0}^{n_0} C_{i,j} f(x_i, y_j) = \frac{h_1 h_2 n_0^2}{4} \sum_{i,j=0}^{n_0} C_{n_0-i, n_0-j} f(x_{n_0-i}, y_{n_0-j}). \end{aligned}$$

Равенство интегралов означает инвариантность интеграла при повороте канонического квадрата на  $180^\circ$  (преобразование инверсии), а в случае  $f(x_i, y_j) \equiv 1$  для интегральных сумм  $C_{i,j} = C_{n_0-i, n_0-j}$ ,  $i, j = \overline{0, n_0}$ .

**1.3.** Рассмотрим поворот канонического квадрата на  $90^\circ$  при линейной замене переменных:

$$x'|_{-1}^1 = y|_{-1}^1, \quad y'|_1^{-1} = -x|_{-1}^1; \quad dx' = dy; \quad dy' = -dx.$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(-y', x') d(-y') dx' = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(-y', x') dy' dx' = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(-y', x') dy' dx' = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(-y', x') d(x') dy' \approx \frac{h_1 h_2 n_0^2}{4} \sum_{i, j=0}^{n_0} C_{i, j} f(x_i, y_j) = \frac{h_1 h_2 n_0^2}{4} \sum_{i, j=0}^{n_0} C_{n_0-j, i} f(y_{n_0-j}, x_i). \end{aligned}$$

Равенство интегралов означает инвариантность интеграла при повороте канонического квадрата на  $90^\circ$ , а в случае  $f(x_i, y_j) \equiv 1$  для интегральных сумм  $C_{i, j} = C_{n_0-j, i}$ ,  $i, j = \overline{0, n_0}$ .

На целочисленной решетке с координатами  $(x_i, y_j)$  квадрат с фиксированным расстоянием до центра есть  $x_i^2 + y_j^2 = \text{const}$ , поэтому решением этого же уравнения будут пары чисел:

$$(x_i, y_j), (-x_i, y_j), (x_i, -y_j), (-x_i, -y_j), (y_j, x_i), (y_j, -x_i), (-y_j, x_i), (-y_j, -x_i).$$

Последние 4 пары отличаются от первых четырех преобразованием симметрии **1.1**. Первая и четвертая пары, а также вторая и третья отличаются друг от друга преобразованием инверсии **1.2**. Наконец, первая и шестая пары совмещаются поворотом относительно центра на  $90^\circ$  (преобразование **1.3**). Следовательно, в силу преобразований **1.1** – **1.3** весовые коэффициенты на всех восьми (или четырех) указанных точках имеют равные значения.

Доказанное **утверждение 1** справедливо независимо от вида алгоритма построения весовых коэффициентов (8), (11), (14).

**Утверждение 2.** Квадратурные интегральные формулы (18) для двойного интеграла и (19) для тройного интеграла справедливы для произвольной функции  $f(x, y) \in C^{n_0+2}([-1, 1] \times [-1, 1])$  (не обязательно с разделяющимися переменными). Порядок погрешности в двойной интегральной квадратурной формуле (18) и в тройной (19) тот же, что и в одномерной квадратурной формуле (7).

Доказательство, например, проведем для двойного интеграла в простейшем случае  $n_0 = 6$ .

На каноническом квадрате  $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$  с равномерной сеткой для случая  $n_0 = 6$  имеем  $(n_0 + 1)^2 = 49$  узлов (соответственно 49 весовых коэффициентов  $C_{i, j}, i, j = \overline{0, n_0}$ ). Квадратурная формула для двойного интеграла (аналог (6)) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy &= \overline{C_0} f(0, 0) + \overline{C_1} \left( f\left(-\frac{1}{3}, 0\right) + f\left(\frac{1}{3}, 0\right) + f\left(0, -\frac{1}{3}\right) + f\left(0, \frac{1}{3}\right) \right) + \overline{C_2} \left( f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \right. \\ &+ f\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \left. \right) + \overline{C_3} \left( f\left(-\frac{2}{3}, 0\right) + f\left(\frac{2}{3}, 0\right) + f\left(0, -\frac{2}{3}\right) + f\left(0, \frac{2}{3}\right) \right) + \overline{C_4} \left( f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) + \right. \\ &+ f\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) + f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \left. \right) + \overline{C_5} \left( f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) + \right. \\ &+ f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) + f\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \left. \right) + \overline{C_6} (f(0, 1) + f(0, -1) + f(-1, 0) + f(1, 0)) + \overline{C_7} \left( f\left(\frac{1}{3}, 1\right) + f\left(1, \frac{1}{3}\right) + f\left(1, -\frac{1}{3}\right) + \right. \\ &+ f\left(\frac{1}{3}, -1\right) + f\left(-\frac{1}{3}, -1\right) + f\left(-1, -\frac{1}{3}\right) + f\left(-1, \frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}, 1\right) \left. \right) + \overline{C_8} \left( f\left(\frac{2}{3}, 1\right) + f\left(1, \frac{2}{3}\right) + f\left(1, -\frac{2}{3}\right) + \right. \\ &+ f\left(\frac{2}{3}, -1\right) + f\left(-1, -\frac{2}{3}\right) + f\left(-\frac{2}{3}, -1\right) + f\left(-\frac{2}{3}, 1\right) + f\left(-1, \frac{2}{3}\right) \left. \right) + \overline{C_9} (f(1, 1) + f(1, -1) + f(-1, -1) + f(-1, 1)). \end{aligned} \quad (26)$$



В формуле (26) согласно **утверждению 1** сгруппированы с одинаковым весом все узлы, равноудаленные от центра канонического квадрата  $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$  (как видно из формулы (26), число таких узлов 4 либо 8, за исключением центра).

Аналогично одномерной интерполяционной задаче (2) можно поставить двумерную на каноническом квадрате и трехмерную на каноническом кубе задачи интерполяции:

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx dy = \sum_{i,j=0}^{n_0} C_{i,j} = 4; \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^{2s} y^{2l} dx dy = \sum_{i,j=0}^{n_0} C_{i,j} x_i^{2s} y_j^{2l}, 2s+2l \in \overline{0, n_0}. \end{cases} \quad (27)$$

В формуле (27)  $f(x, y) \in C^{n_0+2}([-1, 1] \times [-1, 1])$  используется множество линейно независимых степенных функций двух переменных  $\{1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^{n_0}, x^{n_0-1}y, \dots, xy^{n_0-1}, y^{n_0}\}$ . Здесь  $n_0$  – алгебраический порядок точности квадратурной формулы (27). Из-за симметрии, как и в задаче (2), нетривиальные условия для коэффициентов выполняются, если степени  $x, y$  четные. Используя формулу (26), запишем их:

1)  $f(x, y) \equiv 1$ :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx dy = 4 = \sum_{i,j=0}^{n_0} C_{i,j} = \overline{C_0} + 4\overline{C_1} + 4\overline{C_2} + 4\overline{C_3} + 8\overline{C_4} + 4\overline{C_5} + 4\overline{C_6} + 8\overline{C_7} + 8\overline{C_8} + 4\overline{C_9};$$

2)  $f(x, y) = x^2$  (для  $f(x, y) = x^2$  в силу симметрии получим тот же результат):

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2 dx dy = \frac{4}{3} = \frac{2}{9}\overline{C_1} + \frac{4}{9}\overline{C_2} + \frac{8}{9}\overline{C_3} + \frac{20}{9}\overline{C_4} + \frac{16}{9}\overline{C_5} + 2\overline{C_6} + \frac{40}{9}\overline{C_7} + \frac{52}{9}\overline{C_8} + 4\overline{C_9};$$

3)  $f(x, y) = x^4$  (для  $f(x, y) = x^4$  в силу симметрии получим тот же результат):

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^4 dx dy = \frac{4}{5} = \frac{2}{81}\overline{C_1} + \frac{4}{81}\overline{C_2} + \frac{32}{81}\overline{C_3} + \frac{68}{81}\overline{C_4} + \frac{64}{81}\overline{C_5} + 2\overline{C_6} + \frac{328}{81}\overline{C_7} + \frac{388}{81}\overline{C_8} + 4\overline{C_9};$$

4)  $f(x, y) = x^2 y^2$ :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2 y^2 dx dy = \frac{4}{9} = \frac{4}{81}\overline{C_2} + \frac{32}{81}\overline{C_4} + \frac{64}{81}\overline{C_5} + \frac{8}{9}\overline{C_7} + \frac{32}{9}\overline{C_8} + 4\overline{C_9};$$

5)  $f(x, y) = x^6$  (для  $f(x, y) = x^6$  в силу симметрии получим тот же результат):

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^6 dx dy = \frac{4}{7} = \frac{2}{3^6}\overline{C_1} + \frac{4}{3^6}\overline{C_2} + \frac{128}{3^6}\overline{C_3} + \frac{260}{3^6}\overline{C_4} + \frac{256}{3^6}\overline{C_5} + 2\overline{C_6} + \frac{2920}{3^6}\overline{C_7} + \frac{3172}{3^6}\overline{C_8} + 4\overline{C_9};$$

6)  $f(x, y) = x^4 y^2$  (для  $f(x, y) = x^4 y^2$  в силу симметрии получим тот же результат):

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^4 y^2 dx dy = \frac{4}{15} = \frac{4}{3^6}\overline{C_2} + \frac{80}{3^6}\overline{C_4} + \frac{256}{3^6}\overline{C_5} + \frac{360}{3^6}\overline{C_7} + \frac{1872}{3^6}\overline{C_8} + 4\overline{C_9};$$

7)  $f(x, y) = x^8$ :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^8 dx dy = \frac{4}{9} = \frac{2}{3^8}\overline{C_1} + \frac{4}{3^8}\overline{C_2} + \frac{512}{3^8}\overline{C_3} + \frac{1028}{3^8}\overline{C_4} + \frac{1024}{3^8}\overline{C_5} + 2\overline{C_6} + \frac{26248}{3^8}\overline{C_7} + \frac{27268}{3^8}\overline{C_8} + 4\overline{C_9};$$

8)  $f(x, y) = x^6 y^2$  (для  $f(x, y) = x^2 y^6$  в силу симметрии получим тот же результат):

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^6 y^2 dx dy = \frac{4}{21} = \frac{4}{3^8} \overline{C_2} + \frac{272}{3^8} \overline{C_4} + \frac{1024}{3^8} \overline{C_5} + \frac{2952}{3^8} \overline{C_7} + \frac{13968}{3^8} \overline{C_8} + 4 \overline{C_9};$$

9)  $f(x, y) = x^4 y^4$ :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^4 y^4 dx dy = \frac{4}{25} = \frac{4}{3^8} \overline{C_2} + \frac{128}{3^8} \overline{C_4} + \frac{1024}{3^8} \overline{C_5} + \frac{648}{3^8} \overline{C_7} + \frac{1296}{3^8} \overline{C_8} + 4 \overline{C_9}.$$

Если верно **утверждение 2** с формулой весов  $C_{i,j} = C_i C_j$ ,  $i, j = \overline{0, n_0}$  и сохранением алгебраического порядка точности, таким же как и в одномерном случае (равен 7 для  $n_0 = 6$ ), то условия 1) – 6) должны выполняться тождественно, а условия 7) – 9) имеют погрешность. Учитывая (8), получим

$$\begin{aligned} \overline{C_0} &= C_3 C_3 = \left(\frac{68}{105}\right)^2 = \frac{4624}{11025}; \quad \overline{C_1} = C_3 C_4 = \frac{68}{105} \frac{9}{140} = \frac{612}{14700}; \quad \overline{C_2} = C_4 C_4 = \left(\frac{9}{140}\right)^2 = \frac{81}{19600}; \\ \overline{C_3} &= C_3 C_5 = \frac{68}{105} \frac{18}{35} = \frac{1224}{3850}; \quad \overline{C_4} = C_4 C_5 = \frac{9}{140} \frac{18}{35} = \frac{162}{4900}; \quad \overline{C_5} = C_5 C_5 = \left(\frac{18}{35}\right)^2 = \frac{324}{1225}; \\ \overline{C_6} &= C_3 C_6 = \frac{68}{105} \frac{41}{420} = \frac{2788}{44100}; \quad \overline{C_7} = C_4 C_6 = \frac{9}{140} \frac{41}{420} = \frac{369}{58800}; \\ \overline{C_8} &= C_5 C_6 = \frac{18}{35} \frac{41}{420} = \frac{738}{14700}; \quad \overline{C_9} = C_6 C_6 = \left(\frac{41}{420}\right)^2 = \frac{1681}{176400}. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставим весовые коэффициенты (28)  $\overline{C_i}$ ,  $i = \overline{0, 9}$  в интегральную квадратурную формулу (26) для двойного интеграла от произвольной непрерывной функции  $f(x, y)$ , проверяя справедливость  $C_{i,j} = C_i C_j$ ,  $i, j = \overline{0, n_0}$ . Результаты проверки собраны в таблице 3.

Таблица 3

$f(x, y) \equiv 1$	num(1) = 3,9999999999999996	exact(1) = 4,0000000000000000
$f(x, y) = x^2$	num(2) = 1,3333333333333333	exact(2) = 1,3333333333333333
$f(x, y) = x^4$	num(3) = 0,4444444444444444	exact(3) = 0,4444444444444444
$f(x, y) = x^2 y^2$	num(4) = 0,7999999999999999	exact(4) = 0,8000000000000000
$f(x, y) = x^6$	num(5) = 0,5714285714285714	exact(5) = 0,5714285714285714
$f(x, y) = x^4 y^2$	num(6) = 0,2666666666666666	exact(6) = 0,2666666666666667
$f(x, y) = x^8$	num(7) = 0,4707818930041152	exact(7) = 0,4444444444444444
$f(x, y) = x^6 y^2$	num(8) = 0,1904761904761905	exact(8) = 0,1904761904761905
$f(x, y) = x^4 y^4$	num(9) = 0,0905820105820106	exact(9) = 0,1600000000000000

В первом столбце указана функция, во втором – численное значение правой части (26), в третьем – точное значение интеграла от указанной функции (левая часть формулы (26)). Из таблицы 3 видно, что квадратурная интегральная формула (26) имеет *седьмой алгебраический порядок точности* по **определению 2** (учитывая тривиальное тождество  $0 = 0$  для функции  $f(x, y) = x^l y^s$ ,  $l + s = 7$  (27)).

Нами показано на пересечении пространств  $f(x, y) \in C^{n_0+2}([-1, 1] \times [-1, 1])$ , что с использованием тождества  $C_{i,j} = C_i C_j$ ,  $i, j = \overline{0, n_0}$  ( $n_0 = 6$ ) двухмерная квадратурная формула (26) имеет седьмой алгебраический порядок точности для произвольной функции и этот порядок совпадает с порядком одномерной формулы.

**Замечание.** Из квадратурных формул для двойных (18) и тройных (19) интегралов и функций с разделяющимися переменными следует равенство алгебраических порядков точности квадратурных формул с учетом  $C_{i,j} = C_i C_j (C_{i,j,s} = C_i C_j C_s)$ ,  $i, j, s = \overline{0, n_0}$  алгебраическому порядку точности одномерной квадратурной формулы (7).

Действительно, перемножая интегральные суммы, точные для многочленов степени  $m$ , получим двойные или тройные интегральные суммы точные для многочленов того же порядка.

Проверим численно, что алгоритмы 1) – 6) для кратных интегралов сохраняют такой же алгебраический порядок точности, как и в однократном интеграле, используя в программе формулы (20), (8) для тройного интеграла:

$$\int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 e^x y^4 z^5 dx dy dz = \frac{y^5 z^6}{30} (e^x - 1) \Big|_0^2 = (e^2 - 1) \frac{2^{11}}{30} = 436,1595630203324 \text{ (16 значащих цифр)}.$$

Для небольших  $N$  численно получим:

1) если  $N = 18$ , программа возвращает значение  $epsilon = 0,000000000245057$ ,  
 $int\ 3 = 436,1595630310208100$ ,  $exact = 436,1595630203324300$ ,  $delta = 0,0000000106883$ ;

2) если  $N = 36$ , программа возвращает значение  $epsilon = 0,0000000000000989$ ,  
 $int\ 3 = 436,1595630203755700$ ,  $exact = 436,1595630203324300$ ,  $delta = 0,0000000000431$ .

Определим порядок погрешности формул (20), (8). При уменьшении шага сетки в 2 раза погрешность уменьшится в 256 раз, т.к.

$$\left| \frac{delta_2}{delta_1} \right| = \frac{0,0000000106883}{0,0000000000431} = 248 \approx 256 = 2^8,$$

т.е. порядок погрешности равен 8 (согласно определению 2).

### 3. Интерполяция интегралов в полярной и сферической системах координат.

Рассмотрим равновеликое отображение обобщенных координат – полярных в кольце (круге) на прямоугольник в декартовой системе координат, сохраняющее площади фигур и равномерный шаг сетки вдоль всех координатных линий:

$$b = r_2 - r_1, \quad a = \pi(r_2 + r_1),$$

где  $r_2, r_1$  – внешний и внутренний радиусы кольца;

$a, b$  – стороны прямоугольника.

Тогда площадь кольца  $S = ab = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ , где  $0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$ ,

$$\frac{x}{a} = \frac{\varphi}{2\pi}, \quad y = r - r_1, \quad dx = \frac{a}{2\pi} d\varphi, \quad dy = dr, \quad h_1 = \frac{\pi(r_2 + r_1)}{n}, \quad h_2 = \frac{(r_2 - r_1)}{n}.$$

При таком отображении оба берега разреза кольца вдоль радиуса  $\varphi = 0 \rightarrow x = 0; \varphi = 2\pi \rightarrow x = a$  переходят в вертикальные стороны прямоугольника, внутренняя и внешняя окружности  $r_1 = \text{const} \rightarrow y = 0; r_2 = \text{const} \rightarrow y = r_2 - r_1$  переходят в горизонтальные стороны прямоугольника.

По теореме 4 [5, с. 282] отображение  $(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$  должно обладать следующими свойствами:

якобиан замены координат  $\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{a}{2\pi} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{a}{2\pi} \neq 0$  во всех точках рассматриваемой области;

частные производные  $x_r, x_\varphi, y_r, y_\varphi$  непрерывны во всех точках области; отображение  $(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$  взаимно однозначно в силу линейности отображения обобщенных координат. Все требования выполнены, если область интегрирования – кольцо ( $r_1 \neq 0$ ). В случае круга ( $r_1 = 0$ ) удовлетворены первые 2 требования из трех. Третье – неоднозначность отображения в точке  $r_1 = 0$  – не выполнено, что в данном интеграле несущественно, так как мера интеграла в полярных координатах в окрестности указанной точки  $dI_2 = f(r, \varphi) r dr d\varphi = f(0, \varphi) 0 dr d\varphi = 0$ .

