

MIESIĘCZNIK
POŁOSKI.

№ 2(41), 2023

Т о м I.
Р о к 1818.

*«Вестник Полоцкого государственного университета»
продолжает традиции первого в Беларуси литературно-
научного журнала «Месячник Полоцкий».*

ВЕСТНИК ПОЛОЦКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА Серия С. Фундаментальные науки

В серии С научно-теоретического журнала публикуются статьи, прошедшие рецензирование, содержащие новые научные результаты в области информатики, вычислительной техники и управления, электрофизики, электрофизических установок (технические науки), математики.

ВЕСНІК ПОЛАЦКАГА ДЗЯРЖАУНАГА УНІВЕРСІТЭТА Серыя С. Фундаментальныя навукі

У серыі С навукова-тэарэтычнага часопіса друкуюцца артыкулы, якія прайшлі рэцэнзаваанне, змяшчаюць новыя навуковыя вынікі ў галіне інфарматыкі, вылічальнай тэхнікі і кіравання, электрафізікі, электрафізічных устаноў (тэхнічныя навукі), матэматыкі.

HERALD OF POLOTSK STATE UNIVERSITY Series C. Fundamental sciences

Series C includes reviewed articles which contain novelty in research and its results in the field of computer science, computer engineering and management, electrophysics, electrophysical installations (technical sciences), mathematics.

Журнал входит в Российский индекс научного цитирования.
Электронная версия номера размещена на сайте <https://journals.psu.by/index.php/fundamental/index>.

Адрес редакции:
Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой,
ул. Блохина, 29, г. Новополоцк, 211440, Беларусь
тел. + 375 (214) 59 95 44, e-mail: vestnik@psu.by

Отв. за выпуск: С. А. Вабищевич.
Редактор С. Е. Рясова.

Подписано к печати 31.10.2023. Бумага офсетная 70 г/м². Формат 60×84¹/₈. Цифровая печать.
Усл. печ. л. 12,09. Уч.-изд. л. 14,57. Тираж 50 экз. Заказ 482.

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

УДК 004.932

DOI 10.52928/2070-1624-2023-41-2-2-8

**ДЕТЕКТИРОВАНИЕ ДЫМА НА ВИДЕОПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ
В РЕЖИМЕ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ**

д-р техн. наук, доц. Р. П. БОГУШ, Е. Р. АДАМОВСКИЙ
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой);

Ph. D. X. ЧЕН
(Университет Чжэцзян Шурен, Китай)

Рассматривается алгоритмическое и программное обеспечение для раннего обнаружения пожаров на основе выявления дыма по видеопоследовательностям, формируемым статической видеокамерой. Для детектирования областей с задымлением разработан алгоритм, позволяющий их выделять на кадрах видео по характерным признакам: наличию устойчивого направленного движения, соответствию цветовым характеристикам дыма, снижению значения энергии высокочастотных компонент относительно модели фона. Особенностью алгоритма является поэтапный пространственно-временной анализ областей-кандидатов, что обеспечивает удовлетворительные вычислительные затраты и работу в режиме реального времени на современных вычислительных средствах для кадров видео высокого разрешения. Алгоритм реализован с применением функций библиотеки компьютерного зрения OpenCV и многопоточной обработки. Приведены особенности и основной функционал программного обеспечения, реализованного в виде стационарного приложения. Представлены результаты экспериментальных исследований по оценке эффективности работы алгоритма и его быстродействия.

Ключевые слова: *раннее обнаружение пожара, компьютерное зрение, пространственно-временной анализ видео, оптический поток, вейвлет-преобразование.*

Введение. Компьютерное зрение все шире и успешнее применяется для автоматизации решения многих прикладных задач. Одной из наиболее актуальных является задача автоматического детектирования дыма на основе данных видеонаблюдения. Высокая сложность построения эффективных универсальных алгоритмов из-за особенностей визуальных характеристик дыма, потери информации при преобразовании трехмерного реального изображения в двухмерное, ограниченности вычислительных ресурсов, которые предназначены для обнаружения пожаров на основе детектирования дыма на видеоряде, предопределила разработку множества подходов с учетом особенностей снимаемой динамической сцены [1; 2]. Применение сверточных нейронных сетей (СНС) позволяет автоматизировать задачу выделения признаков дыма, однако для этого требуется большая база данных с реальными изображениями, полученными в различных условиях и фоновых вариациях [3]. Для повышения точности необходимо учитывать признаки движения при построении архитектур СНС, в этом случае сеть будет выдавать результат на основе не одного кадра, а набора из нескольких видеозображений. Соответственно, эффективное применение СНС практически невозможно без специализированных вычислителей и нейроускорителей. При организации видеосистемы мониторинга требуется непрерывная трансляция видеопотоков в высоком качестве со всех камер на центральный модуль обработки.

Для обеспечения приемлемой нагрузки на каналы связи и сервер системы перспективным решением является реализация функций сжатия и видеоаналитики непосредственно в модуле видеокамеры, который может включать аппаратную часть с ограниченными вычислительными мощностями. Соответственно, алгоритмы, выполняющие детектирование дыма, для таких систем должны обладать низкими вычислительными затратами и удовлетворительными качественными характеристиками.

В данной работе представлен алгоритм детектирования дыма для режима реального времени на основе анализа данных системы видеонаблюдения с применением статичной камеры и использованием модулей, реализующих обнаружение устойчивого движения, фильтрацию по цветовым характеристикам, частотный анализ и обработку оптического потока.

Алгоритмическое обеспечение. Задача детектирования дыма сводится к выделению на последовательности изображений таких областей, которые удовлетворяют перечню условий, т. е. обладают признаками, согласно которым они идентифицируются как содержащие или не содержащие задымление. На основе

работ, посвященных алгоритмам детектирования дыма [4; 5], сформирован набор признаков, использование которых с учетом ряда предположений наиболее эффективно:

1. Предполагается относительная статичность источника задымления на последовательности видеокадров, поэтому наличие в рассматриваемой области устойчивого движения в течение определенного количества времени и более позволит игнорировать быстро изменяющие свое положение объекты, такие как люди, животные и машины.

2. Соответствие усредненной цветовой характеристики области заданным параметрам, включая уровни яркости и насыщенности, подобранным на основе анализа реальных видеозаписей, содержащих дым, который в большинстве случаев характеризуется преимущественно оттенками серого цвета. Это позволит исключить из дальнейшей обработки заведомо не подходящие области с устойчивым движением, например, качающиеся на ветру растения или стоящих на месте людей в цветной одежде.

3. Падение энергии высокочастотных компонент и контраста объектов переднего плана ниже заданного уровня внутри области на рассматриваемом изображении относительно фона. Подход основан на оптических свойствах дыма, который не содержит внутри себя четких переходов и границ, а также снижает резкость контуров объектов, находящихся за ним. Учет частотных признаков может снизить количество ложных срабатываний, отбрасывая области, в которых падения общего уровня резкости не происходит.

4. Направленный характер движения элементов области снизу вверх в определенном диапазоне углов, что основано на предположении о соответствующем поведении стандартных продуктов горения, увлекаемых восходящими потоками воздуха от источника задымления или являющихся более легкими по сравнению с окружающей средой. Признак позволяет отбросить широкий класс объектов, чье перемещение на изображениях определяется другим набором векторов, представляющих горизонтальное или направленное вниз движение.

Ключевыми требованиями к разрабатываемому алгоритмическому и программному обеспечению являются высокое быстродействие и точность, а также низкий объем потребляемой памяти. В качестве наиболее эффективного решения разработан алгоритм, основные этапы которого показаны на рисунке 1.



Рисунок 1. – Блок-схема алгоритма детектирования дыма

Для обеспечения минимизации вычислений получение дескрипторов областей осуществляется последовательно, при этом в очередном этапе обработки участвуют только те регионы кадров, которые содержат признаки, выделенные на предыдущем этапе. Таким образом, для обнаружения дыма на видеопоследовательностях необходимо выполнить следующую обработку видео.

1. Чтение входящего кадра видеопотока и его предобработка. При этом необходимо применять процедуру улучшения контраста (1) – (3), которая нормирует гистограмму каждого из каналов цветного изображения img в диапазоне [0; 255], получая в результате img_{eq} :

$$img_{req}(x, y) = (img_r(x, y) - \min(img_r)) \times (255 / (\max(img_r) - \min(img_r))); \quad (1)$$

$$img_{geq}(x, y) = (img_g(x, y) - \min(img_g)) \times (255 / (\max(img_g) - \min(img_g))); \quad (2)$$

$$img_{beq}(x, y) = (img_b(x, y) - \min(img_b)) \times (255 / (\max(img_b) - \min(img_b))), \quad (3)$$

где img_r , img_g , img_b – красный, зеленый и синий каналы исходного изображения;

$img_{r_{eq}}$, $img_{g_{eq}}$, $img_{b_{eq}}$ – каналы результирующего изображения;

x , y – координаты пикселей каналов изображения;

\min , \max – минимальное и максимальное значение канала.

2. Построение модели фона f_{back} . Формируется изображение сцены без областей, содержащих движение, которое обновляется через заданный интервал времени с использованием анализа текущих кадров f_{cur} с выделением на них движущихся областей при помощи алгоритма вычитания фона на основе гауссовой смеси [6] с последующей морфологической обработкой. Для этого используются операции закрытия и расширения, структурирующий элемент квадратной формы.

3. Выделение областей f_{move} с устойчивым движением. Данный шаг требует пространственно-временного анализа для текущего и предыдущих кадров и выполняется на основе правила

$$f_{move}(x, y) = \begin{cases} 255, & \text{если } (f_{cur}(x, y) - f_{back}(x, y)) > T; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (4)$$

где T – задаваемое значение порога бинаризации.

4. Получение областей с цветовыми характеристиками дыма. Для этого каждый кадр преобразуется из цветового пространства RGB (Красный-Зеленый-Синий, *Red-Green-Blue*) в пространство HSV (Тон-Насыщенность-Значение, *Hue-Saturation-Value*)¹:

$$V = \max(R, G, B); \quad (5)$$

$$S = \begin{cases} (V - \min(R, G, B)) / V, & \text{если } V \neq 0; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (6)$$

$$H = \begin{cases} 60(G - B) / (V - \min(R, G, B)), & \text{если } V = R; \\ 120 + 60(B - R) / (V - \min(R, G, B)), & \text{если } V = G; \\ 240 + 60(R - G) / (V - \min(R, G, B)), & \text{если } V = B; \\ 0, & \text{если } R = G = B. \end{cases} \quad (7)$$

К полученным результатам применяется пороговая бинаризация согласно заданным порогам, выполняется последующее объединение канальных бинарных изображений.

5. Выделение областей-кандидатов на основе данных, полученных на предыдущих шагах. Если область в определенный момент характеризуется устойчивым движением и соответствует по цветовой характеристике дыму, то она считается регионом-кандидатом для последующей обработки.

6. Получение первичной области интереса (First Region of Interest, FRoI) путем вычисления координат левого верхнего и правого нижнего углов прямоугольника, ограничивающего местоположения всех областей-кандидатов.

7. Вычисление и сравнение энергии высокочастотных компонент областей FRoI текущего кадра и модели фона путем применения вейвлет-анализа на основе подхода, представленного в [7]. При соотношении энергий ниже заданного уровня область помечается для дальнейшей обработки.

8. Выделение областей с устойчивым падением энергии высокочастотных компонент. Для этого используется пространственно-временной анализ видеопоследовательности, который выполняется на основе правила шага 3 данного алгоритма.

9. Получение вторичной области интереса (Second RoI, SRoI). Данный этап алгоритма предполагает вычисление координат левого верхнего и правого нижнего углов прямоугольника, ограничивающего области, полученные на шаге 8.

10. Определение областей с направленным движением. При помощи алгоритма вычисления оптического потока из [8] по отношению к SRoI текущего и предыдущего кадров выделяются только

¹ OpenCV. Color conversion [Электронный ресурс]. – URL: https://docs.opencv.org/3.4/de/d25/imgproc_color_conversions.html. (Дата обращения: 08.08.2023).

те области, средний вектор движения которых находится в указанном диапазоне углов с использованием выражения:

$$\alpha = (180/\pi) \times a \tan 2 \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M s_{y_{ij}}, \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M s_{x_{ij}} \right), \quad (8)$$

где $s_{x_{ij}}$ и $s_{y_{ij}}$ – ортогональные компоненты оптического потока пикселя из области;

N и M – количество пикселей области по горизонтали и вертикали.

11. Выделение областей с устойчивым, направленным снизу вверх, движением. Если направленное движение в области сохраняется в течение заданного интервала времени, то для нее принадлежность дыму устанавливается на основе данных, полученных на шаге 8.

12. Обнаружение областей с дымом. Выявление областей, для которых характерно наличие всех признаков дыма путем накопления результатов предыдущих шагов алгоритма.

Программная реализация. Программная реализация алгоритма выполнена на языке C++/CLI (Windows Forms) и использует библиотеку машинного зрения OpenCV для захвата видеопотока, извлечения кадров, изменения их размера, кадрирования, обработки, отображения текста и графических элементов. Для получения видеоданных приложением используется IP-видеокамера с применением RTSP-протокола. Организация алгоритма позволяет применить многопоточную обработку, что существенно повышает производительность вычислений и скорость работы приложения в целом. Вид главной формы приложения показан на рисунке 2.

Основные возможности программного обеспечения:

1. Детектирование и локализация дыма на последовательности видеок кадров, получаемых с IP-камеры или из файла, в реальном времени. Доступен вариант отображения конкретных областей кадра с признаками задымления или единого прямоугольного фрагмента, ограничивающего данные области. Реализованы опции звуковой сигнализации и визуального образа в кадре (мигающая надпись «ОБНАРУЖЕН ДЫМ») при наличии дыма.

2. Пользователю предоставляется возможность тонкой настройки параметров детектирования, подробная характеристика которых приводится в справочных материалах с описанием, примерами и диапазоном возможных значений. Параметры могут быть сохранены в файл конфигурации, загружены или сброшены до исходных значений. Наличие данной опции предоставляет дополнительные возможности для корректировки параметров с учетом особенностей контролируемой динамической сцены.

3. Автоматическая запись и сохранение анализируемых данных в одном из двух режимов: постоянно или только при наличии дыма. Оператор может заранее определять каталог для хранения записей, названия которых генерируются на основе времени их создания.

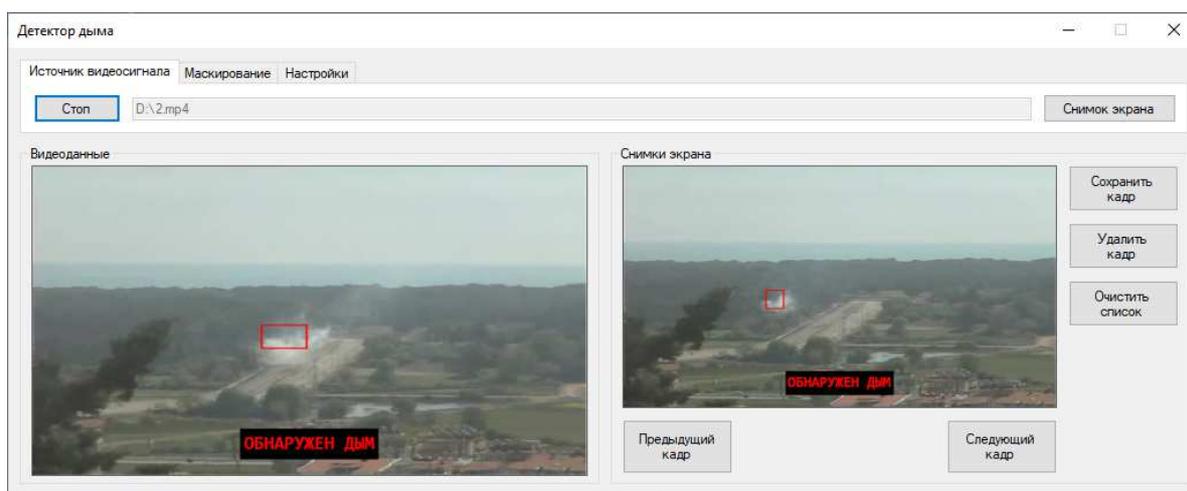


Рисунок 2. – Внешний вид главной формы приложения

4. Управление захваченными кадрами. Функция включает возможность по нажатию кнопки скопировать в соответствующий список текущий кадр видеопоследовательности, просматривать и редактировать список, сохранять его элементы на носитель информации в формате JPG-изображений.

5. Управление масками, представляющими собой области кадра, которые исключаются из анализа при детектировании дыма. Оператору с помощью отдельной формы (рисунок 3) предлагается на основе текущего изображения из списка захваченных кадров настроить параметры маски – координаты и тип (включающий или исключающий). Маска в дальнейшем редактируется с помощью менеджера масок.



a – форма редактора маски; *б* – детектирование дыма без маски;
в – детектирование дыма с исключающей маской (голубой прямоугольник)

Рисунок 3. – Маскирование областей кадра

Корректность работы реализованного программного обеспечения была проверена на массиве видеозаписей, которые содержали кадры с задымлением от дымовых шашек и пламени, а также не являющиеся дымом объекты, но по ряду признаков совпадающие с ним: пыль, люди в светлой одежде, машины, облака, плотные осадки в сочетании с сильным ветром. На рисунке 4 приведены примеры работы детектора дыма в различных условиях, где красный прямоугольник на видеокadre ограничивает единичные области, выделенные оранжевым цветом, для каждой из которых вычисляются признаки.



a – светлый дым при дневном свете; *б* – дым в сумерках на фоне строений с опцией улучшения контраста;
в – отсутствие ложных срабатываний при съемке движущихся людей

Рисунок 4. – Детектирование дыма на видеокдрах

Для работы приложения в режиме реального времени необходима электронная вычислительная машина со следующими основными характеристиками: процессор AMD Ryzen3 2200G с тактовой частотой 3,5 ГГц или аналог; оперативная память объемом не менее 2 Гбайт; жесткий диск объемом не менее 120 Гбайт. В качестве системного программного обеспечения необходимо использовать операционную систему Windows 10/11. Справочные материалы могут быть корректно открыты с помощью любого современного браузера (например, Chrome или Edge).

Проверка быстродействия алгоритма производилась на вычислительном устройстве с указанными характеристиками. Оценивалась средняя скорость выполнения отдельных модулей t_{cp} (9) и суммарно

затраченное время на один кадр (включая дополнительные операции вне модулей и их повторные вызовы) $t_{\text{полн}}$ без учета времени на чтение и запись данных при обработке нескольких видео с размером кадра Full HD 1920×1080 пикселей. Результаты анализа приведены в таблице 1.

$$t_{\text{cp}} = \sum_{i=1}^N t_i / N, \tag{9}$$

где t_i – время выполнения модуля во время его i -го вызова;
 N – количество вызовов модуля за время обработки видеозаписи.

Таблица 1. – Результаты оценки быстродействия

Шаг алгоритма	Время выполнения, мс			Среднее время выполнения, мс
	Видео № 1, рисунок 4, а	Видео № 2, рисунок 4, б	Видео № 3, рисунок 4, в	
Выделение устойчивого движения	7,7	6,3	6,3	6,7
Анализ цветовых характеристик	0,8	0,8	0,8	0,8
Вейвлет-анализ	0,3	0,4	0,2	0,3
Вычисление оптического потока	1,3	0,4	0,7	0,8
	Всего			8,6

Для видеозаписей, рассмотренных в таблице 1, значения $t_{\text{полн}}$ составили 12,2 мс, 10,6 мс и 10,5 мс соответственно, в среднем – 11,1 мс. Таким образом, при частоте кадров источника данных 25 к/с, эквивалентной периоду 40 мс, алгоритм выполняется с запасом по времени, которое необходимо для работы в режиме реального времени, более чем в 3 раза.

Заключение. Раннее обнаружение возгораний в режиме реального времени является важной прикладной задачей, решение которой рассмотрено в данной статье. Для этого разработан алгоритм обработки видеопоследовательностей, формируемых стационарной видеокамерой. Для определения областей задымления на первом шаге используется метод фонового кадра обнаружения движения. Дальнейшая обработка выполняется в пространственно-временной области для выделенных регионов и предполагает преобразование RGB-изображения к цветовому пространству HSV, вейвлет-анализ и оценку движения на основе оптического потока. Данный подход позволяет эффективно локализовать области задымления в реальном времени.

На основе созданного алгоритма разработано программное обеспечение, которое реализует детектирование дыма на видеокдрах, получаемых с помощью RTSP-протокола. Выполнено тестирование в реальных условиях с обнаружением дыма с дымовых шашек. Представлен основной функционал программного обеспечения, приведены результаты экспериментов, подтверждающие эффективность обнаружения дыма на ранней стадии его возникновения в реальном времени (не более 5 секунд) для видео с размером кадра Full HD 1920×1080 пикселей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cetin A., Merci B., Gunay O. et al. Methods and Techniques for Fire Detection: Signal, Image and Video Processing Perspectives. – Elsevier, 2016. – 95 p.
2. Пятаева А. В. Исследование методов и разработка алгоритмов обнаружения дыма на открытых пространствах по видеопоследовательностям. – Красноярск: Сибирский федер. ун-т, 2017. – 166 с.
3. Hashemzadeh M., Farajzadeh N., Heydari M. Smoke detection in video using convolutional neural networks and efficient spatio-temporal features // Applied Soft Computing. – 2022. – Vol. 128. – DOI: [10.1016/j.asoc.2022.109496](https://doi.org/10.1016/j.asoc.2022.109496).
4. Bohush R., Brovko N., Ablameyko S. Fire detection in video sequences based on static and dynamic features // J. of Electrical Engineering. – 2013. – Vol. 1, iss. 1. – P. 25–33. – DOI: [10.17265/2328-2223/2013.12.004](https://doi.org/10.17265/2328-2223/2013.12.004).
5. Богущ Р. П., Тьчко Д. А. Алгоритм комплексного обнаружения дыма и пламени на основе анализа данных систем видеонаблюдения // Доклады БГУИР. – 2015. – № 6(92) – С. 65–71.
6. Zivkovic Z. Improved adaptive gaussian mixture model for background subtraction // ICPR 2004: Proc. of the 17th Intern. Conf. on Pattern Recognition, Cambridge, UK, 23–26 Aug. 2004: in 4 vol. / ed.: J. Kittler, M. Petrou, M. Nixon. – Cambridge, 2004. – Vol. 2. – P. 28–31. – DOI: [10.1109/ICPR.2004.1333992](https://doi.org/10.1109/ICPR.2004.1333992).
7. Ye S., Zhican B., Chen C. et al. An Effective Algorithm to Detect Both Smoke and Flame Using Color and Wavelet Analysis // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2017. – Vol. 27, iss. 1. – P. 131–138. – DOI: [10.1134/S1054661817010138](https://doi.org/10.1134/S1054661817010138).
8. Farneback G. Two-Frame Motion Estimation Based on Polynomial Expansion // Image Analysis. SCIA 2003. Lecture Notes in Computer Science / ed.: J. Bigun, T. Gustavsson. – Vol. 2749. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2003. – P. 363–370. – DOI: [10.1007/3-540-45103-X_50](https://doi.org/10.1007/3-540-45103-X_50).

REFERENCES

1. Cetin, A., Merci, B., Gunay, O., & Toreyin, B. U. (2016). *Methods and Techniques for Fire Detection: Signal, Image and Video Processing Perspectives*. Elsevier.
2. Pyataeva, A. V. (2017). *Issledovanie metodov i razrabotka algoritmov obnaruzheniya dyma na otkrytykh prostranstvakh po videoposledovatel'nostyam: monografiya [Investigation of methods and development of smoke detection algorithms in open spaces from video sequences: monograph]*. Krasnoyarsk: SibFU. (In Russ.).
3. Hashemzadeh, M., Farajzadeh, N., & Heydari, M. (2022). Smoke detection in video using convolutional neural networks and efficient spatio-temporal features. *Applied Soft Computing*, (128). DOI: [10.1016/j.asoc.2022.109496](https://doi.org/10.1016/j.asoc.2022.109496).
4. Bohush, R., Brovko, N., & Ablameyko, S. (2013). Fire Detection in Video Sequences Based on Static and Dynamic Features. *Journal of Electrical Engineering*, 1(1), 25–33. DOI: [10.17265/2328-2223/2013.12.004](https://doi.org/10.17265/2328-2223/2013.12.004).
5. Bogush, R. P., Tychko, D. A. (2015). Algoritm kompleksnogo obnaruzheniya dyma i plameni na osnove analiza dannykh sistem videonablyudeniya [Comprehensive smoke and flame detection algorithm based on video surveillance data analysis]. *Doklady BGUIR*, 6(92), 65–71 (In Russ.).
6. Zivkovic, Z. (2004). Improved adaptive gaussian mixture model for background subtraction. In J. Kittler, M. Petrou, & M. Nixon (Eds.), *Proceedings of the 17th International Conference on Pattern Recognition. ICPR 2004: vol. 2* (28–31). DOI: [10.1109/ICPR.2004.1333992](https://doi.org/10.1109/ICPR.2004.1333992).
7. Ye, S., Zhican, B., Chen, C., Bohush, R., & Ablameyko, S. (2017). An Effective Algorithm to Detect Both Smoke and Flame Using Color and Wavelet Analysis. *Pattern Recognition and Image Analysis*, 27(1), 131–138. DOI: [10.1134/S1054661817010138](https://doi.org/10.1134/S1054661817010138).
8. Farneback, G. (2003). Two-Frame Motion Estimation Based on Polynomial Expansion. In J. Bigun, T. Gustavsson (Eds.), *Image Analysis. SCIA 2003. Lecture Notes in Computer Science: vol. 2749* (363–370). Berlin, Heidelberg: Springer. DOI: [10.1007/3-540-45103-X_50](https://doi.org/10.1007/3-540-45103-X_50).

Поступила 18.09.2023

REAL-TIME SMOKE DETECTION IN VIDEO

R. BOHUSH, Y. ADAMOVSKIY

(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk, Belarus);

H. CHEN

(Zhejiang Shuren University, China)

The paper considers algorithmic and software for early fire detection based on smoke detection from video sequences generated by a static video camera. To detect areas with smoke, an algorithm has been developed that allows you to select such areas on video frames that are characterized by a number of features: the presence of a stable directional movement, compliance with the color characteristics of smoke, and a decrease in the energy value of high-frequency components relative to the background model. The feature of the algorithm is a step-by-step spatio-temporal analysis of candidate areas, which provides satisfactory computational costs and real-time operation on modern computing tools for high-resolution video frames. The algorithm is implemented using the functions of the OpenCV computer vision library and multi-threaded processing. The features and main functionality of the software implemented as a stationary application are given. The results of experimental studies on the evaluation of the efficiency of the algorithm and its speed are presented.

Keywords: *early fire detection, computer vision, spatio-temporal video analysis, optical flow, wavelet transform.*

ЗАЩИТА ПОЛИГРАФИЧЕСКОЙ ПРОДУКЦИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЦИФРОВЫХ ВОДЯНЫХ ЗНАКОВ

Д. М. ЛИПНИЦКИЙ, канд. техн. наук, доц. **В. С. САДОВ**
(Белорусский государственный университет, Минск)

Предложены алгоритмы стеганографического встраивания и извлечения цифровых водяных знаков (ЦВЗ), встраиваемых в цифровой оригинал полиграфической продукции, с целью защиты авторских прав на нее. Встроенный ЦВЗ устойчив к искажениям, вносимым в изображения в процессе их печати и сканирования, и визуально незаметен. Стойкость алгоритма извлечения к геометрическим искажениям достигается за счет использования алгоритма восстановления исходной геометрии изображения путем сопоставления особых точек искаженной копии изображения-контейнера и изображения-оригинала. Приведены результаты тестирования стойкости алгоритма как к смоделированным искажениям канала печати и сканирования, так и к искажениям, вносимым в изображения при использовании реальных печатающего и сканирующего устройств. Также рассмотрено влияние процесса встраивания на качество изображения.

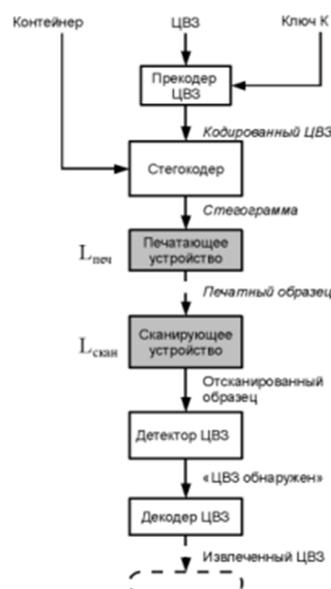
Ключевые слова: стеганографическое встраивание, полиграфическая продукция, цифровые водяные знаки, особые точки изображения.

Введение. На сегодняшний день изображения и фотографии широко используются во многих сферах нашей жизни как в цифровом виде, так и в виде полиграфической (печатной) продукции. С расширением сферы применения изображений и увеличением объемов их использования увеличивается и частота нарушений авторских прав. Авторское право на изображение, как и на любой продукт творческой деятельности человека, возникает сразу же после его создания. Одним из методов, используемых для защиты авторских прав, является применение цифровых водяных знаков [1]. ЦВЗ представляют собой невидимые метки, встраиваемые в цифровой сигнал и позволяющие однозначно идентифицировать автора. Встраивание ЦВЗ осуществляется методами стеганографии.

Алгоритмы встраивания ЦВЗ в большинстве случаев подразумевают встраивание их в сигналы (в нашем случае изображения), существующие исключительно в цифровой форме, однако не менее важной является задача защиты авторских прав на их напечатанные копии. Большинство алгоритмов стеганографического встраивания не учитывают возможные искажения, которым подвергаются изображения в процессе их печати и сканирования и которые приводят к невозможности извлечения встроенной информации.

Цель данной работы: проанализировать особенности процессов печати и сканирования изображений с выявлением основных типов искажений, которые при этом возникают, и предложить алгоритм встраивания и извлечения ЦВЗ, стойкий к выявленным типам искажений.

Обобщенная модель стеганосистемы. Рассмотрим модель стеганосистемы встраивания и извлечения ЦВЗ в полиграфическую продукцию в общем виде (рисунок 1) [1]. Система включает в себя стандартные блоки, характерные для систем встраивания и извлечения информации [2], а также дополнительные, включающие в себя печатающее и сканирующее устройства, которые образуют вместе канал печати-сканирования.



**Рисунок 1. – Обобщенная модель стеганосистемы
скрытного встраивания информации
в полиграфическую продукцию**

Процесс выглядит следующим образом: вначале ЦВЗ, представленное в виде последовательности бит, кодируется прекодером при помощи ключа K , затем закодированный ЦВЗ встраивается в цифровое изображение-контейнер. Цифровое изображение со встроенным ЦВЗ (стегограмма) используется для создания печатной копии в печатающем устройстве.

При необходимости извлечения ЦВЗ, печатный образец оцифровывается при помощи сканирующего устройства. В отсканированной копии далее осуществляется обнаружение и извлечение ЦВЗ при помощи соответственно детектора и декодера. Обнаруженный ЦВЗ, который однозначно идентифицирует автора, может быть использован для подтверждения его авторских прав.

Главными требованиями, которые предъявляются к системам встраивания и извлечения ЦВЗ, являются требования незаметности факта встраивания и стойкости к преднамеренным и случайным атакам на нее [1].

Искажения изображения при печати и сканировании. Процессы печати и сканирования изображения вносят в него определенные неизбежные искажения. Их можно разделить на два типа: искажения значений пикселей и геометрические искажения.

Искажения значений пикселей после прохождения канала печати-сканирования можно смоделировать совокупностью следующих преобразований [3]:

- сглаживанием гауссовым фильтром с параметром σ_s :

$$y_{\sigma}(n_1, n_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_s^2} \sum_{m_1=-3\sigma_s}^{3\sigma_s} \sum_{m_2=-3\sigma_s}^{3\sigma_s} x(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \exp\left(\frac{-m_1^2 - m_2^2}{2\sigma_s^2}\right), \quad (1)$$

где $y_{\sigma}(n_1, n_2)$ – точка сглаженного изображения;

$x(n_1, n_2)$ – точка изображения до преобразования.