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) r dr d\varphi = \int_0^a \int_0^b f\left(y + r_1, \frac{2\pi}{a}x\right) (y + r_1) dy \frac{2\pi}{a} dx = \frac{2\pi}{a} \int_0^{(r_2-r_1)\pi} \int_0^{(r_2+r_1)\pi} f\left(y + r_1, \frac{2\pi}{a}x\right) (r_1 + y) dy dx = \\
&= \frac{2\pi}{\pi(r_2 + r_1)} \int_0^{(r_2-r_1)\pi} \int_0^{(r_2+r_1)\pi} f\left(y + r_1, \frac{2\pi}{a}x\right) (r_1 + y) dy dx = \frac{2}{(r_2 + r_1)} \int_0^{(r_2-r_1)\pi} \int_0^{(r_2+r_1)\pi} f\left(y + r_1, \frac{2\pi}{a}x\right) (r_1 + y) dy dx \approx \\
&\approx \frac{2}{(r_2 + r_1)} \frac{n_0 h_1}{2} \frac{n_0 h_2}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n C_{i,j} f\left(r_1 + y_j, \frac{2\pi}{a}x_i\right) (r_1 + y_j) = \frac{n_0^2 h_1 h_2}{2(r_2 + r_1)} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n C_{i,j} f\left(r_1 + jh_2, \frac{2\pi}{a}ih_1\right) (r_1 + jh_2).
\end{aligned} \quad (29)$$

Рассмотрим пример (ответ запишем 16 значащими цифрами):

$$\int_0^{10} \int_0^{2\pi} r^8 \sin^2(\varphi) r dr d\varphi = \frac{r^{10}}{10} \Big|_0^{10} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = 10^9 \left( \pi - \frac{\sin 2\varphi}{4} \Big|_0^{2\pi} \right) = 10^9 \pi = 3141592653,589793.$$

Программа для двойных интегралов в полярной системе координат с учетом формул (29), (14): при  $n_1 = 5$ ,  $r_1 = 0,0$ ,  $r_2 = 10,0$  возвращает значения (в программе  $N \equiv n$ ):

$n = 14$   $k = 1$  *numerical* = 3141521192,673302 *exact* = 3141592653,589793 *delta* = 71460.916492  $n = 14$   
*epsilon* (14) = 0,0000227467161950

$n = 28$   $k = 2$  *numerical* = 3141592655,167346 *exact* = 3141592653,589793 *delta* = -1,577553  $n = 28$   
*epsilon* (28) = -0,0000000005021507

$n = 42$   $k = 3$  *numerical* = 3141592653,589776 *exact* = 3141592653,589793 *delta* = 0,000017  $n = 42$   
*epsilon* (42) = 0,0000000000000055

$n = 56$   $k = 4$  *numerical* = 3141592653,589798 *exact* = 3141592653,589793 *delta* = -0,000005  $n = 56$   
*epsilon* (56) = -0,0000000000000015

$n = 70$   $k = 5$  *numerical* = 3141592653,589792 *exact* = 3141592653,589793 *delta* = 0,000001  $n = 70$   
*epsilon* (70) = 0,0000000000000005

$v(1) = 3141521192,673302$

$v(2) = 3141592653,589776$

$v(3) = 3141592653,589792$

$v(4) = 3141592653,589798$

$v(5) = 3141592655,167346$

*result: k(opt) = 5 epsilon(5) = -0,0000000000000005*

*int(polar) = 3141592653,589792 exact = 3141592653,589793 delta = -0,000001.*

Мы видим, что значение интеграла в круге  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 10$  достигает двойной точности *epsilon* =  $-5 \cdot 10^{-16}$  и  $n = 70$ . Часто на практике неизвестно точное значение интеграла, например, оно не может быть выражено через элементарные функции. Поэтому в программе использован алгоритм медианной фильтрации, позволяющий из нескольких значений интеграла при малых параметрах  $N = 14k$  выбрать значение с наименьшей относительной ошибкой, соответствующее центральному элементу окна фильтра (элемент массива  $v[(n_1 + 1)/2]$ ,  $n_1 = 5$ ), что видно по результату программы. Медианная фильтрация применима здесь благодаря знакопеременности относительной погрешности *epsilon* [7]. Получаемая численная погрешность не является случайной величиной и повторяет свое значение при запуске программы. Оптимальное значение числа узлов  $k(opt)$  с наименьшей относительной ошибкой может быть найдено предварительно и фиксироваться в цикле при вычислении нескольких тысяч интегралов. В алгоритме (14) мы видим рациональные весовые коэффициенты с 10 значащими цифрами, тогда используя формулы (22), (25) получим произведение весовых коэффициентов с 20 и 30 значащими цифрами соответственно. Распространенные компиляторы обеспечивают только двойную точность (16 значащих цифр) относительной погрешности *epsilon*. Использование компиляторов с 32 значащими цифрами обеспечит эффективное применение алгоритма (14) без потери точности. Оценим порядок точности в (22), (14) по первым 2 значениям *delta*:

$$\left| \frac{\text{delta}(14)}{\text{delta}(28)} \right| = \left| \frac{71460,916492}{-1,577553} \right| = 45300 \approx 2^{16} = 65536,$$

т.е. погрешность пары (25) и (13) имеет тот же 16-й порядок, что и порядок погрешности интегральных квадратур 15-го алгебраического порядка точности на отрезке и прямоугольнике, согласно замечанию 3 леммы, но примененным уже в полярной системе координат.

Рассмотрим пример (ответ запишем 16 значащими цифрами):

$$\int_5^{10} \int_0^{2\pi} r^8 \sin^2 \varphi r dr d\varphi = \pi \frac{r^{10}}{10} \Big|_5^{10} = \pi(10^{10} - 5^{10}) / 10 = 3138524692,01402.$$

Для параметров  $n_1 = 5, r_1 = 5, r_2 = 10, 0$  программа возвращает значения:

result:  $k(opt) = 4$   $epsilon(4) = 0,0000000000000024$

int(polar) = 3138524692,0140295 exact = 3138524692,014022 delta = 0,0000076

То есть в кольце формульная пара (29), (14) обеспечивает двойную точность относительной погрешности.

Рассмотрим равновеликое отображение обобщенных координат – сферической системы в шаре (шаровом слое) на декартовую систему в параллелепипеде, сохраняющее объемы тел и равномерный шаг сетки вдоль всех координатных линий:

$$a = \pi(r_2 + r_1), \quad b = \frac{4}{3} \left( \frac{r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2}{r_2 + r_1} \right), \quad c = r_2 - r_1,$$

где  $r_2, r_1$  – внешний и внутренний радиусы шарового слоя;

$a, b, c$  – стороны параллелепипеда.

Тогда объем шарового слоя  $V = abc = \frac{4}{3} \pi (r_2^3 - r_1^3)$ , где  $0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b,$

$$0 \leq z \leq c, \quad \frac{x}{a} = \frac{\varphi}{2\pi}, \quad \frac{\theta}{\pi} = \frac{y}{b}, \quad z = r - r_1, \quad dx = \frac{a}{2\pi} d\varphi, \quad dy = \frac{b}{\pi} d\theta, \quad dz = dr, \quad z_k = kh_1, \quad h_1 = \frac{c}{n}; \quad y_j = h_2 j,$$

$$h_2 = \frac{b}{n} j; \quad x_i = h_3 i, \quad h_3 = \frac{a}{n}; \quad i, j, k = \overline{0, n}.$$

При отображении  $x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi)$  внутренняя и внешняя сфера переходят в нижнюю и верхнюю грани параллелепипеда  $r_1 = \text{const} \rightarrow z = 0; r_2 = \text{const} \rightarrow z = r_2 - r_1$ . Сечения:  $\varphi = 0 \rightarrow x = 0; \varphi = 2\pi \rightarrow x = a; \theta = 0 \rightarrow y = 0, \theta = \pi \rightarrow y = b$ . По теореме 9 [5, с. 298] отображение  $x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi)$  должно иметь свойства:

1) якобиан перехода

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} x_r, x_\theta, x_\varphi \\ y_r, y_\theta, y_\varphi \\ z_r, z_\theta, z_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{a}{2\pi} \\ 0 & \frac{b}{\pi} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{ab}{2\pi^2} \neq 0$$

во всех точках рассматриваемой области;

2) частные производные  $x_r, x_\theta, x_\varphi, y_r, y_\theta, y_\varphi, z_r, z_\theta, z_\varphi$  непрерывны во всех точках области;

3) отображение  $x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi)$  взаимно однозначно в силу линейности отображения обобщенных координат.

Первые два требования выполняются всегда.

Если область – сферический слой или шар, то не выполнено третье условие в точке  $r = 0$  и в 2-х азимутальных направлениях:  $\theta_1 = 0, \theta_1 = \pi$  (особые направления).

Можно проколоть сферический слой насквозь вдоль выбранных направлений, что топологически эквивалентно сфере с 1 ручкой. Сжать указанную область от полюсов к экватору так, что получится то-образный слой с плоскими боковыми гранями, разрезать его от оси симметрии плоскостью  $\varphi = 0$  и разогнуть полученное тело в параллелепипед.

Вдоль особых направлений неоднозначность отображения нарушается, что, однако, не сказывается на мере интеграла в сферических координатах, так как во всех точках направлений  $\theta = 0, \theta = \pi,$   $f(r, \theta, \varphi) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi = 0$ .

Для шара имеем еще одну особую точку  $r_1 = 0$ , где также выполнены первые 2 требования гладкой замены переменных интегрирования, кроме третьего (неоднозначность отображения в точке  $r_1 = 0$ ), что в данном интеграле несущественно, т.к. мера интеграла в сферических координатах в окрестности указанной точки  $dl_3 = f(r, \theta, \varphi) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = f(0, \theta, \varphi) 0^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0$ .

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(r, \theta, \varphi) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^c \int_0^b \int_0^a f\left(r_1 + z, \frac{\pi y}{b}, \frac{2\pi}{a} x\right) (r_1 + z)^2 dz \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \frac{\pi}{b} dy \frac{2\pi}{a} dx = \\
 &= \frac{2\pi^2}{ab} \int_0^{r_2-r_1} \int_0^{\frac{4}{3}\left(\frac{r_2^2+r_1 r_2+r_1^2}{r_2+r_1}\right)\pi(r_2+r_1)} f\left(r_1 + z, \frac{\pi y}{b}, \frac{2\pi}{a} x\right) (r_1 + z)^2 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) dz dy dx = \\
 &= \frac{3\pi}{2(r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2)} \int_0^{r_2-r_1} \int_0^{\frac{4}{3}\left(\frac{r_2^2+r_1 r_2+r_1^2}{r_2+r_1}\right)\pi(r_2+r_1)} f\left(r_1 + z, \frac{\pi y}{b}, \frac{2\pi}{a} x\right) (r_1 + z)^2 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) dz dy dx \approx \quad (30) \\
 &\approx \frac{3\pi}{2(r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2)} \frac{n_0 h_1}{2} \frac{n_0 h_2}{2} \frac{n_0 h_3}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n C_{i,j,k} f\left(r_1 + z_k, \frac{\pi y_j}{b}, \frac{2\pi}{a} x_i\right) (r_1 + z_k)^2 \sin\left(\frac{\pi y_j}{b}\right) = \\
 &= \frac{3\pi n_0^3 h_1 h_2 h_3}{16(r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2)} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n C_{i,j,k} f\left(r_1 + k h_1, \frac{\pi}{b} h_2 j, \frac{2\pi}{a} h_3 i\right) (r_1 + k h_1)^2 \sin\left(\frac{\pi}{b} h_2 j\right).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим пример:

$$\int_5^{10} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(r^7 \sin^2 \varphi \sin \theta\right) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{r^{10}}{10} \Big|_5^{10} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta) d\theta = \left(10^{10} - 5^{10}\right) \frac{\pi^2}{20}.$$

Программа для тройных интегралов в сферической системе координат с учетом формул (11) и (30) возвращает значения (в программе  $N \equiv n$ ):

$n = 10 \quad k = 1 \quad numerical = 4914074506,509758 \quad exact = 4929983057,770709 \quad delta = -15908551,260951$

$epsilon(10) = -0,0032373443340911$

$n = 20 \quad k = 2 \quad numerical = 4929989554,759921 \quad exact = 4929983057,770709 \quad delta = 6496,989212$

$epsilon(20) = 0,0000013178505025$

$n = 30 \quad k = 3 \quad numerical = 4929983057,770734 \quad exact = 4929983057,770709 \quad delta = 0,000025$

$epsilon(30) = 0,0000000000000050$

$v(1) = 4914074506,509758$

$v(2) = 4929983057,770734$

$v(3) = 4929989554,759921$

$result: k(opt) = 3 \quad epsilon(3) = 0,0000000000000050$

$int = 4929983057,770734 \quad exact = 4929983057,770709 \quad delta = 0,000025$

По первым 2 значениям  $delta$  при малых  $N$  оценим порядок погрешности формул (26) и (10):

$$2028 = 2^{11} < \left| \frac{delta(10)}{delta(20)} \right| = \left| \frac{-15908551,260951}{6496,989212} \right| = 2449 < 2^{12} = 4096,$$

что является хорошим подтверждением леммы для алгоритма (11) и квадратур с алгебраическим порядком точности равным 11, но примененным уже к тройному интегралу в сферической системе координат.

#### Выводы:

1. Получены пары формула–алгоритм ((7)–(8); (10)–(11); (13)–(14)) для составных интегральных квадратур с равномерным шагом 7-м, 11-м, 15-м алгебраическим порядком точности соответственно.

2. Найдены аналоги пар формул (20) – (23), (21) – (24) для двойных на прямоугольнике и тройных в параллелепипеде интегралов с сохранением порядка погрешности, как и в одномерном случае.

3. Построены линейные отображения обобщенных координат с кольца (круга) на прямоугольник, с шарового слоя (шара) на параллелепипед, а также интегральные квадратуры (29) в полярной системе координат и (30) в сферической системе координат с сохранением алгебраического порядка точности, что проверено численно.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 2008.
2. Пикулин, В. П. Практический курс по уравнениям математической физики / В. П. Пикулин, С. И. Похожаев. – М. : Наука, 1995.
3. Бахвалов, Н. С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.
4. Об эффективном поиске безусловного экстремума гладких функционалов в конечномерных задачах / О. В. Голубева [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 4. – С. 119–131.
5. Математический анализ в вопросах и задачах / В. Ф. Бутузов [и др.]. – М. : Физ.-мат. лит-ра, 2001. – 480 с.
6. Баргеньев, О. В. Математическая библиотека IMSL : в 3 ч. / О. В. Баргеньев. – М. : Диалог МИФИ, 2001. – Ч. 1. – 457 с.
7. Пастухов, Ю. Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов // Вест. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.

Поступила 20.09.2016

#### THE APPROXIMATION OF DOUBLE AND TRIPLE INTEGRAL IN THE INNER BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

*O. GOLUBEVA, S. EHILEVSKI, N. GUREVA, D. PASTUHOV, Y. PASTUHOV*

*Formulas and algorithms for component integral squarings with even at a walk with 7, 11, 15 algebraic rather accuracy and with 8, 12, 16 rather inaccuracy accordingly are received in the inner boundary value problems of mathematical physics. The analogues molded for double on rectangle and triple in parallelepiped integral with conservation such order to inaccuracy, as in univariate event are founded. The linear images of the generalised coordinates are built with layer of circle (the circle) on rectangle, with ball layer (the ball) on box, as well as integral squarings in arctic coordinate system and in spherical coordinate system with conservation of the algebraic order to accuracy that is checked numerically. The lemma, indicating minimum number of the nodes sufficient for calculation of the integral with double accuracy is proved. They are brought corresponding to algorithms.*

**Keywords:** *algebraic order to accuracy, order to inaccuracy, pattern of factor, method of median to filtering, ring, ball layer, approximation integral.*

УДК 517.983

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ  
ФУНКЦИЕЙ КУММЕРА И НОРМИРОВАННОЙ ФУНКЦИЕЙ БЕССЕЛЯ В ЯДРАХ  
И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА В ПРОСТРАНСТВЕ  
СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ**

*канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. СКОРОМНИК  
(Полоцкий государственный университет)*

Рассматриваются три интегральных преобразования с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера и нормированной функцией Бесселя в ядрах в пространствах  $p$ -суммируемых функций на конечном отрезке  $[a, b]$  действительной оси. В работе даются условия ограниченности, описание образов этих операторов, а также устанавливаются формулы обращения. Рассматриваются также три соответствующих интегральных уравнения первого рода с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера и нормированной функцией Бесселя в ядрах. Устанавливаются формулы решения исследуемых уравнений в замкнутой форме, даются условия их разрешимости в пространстве интегрируемых функций. Доказанные утверждения обобщают результаты, хорошо известные ранее для соответствующих интегральных уравнений первого рода.

**Ключевые слова:** интегральные преобразования, интегральные уравнения, вырожденная гипергеометрическая функция, нормированная функция Бесселя, дробные интегралы и производные, пространство интегрируемых функций.

**Введение.** Рассмотрим интегральные преобразования в левых частях (1.1)–(1.3)

$$\left(I_{a+; \sigma}^{\alpha, \beta, \lambda} f\right)(x) \equiv \int_a^x \frac{(x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} {}_1F_1\left(\beta; \alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right) \sigma t^{\sigma-1} f(t) dt = g(x), \quad x > a; \quad (1.1)$$

$$\left(A_{a+; \sigma}^{\alpha, \lambda} f\right)(x) \equiv \int_a^x \frac{(x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bar{J}_{(\alpha-1)/2}\left(\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right) \sigma t^{\sigma-1} f(t) dt = g(x), \quad x > a; \quad (1.2)$$

$$\left(B_{a+; \sigma}^{\alpha, \lambda} f\right)(x) \equiv \int_a^x \frac{(x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bar{J}_{\alpha/2-1}\left(\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right) \sigma t^{\sigma-1} f(t) dt = g(x), \quad x > a, \quad (1.3)$$

с действительными параметрами  $\sigma > 0, \lambda > 0, 0 < \alpha < 1, \beta$ , содержащие вырожденную гипергеометрическую функцию Куммера  ${}_1F_1(a; c; z)$  и нормированную функцию Бесселя  $\bar{J}_\nu(z)$  в ядрах. Вырожденная гипергеометрическая функция Куммера определяется по формуле [1, §1], [2, § 1.6]

$${}_1F_1(a; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} = \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(a, b; c; \frac{z}{b}\right), \quad |z| < \infty, \quad (1.4)$$

здесь  $(a)_k$  – символ Похгаммера:  $(a)_0 \equiv 1, (a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$  ( $a \in \mathbb{C}; k \in \mathbb{N}$ );

${}_2F_1(a, b; c; z)$  – гипергеометрическая функция Гаусса, определяемая при комплексных  $a, b, c \in \mathbb{C}$  и  $|z| < 1$  гипергеометрическим рядом

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}$$

с соответствующим аналитическим продолжением

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt$$

для  $z \in \mathbb{C}, 0 < \operatorname{Re} b < \operatorname{Re} c, (|\arg(1-z)| < \pi, z \neq 1)$  [3, 2.1(2) и 2.1.(10)];



$\bar{J}_\nu(z)$  – нормированная функция Бесселя определяется по формуле [1, § 37.1]:

$$\bar{J}_\nu(z) = \bar{I}_\nu(iz) = \Gamma(\nu+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(z), \quad |z| < \infty, \quad (1.5)$$

где  $J_\nu(z)$  – функция Бесселя первого рода [1, §1.3; 4]:

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(\nu+k+1)k!}. \quad (1.6)$$

Будем считать, что  $a > -\infty$  и преобразования в левых частях (1.1)–(1.3) рассматриваются на конечном отрезке  $[a, b]$ .

Конструкции вида (1.1)–(1.3) обобщают соответствующие интегральные преобразования в [1, § 37.1] при  $\sigma = 1$ .

В работе интегральные преобразования (1.1)–(1.3) изучаются в пространствах  $p$ -суммируемых функций на конечном отрезке  $[a, b]$  действительной оси. Даются условия ограниченности операторов преобразований в левых частях (1.1)–(1.3), описание образов этих операторов, а также устанавливаются формулы их обращения. Рассматриваются также три соответствующих интегральных уравнения первого рода с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера и нормированной функцией Бесселя в ядрах. Устанавливаются формулы решения исследуемых уравнений в замкнутой форме, даются условия их разрешимости в пространстве интегрируемых функций. Доказанные утверждения обобщают результаты, полученные ранее для соответствующих интегральных уравнений первого рода [1, § 37.1].

**Предварительные сведения.**

Интегралы

$$\begin{aligned} (I_{a+}^\alpha \varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a, \quad \text{Re}(\alpha) > 0, \\ (I_{b-}^\alpha \varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b, \quad \text{Re}(\alpha) > 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

называются интегралами Римана – Лиувилля дробного порядка  $\alpha$  [1].

Первый из них называют левосторонним, а второй – правосторонним. Операторы  $I_{a+}^\alpha$ ,  $I_{b-}^\alpha$  называют операторами дробного интегрирования.

Каждое из выражений

$$\begin{aligned} (D_{a+}^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad x > a, \quad n = [\text{Re}(\alpha)] + 1, \\ (D_{b-}^\alpha f)(x) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad x < b, \quad n = [\text{Re}(\alpha)] + 1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

называется дробной производной порядка  $\alpha \in C, \text{Re}(\alpha) \geq 0$ , соответственно левосторонней и правосторонней. Дробный интеграл порядка  $\alpha \in C, \text{Re}(\alpha) > 0$ , функции  $\varphi(x)$  по функции  $g(x)$  определяется формулой [1, § 18.2]

$$(I_{a+;g}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(g(x)-g(t))^{1-\alpha}} g'(t) dt, \quad x > a.$$

В частности, дробный интеграл порядка  $\alpha \in C, \text{Re}(\alpha) > 0$ , функции  $\varphi(x)$  по функции  $x^\sigma$  ( $x > a, \sigma \in R$ ) выражается формулой

$$(I_{a+;x^\sigma}^\alpha \varphi)(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{t^{\sigma-1} \varphi(t)}{(x^\sigma - t^\sigma)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a, \quad (2.3)$$

а соответствующая дробная производная порядка  $\alpha$  ( $\text{Re}(\alpha) \geq 0$ ) функции  $\varphi(x)$  по функции  $x^\sigma$  ( $x > a, \sigma \in R$ ) имеет вид

$$\left(D_{a+;x^\sigma}^\alpha f\right)(x) = \left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1} dx}\right)^n \left(I_{a+;x^\sigma}^{n-\alpha} f\right)(x), \quad x > a, n = \text{Re}[\alpha] + 1. \quad (2.4)$$

Мы будем использовать для (2.3) и (2.4) следующие обозначения:

$$I_{a+;x^\sigma}^\alpha \varphi = \begin{cases} I_{a+;x^\sigma}^\alpha \varphi, & \text{Re } \alpha > 0, \\ D_{a+;x^\sigma}^{-\alpha} \varphi, & \text{Re } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

В работе преобразования (1.1)–(1.3) изучаются в пространствах  $L_p = L_p(\Omega)$  [1, § 1.2], измеримых на  $\Omega = [a, b], -\infty < a < b < \infty$ , функций  $f(x)$ , вообще говоря, комплекснозначных, для которых

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty, \text{ где } 1 \leq p < \infty, \text{ с нормой } \|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Функция  $f(x)$  называется абсолютно непрерывной на отрезке  $\Omega$ , если по любому  $\varepsilon > 0$  можно найти такое  $\delta > 0$ , что для любой конечной системы попарно непересекающихся отрезков  $[a_k, b_k] \subset \Omega, k = 1, 2, \dots, n$ , такой, что  $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ , справедливо неравенство  $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$ .

Класс всех таких функций обозначается  $AC(\Omega)$  [1, § 1.1]. Известно, что пространство  $AC([a, b])$  абсолютно непрерывных функций совпадает с классом первообразных от суммируемых по Лебегу функций [7, с. 338; 8, с. 368–369]:

$$g(x) \in AC([a, b]) \Leftrightarrow g(x) = c + \int_a^x f(t) dt, \int_a^b |f(t)| dt < \infty,$$

поэтому абсолютно непрерывные функции имеют почти всюду суммируемую производную  $g'(x)$ .

Через  $I_{a+}^\alpha(L_p(a, b)), \text{Re}(\alpha) > 0$ , обозначим класс функций  $g(x)$ , представимых левосторонним дробным интегралом (2.1) порядка  $\alpha$  от суммируемой функции  $g = I_{a+}^\alpha f, f \in L_p(a, b), 1 \leq p < \infty$  [1, § 2.6].

Через  $I_{a+;x^\sigma}^\alpha(L_p(a, b)), \text{Re}(\alpha) > 0$ , обозначим класс функций  $g(x)$ , представимых левосторонним дробным интегралом порядка  $\alpha$  функции  $f(x)$  по функции  $x^\sigma$  ( $x > a, \sigma \in R$ ) (2.3) от суммируемой функции  $f(x): g = I_{a+;x^\sigma}^\alpha f, f \in L_p(a, b), 1 \leq p < \infty$ .

Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$  – комплексные числа такие, что существует одно  $\alpha_j$ , для которого  $\text{Re } \alpha_j = \min(\text{Re } \alpha_1, \dots, \text{Re } \alpha_n, \text{Re } \alpha_{n+1})$ . Тогда положим  $\alpha_{n+1} = 0$  и введем функцию [1, § 10]

$$m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{cases} 0, & \text{Re } \alpha_j > 0, i = 1, 2, \dots, n. \\ -\alpha_j, & \text{если существует } \alpha_j, \text{ для которого} \\ \text{Re } \alpha_j < \min(0, \text{Re } \alpha_1, \dots, \text{Re } \alpha_{j-1}, \text{Re } \alpha_{j+1}, \dots, \text{Re } \alpha_n) \end{cases}$$

(если существуют  $\alpha_j, \alpha_k$  такие, что  $\alpha_j \neq \alpha_k$ , но  $\text{Re } \alpha_j = \text{Re } \alpha_k = \min(0, \text{Re } \alpha_1, \dots, \text{Re } \alpha_n)$ , то функция  $m(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  не определяется) и пространство

$$I_{a+}^{m(\alpha)}(L_p(a, b)) = \begin{cases} L_p(a, b), & \text{Re } \alpha > 0, \\ I_{a+}^{-\alpha}(L_p(a, b)), & \text{Re } \alpha < 0, \end{cases} \quad -\infty < a < b < +\infty.$$

Введем также некоторые функциональные пространства.  $C^m([a,b])$  означает класс функций,  $m$  раз непрерывно дифференцируемых на отрезке  $[a,b]$  с нормой  $\|f\|_{C^m} = \max_{x \in \Omega} \sum_{k=1}^m |f^{(k)}(x)|$ ,  $m = 0, 1, \dots$ ,  $\|f\|_{C^0} \equiv \|f\|_C$ . Через  $H^\lambda([a,b])$  обозначается класс всех (вообще говоря, комплекснозначных) функций, удовлетворяющих на отрезке  $[a,b]$  условию Гельдера фиксированного порядка  $\lambda$ :  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq A|x_1 - x_2|^\lambda$  для всех  $x_1, x_2 \in [a,b]$ , где  $A$  – постоянная.

**Теорема 1** [1, теорема 37.1]. Операторы в левых частях (1.1)–(1.3) при  $\sigma = 1$  ограниченно действуют из пространства  $L_p(a,b)$ ,  $p \geq 1$ , на пространство  $I_{a+}^\alpha(L_p(a,b)) \subset L_p(a,b)$ ,  $-\infty < a < b < \infty$ .

**Теорема 2** [1, теорема 18.1]. Класс функций, представимых дробным интегралом  $I_{a+;g}^\alpha \varphi$ ,  $0 < \alpha < 1$ , от функции из  $\varphi \in L_p(a,b)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $-\infty < a < b < \infty$ , не зависит от выбора функции  $g(x)$ :

$$I_{a+;g}^\alpha(L_p) = I_{a+}^\alpha(L_p),$$

если  $g(x) \in C^1([a,b])$ ,  $g'(x) \in H^\lambda([a,b])$  и имеет место  $g'(x) \neq 0$ ,  $a \leq x \leq b$ . При этом  $I_{a+;g}^\alpha \varphi = I_{a+}^\alpha \psi$ ,

$$\psi(x) = [g'(x)]^\alpha \varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial \Phi(x,s)}{\partial x} \varphi(s) ds \in L_p, \quad \text{где} \quad \Phi(x,s) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} g'(x) \int_s^x (x-u)^{-\alpha} (u-s)^{\alpha-1} h(s,u) du,$$

$$h(s,u) = \left[ \frac{u-s}{g(u)-g(s)} \right]^{1-\alpha} = \left[ \int_s^x g'(u+(s-u)\xi) d\xi \right]^{\alpha-1}.$$

Преобразование Лапласа функции  $f(x)$  ( $x > 0$ ) определяется формулой [1, формула (1.119)]

$$Lf = (L f)(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt. \tag{2.5}$$

При  $\text{Re}(b) > 0$ ,  $\text{Re}(s) > \max(0, \text{Re} k)$ ,  $|s| > k$ , имеет место формула [3, формула 6.10(5)]

$$L\{t^{b-1} {}_1F_1(a, c; kt); s\} = \Gamma(b) s^{-b} {}_2F_1(a, b; c; ks^{-1}) = \Gamma(b) (s-k)^{-b} {}_2F_1\left(c-a, b; c; \frac{k}{k-s}\right), \quad |s-k| > |k|. \tag{2.6}$$

Обобщенное преобразование Лапласа функции  $f(x)$  ( $x > 0$ ) определяется формулой [5, формулы (2.5.26), (3.3.3)]

$$(L_{k, \alpha} f)(s) = \int_0^\infty (st)^{-\alpha} e^{-k(st)^{1/k}} f(t) dt, \quad k \in R \setminus \{0\}, \alpha \in R, s \in R_+. \tag{2.7}$$

Нам понадобятся следующие формулы [6, формула (2.12.8.3) и (2.12.8.4) для случаев  $I_v^{v+1}$  и  $I_v^{v+2}$ ]:

$$\int_0^\infty e^{-px} J_v(cx) dx = \frac{c^v}{\sqrt{p^2 + c^2}} \left( p + \sqrt{p^2 + c^2} \right)^{-v}, \quad \text{Re } p > |\text{Im } c|; \text{Re } v > -1; \tag{2.8}$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-px} J_v(cx) dx = \frac{(2c)^v}{\sqrt{\pi}} (p^2 + c^2)^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right), \quad \text{Re } v > -\frac{1}{2}; \tag{2.9}$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-px} J_v(cx) dx = \frac{2p(2c)^v \Gamma\left(v + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi} (p^2 + c^2)^{v+\frac{3}{2}}}, \quad \text{Re } v > -1. \tag{2.10}$$

**Действие операторов (1.1)–(1.3). Значения обобщенного преобразования Лапласа равенств (1.1)–(1.3)**

В силу равенства  $\bar{J}_\nu(0) = \bar{I}_\nu(0) = 1$  получаем

$$I_{a+;\sigma}^{\alpha,\beta,0} = A_{a+;\sigma}^{\alpha,0} = B_{a+;\sigma}^{\alpha,0} = C_{a+;\sigma}^{\alpha,0} = I_{a+;x^\sigma}^\alpha. \quad (3.1)$$

Это позволяет операторы в левых частях (1.1)–(1.3) считать некоторыми обобщениями интегралов дробного порядка  $\alpha$  функции  $\varphi(x)$  по функции  $x^\sigma I_{0+;x^\sigma}^\alpha$ , определяемым по формуле (2.3).

Исходя из представлений ядер указанных операторов через ряды и воспользовавшись формулой удвоения  $\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$  [1, формула (1.61)], выписываем следующие формулы, отражающие структуру операторов (1.1)–(1.3):

$$I_{a+;\sigma}^{\alpha,\beta,\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta)_k}{k!} \lambda^k I_{a+;x^\sigma}^{\alpha+k} = I_{a+;x^\sigma}^\alpha \left( E - \lambda I_{a+;x^\sigma}^1 \right)^{-\beta}, \quad (3.2)$$

$$A_{a+;\sigma}^{\alpha,\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha/2)_k}{k!} (-\lambda^2)^k I_{a+;x^\sigma}^{\alpha+2k} = I_{a+;x^\sigma}^\alpha \left( E + \lambda^2 I_{a+;x^\sigma}^2 \right)^{-\alpha/2}, \quad (3.3)$$

$$B_{a+;\sigma}^{\alpha,\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_k}{k!} (-\lambda^2)^k I_{a+;x^\sigma}^{\alpha+2k} = I_{a+;x^\sigma}^\alpha \left( E + \lambda^2 I_{a+;x^\sigma}^2 \right)^{-(\alpha+1)/2}, \quad (3.4)$$

где  $E$  – единичный оператор.

Отмеченная в (3.1) связь с дробными интегралами (2.3) дает возможность заключить, что операторы (1.1)–(1.3) обладают в пространстве  $L_p = L_p(a,b)$  таким же действием, как и оператор  $I_{a+;x^\sigma}^\alpha$ . Тогда справедлива теорема.

**Теорема 3.** Операторы в левых частях (1.1)–(1.3) ограниченно действуют из пространства  $L_p(a,b)$ ,  $p \geq 1$ , на пространство  $I_{a+;x^\sigma}^\alpha(L_p(a,b))$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $-\infty < a < b < \infty$ .

Доказательство непосредственно следует из свойств  ${}_1F_1(a;c;0) = \bar{J}_\nu(0) = 1$ , **теоремы 1** и **теоремы 2** для случая функции  $g(x) = x^\sigma$ ,  $\sigma > 0$ .

Если в (1.1)–(1.3)  $a = 0$  или  $a > 0$ , но функция  $f(t)$  доопределена нулем на интервал  $0 < t < a$ , то применяем обобщенное преобразование Лапласа (2.7) с параметрами  $k = 1/\sigma$ ,  $\alpha = 1 - \sigma$  к левым частям равенств (1.1)–(1.3), пользуясь формулами (2.6), (2.8)–(2.10), получаем соответственно

$$\left( L_{1/\sigma, 1-\sigma} I_{0+;\sigma}^{\alpha,\beta,\lambda} f \right)(s) = \left( s^\sigma / \sigma \right)^{-\alpha} \left( 1 - \lambda \left( s^\sigma / \sigma \right)^{-1} \right)^{-\beta} \left( L_{1/\sigma, 1-\sigma} f \right)(s), \quad \operatorname{Re}(\lambda) > 0, \operatorname{Re}(s) > 0; \quad (3.5)$$

$$\left( L_{1/\sigma, 1-\sigma} A_{0+;\sigma}^{\alpha,\lambda} f \right)(s) = \left( \left( s^\sigma / \sigma \right)^2 + \lambda^2 \right)^{-\alpha/2} \left( L_{1/\sigma, 1-\sigma} f \right)(s), \quad \operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Im} \lambda|; \quad (3.6)$$

$$\left( L_{1/\sigma, 1-\sigma} B_{0+;\sigma}^{\alpha,\lambda} f \right)(s) = \left( s^\sigma / \sigma \right) \left( \left( s^\sigma / \sigma \right)^2 + \lambda^2 \right)^{-(\alpha+1)/2} \left( L_{1/\sigma, 1-\sigma} f \right)(s), \quad \operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Im} \lambda|. \quad (3.7)$$

Сравнивая правые части формул (3.5)–(3.7) с правыми частями формул (3.2)–(3.4), замечаем, что первые три формулы получаются из (3.2)–(3.4) заменой  $I_{a+;x^\sigma}^1$  на  $\left( s^\sigma / \sigma \right)^{-1}$ . Действительно, непосредственно проверяя, получаем

$$\left( L_{1/\sigma, 1-\sigma} I_{0+;x^\sigma}^\alpha f \right)(s) = \left( s^\sigma / \sigma \right)^{-\alpha} \left( L_{1/\sigma, 1-\sigma} f \right)(s), \quad \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Рассмотрим теперь вопрос об обращении операторов преобразований (1.1)–(1.3).

**Обращение операторов (1.1)–(1.3).**

Как показывают формулы (3.5)–(3.7), обобщенные преобразования Лапласа  $(L_{1/\sigma, 1-\sigma}h)(s)$  ядер  $h(x)$  операторов (1.1)–(1.3) и соответствующие им обратные величины  $[(L_{1/\sigma, 1-\sigma}h)(s)]^{-1}$  имеют одинаковую форму, отличаясь лишь значениями параметров. В простейшем случае оператора дробного интегрирования  $I_{0+;x^\sigma}^\alpha$ , которому соответствует  $(L_{1/\sigma, 1-\sigma}h)(s) = (s^\sigma / \sigma)^{-\alpha}$  с условием  $\text{Re}(\alpha) > 0$ , для обобщенного преобразования Лапласа  $(s^\sigma / \sigma)^\alpha$  ядра обратного оператора  $D_{0+;x^\sigma}^\alpha$  условие  $\text{Re}(\alpha) > 0$  вынуждает нас представить  $(s^\sigma / \sigma)^\alpha$  в виде  $(s^\sigma / \sigma)^\alpha = (s^\sigma / \sigma)^n (s^\sigma / \sigma)^{-(n-\alpha)}$ , где  $\text{Re}(n-\alpha) > 0$ , причем значению  $(s^\sigma / \sigma)^n$  соответствует оператор  $\left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1} dx}\right)^n = x^{1-\sigma} \left(\frac{d}{\sigma dx x^{\sigma-1}}\right)^n x^{\sigma-1} = D_{0+;x^\sigma}^n$  [1, равенство (18.12)]. Подобные операции необходимо осуществлять и при обращении операторов (1.1)–(1.3).

Учитывая сказанное, построим решение уравнения (1.1)  $(I_{a+;\sigma}^{\alpha,\beta,\lambda} f)(x) = g(x)$ ,  $x > 0$ . Пользуясь формулой (3.5) и равенством  ${}_1F_1(a, c; x) = e^x {}_1F_1(c-a, c; -x)$  [3, формула 6.3(7)], формально приходим к следующему представлению решения уравнения (1.1):

$$\begin{aligned} f(x) &= \left\{ \left( I_{a+;\sigma}^{\alpha,\beta,\lambda} \right)^{-1} g \right\}(x) = I_{a+;x^\sigma}^{-\alpha} \left( E - \lambda M_{a+;x^\sigma}^1 \right)^\beta g(x) = \\ &= \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) t^{\sigma-1} g'(t) dt. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Аналогичным образом, исходя из (3.6), (3.7), формально выписываются следующие представления для обратных к (1.2), (1.3) операторов:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left\{ \left( A_{a+;\sigma}^{\alpha,\lambda} \right)^{-1} g \right\}(x) = \left( A_{a+;\sigma}^{-\alpha,\lambda} g \right)(x) = A_{a+;\sigma}^{2-\alpha,\lambda} \left( I_{a+;x^\sigma}^{-2} + \lambda^2 \right) g(x) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{1-\alpha} \bar{J}_{(1-\alpha)/2}(\lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \left( \frac{d^2}{\sigma t^{\sigma-1} dt^2} + \lambda^2 \right) g(t) dt; \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$f(x) = \left\{ \left( B_{a+;\sigma}^{\alpha,\lambda} \right)^{-1} g \right\}(x) = I_{a+;x^\sigma}^1 \left( A_{a+;\sigma}^{-\alpha-1,\lambda} g \right)(x). \tag{4.3}$$

Следующие теоремы дают условия обратимости операторов (1.1)–(1.3).