- наложением белого шума $\xi(n_1, n_2)$ с математическим ожиданием $M_{\xi} = 0$ и среднеквадратичным отклонением σ_{ξ} :

$$y_{\xi}(n_1, n_2) = y_{\sigma}(n_1, n_2) + \xi(n_1, n_2), \quad (2)$$

где $y_{\xi}(n_1, n_2)$ – точка зашумленного изображения.

Сглаживание может возникать по причине расплывания красок, растискивания, дробных коэффициентов изменения разрешения при печати. Шумы возникают вследствие наличия примесей в красках, неоднородности нанесения красок и самого распечатываемого материала, муара и шумов матрицы сканера.

Геометрические искажения заключаются в несоответствии положения точек исходного изображения и отсканированного, что приводит к невозможности извлечения ЦВЗ. Математически их можно описать совокупностью аффинных преобразований точек на плоскости [4]

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ – вектор, описывающий положение исходной точки;

$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{bmatrix}$ – вектор, описывающий новое положение точки;

a_{ij} и t_i – коэффициенты матрицы преобразования.

К аффинным преобразованиям относятся поворот, сдвиг, масштабирование, скос и отражение.

Геометрические искажения характеризуются точностью нанесения растровых точек на распечатываемый материал, которая, в свою очередь, зависит от качества печатной формы (для офсетной технологии), качества самого материала, красок, точности печатного механизма, величины давления печатного механизма на бумагу, различных деформаций в механизме печати. Также подобные искажения вызываются неправильным позиционированием изображений при сканировании, несоответствием разрешений сканирования и печати, несовершенством механизма сканирования.

Описание алгоритма встраивания ЦВЗ. Предлагаемый алгоритм встраивания ЦВЗ основан на использовании особых точек для компенсации геометрических искажений и встраивании ЦВЗ в частотную область с применением метода расширения спектра.

Преимуществом использования особых точек для восстановления геометрии изображения является отсутствие необходимости встраивания дополнительной информации в контейнер, что уменьшает его искажения.

Непосредственно встраивание производится путем модификации среднечастотных коэффициентов поблочного дискретного косинусного преобразования (ДКП) синей компоненты изображения. Такой выбор обоснован возникновением искажений преимущественно в высокочастотной области [5], а также слабейшей восприимчивостью зрительной системы человека к изменениям синей компоненты изображения [6].

Метод расширения спектра придает устойчивость встраиваемой информации к шумам и позволяет распределить возникающие искажения по контейнеру.

В общем виде алгоритм предполагает выполнение следующих шагов:

- формирование ЦВЗ с использованием псевдослучайной последовательности;
- встраивание ЦВЗ в частотную область контейнера;
- компенсация геометрических искажений;
- извлечение ЦВЗ.

Формирование ЦВЗ. Исходный ЦВЗ представляется в виде последовательности бит B размера K . Генерируется M -последовательность длиной N бит с помощью генератора псевдослучайных последовательностей (ПСП).

На основе полученной ПСП длиной N генерируется новая последовательность W , где каждые k -е N чисел W_k , соответствующие одному биту ЦВЗ $B(k)$, вычисляются по формуле

$$W_k(i) = P(-1)^{B(k)} M(i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

где P – сила встраивания. Чем больше эта величина, тем выше стойкость к искажениям и заметность встраивания.

Встраивание ЦВЗ. Сначала из исходного изображения I размером $N_1 \times N_2$ выделяется синяя компонента I_b . Далее она разбивается на блоки размером 8×8 пикселей.

Каждый из полученных блоков изображения подвергается двумерному дискретному косинусному преобразованию в соответствии с формулой [7]

$$F(u, v) = C(u)C(v) \sum_{x=0}^{W-1} \sum_{y=0}^{H-1} p(x, y) \cos\left(\frac{(2x+1)\pi u}{2W}\right) \cos\left(\frac{(2y+1)\pi v}{2H}\right), \quad (5)$$

где

$$C(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{W}}, & u = 0; \\ \frac{2}{\sqrt{W}}, & 1 \leq u \leq W - 1; \end{cases} \quad (6)$$

$$C(v) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{H}}, & v = 0; \\ \frac{2}{\sqrt{H}}, & 1 \leq v \leq H - 1; \end{cases} \quad (7)$$

$p(x, y)$ – пиксель исходного изображения с координатами (x, y) ;

W – ширина окна;

H – высота окна.

В ходе ДКП получается набор матриц F коэффициентов размером 8×8 .

Далее, перед встраиванием сообщения в контейнер, осуществляется псевдослучайная перестановка блоков F с помощью генератора псевдослучайных чисел с начальным заполнением S_1 . Делается это с целью разнесения бит ЦВЗ по разным частям контейнера, что повышает устойчивость к локальным искажениям изображения.

Далее осуществляется аддитивное встраивание бит сформированной ранее последовательности W в среднечастотные коэффициенты блоков F_s (рисунок 2), при этом последовательность W также разбивается на блоки W_m , так, чтобы их количество равнялось N_s (количеству блоков изображения). Выбранные

коэффициенты каждого блока вытягиваются в зигзагообразной развертке $F_m(i)$ и аддитивно складываются с соответствующими отсчетами $W_m(i)$.

221	-11	19	1	19	-6	21	-37
-50	20	-2	-24	-37	3	-36	-9
7	7	23	14	-15	30	14	0
-3	0	-10	-20	-18	19	-4	19
12	-52	-9	22	17	15	-8	1
-7	7	23	-19	6	-1	8	1
8	6	-7	-2	-3	0	-15	0
-16	0	27	-5	3	2	-6	-9

Рисунок 2. – Среднечастотные коэффициенты ДКП

В результате получаем модифицированные блоки F' , которые подвергаются обратному ДКП в соответствии с формулой

$$p(x, y) = \sum_{u=0}^{W-1} \sum_{v=0}^{H-1} F(u, v)C(u)C(v) \cos\left(\frac{(2x+1)\pi u}{2W}\right) \cos\left(\frac{(2y+1)\pi v}{2H}\right). \quad (8)$$

Полученная модифицированная матрица I_B' совмещается с остальными компонентами изображения I_R и I_G , в результате чего получается заполненный контейнер I' .

Блок-схема алгоритма встраивания представлена на рисунке 3.

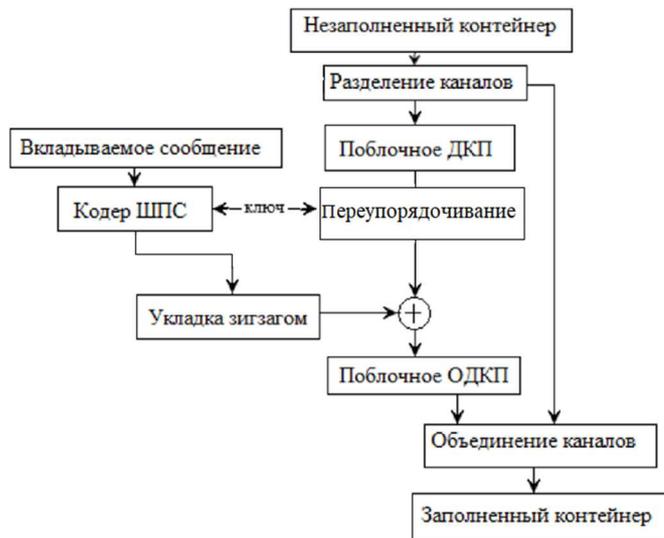


Рисунок 3. – Блок-схема процесса встраивания ЦВЗ

Компенсация геометрических искажений. После получения заполненного контейнера, перед извлечением ЦВЗ, происходит процесс компенсации геометрических искажений, путем отыскания обратного преобразования положения точек искаженного изображения относительно геометрии незаполненного оригинала в соответствии с правилом:

- поиск особых точек и их дескрипторов с применением алгоритма SIFT [8] в заполненном контейнере, полученном после прохождения канала печати-сканирования;
- сопоставление полученных особых точек с набором особых точек S_2 . В результате образуются пары соответствующих точек с максимально близкими дескрипторами;
- нахождение аффинного преобразования заполненного контейнера-изображения, которое позволяет скомпенсировать геометрические искажения, возникшие в процессе печати-сканирования.
- применение найденного преобразования для восстановления исходной геометрии изображения.

Данная процедура основана на использовании детекторов и дескрипторов особых точек изображения для сопоставления точек на оригинальном и заполненном контейнерах. Особой точкой является точка изображения, окрестность которой отличается от близлежащих точек по некоторой выбранной мере. Для описания

особой точки используют дескрипторы особых точек, которые позволяют находить соответствия между изображениями. Для этого детектору необходимо наличие оригинального изображения, вернее набора его особых точек. Таким образом, набор особых точек незаполненного контейнера вместе с дескрипторами можно выделить на этапе встраивания и использовать в качестве ключа S_2 при извлечении ЦВЗ.

Выбор данного подхода обоснован следующими преимуществами:

- при использовании детекторов особых точек нет необходимости встраивать в изображение-контейнер дополнительную информацию для нахождения обратного преобразования, что повышает пропускную способность алгоритма встраивания/извлечения ЦВЗ;

- стойкость алгоритмов детектирования особых точек при внесении искажений в контейнер;

- независимость данного подхода от используемого алгоритма встраивания и извлечения информации.

Блок-схема алгоритма компенсации геометрических искажений представлена на рисунке 4.

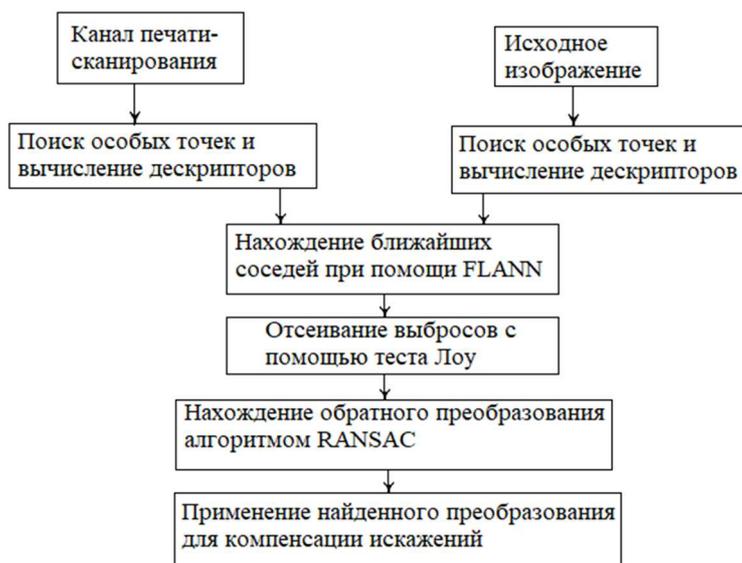


Рисунок 4. – Блок-схема алгоритма компенсации геометрических искажений

Сначала на оригинальном и отсканированном изображениях с помощью выбранного детектора и дескриптора осуществляется поиск особых точек и их описание.

Следующим шагом является нахождение соответствий между найденными особыми точками оригинального и искаженного изображений.

Для каждой особой точки оригинального изображения на отсканированной копии находится по два наиболее близких соответствия.

Для сопоставления особых точек применяется алгоритм поиска k ближайших соседей, основанный на использовании K -мерных деревьев [8] и реализованный в библиотеке FLANN.

Далее отбрасываются плохие соответствия при помощи теста Лоу [8], который заключается в проверке неравенства

$$dist(m) < \alpha \cdot dist(n), \tag{9}$$

где m – ближайшая точка;
 n – ближайшая точка после m ;
 α – некоторое значение от 0 до 1;
 $dist$ – рассчитанное расстояние.

Точка считается хорошей, если её дескриптор значительно более схож с дескриптором оригинальной точки, нежели дескрипторы всех остальных точек, что уменьшает вероятность случайного совпадения.

Далее происходит непосредственно компенсация геометрических искажений отсканированной копии. Для этого находится преобразование положения точек отсканированного изображения к положению точек оригинала вида (1). Для нахождения матрицы преобразования используется алгоритм RANSAC [9].

Алгоритм RANSAC работает следующим образом. По нескольким случайно выбранным парам точек строится гипотеза – преобразование, описывающее трансформацию отсканированного изображения к геометрическому положению оригинального изображения.

Оставшиеся пары точек проверяются на соответствие гипотезе путем вычисления ошибки оценки преобразования. Если ошибка превышает некоторый порог, то точки отсеиваются.

После получения достаточного количества точек, которые соответствуют гипотезе, процесс повторяется несколько раз для уточнения. После многократного случайного построения различных гипотез выбирается та, которой удовлетворяет наибольшее число пар особых точек.

Также после получения конечной модели происходит отсеивание соответствий с наибольшей ошибкой оценки преобразования.

Последним шагом является применение найденного преобразования к отсканированной копии изображения.

Извлечение ЦВЗ. Алгоритм извлечения начинается с выделения в полученном после компенсации геометрических искажений изображении I'' синей компоненты I_B'' . Далее I_B'' разбивается на блоки размером 8×8 пикселей. Каждый блок подвергается ДКП по формулам (5)–(7) и получается набор блоков того же размера F' .

Далее осуществляется перестановка блоков с помощью генератора ПСП с начальным значением S_1 . В итоге получаем набор блоков F_S' .

Из блоков F_S' в зигзагообразном порядке извлекаются среднечастотные коэффициенты в виде последовательности W_m' .

С помощью генератора ПСП и ключа S_1 генерируется последовательность M длиной N , которая используется для извлечения бит исходного сообщения B .

Извлечение осуществляется путем определения знака скалярного произведения блоков $W_m'(i)$ длиной N и последовательности M . Процесс извлечения можно описать выражением

$$\delta = \sum_{i=1}^N W'(i)M(i), \quad (10)$$

бит ЦВЗ определяется следующим образом:

$$B(i) = \begin{cases} 1, & \delta < 0; \\ 0, & \delta \geq 0. \end{cases} \quad (11)$$

Блок-схема алгоритма извлечения представлена на рисунке 8.

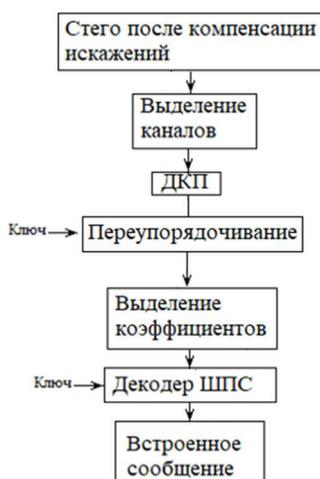


Рисунок 5. – Блок-схема алгоритма извлечения ЦВЗ

Результаты экспериментов. Для тестирования работы алгоритма была написана программа на языке программирования Python с применением библиотеки OpenCV для нахождения и описания особых точек изображений и библиотек *skimage* и *numpy* для преобразований изображений.

Сначала было проведено исследование стойкости встраивания к смоделированным искажениям. В качестве искажений выступили: масштабирование в 2,5 раза, поворот на 86° , сглаживание фильтром Гаусса с $\sigma = 7$ и наложение гауссова шума с $\sigma = 19$ и нулевым средним. Для тестирования было использовано цветное изображение размером 1024×768 пикселей, представленное на рисунке 6.

Рисунок 6. – Изображение для тестирования Koala



Тесты проводились при полном заполнении контейнера при различных параметрах силы встраивания P и длины ПСП N . В качестве оценки стойкости выступало отношение количества правильно принятых бит сообщения к длине сообщения в битах. Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1. – Точность извлечения при применении искажений

N	P					
	10	15	20	25	30	35
	Точность извлечения, %					
100	78	84	94	95	98	98
200	86	92	97	98	99	100
300	87	95	99	99	100	100
400	89	99	98	100	100	100
500	92	99	99	99	100	100
600	95	99	100	100	100	100
700	94	98	100	100	100	100
800	97	100	99	100	100	100
900	98	99	99	100	100	100
1000	99	100	100	100	100	100
1100	99	100	100	100	100	100
1200	98	100	100	100	100	100

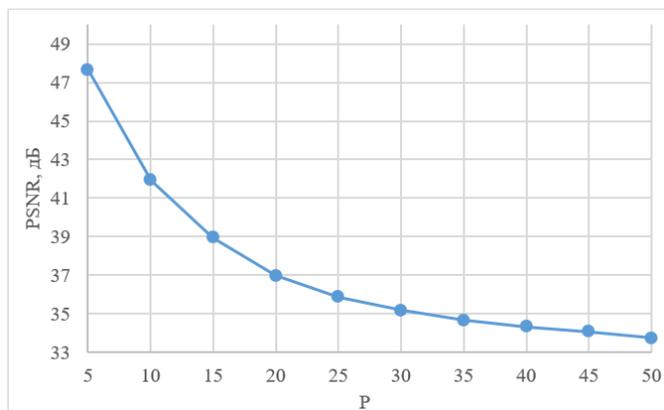
Для оценки искажения контейнера при встраивании в него информации было использовано пиковое отношение сигнала к шуму ($PSNR$) [1]:

$$PSNR = 10 \cdot \lg \left(\frac{N \max(I)^2}{\sum_{x=1}^N (I - I')^2} \right), \tag{12}$$

где N – количество пикселей изображения;
 I – пиксели незаполненного контейнера;
 I' – пиксели заполненного контейнера.

На искажение изображения влияет параметр силы встраивания P , соответственно, тестирование производилось измерением $PSNR$ при различных значениях этого параметра. Результаты показаны на графике (рисунок 7).

Рисунок 7. – Зависимость $PSNR$ от силы встраивания P



Встраивание остается визуально незаметным при силе $P = 20$, при дальнейшем увеличении параметра P возникает шум синего цвета, заметный на темных и однородных участках изображения (рисунок 8).



$a - P = 20$ (PSNR = 36,9); $b - P = 30$ (PSNR = 34,6)

Рисунок 8. – Визуальное сравнение искажений при встраивании

Незаметность можно улучшить путем уменьшения силы встраивания P . Уменьшение стойкости при этом не так важно, так как её можно компенсировать увеличением длины N ПСП, пожертвовав при этом объемом встраиваемой информации.

Последний эксперимент состоял в тестировании устойчивости алгоритма встраивания и извлечения к искажениям реальной системы «принтер – сканер». В качестве принтера и сканера использовалось МФУ Konica Minolta bizhub 364e с разрешением печати 1200 dpi и сканирования 600 dpi. На основе результатов предыдущих экспериментов для проведения тестирования была выбрана сила встраивания $P = 20$ как максимальная из минимально заметных и длина псевдослучайной последовательности $N = 500$. Каждый из используемых контейнеров был заполнен максимальным количеством встраиваемых бит, которые возможно встроить при заданных параметрах данным алгоритмом (таблица 2).

Таблица 2. – Количество встраиваемых бит в каждое изображение

Название	Разрешение	Количество бит
Napoleon	1200 × 800	660
Lena	512 × 512	180
Koala	1024 × 768	540
Desert	1024 × 768	540
MilkyWay	650 × 478	212

Из всех пяти изображений удалось корректно извлечь все встроенные биты информации.

Заключение. В статье предложен алгоритм стеганографического встраивания цифровых водяных знаков в полиграфическую продукцию. Представлены результаты исследования стойкости данного алгоритма к искажениям процессов печати и сканирования изображения как смоделированным в компьютерной среде, так и к реальным, при визуальной незаметности встраивания. При необходимости возможно варьирование параметров алгоритма для достижения возможности встраивания большего объема информации либо увеличения стойкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Митекин В. А., Сергеев А. В., Федосеев В. А. и др. Модели стеганографической системы и обобщенного алгоритма встраивания ЦВЗ в полиграфические изделия // Компьютерная оптика. – 2007. – Т. 31, № 4. – С. 95–100.
2. Грибунин В. Г., Оков И. Н., Туринцев И. В. Цифровая стеганография: учеб. пособие. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2009. – 264 с.
3. Глузов Н. И., Митекин В. А., Сергеев А. В. и др. Алгоритм извлечения скрытой информации из отсканированных полиграфических изделий // Вестник СГАУ. – 2008. – № 2 (15). – С. 216–220.
4. Грузман И. С., Киричук В. С., Косых В. П. и др. Цифровая обработка изображений в информационных системах: учеб. пособие. – Новосибирск: НГТУ, 2000. – 168.
5. Lin C.-Y., Chang S.-F. Distortion modeling and invariant extraction for digital image print-and-scan process // International Symposium on Multimedia Information Processing (ISMIP 99). – Taipei, Taiwan, Dec. 1999. – URL: <https://www.ee.columbia.edu/ln/dymm/publications/99/cylin-modelscan.pdf>.
6. Шиффман Х. Р. Ощущение и восприятие. – Изд. 5-е. – СПб.: Питер. 2003. – 928 с.

7. Loeffler C., Ligtenberg A., Moschytz G. Practical Fast 1-D DCT Algorithms with 11 Multiplications // IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. – 1989. – Vol. 2. – Glasgow, UK. – P. 988–991. – DOI: [10.1109/icassp.1989.266596](https://doi.org/10.1109/icassp.1989.266596).
8. Lowe D. G. Distinctive Image Features from Scale-Invariant Keypoints // International Journal of Computer Vision. – 2004. – Vol. 60. – P. 91–110. – DOI: [10.1023/B:VISI.0000029664.99615.94](https://doi.org/10.1023/B:VISI.0000029664.99615.94).
9. Fischler M. A., Bolles R. C. Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography // Communications of the ACM. – 1981. – Vol. 24, iss. 6. – P. 381–395. – DOI: [10.1145/358669.358692](https://doi.org/10.1145/358669.358692).

REFERENCES

1. Mitekin, V. A., Sergeev, A. V., Fedoseev, V. A., & Bogomolov, D. M. (2007). Modeli steganograficheskoj sistemy i obobshhennogo algoritma vstraivaniya CVZ v poligraficheskie izdelija [Steganography system model and the generalized algorithm embedding a digital watermark in printing products]. *Komp'yuternaja optika [Computer optics]*, 31(4), 95–100. (In Russ.).
2. Gribunin, V. G., Okov, I. N., & Turincev, I. V. (2009). *Cifrovaja steganografija [Digital steganography]*. Moscow: Solon-Press. (In Russ.).
3. Glumov, N. I., Mitekin, V. A., Sergeev, A. V., & Fedoseev, V. A. (2008). Algoritm izvlechenija skrytoj informacii iz otskanirovannyh poligraficheskikh izdelij [An algorithm for extracting invisible information from scanned polygraphic products]. *Vestnik SGAU [Herald of Samara State Aerospace University]*, 2(15), 216–220. (In Russ.).
4. Gruzman, I. S., Kirichuk, V. S., Kosyh, V. P., Peretjagin, G. I., & Spektor, A. A. (2000). *Cifrovaja obrabotka izobrazhenij v informacionnyh sistemah [Digital image processing in information systems]*. Novosibirsk: NGTU (In Russ.).
5. Lin, C. Y., & Chang, S. F. (1999). Distortion modeling and invariant extraction for digital image print-and-scan process. Taipei. In *International Symposium on Multimedia Information Processing*. URL: <https://www.ee.columbia.edu/ln/dvmm/publications/99/cylin-modelscan.pdf>.
6. Shiffman H. R. (2003). *Oshhushhenie i vosprijatie [Sensation and perception]*. St.-Petersburg: Piter. (In Russ.).
7. Loeffler, C., Ligtenberg, A., & Moschytz, G. (1989). Practical Fast 1-D DCT Algorithms with 11 Multiplications. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, (2), 988–991. IEEE. DOI: [10.1109/icassp.1989.266596](https://doi.org/10.1109/icassp.1989.266596).
8. Lowe, G. D. (2004). Distinctive Image Features from Scale-Invariant Keypoints. *International Journal of Computer Vision*, (60), 91–110. DOI: [10.1023/B:VISI.0000029664.99615.94](https://doi.org/10.1023/B:VISI.0000029664.99615.94).
9. Fischler, M. A., & Bolles, R. C. (1981). Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. *Communications of the ACM*, 24(6), 381–395. DOI: [10.1145/358669.358692](https://doi.org/10.1145/358669.358692).

Поступила 25.10.2023

PROTECTION OF POLIGRAPHIC PRODUCTS USING DIGITAL WATERMARKS

D. LIPNITSKI, V. SADOV
(Belarusian State University, Minsk)

The article proposes algorithms for steganographic embedding and extraction of digital watermarks (DWM) embedded in the digital original of printed products in order to protect copyrights to them. The built-in digital image is resistant to distortions introduced into images during printing and scanning and is not visually noticeable. The resistance of the extraction algorithm to geometric distortions is achieved through the use of an algorithm for restoring the original geometry of the image by comparing the special points of the distorted copy of the container image and the original image. The results of testing the robustness of the algorithm both to simulated distortions of the printing and scanning channel, and to distortions introduced into images when using real printing and scanning devices are presented. The impact of the embedding process on image quality is also considered.

Keywords: steganographic embedding, poligraphic products, digital watermarks, image feature points.

ВЗВЕШЕННОЕ СЛОЖЕНИЕ АСМ-ИЗОБРАЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛОКАЛЬНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МЕТРИКИ

М. Ю. ЛОВЕЦКИЙ^{1,2}, *д-р техн. наук, проф. В. Ю. ЦВЕТКОВ*¹,
*д-р техн. наук, проф. А. А. БОРИСКЕВИЧ*¹,
*канд. техн. наук В. А. ЛАПИЦКАЯ*²,
*акад. НАН Беларуси, д-р техн. наук, проф. С. А. ЧИЖИК*²

¹*(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск)*

²*(Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова НАН Беларуси, Минск)*

Рассматривается задача взвешенного сложения компонентных изображений поверхности материала, формируемых в двух синхронных каналах атомного силового микроскопа (АСМ). Предложена вычислительно простая метрика качества комбинирования компонентных АСМ-изображений на основе коэффициентов локальной корреляции, учитывающая вклад каждого из компонентных АСМ-изображений в результирующее комбинированное АСМ-изображение и корреляцию между компонентными АСМ-изображениями. Показано, что локальная корреляция обеспечивает более высокую точность оценки качества комбинирования АСМ-изображений по сравнению с глобальной корреляцией. Получены зависимости локальной корреляционной метрики от размера окна корреляционного анализа и вклада компонентных АСМ-изображений в результирующее комбинированное АСМ-изображение. Предложена схема адаптивного взвешенного сложения компонентных АСМ-изображений.

Ключевые слова: *атомная силовая микроскопия, оценка качества комбинирования изображений, глобальная корреляция изображений, локальная корреляция изображений.*

Введение. Для эффективного визуального анализа поверхностей материалов с помощью атомного силового микроскопа иногда необходимо объединять изображения нескольких параллельных синхронных измерительных каналов для совместного отображения различных физических величин на стандартных мониторах, имеющих относительно узкий динамический диапазон, с минимальными искажениями и потерями деталей. Для объединения изображений широко используются подходы, основанные на преобразованиях в пространственной области (усреднение, выбор наименьших или наибольших значений [1; 2], взвешенное сложение [3], преобразование цветовых пространств [2; 4], анализ главных компонент [5], управляемая фильтрация [6]), частотной области (пирамида Лапласа [5], дискретное вейвлет-преобразование [7; 8], дискретное косинусное преобразование [9]) и машинном обучении [10; 11]. Однако данные подходы специально не ориентированы на объединение изображений, формируемых в измерительных каналах атомного силового микроскопа. Рекомендации по выбору алгоритма для эффективного формирования комбинированных АСМ-изображений отсутствуют. Разработка таких рекомендаций требует оценки качества формируемых различными алгоритмами комбинированных АСМ-изображений.

Для оценки качества комбинированных изображений широко используются показатели, основанные на анализе краев [12; 13], взаимной информации [14], оценке количества информации в изображении [15], оценке точности визуальной информации в различных масштабах представления изображения [16] и др., однако эти показатели специально не ориентированы на оценку качества комбинированных АСМ-изображений. Относительно низкую вычислительную сложность имеет коэффициент корреляции, однако он не учитывает локальные особенности распределения яркости, что снижает точность оценки качества АСМ-изображений, отличающихся существенными локальными неоднородностями. В таком случае более точная оценка качества комбинирования АСМ-изображений может быть получена на основе локальной корреляции.

Целью работы является повышение качества комбинирования двух АСМ-изображений на основе взвешенного сложения с использованием локальной корреляции.

Постановка задачи. Благодаря низкой вычислительной сложности для объединения изображений широкое распространение получил метод взвешенного сложения (рисунок 1) [3]. Согласно данному методу значения пикселей $m_c(y, x)$ комбинированного АСМ-изображения $M_c = \|m_c(y, x)\|_{(y=0, Y-1, x=0, X-1)}$ вычисляются на основе значений пикселей компонентных АСМ-изображений $M_1 = \|m_1(y, x)\|_{(y=0, Y-1, x=0, X-1)}$

первого и $M_2 = \|m_2(y, x)\|_{(y=0, \overline{Y-1}, x=0, \overline{X-1})}$ второго измерительных каналов атомного силового микроскопа по формуле

$$m_c(y, x) = [k m_1(y, x) + (1 - k) m_2(y, x)] \quad (1)$$

при $y = \overline{0, Y-1}, x = \overline{0, X-1}$,

где k – коэффициент, определяющий вклад значений пикселей каждого компонентного АСМ-изображения M_1 и M_2 в значения пикселей комбинированного АСМ-изображения M_c , $0 < k < 1$;

Y, X – размеры (в пикселях) компонентных и комбинированного АСМ-изображений по вертикали и горизонтали;

[] – операция округления значений пикселей до ближайшего целого.

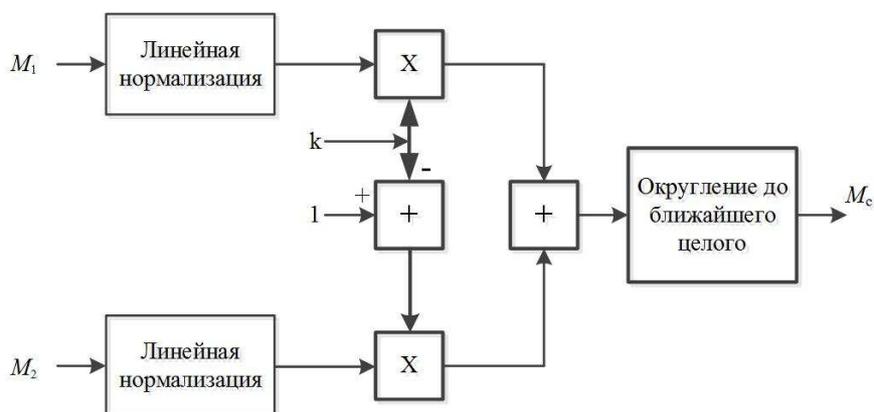


Рисунок 1. – Схема формирования комбинированного АСМ-изображения на основе взвешенного сложения компонентных АСМ-изображений

Для согласования динамических диапазонов компонентных АСМ-изображений в схеме на рисунке 1 предусмотрено линейное контрастирование на основе минимаксного растяжения гистограммы без насыщения. Меньшие значения коэффициента k соответствуют меньшей относительной доле значений компонентного АСМ-изображения M_1 в комбинированном АСМ-изображении M_c по сравнению с компонентным АСМ-изображением M_2 .

Схема, приведенная на рисунке 1, не предусматривает использования критериев качества для выбора значения k . Качество комбинирования АСМ-изображения может быть оценено его корреляцией с компонентными АСМ-изображениями. Коэффициент $r(A, B)$ корреляции двух компонентных АСМ-изображений

$A = \|a(y, x)\|_{(y=0, \overline{Y-1}, x=0, \overline{X-1})}$ и $B = \|b(y, x)\|_{(y=0, \overline{Y-1}, x=0, \overline{X-1})}$ вычисляется по формуле

$$r(A, B) = \frac{\sum_{y=0}^{Y-1} \sum_{x=0}^{X-1} |a(y, x) - \bar{a}| |b(y, x) - \bar{b}|}{\sqrt{\sum_{y=0}^{Y-1} \sum_{x=0}^{X-1} (a(y, x) - \bar{a})^2 \sum_{y=0}^{Y-1} \sum_{x=0}^{X-1} (b(y, x) - \bar{b})^2}}, \quad (2)$$

где \bar{a}, \bar{b} – средние значения яркостей пикселей изображений A и B .

Для оценки вклада каждого компонентного АСМ-изображения в комбинированное АСМ-изображение может быть использована схема, приведенная на рисунке 2. С ее помощью оценивается глобальная корреляция между исходными компонентными АСМ-изображениями M_1 и M_2 , комбинированным АСМ-изображением M_c и компонентным АСМ-изображением M_1 , комбинированным АСМ-изображением M_c и компонентным АСМ-изображением M_2 .

В таблице 1 приведены значения коэффициентов глобальной корреляции, вычисленные с помощью схемы на рисунке 2 для десяти тестовых АСМ-изображений поверхностей различных материалов.

Из таблицы 1 следует, что компонентные АСМ-изображения M_1 и M_2 слабо коррелированы, причем вклад компонентного АСМ-изображения M_1 в комбинированное изображение M_C всегда более значителен, чем компонентного АСМ-изображения M_2 . При этом значения коэффициента глобальной корреляции $r(M_C, M_1)$ и $r(M_C, M_2)$ находятся в некотором противоречии: при коэффициенте глобальной корреляции $r(M_C, M_1)$, равном или очень близком к единице (что говорит о практически полном соответствии между компонентным АСМ-изображением M_1 и комбинированным АСМ-изображением M_C , т. е. фактически $M_1 = M_C$), разница в значениях коэффициентов глобальной корреляции $r(M_C, M_2)$ и $r(M_1, M_2)$ является более существенной для всех видов изображений. В таблице 1 приведены значения разностей $\Delta r(k_L, k_H)$ динамических диапазонов коэффициентов $r(M_C, M_1, k)$ и $r(M_C, M_2, k)$ глобальной корреляции, вычисленных по формуле

$$\Delta r(k_L, k_H) = |r(M_C, M_1, k_H) - r(M_C, M_1, k_L)| - |r(M_C, M_2, k_H) - r(M_C, M_2, k_L)| \quad (3)$$

для $k_L = 0,3$, $k_H = 0,7$.

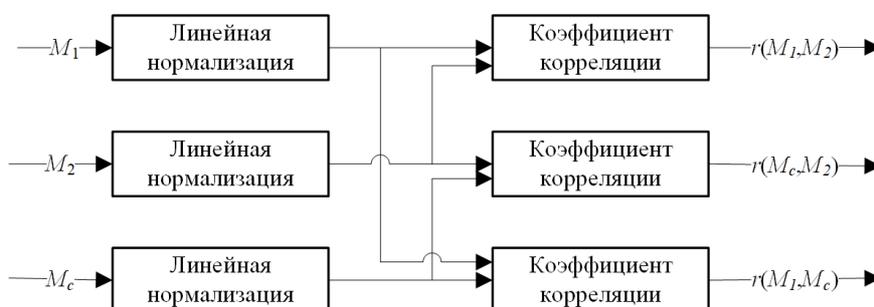


Рисунок 2. – Схема оценки корреляции комбинированного и компонентных АСМ-изображений

Таблица 1. – Значения коэффициентов глобальной корреляции

Показатели	k	Значения коэффициентов корреляции АСМ-изображений									
		АСМ1	АСМ2	АСМ3	АСМ4	АСМ5	АСМ6	АСМ7	АСМ8	АСМ9	АСМ10
$r(M_1, M_2)$	0,5	0,5650	0,425	0,3291	0,6020	0,2360	0,5379	0,5010	0,6555	0,6005	0,4500
$r(M_C, M_1)$	0,7	0,9932	0,993	1,0000	0,9992	0,9748	0,9868	0,9843	0,9872	0,9955	0,9998
	0,5	0,9678	0,970	0,9999	0,9956	0,8868	0,9289	0,9273	0,9403	0,9775	0,9990
	0,3	0,8775	0,870	0,9990	0,9785	0,6590	0,7791	0,7645	0,8217	0,9035	0,9944
$r(M_C, M_2)$	0,7	0,6075	0,446	0,3232	0,6131	0,4251	0,5554	0,6050	0,6756	0,6158	0,4583
	0,5	0,6696	0,525	0,3317	0,6297	0,6215	0,6173	0,7117	0,7218	0,6434	0,4728
	0,3	0,7875	0,703	0,3514	0,6706	0,8446	0,7903	0,8443	0,8156	0,7184	0,5064
$D(k)$	0,7	7,35	6,19	5,94	6,94	10,79	6,65	8,36	8,14	7,07	5,98
	0,5	9,72	7,90	6,06	7,38	24,09	9,23	15,17	11,60	8,08	6,22
	0,3	32,74	22,16	6,34	8,90	34,33	260,50	40,24	409,47	14,59	6,83
$\Delta r(k_L, k_H)$		-0,0643	-0,134	-0,0272	-0,0368	-0,1037	-0,0272	-0,0195	0,0255	-0,0106	-0,0427

Приведенные в таблице 1 значения $\Delta r(k_L, k_H)$ свидетельствуют о несогласованности изменений коэффициентов глобальной корреляции $r(M_C, M_1, k)$ и $r(M_C, M_2, k)$ при изменении коэффициента k , определяющего вклад компонентных АСМ-изображений в комбинированное АСМ-изображение: динамический диапазон коэффициента $r(M_C, M_1, k)$ меньше, чем коэффициента $r(M_C, M_2, k)$. В этой связи актуальной является задача повышения точности корреляционной оценки качества комбинирования АСМ-изображений.

Взвешенное сложение АСМ-изображений с использование локальной корреляции. Повышение точности корреляционной оценки качества комбинирования АСМ-изображений возможно за счет учета

локальных особенностей распределений значений пикселей в компонентных и комбинированном АСМ-изображениях. Для этого может использоваться коэффициент $r_L(A, B)$ локальной корреляции двух АСМ-изображений $A = \left\| a(y, x) \right\|_{(y=0, Y-1, x=0, X-1)}$ и $B = \left\| b(y, x) \right\|_{(y=0, Y-1, x=0, X-1)}$, вычисляемый по формуле

$$r_L(A, B, p) = \frac{\sum_{y=0}^{Y-1} \sum_{x=0}^{X-1} |a(y, x) - a_L(y, x, p)| |b(y, x) - b_L(y, x, p)|}{\sqrt{\sum_{y=0}^{Y-1} \sum_{x=0}^{X-1} (a(y, x) - a_L(y, x, p))^2 \sum_{y=0}^{Y-1} \sum_{x=0}^{X-1} (b(y, x) - b_L(y, x, p))^2}}, \quad (4)$$

где $a_L(y, x, p)$, $b_L(y, x, p)$ – средние значения яркостей пикселей изображений A и B в окрестности пикселя с координатами (y, x) размером $p \times p$ пикселей, $a_L(y, x, p) = \frac{1}{p^2} \sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^p a(y+j, x+i)$,

$$b_L(y, x, p) = \frac{1}{p^2} \sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^p b(y+j, x+i).$$

В таблицах 2, 3 для нескольких значений размера p окрестности приведены значения коэффициентов локальной корреляции, вычисленные с помощью схемы на рисунке 2 для АСМ-изображений поверхностей различных материалов. В таблицах 2, 3 приведены также значения разностей $\Delta r_L(k_L, k_H)$ динамических диапазонов коэффициентов $r_L(M_C, M_1, p, k)$ и $r_L(M_C, M_2, p, k)$ локальной корреляции, вычисляемых с помощью выражения (4) для $k_L = 0,3$, $k_H = 0,7$, и значения отношений $|\Delta r(k_L, k_H) / \Delta r_L(k_L, k_H)|$. Из таблиц 2, 3 следует, что разница $\Delta r_L(k_L, k_H)$ в динамических диапазонах коэффициентов локальной корреляции в 4–6 раз меньше по сравнению с разницей $\Delta r(k_L, k_H)$ в динамических диапазонах коэффициентов глобальной корреляции для $p = \{3, 5, 7, 9\}$ с усреднением по десяти АСМ-изображениям. Это говорит о лучшей согласованности изменений коэффициентов $r_L(M_C, M_1, p, k)$ и $r_L(M_C, M_2, p, k)$ локальной корреляции по сравнению с коэффициентами глобальной корреляции $r(M_C, M_1, k)$ и $r(M_C, M_2, k)$ при изменении коэффициента k . Из сопоставления выражений (2) и (4) следует, что временная сложность вычислений коэффициента $r_L(A, B, p)$ локальной корреляции примерно в $2p^2$ раз больше по сравнению с временной сложностью вычислений коэффициента глобальной корреляции $r(A, B)$.

Таблица 2. – Значения коэффициентов локальной корреляции при $p = 3$

Показатель	k	Значения коэффициентов корреляции АСМ-изображений									
		АСМ1	АСМ2	АСМ3	АСМ4	АСМ5	АСМ6	АСМ7	АСМ8	АСМ9	АСМ10
$r_L(M_1, M_2, p)$	0,5	0,5906	0,598	0,2743	0,4935	0,5971	0,6254	0,6294	0,6318	0,5496	0,3217
$r_L(M_C, M_1, p)$	0,7	0,7341	0,861	0,9426	0,9374	0,8012	0,6290	0,6406	0,6426	0,7371	0,9611
	0,5	0,6030	0,736	0,7847	0,8114	0,6716	0,6257	0,6328	0,6352	0,6108	0,8375
	0,3	0,5855	0,651	0,5339	0,6590	0,6152	0,6253	0,6306	0,6330	0,5649	0,6024
$r_L(M_C, M_2, p)$	0,7	0,8240	0,866	0,5379	0,7021	0,7942	0,9931	0,9917	0,9935	0,8537	0,5392
	0,5	0,9483	0,955	0,7557	0,8484	0,9338	0,9987	0,9984	0,9987	0,9603	0,7413
	0,3	0,9893	0,989	0,9230	0,9519	0,9849	0,9998	0,9997	0,9998	0,9916	0,9111
$D_L(k)$	0,7	29,35	577,59	13,34	14,12	381,70	7,12	7,39	7,38	24,82	11,05
	0,5	7,61	12,91	193,65	90,90	10,25	6,96	7,09	7,11	8,18	51,02
	0,3	6,60	8,11	13,65	11,14	7,25	6,94	7,02	7,05	6,64	15,24
$\Delta r_L(k_L, k_H)$		-0,0167	0,087	0,0236	0,0286	-0,0047	-0,003	0,002	0,0033	0,0343	-0,0132
$ \Delta r(k_L, k_H) / \Delta r_L(k_L, k_H) $		3,85	1,54	1,15	1,29	22,06	9,07	9,75	7,73	0,31	3,23

Для оценки качества комбинирования АСМ-изображений с учетом корреляции между комбинированным АСМ-изображением и каждым из двух компонентных АСМ-изображений, а также между компонентными АСМ-изображениями предлагается локальная корреляционная метрика $D_L(k)$, вычисляемая по формуле (чем больше ее значение, тем лучше)

$$D_L(k) = \frac{r_L(M_C, M_1, k) + r_L(M_C, M_2, k)}{|r_L(M_C, M_1, k) - r_L(M_C, M_2, k)| r_L(M_1, M_2, 0,5)}. \quad (5)$$

Из таблиц 2, 3 следует, что локальная корреляционная метрика $D_L(k)$ позволяет определить значение k , обеспечивающее лучшее соотношение вкладов компонентных АСМ-изображений в комбинированное АСМ-изображение. Аналогичная метрика $D_L(k)$ на основе коэффициентов глобальной корреляции (см. таблицу 1) не позволяет это сделать, что связано с ее низкой точностью. Эта метрика указывает на $k = 0,3$ для любых АСМ-изображений. Из таблиц 2, 3 также следует, что значения локальной корреляционной метрики $D_L(k)$ для одних и тех же изображений не всегда совпадают при различных значениях размера p окна корреляционного анализа. Эта зависимость позволяет осуществлять оценку качества комбинирования АСМ-изображений с учетом размера значимых объектов.

Таблица 3. – Значения коэффициентов локальной корреляции при $p = 9$

Показатель	k	Значения коэффициентов корреляции АСМ-изображений									
		АСМ1	АСМ2	АСМ3	АСМ4	АСМ5	АСМ6	АСМ7	АСМ8	АСМ9	АСМ10
$r_L(M_1, M_2, p)$	0,5	0,6080	0,532	0,2744	0,6208	0,6450	0,6556	0,6703	0,6487	0,5902	0,4635
$r_L(M_C, M_1, p)$	0,7	0,9056	0,872	0,9774	0,9605	0,7752	0,6509	0,6842	0,6491	0,9408	0,9973
	0,5	0,7340	0,715	0,8906	0,8862	0,6818	0,6528	0,6754	0,6479	0,8096	0,9848
	0,3	0,6192	0,603	0,6717	0,7824	0,6467	0,6542	0,6723	0,6482	0,6687	0,9300
$r_L(M_C, M_2, p)$	0,7	0,6500	0,764	0,4364	0,7902	0,6760	0,9932	0,9926	0,9930	0,6512	0,5100
	0,5	0,8123	0,908	0,6286	0,8933	0,9056	0,9987	0,9985	0,9987	0,7784	0,5844
	0,3	0,9456	0,977	0,8516	0,9647	0,9813	0,9998	0,9997	0,9998	0,9241	0,7162
$D_L(k)$	0,7	10,01	28,47	9,52	16,56	22,68	7,33	8,11	7,36	9,31	6,67
	0,5	32,48	15,81	21,13	403,73	11,00	7,28	7,73	7,24	86,24	8,46
	0,3	7,89	7,94	30,86	15,44	7,54	7,30	7,62	7,23	10,57	16,61
$\Delta r_L(k_L, k_H)$		-0,0092	0,056	-0,1095	0,0036	-0,1768	-0,0033	0,0048	-0,0059	-0,0008	-0,1389
$ \Delta r(k_L, k_H)/\Delta r_L(k_L, k_H) $		6,99	2,39	0,25	10,22	0,59	8,24	4,06	4,32	13,25	0,31

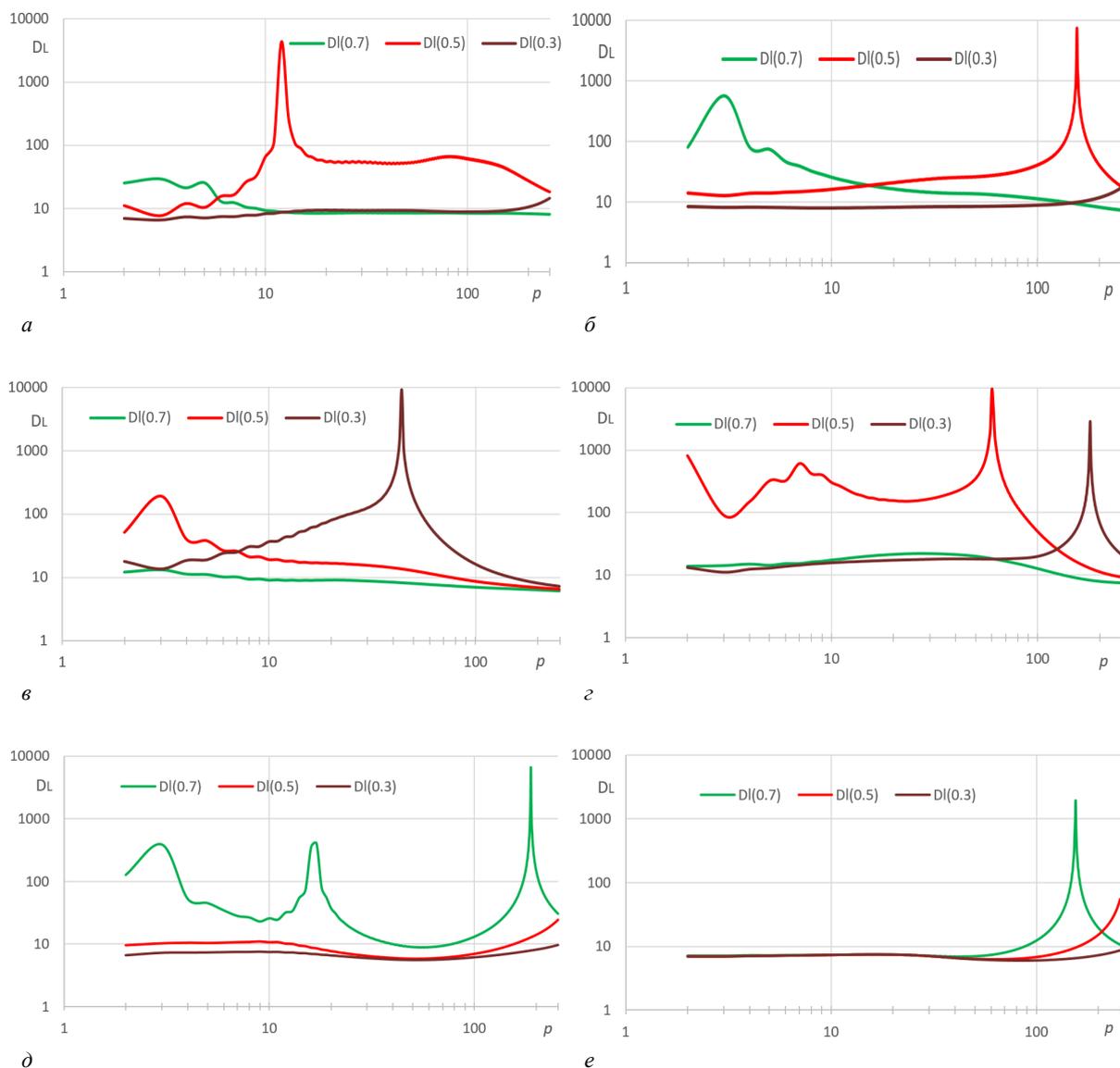
На рисунке 3 приведены зависимости значений метрики $D_L(k)$ от размера p окна корреляционного анализа и коэффициента k для 10 комбинированных АСМ-изображений. Из рисунка 3 следует, что для некоторых АСМ-изображений локальные максимальные значения метрики $D_L(k)$ зависят от значения p . Размер p окна корреляционного анализа определяет размер значимых объектов на компонентных АСМ-изображениях, которые должны вносить основной вклад в комбинированное АСМ-изображение M_C .

Из рисунка 3 следует, что для АСМ-изображений 5–8 при любых p наибольшие значения локальной корреляционной метрики $D_L(k)$ обеспечиваются при $k = 0,7$. На рисунке 4 приведены компонентные АСМ-изображения 5–8, полученные при различных значениях k . Для АСМ-изображений 1–4, 9, 10 наибольшие значения локальной корреляционной метрики $D_L(k)$ при различных значениях p достигаются для различных значений k .

При необходимости передачи в комбинированные АСМ-изображения 1, 3, 9, 10 наиболее полной информации о мелких объектах ($p = 3$) компонентных АСМ-изображений необходимо использовать значения k , равные 0,7, 0,5, 0,7, 0,5, соответственно. При необходимости передачи в комбинированные АСМ-изображения 1, 3, 9, 10 наиболее полной информации о более крупных объектах ($p > 5$) необходимо использовать значения k , равные 0,5, 0,3, 0,5 (0,3 при $p > 40$), 0,3, соответственно. На рисунке 5 приведены компонентные АСМ-изображения 1, 3, 9, 10, полученные при различных значениях k .

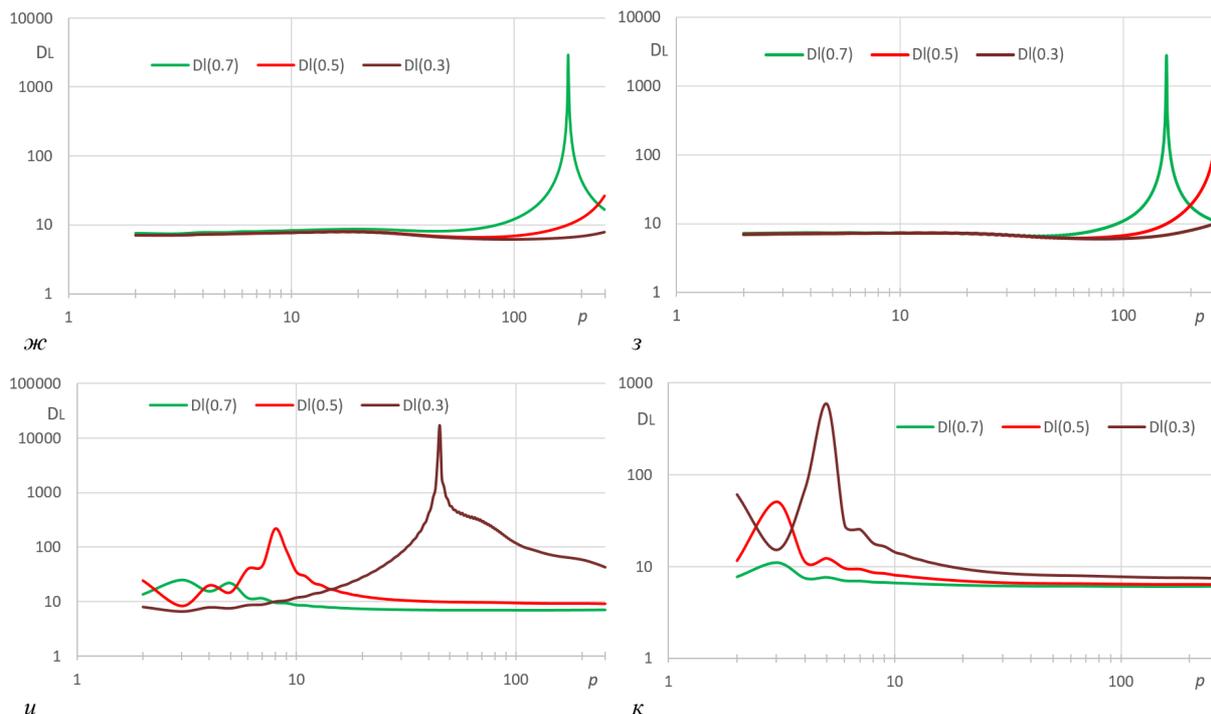
Для АСМ-изображения 2 при $p < 40$ наибольшие значения локальной корреляционной метрики $D_L(k)$ обеспечиваются при $k=0,7$. При $p > 40$ наибольшие значения локальной корреляционной метрики $D_L(k)$ обеспечиваются при $k=0,5$. Для АСМ-изображения 4 при $p < 110$ наибольшие значения локальной корреляционной метрики $D_L(k)$ обеспечиваются при $k=0,5$. При $p > 110$ наибольшие значения локальной корреляционной метрики $D_L(k)$ обеспечиваются при $k=0,3$. На рисунке 6 приведены компонентные АСМ-изображения 2 и 4, полученные при различных значениях k .

Из рисунка 3 следует, что по глобальному максимальному значению локальной корреляционной метрики $D_L(k)$ во всем диапазоне изменения значения p можно определить значение k , обеспечивающее лучшие условия для передачи в комбинированное АСМ-изображение информации об объектах компонентных АСМ-изображений, имеющих наиболее часто встречающиеся размеры. С учетом данного свойства предлагается схема адаптивного взвешенного сложения компонентных АСМ-изображений (рисунок 7) с автоматическим выбором значения k , определяющим вклад значений пикселей компонентных АСМ-изображений в комбинированное АСМ-изображение.



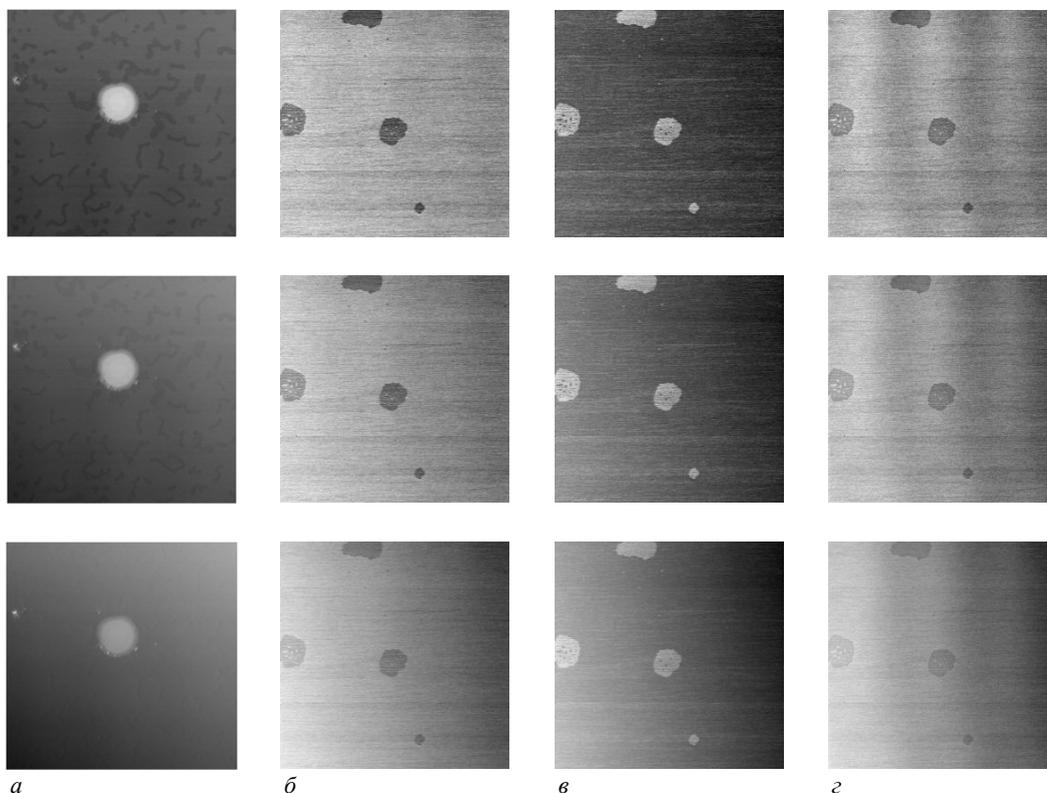
a – АСМ-1; b – АСМ-2; $в$ – АСМ-3; $г$ – АСМ-4; $д$ – АСМ-5; $е$ – АСМ-6

Рисунок 3. – Зависимости значений локальной корреляционной метрики от размера окна корреляционного анализа для компонентных АСМ-изображений (начало)



ж – АСМ-7; з – АСМ-8; и – АСМ-9; κ – АСМ-10

Рисунок 3. – Зависимости значений локальной корреляционной метрики от размера окна корреляционного анализа для компонентных АСМ-изображений (окончание)



а – АСМ-5; б – АСМ-6; в – АСМ-7; г – АСМ-8

Рисунок 4. – Комбинированные АСМ-изображения при значениях $k = 0,7$ (верхний ряд), $k = 0,5$ (средний ряд), $k = 0,3$ (нижний ряд)

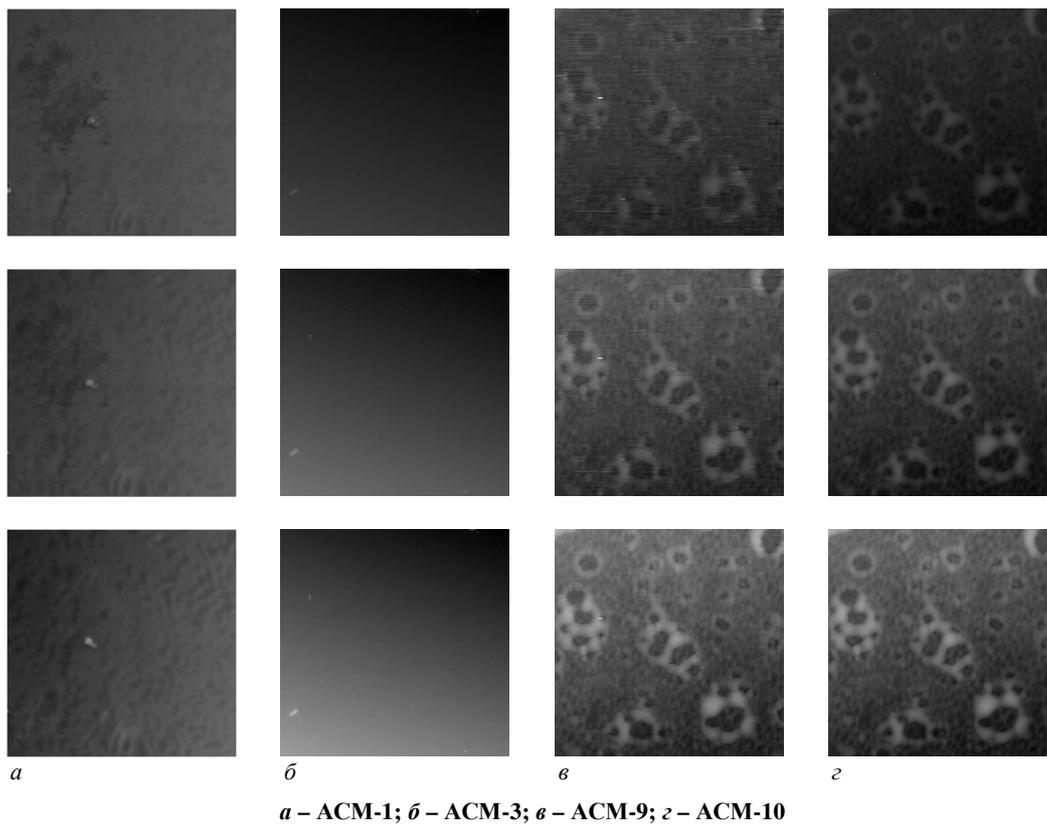


Рисунок 5. – Комбинированные АСМ-изображения при значениях $k = 0,7$ (верхний ряд), $k = 0,5$ (средний ряд), $k = 0,3$ (нижний ряд)

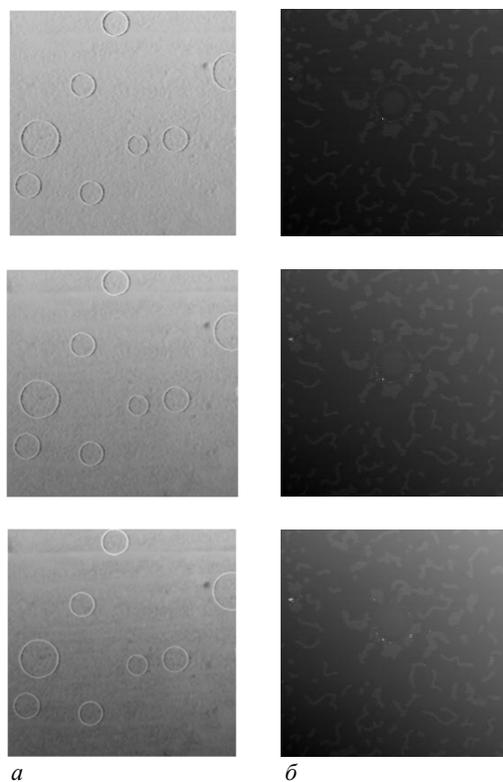


Рисунок 6. – Комбинированные АСМ-изображения при значениях $k = 0,7$ (верхний ряд), $k = 0,5$ (средний ряд), $k = 0,3$ (нижний ряд)

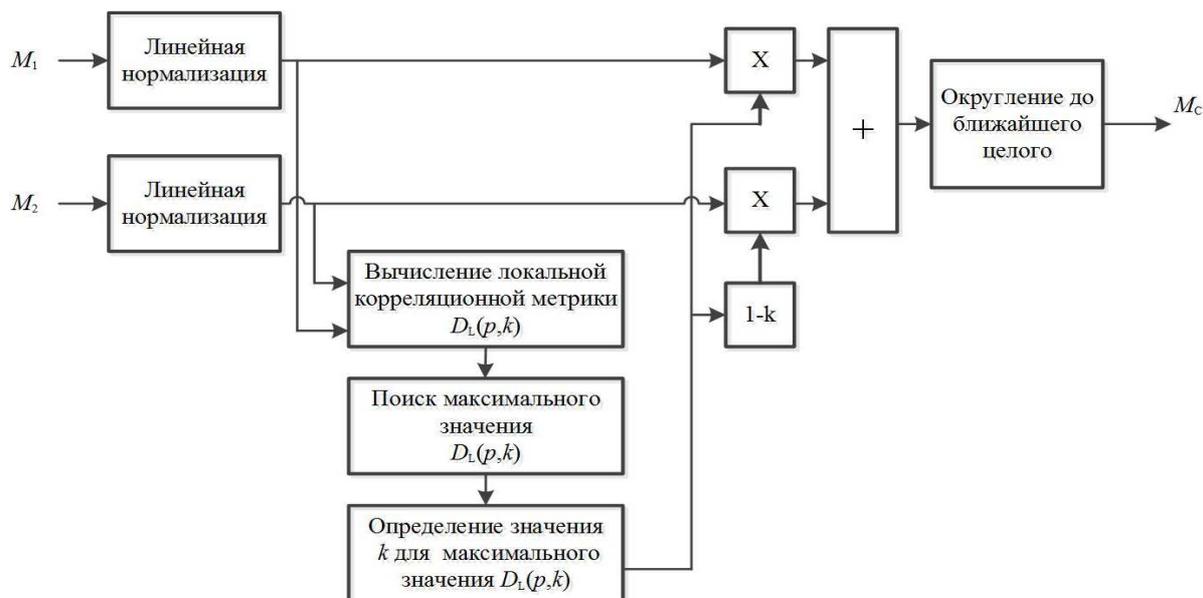


Рисунок 7. – Схема адаптивного формирования комбинированного АСМ-изображения на основе взвешенного сложения компонентных АСМ-изображений с автоматическим определением вклада значений пикселей компонентных АСМ-изображений в комбинированное АСМ-изображение

Заключение. Для оценки качества комбинирования АСМ-изображений предложена локальная корреляционная метрика, вычисляемая на основе коэффициентов локальной корреляции, определяемых в квадратной окрестности каждого пикселя сравниваемых АСМ-изображений. Метрика учитывает вклад каждого из компонентных АСМ-изображений в результирующее комбинированное АСМ-изображение, а также корреляцию между компонентными АСМ-изображениями. Для взвешенного сложения исходных АСМ-изображений установлено, что при изменении вклада одного из компонентных АСМ-изображений в результирующее комбинированное АСМ-изображение от 0,7 до 0,3 разница в динамических диапазонах коэффициентов локальной корреляции компонентных АСМ-изображений в 4–6 раз меньше разницы в динамических диапазонах коэффициентов глобальной корреляции при размере окрестности локальной оценки от 3×3 до 9×9 пикселей. Это свидетельствует о существенно лучшей согласованности изменений коэффициентов локальной корреляции по сравнению с коэффициентами глобальной корреляции при изменении вкладов компонентных АСМ-изображений в комбинированное АСМ-изображение и повышении точности корреляционной оценки качества комбинирования АСМ-изображений. Получены зависимости значений локальной корреляционной метрики от размера окна корреляционного анализа и вклада компонентных АСМ-изображений в комбинированное АСМ-изображение. Данные зависимости позволяют определить вклады значений пикселей компонентных АСМ-изображений, обеспечивающих передачу в комбинированное АСМ-изображение наиболее полной информации об объектах определенного размера. Предложена схема адаптивного взвешенного сложения компонентных АСМ-изображений с автоматическим определением вклада значений пикселей компонентных АСМ-изображений в комбинированное АСМ-изображение.