**Теорема 4.** Пусть задано уравнение  $(I_{a+;\sigma}^{\alpha,\beta,\lambda} f)(x) = g(x)$ ,  $0 \leq a < x < b < \infty$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$ ;  $g(x)$  – заданная на  $[a, b]$  функция;  $f(x)$  – искомая функция (в случае  $a > 0$  полагается, что  $f(x) = g(x) = 0$  при  $0 < x < a$ ), тогда его решение  $f$  в классе  $L_p(a, b)$ ,  $b < \infty$ , существует и единственно, если  $g(x) \in I_{a+;x^\sigma}^\alpha(L_p(a, b))$ ,  $p \geq 1$ . В случае  $p = 1$  оно может быть представлено формулой (4.1), если еще выполняются дополнительные условия  $g(x) \in AC([a, b])$ ,  $g(a) = 0$ .

**Теорема 5.** Пусть задано уравнение  $(A_{a+;\sigma}^{\alpha,\lambda} f)(x) = g(x)$ ,  $0 \leq a < x < b < \infty$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$ ;  $g(x)$  – заданная на  $[a, b]$  функция;  $f(x)$  – искомая функция (в случае  $a > 0$  полагается, что  $f(x) = g(x) = 0$  при  $0 < x < a$ ), тогда его решение  $f$  в классе  $L_p(a, b)$ ,  $b < \infty$ , существует и единственно,

если  $g(x) \in I_{a+;x^\sigma}^\alpha(L_p(a,b))$ ,  $p \geq 1$ . В случае  $p=1$  оно может быть представлено формулой (4.2), если еще выполняются дополнительные условия  $g(x) \in AC([a,b])$ ,  $g(a) = 0$ .

**Теорема 6.** Пусть задано уравнение  $(B_{a+;\sigma}^{\alpha,\lambda} f)(x) = g(x)$ ,  $0 \leq a < x < b < \infty$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$ ;  $g(x)$  – заданная на  $[a,b]$  функция;  $f(x)$  – искомая функция (в случае  $a > 0$  полагается, что  $f(x) = g(x) = 0$  при  $0 < x < a$ ), тогда его решение  $f$  в классе  $L_p(a,b)$ ,  $b < \infty$ , существует и единственно, если  $g(x) \in I_{a+;x^\sigma}^\alpha(L_p(a,b))$ ,  $p \geq 1$ . В случае  $p=1$  оно может быть представлено формулой (4.3), если еще выполняются дополнительные условия  $g(x) \in AC([a,b])$ ,  $g(a) = 0$ .

Доказательство следует из существования, единственности и совпадения соответствующих обобщенных преобразований Лапласа уравнений и их обращений, а также из существования всех приведенных операторов в указанных классах функций  $g$  и  $f$ .

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция-2020» (подпрограмма 1, задание 1.2.01).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Kilbas, A. A. Theory and applications of fractional differential equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo // North – Holland Mathematics Studies 204. – Amsterdam, 2006. – 523 p.
3. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1973. – Т. 1 : Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра. – 294 с.
4. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1973. – Т. 2 : Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – 296 с.
5. Kilbas, A. A. H-Transforms. Theory and Applications / A. A. Kilbas, M. H. Saigo. – London [etc.] : Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
6. Прудников, А. П. Интегралы и ряды : в 3 т. / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М. : Наука, 1983. – Т. 2 : Специальные функции. – 752 с.
7. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1968. – 496 с.
8. Никольский, С. М. Курс математического анализа / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1983. Т. 2. – 448 с.

Поступила 20.09.2016

#### INTEGRAL TRANSFORMS WITH THE CONFLUENT HYPERGEOMETRIC FUNCTION OF KUMMER AND THE CUT BESSEL FUNCTION IN THE KERNELS AND INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND IN THE SPACE OF SUMMABLE FUNCTIONS

**O. SKOROMNIK**

*Three integral transforms involving confluent hypergeometric function of Kummer and the cut Bessel function in the kernels are studied on the spaces of  $p$ -summable functions on a finite interval  $[a,b]$  of the real line. Mapping properties such as the boundedness, the range of the considered transform are given, and the inversion formulas are established. Three integral equations of the first kind with the confluent hypergeometric function of Kummer and the cut Bessel function in the kernels also are considered. The solutions of the investigating equations in the closed form are established, and conditions for its solvability in the space of summable functions are given. The results generalize the well know findings for corresponding integral equations.*

**Keywords:** *integral transforms, integral equations, confluent hypergeometric function, cut Bessel function, fractional integrals and derivatives, cut Bessel function, space of summable functions.*

УДК 519.2

**НЕЗАВИСИМЫЕ ПОВТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ  
КАК АСИМПТОТИЧЕСКИ ГАУССОВСКИЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС**

*д-р техн. наук С.Г. ЕХИЛЕВСКИЙ, канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. ГОЛУБЕВА,  
Е.П. ПОТАПЕНКО, Т.С. РУДЬКОВА  
(Полоцкий государственный университет)*

*Независимые повторные испытания предложено рассматривать как случайный процесс с дискретным временем. Методом моментов установлена асимптотика процесса и определен вклад асимметрий и эксцессов произвольных порядков в отклонение распределения Бернулли от асимптотической формулы, фигурирующей в локальной теореме Лапласа. Показано, что последнюю нельзя применять для вычисления вероятностей чисел успехов далеких от своих наиболее вероятных значений.*

**Ключевые слова:** *схема Бернулли, случайный процесс, метод моментов.*

Вероятность  $m$  успехов в  $n$  независимых испытаниях определяется формулой Бернулли [1]

$$P(n, m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \tag{1}$$

в которой  $C_n^m$  – числа сочетаний,  $p$  – вероятность успеха в одном опыте. Для больших  $n$  вычисление  $C_n^m$  становится проблемой. В частности, MathCAD не может работать с числами, превышающими  $10^{307}$ . Для того чтобы обойти эту трудность, используют предельные теоремы Лапласа, которые, однако, не всегда обеспечивают требуемую точность и вовсе неприменимы для  $m$  далеких от своих наиболее вероятных значений.

Вместе с тем, если  $n$  растет, схему Бернулли можно рассматривать как случайный процесс с дискретным временем. При этом эволюцию закона распределения  $m$  удобно исследовать методом моментов, реализованном в [2–5] для описания динамики сорбции и диффузии. Таким образом можно не только выяснить асимптотику процесса, но и определить поправки к ней, обусловленные асимметриями и эксцессами закона распределения. Решению этих задач посвящена данная публикация.

Как известно, вся информация о законе распределения  $m$  содержится в начальных моментах:

$$v_k(n) = \sum_{m=0}^n m^k \cdot P(n, m) \quad (k = 0, 1, \dots). \tag{2}$$

В частности,

$$v_1(n) = np, \quad \sigma(n)^2 = v_2(n) - v_1(n)^2 = np(1-p), \tag{3}$$

соответственно математическое ожидание и дисперсия  $m$ .

Чтобы определить асимптотику процесса, исследуем асимметрии и эксцессы  $m$ :

$$A_{2k-1}(n) = \frac{\mu_{2k-1}(n)}{\sigma(n)^{2k-1}}, \quad E_{2k}(n) = \frac{\mu_{2k}(n)}{\sigma(n)^{2k}} - \omega(k), \quad (k = 2, 3, \dots), \tag{4}$$

где  $\omega(k)$  и  $\mu_k(n)$  – центральные моменты:

$$\omega(k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1), \tag{5}$$

$$\mu_k(n) = \sum_{m=0}^n (m - v_1(n))^k \cdot P(n, m), \tag{6}$$

Их удобно вычислять с помощью характеристической функции:

$$\theta(\tau, n) = \sum_{m=0}^n e^{i\tau(m-np)} \cdot P(n, m) = \left( p e^{i\tau q} + q e^{-i\tau p} \right)^n, \tag{7}$$

$$\mu_k(n) = i^{-k} \theta^{(k)}(0, n), \tag{8}$$

где  $i$  – мнимая единица,  $(k)$  – порядок производной по  $\tau$ .

Из формул (4)–(8) следует, что

$$A_{2k-1}(n, p) = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{f_{2l-1, 2k-1}(p)}{\sigma(n)^{2l-1}}, \quad E_{2k}(n, p) = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{f_{2l, 2k}(p)}{\sigma(n)^{2l}}, \quad (9)$$

где  $f_{1,3}(p)$ ,  $f_{2,4}(p)$ ,  $f_{1,5}(p)$  – независимые от  $n$  коэффициенты разложения:

$$f_{1,3}(p) = 1 - 2p, \quad f_{2,4}(p) = 6p^2 - 6p + 1, \quad f_{1,5}(p) = 10(1 - 2p). \quad (10)$$

Согласно (3), (9) при  $n \rightarrow \infty$  асимметрия и эксцесс исчезают, что характерно для гауссовского процесса

$$P_0(n, m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(n)}} e^{-\frac{x(n, m)^2}{2}}, \quad x(n, m) = \frac{m - np}{\sigma(n)}. \quad (11)$$

Выясним вклад в

$$\Delta(n, m) = P(n, m) - P_0(n, m) \quad (12)$$

асимметрий и эксцессов произвольных порядков. С учетом (9) запишем

$$\Delta(n, m) = P_0(n, m) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Phi_l(x(n, m))}{\sigma(n)^l} = \Delta_1(n, m) + \Delta_2(n, m) + \dots, \quad (13)$$

где старшая степень полиномов

$$\Phi_{2l-1}(x) = \sum_{i=0}^l x^{2i+1} C_{2l-1, 2i+1}, \quad \Phi_{2l}(x) = \sum_{i=0}^{l+1} x^{2i} C_{2l, 2i} \quad (l = 1, 2, \dots) \quad (14)$$

равна количеству линейно независимых уравнений, получаемых с помощью вытекающего из (6) и (11)–(13) тождества

$$\frac{\mu_k(n)}{\sigma(n)^k} = \sum_{m=0}^n x(n, m)^k \cdot P_0(n, m) \left( 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Phi_l(x(n, m))}{\sigma(n)^l} \right) \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (15)$$

для вычисления фигурирующих в (14) коэффициентов  $C_{l,i}$ . При  $n \rightarrow \infty$  сумма по  $m$  в (15) становится интегральной

$$\Delta x(n, m) = x(n, m+1) - x(n, m) = \sigma(n)^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \\ x(n, 0) = -\sqrt{np/q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty, \quad x(n, n) = \sqrt{nq/p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

поэтому

$$\frac{\mu_k(n)}{\sigma(n)^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left( 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Phi_l(x)}{\sigma(n)^l} \right) dx. \quad (16)$$

Уравнения относительно  $C_{l,i}$  получаются приравниванием в (16) выражений при одинаковых степенях  $\sigma(n)$ . Поскольку интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю, четные и нечетные  $k$  будем рассматривать отдельно:

$$\frac{\mu_{2k+1}(n)}{\sigma(n)^{2k+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Phi_{2l-1}(x)}{\sigma(n)^{2l-1}} dx, \quad (17)$$

$$\frac{\mu_{2k}(n)}{\sigma(n)^{2k}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left( 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Phi_{2l}(x)}{\sigma(n)^{2l}} \right) dx. \quad (18)$$



Из (17) с учетом (5), (14) следует

$$\frac{\mu_{2k+1}(n)}{\sigma(n)^{2k+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma^{2l-1}} \sum_{i=0}^l C_{2l-1,2i+1} \omega(k+i+1), \quad (19)$$

откуда для  $k = 0$  с учетом вытекающего из (2), (6) тождества  $\mu_1(n) \equiv 0$  получим

$$\sum_{i=0}^l C_{2l-1,2i+1} \omega(i+1) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots). \quad (20)$$

Для остальных  $k$  с помощью (4), (9) преобразуем левую часть (19)

$$\sum_{l=1}^k \frac{f_{2l-1,2k+1}(p)}{\sigma^{2l-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma^{2l-1}} \sum_{i=0}^l C_{2l-1,2i+1} \omega(k+i+1) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (21)$$

Пусть в (21)  $k = 1$ , тогда

$$\sum_{i=0}^1 C_{1,2i+1} \omega(i+2) = f_{13}(p), \quad \sum_{i=0}^l C_{2l-1,2i+1} \omega(i+2) = 0 \quad (l = 2, 3, \dots). \quad (22)$$

Аналогично для  $k = 2$  из (21) следует

$$\sum_{i=0}^1 C_{1,2i+1} \omega(i+3) = f_{15}(p), \quad \sum_{i=0}^2 C_{3,2i+1} \omega(i+3) = f_{35}(p), \quad (23)$$

$$\sum_{i=0}^l C_{2l-1,2i+1} \omega(i+3) = 0 \quad (l = 3, 4, \dots).$$

Действуя так и далее, можно записать уравнения для определения коэффициентов любого нечетного полинома. В частности, объединив первые уравнения (20), (22) в систему, найдем

$$\left. \begin{array}{l} C_{11} + 3C_{13} = 0 \\ 3C_{11} + 15C_{13} = f_{13}(p) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{13} \end{pmatrix} = \frac{f_{13}(p)}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Согласно (10) первое уравнение в (23) удовлетворяется теми же значениями коэффициентов:

$$15C_{11} + 105C_{13} = \frac{f_{13}(p)}{2} \left( 15 \cdot (-1) + 105 \cdot \frac{1}{3} \right) = 10f_{13}(p) \equiv f_{15}(p),$$

т.е. является линейно зависимым с фигурирующими в (24). Так же можно убедиться в линейной зависимости вытекающих из (16) уравнений относительно коэффициентов  $\phi_l(x)$ , если количество этих уравнений больше числа коэффициентов в (14). Значит (14) правильно определяет старшие степени полиномов в разложении (13).

Для определения  $\phi_3(x)$  положим в (20), (22)  $l = 2$  и дополним полученную систему вторым уравнением из (23)

$$\left. \begin{array}{l} C_{31} + 3C_{33} + 15C_{35} = 0 \\ 3C_{31} + 15C_{33} + 105C_{35} = 0 \\ 15C_{31} + 105C_{33} + 945C_{35} = f_{35}(p) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} C_{31} \\ C_{33} \\ C_{35} \end{pmatrix} = \frac{f_{35}(p)}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \\ 1/15 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Решения (24), (25) позволяют заметить общую закономерность

$$C_{2l-1,2i+1} = \frac{f_{2l-1,2l+1}(p)}{\rho(l)} \cdot \frac{(-1)^{i+l} C_l^i}{\omega(i+1)} \quad \left( \begin{array}{l} l = 1, 2, \dots \\ i = 0, 1, \dots, l. \end{array} \right), \quad (26)$$

где  $C_l^i$  – числа сочетаний;

$\rho(l)$  – произведения четных чисел

$$\rho(l) = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2l. \quad (27)$$

Аналогично рассмотрим в (16) четные  $k$ . Из формулы (18) с учетом (5), (14) следует

$$\frac{\mu_{2k}(n)}{\sigma(n)^{2k}} - \omega(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma^{2l}} \sum_{i=0}^{l+1} C_{2l,2i} \omega(k+i). \quad (28)$$

Полагая в (28)  $k=0$  и  $k=1$ , с учетом тождеств  $\mu_0(n) \equiv 1$ ,  $\mu_2(n) \equiv \sigma(n)^2$  и равенств  $\omega(0) = 1 = \omega(1)$  (см. формулу (5)) получим

$$\sum_{i=0}^{l+1} C_{2l,2i} \omega(i) = 0, \quad \sum_{i=0}^{l+1} C_{2l,2i} \omega(i+1) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots). \quad (29)$$

Для остальных  $k$  с помощью (4), (5), (9) преобразуем левую часть (28):

$$\sum_{l=1}^{k-1} \frac{f_{2l,2k}(p)}{\sigma^{2l}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma^{2l}} \sum_{i=0}^{l+1} C_{2l,2i} \omega(k+i) \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (30)$$

Пусть в (30)  $k=2$ , тогда

$$\sum_{i=0}^2 C_{2,2i} \omega(i+2) = f_{2,4}(p), \quad \sum_{i=0}^{l+1} C_{2l,2i} \omega(i+2) = 0 \quad (l = 2, 3, \dots). \quad (31)$$

Аналогично для  $k=3$  из (30) следует

$$\sum_{i=0}^2 C_{2,2i} \omega(i+3) = f_{2,6}(p), \quad \sum_{i=0}^3 C_{4,2i} \omega(i+3) = f_{4,6}(p), \quad (32)$$

$$\sum_{i=0}^{l+1} C_{2l,2i} \omega(i+3) = 0 \quad (l = 3, 4, \dots). \quad (33)$$

Полагая в (29)  $l=1$ , дополним полученную систему первым уравнением (31)

$$\left. \begin{aligned} C_{20} + C_{22} + 3C_{24} &= 0 \\ C_{20} + 3C_{22} + 15C_{24} &= 0 \\ 3C_{20} + 15C_{22} + 105C_{24} &= f_{24}(p) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} C_{20} \\ C_{22} \\ C_{24} \end{pmatrix} = \frac{f_{24}(p)}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1/3 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Для получения  $\varphi_4(x)$  положим в (29), (31)  $l=2$  и дополним полученную систему вторым уравнением (32)

$$\left. \begin{aligned} C_{40} + C_{42} + 3C_{44} + 15C_{46} &= 0 \\ C_{40} + 3C_{42} + 15C_{44} + 105C_{46} &= 0 \\ 3C_{40} + 15C_{42} + 105C_{44} + 945C_{46} &= 0 \\ 15C_{40} + 105C_{42} + 945C_{44} + 945 \cdot 11C_{46} &= f_{46}(p) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} C_{40} \\ C_{42} \\ C_{44} \\ C_{46} \end{pmatrix} = \frac{f_{46}(p)}{48} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1/15 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Полученные решения позволяют заметить общую закономерность для четных полиномов

$$C_{2l,2i} = \frac{f_{2l,2(l+1)}(p)}{\rho(l+1)} \cdot \frac{(-1)^{i+l+1} C_{l+1}^i}{\omega(i)} \quad \left( \begin{array}{l} l = 1, 2, \dots \\ i = 0, 1, \dots, l+1. \end{array} \right) \quad (36)$$

Таким образом, формулы (3), (11)–(14), (26), (27), (36) позволяют заменить трудно вычисляемое при больших  $n$  выражение для вероятности  $m$  успехов в схеме Бернулли. Результаты выполненных по ним расчетов в графической форме представлены на рисунке 1. Видно, что даже для  $n=5$  ошибка нуле-

вого приближения (рис. 1, а) практически полностью исчезает (рис. 1, б) при учете асимметрии и эксцесса минимальных порядков ( $P_2(n, m) = P_0(n, m) + \Delta_1(n, m) + \Delta_2(n, m)$ , см. (12), (13)).