Благодарности. Работа выполнена в рамках задания 3.03.3 подпрограммы «Междисциплинарные исследования и новые зарождающиеся технологии» ГПНИ «Конвергенция-2025».

ЛИТЕРАТУРА

1. Jasiunas M. D., Kearney D. A., Hopf J. et al. Image fusion for uninhabited airborne vehicles // Proc. IEEE Intern. Conf. on Field-Programmable Technology / Hong Kong, China (16–18 Dec. 2002). – 2002. – P. 348–351. – DOI: [10.1109/FPT.2002.1188708](https://doi.org/10.1109/FPT.2002.1188708).
2. Morris C., Rajesh R. S. Survey of spatial domain image fusion techniques // Intern. J. of Advanced Research in Computer Science. – 2014. – Vol. 2, iss. 3. – P. 249–254.
3. Song L., Lin Y., Feng W. et al. A novel automatic weighted image fusion algorithm // Intern. Workshop on Intelligent Systems and Applications / Wuhan, China (23–24 May 2009). – 2009. – P. 1–4. – DOI: [10.1109/IWISA.2009.5072656](https://doi.org/10.1109/IWISA.2009.5072656).
4. Mishra D., Palkar B. Image fusion techniques: a review // Intern. J. of Computer Applications. – 2015. – Vol. 130, iss. 9. – P. 7–13. – DOI: [10.5120/ijca2015907084](https://doi.org/10.5120/ijca2015907084).

5. Bai L., Xu C., Wang C. A review of fusion methods of multi-spectral image // *Optik: Intern. J. for Light and Electron Optics*. – 2015. – Vol. 126, iss. 24. – P. 4804–4807. – DOI: [10.1016/j.ijleo.2015.09.201](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2015.09.201).
6. He K., Sun J., Tang X. Guided image filtering // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. – 2013. – Vol. 35, iss. 6. – P. 1397–1409. – DOI: [10.1109/TPAMI.2012.213](https://doi.org/10.1109/TPAMI.2012.213).
7. Li B., Xian Y., Zhang D. et al. Multi-Sensor Image Fusion: A Survey of the State of the Art // *J. of Computer and Communications*. – 2021. – Vol. 9, iss. 6. – P. 73–108. – DOI: [10.4236/jcc.2021.96005](https://doi.org/10.4236/jcc.2021.96005).
8. Kekre H. B. Sarode T., Dhannawat R. Kekre's wavelet transform for image fusion and comparison with other pixel based image fusion techniques // *Intern. J. of Computer Science and Information Security (IJCSIS)*. – 2012. – Vol. 10, iss. 3. – P. 23–31.
9. Toet A. Image fusion by a ratio of low-pass pyramid // *Pattern Recognition Letters*. – 1989. – Vol. 9, iss. 4. – P. 245–253. – DOI: [10.1016/0167-8655\(89\)90003-2](https://doi.org/10.1016/0167-8655(89)90003-2).
10. Liu Y., Chen X., Wang Z. et al. Deep learning for pixel-level image fusion: recent advances and future prospects // *Information Fusion*. – 2018. – Vol. 1, iss. 42. – P. 158–173. – DOI: [10.1016/j.inffus.2017.10.007](https://doi.org/10.1016/j.inffus.2017.10.007).
11. Liu K., Kang G. Multiview convolutional neural networks for lung nodule classification // *Intern. J. of Imaging Systems and Technology*. – 2017. – Vol. 27, iss. 1. – P. 12–22. – DOI: [10.1002/ima.22206](https://doi.org/10.1002/ima.22206).
12. Petrovic V., Xydeas C. Objective image fusion performance characterisation // *Tenth IEEE Intern. Conf. on Computer Vision (ICCV'05) / Beijing, China (17–21 Oct. 2005)*. – 2005. – Vol. 1. – P. 1866–1871. – DOI: [10.1109/ICCV.2005.175](https://doi.org/10.1109/ICCV.2005.175).
13. Piella G., Heijmans H. A new quality metric for image fusion // *Proc. Intern. Conf. on Image Processing / Barcelona, Spain (14–17 Sept. 2003)*. – 2003. – P. 111–173. – DOI: [10.1109/ICIP.2003.1247209](https://doi.org/10.1109/ICIP.2003.1247209).
14. Qu G., Zhang D., Yan P. Medical image fusion by wavelet transform modulus maxima // *Opt. Express*. – 2001. – Vol. 9. – P. 184–190.
15. Aslantas V., Bendes E. A new image quality metric for image fusion: The sum of the correlations of differences // *AEU – Intern. J. of Electronics and Communications*. – 2015. – Vol. 69, iss. 12. – P. 1890–1896. DOI: [10.1016/j.aeue.2015.09.004](https://doi.org/10.1016/j.aeue.2015.09.004).
16. Han Y., Cai Y., Cao Y. et al. A new image fusion performance metric based on visual information fidelity // *Inf. Fusion*. – 2013. – Vol. 14, iss. 2. – P. 127–135. DOI: [10.1016/j.inffus.2011.08.002](https://doi.org/10.1016/j.inffus.2011.08.002).

REFERENCES

1. Jasiunas, M. D., Kearney, D. A., Hopf, J., & Wigley, G. B. (2002). Image fusion for uninhabited airborne vehicles. *Proceedings IEEE International conference on field-programmable technology* (348–351). IEEE. DOI: [10.1109/FPT.2002.1188708](https://doi.org/10.1109/FPT.2002.1188708).
2. Morris, C., & Rajesh, R. S. (2014). Survey of spatial domain image fusion techniques. *International Journal of Advanced Research in Computer Science*, 2(3), 249–254.
3. Song, L., Lin, Y., Feng, W., & Zhao, M. (2009). A Novel Automatic Weighted Image Fusion Algorithm. *International Workshop on Intelligent Systems and Applications* (1–4). IEEE. DOI: [10.1109/TWISA.2009.5072656](https://doi.org/10.1109/TWISA.2009.5072656).
4. Mishra, D., & Palkar, B. (2015) Image fusion techniques: a review. *International Journal of Computer Applications*, 130(9), 7–13. DOI: [10.5120/ijca2015907084](https://doi.org/10.5120/ijca2015907084).
5. Bai, L., Xu, C., & Wang, C. (2015). A review of fusion methods of multi-spectral image. *Optik: International Journal for Light and Electron Optics*, 126(24), 4804–4807. DOI: [10.1016/j.ijleo.2015.09.201](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2015.09.201).
6. He, K., Sun, J., & Tang, X. (2013). Guided image filtering. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 35(6), 1–14. DOI: [10.1109/TPAMI.2012.213](https://doi.org/10.1109/TPAMI.2012.213).
7. Li, B., Xian, Y., Zhang, D., Su, J., Hu, X., & Guo, W. (2021). Multi-Sensor Image Fusion: A Survey of the State of the Art. *Journal of Computer and Communications*, 9(6), 73–108. DOI: [10.4236/jcc.2021.96005](https://doi.org/10.4236/jcc.2021.96005).
8. Kekre, H. B., Sarode, T., & Dhannawat, R. (2012). Kekre's wavelet transform for image fusion and comparison with other pixel based image fusion techniques. *International Journal of Computer Science and Information Security (IJCSIS)*, 10(3), 23–31.
9. Toet, A. (1989). Image fusion by a ratio of low-pass pyramid. *Pattern Recognition Letters*, 9(4), 245–253. DOI: [10.1016/0167-8655\(89\)90003-2](https://doi.org/10.1016/0167-8655(89)90003-2).
10. Liu, Y., Chen, X., Wang, Z., Wang, Z. J., Ward, R. K., & Wang, X. (2018). Deep learning for pixel-level image fusion: recent advances and future prospects. *Information Fusion*, 1(42), 158–173. DOI: [10.1016/j.inffus.2017.10.007](https://doi.org/10.1016/j.inffus.2017.10.007).
11. Liu, K., & Kang, G. (2017) Multiview convolutional neural networks for lung nodule classification. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, 27(1), 12–22. DOI: [10.1002/ima.22206](https://doi.org/10.1002/ima.22206).
12. Petrovic, V., & Xydeas, C. (2005) Objective image fusion performance characterisation. *Tenth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'05): Vol. 1* (1866–1871). IEEE. DOI: [10.1109/ICCV.2005.175](https://doi.org/10.1109/ICCV.2005.175).
13. Piella, G., & Heijmans, H. (2003). A new quality metric for image fusion. *International Conference on Image Processing* 111–173. IEEE. DOI: [10.1109/ICIP.2003.1247209](https://doi.org/10.1109/ICIP.2003.1247209).
14. Qu, G., Zhang, D., & Yan, P. (2001). Medical image fusion by wavelet transform modulus maxima. *Opt. Express*, (9), 184–190.
15. Aslantas, V., & Bendes, E. (2015). A new image quality metric for image fusion: The sum of the correlations of differences. *AEU – International Journal of Electronics and Communications*, 69(12), 1890–1896. DOI: [10.1016/j.aeue.2015.09.004](https://doi.org/10.1016/j.aeue.2015.09.004).
16. Han, Y., Cai, Y., Cao, Y., & Xu, X. (2013). A new image fusion performance metric based on visual information fidelity. *Inf. Fusion*, 14(2), 127–135. DOI: [10.1016/j.inffus.2011.08.002](https://doi.org/10.1016/j.inffus.2011.08.002).

WEIGHTED SUMMATION OF AFM IMAGES USING LOCAL CORRELATION METRIC**M. LAVETSKI^{1,2}, V. TSVIATKOU¹, A. BORISKEVICH¹, V. LAPITSKAYA², S. CHIZHIK²**¹*(Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk)*²*(A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk)*

The problem of weighted summation of component images of the surface of a material formed in two synchronous channels of an atomic force microscope (AFM) is considered. A computationally simple quality metric for combining component AFM images based on local correlation coefficients is proposed, which takes into account the contribution of each of the component AFM images to the resulting combined AFM image and the correlation between component AFM images. It is shown that local correlation provides a higher accuracy of AFM images combination quality estimation in comparison with global correlation. The dependences of the local correlation metric on the size of the correlation analysis window and the contribution of component AFM images to the resulting combined AFM images are obtained. A scheme for adaptive weighted summation of component AFM images is proposed.

Keywords: *atomic force microscopy, image combination quality assessment, global image correlation, local image correlation.*

УДК 004.89

DOI 10.52928/2070-1624-2023-41-2-29-34

**МЕТОД АУГМЕНТАЦИИ ДАННЫХ ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ КАЧЕСТВА РАСПОЗНАВАНИЯ
ИЗОБРАЖЕНИЙ ЭЛЕКТРОННОЙ КОММЕРЦИИ****В. В. СОРОКИНА¹,***акад. НАН Беларуси, д-р техн. наук, проф. С. В. АБЛАМЕЙКО^{1, 2}**¹(Белорусский государственный университет, Минск)**²(Объединённый институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск)*

В быстро развивающейся сфере электронной коммерции визуальное представление товаров играет ключевую роль в привлечении потребителей и повышении коэффициента конверсии. В статье представлен новый метод аугментации изображений, который включает в себя сегментацию изображений, определение доминирующего цвета, замену фона и реалистичную генерацию теней. В совокупности эти шаги способствуют созданию аугментированных изображений, которые не только используются в электронных каталогах, но и расширяют возможности нейронных сетей разнообразными и обогащенными обучающими данными. Построенный метод позволяет решить проблемы, связанные с классовым дисбалансом, усилить обобщения модели, а также улучшить качество распознавания.

Ключевые слова: сверточная нейронная сеть, распознавание изображений, сегментация, генерация теней, электронная коммерция.

Введение. Аугментация данных играет ключевую роль в различных областях машинного обучения, компьютерного зрения и искусственного интеллекта. Ее важность заключается в способности повышать качество и количество обучающих данных, что, в свою очередь, способствует повышению производительности и надежности моделей машинного обучения. Важность аугментации данных обусловлена следующими причинами:

– широкое разнообразие: методы аугментации данных вносят разнообразие в набор обучающих данных за счет создания новых, измененных версий существующих данных. Такое разнообразие помогает моделям машинного и глубокого обучения лучше обобщать невидимые данные и снижает риск переобучения. Модели, обученные на более разнообразных данных, зачастую надежнее и с меньшей вероятностью дают неправильные прогнозы;

– улучшенная генерализация модели: аугментация данных обеспечивает более широкое представление основного распределения данных, позволяя моделям охватывать более широкий спектр закономерностей и вариаций. В результате создаются модели, которые лучше адаптированы к реальным сценариям, где данные могут сильно различаться;

– решение проблемы нехватки данных: во многих реальных приложениях, особенно в сфере электронной коммерции, получение большого набора размеченных данных может оказаться сложной и дорогостоящей задачей. Аугментация данных позволяет специалистам искусственно увеличивать размер своего набора данных, что делает более целесообразным обучение сложных моделей, даже если данных недостаточно;

– уменьшение систематической ошибки: аугментация данных может уменьшить систематическую ошибку в обучающих данных. Путем расширения выборок для недостаточно представленных классов можно сбалансировать набор данных и гарантировать, что модель не отдаст предпочтение классу большинства, что приводит к более справедливым и точным прогнозам;

– сохранение конфиденциальности: в ситуациях, когда существует ограничение доступа к конфиденциальным данным, можно использовать аугментацию данных для создания синтетических данных, которые сохраняют статистические свойства исходных данных, одновременно защищая оригинальные данные;

– регуляризация: аугментация служит формой регуляризации, не позволяя моделям запоминать обучающие данные, представляя их в различных вариациях. Это помогает предотвратить переобучение, когда модель хорошо работает на обучающих, но плохо на тестовых данных;

– трансферное обучение: аугментация имеет важное значение в сценариях трансферного обучения. Предварительно обученные модели можно точно настроить для новой задачи с помощью аугментированных данных, что позволяет им адаптироваться к конкретным нюансам новой проблемы, извлекая при этом пользу из знаний, полученных из исходных данных;

– реалистичное тестирование: аугментация также можно использовать для создания расширенных тестовых данных, что важно для оценки надежности и производительности модели в реальных сценариях, особенно в сфере электронной коммерции, где количество продуктов постоянно увеличивается.

Решение проблемы нехватки данных в сфере электронной коммерции позволяет малому бизнесу развиваться быстрее и быть более конкурентоспособным. С научной точки зрения аугментация открывает широкий спектр возможных применений.

В данной статье демонстрируется новый метод аугментации изображений электронной коммерции: аугментация производится за счет сегментации изображения, замены фона, генерации тени и добавления логотипа. Построенный метод аугментации подходит для задач распознавания изображений электронной коммерции при создании каталога товаров.

Суть этой инновации заключается в разработке интеллектуальной системы аугментации данных, предназначенной для повышения производительности нейронной сети за счет обогащения ее набора обучающих данных. Возможности этой системы выходят за рамки традиционных подходов к аугментации, поскольку она позволяет нейронной сети воспринимать изображения продуктов на разном фоне, в различных условиях освещения и во множестве контекстных настроек.

В работе предлагается метод аугментации данных для распознавания изображений товаров электронной коммерции на основе сверточных нейронных сетей. На основе данного метода создана система, которая позволяет пользователю создавать аугментированные изображения путем изменения фона изображений, а также добавлять к изображениям различные тени и наклейки или надписи. Система способна готовить изображения для задач распознавания изображений, таких как обнаружение и сегментация изображений в электронной коммерции. Среднее время вычислений для генерации одного кадра составляет 1,2 с.

Анализ существующих подходов. Визуальная привлекательность изображений товаров электронной коммерции играет важную роль в привлечении и удержании клиентов. В нескольких исследованиях для улучшения изображений продуктов использовались методы аугментации изображений. Классическая аугментация включает горизонтальное и вертикальное вращение, масштабирование и настройку цвета [1]. Такие методы не только улучшают визуальную эстетику изображений продуктов, но и дополняют набор обучающих данных, в результате чего модели становятся более устойчивыми к изменениям освещения, ориентации и фона. Однако традиционные методы увеличения данных недостаточны в сфере электронной коммерции из-за ее специфики.

Для сферы электронной коммерции характерны две основные проблемы, связанные с данными: проблема дисбаланса классов, обычно называемая «проблемой длинного хвоста» и проблема корректной аугментации данных для подготовки электронного каталога. В зависимости от типа проблемы существуют различные техники ее устранения. Так, например, для решения проблемы дисбаланса классов в [2] был предложен метод, который динамически балансирует положительные и отрицательные градиенты выборки для каждой категории, уменьшая дисбаланс классов. Однако для его оптимальной производительности нужна точная настройка гиперпараметров. Также алгоритм не может полностью устранить дисбаланс классов в крайне несбалансированных наборах данных. Предложенный в [3] метод эффективно снижает конкуренцию между редкими и частыми категориями, группируя их в непересекающиеся наборы, но может работать неоптимально, если категории естественным образом не делятся на четко определенные группы. Исследования [4; 5] предлагают техники сосредоточивания на редких категориях, при этом требуя точной настройки параметров, не гарантируя совместимость с определенными архитектурами нейронных сетей. Для решения задачи аугментации данных используются техники MixUp [6], CopyPaste [7] и CutOut [8]: MixUp увеличивает разнообразие наборов данных за счет смешивания двух изображений, уменьшая переобучение, но может привести к появлению артефактов на изображениях; CopyPaste добавляет разнообразие, случайным образом вставляя логотипы или элементы с одного изображения на другое, однако необходим тщательный контроль процесса вставки, чтобы избежать нестыковок; CutOut вводит окклюзии и побуждает модель учиться на частичной информации, при этом может удалить важную информацию с изображений.

Подводя итог, следует отметить, что представленные методы обладают определенными преимуществами в устранении классового дисбаланса и увеличении разнообразия наборов данных. Однако их эффективность может зависеть от конкретного набора данных и решаемой задачи. Также для достижения оптимальных результатов может потребоваться тщательная настройка параметров. Кроме того, некоторые методы могут потребовать компромисса между улучшенным балансом и потенциальными недостатками, такими как увеличение времени обучения или сложность модели.

Предложенный нами метод позволяет генерировать аугментированные данные непосредственно для сферы электронной коммерции (метод позволяет автоматически создать новое изображение на основе оригинального при помощи изменения фона, добавления теней и логотипов), учитывая ее специфику, при этом соблюдая баланс времени обучения и сложности модели, что выделяет его среди существующих подходов.

Метод. В ходе исследования был разработан метод, позволяющий автоматически генерировать аугментированные изображения без привлечения человеческих ресурсов. Он включает в себя следующие компоненты:

- модуль сегментации;
- модуль определения доминирующего цвета;
- модуль удаления и замены фона;
- модуль генерации теней;
- модуль добавления наклейки/надписи (логотипа).

Схема построенного метода аугментации показана на рисунке 1.

Рисунок 1. – Схема метода аугментации



На вход алгоритма поступает оригинальное RGB-изображение. На первом этапе происходит сегментация изображения, выделенный объект далее передается на вход модуля определения доминантного цвета и модуля замены фона. Определение доминантного цвета необходимо, чтобы при замене фона избежать ситуации, когда объект полностью с ним сливается. Затем происходит генерация одного из трех типов тени: зеркальной, падающей или реалистичной. В конце на полученное изображение добавляется логотип.

Модуль сегментации. В начале производится сегментация изображения, в результате чего выделяются передний и задний планы. За это отвечает реализованный нами алгоритм на основе нейронной сети YOLACT и стандартизации весов, подробное описание которого представлено в [9]. Обучение модели было направлено на распознавание 21 класса объектов электронной коммерции. Стандартизация весов использовалась в сверточных слоях при прямом проходе обучения нейронной сети.

Модуль определения доминирующего цвета. После получения сегментированного изображения для полученного объекта определяется его доминантный цвет. Для этого используется метод k-means – алгоритм обучения без учителя для кластеризации данных в K кластеров. Идея метода заключается в минимизации суммарного квадратичного отклонения точек кластеров от центров этих кластеров. Конечным результатом является определение K доминирующих цветов в изображении, представленных K центроидами кластера. При подборе правильного значения K центр тяжести самого большого кластера будет довольно хорошим представлением доминирующего цвета изображения.

Модуль удаления и замены фона. Данный модуль представляет собой сочетание 2 методов: метода удаления фона и метода его замены.

Удаление фона происходит с помощью альфа-смешивания: объект переднего плана совмещается с прозрачным фоном на основе альфа-маски. Формула альфа-смешивания объединяет цвета изображения переднего плана (F) и фона (B) на основе их значений альфа.

Результирующий цвет (C) рассчитывается по формуле

$$C = \alpha * F + (1 - \alpha) * B.$$

Система предлагает 3 варианта замены фона:

– сплошная заливка: замена фона сплошным цветом или градиентом. Цвет нового фона выбирается случайным образом, однако не совпадает с доминантным цветом сегментированного объекта;

– замена на основе текстуры: наложение сегментированного объекта на определенную текстуру. В системе представлено более 30 различных текстур;

– композиция изображения: объединение объекта переднего плана с новым фоном путем альфа-смешивания.

Модуль генерации теней. Представляет собой алгоритм, позволяющий генерировать зеркальную, падающую и реалистичную тени. Алгоритмы зеркальной и падающей теней реализованы при помощи методов компьютерного зрения, позволяющих придавать теням мягкость, моделируя полутень (область, где тень переходит от полностью освещенной к полностью затененной), а также использующих различные методы сглаживания, чтобы уменьшить неровные края и улучшить общее качество теней и отражений.

Метод генерации реалистичной тени основан на нашем исследовании [10], где предлагается новый подход для генерации двумерных теней в сфере электронной коммерции. Идея метода – при использовании глубокой нейронной сети, модифицированной моделью трансформера, извлечь структурную информацию из изображений и преобразовать карты признаков нижнего уровня. Представленный алгоритм показал при тестировании улучшение точности и качества генерируемых теней в сравнении с существующими подходами.

Модуль добавления наклейки/надписи (логотипа). Данный модуль принимает на вход RGB-изображение с замененным фоном и сгенерированной тенью, логотип (надпись), а также координаты расположения объекта внутри фона на основе его сегментации. Далее происходит совмещение изображения с логотипом таким образом, что он не перекрывает основной объект, в результате чего формируется высококачественное сегментированное изображение.

Результаты. В ходе исследования была разработана система аугментации данных, позволяющая автоматически генерировать изображения, удовлетворяющие критериям сферы электронной коммерции. Пример аугментированного изображения представлен на рисунке 2. Для данного примера в настройках системы были выбраны изображение утюга на сером градиентном фоне, новый фон в виде сцены со светом, логотип и эффект зеркальной тени. Алгоритм автоматически произвел сегментацию изображения и замену фона, сгенерировал зеркальную тень и добавил логотип, не перекрывая сам объект.

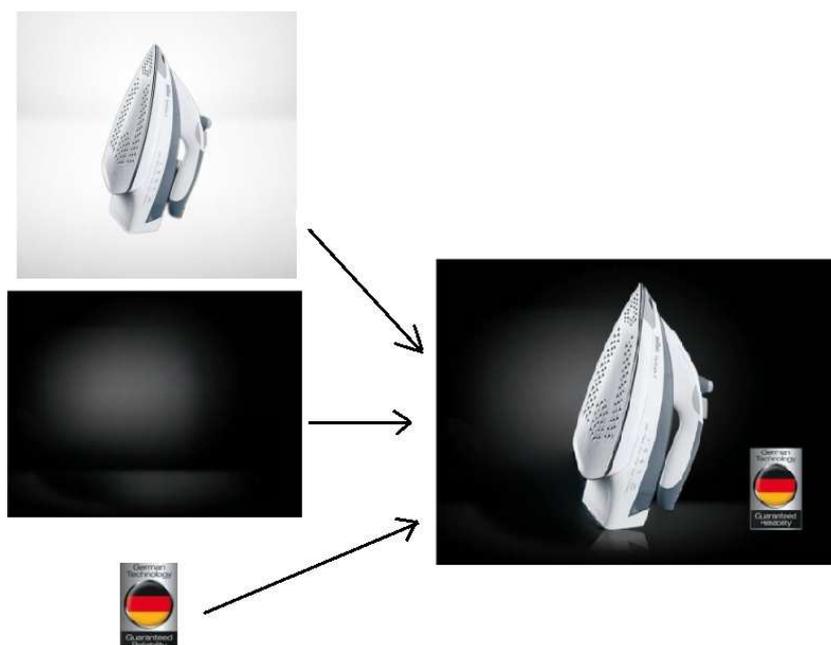


Рисунок 2. – Аугментированное изображение

Для проверки качества аугментации система была протестирована при решении задачи сегментации с использованием простой модели на изначально небольшом наборе данных:

1. Модель: для этого исследования была выбрана архитектура U-Net [11]. U-Net хорошо подходит для задач сегментации изображений, что делает ее подходящим кандидатом для оценки эффективности аугментации данных в контексте изображений продуктов электронной коммерции.

2. Собственный набор данных [9]:

– базовый: собственный набор изображений товаров электронной коммерции, включающий 1500 изображений, а также маски сегментации на уровне пикселей для каждой категории товаров;

– аугментированный при помощи построенной системы набор данных на основе базового.

3. Оценка: обученная модель оценивается на отдельном тестовом наборе.

4. Метрики сравнения:

- точность: общая точность сегментации в тестовом наборе данных;
- IoU (пересечение над объединением): измеряет перекрытие между предсказанными и реальными масками;
- mAP (средняя точность): оценивает производительность обнаружения и сегментации объектов модели;
- время сходимости;
- время обучения.

Стратегия обучения модели: обучить U-Net при одинаковой предобработке данных на базовом и аугментированном наборах данных.

5. Добавить новый модуль сегментации в предварительно обученную модель Mask R-CNN.

Результаты:

1. Обучение на базовом наборе:

- точность: 85 %;
- IoU: 0,72;
- mAP: 0,78;
- время сходимости: 150 эпох;
- время обучения: 4 часа.

2. Обучение на аугментированном наборе:

- точность: 92 %;
- IoU: 0,85;
- mAP: 0,89;
- время сходимости: 120 эпох;
- время обучения: 5 часов.

Результаты показывают, что предложенный метод аугментации данных оказывает положительное влияние на качество распознавания изображений электронной коммерции с помощью модели U-Net, обеспечивая более высокую точность и более быструю сходимость. Компромисс в виде немного более длительного времени обучения оправдан улучшенным качеством распознавания.

Заключение. Решение таких задач, как сегментация изображений, определение основного цвета, генерация теней позволило создать технологию распознавания с помощью аугментации данных, что может быть использовано как для повышения качества обучаемых моделей и улучшения качества распознавания изображений электронной коммерции, так и для автоматической подготовки изображений для электронного каталога товаров. Данная технология была протестирована при решении задачи сегментации изображений товаров электронной коммерции и показала улучшение точности и качества модели вместе с более быстрой сходимостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shorten C., Khoshgoftaar T. M. A survey on Image Data Augmentation for Deep Learning // J. of Big Data. – 2019. – Vol. 6:60. – DOI: [10.1186/s40537-019-0197-0](https://doi.org/10.1186/s40537-019-0197-0).
2. Wang, J., Zhang, W., Zang, Y. et al. Seesaw Loss for Long-Tailed Instance Segmentation // 2021 IEEE/CVF Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), Nashville, TN, USA, 20–25 June 2021. – P. 9690–9699. – DOI: [10.1109/CVPR46437.2021.00957](https://doi.org/10.1109/CVPR46437.2021.00957).
3. Li Y., Wang T., Kang B. et al. Overcoming Classifier Imbalance for Long-Tail Object Detection with Balanced Group Softmax // 2020 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), Seattle, WA, USA, 13–19 June 2020. – P. 10988–10997. – DOI: [10.1109/CVPR42600.2020.01100](https://doi.org/10.1109/CVPR42600.2020.01100).
4. Tan J., Lu X., Zhang G. et al. Equalization Loss v2: A New Gradient Balance Approach for Long-tailed Object Detection // 2021 IEEE/CVF Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), Nashville, TN, USA, 20–25 June 2021. – P. 1685–1694. – DOI: [10.1109/CVPR46437.2021.00173](https://doi.org/10.1109/CVPR46437.2021.00173).
5. Esposito, C., Landrum, G. A., Schneider N. et al. GHOST: Adjusting the Decision Threshold to Handle Imbalanced Data in Machine Learning // J. Chem. Inf. Model. – 2021. – Vol. 61, iss. 6. – P. 2623–2640. – DOI: [10.1021/acs.jcim.1c00160](https://doi.org/10.1021/acs.jcim.1c00160).
6. Chen Y., Hu V. T., Gavves E. et al. PointMixup: Augmentation for Point Clouds // ECCV 2020. Lecture Notes in Computer Science. – 2020. – Vol. 12348. P. 330–345. – DOI: [10.1007/978-3-030-58580-8_20](https://doi.org/10.1007/978-3-030-58580-8_20).
7. Ghiasi G., Cui, Y., Srinivas, A. et al. Simple Copy-Paste is a Strong Data Augmentation Method for Instance Segmentation // 2021 IEEE/CVF Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), Nashville, TN, USA, 20–25 June 2021. – P. 2917–2927. – DOI: [10.1109/CVPR46437.2021.00294](https://doi.org/10.1109/CVPR46437.2021.00294).
8. Devries, T., Taylor, G. W. Improved Regularization of Convolutional Neural Networks with Cutout // ArXiv. – 2017. – Vol. 1708.04552. – DOI: [10.48550/arXiv.1708.04552](https://doi.org/10.48550/arXiv.1708.04552).
9. V. Sorokina, S. Ablameyko Neural network training acceleration by weight standardization in segmentation of electronic commerce images // Reliability Engineering and Computational Intelligence. Studies in Computational Intelligence. – 2021. – Vol. 976. – P. 237–244. – DOI: [10.1007/978-3-030-74556-1_14](https://doi.org/10.1007/978-3-030-74556-1_14).