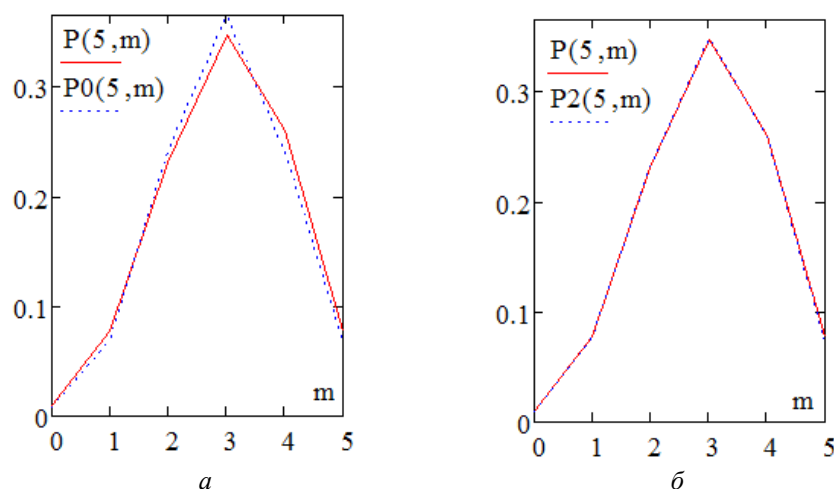


Рисунок 1. – Влияние асимметрии и эксцесса минимальных порядков на вероятность  $m$  успехов в 5 опытах схемы Бернулли с  $p = 0,6$

Пользоваться локальной теоремой Лапласа (отвечающей нулевому приближению в разложении (12), (13)) нельзя, если  $|\Delta(m, n)| \neq o(P_0(n, m))$ . В частности, для  $m$  далеких от наиболее вероятного числа успехов,  $|x(n, m)|$  при увеличении числа опытов растет пропорционально  $\sqrt{n}$  (см. (3), (11)). При этом, согласно (13), (14), главная часть общего члена ряда для  $|\Delta(m, n)|/P_0(n, m)$  пропорциональна  $n$  ( $x(n, m)^{l+2}/\sigma(n)^l \sim n \rightarrow \infty$ ). То есть относительная погрешность асимптотической формулы (11), фигурирующей в локальной теореме Лапласа, неограниченно возрастает (рис. 2) и пользоваться ею нельзя, что, однако, не всегда оговаривается [1].

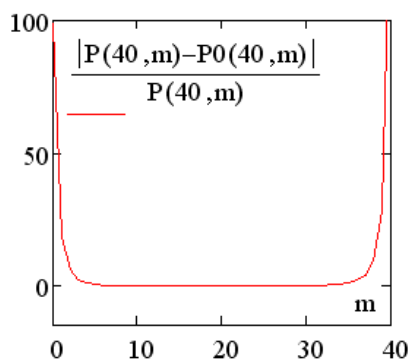


Рисунок 2. – Относительная погрешность нулевого приближения для  $p = 0,6$

**Выводы.** Независимые повторные испытания предложено рассматривать как случайный процесс с дискретным временем. Методом моментов установлена асимптотика процесса и определен вклад асимметрий и эксцессов произвольных порядков в отклонение распределения Бернулли от асимптотической формулы, фигурирующей в локальной теореме Лапласа. Показано, что последнюю нельзя применять для вычисления вероятностей чисел успехов, далеких от своих наиболее вероятных значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман // М. : Высш. шк., 1975. – 334 с.

2. Теоретико-вероятностный подход к решению уравнения диффузии / С. Г. Ехилевский // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 94–105.
3. Ехилевский, С. Г. Влияние асимметрии высших порядков на динамику сорбции вредной примеси / С. Г. Ехилевский, О. Н. Мурашкевич // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. В, Промышленность. Прикладные науки. – 2014. – № 3. – С. 115–122.
4. Ехилевский, С. Г. Теоретико-вероятностный подход к моделированию динамической сорбционной активности / С. Г. Ехилевский, О. В. Голубева, Д.В. Пяткин // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. В, Промышленность. Прикладные науки. – 2013. – № 11. – С. 144–151.
5. Ехилевский, С. Г. Метод моментов и динамика сорбционной активности при малых временах / С. Г. Ехилевский, О. В. Голубева, С. А. Ольшаников // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. В, Промышленность. Прикладные науки. – 2013. – № 3. – С. 150–156.

*Поступила 20,09,2016*

### INDEPENDENT RE-TESTING AS THE ASYMPTOTIC GAUSSIAN RANDOM PROCESS

**S. EHILEVSKY, O. GOLUBEVA, E. POTAPENKO, T. RUDKOVA**

*Independent re-tests are considered as a random process with discrete time. The method of moments set the asymptotic behavior of the process and defined contribution asymmetries and excesses of arbitrary order in the deviation of the Bernoulli distribution from the asymptotic formulae appearing in the local theorem of Laplace. It is shown that the latter cannot be applied to calculate the probability of success is far from their most probable values.*

**Keywords:** *Bernoulli scheme, a random process, the method of moments.*

УДК 517.956.32

**О РАЗРЫВАХ ПЕРВЫХ И ВТОРЫХ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЙ  
ОБЩЕГО ОДНОМЕРНОГО ФАКТОРИЗОВАННОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ  
В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ**

*д-р физ.-мат. наук, проф. Ф.Е. ЛОМОВЦЕВ  
(Белорусский государственный университет)*

Изучается гладкость обобщенных решений одномерного волнового уравнения  $(\partial_t - a_2 \partial_x + b_2)(\partial_t + a_1 \partial_x + b_1)u(x,t) = f(x,t)$  и его правой части  $f$  в первой четверти плоскости. Цель работы – нахождение линий разрывов первых и вторых частных производных обобщенных решений этого волнового уравнения в случае существования этих производных и выявление необходимых требований гладкости на правую часть  $f$  для существования классических решений этого уравнения. Она достигается методом распространяющихся волн из курса уравнений математической физики и методами теории обобщенных функций. Доказано, что первые частные производные непрерывных решений этого уравнения могут терпеть разрыв только на кусках его характеристик:  $x - a_1 t = C_1$ ,  $x + a_2 t = C_2$ . Вторые частные производные его непрерывно дифференцируемых решений могут иметь разрыв только на кусках этих характеристик и кусках прямых:  $x - \sqrt{a_2 a_1} t = C_3$ ,  $x + \sqrt{a_2 a_1} t = C_4$ ,  $C_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, 4}$ . С помощью этих результатов установлено, что любое классическое решение общего факторизованного линейного неоднородного уравнения колебаний струны содержит в виде слагаемого его единственное (с точностью до аддитивных классических решений соответствующего факторизованного однородного уравнения) обобщенное решение, которое дважды непрерывно дифференцируемое и является его классическим решением в первой четверти плоскости. Это позволило нам вывести необходимость непрерывности  $f$  и соответствующих интегральных требований гладкости на  $f$  для существования классических решений исследуемого уравнения.

**Ключевые слова:** факторизованное уравнение колебаний струны, обобщенное решение неоднородного уравнения, носитель разрыва частной производной, необходимое требование гладкости.

**Введение.** В настоящей работе показано, что в первой четверти плоскости кусочно-непрерывные первые частные производные от непрерывных решений общего линейного факторизованного уравнения колебаний струны имеют разрыв только на частях характеристик этого уравнения. Кусочно-непрерывные вторые частные производные от его непрерывно дифференцируемых решений терпят разрыв в первой четверти плоскости только на кусках его характеристик и/или на кусках двух указанных семейств прямых. Этим уравнением моделируются вынужденные колебания однородной упругой струны в движущейся упруго сопротивляющейся среде. Ранее носители разрывов первых частных производных непрерывных решений простейшего уравнения колебаний струны были установлены в [1, с. 83–85]. В качестве приложений полученных результатов доказано, что любое классическое решение общего факторизованного линейного неоднородного уравнения колебаний струны содержит в виде слагаемого обобщенное решение данного неоднородного уравнения, которое дважды непрерывно дифференцируемое и является его классическим решением в первой четверти плоскости. Ранее автором была установлена единственность последних обобщенных (классических) решений с точностью до аддитивных обобщенных (классических) решений соответствующего факторизованного линейного однородного уравнения колебаний струны [2]. Затем нами выводятся необходимые требования гладкости на правую часть исследуемого уравнения для того, чтобы оно имело классические решения [3]. Эти результаты можно распространить на смешанные (начально-краевые) задачи для рассматриваемого нами общего уравнения колебаний струны в полуполосе плоскости методом работы [4]. Методом характеристик смешанные задачи для уравнения колебаний струны решаются в работах [5, 6].

**1. Постановка задачи и методы исследования.** В первой четверти плоскости  $G_\infty = [0, \infty[ \times ]0, \infty[$  требуется найти линии разрывов первых и вторых частных производных решений волнового уравнения:

$$(\partial_t - a_2 \partial_x + b_2)(\partial_t + a_1 \partial_x + b_1)u(x,t) = f(x,t), \{x,t\} \in G_\infty, \quad (1)$$

где  $\partial_t = \partial / \partial t$ ,  $\partial_x = \partial / \partial x$  – первые частные производные;

$a_1 > 0$ ,  $a_2 \geq 0$ ,  $b_1, b_2$  – постоянные вещественные коэффициенты.

Сначала мы находим достаточно гладкие линии разрывов этих частных производных от обобщенных решений  $u \in C(G_\infty)$  уравнения (1) методом распространяющихся волн из курса уравнений математической физики [1]. Затем с помощью этих результатов методами теории обобщенных функций доказываем [7], что каждое классическое решение  $u \in C^2(G_\infty)$  неоднородного уравнения (1) содержит в виде слагаемого его единственное (с точностью до аддитивных классических решений соответствующего факторизованного однородного уравнения) обобщенное решение  $F$ , которое дважды непрерывно дифференцируемое в первой четверти плоскости  $F \in C^2(G_\infty)$  и является его классическим решением. Отсюда мы выводим необходимые требования гладкости на  $f$  для существования классических решений уравнения (1).

**2. Основной результат.** Сначала находим носители разрывов первых производных.

**Теорема 1.** Если первые частные производные  $\partial_t u$  и  $\partial_x u$  от непрерывных решений  $u \in C(G_\infty)$  волнового уравнения (1) существуют в обычном смысле в  $G_\infty$  и хотя бы одна из них терпит разрыв, то линиями этого разрыва служат части характеристик уравнения (1):

$$x - a_1 t = C_1, \quad x + a_2 t = C_2, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[, \quad (2)$$

находящиеся в первой четверти  $G_\infty$  плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

**Доказательство.** Обозначим символом  $C^k(\Omega)$  множество  $k$  раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве  $\Omega$ . Методом характеристик выводится общий интеграл классических решений  $u \in C^2(G_\infty)$  волнового уравнения (1) на множестве  $G_\infty$ :

$$u(x, t) = e^{Bx - At} \left[ g(x - a_1 t) + h(x + a_2 t) + \widehat{F}(x, t) \right], \quad \widehat{F}(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t \int_{x - a_1(t-\tau)}^{x + a_2(t-\tau)} e^{A\tau - Bs} f(|s|, \tau) ds d\tau, \quad (3)$$

где  $g, h$  – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции своих переменных;

$\widehat{F}(x, t)$  – дважды непрерывно дифференцируемая функция на  $G_\infty$ ;

$A = (a_1 b_2 + a_2 b_1) / (a_1 + a_2)$ ,  $B = (b_2 - b_1) / (a_1 + a_2)$  – постоянные.

Для классических решений  $u \in C^2(G_\infty)$  правая часть уравнения (1) является непрерывной функцией  $f \in C(G_\infty)$ . Предельным переходом общий интеграл (3) распространяется с классических решений  $u \in C^2(G_\infty)$  на обобщенные решения  $u \in W_{2,loc}^1(G_\infty)$  уравнения (1). Здесь пространство Соболева  $W_{2,loc}^1(G_\infty)$  всех локально интегрируемых функций в  $G_\infty$  – это множество всех таких измеримых вещественных функций  $v$  на  $G_\infty$ , для которых ее сужение  $v \in W_2^1(\Omega)$  на любое ограниченное множество  $\Omega \subset G_\infty$ . Функция  $v \in W_{2,loc}^1(G_\infty)$  называется *обобщенным решением* уравнения (1) для  $f \in L_{2,loc}(G_\infty)$ , если она удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (\partial_t + a_1 \partial_x + b_1) v(x, t) (\partial_t - a_2 \partial_x - b_2) \varphi(x, t) dx dt = - \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, t) \varphi(x, t) dx dt, \quad \forall \varphi \in D^1(\dot{G}_\infty), \quad (4)$$

где множество  $D^1(\dot{G}_\infty) = \{ \varphi \in C^1(\dot{G}_\infty) : \text{носитель } \text{supp } \varphi \text{ – компакт в } \dot{G}_\infty = ]0, \infty[ \times ]0, \infty[ ; \varphi|_{x=+\infty} = 0, t \in [0, \infty[, \varphi|_{t=+\infty} = 0, x \in [0, \infty[ \}$  [8].

Заметим, что мы будем использовать это понятие лишь для непрерывных, кусочно-дифференцируемых обобщенных решений в доказательстве теоремы 1 и для непрерывно дифференцируемых обобщенных решений с кусочно-непрерывными вторыми производными в доказательстве теоремы 2, и для непрерывно дифференцируемых обобщенных решений в следующем четвертом разделе при выявлении необходимых требований гладкости на  $f$  для существования классических решений уравнения (1) с непрерывной правой частью  $f \in C(G_\infty)$ .

В силу бесконечной дифференцируемости функции  $e^{Bx-At}$  исследование гладкости и разрывов частных производных от обобщенных решений  $u \in W_{2,loc}^1(G_\infty)$  уравнения (1) эквивалентно исследованию гладкости и разрывов частных производных от обобщенных решений  $\hat{u} = e^{At-Bx}u \in W_{2,loc}^1(G_\infty)$  уравнения

$$(\partial_t - a_2 \partial_x)(\partial_t + a_1 \partial_x) \hat{u}(x, t) = \hat{f}(x, t), \quad \{x, t\} \in G_\infty, \quad a_1 > 0, a_2 \geq 0, \quad (5)$$

с правой частью  $\hat{f}(x, t) = e^{At-Bx}f(x, t)$ ,  $\{x, t\} \in G_\infty$ , где функция  $f$  – правая часть уравнения (1).

Обобщенные решения  $\hat{u} \in W_{2,loc}^1(G_\infty)$  уравнения (5) удовлетворяют интегральному уравнению (4) при  $b_1 = b_2 = 0$ ,  $f = \hat{f}$  и представляются общим интегралом:

$$\hat{u}(x, t) = \hat{g}(x - a_1 t) + \hat{h}(x + a_2 t) + \hat{F}(x, t), \quad (6)$$

где  $\hat{g}, \hat{h}$  – любые функции из пространства  $W_{2,loc}^1$  своих переменных и  $\hat{F}(x, t) \in W_{2,loc}^1(G_\infty)$ .

Ввиду предположений теоремы 1 первые частные производные решений  $\hat{u} \in W_{2,loc}^1(G_\infty) \cap C(G_\infty)$  уравнения (5) существуют в обычном смысле в  $G_\infty$  и хотя бы одна из них терпит разрыв на некоторой непрерывно дифференцируемой кривой  $l$  уравнения  $x = x(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ , из произвольного прямоугольника  $ABCD$  в  $G_\infty$ . Сначала для классических решений  $\hat{u} \in C^2(G_\infty)$  интегрируем уравнение (5) по прямоугольнику  $ABCD$  в  $G_\infty$ , вершины которого  $B$  и  $D$  лежат на кривой  $l \in C^1[\alpha, \beta]$  [1, рис. 20], и приходим к равенству

$$\iint_{ABCD} (\partial_t - a_2 \partial_x)(\partial_t + a_1 \partial_x) \hat{u}(x, t) dx dt = \iint_{ABCD} \hat{f}(x, t) dx dt.$$

В левой части этого равенства применяем формулу Грина и получаем

$$\int_{BA+DC} (\partial_t \hat{u}(x, t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x, t)) dx + \int_{AD+CB} a_2 (\partial_t \hat{u}(x, t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x, t)) dt = - \iint_{ABCD} \hat{f}(x, t) dx dt, \quad (7)$$

в левой части которого интегрирование ведется в положительном направлении обхода периметра  $AD + DC + CB + BA$  прямоугольника  $ABCD$ .

Затем равенство (7) распространяется предельным переходом с решений  $\hat{u} \in C^2(ABCD)$  на соответствующее подмножество решений  $\hat{u} \in \widehat{W}_2^1(ABCD)$  множества  $W_2^1(ABCD) \cap C(\overline{ABCD})$  так, чтобы предел каждого интеграла существовал в силу предположения теоремы 1 о существовании в обычном смысле первых частных производных от решений  $u \in C(G_\infty)$  уравнения (1) и, следовательно, уравнения (5) в  $G_\infty$ . Согласно теореме 3.2 Лионса [8, с. 17] для функций  $\hat{u} \in W_2^m(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , переменных  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  из области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , в точках достаточно гладкой границы  $x' \in S = \partial\Omega$  однозначно определены значения ее частных производных  $\partial^j u(x') / \partial v^j \in W_2^{m-j-1/2}(S)$ ,  $j = \overline{0, m-1}$ , вдоль внешней нормали  $v = v(x')$  к границе  $S$ . И наоборот, по значениям этих всех граничных частных производных однозначно продолжаются функции с границы  $S$  внутрь области  $\Omega$ . Интегрируя аналогичным образом уравнение (5) по криволинейным треугольникам  $\Delta ABD$  и  $\Delta BCD$ , имеем соответственно равенства

$$\begin{aligned} & \int_{BA} (\partial_t \hat{u}(x, t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x, t)) dx + \int_{AD} a_2 (\partial_t \hat{u}(x, t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x, t)) dt + \\ & + \int_{DB} a_2 (\partial_t \hat{u}(x, t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x, t)) dt + (\partial_t \hat{u}(x, t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x, t)) dx = - \iint_{\Delta ABD} \hat{f}(x, t) dx dt, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\int_{DC} (\partial_t \hat{u}(x,t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x,t)) dx + \int_{CB} a_2 (\partial_t \hat{u}(x,t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x,t)) dt +$$

$$+ \int_{BD} a_2 (\partial_t \hat{u}(x,t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x,t)) dt + (\partial_t \hat{u}(x,t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x,t)) dx = - \iint_{\Delta BCD} \hat{f}(x,t) dx dt. \quad (9)$$

Вычитая почленно равенство (7) из суммы равенств (8) и (9), получаем

$$\int_{DB} \{a_2 (\partial_t \hat{u}(x,t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x,t))_1 dt + (\partial_t \hat{u}(x,t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x,t))_1 dx -$$

$$- a_2 (\partial_t \hat{u}(x,t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x,t))_2 dt - (\partial_t \hat{u}(x,t) + a_1 \partial_x \hat{u}(x,t))_2 dx\} = 0, \quad (10)$$

где нижние индексы 1 и 2 указывают на то, что под интегралом предельные значения производных берутся соответственно изнутри треугольников  $\Delta ABD$  и  $\Delta BCD$ .