10. Sorokina V., Ablameyko S. 2D Cast Shadow Generation in E-commerce Image Using UNet Vision Transformer // 2023 Intern. Conf. on Information and Digital Technologies, Zilina, Slovakia, 20–22 June 2023. – P. 33–36. – DOI: [10.1109/IDT59031.2023.10194446](https://doi.org/10.1109/IDT59031.2023.10194446).
11. Ronneberger O., Fischer P., Brox T. U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation // Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention. – 2015. – Vol. 9351. – P. 234–241. – DOI: [10.1007/978-3-319-24574-4_28](https://doi.org/10.1007/978-3-319-24574-4_28).

REFERENCES

1. Shorten, C., Khoshgoftaar, T. M. (2019). A survey on Image Data Augmentation for Deep Learning. *Journal of Big Data*, (6), 60. DOI: [10.1186/s40537-019-0197-0](https://doi.org/10.1186/s40537-019-0197-0).
2. Wang, J., Zhang, W., Zang, Y., Cao, Y., Pang, J., Gong, T., ... Lin, D. (2021). Seesaw Loss for Long-Tailed Instance Segmentation. In *2021 IEEE/CVF Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)* (9690–9699). IEEE. DOI: [10.1109/CVPR46437.2021.00957](https://doi.org/10.1109/CVPR46437.2021.00957).
3. Li, Y., Wang, T., Kang, B., Tang, S., Wang, C., Li, J., & Feng, J. (2020). Overcoming Classifier Imbalance for Long-Tail Object Detection with Balanced Group Softmax. In *2020 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)* (10988–10997). IEEE. DOI: [10.1109/CVPR42600.2020.01100](https://doi.org/10.1109/CVPR42600.2020.01100).
4. Tan, J., Lu, X., Zhang, G., Yin, C., & Li, Q. (2020). Equalization Loss v2: A New Gradient Balance Approach for Long-tailed Object Detection. In *2021 IEEE/CVF Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)* (1685–1694). IEEE. DOI: [10.1109/CVPR46437.2021.00173](https://doi.org/10.1109/CVPR46437.2021.00173).
5. Esposito, C., Landrum, G. A., Schneider N., Stiefl N., & Riniker, S. (2021). GHOST: Adjusting the Decision Threshold to Handle Imbalanced Data in Machine Learning. *J. Chem. Inf. Model.*, 61(6), 2623–2640. DOI: [10.1021/acs.jcim.1c00160](https://doi.org/10.1021/acs.jcim.1c00160).
6. Chen, Y., Hu, V. T., Gavves, E., Mensink, T., Mettes, P., Yang, P. & Snoek C. G. M. (2020). PointMixup: Augmentation for Point Clouds. In A. Vedaldi, H. Bischof, T. Brox, & J. M. Frahm (Eds.), *Computer Vision – ECCV 2020. ECCV 2020. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 12348 (330–345). Springer, Cham. DOI: [10.1007/978-3-030-58580-8_20](https://doi.org/10.1007/978-3-030-58580-8_20).
7. Ghiasi G., Cui, Y., Srinivas, A., Qian, R., Lin, T.-Y., Cubuk, E. D., ... Zoph, B. (2021). Simple Copy-Paste is a Strong Data Augmentation Method for Instance Segmentation. In *2021 IEEE/CVF Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)* (2917–2927). IEEE. DOI: [10.1109/CVPR46437.2021.00294](https://doi.org/10.1109/CVPR46437.2021.00294).
8. Devries, T., & Taylor, G. W. (2017). Improved Regularization of Convolutional Neural Networks with Cutout. *ArXiv*, (1708.04552). DOI: [10.48550/arXiv.1708.04552](https://doi.org/10.48550/arXiv.1708.04552).
9. Sorokina, V., & Ablameyko, S. (2021). Neural Network Training Acceleration by Weight Standardization in Segmentation of Electronic Commerce Images. In C. van Gulijk, & E. Zaitseva (Eds.), *Reliability Engineering and Computational Intelligence. Studies in Computational Intelligence: Vol. 976* (237–244). Springer, Cham. DOI: [10.1007/978-3-030-74556-1_14](https://doi.org/10.1007/978-3-030-74556-1_14).
10. Sorokina, V., & Ablameyko, S. (2023). 2D Cast Shadow Generation in E-commerce Image Using UNet Vision Transformer. In *2023 International Conference on Information and Digital Technologies (IDT)* (31–36). IEEE. DOI: [10.1109/IDT59031.2023.10194446](https://doi.org/10.1109/IDT59031.2023.10194446).
11. Ronneberger, O., Fischer, P., Brox, T. (2015). U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation. In N. Navab, J. Hornegger, W. Wells, & A. Frangi (Eds.), *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention – MICCAI 2015. MICCAI 2015. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 9351* (234–241). Springer, Cham. DOI: [10.1007/978-3-319-24574-4_28](https://doi.org/10.1007/978-3-319-24574-4_28).

Поступила 23.10.2023

DATA AUGMENTATION METHOD TO IMPROVE THE QUALITY OF E-COMMERCE IMAGE RECOGNITION

V. SOROKINA¹, S. ABLAMEYKO^{1,2}

¹(Belarusian State University, Minsk)

²(United Institute of Informatics Problems of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk)

In the rapidly evolving landscape of e-commerce, the visual representation of products plays a pivotal role in engaging consumers and driving conversion rates. This article introduces a new approach for image augmentation that includes objects segmentation, dominant color determination, background replacement and realistic shadow generation. These steps collectively contribute to the creation of augmented images that are used not only in the electronic catalogues but enrich abilities of the neural networks with various and fortified training data. Developed system allows to solve problems related to class imbalance and to enhance model generalization as well as to improve the quality of recognition.

Keywords: convolutional neural network, image recognition, segmentation, shadow generation, e-commerce.

ЭЛЕКТРОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ УСТАНОВКИ (ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ)

УДК 541.183

DOI 10.52928/2070-1624-2023-41-2-35-41

ПРОЧНОСТНЫЕ СВОЙСТВА ОБЛУЧЕННЫХ ЭЛЕКТРОНАМИ ПЛЕНОК НЕГАТИВНЫХ НОВОЛАЧНЫХ ФОТОРЕЗИСТОВ НА МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ КРЕМНИИ

канд. физ.-мат. наук, доц. С. А. ВАБИЩЕВИЧ, Н. В. ВАБИЩЕВИЧ
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой);

канд. физ.-мат. наук Д. И. БРИНКЕВИЧ, канд. физ.-мат. наук, доц. В. С. ПРОСОЛОВИЧ
(Белорусский государственный университет, Минск);

канд. техн. наук В. В. КОЛОС, О. А. ЗУБОВА
(ОАО «ИНТЕГРАЛ» – управляющая компания холдинга «ИНТЕГРАЛ», Минск)

Исследованы адгезионные и прочностные свойства облученных электронами пленок фоторезиста для взрывной литографии NFR 016D4, нанесенных на поверхность пластин монокристаллического кремния марки КДБ-10 методом центрифугирования. Экспериментально установлено, что облучение электронами приводит к короблению и частичному отслоению пленки фоторезиста NFR 016D4 от кремниевой подложки. Облученные пленки фоторезиста ведут себя как хрупкие материалы. Наблюдалось существенное снижение трещиностойкости и адгезии к кремниевой подложке облученных фоторезистивных пленок, обусловленное радиационно-индуцированными процессами у границы раздела фоторезист/кремний.

Ключевые слова: негативный фоторезист, облучение электронами, микроиндентирование, микротвердость, трещиностойкость, адгезия.

Введение. В современной микроэлектронике все большее распространение получает метод обратной литографии, при котором пленка материала (чаще всего металла) наносится на уже проэкспонированный и протравленный слой фоторезиста (ФР) на подложке [1]. Структура на подложке формируется при удалении неэкспонированных участков ФР вместе с находящейся на них пленкой металла. Оставшаяся на подложке пленка металла полностью повторяет рисунок неэкспонированных областей. Обратная литография применяется при создании металлизации из драгоценных металлов, травление которых обычно является сложной задачей. Одним из главных факторов успешного применения обратной литографии является образование отрицательного угла наклона маски фоторезиста (нависающий профиль боковых стенок). На такие боковые стенки профиля металл не осаждается, что облегчает процесс удаления слоя фоторезиста и обеспечивает гладкость края формируемого элемента. При экспонировании негативного ФР происходит «сшивка» полимеров, в результате чего пленка становится нерастворимой в проявителе. При воздействии электромагнитного излучения верхние слои пленки фоторезиста получают большее количество энергии, чем нижние. Вследствие этого нижние слои пленки будут лучше растворяться в проявителе, что способствует формированию отрицательного угла наклона маски ФР. В качестве пленкообразующего полимера ФР для обратной литографии обычно используют растворимые в водно-щелочном проявителе новолачные смолы, в частности химически усиленные негативные фоторезисты серии NFR (производитель JSR, Токуо, Япон).

Целью настоящей работы являлось исследование методом индентирования прочностных свойств (микротвердость, трещиностойкость, адгезия) облученных электронами пленок фоторезиста NFR 016D4 на пластинах монокристаллического кремния.

Методы исследования. Пленки негативного новолачного фоторезиста NFR 016D4 толщиной 5,2 мкм наносились на поверхность пластин (диаметром 100 мм) монокристаллического кремния марки КДБ-10 с ориентациями (111) методом центрифугирования [2]. В качестве растворителя использовался метил-3-метоксипропилат. После формирования пленки ФР на рабочей стороне пластины проводилась её сушка при температуре 90 °С. Толщина пленок фоторезиста контролировалась с помощью конфокального микроскопа MicroProof по 5 фиксированным точкам, расположенным на двух взаимно перпендикулярных диаметрах на каждой пластине.

Облучение электронами с энергией 5 МэВ выполнялось на линейном ускорителе У-003 дозой $2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$. Плотность электронного пучка составляла $1 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ и контролировалась с помощью цилиндра Фарадея. Температура образцов в процессе облучения не превышала 320 К.

Микроиндентирование проводилось на приборе ПИМТ-3 по стандартной методике при комнатной температуре. В качестве индентора использовался алмазный наконечник в форме четырехгранной пирамиды с квадратным основанием и углом при вершине $\alpha = 136^\circ$. Нагрузка P на индентор варьировалась в пределах 1...50 г. Длительность нагружения составляла 2 с; выдержка под нагрузкой – 5 с. При измерении для каждой экспериментальной точки на поверхность образца наносилось не менее 50 отпечатков. Обработка результатов измерений проводилась с использованием методов математической статистики [3], что обеспечивало погрешность измерений микротвердости H менее 2,5 % с доверительной вероятностью 0,95.

Значения коэффициента вязкости разрушения K_{1C} и эффективной энергии разрушения γ рассчитывались по средней длине радиальных трещин в углах отпечатков согласно следующим формулам [4]:

$$K_{1C} = 0,016 \left(\frac{E}{H} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{P}{L^{\frac{3}{2}}}; \quad (1)$$

$$\gamma = \frac{K_{1C}^2}{2E}, \quad (2)$$

где E – модуль Юнга (для кремния $1,5 \cdot 10^{11}$ Па);

L – длина трещины.

Погрешность измерений не превышала 8 %.

Удельная энергия отслаивания пленок G рассчитывалась по формуле (3), широко используемой для исследования различных полимерных пленок на стеклянных подложках [5]:

$$G = \frac{0,627 H^2 h (1 - \nu^2)}{E (1 + \nu + 2(1 - \nu) H l^2 / P)^2}, \quad (3)$$

где h – толщина пленки;

ν – коэффициент Пуассона (использовалось значение 0,3);

E – модуль Юнга (для исследовавшейся пленки 8 ГПа);

P – нагрузка на индентор;

l – длина трещины расслоения.

Экспериментальные результаты и их обсуждение. Фотография поверхности облученной электронами пленки фоторезиста NFR 016D4 представлена на рисунке 1. Облучение электронами привело к короблению и частичному отслоению пленки от подложки. Светлые пятна на фотографии – это места отрыва пленки от подложки; видна поверхность кремния, имеющая светло-серый цвет. Коробление и последующее отслоение пленки вероятнее всего связано с релаксацией упругих напряжений, возникающих у границы раздела фоторезист/кремний в процессе формирования пленки и ее облучения.

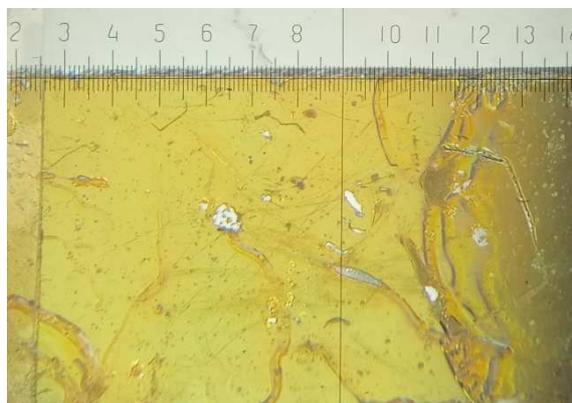


Рисунок 1. – Фотография поверхности облученной электронами дозой $2 \cdot 10^{15}$ см⁻² пленки фоторезиста NFR 016D4 на кремнии при 20-кратном увеличении. Толщина пленки 5,2 мкм

Отпечатки индентора в облученных пленках фоторезиста NFR 016D4 представлены на рисунке 2. В отличие от исходных (необлученных) пленок [2] восстановление отпечатков индентора после снятия

нагрузки при минимальных нагрузках 1 г было выражено слабо. Облученные пленки ФР ведут себя как хрупкие материалы [6]. Вокруг отпечатков наблюдаются интерференционные полосы (рисунок 2, б), обусловленные интерференцией в клине, который образуется в области навалов. На нагрузках 1–5 г наблюдаются существенные разбросы величин диагонали отпечатков и размеров зоны разрушения (20–25 %) вокруг отпечатка, что свидетельствует о неоднородности фоторезистивной пленки. Трещины в углах отпечатков наблюдались на всех нагрузках (рисунок 2, а и б). При нагрузке более 5 г радиальные трещины замыкаются и вокруг отпечатков формируются отслоения от подложки в виде «бабочек» (рисунок 2, а), размеры которых увеличиваются при повышении нагрузки. При этом наблюдается частичное отслоение пленки от кремниевой подложки (светлое пятно на рисунке 2, а). Отметим, что размеры отколов заметно возрастали после облучения. В центре отпечатка при нагрузках свыше 20 г появляется светлый квадрат (рисунок 2, а), что свидетельствует о проникновении индентора в кремниевую подложку.

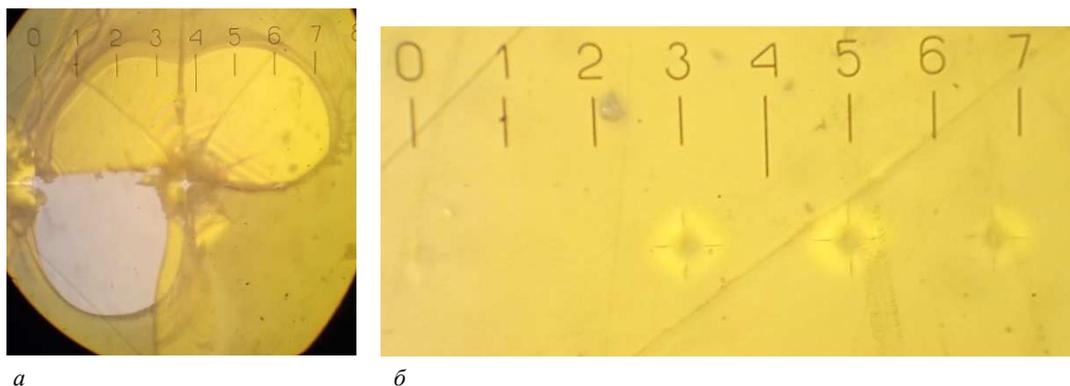


Рисунок 2. – Отпечатки микроиндентора на облученной пленке фоторезиста NFR 016D4 толщиной 5,2 мкм при нагрузках 50 г (а) и 5 г (б)

Зависимости от нагрузки микротвердости исследованных структур фоторезист/кремний представлены на рисунке 3. Когда глубина проникновения индентора не превышает толщины пленки (при нагрузках 5–20 г), значения микротвердости постоянны и соответствуют истинной микротвердости фоторезиста ~0,3 ГПа. При нагрузке 50 г индентор достигает границы раздела фоторезист/кремний и начинает сказываться влияние твердой подложки (микротвердость кремния ~9 ГПа). Это приводит резкому росту значений измеренной микротвердости, который наиболее заметен в облученных пленках (см. рисунок 3, кривая 2). Отметим, что при малых нагрузках (1–2 г) наблюдались существенные (до 20 %) разбросы значений микротвердости, обусловленные неоднородностью (вероятнее всего, неомогенностью, хотя нельзя исключить и формирование мезофаз) пленки [7]. После облучения наблюдалось увеличение полуширины случайного распределения величин микротвердости, что, вероятнее всего, обусловлено формированием при электронном облучении неоднородных полей упругих напряжений вследствие сокращения объема пор внутри полимерной пленки [8]. Это в свою очередь должно приводить к уменьшению объема полимера и, соответственно, к уменьшению толщины полимерной пленки и формированию дополнительных упругих напряжений на границе раздела фоторезист/кремний. Уменьшение толщины полимерной пленки при электронном облучении обуславливает также рост значений микротвердости в облученной пленке при нагрузке 50 г, поскольку при этой нагрузке индентор в облученных структурах проникает в кремниевую подложку на большую глубину, чем в исходных структурах. Увеличение при облучении разброса значений микротвердости, измеренных при нагрузках 1–2 г, обусловлено, вероятнее всего, радиационно-индуцированной модификацией морфологии поверхности диазохинон-новолачного фоторезиста, выражающейся в формировании неравномерно распределенных по поверхности полимера конусообразных структур и увеличении его шероховатости [9].

После облучения длина радиальных трещин у отпечатков индентора резко возрастает. Длина трещин в облученных пленках достигала 70–120 мкм, причем наблюдалось частичное отслоение фоторезиста от кремния. Радиальные трещины наблюдались при всех нагрузках, вплоть до 1 г (см. рисунок 1). Таким образом, при электронном облучении наблюдалось существенное снижение трещиностойкости фоторезистивных пленок. Зависимости от нагрузки параметров трещиностойкости (коэффициента вязкости разрушения K_{1C} и эффективной энергии разрушения γ) представлены на рисунках 4 и 5. Трещиностойкость облученных пленок была ниже, чем у исходных при всех нагрузках. Наиболее существенные отличия между исходными и облученными пленками ФР наблюдались при нагрузках ≥ 10 г, когда индентор приближается к подложке и начинает сказываться влияние границы раздела фоторезист/кремний. При нагрузках 1–5 г оба параметра трещиностойкости возрастают (рисунки 4, 5). Однако при дальнейшем увеличении нагрузки в облученной

пленке ФР оба параметра трещиностойкости немного снижаются и выходят на насыщение. В исходных пленках рост трещиностойкости хотя и замедляется, но продолжается (рисунки 4, 5). Отметим, что ранее [10] снижение коэффициента вязкости разрушения K_{IC} наблюдалось при γ -облучении диазохинон-новолачных фоторезистов ФП9120.

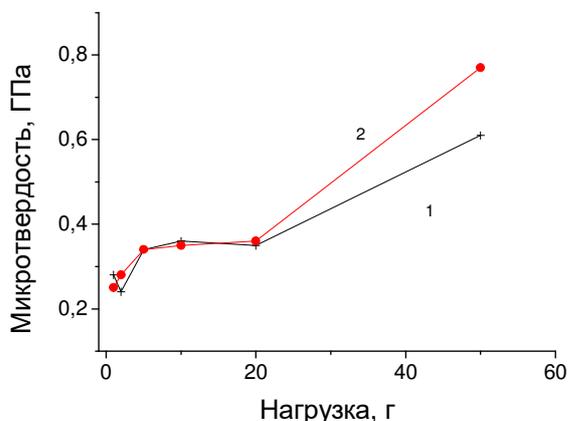


Рисунок 3. – Зависимость от нагрузки микротвердости исходной (1) и облученной (2) дозой $2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$ пленок негативного фоторезиста NFR 016D4 толщиной 5,2 мкм

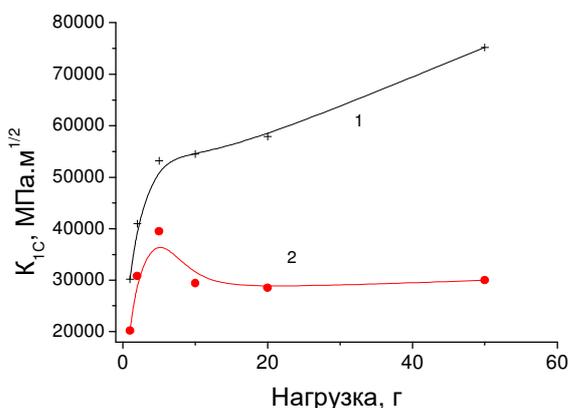


Рисунок 4. – Зависимость от нагрузки коэффициента вязкости разрушения K_{IC} исходной (1) и облученной (2) дозой $2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$ пленок негативного фоторезиста NFR 016D4 толщиной 5,2 мкм

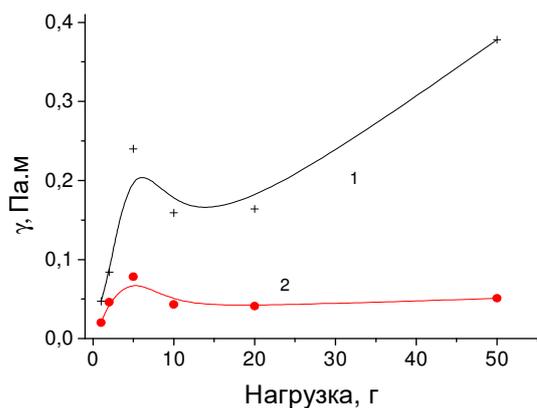
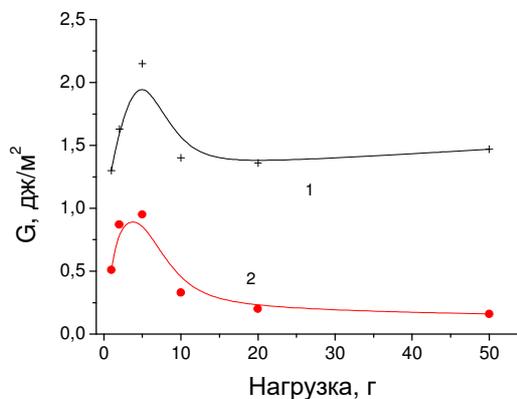


Рисунок 5. – Зависимость эффективной энергии разрушения γ от нагрузки исходной (1) и облученной (2) дозой $2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$ пленок негативного фоторезиста NFR 016D4 толщиной 5,2 мкм

Приведенные выше экспериментальные данные указывают на существенное влияние электронного облучения на свойства границы раздела фоторезист/кремний, что приводит к снижению трещиностойкости фоторезистивных пленок NFR 016D4 на кремнии при больших нагрузках. Адгезионные свойства полимерной пленки характеризуются таким параметром, как удельная энергии отслаивания G . Зависимости G от нагрузки для исходных и облученных пленок приведены на рисунке 6. В исходной пленке (рисунок 6, кривая 1) величина G слабо растет при нагрузках 1–5 г, а затем снижается и выходит на постоянное значение $\sim 1,35 \text{ Дж/м}^2$. Отметим, что величина удельной энергии отслаивания G при нормальной нагрузке для положительного фоторезиста ФП9120 составляла $\sim 0,3 \text{ Дж/м}^2$ [11], что в ~ 4 раза ниже значений G для фоторезиста NFR 016D4, полученных в настоящей работе. В облученной пленке характер зависимости G от нагрузки

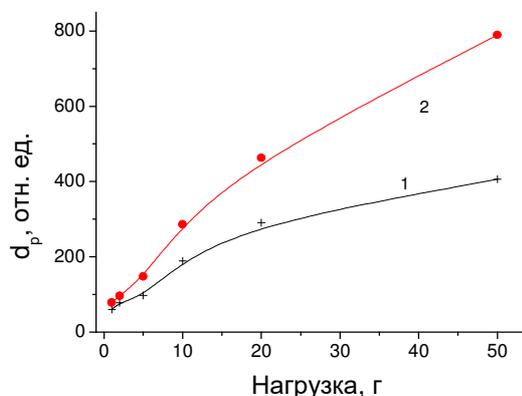
аналогичен исходной пленке, однако значения G в ~ 7 раз ниже, чем в исходной пленке. Так, при нагрузке 50 г в облученной пленке $G = 0,16$ Дж/м² и продолжало снижаться. Ранее [12–15] аналогичный эффект снижения адгезии наблюдался в диазохинон-новолачных фоторезистах ФП9120 при γ -облучении и имплантации Sb^+ .

Рисунок 6. – Зависимость удельной энергии отслаивания G от нагрузки исходной (1) и облученной (2) дозой $2 \cdot 10^{15}$ см⁻² пленок негативного фоторезиста NFR 016D4 толщиной 5,2 мкм



Вокруг отпечатков индентора наблюдалась деформация структуры полимерного фоторезиста (светлый «ареол» на рисунке 2, б), которая при больших нагрузках приводила к разрушению пленки (см. рисунок 2, а). На рисунке 7 приведены зависимости от нагрузки среднего диаметра деформации/разрушения d_p вокруг отпечатка в исходной (кривая 1) и облученной (кривая 2) пленках негативного фоторезиста NFR 016D4. Значения d_p возрастают при увеличении нагрузки. Кривые зависимости от нагрузки среднего диаметра разрушения d_p для исходной пленки имеют тенденцию к насыщению (рисунок 7, кривая 1). Однако в облученных пленках такой тенденции в использованном диапазоне нагрузок не наблюдается – сохраняется близкая к линейной зависимость d_p от нагрузки (рисунок 7, кривая 2).

Рисунок 7. – Зависимость от нагрузки среднего диаметра деформации/разрушения d_p вокруг отпечатка в исходной (1) и облученной (2) дозой $2 \cdot 10^{15}$ см⁻² пленках негативного фоторезиста NFR 016D4 толщиной 5,2 мкм



Приведенные выше экспериментальные результаты по влиянию электронного облучения на адгезионные свойства и параметры трещинообразования в пленках негативного фоторезиста NFR 016D4 на кремнии обусловлены формированием упругих напряжений на границе раздела фоторезист/кремний вследствие сокращения объема пор внутри полимерной пленки [8].

Заключение. Таким образом, экспериментально установлено, что облучение электронами приводит к короблению и частичному отслоению пленки фоторезиста NFR 016D4 от кремниевой подложки. Облученные пленки ФР ведут себя как хрупкие материалы. Наблюдалось существенное снижение трещиностойкости облученных фоторезистивных пленок и их адгезии к кремниевой подложке. Полученные экспериментальные результаты объяснены формированием при электронном облучении неоднородных полей упругих напряжений вследствие сокращения объема пор внутри полимерной пленки, что в свою очередь приводит к уменьшению объема полимерной пленки и, соответственно, к уменьшению толщины полимерной пленки. Это обуславливает формирование дополнительных упругих напряжений на границе раздела фоторезист/кремний, которые ухудшают адгезионные и прочностные свойства фоторезистивных пленок NFR 016D4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cheung K. M., Stemer D. M., Zhao C. et al. Chemical Lift-Off Lithography of Metal and Semiconductor Surfaces // *ACS Materials Lett.* – 2020. – Vol. 2, iss. 1 – P. 76–83. – DOI: [10.1021/acsmaterialslett.9b00438](https://doi.org/10.1021/acsmaterialslett.9b00438).
2. Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Бринкевич Д. И. и др. Прочностные свойства фоторезистов для взрывной литографии // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки.* – 2022. – № 4. – С. 49–55. DOI: [10.52928/2070-1624-2022-38-4-49-55](https://doi.org/10.52928/2070-1624-2022-38-4-49-55).
3. Бринкевич Д. И., Вабищевич Н. В., Вабищевич С. А. Физико-механические свойства эпитаксиальных слоев фосфида галлия // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки.* – 2010. – № 9. – С. 92–97.
4. Колесников, Ю. В., Морозов Е. М. Механика контактного разрушения. – М.: Наука, 1989. – 220 с.
5. Malzbender J., den Toonder J. M. J., Balkenende A. R., de With G. Measuring mechanical properties of coatings: a methodology applied to nano-particle-filled sol-gel coatings on glass // *Materials Science and Engineering: R: Reports.* – 2002. – Vol. 36, iss. 2–3. – P. 47–103. – DOI: [10.1016/S0927-796X\(01\)00040-7](https://doi.org/10.1016/S0927-796X(01)00040-7).
6. Бринкевич Д. И., Вабищевич С. А., Петлицкий А. Н. и др. Дефекты упаковки, микротвердость и микрохрупкость в пластинах кремния, обусловленные термообработкой // *Материалы, технологии, инструменты.* – 2006. – Т. 11, № 1. – С. 48–50.
7. Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Бринкевич Д. И. и др. Микротвердость пленок сополимеров на основе метилметакрилата, облученных γ -квантами // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки.* – 2016. – № 12. – С. 51–57.
8. Малик Б., Паниграхи С. Влияние облучения протонами с энергией порядка нескольких МэВ на сечение аморфизации полимера // *Прикладная физика.* – 2012. – № 1. – С. 20–25.
9. Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Бринкевич Д. И. и др. Прочностные свойства структур фоторезист – кремний, γ -облученных и имплантированных ионами V^+ и P^+ // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки.* – 2016. – № 12. – С. 30–36.
10. Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Бринкевич Д. И. и др. Трещиностойкость пленок диазохинон-новолачного резиста на пластинах монокристаллического кремния // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки.* – 2021. – № 4. – С. 64–69.
11. Vabishchevich S., Brinkevich S., Prosolovich V. et al. Effect of Ion Implantation on the Adhesion of Positive Diazoquinone-Novolak Photoresist Films to Single-Crystal Silicon // *J. of Surface Investigation. X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques.* – 2020. – Vol. 14, iss. 6. – P. 1352–1357. – DOI: [10.1134/S1027451020060476](https://doi.org/10.1134/S1027451020060476).
12. Вабищевич Н. В., Вабищевич С. А., Бринкевич Д. И. и др. Микроидентификация структур фотополимер – кремний // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки.* – 2011. – № 4. – С. 77–83.
13. Brinkevich D. I., Brinkevich S. D., Vabishchevich N. V. et al. Ion Implantation of Positive Photoresists // *Russian Microelectronics.* – 2014. – Vol. 43, iss. 3. – P. 194–200. – DOI: [10.1134/S106373971401003X](https://doi.org/10.1134/S106373971401003X).
14. Вабищевич С. А., Бринкевич С. Д., Вабищевич Н. В. и др. Адгезия облученных пленок диазохинонноволачного фоторезиста к монокристаллическому кремнию // *Химия высоких энергий.* – 2021. – Т. 55, № 6. – С. 461–468. – DOI: [10.31857/S0023119321060152](https://doi.org/10.31857/S0023119321060152).
15. Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Бринкевич Д. И. и др. Физико-механические свойства облученных пленок диазохинон-новолачного фоторезиста на кремнии // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки.* – 2020. – № 12. – С. 60–64.