Ввиду произвольности кривой  $l$  из равенства (10) следует уравнение для разрывов первых производных

$$a_2 ([\partial_t \hat{u}(x,t)] + a_1 [\partial_x \hat{u}(x,t)]) + x'(t) ([\partial_t \hat{u}(x,t)] + a_1 [\partial_x \hat{u}(x,t)]) = 0, \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (11)$$

в котором символом  $[g] = (g)_1 - (g)_2$  обозначена величина разрыва функции  $g$  на дуге  $DB$  и производная  $x'(t)$  из дифференциала  $dx = x'(t)dt$ . Производная по  $t$  вдоль непрерывно дифференцируемой линии  $l \in C^1[\alpha, \beta]$  по двум взаимно противоположным направлениям 1 и 2 от решения уравнения (5) принимает значения

$$d\hat{u}(x(t), t) / dt = (\partial_x \hat{u}(x,t))_i x'(t) + (\partial_t \hat{u}(x,t))_i, \quad i = 1, 2,$$

разность которых дает другое уравнение для разрывов первых производных

$$[\partial_t \hat{u}(x,t)] + x'(t) [\partial_x \hat{u}(x,t)] = 0, \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (12)$$

Однородная система двух уравнений (11) и (12) имеет нетривиальные решения, т.е. по крайней мере, одна из первых частных производных от решения  $\hat{u} \in C(G_\infty)$  уравнения (5) имеет разрыв на линии  $l$  тогда и только тогда, когда определитель этой системы уравнений тождественно равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x'(t) + a_2 & a_1(x'(t) + a_2) \\ 1 & x'(t) \end{vmatrix} = x'^2(t) + (a_2 - a_1)x'(t) - a_1 a_2 = 0, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Это квадратное уравнение имеет два решения  $x'(t) = a_1$  и  $x'(t) = -a_2$ , которым соответствуют характеристики (2) уравнения (5) и, следовательно, уравнения (1). Теорема 1 доказана.

Потом находим носители разрывов вторых частных производных.

**Теорема 2.** Если вторые частные производные  $\partial_{tt}u$ ,  $\partial_{xt}u = \partial_{tx}u$ ,  $\partial_{xx}u$  от непрерывно дифференцируемых решений  $u \in C^1(G_\infty)$  волнового уравнения (1) существуют в обычном смысле в  $G_\infty$  и хотя бы одна из них терпит разрыв, то в  $G_\infty$  линиями этого разрыва служат части характеристик (2) и прямых

$$x - \sqrt{a_2 a_1} t = C_3, \quad x + \sqrt{a_2 a_1} t = C_4, \quad C_3, C_4 \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

**Доказательство.** Как и теорему 1 утверждение теоремы 2 достаточно обосновать для решений уравнения (5). Сначала для решений  $\hat{u} \in C^3(G_\infty)$  и, следовательно, правой части  $\hat{f} \in C^1(G_\infty)$  дифференцируем по  $t$  уравнение (5) и получим

$$(\partial_t - a_2 \partial_x) (\partial_t + a_1 \partial_x) \partial_t \hat{u}(x,t) = \partial_t \hat{f}(x,t), \quad \{x,t\} \in G_\infty. \quad (14)$$



Интегрируем уравнение (14) по прямоугольнику  $ABCD$  в  $G_\infty$  с вершинами  $B$  и  $D$  на кривой  $l \in C^2[\alpha, \beta]$ , в левой части полученного равенства применяем формулу Грина и находим

$$\int_{BA+DC} (\partial_t + a_1 \partial_x) \partial_t \hat{u}(x, t) dx + \int_{AD+CB} a_2 (\partial_t + a_1 \partial_x) \partial_t \hat{u}(x, t) dt = - \iint_{ABCD} \partial_t \hat{f}(x, t) dx dt, \quad (15)$$

которое, как и выше, потом распространяется предельным переходом с решений  $\hat{u} \in C^3(ABCD)$  на соответствующее подмножество решений  $\hat{u} \in \widehat{W}_2^2(ABCD)$  множества  $W_2^2(ABCD) \cap C^1(\overline{ABCD})$  так, чтобы предел каждого интеграла существовал в силу предположения теоремы 2 о существовании в обычном смысле вторых частных производных от непрерывно дифференцируемых решений уравнения (1) и, следовательно, уравнения (5) в  $G_\infty$ . Интегрируем уравнение (14) по криволинейным треугольникам  $\Delta ABD$ ,  $\Delta BCD$  и тем же путем соответственно приходим к равенствам

$$\int_{BA} (\partial_t + a_1 \partial_x) \partial_t \hat{u}(x, t) dx + \int_{AD} a_2 (\partial_t + a_1 \partial_x) \partial_t \hat{u}(x, t) dt + \int_{DB} a_2 (\partial_t + a_1 \partial_x) \partial_t \hat{u}(x, t) dt + (\partial_t + a_1 \partial_x) \partial_t \hat{u}(x, t) dx = - \iint_{\Delta ABD} \partial_t \hat{f}(x, t) dx dt, \quad (16)$$

$$\int_{DC} (\partial_t + a_1 \partial_x) \partial_t \hat{u}(x, t) dx + \int_{CB} a_2 (\partial_t + a_1 \partial_x) \partial_t \hat{u}(x, t) dt + \int_{BD} a_2 (\partial_t + a_1 \partial_x) \partial_t \hat{u}(x, t) dt + (\partial_t + a_1 \partial_x) \partial_t \hat{u}(x, t) dx = - \iint_{\Delta BCD} \partial_t \hat{f}(x, t) dx dt. \quad (17)$$

Вычитаем почленно равенство (15) из суммы равенств (16) и (17) и получаем

$$\int_{DB} \{ a_2 ( (\partial_t + a_1 \partial_x) \partial_t \hat{u}(x, t) )_1 dt + ( (\partial_t + a_1 \partial_x) \partial_t \hat{u}(x, t) )_1 dx - a_2 ( (\partial_t + a_1 \partial_x) \partial_t \hat{u}(x, t) )_2 dt - ( (\partial_t + a_1 \partial_x) \partial_t \hat{u}(x, t) )_2 dx \} = 0, \quad (18)$$

где нижние индексы 1 и 2 обозначают указанные выше предельные значения производных из треугольников  $\Delta ABD$  и  $\Delta BCD$ .

Благодаря произвольности  $l$  из равенства (18) вытекает первое уравнение для разрывов вторых производных

$$a_2 ([\partial_{tt} \hat{u}(x, t)] + a_1 [\partial_{xt} \hat{u}(x, t)]) + x'(t) ([\partial_{tt} \hat{u}(x, t)] + a_1 [\partial_{xt} \hat{u}(x, t)]) = 0, \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (19)$$

где  $[\partial_{tt} \hat{u}(x, t)]$  и  $[\partial_{xt} \hat{u}(x, t)]$  – разрывы соответственно вторых частных производных  $\partial_{tt} \hat{u} = \partial^2 \hat{u} / \partial t^2$  и  $\partial_{xt} \hat{u} = \partial^2 \hat{u} / \partial x \partial t = \partial^2 \hat{u} / \partial t \partial x$  от непрерывно дифференцируемых решений  $\hat{u}$ .

Для решений  $\hat{u} \in C^3(G_\infty)$  и функций  $\hat{f} \in C^1(G_\infty)$  дифференцируем по  $x$  уравнение (5) и имеем

$$(\partial_t + a_1 \partial_x) (\partial_t - a_2 \partial_x) \partial_x \hat{u}(x, t) = \partial_x \hat{f}(x, t), \quad \{x, t\} \in G_\infty. \quad (20)$$

Как и выше, интегрируем уравнение (20) по прямоугольнику  $ABCD$  и треугольникам  $\Delta ABD$ ,  $\Delta BCD$ , применяем формулу Грина и аналогичным путем получаем второе уравнение разрывов

$$a_1 ([\partial_{xt} \hat{u}(x, t)] - a_2 [\partial_{xx} \hat{u}(x, t)]) - x'(t) ([\partial_{xt} \hat{u}(x, t)] - a_2 [\partial_{xx} \hat{u}(x, t)]) = 0, \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (21)$$

где  $[\partial_{xx} \hat{u}(x, t)]$  – разрыв второй частной производной  $\partial_{xx} \hat{u} = \partial^2 \hat{u} / \partial x^2$  от решений  $\hat{u} \in C^1(G_\infty)$ .

Вторая производная по  $t$  вдоль дважды непрерывно дифференцируемой линии разрыва  $l$  по двум взаимно противоположным направлениям 1 и 2 от  $\hat{u}$  равна значениям

$$\partial^2 \hat{u}(x(t), t) / dt^2 = (\partial_{xx} \hat{u}(x, t))_i x'^2(t) + (\partial_x \hat{u}(x, t))_i x'(t) + (\partial_{tt} \hat{u}(x, t))_i, \quad i = 1, 2,$$

которые при непрерывности первых  $\partial_t \hat{u}$  и  $\partial_x \hat{u}$  дают уравнение для разрывов вторых производных

$$[\partial_{tt} \hat{u}(x, t)] + x'^2(t) [\partial_{xx} \hat{u}(x, t)] = 0, \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (22)$$

Однородная система уравнений (19), (21) и (22) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ее определитель тождественно равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x'(t) + a_2 & a_1(x'(t) + a_2) & 0 \\ 0 & a_1 - x'(t) & -a_2(a_1 - x'(t)) \\ 1 & 0 & x'^2(t) \end{vmatrix} = (a_1 - x'(t))(x'(t) + a_2)(x'^2(t) - a_2 a_1) = 0, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Это уравнение при всех  $a_1 > 0$ ,  $a_2 \geq 0$  имеет решения  $x'(t) = a_1$ ,  $x'(t) = -a_2$ ,  $x'(t) = \pm \sqrt{a_2 a_1}$ , которым соответствуют характеристики (2) и прямые (13). Теорема 2 доказана.

**3. Приложение результатов работы** к поиску необходимых требований гладкости на правую часть  $f$  уравнения (1) для существования его классических решений в первой четверти плоскости.

**Следствие.** Если  $u \in C^2(G_\infty)$  – классическое решение неоднородного уравнения (1), то правая часть уравнения (1) непрерывна на  $f \in C(G_\infty)$ , функция  $F(x, t) = e^{Bx - At} \hat{F}(x, t) \in C^2(G_\infty)$  удовлетворяет уравнению (1) и

$$\int_0^t e^{Bx - A\tau} f(x + (-1)^i a_i(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(G_\infty), \quad i = 1, 2. \quad (23)$$

**Доказательство.** Утверждение этого следствия для уравнения (1) достаточно обосновать для уравнения (5). Для решений  $\hat{u} \in C^2(G_\infty)$  необходимость непрерывности правой части  $f \in C(G_\infty)$  непосредственно вытекает из уравнения (5), для которых функция  $\hat{F}$  лишь непрерывно дифференцируема, т.е.  $\hat{F} \in C^1(G_\infty)$  при любых  $a_1 > 0$ ,  $a_2 \geq 0$ . Согласно общему интегралу (6) множество всех обобщенных решений уравнения (5) представляется общим интегралом

$$\hat{u}(x, t) = \hat{u}_0(x, t) + \hat{F}(x, t), \quad (24)$$

где функции  $\hat{u}, \hat{F} \in W_{2,loc}^1(G_\infty)$  и  $\hat{u}_0 \in W_{2,loc}^1(G_\infty)$  удовлетворяют соответственно интегральному уравнению (4) при  $\hat{f} \neq 0$  и  $\hat{f} = 0$ .

Классические решения  $\hat{u} \in C^2(G_\infty)$  неоднородного уравнения (5) являются его обобщенными решениями. Обратное утверждение не верно. Но все обобщенные решения неоднородного уравнения (5), которые являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями на  $G_\infty$ , как известно, будут классическими решениями этого уравнения [7].

Функция  $\hat{F}$  не зависит от  $x - a_1 t$ ,  $x + a_2 t$  и не содержит слагаемых, зависящих от  $x - a_1 t$  и/или  $x + a_2 t$ . Если бы функция  $\hat{F}$  зависела от  $x - a_1 t$  и/или  $x + a_2 t$ , то она бы не была обобщенным решением неоднородного уравнения (5) при  $\hat{f} \neq 0$ . Если бы функция  $\hat{F}$  содержала слагаемые, зависящие от  $x - a_1 t$  и/или  $x + a_2 t$ , то это противоречило бы ее единственности среди всех остальных обобщенных решений неоднородного уравнения (5), в которых присутствуют нетривиальные слагаемые вида  $\hat{u}_0$  [2]. Поэтому в сумме (6) негладкие слагаемые не могут сократиться и, следовательно, функция  $\hat{F}$  должна быть дважды непрерывно дифференцируемой на  $G_\infty$ , т.е.  $\hat{F} \in C^2(G_\infty)$ . Итак, очевидность этого включения вытекает из общего интеграла (6), свойства аддитивной единственности решения  $\hat{F}$ , которые, в свою очередь, следуют из линейности и гиперболичности дифференциального уравнения (1).

Это можно доказать и с помощью теорем 1 и 2. В равенстве (24) негладкие слагаемые из  $\hat{F}$  не могут сократиться с негладкими слагаемыми из  $\hat{u}_0$  для того, чтобы их сумма  $\hat{u}$  стала дважды непрерывно дифференцируемой на  $G_\infty$ . Поскольку в силу доказанных выше теорем 1 и 2 возможны разрывы первых частных производных только на характеристиках (2) и вторых частных производных решений  $\hat{u}$  уравнения (5) только на прямых (2) и/или (13), то не зависящая от  $x + (-1)^i a_i t$ ,  $x + (-1)^i \sqrt{a_2 a_1} t$ ,  $i = 1, 2$ , функция  $\hat{F}$  должна быть дважды непрерывно дифференцируемой на  $G_\infty$ , т.е.  $\hat{F} \in C^2(G_\infty)$ . Действительно, если бы функция  $\hat{F}$  зависела от  $x - a_1 t$  и/или  $x + a_2 t$ , то она была бы обобщенным решением уравнения (5) при  $\hat{f} = 0$ , а не при  $\hat{f} \neq 0$ . Если бы в функции  $\hat{F}$  присутствовали слагаемые, зависящие от  $x - a_1 t$  и/или  $x + a_2 t$ , то это противоречило бы единственности обобщенного решения  $\hat{F}$  до аддитивных нетривиальных обобщенных решений вида  $\hat{u}_0$  однородного уравнения (5) при  $\hat{f} = 0$ . Если бы функция  $\hat{F}$  зависела от  $x - \sqrt{a_2 a_1} t$  и/или  $x + \sqrt{a_2 a_1} t$ , то она была бы обобщенным решением интегрального уравнения типа (4), соответствующего однородному дифференциальному уравнению

$$\partial_{tt} w(x, t) - a_2 a_1 \partial_{xx} w(x, t) = 0, \tag{25}$$

характеристиками которого служат прямые (13) при  $a_2 > 0$ .

Однако уже известно, что для всех  $a_1, a_2 > 0$  функция  $\hat{F} \in C^1(G_\infty)$  – обобщенное решение неоднородного уравнения (5), а не однородного уравнения (25), т.к.  $(a_1 - a_2) \partial_{xt} \hat{F} \neq \hat{f}$  для  $\hat{f} \neq 0$ . Причем при  $a_2 = 0$  прямые  $x = C_3$ ,  $x = C_4$  из (13) совпадают с характеристиками  $x = C_2$  из (2). Если в функции  $\hat{F}$  присутствуют негладкие слагаемые, зависящие от  $x - \sqrt{a_2 a_1} t$  и/или  $x + \sqrt{a_2 a_1} t$ , то они при  $a_1 \neq a_2$  не сократятся с какими-то обобщенными решениями вида  $\hat{u}_0$ , т.к. при  $a_1 \neq a_2$  последние решения не могут одновременно удовлетворять интегральному уравнению (4) при  $b_1 = b_2 = 0$ ,  $f = 0$  и в обобщенном смысле однородному уравнению (25).

Поскольку функция  $\hat{F} \in C^2(G_\infty)$ , то в уравнении (4) при  $b_1 = b_2 = 0$ ,  $f = \hat{f}$  и  $v = \hat{F}$  можно проинтегрировать один раз по частям и получить тождество

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (\partial_t - a_2 \partial_x)(\partial_t + a_1 \partial_x) \hat{F}(x, t) \varphi(x, t) dx dt = \int_0^\infty \int_0^\infty \hat{f}(x, t) \varphi(x, t) dx dt, \quad \forall \varphi \in D^1(\dot{G}_\infty),$$

из которого с помощью леммы дю Буа-Реймонда стандартным образом выводится, что  $\hat{F}$  удовлетворяет уравнению (5), т.е.  $\hat{F}$  – его классическое решение [7, с. 26].

Функция  $\hat{F} \in C^2(G_\infty)$  должна иметь непрерывно дифференцируемые производные вдоль характеристик (2) уравнения (1):

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial t} - (-1)^i a_i \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} = e^{-B[x - (-1)^i a_{3-i} t]} \int_0^t e^{b_{3-i} \tau} f\left(x - (-1)^i a_{3-i}(t - \tau), \tau\right) d\tau \in C^1(G_\infty), \quad i = 1, 2.$$

Отсюда следует необходимость гладкости (23). Следствие доказано.

**Закключение.** В работе показано, что при любых  $a_1 > 0$ ,  $a_2 \geq 0$  первые частные производные непрерывных решений одномерного факторизованного неоднородного волнового уравнения могут терпеть разрыв лишь на кусках характеристик  $x - a_1 t = C_1$ ,  $x + a_2 t = C_2$ , а вторые частные производные его непрерывно дифференцируемых решений – лишь на кусках этих характеристик и кусках прямых  $x - \sqrt{a_2 a_1} t = C_3$ ,  $x + \sqrt{a_2 a_1} t = C_4$ ,  $i = \overline{1, 4}$ . Эти результаты применены к обоснованию того, что каждое классическое решение этого неоднородного уравнения колебаний струны содержит в виде слагаемого его единственное (с точностью до аддитивных классических решений соответствующего факторизованного однородного уравнения) обобщенное решение, которое в действительности является его классическим решением в первой четверти плоскости. Последний результат позволил нам вывести необходимость не-

прерывности  $f$  и интегральных требований гладкости (23) на правую часть  $f$  для существования классических решений одномерного факторизованного неоднородного волнового уравнения. Это можно использовать для нахождения необходимых требований гладкости на  $f$  для однозначной корректной (устойчивой) везде разрешимости различных вспомогательных смешанных задач для этого уравнения в первой четверти плоскости. В дальнейшем, имея все необходимые условия на  $f$  в четверти плоскости, можно выводить все необходимые условия на  $f$  для смешанных задач с уравнением колебаний ограниченной струны вида (1) в полуполосе плоскости методом «вспомогательных смешанных задач для полугораниченной струны» из [4].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский // М. : Наука, 2004. – 798 с.
2. Ломовцев, Ф. Е. Единственность частных решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений, не содержащих нетривиальные частные решения их однородных уравнений / Ф. Е. Ломовцев // XII Белорусская математическая конференция : тез. докл., Минск, 5-10 сент. 2016 г. : в 5 ч. / Белорус. гос. ун-т ; ред. С. Г. Красовский. – Минск, 2016. – Ч. 2. – С. 71–72.
3. Ломовцев, Ф. Е. Классические решения неоднородного факторизованного гиперболического уравнения второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной второй кривой производной в граничном условии / Ф. Е. Ломовцев, Е. Н. Новиков // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2015. – № 4 (88). – С. 5–11.
4. Ломовцев, Ф. Е. Метод вспомогательных смешанных задач для полугораниченной струны / Ф. Е. Ломовцев // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : матер. Междунар. мат. конф. Минск, 7–10 дек. 2015 г. : в 2 ч. / Белорус. гос. ун-т ; ред. С. Г. Красовский. – Минск, 2015. – Ч. 2. – С. 74–75.
5. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – Минск : БГУ, 2011. – 459 с.
6. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанных задач для одномерного волнового уравнения с негладкими условиями Коши / В. И. Корзюк, С. И. Пузырный // Весн. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 2. – С. 22–31.
7. Владимиров, В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 280 с.
8. Lions, J.-L. Equations différentielles opératoires et problèmes aux limites / J.-L. Lions // Berlin : Springer, 1961. – 292 p.