REFERENCES

1. Cheung, K. M., Stemer, D. M., Zhao, C., Young, T. D., Belling, J. N., Andrews, A. M., & Weiss, P. S. (2020). Chemical Lift-Off Lithography of Metal and Semiconductor Surfaces. *ACS Materials Lett*, 2(1), 76–83. DOI: [10.1021/acsmaterialslett.9b00438](https://doi.org/10.1021/acsmaterialslett.9b00438).
2. Vabishchevich, S. A., Vabishchevich, N. V., Brinkevich, D. I., Prosolovich, V. S., Kolos, V. V., & Zubova, O. A. (2022). Prochnostnye svoystva fotorezistov dlya vzryvnoi litografii [Strength Properties of Photoresists for Explosive Lithography]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (4), 49–55. DOI: [10.52928/2070-1624-2022-38-4-49-55](https://doi.org/10.52928/2070-1624-2022-38-4-49-55). (In Russ., abstr. in Engl.).
3. Brinkevich, D. I., Vabishchevich, N. V., & Vabishchevich, S. A. (2010). Fiziko-mekhanicheskie svoystva epitaksial'nykh sloev fosfida galliya [Physicomchanical Properties of Epitaxial Layers Gallium Phosphide]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (9), 92–97. (In Russ., abstr. in Engl.).
4. Kolesnikov, Yu. V., & Morozov E. M. (1989). *Mekhanika kontaktnogo razrusheniya [Contact fracture mechanics]*. Moscow: Nauka. (In Russ.).
5. Malzbender, J., den Toonder, J. M. J., Balkenende, A. R., & de With, G. (2002). Measuring mechanical properties of coatings: a methodology applied to nano-particle-filled sol-gel coatings on glass. *Materials Science and Engineering: R: Reports*, 36(2–3), 47–103. DOI: [10.1016/S0927-796X\(01\)00040-7](https://doi.org/10.1016/S0927-796X(01)00040-7).
6. Brinkevich, D. I., Vabishchevich, S. A., Petlitskii, A. N. & Prosolovich, V. S. (2006). Defekty upakovki, miktrotverdost' i mikrokhрупkost' v plastinakh kremniya, obuslovlennyye termoobrabotkoi [Packing defects, microhardness and microbrittleness in silicon wafers caused by heat treatment]. *Materialy, tekhnologii, instrumenty [Materials, Technologies, Tools]*, 11(1), 48–50. (In Russ.).
7. Vabishchevich, S. A., Vabishchevich, N. V., Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., & Prosolovich, V. S. (2016). Mikrotverdost' plenok sopolimerov na osnove metilmetakrilata, obluchennykh γ -kvantami [Microhardness of γ -Irradiated Films

- of Copolymers Based on Methyl Methacrylate]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (12), 51–57. (In Russ., abstr. in Engl.).
8. Malik, B., & Panigrakhi, S. (2012). Vliyaniye oblucheniya protonami s energiei poryadka neskol'kikh MeV na sechenie amorfizatsii polimera [Effect of amorphization cross-section of polymer due to MeV-proton irradiation]. *Prikladnaya fizika [Applied Physics]*, (1), 20–25. (In Russ., abstr. in Engl.).
 9. Vabishchevich, S. A., Vabishchevich, N. V., Brinkevich, D. I., Prosolovich, V. S., Yankovskii, Yu. N., & Brinkevich, S. D. (2016). Prochnostnye svoystva struktur fotorezist-kremnii, γ -obluchennykh i implantirovannykh ionami V^+ i R^+ [Strength Properties of Photoresist-Silicon Structures, γ -Irradiated and Implanted by B^+ and P^+ Ions]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (12), 30–36. (In Russ., abstr. in Engl.).
 10. Vabishchevich, S. A., Vabishchevich, N. V., Brinkevich, D. I., & Prosolovich, V. S. (2021). Treshchinostoikost' plenok diazokhinon-novolachnogo rezista na plastinakh monokristallicheskogo kremniya [Crack Resistance of Diazoquinone-Novolach Photoresist Films on Monocrystalline Silicon Plates]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (4), 64–69.
 11. Vabishchevich, S., Brinkevich, S., Prosolovich, V., Vabishchevich, N., & Brinkevich, D. (2020). Effect of Ion Implantation on the Adhesion of Positive Diazoquinone-Novolac Photoresist Films to Single-Crystal Silicon. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, 14(6), 1352–1357. DOI: [10.1134/S1027451020060476](https://doi.org/10.1134/S1027451020060476).
 12. Vabishchevich, N. V., Vabishchevich, S. A., Brinkevich, D. I., Volobuev, V. S., Lukashevich, M. G., Odzhaev, V. B., & Prosolovich, V. S. (2011). Mikroindentirovanie struktur fotopolimer – kremnii [Microindentation of Photopolymer-Silicon Structures]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (4), 77–83. (In Russ., abstr. in Engl.).
 13. Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., Vabishchevich, N. V., Odzhaev, V. B., & Prosolovich, V. S. (2014). Ion Implantation of Positive Photoresists. *Russian Microelectronics*, 43(3), 194–200. DOI: [10.1134/S106373971401003X](https://doi.org/10.1134/S106373971401003X).
 14. Vabishchevich, S. A., Brinkevich, S. D., Vabishchevich, N. V., Brinkevich, D. I., & Prosolovich, V. S. (2021). Adhesion of Irradiated Diazoquinone–Novolac Photoresist Films to Single-Crystal Silicon. *High Energy Chemistry*, 55(6), 495–501. DOI: [10.1134/S0018143921060151](https://doi.org/10.1134/S0018143921060151).
 15. Vabishchevich, S. A., Vabishchevich, N. V., Brinkevich, D. I., & Prosolovich, V. S. (2020). Fiziko-mekhanicheskie svoystva obluchennykh plenok diazokhinon-novolachnogo fotorezista na kremnii [Physical and Mechanical Properties of Irradiated Films of Diazoquinone-Novolach Photoresist on Silicon]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (12), 60–64. (In Russ., abstr. in Engl.).

Посмунна 15.09.2023

STRENGTH PROPERTIES OF ELECTRON IRRADIATED FILMS OF NEGATIVE NOVOLAC PHOTORESISTS ON MONOCRYSTALLINE SILICON

S. VABISHCHEVICH, N. VABISHCHEVICH
(*Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk*);

D. BRINKEVICH, V. PROSOLOVICH
(*Belarusian State University, Minsk*);

V. KOLOS, O. ZUBOVA
(*“INTEGRAL” Joint Stock Company, Minsk*)

The adhesive and strength properties of electron-irradiated NFR 016D4 photoresist films for explosive lithography deposited on the surface of KDB-10 single-crystalline silicon wafers by centrifugation have been studied. It has been experimentally established that electron irradiation leads to warping and partial detachment of the NFR 016D4 photoresist film from the silicon substrate. Irradiated photoresist films behave like brittle materials. A significant decrease in crack resistance and adhesion to the silicon substrate of irradiated photoresist films was observed. caused by radiation-induced processes at the photoresist/silicon interface.

Keywords: negative photoresist, electron irradiation, microindentation, microhardness, crack resistance, adhesion.

УДК 541.183

DOI 10.52928/2070-1624-2023-41-2-42-47

ПЛЕНКИ ПОЗИТИВНОГО ДИАЗОХИНОН-НОВОЛАЧНОГО ФОТОРЕЗИСТА ФП9120, ИМПЛАНТИРОВАННЫЕ ИОНАМИ СЕРЕБРА

*канд. физ.-мат. наук, доц. С. А. ВАБИЩЕВИЧ, Н. В. ВАБИЩЕВИЧ
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой);*

*канд. физ.-мат. наук Д. И. БРИНКЕВИЧ, канд. физ.-мат. наук, доц. В. С. ПРОСОЛОВИЧ
(Белорусский государственный университет, Минск)*

Методом индентирования исследованы пленки позитивного диазохинон-новолачного фоторезиста ФП9120 толщиной 1,8 мкм, имплантированные ионами Ag^+ с энергией 30 кэВ в интервале доз $2,5 \cdot 10^{16} - 1,0 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$ на имплантаторе ИЛУ-3. Установлено, что свежеприготовленная пленка позитивного фоторезиста ФП9120 на кремнии проявляет упругопластичные свойства и после ее индентирования наблюдается упругое восстановление отпечатка. Сформированный при ионной имплантации Ag^+ дозами свыше $2,5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ карбонизированный слой подавляет эффект восстановления отпечатка при индентировании. После длительного хранения (более 3 лет) пленка изменяет свои прочностные свойства и ведет себя как твердое (непластичное) тело. Это обусловлено сшиванием молекул фенолформальдегидной смолы, снижающим подвижность молекул в условиях внешнего воздействия. Сплошной алмазоподобный карбонизированный слой, сформированный в области пробега ионов при имплантации ионами Ag^+ , способствует увеличению значений истинной микротвердости фоторезистивной пленки после длительного хранения.

Ключевые слова: *диазохинон-новолачный фоторезист, имплантация, ионы серебра, микроиндентирование, восстановленная микротвердость.*

Введение. Позитивные диазохинон-новолачные фоторезисты (ФР), представляющие собой композит фенолформальдегидной смолы и светочувствительного агента (О-нафтохинондиазида), часто используются в современной микроэлектронике в качестве масок при ионной имплантации [1]. При ионной имплантации фоторезистивных пленок на кремнии радиационно-индуцированные процессы протекают не только в области пробега ионов, но и за его пределами, что приводит к существенным изменениям физико-химических свойств по всей толщине полимерных пленок и у границы раздела фоторезист/кремний [2; 3]. В последнее время был опубликован ряд работ [2; 4–7] по исследованию радиационно-индуцированных процессов в фоторезистивных пленках, имплантированных ионами V^+ , P^+ и Sb^+ на ионно-лучевом ускорителе барабанного типа «Везувий-6». Однако прочностные свойства имплантированных ионами Ag^+ пленок позитивных диазохинон-новолачных фоторезистов на пластинах монокристаллического кремния до настоящего времени не исследованы.

Цель настоящей работы – исследование методом микроиндентирования прочностных свойств имплантированных ионами Ag^+ на имплантаторе ИЛУ-3 пленок диазохинон-новолачного позитивного фоторезиста марки ФП9120.

Материалы и методы измерений. Пленки позитивного фоторезиста ФП9120 толщиной 1,8 мкм нанесли на поверхность пластин кремния марки КДБ-10 с ориентацией (111) методом центрифугирования при скорости вращения 1800 об/мин. Перед формированием пленки фоторезиста кремниевые пластины подвергали стандартному циклу очистки поверхности в органических и неорганических растворителях. После нанесения ФР на рабочую сторону пластины проводилась сушка в течение 50–55 мин при температуре 88 °С. Толщина пленок фоторезиста контролировалась механическим способом на профилометре «Des-tak», при этом отклонения от среднего значения по пластине не превышали 1 %.

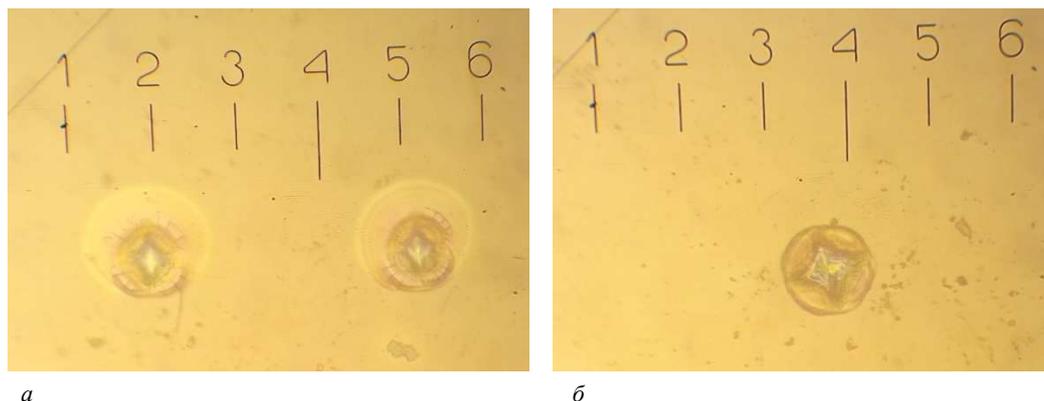
Имплантация ионами Ag^+ с энергией 30 кэВ в интервале доз $\Phi = 2,5 \cdot 10^{16} - 1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$ в режиме постоянного ионного тока (плотность тока $j = 4 \text{ мкА/см}^{-2}$) проводилась при комнатной температуре в остаточном вакууме не хуже 10^{-5} Па на имплантаторе ИЛУ-3. Во избежание перегрева и деструкции образца в процессе имплантации использовалась кассета, обеспечивающая эффективный сток ионного заряда с поверхности полимера и плотный контакт с металлическим основанием, охлаждаемым водой.

Микроиндентирование проводилось на приборе ПМТ-3 по стандартной методике при комнатной температуре [8; 9]. В качестве индентора использовался алмазный наконечник в форме четырехгранной пирамиды с квадратным основанием и углом при вершине $\alpha = 136^\circ$. Нагрузка P на индентор варьировалась в пределах 1–50 г. Длительность нагружения составляла 2 с, выдержка под нагрузкой – 5 с. При каждом измерении на поверхность образца наносилось не менее 50 отпечатков. Для обработки экспериментальных данных использовались стандартные методы математической статистики [3]. Измерения восстановленной микротвердости и фиксация отпечатков индентора выполнялись через 10–20 мин после индентирования.

Погрешность измерений восстановленной микротвердости H составляла 5 % с доверительной вероятностью 0,95.

Значения истинной микротвердости H фоторезистивной пленки оценивались при нагрузках 1-2 г, для которых глубина проникновения индентора составляла ~50 % толщины пленки. Этот выбор обусловлен тем, что подложка оказывает существенное влияние на величину микротвердости композиций пленка – подложка [2]. В случае «мягкой» пленки на «твердой» подложке пластическая деформация локализуется в пленке, и микротвердость композиции пленка – подложка существенно возрастает лишь при глубине проникновения индентора, равной либо большей толщины пленки [10]. При нагрузках 1-2 г подложка не оказывает существенного влияния и измеренные значения H соответствуют истинной микротвердости фоторезистивной пленки [11].

Эксперимент. Характерные микрофотографии отпечатков индентора в имплантированных Ag^+ дозой $1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$ пленках ФП9120 представлены на рисунке 1. В центре всех отпечатков наблюдается светлое пятно – след от проникновения индентора в кремний. Отметим, что отпечатки микроиндентора в пленках ФР, сформированные непосредственно после имплантации и через 3 года хранения, различаются существенным образом (см. рисунок 1). Форма отпечатков, сделанных сразу после формирования и ионной имплантации, серьезно отличалась от квадратной формы наконечника индентора – боковые грани отпечатка были вогнуты к центру (см. рисунок 1, б). Это свидетельствует о наличии сильных сжимающих напряжений в фоторезистивной пленке. Область деформации вокруг отпечатка невелика. Она имеет сферическую форму, диаметр которой практически совпадает с диагональю отпечатка. Для малых нагрузок (10 г и менее) становится существенным разброс величин микротвердости, что, вероятнее всего, связано с упругим восстановлением отпечатка. Причем часть отпечатков восстанавливалась полностью. Например, при нагрузке 2 г наблюдалось только 10–15 % отпечатков. Приведенные экспериментальные данные указывают на быструю и существенную релаксацию отпечатка после индентирования и позволяют утверждать, что полимерная пленка проявляет уругопластичные свойства.



а

б

Рисунок 1. – Микрофотографии отпечатков индентора в имплантированных Ag^+ дозой $1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$ пленках ФП9120. Индентирование сразу после имплантации (б) и после хранения в течении 3 лет (а). Нагрузка 50 г

При индентировании после хранения в течение 3 лет форма отпечатков была близка к квадратной, искажения боковых граней отпечатка были слабо заметны (см. рисунок 1, а). Область деформации вокруг отпечатка была заметно больше диаметра отпечатка. Вокруг отпечатка наблюдались ореолы в виде интерференционных колец (светлые области на рисунке 1, а), обусловленные интерференцией на выдавленном из-под индентора материале. Размеры ореолов возрастали с ~20 до 45 мкм при увеличении нагрузки с 2 до 50 г. Это является прямым свидетельством отсутствия релаксации при комнатной температуре упругих напряжений в пленке ФР, возникающих в процессе индентирования. Приведенные экспериментальные данные позволяют сделать вывод о том, что после хранения пленка ведет себя как твердое (непластичное) тело.

Отметим также, что у отпечатков в области круговых навалов наблюдались небольшие радиальные трещины, причем одиночные трещины были даже у отпечатков с нагрузкой 1-2 г. Для выявления трещин в пределах отпечатка был применен известный прием выборочной фокусировки. Для определения размеров отпечатка фокусировка производилась на границах отпечатка (рисунок 2, а), а для выявления трещин фокусировка осуществлялась на поверхности (рисунок 2, б). По мере роста дозы облучения наблюдается увеличение трещинообразования при всех нагрузках. В то же время отколов пленки фоторезиста от подложки не происходило. Приведенные экспериментальные данные указывают на то, что зарождение и развитие трещин происходит в области пробега ионов Ag^+ . В этой приповерхностной области при дозах свыше $1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ происходит формирование легированного серебром сплошного карбонизированного слоя, толщина которого при внедрении Ag^+ с энергией 30 кэВ составляет ~50 нм [12].

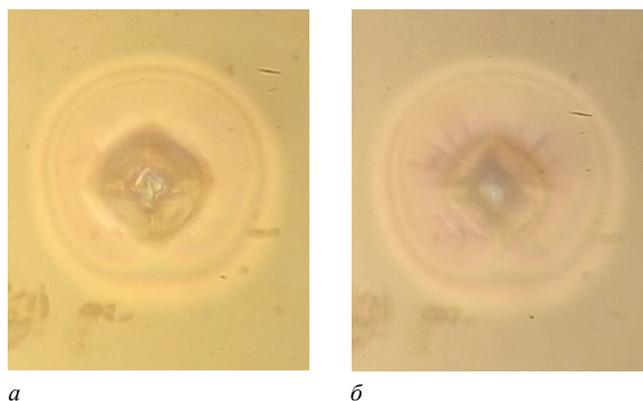


Рисунок 2. – Микрофотографии отпечатков индентора в имплантированных Ag^+ дозой $1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$ пленках ФП9120 при фокусировке на границах отпечатка (а) и на поверхности пленки (б). Индентирование после хранения в течение 3 лет. Нагрузка 50 г

Существенные различия в поведении «свежеприготовленных» и хранившихся 3 года фоторезистивных пленок наблюдались и при измерении восстановленной микротвердости (рисунки 3 и 4). Отметим, что заметное влияние на величину восстановленной микротвердости имплантация оказывала только при нагрузках менее 5 г, когда индентор находился в ФР пленке (см. рисунки 3 и 4). Прочностные свойства кремниевой подложки после имплантации, как и после хранения, не изменялись.

Характер зависимости восстановленной микротвердости от дозы имплантации Ag^+ в «свежеприготовленных» и хранившихся 3 года фоторезистивных пленках различается кардинально. Так в «свежеприготовленных» пленках ФР значения восстановленной микротвердости снижаются при увеличении дозы имплантации до $5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$. В диапазоне $\Phi = (7,5 - 10) \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ заметных изменений значений восстановленной микротвердости не наблюдалось (см. рисунок 3).

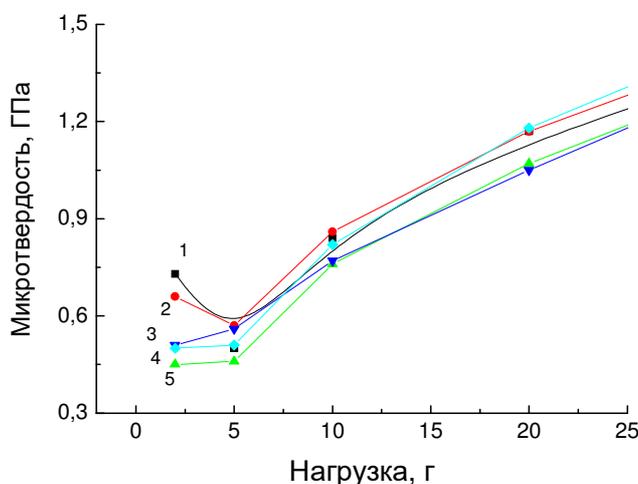


Рисунок 3. – Зависимости восстановленной микротвердости от нагрузки «свежеприготовленных» исходных (1) и имплантированных дозами $2,5 \cdot 10^{16}$ (2), $5 \cdot 10^{16}$ (3), $7,5 \cdot 10^{16}$ (4) и $1,0 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$ (5) пленок фоторезиста

Длительное хранение пленок диазохинон-новолачного фоторезиста ФП9120 на кремнии приводит к снижению величины восстановленной микротвердости, наиболее выраженному в необлученных пленках. Так в неимплантированных пленках значения восстановленной микротвердости снижались почти в 3 раза (с 0,7 до 0,25 ГПа), а в имплантированных дозой $1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$ образцах – всего на ~40 % (с 0,5 до 0,35 ГПа). После хранения имплантированной пленки ФР при нагрузках 1-2 г, когда индентор не достигает границы раздела ФР/Si, наблюдалось существенное возрастание значений восстановленной микротвердости при увеличении дозы имплантации до $\Phi = 5,0 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ (см. рисунок 4). Дальнейшее увеличение Φ до $1,0 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$ к существенным изменениям величины восстановленной микротвердости не приводило. Зависимости H от нагрузки у этих образцов совпадали с аналогичными зависимостями для образцов с $\Phi = 5,0 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$.

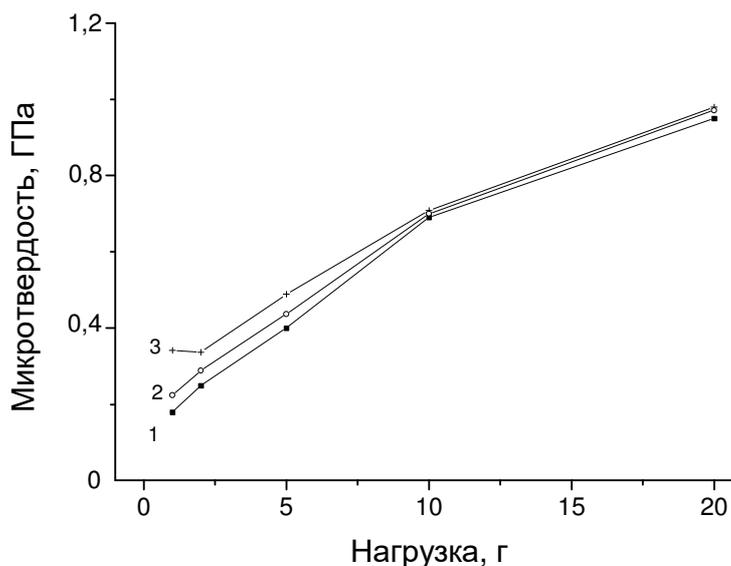


Рисунок 4. – Зависимости восстановленной микротвердости от нагрузки исходных (1) и имплантированных дозой $2,5 \cdot 10^{16}$ (2) и $5,0 \cdot 10^{16}$ см⁻² (3) пленок фоторезиста. Срок хранения 3 года

Полученные экспериментальные результаты могут быть объяснены с учетом следующих обстоятельств. Как показано ранее методом нарушенного полного внутреннего отражения [2; 13], при хранении фоточувствительный компонент фоторезиста (диазохинон) подвергается разложению с образованием кетена. В отсутствие ингибитора молекулы фенолформальдегидной смолы (основа фоторезиста) склонны к сшиванию, что снижает их подвижность в условиях внешних воздействий, и пленка ведет себя как твердое (непластичное) тело. Отметим, что сшивка молекул фенолформальдегидной смолы отмечалась ранее в работах [14; 15].

Вместе с тем при имплантации фоторезистивной диазохинон-новолачной пленки ионами Ag⁺ в области пробега ионов R_p наблюдается формирование сплошного аморфного карбонизированного слоя, практически лишенного атомов водорода [16]. Оно интенсивно происходит при $\Phi > 1,0 \cdot 10^{16}$ см⁻² и заканчивается при $\Phi = 5,0 \cdot 10^{16}$ см⁻². Микротвердость такого слоя во многом определяется наличием sp₃-связей и при доле sp₃-связей около 50 % достигает значений 30–50 ГПа [17; 18], что более чем на 2 порядка выше, чем микротвердость необлученных полимерных пленок. В проведенных нами экспериментах при нагрузках 1-2 г глубина проникновения индентора составляла 1,0–1,5 мкм, что меньше толщины пленки ФР, но значительно больше проецированного пробега ионов Ag⁺ ($R_p = 40$ нм) [12]. Поскольку вклад в измеряемую микротвердость дает не только созданный имплантацией карбонизированный слой, но и область полимера за слоем внедрения ионов, экспериментально полученные значения микротвердости существенно ниже значений, характерных для аморфных углеродных пленок.

Свежеприготовленные пленки ведут себя как упругопластичные материалы. В них наблюдается упругое восстановление отпечатка, что приводит к увеличению значений восстановленной микротвердости. Сформированный при ионной имплантации карбонизированный слой подавляет эффект восстановления отпечатка, поэтому в свежеприготовленных имплантированных образцах значения восстановленной микротвердости ниже, чем в неимплантированных.

Заключение. Установлено, что свежеприготовленная пленка позитивного фоторезиста ФП9120 на кремнии проявляет упругопластичные свойства и после ее индентирования наблюдается упругое восстановление отпечатка. Сформированный при ионной имплантации Ag⁺ дозами свыше $2,5 \cdot 10^{16}$ см⁻² карбонизированный слой подавляет эффект восстановления отпечатка при индентировании. После длительного хранения (более 3 лет) пленка изменяет свои прочностные свойства и ведет себя как твердое (непластичное) тело, что обусловлено сшиванием молекул фенолформальдегидной смолы, снижающим подвижность молекул в условиях внешнего воздействия. Кроме того, длительное хранение пленок диазохинон-новолачного фоторезиста ФП9120 на кремнии приводит к снижению величины восстановленной микротвердости пленки. Сплошной алмазоподобный карбонизированный слой, сформированный в области пробега ионов при имплантации ионами Ag⁺ с энергией 30 кэВ дозами $> 2,5 \cdot 10^{16}$ см⁻², способствует увеличению значений истинной микротвердости фоторезистивной пленки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моро, У. Микролитография. Принципы, методы, материалы: в 2-х ч.: пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – Ч. 2. – 632 с.
2. Brinkevich S., Grinyuk, E., Brinkevich, D. et al. Modification of Diazoquinone-Novolac Photoresist Films beyond the Region of Implantation of B⁺ Ions // *High Energy Chemistry*. – 2020 – Vol. 54, iss. 5. – P. 342–351. – DOI: [10.1134/S0018143920050045](https://doi.org/10.1134/S0018143920050045).
3. Vabishchevich S. A., Brinkevich S. D., Vabishchevich N. V. et al. Adhesion of Irradiated Diazoquinone-Novolac Photoresist Films to Single-Crystal Silicon // *High Energy Chemistry*. – 2021. – Vol. 55, iss. 6 – P. 495–501. DOI: [10.1134/S0018143921060151](https://doi.org/10.1134/S0018143921060151).
4. Vabishchevich S., Brinkevich S., Prosolovich V. et al. Effect of Ion Implantation on the Adhesion of Positive Diazoquinone-Novolac Photoresist Films to Single-Crystal Silicon // *J. of Surface Investigation. X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. – 2020. – Vol. 14, iss. 6. – P. 1352–1357. – DOI: [10.1134/S1027451020060476](https://doi.org/10.1134/S1027451020060476).
5. Kharchenko A. A., Brinkevich D. I., Prosolovich V. S. et al. Radiation-Stimulated Transformation of the Reflectance Spectra of Diazoquinone–Novolac Photoresist Films Implanted with Antimony Ions // *J. of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. – 2020. – Vol. 14, iss. 3. – P. 558–561. – DOI: [10.1134/S1027451020030283](https://doi.org/10.1134/S1027451020030283).
6. Brinkevich S. D., Brinkevich D. I., Prosolovich V. S. Modification of Diazoquinone-Novolac Photoresist Films by the Implantation of Antimony Ions // *Russian Microelectronics*. – 2021. – Vol. 50, iss. 1 – P. 33–38. DOI: [10.1134/S1063739720060025](https://doi.org/10.1134/S1063739720060025).
7. Brinkevich D. I., Brinkevich S. D., Prosolovich V. S. Ion Implantation in Diazoquinone-Novolac Photoresist // *High Energy Chemistry*. – 2022. – Vol. 56, iss. 4. – P. 270–276. – DOI: [10.1134/S0018143922040051](https://doi.org/10.1134/S0018143922040051).
8. Бринкевич Д. И., Вабищевич Н. В., Вабищевич С. А. Физико-механические свойства эпитаксиальных слоев фосфида галлия // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки*. – 2010. – № 9. – С. 92–97.
9. Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Бринкевич Д. И. и др. Физико-механические свойства облученных пленок диазохинон-новолачного фоторезиста на кремнии // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки*. – 2020. – № 12. – С. 60–64.
10. Шугуров А. Р., Панин А. В., Оскомов К. В. Особенности определения механических характеристик тонких пленок методом наноиндентирования // *Физика твердого тела*. – 2008. – Т. 50, № 6. – С. 1007–1012.
11. Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Бринкевич Д. И. и др. Микротвердость пленок сополимеров на основе метилметакрилата, облученных γ -квантами // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки*. – 2016. – № 12. – С. 51–57.
12. Бринкевич Д. И., Харченко А. А., Бринкевич С. Д. и др. Радиационно-стимулированная модификация спектров отражения за областью пробега ионов в пленках полиимида // *Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед.* – 2017. – № 8. – С. 25–30. – DOI: [10.7868/S0207352817080029](https://doi.org/10.7868/S0207352817080029).
13. Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Эспиноза де лос Монтеро Г. А. и др. Радиационно-индуцированные процессы в пленках диазохинон-новолачного резиста на кремнии при имплантации ионов Ag⁺ // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки*. – 2020. – № 4. – С. 43–47.
14. Debmalya R., Basu P. K., Raghunathan P. et al. DNQ-novolac photoresist revisited: 1H and 13C NMR evidence for a novel photoreaction mechanism // *Magnetic resonance in chemistry*. – 2003. – Vol. 41, iss 2. – P. 84–90. DOI: [10.1002/mrc.1134](https://doi.org/10.1002/mrc.1134).
15. Бринкевич Д. И., Бринкевич С. Д., Вабищевич Н. В. и др. Ионная имплантация позитивных фоторезистов // *Микроэлектроника*. – 2014. – Т. 43, № 3. – С. 193–199. – DOI: [10.7868/S0544126914010037](https://doi.org/10.7868/S0544126914010037).
16. Харченко А. А., Бринкевич Д. И., Бринкевич С. Д. и др. Радиационно-индуцированная модификация спектров отражения пленок диазохинонноволачного фоторезиста при имплантации ионов Ag⁺ // *Химия высоких энергий*. – 2023. – Т. 57, № 6. – С. 456–471. – DOI: [10.31857/S0023119323060062](https://doi.org/10.31857/S0023119323060062).
17. Островский В. С. Твердость углеродных материалов // *Химия твердого топлива*. – 2009. – № 5. – С. 56–60.
18. Коршунов С. Н., Лебедев А. М., Мартыненко Ю. В. и др. Изменение структуры осаждаемых углеродных пленок при электронном ассистировании // *Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед.* – 2019. – № 4. – С. 56–64.