Поступила 24.09.2016

### ABOUT RUPTURE ALONG THE CHARACTERISTICS OF THE FIRST AND SECOND PARTIAL DERIVATIVES OF SOLUTIONS OF THE GENERAL FACTORIZED ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION IN A QUARTER OF THE PLANE

*F. LOMOVTSSEV*

*In this paper we study the smoothness of generalized solutions of one-dimensional wave equation  $(\partial_t - a_2 \partial_x + b_2)(\partial_t + a_1 \partial_x + b_1)u(x,t) = f(x,t)$  and its right-hand side  $f$  in the first quadrant. The purpose of the article – finding breaks the lines of the first and second partial derivatives of the generalized solutions of the wave equation in the case of the existence of these derivatives and the identification of necessary smoothness requirements on the right-hand side for the existence of classical solutions of this equation. The purpose of the article is achieved by propagating waves from the course of the equations of mathematical physics and methods of the theory of generalized functions. It is proved that the first partial derivatives of the continuous solutions of this equation can have a break only on pieces of its characteristics:  $x - a_1 t = C_1$ ,  $x + a_2 t = C_2$ . The second partial derivatives of its continuously differentiable solutions can have a break only on the pieces of these characteristics and to pieces of the direct:  $x - \sqrt{a_2 a_1} t = C_3$ ,  $x + \sqrt{a_2 a_1} t = C_4$ ,  $C_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1,4}$ . With these results it is established that any classical solution of the total factored linear inhomogeneous wave equation string contains a term of its unique (up to addition of classical solutions of the corresponding factored homogeneous equation) generalized solution which is twice continuously differentiable and is its classical solution in the first quadrant. This allowed us to bring the need for continuity of  $f$  and the corresponding integral requirements for the smoothness on  $f$  to the existence of classical solutions of this equation.*

**Keywords:** *the factorized equation of string vibrations, a generalized solution of the inhomogeneous equation, the gap support of the partial derivative, a necessary smoothness requirement.*

УДК 514

**ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГАМИЛЬТОНА – ОСТРОГРАДСКОГО  
В РАССЛОЕНИЯХ СКОРОСТЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА**

*д-р техн. наук С.Г. ЕХИЛЕВСКИЙ, канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. ГОЛУБЕВА,  
канд. физ.-мат. наук Д.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук Ю.Ф. ПАСТУХОВ  
(Полоцкий государственный университет)*

В работе исследуются свойства инвариантного преобразования Остроградского  $F_L(x): T^{2n-1}X_m \rightarrow T^{2n-1}X_m$  в расслоении скоростей произвольного нечетного порядка  $T^{2n-1}X_m$ , индуцированного невырожденной функцией Лагранжа  $L: T^n X_m \rightarrow \mathbb{R}$ . В явном виде получена произ-

водная импульсов  $k$ -го порядка:  $D_l p_k^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_{k-1}^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k+1)}{x})$ , где

$p_k^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_l^i \left( \frac{\partial L(x, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \right)$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $i = \overline{1, m}$  – импульс  $k$ -го порядка по  $i$ -й координате.

Обобщена теорема Остроградского на случай невырожденной системы уравнений Эйлера – Лагранжа

произвольного порядка  $\sum_{l=0}^n (-1)^l D_l^i \left( \frac{\partial L(x, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}} \right) = 0$ , которая локально эквивалентна канонической сис-

теме уравнений Гамильтона.

**Ключевые слова:** уравнения Эйлера – Лагранжа, гладкие многообразия, расслоение пространства скоростей, энергия и импульс системы, преобразование Остроградского, невырожденная функция, теорема Остроградского, система уравнений Гамильтона.

**Введение.** Гамильтон в 1835 г. получил новую форму уравнений движения механических систем, названных впоследствии каноническими уравнениями Гамильтона.

В 1848 г. М.В. Остроградский распространил принцип Гамильтона на системы с нестационарными голономными связями, после чего он стал называться принципом Гамильтона – Остроградского. Полученная система канонических уравнений первого порядка содержит вдвое больше дифференциальных уравнений, чем в вариационной задаче в постановке Лагранжа. Высоко отозвался о работах по динамике Гамильтона член-корреспондент АН СССР Л.Н. Сретенский: «Эти работы легли в основу всего развития аналитической механики в XIX веке» [1]. Аналогичное мнение выразил академик РАН В.В. Румянцев: «Оптико-механическая аналогия Гамильтона определила на столетие прогресс аналитической механики» [2]. По мнению профессора Л.С. Полака, это была «теория, почти не имеющая аналогов в механике по общности и абстрактности, открывшая колоссальные возможности в механике и смежных науках» [3].

Академик В.И. Арнольд следующим образом охарактеризовал возможности, открывшиеся после появления гамильтоновой механики: «Гамильтонова точка зрения позволяет исследовать до конца ряд задач механики, не поддающихся решению иными средствами (например, задачу о притяжении двумя неподвижными центрами и задачи о геодезических на трехосном эллипсоиде). Еще большее значение гамильтонова точка зрения имеет для приближенных методов теории возмущений (небесная механика), для понимания общего характера движения в сложных механических системах (эргодическая теория, статистическая механика) и в связи с другими разделами математической физики (оптика, квантовая механика и т.п.)» [4].

Подход Гамильтона эффективно используется в математической и теоретической физике [5–8]. Первоначально вариационный принцип Гамильтона был сформулирован для задач механики и теории поля. С появлением теории относительности оказалось, что этот принцип строго выполняется и в релятивистской динамике. Принцип Гамильтона оказался полезным при разработке квантовой механики и общей теории относительности.

**Основные определения и математические объекты.** Пусть  $X_m$  – гладкое многообразие размерности  $m$ ,  $T^n X_m$  – гладкое расслоение пространства скоростей порядка  $n$  с базой расслоения  $X_m$ .

**Определение 1.** Гладкая функция  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  называется (слабо) невырожденной в точке  $v_x^n \in T^n X_m$ , если в некоторой системе координат  $x$ , базы  $X_m$  расслоения  $T^n X_m$ :

$$\det \left( \frac{\partial^2 L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^i \partial x^k} \right) \neq 0,$$

где  $\varphi: U_{v_x^n} \rightarrow \mathfrak{R}^{(n+1)m}$ ,  $\varphi(v_x^n) = (x, \dot{x}, \dots, x) \in \mathfrak{R}^{(n+1)m}$  – координатный гомеоморфизм;

$(U_{v_x^n}, \varphi)$  – локальная карта  $v_x^n \in T^n X_m$ ;

$L(x, \dot{x}, \dots, x)$  – локальная запись функции  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  в системе координат  $x$ :  
 $L(x, \dot{x}, \dots, x) = L(\phi^{-1}(r_m^{n+1})), r_m^{n+1} \in \mathfrak{R}^{(n+1)m}$  [9].

**Лемма 1.** Определение невырожденной функции  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  в точке  $v_x^n \in T^n X_m$  корректно, то есть инвариантно относительно выбора локальной системы координат  $x$ , базы  $X_m$  расслоения  $T^n X_m$  [9].

**Замечание.** По теореме о неявной функции, гладкая функция  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ , невырожденная в точке  $v_x^n \in T^n X_m$ , является невырожденной в некоторой окрестности  $U_{v_x^n}$ .

**Определение 2.** Гладкая функция  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  называется невырожденной, если она не вырождена в каждой точке  $v_x^n \in T^n X_m$ . Невырожденную функцию  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  будем называть также слабо невырожденной функцией [2].

**Определение 3.** Гладкая функция  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ , невырожденная в точке  $v_x^n \in T^n X_m$ , называется локально невырожденной функцией Лагранжа (лагранжианом) в расслоении скоростей порядка  $n$ . Гладкая функция  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ , невырожденная в каждой точке  $v_x^n \in T^n X_m$ , называется глобально невырожденной функцией Лагранжа в расслоении скоростей порядка  $n$ .

Отображение  $F_L(x): T^{2n-1} X_m \rightarrow T^{2n-1} X_m$  (индуцированное лагранжианом  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ ) в локальных координатах  $x$  в базе  $X_m$  расслоения  $T^{2n-1} X_m$  задается функцией вида

$$F_L(x): (x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(2n-1)i}) \rightarrow (x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)i}, p_n^i, p_{n-1}^i, \dots, p_1^i), \quad i = \overline{1, m},$$

где  $x^{(k)i} = D_t^k x^i$ ,  $D_t^k$  – оператор  $k$ -кратного полного дифференцирования по переменной  $t$ ;

$$p_k^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)i}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right), \quad k = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}$$

– обобщенный импульс порядка  $k$  по переменной  $x_i$  в преобразовании  $F_L(x)$ .

Запишем подробно в локальных координатах  $x$  в базе  $X_m$  расслоения  $T^n X_m$  обобщенный импульс

$$\begin{aligned} p_1^i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - D_t \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i} \right) + \dots + (-1)^{n-1} D_t^{n-1} \left( \frac{\partial L}{\partial x^{(n)i}} \right), \\ p_2^i &= \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i} - D_t \left( \frac{\partial L}{\partial x^{(n)i}} \right) + \dots + (-1)^{n-2} D_t^{n-2} \left( \frac{\partial L}{\partial x^{(n)i}} \right), \\ &\dots \\ p_n^i &= \frac{\partial L}{\partial x^{(n)i}}. \end{aligned}$$

Согласно [12], имеет место следующая теорема.

**Теорема 1** (закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе  $X_m$  расслоения  $T^{2n-1}X_m$ ).

При замене координат  $\bar{x} \rightarrow x(\bar{x})$  в базе многообразия  $X_m$  расслоения  $T^{2n-1}X_m$  обобщенные импульсы  $k$ -порядка  $\overline{p_k^i(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})}^{(2n-k)}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , преобразуются как тензоры типа  $(0, 1)$  (ковекторы):

$$\overline{p_k^i(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})}^{(2n-k)} = \sum_{j=1}^n p_k^j(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})^{(2n-k)} \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})^{(2n-k)} \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}, \quad k = \overline{1, n}, i, j = \overline{1, m}.$$

Тензорный закон преобразования обобщенных импульсов позволяет называть функции  $\overline{p_k^i(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})}^{(2n-k)}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , тензором импульса  $k$ -го порядка,  $k = \overline{1, n}$ , в расслоении скоростей  $T^{2n-1}X_m$  [12].

Именно этот результат позволяет корректно определить преобразование Остроградского  $F_L : T^{2n-1}X_m \rightarrow T^{2n-1}X_m$ , индуцированное отображением  $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ , при условии невырожденности  $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ .

**Определение 4.** Функция

$$\begin{aligned} H(\bar{p}, \bar{q}) &= -L(\bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \dot{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q}), \ddot{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q}), \dots, \bar{x}(\bar{p}, \bar{q}))^{(n)} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_k^i{}^{(k)i} \bar{x}(\bar{p}, \bar{q}) = \\ &= -L(\bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \dot{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q}), \ddot{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q}), \dots, \bar{x}(\bar{p}, \bar{q}))^{(n)} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_k^i D_t^k x^i(\bar{p}, \bar{q}) \end{aligned}$$

называется гамильтонианом (функцией Гамильтона) преобразования  $F_L : T^{2n-1}X_m \rightarrow T^{2n-1}X_m$  для функции Лагранжа  $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  или энергией системы, состояние которой описывается уравнениями Эйлера – Лагранжа

$$\sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, \dot{x})^{(n)}}{\partial x^{(l)i}} \right) = 0.$$

**Математическая постановка задачи.** Пусть  $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  – невырожденная функция в точке

$v_x^n \in T^n X_m$ . Является ли система уравнений Эйлера – Лагранжа  $\sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, \dot{x})^{(n)}}{\partial x^{(l)i}} \right) = 0$  порядка  $n$

локально эквивалентной системе уравнений Гамильтона:

$$\begin{cases} D_t(q_k^i) = q_k^i = \frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial p_k^i}, \\ D_t(p_k^i) = p_k^i = -\frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial q_k^i}, \end{cases} \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n} \text{ (система } 2mn \text{ уравнений),}$$

где  $\bar{p} = \overline{p} = (p_1^{j_1}, p_2^{j_2}, \dots, p_n^{j_n}) = (p_1^1 p_1^2 \dots p_1^m, p_2^1 p_2^2 \dots p_2^m, \dots, p_n^1, \dots, p_n^m) = (p_{l_1}^{j_1})$ ,  $j_1 = \overline{1, m}$ ,  $l_1 = \overline{1, n}$ .

**Теорема 2** (дифференциальная связь импульсов  $k$ -го и  $(k - 1)$ -го порядков). Пусть  $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  – невырожденная функция Лагранжа. Тогда для преобразования Остроградского  $F_L : T^{2n-1}X_m \rightarrow T^{2n-1}X_m$ , индуцированного функцией  $L$ , справедливо равенство

$$D_t p_k^i(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})^{(2n-k)} = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})^{(n)}}{\partial x^{(k-1)i}} - p_{k-1}^i(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})^{(2n-k+1)},$$

где  $p_k^i = \sum_{l_1=0}^{n-k} (-1)^{l_1} D_t^{l_1} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})^{(n)}}{\partial x^{(l_1+k)i}} \right)$  – импульс  $k$ -го порядка,  $p_{k-1}^i = \sum_{l_1=0}^{n-k+1} (-1)^{l_1} D_t^{l_1} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})^{(n)}}{\partial x^{(l_1+k-1)i}} \right)$  – импульс  $(k - 1)$ -го порядка.

Доказательство.

$$\begin{aligned} D_t p_k^i &= D_t \left( \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) \right) = \sum_{l=0}^{n-k} D_t \left( (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) \right) = \\ &= \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^{l+1} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) = (-1) \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{l+1} D_t^{l+1} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) = \\ &= (-1) \left( \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{l+1} D_t^{l+1} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l+1+k-1)i}} \right) \right). \end{aligned}$$

Увеличим индекс  $l$  на единицу:  $l_1 = l + 1$ . Поскольку  $l = \overline{0, n-k}$ , то  $l_1 = \overline{1, n-k+1}$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} D_t p_k^i &= (-1) \left( \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{l+1} D_t^{l+1} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l+1+k-1)i}} \right) \right) = \\ &= (-1) \left( \sum_{l_1=1}^{n-k+1} (-1)^{l_1} D_t^{l_1} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l_1+k-1)i}} \right) \right) = (-1) \left( \sum_{l_1=1}^{n-(k-1)} (-1)^{l_1} D_t^{l_1} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l_1+k-1)i}} \right) \right) = \\ &= (-1) \left( \sum_{l_1=1}^{n-(k-1)} (-1)^{l_1} D_t^{l_1} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l_1+(k-1))i}} \right) \right) = \\ &= (-1) \left( \sum_{l_1=0}^{n-(k-1)} (-1)^{l_1} D_t^{l_1} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l_1+(k-1))i}} \right) - (-1)^0 D_t^0 \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(0+(k-1))i}} \right) \right) = \\ &= (-1) \left( p_{k-1}^i - \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} \right) = -p_{k-1}^i + \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}}. \end{aligned}$$

Используя определение импульса  $k$ -го порядка  $p_k^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)$ , получим формулу

импульса  $(k-1)$ -го порядка:  $p_{k-1}^i = \sum_{l=0}^{n-k+1} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l+k-1)i}} \right)$ . **Теорема 2** доказана.

**Теорема 3.** Пусть задана невырожденная функция Лагранжа  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ . Тогда преобразование Остроградского  $F_L: T^{2n-1} X_m \rightarrow T^{2n-1} X_m$ , индуцированное  $L$ , также является невырожденным [9].

**Замечание 1.** Слоевые координаты вектора  $x = D_t^k x_i$   $i = \overline{1, m}$  в  $T^{2n-1} X_m$  могут быть названы по аналогии с физическими величинами координатами вектора скорости  $k$ -го порядка,  $k = \overline{1, 2n-1}$ , а оператор  $D_t^k$  – оператор  $k$ -кратного полного дифференцирования по времени  $t$ .

**Замечание 2.** Функционал в уравнении Эйлера – Лагранжа может быть интерпретирован как импульс нулевого порядка  $p_0^i(x, \dot{x}, \dots, x) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}} \right)$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Тогда вектор импульса  $n$ -го

порядка имеет вид  $p_n^i(x, \dot{x}, \dots, x) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(n)i}}$ .



**Определение 5.** Гладкая функция  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  называется сильно невырожденной в точке  $v_x^n \in T^n X_m$ , если в некоторой системе координат  $x$  базы  $X_m$  расслоения скоростей  $T^n X_m$  уравнения

$$\begin{cases} q_k^i = x^{(k-1)i}, \\ p_k^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right), \end{cases} \quad k = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m},$$

могут быть однозначно решены в виде

$$\begin{cases} x^i = x^i(\bar{p}, \bar{q}), \\ \dot{x}^i = \dot{x}^i(\bar{p}, \bar{q}), \\ \dots, \\ x^{(2n-1)i} = x^{(2n-1)i}(\bar{p}, \bar{q}), \end{cases} \quad l = \overline{0, 2n-1}, \quad i = \overline{1, m}.$$

**Лемма 2.** Определение сильной невырожденности функции  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  в точке  $v_x^n \in T^n X_m$  корректно, то есть инвариантно относительно выбора локальной системы координат  $x$  базы  $X_m$  расслоения  $T^n X_m$  [9].

**Лемма 3** (связь свойств невырожденности и сильной невырожденности).

1) Локально сильно невырожденная функция  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  в точке  $v_x^n \in T^n X_m$  сильно невырождена.

2) Сильно невырожденная функция  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  в карте  $(U_{v_x^n}, \varphi)$ , где  $\varphi: U_{v_x^n} \rightarrow \mathfrak{R}^{(n+1)m}$ ,  $\varphi(v_x^n) = (x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) \in \mathfrak{R}^{(n+1)m}$  – координатный гомеоморфизм,  $v_x^n \in T^n X_m$ , является невырожденной в этой карте [12].

**Теорема 4** (обобщение теоремы Остроградского). Для невырожденных лагранжианов  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$

система уравнений Эйлера-Лагранжа  $\sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(l)i}} \right) = 0$  локально эквивалентна системе урав-

нений Гамильтона: 
$$\begin{cases} D_t(q_k^i) = q_k^i = \frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial p_k^i}, \\ D_t(p_k^i) = p_k^i = -\frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial q_k^i}, \end{cases} \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n} \text{ (система } 2mn \text{ уравнений),}$$

где  $p = \bar{p} = (p_1^{j_1}, p_2^{j_1}, \dots, p_n^{j_1}) = (p_1^1 p_1^2 \dots p_1^m, p_2^1 p_2^2 \dots p_2^m, \dots, p_n^1, \dots, p_n^m) = (p_{l_1}^{j_1})$ ,  $j_1 = \overline{1, m}$ ,  $l_1 = \overline{1, n}$ ;

$q = \bar{q} = (q_1^{j_2}, q_2^{j_2}, \dots, q_n^{j_2}) = (q_1^1 q_1^2 \dots q_1^m, q_2^1 q_2^2 \dots q_2^m, \dots, q_n^1, \dots, q_n^m) = (q_{l_2}^{j_2})$ ,  $j_2 = \overline{1, m}$ ,  $l_2 = \overline{1, n}$ ;

$$H(\bar{p}, \bar{q}) = -L(x(\bar{p}, \bar{q}), \dot{x}(\bar{p}, \bar{q}), x(p, q), \dots, x^{(n)}(\bar{p}, \bar{q})) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_k^i x^{(k)i}(\bar{p}, \bar{q}) = -L(x(\bar{p}, \bar{q}), \dot{x}(\bar{p}, \bar{q}), x(p, q), \dots, x^{(n)}(\bar{p}, \bar{q})) +$$

$+ \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_k^i D_t^k x^i(\bar{p}, \bar{q})$  – функция Гамильтона;

$\overset{(k)i}{x} = D_t^k(x^i)$ ,  $D_t^k$  – оператор  $k$ -кратного полного дифференцирования по переменной  $t$ ;

$$p_k^i(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial x^{(l+k)i}} \right), \quad k = \overline{1, n} \quad i = \overline{1, m}$$

– импульс порядка  $k$  по  $i$ -й координате

$$x = \bar{x} = (x^1, x^2, \dots, x^m).$$

Доказательство.

В случае  $n = 1$  получаем известную теорему Остроградского.

Положим  $n \geq 2$ .

Из явного вида выражений для импульсов  $k$ -го порядка  $p_k^i(x, \bar{x}, \dots, \bar{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, \bar{x})}{\partial x^{(l+k)i}} \right)$ ,

$k = \overline{1, n}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , следует, что  $p_k^i$  есть функции от  $x, \bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}$  и  $p_k^i = p_k^i(x, \bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$ . Здесь координаты  $x = \bar{x} = (x^1, x^2, \dots, x^m)$  не зависят от производных более высокого порядка. Из **леммы 3** о локально сильной невырожденности слабо невырожденного лагранжиана (он назывался невырожденным) следует, что  $\overset{(l)j}{x} = D_t^l x^j(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n, \dots, p_{2n-1}) = x(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n, \dots, p_{2n-1})$ ,  $l = \overline{n, 2n-1}$   $j = \overline{1, m}$ , то есть  $\overset{(l)j}{x}$  являются функциями от  $q_1, q_2, \dots, q_n, p_n, \dots, p_{2n-1}$ ,  $q_\alpha = (q_\alpha^1, q_\alpha^2, \dots, q_\alpha^m) = (q_\alpha^i)$ ,  $\alpha = \overline{1, n}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $p_\beta = (p_\beta^1, p_\beta^2, \dots, p_\beta^m) = (p_\beta^j)$ ,  $\beta = \overline{n, 2n-1}$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Тогда имеем

$$p = \bar{p} = (p_1^{j_1}, p_2^{j_1}, \dots, p_n^{j_1}) = (p_1^1 p_1^2 \dots p_1^m, p_2^1 p_2^2 \dots p_2^m, \dots, p_n^1, \dots, p_n^m) = (p_{l_1}^{j_1}), \quad j_1 = \overline{1, m}, \quad l_1 = \overline{1, n},$$

$$q = \bar{q} = (q_1^{j_2}, q_2^{j_2}, \dots, q_n^{j_2}) = (q_1^1 q_1^2 \dots q_1^m, q_2^1 q_2^2 \dots q_2^m, \dots, q_n^1, \dots, q_n^m) = (q_{l_2}^{j_2}), \quad j_2 = \overline{1, m}, \quad l_2 = \overline{1, n},$$

$$H(p, q) = -L(\bar{x}(p, q), \bar{x}(p, q), \bar{x}(p, q), \dots, \bar{x}(p, q)) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_k^i \overset{(k)i}{x}(p, q) = -L(\bar{x}(p, q), \bar{x}(p, q), \bar{x}(p, q), \dots, \bar{x}(p, q)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_k^i D_t^k x^i(p, q) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^m p_k^i q_{k+1}^i + \sum_{s=1}^m p_n^s \overset{(n)s}{x}(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n) - L(q_1, \dots, q_n, \overset{(n)}{x}(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)),$$

где  $\overset{(k_1)i}{x} = q_{k_1+1}^i$ ,  $k_1 = \overline{0, n-1}$ , то есть  $\overset{(0)i}{x} = x = q_1^i$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $\overset{(k)i}{x} = q_{k+1}^i$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ ,  $\overset{(n)i}{x} = \overset{(n)i}{x}(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ .

Для  $1 \leq k \leq n-1$  продифференцируем функцию  $H(\bar{p}, \bar{q})$  по  $p_k^i$ :

$$\frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial p_k^i} = \frac{\partial}{\partial p_k^i} \left( \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{i=1}^m p_l^i q_{l+1}^i + \sum_{s=1}^m p_n^s \overset{(n)s}{x}(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n) - L(q_1, \dots, q_n, \overset{(n)}{x}(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)) \right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial p_l^i}{\partial p_k^i} q_{l+1}^i + p_l^i \frac{\partial q_{l+1}^i}{\partial p_k^i} \right) + \frac{\partial}{\partial p_k^i} \left( \sum_{s=1}^m p_n^s \overset{(n)s}{x}(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n) - L(q_1, \dots, q_n, \overset{(n)}{x}(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)) \right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial p_l^i}{\partial p_k^i} q_{l+1}^i + p_l^i \frac{\partial q_{l+1}^i}{\partial p_k^i} \right) + \frac{\partial}{\partial p_k^i} \left( \sum_{s=1}^m p_n^s \overset{(n)s}{x}(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n) - L(q_1, \dots, q_n, \overset{(n)}{x}(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)) \right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial p_l^i}{\partial p_k^i} q_{l+1}^i \right) + \sum_{s=1}^m p_n^s \frac{\partial \overset{(n)s}{x}(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)}{\partial p_k^i} - \frac{\partial}{\partial p_k^i} L(q_1, \dots, q_n, \overset{(n)}{x}(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{i=1}^m (\delta_k^l q_{i+1}^i) + \sum_{s=1}^m p_n^s \frac{\partial^{(n)s} x(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)}{\partial p_k^i} - \frac{\partial}{\partial p_k^i} L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)) = \\
 &= q_{k+1}^i + \sum_{s=1}^m p_n^s \frac{\partial^{(n)s} x(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)}{\partial p_k^i} - \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n))}{\partial x^{(n)s}} \frac{\partial x^{(n)s}}{\partial p_k^i} = \\
 &= x + \sum_{s=1}^m p_n^s \frac{\partial^{(n)s} x(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)}{\partial p_k^i} - \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n))}{\partial x^{(n)s}} \frac{\partial x^{(n)s}}{\partial p_k^i},
 \end{aligned}$$

где  $(p_n^s - \frac{\partial L}{\partial x^{(n)s}}) \frac{\partial x^{(n)s}}{\partial p_n^i} + x = x = D_t^{(k)i} x = D_t^{(k-1)i} x = D_t^i q_k = \dot{q}_k$ ,  $\delta_k^l = \begin{cases} 1, l = k \\ 0, l \neq k \end{cases}$  – символ Кронекера.

Поскольку  $x = q_{k+1}^i$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ ,  $x = D_t^{(k-1)i} q_k^i$ ,  $p_n^s = \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)s}}$ ,  $s = \overline{1, m}$ ,  $x(q, p_n) = x(q_1, \dots, q_n, p_n)$ ,

то для  $k = n$  получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial p_n^i} &= x + \sum_{s=1}^m p_n^s \frac{\partial^{(n)s} x(q_1, \dots, q_n, p_n)}{\partial p_n^i} - \sum_{s=1}^m \frac{\partial L q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n)}{\partial x^{(n)s}} \frac{\partial x^{(n)s}}{\partial p_n^i} = \\
 &= x + \sum_{s=1}^m \frac{\partial x^{(n)s}}{\partial p_n^i} (q_1, \dots, q_n, p_n) (p_n^s - \frac{\partial L q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n)}{\partial x^{(n)s}}) = \\
 &= x = D_t^{(n)i} x = D_t^{(n-1)i} x = \dot{q}_n^i.
 \end{aligned}$$

Для  $n \geq k \geq 2$  продифференцируем функцию  $H(\bar{p}, \bar{q})$  по  $q_k^i$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial q_k^i} &= p_{k-1}^i + p_n^s \frac{\partial^{(n)s} x(q_1, \dots, q_n, p_n)}{\partial q_k^i} - \frac{\partial L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n))}{\partial q_k^i} - \frac{\partial L q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n)}{\partial x^{(n)s}} \frac{\partial x^{(n)s}}{\partial q_k^i} = \\
 &= p_{k-1}^i + \sum_{s=1}^m (p_n^s - \frac{\partial L q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n)}{\partial x^{(n)s}}) \frac{\partial x^{(n)s}}{\partial q_k^i} - \frac{\partial L}{\partial q_k^i} = \\
 &= p_{k-1}^i - \frac{\partial L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n))}{\partial q_k^i} = -D_t^i p_k^i = -\dot{p}_k^i.
 \end{aligned}$$

Поскольку верно равенство  $p_n^s - \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)s}} = 0$  (по определению импульса  $n$ -го порядка) и на основании ранее доказанной теоремы о дифференциальной связи импульсов  $k$ -го и  $(k-1)$ -го порядков

$$D_t p_k^i(x, x, \dots, x) = \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} - p_{k-1}^i(x, x, \dots, x) \text{ заключаем, что}$$

$$p_{k-1}^i - \frac{\partial L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n))}{\partial q_k^i} = -D_t p_k^i = -\dot{p}_k^i.$$

Утверждение теоремы для случая  $n \geq k \geq 2$  доказано.

Рассмотрим случай  $k = 1$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial q_1^i} &= \sum_{s=1}^m p_n^s \frac{\partial^{(n)s} x(q_1, \dots, q_n, p_n)}{\partial q_1^i} - \frac{\partial L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n))}{\partial q_1^i} - \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)s}} \frac{\partial x^{(n)s}}{\partial q_1^i} = \\
 &= \sum_{s=1}^m (p_n^s - \frac{\partial L}{\partial x^{(n)s}}) \frac{\partial x^{(n)s}}{\partial q_1^i} - \frac{\partial L}{\partial q_1^i} = -\frac{\partial L}{\partial q_1^i} = -D_t p_1^i = -\dot{p}_1^i = p_0^i - \frac{\partial L}{\partial q_1^i} = 0 - \frac{\partial L}{\partial q_1^i} = -\frac{\partial L}{\partial q_1^i}.
 \end{aligned}$$

При  $k = 1$  из **теоремы 2** о дифференциальной связи импульсов  $k$ -го и  $(k - 1)$ -го порядков  $-D_t p_k^i = -\dot{p}_k^i = p_{k-1}^i - \frac{\partial L(q_1, \dots, q_n, \dot{x}(q_1, \dots, q_n, p_n))}{\partial q_k^i}$  следует, что

$$-D_t p_1^i = -\dot{p}_1^i = p_0^i - \frac{\partial L(q_1, \dots, q_n, \dot{x}(q_1, \dots, q_n, p_n))}{\partial q_1^i} \text{ и } p_0^i = \sum_{L=0}^N (-1)^L D_t^L \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0.$$

Поскольку  $p_n^s = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x}$ , то есть  $p_n^s - \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x} = 0$ , тогда равенство  $-p_k^i = p_{k-1}^i - \frac{\partial L}{\partial q_k^i}$  есть следствие теоремы о дифференциальной связи импульсов  $k$ -го и  $(k - 1)$ -го порядков:

$$D_t p_k^i(x, \dot{x}, \dots, x) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} - p_{k-1}^i(x, \dot{x}, \dots, x) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial q_k^i} - p_{k-1}^i(x, \dot{x}, \dots, x),$$

где  $q_k^i = x^{(k-1)i}$ ,  $k = 1, n$ .  
Теорема доказана.

**Следствие** (теорема Остроградского). Пусть  $L(x, \dot{x})$  – сильно невырожденный лагранжиан и  $H(x, p)$  – гамильтониан,  $p = \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}}$ , где  $\dot{x} = v(x, p)$ . Тогда уравнение Эйлера – Лагранжа  $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0$  эквивалентно уравнениям Гамильтона  $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ ,  $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}$  в фазовом пространстве  $(x, p)$ .

**Выводы.**

1. Получен явный вид производной по времени импульсов  $p_k^i$ :

$$D_t p_k^i(x, \dot{x}, \dots, x) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} - p_{k-1}^i(x, \dot{x}, \dots, x) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial q_k^i} - p_{k-1}^i(x, \dot{x}, \dots, x), \quad k = 1, n$$

2. Доказано обобщение теоремы Остроградского на случай невырожденной системы уравнений Эйлера – Лагранжа  $\sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}} \right) = 0$  произвольного порядка: невырожденная система

уравнений  $\sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}} \right) = 0$  локально эквивалентна системе уравнений Гамильтона:

$$\begin{cases} D_t(q_k^i) = \dot{q}_k^i = \frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial p_k^i}, \\ D_t(p_k^i) = \dot{p}_k^i = -\frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial q_k^i}, \end{cases} \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n} \text{ (система } 2mn \text{ уравнений),}$$

где  $H(\bar{p}, \bar{q}) = -L(\bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \dots, \bar{x}(\bar{p}, \bar{q})) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_k^i x^{(k)i}(\bar{p}, \bar{q}) = -L(\bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \dots, \bar{x}(\bar{p}, \bar{q})) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_k^i D_t^k x^i(\bar{p}, \bar{q})$  – функция Гамильтона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин, В. А. Современная геометрия. Методы и приложения / В. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко // М. : Наука, 1986. – 760 с.
2. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Итоги науки и техники / Л. Е. Евтушик [et al.] // М. : ВИНТИ, 1979. – 247 с.
3. Погорелов, А. В. Дифференциальная геометрия / А. В. Погорелов // М. : Наука, 1974, – 90 с.
4. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд // М.: Наука, 1974. – 472 с.
5. Годбийон, К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика / К. Годбийон // М. : Мир, 1973. – 188 с.
6. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : учеб. пособие : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 4-е изд., испр. – М. : Физ.-мат. лит., 1988. – Т.1. Механика. – 216 с.
7. Дирак, П. Принципы квантовой механики / П. Дирак // М. : Мир, 1979.
8. Дирак, П. Лекции по квантовой механике / П. Дирак // М. : Мир, 1968.
9. Пастухов, Ю. Ф. Исследование решения обратной вариационной задачи : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.04 / Ю. Ф. Пастухов. – М., 1996. – 88 с.
10. Трофимов, В. В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко // М. : Наука, 1974. – 453 с.
11. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу // М.: Наука, 1981.
12. Пастухов, Ю.Ф. Инварианты в расслоении скоростей произвольного порядка / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов, О. В. Голубева // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. Фундаментальные науки. – 2010. – № 12. – С. 17–23.

Поступила 20.09.2016

THE GENERALIZATION OF THEOREM OF HAMILTON- OSTROGRADSKY SPECIAL IN BUNDLES OF SPEEDS OF ARBITRARY ORDER

S. EHILEVSKY, O. GOLUBEVA, D. PASTUHOV, Y. PASTUHOV

In the work the invariant properties of Ostrogradskii transformation  $F_L(x): T^{2n-1}X_m \rightarrow T^{2n-1}X_m$  are investigated in the bundle of speeds of arbitrary odd order  $T^{2n-1}X_m$ , induced non-degenerate Lagrangian  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ . Explicitly obtained derivative pulses  $k$ -th order:

$$D_i p_k^i(x, x, \dots, x) = \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} - p_{k-1}^i(x, x, \dots, x), \quad p_k^i(x, x, \dots, x) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_i^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right),$$

$k = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}$  – impulse the  $k$ -th order in the  $i$ -th coordinate. Ostrogradskii theorem generalizes to the case of

a non-degenerate system of Euler-Lagrange equations of arbitrary order  $\sum_{l=0}^n (-1)^l D_i^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}} \right) = 0$ , which is

locally equivalent to the canonical system of Hamilton equations.

**Keywords:** Euler-Lagrange equation, smooth manifolds, separation velocity space, the energy and momentum of the system, Ostrogradskii transformation, nondegenerate function, Ostrogradskii theorem, the Hamilton system.

## СОДЕРЖАНИЕ

### ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

<i>Глухов Д.О., Глухова Т.М.</i> Алгоритмы оптимизации модели сети транспортировки большой размерности в задачах расчета запаса газа .....	2
<i>Ярошевич П.В., Богуш Р.П., Глухов Д.О.</i> Сегментация парковочных мест на изображениях автостоянок .....	6
<i>Богуш Р.П., Игнатьева С.А., Наумович Н.М., Урбанович С.П.</i> Моделирование алгоритма формирования радиолокационного изображения на основе представленных в формате CEOS необработанных данных дистанционного зондирования Земли .....	13
<i>Илюшин И.Э., Кожевников М.М.</i> Алгоритмы управления сварочными роботами-манипуляторами на основе статистической модели конфигурационного пространства .....	22

### ФИЗИКА

<i>Вабищевич С.А., Вабищевич Н.В., Бринкевич Д.И., Бринкевич С.Д., Просолович В.С.</i> Микротвердость пленок сополимеров на основе метилметакрилата, облученных $\gamma$ -квантами .....	30
<i>Залесский В.Г., Поболь И.Л., Груздев В.А., Антонович Д.А., Солдатенко П.Н.</i> Плазменные эмиссионные системы для электронно-лучевых технологий. Часть 1 .....	37
<i>Янушкевич В.Ф., Кремья К.И., Иванов М.М., Молодечкина Т.В.</i> Взаимодействие электромагнитных волн с анизотропными средами над углеводородными залежами в режиме радиоимпульсных сигналов .....	45
<i>Вабищевич С.А., Вабищевич Н.В., Бринкевич Д.И., Просолович В.С., Янковский Ю.Н., Бринкевич С.Д.</i> Прочностные свойства структур фоторезист – кремний, $\gamma$ -облученных и имплантированных ионами $V^+$ и $P^+$ .....	51
<i>Шут В.Н., Мозжаров С.Е., Кузнецов А.А.</i> Характеристики порошков меди, полученных соноэлектрохимическим методом .....	58
<i>Шляхтенко А.В., Довгяло Д.А.</i> Ультразвуковая рельсовая дефектоскопия .....	64
<i>Петрович О.Н.</i> Алгоритм моделирования ионно-оптической системы с плазменным эмиттером .....	71

### МАТЕМАТИКА

<i>Козлов А.А.</i> Множество полуоктав. I .....	75
<i>Голубева О.В., Ехилевский С.Г., Гурьева Н.А., Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф.</i> Аппроксимация двойных и тройных интегралов в математической физике .....	86
<i>Скоромник О.В.</i> Интегральные преобразования с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера и нормированной функцией Бесселя в ядрах и интегральные уравнения первого рода в пространстве суммируемых функций .....	104
<i>Ехилевский С.Г., Голубева О.В., Потапенко Е.П., Рудькова Т.С.</i> Независимые повторные испытания как асимптотически гауссовский случайный процесс .....	111
<i>Ломовцев Ф.Е.</i> О разрывах первых и вторых частных производных решений общего одномерного факторизованного волнового уравнения в четверти плоскости .....	117
<i>Ехилевский С.Г., Голубева О.В., Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф.</i> Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка .....	125