REFERENCES

1. Moreau, W. M. (1988). *Semiconductor Lithography: Principles, Practices, and Materials*. N.Y.; London: Plenum Press.
2. Brinkevich, S. D., Grinyuk, E. V., Brinkevich, D. I., & Prosolovich, V. S. (2020). Modification of Diazoquinone–Novolac Photoresist Films beyond the Region of Implantation of B⁺ Ions. *High energy chemistry*, 54(5), 342–351. DOI: [10.1134/S0018143920050045](https://doi.org/10.1134/S0018143920050045).
3. Vabishchevich, S. A., Brinkevich, S. D., Vabishchevich, N. V., Brinkevich, D. I., & Prosolovich, V. S. (2021). Adhesion of Irradiated Diazoquinone-Novolac Photoresist Films to Single-Crystal Silicon. *High Energy Chemistry*, 55(6), 495–501. DOI: [10.1134/S0018143921060151](https://doi.org/10.1134/S0018143921060151).
4. Vabishchevich, S., Brinkevich, S., Prosolovich, V., Vabishchevich, N., & Brinkevich, D. (2020). Effect of Ion Implantation on the Adhesion of Positive Diazoquinone-Novolac Photoresist Films to Single-Crystal Silicon. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, 14(6), 1352–1357. DOI: [10.1134/S1027451020060476](https://doi.org/10.1134/S1027451020060476).
5. Kharchenko, A. A., Brinkevich, D. I., Prosolovich, V. S., Brinkevich, S. D., Odzaev, V. B., & Yankovski, Yu. N. (2020). Kharchenko, A. A. Radiation-Stimulated Transformation of the Reflectance Spectra of Diazoquinone–Novolac Photoresist Films Implanted with Antimony Ions. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, 14(3), 558–561. DOI: [10.1134/S1027451020030283](https://doi.org/10.1134/S1027451020030283).
6. Brinkevich, S. D., Brinkevich, D. I., & Prosolovich, V. S. (2021). Modification of Diazoquinone-Novolac Photoresist Films by the Implantation of Antimony Ions. *Russian Microelectronics*, 50(1), 33–38. DOI: [10.1134/S1063739720060025](https://doi.org/10.1134/S1063739720060025).
7. Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., & Prosolovich, V. S. (2022). Ion Implantation in Diazoquinone-Novolac Photoresist. *High Energy Chemistry*, 56(4), 270–276. DOI: [10.1134/S0018143922040051](https://doi.org/10.1134/S0018143922040051).

8. Brinkevich, D. I., Vabishchevich, N. V., & Vabishchevich, S. A. (2010). Fiziko-mekhanicheskie svoystva epitaksial'nykh sloev fosfida galliya [Physico-mechanical Properties of Epitaxial Layers Gallium Phosphide]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (9), 92–97. (In Russ., abstr. in Engl.).
9. Vabishchevich, S. A., Vabishchevich, N. V., Brinkevich, D. I., & Prosolovich, V. S. (2020). Fiziko-mekhanicheskie svoystva obluchennykh plenok diazokhinon-novolachnogo fotorezista na kremnii [Physical and Mechanical Properties of Irradiated Films of Diazoquinone-Novolach Photoresist on Silicon]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (12), 60–64. (In Russ., abstr. in Engl.).
10. Shugurov, A. R., Panin, A. V., & Oskomov, K. V. (2008). Osobennosti opredeleniya mekhanicheskikh harakteristik tonkikh plenok metodom nanoindentirovaniya. *Fizika tverdogo tela [Physics of the Solid State]*, 50(6), 1007–1012. (In Russ.).
11. Vabishchevich, S. A., Vabishchevich, N. V., Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., & Prosolovich, V. S. (2016). Mikrotverdost' plenok sopolimerov na osnove metilmetakrilata, obluchennykh γ -kvantami [Microhardness of Copolymers Based on Methyl Methacrylate]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (12), 51–57. (In Russ., abstr. in Engl.).
12. Brinkevich, D. I., Kharchenko, A. A., Brinkevich, S. D., Lukashevich, M. G., Odzhaev, V. B., Valeev, V. F., ... Khaibullin, R. I. (2017). Radiation-induced modification of reflection spectra beyond the ion path region in polyimide films. *Journal of Surface Investigation. X-ray, synchrotron and neutron techniques*, 11(4), 801–806. DOI: [10.1134/S1027451017040188](https://doi.org/10.1134/S1027451017040188).
13. Vabishchevich, S.A., Vabishchevich, N.V., Espinoza de los Monteros, Brinkevich, D. I., & Prosolovich, V. S. (2020). Radiacionno-inducirovannyye protsessy v plenках diazokhinon-novolachnogo rezista na kremnii pri implantatsii ionov Ag^+ [Radiation-induced processes in films of diazoquinone-novolac resist on silicon during implantation of Ag^+ ions]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (4), 43–47.
14. Debmalya, R., Basu, P. K., Raghunathan, P., & Eswaran, S. V. (2003). DNQ-novolac photoresist revisited: 1H and 13C NMR evidence for a novel photoreaction mechanism. *Magnetic resonance in chemistry*, 41(2), 84–90. DOI: [10.1002/mrc.1134](https://doi.org/10.1002/mrc.1134).
15. Brinkevich D. I., Brinkevich S. D., Vabishchevich N. V., Odzhaev V. B., & Prosolovich V. S. (2014). Ionnyaya implantatsiya pozitivnykh fotorezistov [Ion implantation of positive photoresists]. *[Russian Microelectronics]*, 43(3), 194–200. DOI: [10.1134/S106373971401003X](https://doi.org/10.1134/S106373971401003X). (In Russ.).
16. Kharchenko, A. A., Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., & Prosolovich, V. S. (2023). Radiacionno-inducirovannaya modifikatsiya spektrov otrazheniya plenok diazokhinonno-volachnogo fotorezista pri implantatsii ionov Ag^+ . *Khimiya vysokikh energij [High energy chemistry]*, 57(6), 456–471. DOI: [10.31857/S0023119323060062](https://doi.org/10.31857/S0023119323060062). (In Russ.).
17. Ostrovskii, V. S. (2009). Hardness of Carbon Materials. *Solid Fuel Chemistry*, 43(5), 314–317. DOI: [10.3103/S0361521909050103](https://doi.org/10.3103/S0361521909050103).
18. Korshunov, S. N., Lebedev, A. M., Martynenko, Yu. V., Svechnikov, N. Yu., & Skorlupkin, I. D. (2019). Izmenenie struktury osazhdaemykh ugleodnykh plenok pri elektronnom assistirovani [Structure Changes in Carbon Films Obtained by Electron-Beam Assisted Deposition]. *Poverkhnost. Rentgenovskie, sinhrotronnye i neitronnye issledovaniya [Journal of Surface Investigation. X-ray, synchrotron and neutron techniques]*, (4), 56–64.

Поступила 15.09.2023

FILMS OF POSITIVE DIAZOQUINONE-NOVOLAC PHOTORESIST FP9120 IMPLANTED WITH SILVER IONS

S. VABISHCHEVICH, N. VABISHCHEVICH
(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk);

D. BRINKEVICH, V. PROSOLOVICH
(Belarusian State University, Minsk)

Films of positive diazoquinone-novolac photoresist FP9120 1,8 μm thick, implanted with Ag^+ ions with an energy of 30 keV in the dose range of $2,5 \cdot 10^{16} - 1,0 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-2}$, were studied by indentation using an ILU-3 implanter. It has been established that a freshly prepared film of the positive photoresist FP9120 on silicon exhibits elastic-plastic properties and, after its indentation, an elastic recovery of the imprint is observed. The carbonized layer formed during ion implantation of Ag^+ with doses above $2,5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-2}$ suppresses the effect of imprint restoration during indentation. After long-term storage (more than 3 years), the film changes its strength properties and behaves like a solid (non-plastic) body. This is due to the cross-linking of phenol-formaldehyde resin molecules, which reduces the mobility of molecules under external influence. A continuous diamond-like carbonized layer formed in the range of ions. when implanted with Ag^+ ions, it contributes to an increase in the values of the true microhardness of the photoresistive film after long-term storage.

Keywords: diazoquinone-novolac resist, implantation, silver ions, microindentation, restored microhardness.

УДК 621.548

DOI 10.52928/2070-1624-2023-41-2-48-55

ВЫБОР ТИПА МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ В ИНДУКЦИОННЫХ УСТРОЙСТВАХ ПРЯМОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В ТЕПЛОВУЮ**М. Э. ВЫСОЦКИЙ, канд. техн. наук, доц. А. С. ВЕРШИНИН,****канд. техн. наук, доц. Ю. Г. ГРОЗБЕРГ****(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)**

По мере улучшения технических характеристик выпускаемых промышленностью постоянных магнитов их стали чаще применять при генерации электроэнергии, а также в индукционных устройствах прямого преобразования механической энергии в тепловую. Для повышения эффективности последних следует увеличивать либо частоту прерываний магнитных потоков, либо их интенсивность. В данной работе проведен сравнительный анализ неразветвленных магнитных цепей с источниками магнитодвижущей силы в виде постоянного магнита и в виде катушки с током (электромагнита) с целью количественной оценки влияния воздушных зазоров на изменение магнитных потоков в этих цепях. Результаты выполненного анализа позволят оптимизировать выбор типа магнитных цепей в индукционных устройствах прямого преобразования механической энергии в тепловую.

Ключевые слова: магнитная цепь, воздушный зазор, преобразователь, механическая энергия, тепловая энергия, магнитное сопротивление, магнитная проницаемость, магнитодвижущая сила, магнитный поток.

Введение. В технических журналах и среди патентов встречаются публикации с описаниями устройств для прямого преобразования механической энергии в тепловую, в том числе и индукционного типа^{1,2} [1; 2], в которых получение тепла происходит за счет нагрева индукционными токами при изменении магнитных потоков. В указанных устройствах в качестве источников магнитодвижущей силы (МДС) для получения магнитных потоков в магнитных цепях используются как постоянные магниты, так и катушки с током (электромагниты). Только в устройствах³ магнитные цепи содержат воздушные зазоры, а в [3; 4] воздушные зазоры исключены. Конечно, исключение воздушных зазоров в магнитных цепях уменьшает магнитное сопротивление цепи и в какой-то степени увеличивает магнитный поток, но желательно количественно оценить получаемый эффект.

В любом случае при построении индукционного устройства прямого преобразования механической энергии в тепловую приходится делать выбор типа магнитной цепи: либо с постоянным магнитом в качестве источника МДС, либо с катушкой и током. И те и другие магнитные цепи могут либо содержать, либо не содержать воздушные зазоры. При этом степень влияния исключения воздушных зазоров на магнитное сопротивление цепи и, соответственно, на магнитный поток может оказаться разным. В этом случае также желательно получить количественную оценку указанной степени влияния.

Цель работы. Основной целью данной работы является сравнительный анализ неразветвленных магнитных цепей, в которых МДС создается либо постоянным магнитом, либо катушкой с током, и выбор наиболее эффективного типа магнитных цепей для устройств прямого преобразования механической энергии в тепловую индукционного типа.

Возможные пути достижения цели. Для проведения сравнительного анализа и получения количественных оценок влияния воздушных зазоров в разных магнитных цепях следует рассмотреть две одинаковые по геометрическим размерам неразветвленные магнитные цепи с одинаковыми характеристиками магнитопроводов и одинаковыми по величине воздушными зазорами. Однако в одной цепи следует задать МДС постоянным магнитом, а в другой – катушкой с током (электромагнитом).

В обоих случаях, чтобы не перенасыщать магнитопровод магнитным потоком, за исходное состояние целесообразно принять замкнутую магнитную цепь без воздушных зазоров и с помощью МДС задать одинаковые магнитные потоки в цепи.

При последующем введении воздушных зазоров в рассматриваемые магнитные цепи в каждой из них магнитные потоки уменьшаются. По степени их уменьшения можно количественно оценить влияние воздушных зазоров на прохождение магнитных потоков в двух видах рассматриваемых магнитных цепей.

¹ Устройство для преобразования механической энергии в тепловую: пат. 2097946 / А. И. Елшин, В. М. Казанский, Е. Д. Карманов, В. И. Михеев. – Оpubл. 27.11.1997.

² Induction heating device and power generation system provided with same: pat. JP WO2012169398 / Т. Okazaki, Т. Matsuo, Т. Mifune. – Pubл. date 13.12.2012.

³ См. сноски 1; 2.

Для проведения сравнительного анализа указанных магнитных цепей будем использовать приближенный метод расчета неразветвленной магнитной цепи, когда пренебрегают рассеиванием магнитного потока и считают, что он распределен равномерно по сечению участка магнитной цепи [3]. При этом предполагается, что магнитная индукция B и абсолютная магнитная проницаемость $\mu_{абс}$ во всех точках участка магнитной цепи будут неизменны.

Рассмотрим неразветвленную магнитную цепь с постоянным магнитом. Так, на рисунке 1 приведена геометрия типовой неразветвленной магнитной цепи с двумя воздушными зазорами δ_1 и δ_2 , магнитопроводами 1 и 2, в которой МДС задается постоянным магнитом 3.

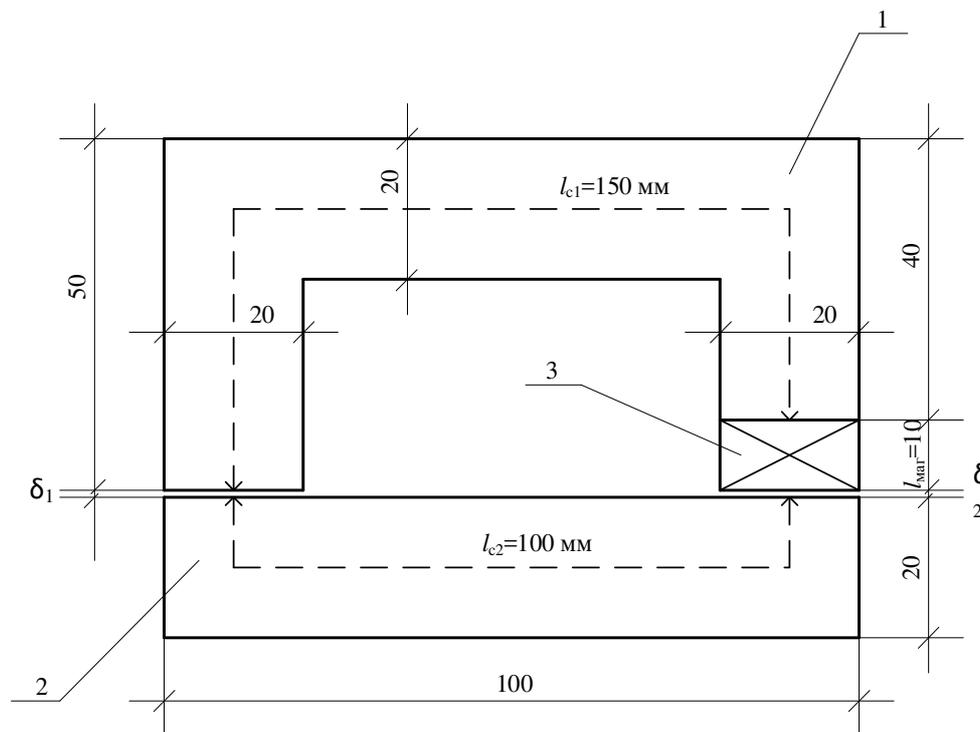
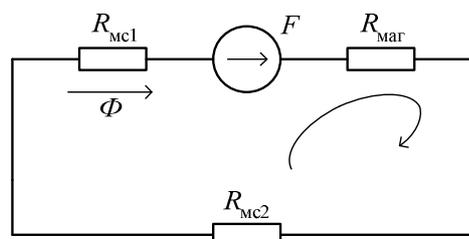


Рисунок 1. – Магнитная цепь с постоянным магнитом и двумя воздушными зазорами

Пусть воздушные зазоры $\delta_1 = \delta_2 = 1$ мм, толщина магнитопровода $b = 50$ мм, остаточная магнитная индукция постоянного магнита $B_m = 1,2$ Тл, длина средней линии магнитопровода 1 $l_{c1} = 150$ мм, магнитопровода 2 $l_{c2} = 100$ мм, относительная магнитная проницаемость постоянного магнита $\mu_m = 1,05$, относительная магнитная проницаемость магнитопровода из электротехнической стали $\mu_{ст} = 4000$.

Предположим, что магнитная цепь замкнута, то есть воздушные зазоры исключены ($\delta_1 = \delta_2 = 0$). В этом случае эквивалентная схема замещения приведенной магнитной цепи принимает вид, показанный на рисунке 2.

Рисунок 2. – Эквивалентная схема замещения магнитной цепи с постоянным магнитом и исключенными воздушными зазорами



В приведенной схеме замещения $F_{\text{маг}}$ – магнитодвижущая сила постоянного магнита 3, включенного в магнитную цепь. Остальные элементы в схеме замещения – это магнитные сопротивления: $R_{\text{маг}}$ – постоянного магнита 3; R_{mc1} и R_{mc2} – стальных магнитопроводов 1 и 2 соответственно.

МДС постоянного магнита может быть определена в виде [3]

$$F_{\text{маг}} = H_{\text{маг}} \cdot l_{\text{маг}}, \quad (1)$$

где $H_{\text{маг}}$ – напряженность магнитного поля по оси намагничивания постоянного магнита;

$l_{\text{маг}} = 10$ мм – длина постоянного магнита по оси намагничивания (см. рисунок 1).

Напряженность магнитного поля $H_{\text{маг}}$, А/м, вдоль оси намагничивания постоянного магнита может быть определена в виде⁴

$$H_{\text{маг}} = \frac{B_{\text{mr}}}{\mu_{\text{амаг}}} = \frac{B_{\text{mr}}}{\mu_m \cdot \mu_0}, \quad (2)$$

где B_{mr} – остаточная магнитная индукция постоянного магнита, Тл;

$\mu_{\text{амаг}}$ – абсолютная магнитная проницаемость постоянного магнита, Гн/м;

μ_m – относительная магнитная проницаемость постоянного магнита ($\mu_m = 1,05$);

$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

Тогда с учетом (2) МДС постоянного магнита $F_{\text{маг}}$, А, получим в виде

$$F_{\text{маг}} = \frac{B_{\text{mr}} \cdot l_{\text{маг}}}{\mu_m \cdot \mu_0}. \quad (3)$$

Для рассматриваемой магнитной цепи $F_{\text{маг}} = 9094,6$ А.

Магнитное сопротивление участка магнитной цепи R_m , А/Вб, также приближенно вычисляется по формуле [3]

$$R_m = \frac{l}{\mu_m \cdot \mu_0 \cdot S}, \quad (4)$$

где l – длина средней линии участка магнитной цепи, м;

S – поперечное сечение магнитопровода участка магнитной цепи, м²;

μ_m – относительная магнитная проницаемость материала участка магнитной цепи;

$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

Формула (4) применима ко всем участкам магнитной цепи.

Найдем магнитные сопротивления всех элементов в схеме замещения магнитной цепи (см. рисунок 2).

Для стального магнитопровода 1 (см. рисунок 1) $l_{c1} = 150$ мм = 0,15 м; $S_{c1} = (20 \cdot 50)$ мм² = $1 \cdot 10^{-3}$ м²; $\mu_{cm} = 4000$. Тогда магнитное сопротивление R_{mc1} будет равно

$$R_{mc1} = \frac{l_{c1}}{\mu_{cm} \cdot \mu_0 \cdot S_{c1}} = \frac{0,15}{4000 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 29,841 \cdot 10^3 \text{ А/Вб}.$$

Стальной магнитопровод 2 (см. рисунок 1) имеет то же сечение $S_{c2} = S_{c1} = (20 \cdot 50)$ мм² = $1 \cdot 10^{-3}$ м² и выполнен из той же электротехнической стали. Однако у него длина средней линии $l_{c1} = 100$ мм = 0,1 м. Тогда магнитное сопротивление R_{mc2} будет равно

$$R_{mc2} = \frac{l_{c2}}{\mu_{cm} \cdot \mu_0 \cdot S_{c2}} = \frac{0,1}{4000 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 19,895 \cdot 10^3 \text{ А/Вб}.$$

Постоянный магнит 3 в магнитной цепи (см. рисунок 1) также обладает магнитным сопротивлением $R_{\text{маг}}$, которое приближенно тоже может быть вычислено по выражению (4). Из геометрии магнитной цепи

⁴ Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. – Изд. 6-е испр. – М.: Наука, 1974. – 944 с.

(см. рисунок 1) $l_{\text{маг}} = 10 \text{ мм} = 0,01 \text{ м}$, а сечение постоянного магнита равно сечению стали $S_{\text{маг}} = S_{c1} = S_{c2}$. Относительная магнитная проницаемость постоянного магнита $\mu_m = 1,05$. Тогда магнитное сопротивление постоянного магнита $R_{\text{маг}}$ будет равно

$$R_{\text{маг}} = \frac{l_{\text{маг}}}{\mu_m \cdot \mu_0 \cdot S_{\text{маг}}} = \frac{0,01}{1,05 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 7,579 \cdot 10^6 \text{ А/Вб}.$$

Согласно схеме замещения магнитной цепи (см. рисунок 2) суммарное эквивалентное магнитное сопротивление всей цепи равно

$$R_{\text{м}\Sigma 1} = R_{\text{мс}1} + R_{\text{мс}2} + R_{\text{маг}} = 7628,736 \cdot 10^3 \text{ А/Вб}.$$

Тогда величина магнитного потока в этой магнитной цепи составит

$$\Phi_1 = \frac{F_{\text{маг}}}{R_{\text{м}\Sigma 1}} = \frac{9\,094,6}{7628,736 \cdot 10^3} = 1,192 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}. \quad (5)$$

Теперь в ту же магнитную цепь (см. рисунок 1) введем воздушные зазоры $\delta_1 = \delta_2 = 1 \text{ мм}$. Эквивалентная схема замещения магнитной цепи с воздушными зазорами принимает вид, показанный на рисунке 3.

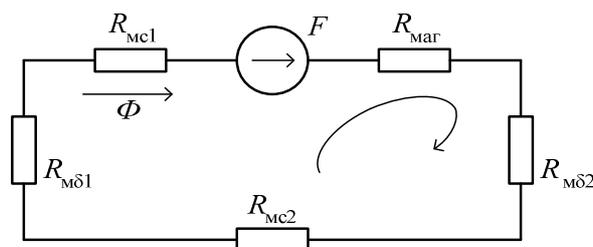


Рисунок 3. – Эквивалентная схема замещения магнитной цепи с постоянным магнитом и с воздушными зазорами $\delta_1 = \delta_2 = 1 \text{ мм}$

Поскольку геометрия и параметры сохранившихся участков магнитной цепи не изменились, то и магнитные сопротивления этих участков цепи и величина МДС постоянного магнита тоже не изменятся.

Магнитные сопротивления воздушных зазоров одинаковы $R_{\text{м}\delta 1} = R_{\text{м}\delta 2}$, так как $\delta_1 = \delta_2$, а сечения воздушных зазоров равны сечению стальных магнитопроводов $S_{\delta 1} = S_{\delta 2} = (20 \cdot 50) \text{ мм}^2 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$. Относительная магнитная проницаемость воздуха $\mu_\delta = 1^5$. Тогда магнитные сопротивления воздушных зазоров $R_{\text{м}\delta 1}$ и $R_{\text{м}\delta 2}$ будут равны

$$R_{\text{м}\delta 1} = R_{\text{м}\delta 2} = R_{\text{м}\delta} = \frac{\delta_1}{\mu_\delta \cdot \mu_0 \cdot S_\delta} = \frac{0,001}{1 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 7,958 \cdot 10^5 \text{ А/Вб}.$$

Тогда в схеме замещения магнитной цепи (см. рисунок 3) суммарное эквивалентное магнитное сопротивление всей цепи будет равно

$$R_{\text{м}\Sigma 2} = 2 \cdot R_{\text{м}\delta} + R_{\text{мс}1} + R_{\text{мс}2} + R_{\text{маг}} = 9220,336 \cdot 10^3 \text{ А/Вб}.$$

Величина магнитного потока в этой магнитной цепи составит

$$\Phi_2 = \frac{F_{\text{маг}}}{R_{\text{м}\Sigma 2}} = \frac{9\,094,6}{9\,220,336 \cdot 10^3} = 0,986 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}. \quad (6)$$

⁵ Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. – Изд. 6-е испр. – М.: Наука, 1974. – 944 с.

Из сравнения полученных магнитных потоков в выражениях (5) и (6) видно, что введение воздушных зазоров в магнитную цепь уменьшает магнитный поток, но незначительно. Относительное уменьшение магнитного потока в рассмотренной магнитной цепи составляет

$$\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\Phi_1} \cdot 100\% = 17,282\% \quad (7)$$

Причиной такого слабого уменьшения магнитного потока при введении воздушных зазоров в данной магнитной цепи является большое магнитное сопротивление постоянного магнита. Относительная магнитная проницаемость постоянного магнита $\mu_m = 1,05$, в то время как для воздуха относительная магнитная проницаемость $\mu = 1,0$. Таким образом, в плане магнитного сопротивления постоянный магнит ведет себя почти как воздушный зазор, длина которого равна длине магнита вдоль оси намагничивания. Поэтому в магнитных цепях, в которых МДС задается постоянными магнитами, из-за малого эффекта не имеет смысла бороться за исключение воздушных зазоров с целью увеличения магнитного потока.

Далее рассмотрим такую же по геометрическим размерам магнитную цепь с двумя воздушными зазорами и магнитопроводом из того же материала, но исключим из нее постоянный магнит (рисунок 4). МДС в этой цепи задается катушкой с током (электромагнитом).

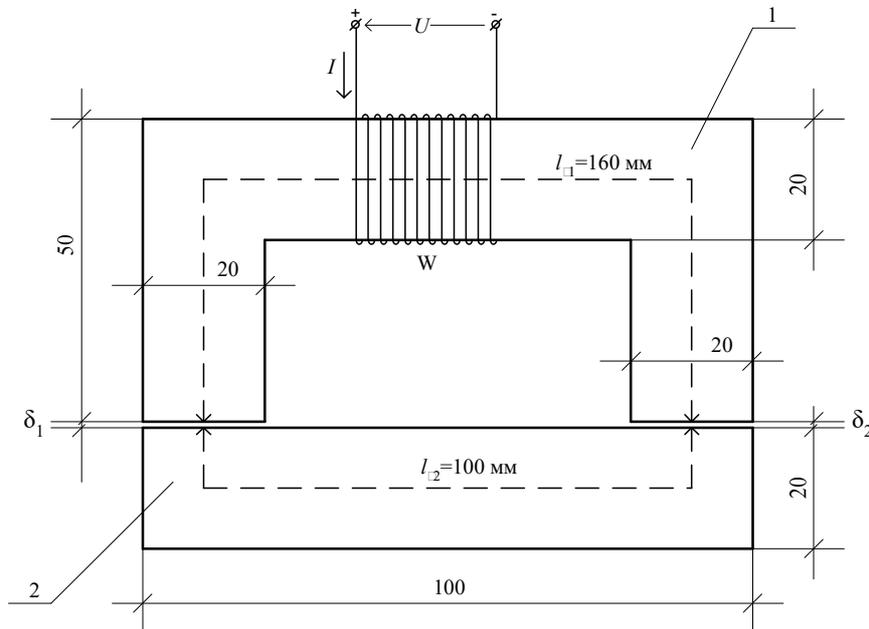


Рисунок 4. – Магнитная цепь с двумя воздушными зазорами и электромагнитом

В магнитной цепи (см. рисунок 4) сохраним величины воздушных зазоров $\delta_1 = \delta_2 = 1$ мм и толщину магнитопровода $b = 50$ мм. Длина средней линии магнитопровода 1 увеличится до $l_{c1} = 160$ мм (вместо постоянного магнита – сталь), длина средней линии магнитопровода 2 сохранится $l_{c2} = 100$ мм, относительная магнитная проницаемость магнитопровода сохранится $\mu_{cm} = 4000$.

Предположим, что магнитная цепь замкнута, то есть воздушные зазоры исключены $\delta_1 = \delta_2 = 0$. В этом случае эквивалентная схема замещения приведенной магнитной цепи (см. рисунок 4) принимает вид, показанный на рисунке 5.

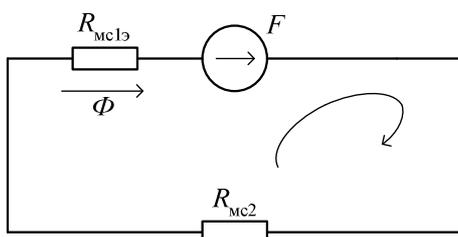


Рисунок 5. – Эквивалентная схема замещения магнитной цепи с электромагнитом и исключенными воздушными зазорами

МДС, создаваемая катушкой с током, определяется в виде [3]

$$F = I \cdot W \quad (8)$$

В магнитной цепи (см. рисунок 4) проходит магнитный поток Φ_3 , равный по величине магнитному потоку Φ_1 , протекающему в магнитной цепи (см. рисунок 1) с постоянным магнитом. Таким образом, $\Phi_3 = \Phi_1 = 1,192 \cdot 10^{-3}$ Вб.

Теперь необходимо определить величину МДС F магнитной цепи (см. рисунок 4) для получения такого магнитного потока. Из схемы замещения этой магнитной цепи (см. рисунок 5) видно, что суммарное эквивалентное магнитное сопротивление магнитной цепи можно получить в виде

$$R_{\Sigma 3} = R_{\Sigma 1} + R_{\Sigma 2}, \quad (9)$$

где $R_{\Sigma 2} = 19,895 \cdot 10^3$ А/Вб – магнитное сопротивление магнитопровода 2, такое же, как в магнитной цепи (см. рисунок 1);

$R_{\Sigma 1}$ – магнитное сопротивление магнитопровода 1 в магнитной цепи (см. рисунок 4). Оно не равно $R_{\Sigma 1}$, так как длина средней линии l_{c1} магнитопровода 1 стала больше на 10 мм – $l_{c1} = 160$ мм:

$$R_{\Sigma 1} = \frac{l_{c1}}{\mu_{cm} \cdot \mu_0 \cdot S_{c1}} = \frac{0,16}{4000 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 31,831 \cdot 10^3 \text{ А/Вб}.$$

Тогда согласно (9) получим

$$R_{\Sigma 3} = 19,895 \cdot 10^3 + 31,831 \cdot 10^3 = 51,726 \cdot 10^3 \text{ А/Вб}.$$

Необходимая МДС F в магнитной цепи (см. рисунок 4) для создания магнитного потока $\Phi_3 = \Phi_1 = 1,192 \cdot 10^{-3}$ Вб согласно схеме замещения (см. рисунок 5) может быть найдена по закону Ома для магнитной цепи [3]:

$$F = \Phi_3 \cdot R_{\Sigma 3} = 1,192 \cdot 10^{-3} \cdot 51,726 \cdot 10^3 = 61,65 \text{ А}. \quad (10)$$

При введении воздушных зазоров $\delta_1 = \delta_2 = 1$ мм в магнитную цепь (см. рисунок 4) эквивалентная схема замещения магнитной цепи примет вид, как на рисунке 6).

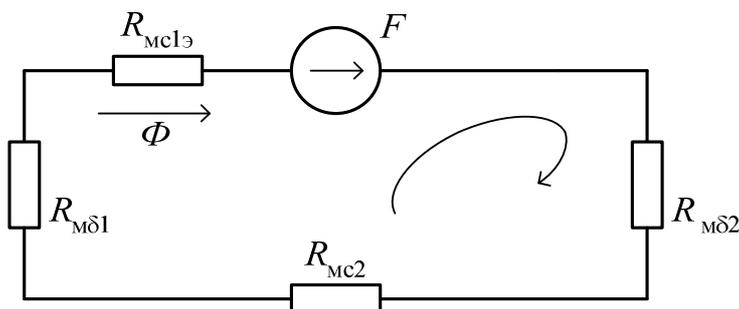


Рисунок 6. – Эквивалентная схема замещения магнитной цепи с электромагнитом и двумя воздушными зазорами $\delta_1 = \delta_2 = 1$ мм

В этой схеме замещения величина МДС F соответствует (10), магнитные сопротивления участков магнитопровода $R_{\Sigma 1}$ и $R_{\Sigma 2}$ не изменятся, добавятся только магнитные сопротивления воздушных зазоров.

$$R_{\Sigma \delta 1} = R_{\Sigma \delta 2} = R_{\Sigma \delta} = \frac{\delta_1}{\mu_{\delta} \cdot \mu_0 \cdot S_{\delta}} = \frac{0,001}{1 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 7,958 \cdot 10^5 \text{ А/Вб}.$$

Суммарное магнитное сопротивление магнитной цепи (см. рисунок 6) будет равно

$$R_{\Sigma 4} = R_{\delta 1} + R_{\delta 2} + R_{\text{мс}1\text{э}} + R_{\text{мс}2} = 7,958 \cdot 10^5 \cdot 2 + 19,895 \cdot 10^3 + 31,831 \cdot 10^3 = 1643,326 \cdot 10^3 \text{ А/Вб}.$$

Тогда величина магнитного потока в этой магнитной цепи уменьшится до значения

$$\Phi_4 = \frac{F}{R_{\Sigma 4}} = \frac{61,65 \text{ А}}{1643,326 \cdot 10^3 \text{ А/Вб}} = 0,0375 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}. \quad (11)$$

Относительное уменьшение магнитного потока при введении воздушных зазоров в магнитную цепь с электромагнитом составляет

$$\frac{\Phi_3 - \Phi_4}{\Phi_3} \cdot 100 \% = \frac{1,192 \cdot 10^{-3} - 0,0375 \cdot 10^{-3}}{1,192 \cdot 10^{-3}} \cdot 100 \% = 96,854 \%. \quad (12)$$

Из сравнения (7) и (12) видно, что относительное уменьшение магнитного потока при введении воздушных зазоров в магнитную цепь с постоянным магнитом составляет всего 17,282 %, а при введении воздушных зазоров в магнитную цепь с электромагнитом магнитный поток уменьшается на 96,854 %. Из этого следует, что в магнитной цепи с электромагнитом степень влияния воздушных зазоров на изменение магнитного потока значительно выше. Конечно, если в качестве материала магнитопровода применить конструкционную углеродистую сталь, у которой относительная магнитная проницаемость много меньше ($\mu_{cm} = 100$), то и указанная степень влияния тоже резко уменьшится, но все равно будет преобладать. При этом, конечно же, не следует перенасыщать магнитопровод цепи магнитным потоком. Вместе с тем, полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что в магнитной цепи с электромагнитом (катушкой с током) в качестве источника МДС можно получить необходимую величину магнитного потока при меньшей величине МДС F .

Поскольку в магнитных цепях с электромагнитом в качестве источника МДС воздушные зазоры очень сильно ослабляют магнитные потоки, то в таких цепях имеет смысл их исключить из магнитной цепи. Соответственно, в устройствах прямого преобразования механической энергии в тепловую в качестве источников МДС целесообразно использовать катушку с током (электромагнит) и конструктивно постараться исключить воздушные зазоры в магнитных цепях. Это позволит повысить эффективность устройств прямого преобразования механической энергии в тепловую.

Заключение.

1. В результате проведенного сравнительного анализа неразветвленных магнитных цепей с источниками МДС в виде постоянного магнита и в виде катушки с током (электромагнита) выявлено, что в цепи с постоянным магнитом введение и исключение воздушных зазоров слабее влияет на изменение магнитного потока по сравнению с магнитной цепью, содержащей катушку с током (электромагнит). Это является следствием того, что относительная магнитная проницаемость материала магнита ($\mu_m = 1,05$) близка к относительной магнитной проницаемости воздуха ($\mu_s = 1$). В результате магнитное сопротивление самого магнита вдоль оси намагничивания соизмеримо с магнитным сопротивлением воздушного зазора такой же длины. Следовательно, основная часть МДС постоянного магнита расходуется на преодоление собственного магнитного сопротивления.

2. В магнитной цепи с источником МДС в виде катушки с током (электромагнитом) введение и исключение воздушных зазоров значительно влияет на магнитный поток в цепи. Потому в магнитных цепях устройств прямого преобразования механической энергии в тепловую для повышения эффективности преобразования в качестве источников МДС целесообразнее использовать катушку с током (электромагнит), конструктивно исключив воздушные зазоры в магнитных цепях. В этом случае можно получить более интенсивные магнитные потоки при меньших значениях МДС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вершинин А. С., Грозберг Ю. Г. Повышение эффективности прямого преобразования механической энергии в тепловую // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2022. – № 4. – С. 56–61. – DOI: [10.52928/2070-1624-2022-38-4-56-61](https://doi.org/10.52928/2070-1624-2022-38-4-56-61).
2. Вершинин А. С., Теремецкий Д. А. Способ повышения эффективности прямого преобразования механической энергии в тепловую // Сб. материалов VI Всерос. науч.-практ. конф. «Энергетика и энергосбережение: теория и практика»,

- Кемерово, 8–10 дек. 2021 / Под ред. Р. В. Беляевского, И. А. Лобур. – Кемерово: КузГТУ, 2022. – С. 105-1–105-5. – URL: <https://science.kuzstu.ru/wp-content/Events/Conference/energ/2021/energ/pages/Articles/105.pdf>.
3. Демирчян К. С., Нейман Л. Р., Коровкин Н. В. и др. Теоретические основы электротехники: в 3-х т.: учеб. для вузов. – 4-е изд. – СПб.: Питер, 2003. – Т. 2. – 576 с.

REFERENCES

1. Vershinin, A. S., & Grozberg, Ju. G. (2022). Povyshenie jeffektivnosti prjamogo preobrazovaniya mehanicheskoy jenerгии v teplovuju [Improving Direct Conversion Efficiency Mechanical Energy into Heat]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (4), 56–61. DOI: [10.52928/2070-1624-2022-38-4-56-61](https://doi.org/10.52928/2070-1624-2022-38-4-56-61). (In Russ., abstr. in Engl.).
2. Vershinin, A. S., & Teremeckij, D. A. (2022). Sposob povysheniya jeffektivnosti prjamogo preobrazovaniya mehanicheskoy jenerгии v teplovuju [A Method for Increasing the Efficiency of Direct Conversion of Mechanical Energy into Thermal Energy]. In R. V. Beljaevskij (Eds.) & I. A. Lobur (Eds.) *Jenergetika i jenergosberezhenie: teorija i praktika: sb. materialov [Energy and energy saving: theory and practice]* (105-1–105-5). Kemerovo: KuzGTU. (In Russ.). <https://science.kuzstu.ru/wp-content/Events/Conference/energ/2021/energ/pages/Articles/105.pdf>. (In Russ.).
3. Demirchjan, K. S., Nejman, L. R., Korovkin, N. V., & Chechurin V. L. (2003). *Teoreticheskie osnovy jelektrotehniki: v 3 t. T. 2. [Theoretical foundations of electrical engineering (in 3 vol., Vol. 2)]*. St.-Petersburg: Piter. (In Russ.).

Поступила 05.10.2023

**THE CHOICE OF THE TYPE OF MAGNETIC CIRCUITS IN INDUCTION DEVICES
DIRECT CONVERSION OF MECHANICAL ENERGY INTO THERMAL ENERGY**

M. VYSOTSKI, A. VERSHININ, Y. GROZBERG
(*Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk*)

As the technical characteristics of permanent magnets manufactured by the industry improved, they began to be used more often in the generation of electricity, as well as in induction devices for direct conversion of mechanical energy into thermal energy. To increase the efficiency of the latter, it is necessary either to increase the frequency of interruptions of magnetic fluxes, or to increase their intensity. In this paper, a comparative analysis of unbranched magnetic circuits with sources of magnetomotive force (MDS) in the form of a permanent magnet and in the form of a coil with a current (electromagnet) is carried out in order to quantify the effect of air gaps on the change of magnetic fluxes in these circuits. The results of this comparative analysis make it possible to optimize the choice of the type of magnetic circuits in induction devices for direct conversion of mechanical energy into thermal energy.

Keywords: magnetic circuit, air gap, converter, mechanical energy, thermal energy, magnetic resistance, magnetic permeability, magnetomotive force, magnetic flux.

УДК 621.318

DOI 10.52928/2070-1624-2023-41-2-56-62

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОХОЖДЕНИЯ МАГНИТНЫХ ПОТОКОВ ЧЕРЕЗ ПЕРЕКАТЫВАЮЩИЕСЯ РОЛИКИ В СОСТАВЕ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

*М. Э. ВЫСОЦКИЙ, канд. техн. наук, доц. А. С. ВЕРШИНИН,
канд. техн. наук, доц. Ю. Г. ГРОЗБЕРГ*

(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

Среди большого разнообразия преобразовательных устройств встречаются устройства для прямого преобразования механической энергии в тепловую. Они бывают различных типов, в том числе и индукционного. Одним из способов повышения эффективности преобразования в таких устройствах является исключение воздушных зазоров в коммутируемых магнитных цепях для повышения интенсивности магнитных потоков. Степень ослабления магнитного потока при прохождении его через перекатывающиеся ролики в составе магнитной цепи пока что не оценивалась, поэтому в данной работе проведена количественная оценка степени ослабления магнитного потока в разных режимах работы неразветвленной магнитной цепи, содержащей перекатывающийся роликовый элемент. Полученные зависимости позволяют судить об уровне повышения эффективности работы индукционных устройств прямого преобразования механической энергии в тепловую с указанным вариантом исключения воздушных зазоров в магнитных цепях устройства.

Ключевые слова: магнитная цепь, воздушный зазор, преобразователь, механическая энергия, тепловая энергия, роликовый элемент, магнитопровод, ферромагнитный вкладыш, магнитный поток.

Введение. К классу устройств альтернативной энергетики могут быть отнесены и устройства прямого преобразования механической энергии в тепловую. Известны устройства такого преобразования^{1, 2, 3} [1], среди которых существует ряд устройств с индукционным нагревом при изменении магнитных потоков⁴. В работе [2] описано устройство прямого преобразования механической энергии в тепловую, в котором повышение эффективности преобразования достигается за счет исключения воздушных зазоров в магнитных цепях. Магнитные потоки коммутируются (прерываются и замыкаются) через подвижные роликовые элементы (прерыватели) магнитных цепей. Воздушные зазоры в магнитных цепях исключены, однако вопрос интенсивности прохождения магнитного потока через перекатывающиеся ролики, а также влияние контактного сопротивления на интенсивность прохождения магнитного потока в данной конструкции не освещены.

Так как в [2] магнитные потоки замыкаются через катящиеся ролики, которые становятся составной частью магнитной цепи, то возникает необходимость количественно оценить степень влияния подвижных элементов (роликов) магнитной цепи на прохождение магнитных потоков. Очевидно, что в данной конструкции будет наблюдаться некоторое ослабление магнитного потока при прохождении через роликовый элемент магнитной цепи и, следовательно, возникает необходимость количественной оценки степени этого ослабления.

Цель работы – экспериментальным способом количественно оценить степень ослабления магнитного потока при его прохождении через роликовые элементы разных типов магнитных цепей и впоследствии применить указанный способ исключения воздушных зазоров в конструкции индукционного устройства прямого преобразования механической энергии в тепловую с учетом указанного ослабления.

Методы исследований. Для проведения экспериментальных исследований влияния роликового элемента неразветвленной магнитной цепи на прохождение магнитного потока удобно использовать трансформатор на стержневом разборном сердечнике типа ПЛ (рисунок 1), например ТС-180.

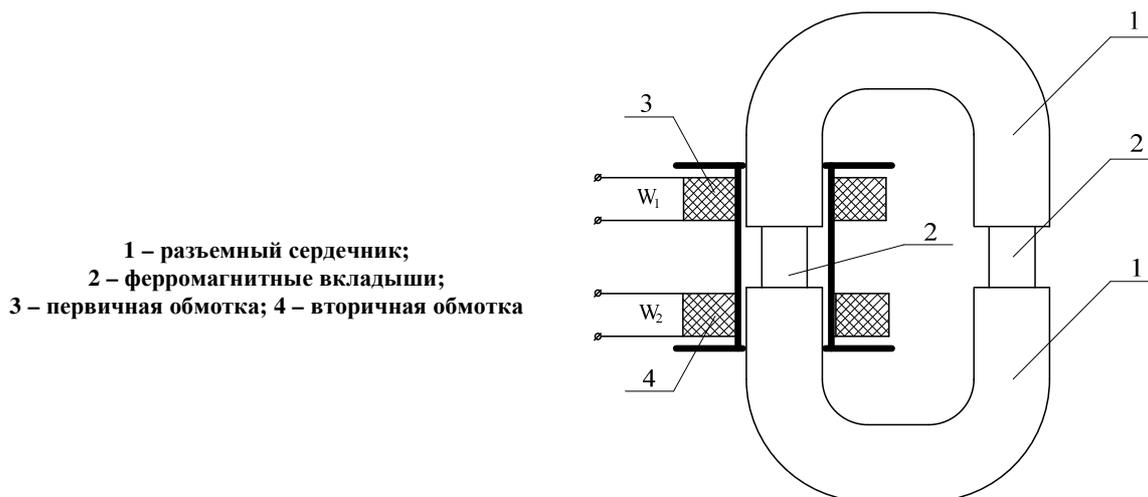
Ферромагнитные вкладыши 2 выполнены в форме прямоугольного параллелепипеда, имеют одинаковое сечение и расположены в неподвижном магнитопроводе 1. Магнитные потоки в таком трансформаторе (см. рисунок 1) будем считать опорными. Тогда, заменив один из ферромагнитных вкладышей 2 на роликовый элемент, при условии, что площади основания вкладыша и роликового элемента будут одинаковыми и длина вкладыша равна длине роликового элемента, будем сравнивать магнитные потоки в указанных магнитных цепях при равных значениях магнитодвижущей силы (МДС).

¹ Опозитный ветротеплогенератор: пат. РФ 2612237 / А. Ф. Серов, В. Н. Мамонов, В. И. Терехов, А. Д. Назаров. – Оpubл. 03.03.2017.

² Устройство для преобразования механической энергии в тепловую: пат. 2097946 / А. И. Елшин, В. М. Казанский, Е. Д. Карманов, В. И. Михеев. – Оpubл. 27.11.1997.

³ Induction heating device and power generation system provided with same: pat. JP WO2012169398 / Т. Okazaki, Т. Matsuo, Т. Mifune. – Publ. date 13.12.2012.

⁴ См. сноски 2; 3.



1 – разъемный сердечник;
2 – ферромагнитные вкладыши;
3 – первичная обмотка; 4 – вторичная обмотка

Рисунок 1. – О-образный трансформатор с разъемным сердечником

Схемы конструкций элементов магнитных цепей с перекатываемыми роликами, которые были исследованы в данной работе, приведены на рисунках 2–4. В качестве роликов использовались как полностью ферромагнитные цилиндры, так и шарикоподшипники таких же размеров.

Для каждого из приведенных видов элементов магнитных цепей с перекатываемыми роликами требуется получить функциональную зависимость магнитного потока от МДС ($\Phi_i = f(F)$) и сравнить ее с опорной функцией $\Phi_0 = f(F)$ для магнитной цепи с двумя ферромагнитными вставками. Это позволит определить, какой из исследуемых элементов магнитной цепи в меньшей степени ослабляет магнитный поток.

Рисунок 2. – Схема элемента магнитной цепи с двумя перекатываемыми роликами или подшипниками и П-образным основанием

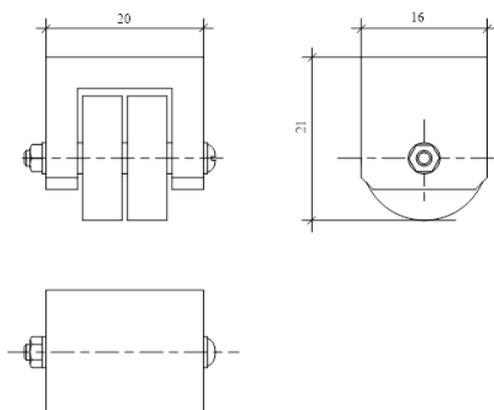
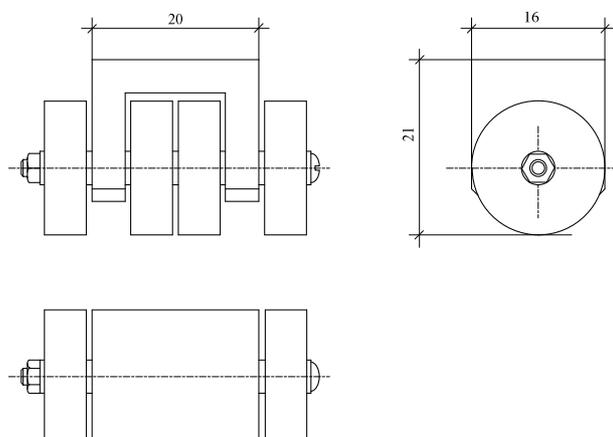


Рисунок 3. – Схема элемента магнитной цепи с четырьмя перекатываемыми роликами или подшипниками и П-образным основанием



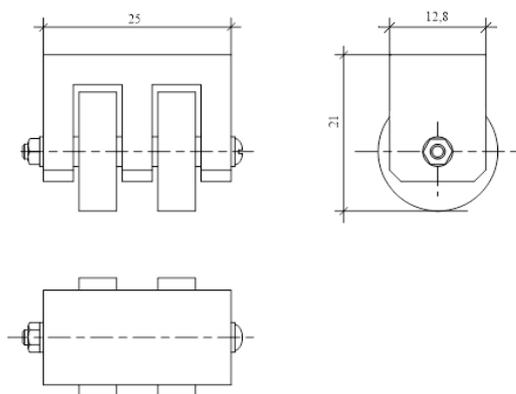


Рисунок 4. – Схема элемента магнитной цепи с двумя перекатывающимися роликами или подшипниками и Ш-образным основанием

Для экспериментального исследования влияния роликового элемента неразветвленной магнитной цепи на прохождение магнитного потока следует собрать электрическую схему, приведенную на рисунке 5.

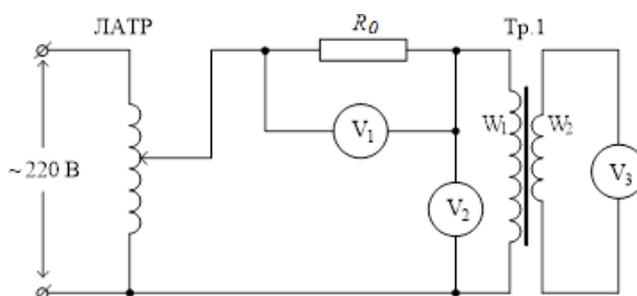


Рисунок 5. – Схема включения трансформатора Тр.1 (ТС-180) для исследования магнитных цепей

При этом будем использовать обмотки, расположенные только на одной катушке трансформатора ТС-180, то есть половину обмоток. Тогда обмотка $W_1 = 375$ витков, а $W_2 = 76$ витков⁵. Трансформатор работает в режиме холостого хода.

Измерение тока в первичной обмотке трансформатора Тр.1 (см. рисунок 5) выполняется вольтметром V_1 по падению напряжения на образцовом сопротивлении $R_0 = 100$ Ом или $R_0 = 10$ Ом в зависимости от значения тока. Тогда величина тока I_1 , А, может быть определена в виде

$$I_1 = U_1 / R_0, \quad (1)$$

где U_1 – показания вольтметра V_1 .

Величина МДС F , А, приложенной к магнитной цепи

$$F = I_1 \cdot W_1. \quad (2)$$

Вольтметром V_3 измеряется действующее значение ЭДС E_2 вторичной обмотки трансформатора Тр.1. Изменяя с помощью ЛАТРа напряжение на первичной обмотке Тр.1 (контроль по вольтметру V_2), измеряем величину E_2 с последующим вычислением действующего значения магнитного потока Φ [4]:

$$\Phi = \frac{E_2}{\omega \cdot W_2}, \quad (3)$$

где E_2 – действующее значение ЭДС, измеренное во вторичной обмотке T_1 ;

W_2 – число витков вторичной обмотки;

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ – круговая частота.

⁵ Трансформаторы бытовой радиоэлектронной аппаратуры: справочник. – М.: Радио и связь, 1994. – 320 с. – (Массовая радиобиблиотека; вып. 1186).

Величину МДС определяем как произведение тока I_1 в первичной обмотке Тр.1 на число витков W_1 . В результате получаем зависимость $\Phi = f(F)$, то есть зависимость магнитного потока Φ от величины МДС F для исследуемой магнитной цепи.

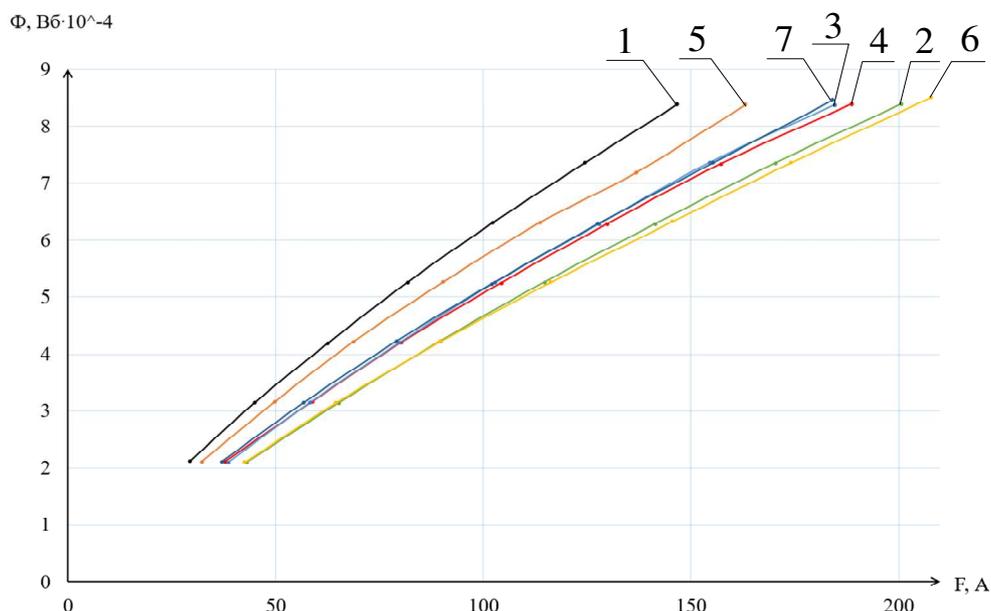
Перед проведением исследований определим верхнюю границу диапазона изменения магнитного потока. Для этого в трансформаторе Тр.1 (см. рисунок 1) удалим ферромагнитные вкладыши 2 из магнитной цепи и подключим его в схему (см. рисунок 2). С помощью ЛАТРа выставим напряжение на первичной обмотке Тр.1 $U_2 = 110$ В (по вольтметру V_2) и измерим ЭДС E_2 вольтметром V_3 . Получим $E_2 = 22,5$ В. Тогда согласно (1) верхнее значение магнитного потока Φ_{max} , Вб, составит

$$\Phi_{max} = \frac{E_2}{\omega \cdot W_2} = \frac{22,5}{314 \cdot 76} = 9,43 \cdot 10^{-4}.$$

Далее собираем магнитопровод трансформатора согласно рисунку 1 вместе с вкладышами и снимаем опорную характеристику магнитной цепи $\Phi_0 = f(F)$ без роликового элемента. Поскольку величина ЭДС E_2 пропорциональна величине магнитного потока $E_2 = \omega \cdot W_2 \cdot \Phi$, то, разбив весь диапазон изменения E_2 (0 – 22,5 В) на примерно равные части, получим ряд точек изменения магнитного потока, вычисляемого по формуле (3). Изменяя вольтметром V_1 в каждой точке характеристики падение напряжения на R_0 , вычисляем ток I_1 по формуле (1) и далее МДС по формуле (2). В результате получим опорную характеристику $\Phi_0 = f(F)$.

Затем заменяем один из вкладышей 2 в доступном стержне магнитопровода 1 (см. рисунок 1) на исследуемый роликовый элемент и повторяем измерения с построением характеристики $\Phi_i = f(F)$.

В результате выполненных измерений по вышеописанной методике было получено семейство функциональных зависимостей $\Phi_i = f(F)$ (рисунок 6).



- 1 – с ферромагнитными вставками (опорная);
- 2 – содержит роликовый элемент с двумя подшипниками и П-образным основанием;
- 3 – содержит роликовый элемент с четырьмя подшипниками и П-образным основанием;
- 4 – содержит роликовый элемент с двумя полнотельными роликами и П-образным основанием;
- 5 – содержит роликовый элемент с четырьмя полнотельными роликами и П-образным основанием;
- 6 – содержит роликовый элемент с двумя подшипниками и Ш-образным основанием;
- 7 – содержит роликовый элемент с двумя полнотельными роликами и Ш-образным основанием

Рисунок 6. – Графики зависимостей $\Phi_i = f(F)$ для магнитных цепей

Как видно из рисунка 6, графики 2–7 зависимости $\Phi_i = f(F)$ для всех исследованных вариантов построения элементов магнитных цепей с роликами (подшипниками) лежат ниже кривой 1, которая соответствует зависимости $\Phi_0 = f(F)$ для опорной магнитной цепи. Это значит, что магнитный поток ослабляется,

проходя через роликовый элемент. Однако, как видно из рисунка 6, разброс функций $\Phi_i = f(F)$ относительно функции $\Phi_0 = f(F)$ сравнительно невелик и при использовании любого варианта конструкции роликового элемента магнитной цепи магнитный поток снижается значительно меньше по сравнению с наличием воздушного зазора [2].

Количественно оценить снижение магнитного потока в магнитной цепи с роликовыми элементами относительно опорной магнитной цепи в относительных единицах при постоянной МДС $F = \text{constant}$ можно по формуле

$$\delta_{\Phi} = \frac{\Phi_0 - \Phi_i}{\Phi_0} \cdot 100 \% \quad (4)$$

Из сравнения между собой зависимостей 2 (с двумя подшипниками) и 4 (с двумя полнотельными роликами) видно, что полнотельные ролики примерно на 10% меньше ослабляют магнитный поток. Аналогичный вывод можно сделать при сравнении зависимостей 3 (с четырьмя подшипниками) и 5 (с четырьмя полнотельными роликами).

Увеличение количества роликов (подшипников) в точке контакта магнитной цепи также приводит к уменьшению снижения магнитного потока, что естественно и очевидно. Это видно из сравнения зависимостей 2 и 3, а также 4 и 5.

Кривые 2 и 6 с двумя подшипниками и, соответственно, с П-образным и Ш-образным основаниями практически совпадают, предполагая наличие погрешностей изготовления и измерений. Аналогично кривые 4 и 7 с двумя полнотельными роликами и тоже с П-образным и Ш-образным основаниями также совпадают. Отсюда можно сделать вывод, что конструкция основания роликового элемента практически не влияет на ослабление магнитного потока, а основное влияние оказывают конструктивные размеры роликов.

Примерная схема построения такого устройства прямого преобразования механической энергии в тепловую с жидким теплоносителем приведена на рисунке 7.

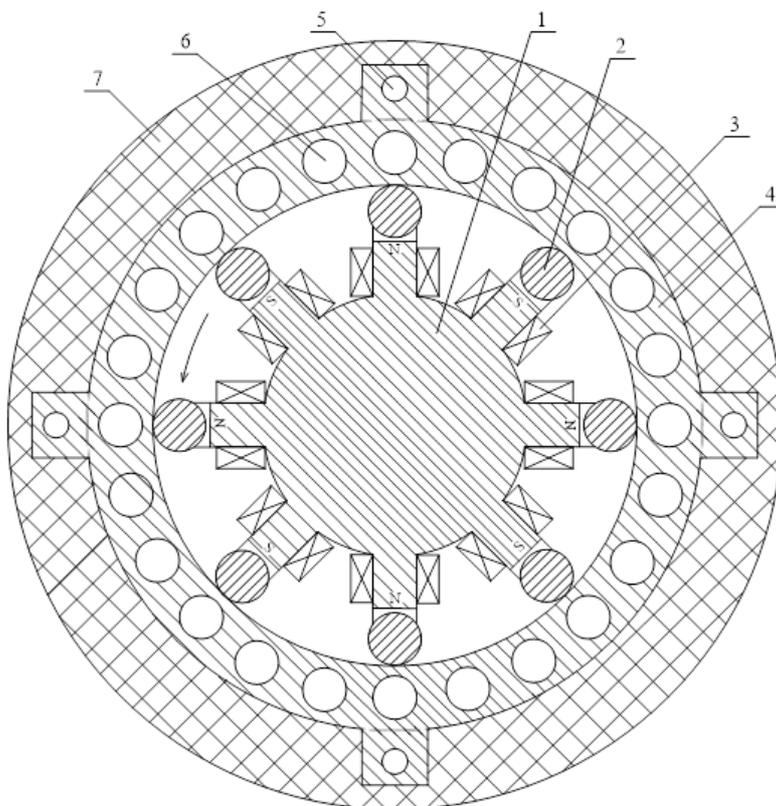
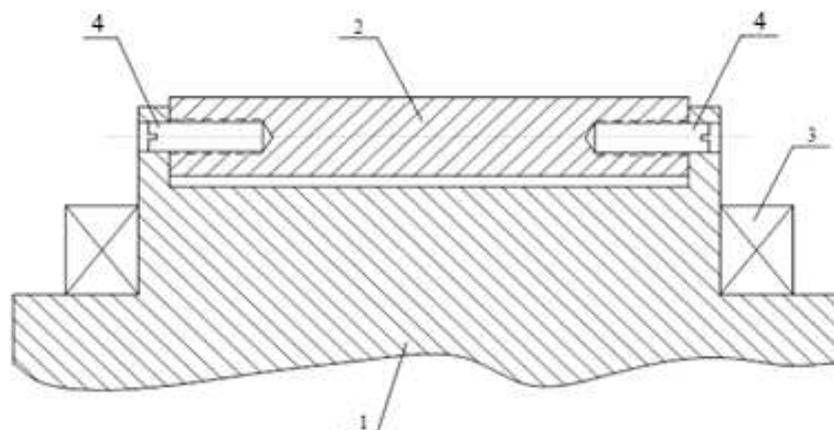


Рисунок 7. – Схема устройства прямого преобразования механической энергии в тепловую с жидким теплоносителем

В состав устройства входит ротор 1 с явно выраженными полюсами, на которых крепятся перекачивающиеся ролики 2, проводящие магнитные потоки. На полюса ротора 1 надеты катушки с током 3, создающие в соседних полюсах МДС в противоположных направлениях поочередно по контуру статора 4,

выполненного из ферромагнитного материала с повышенным удельным электрическим сопротивлением. Ролики 2 перекачиваются по внутренней цилиндрической поверхности статора 4, в толще которого высверлены продольные каналы 6 для циркуляции теплоносителя. В дополнительных внешних продольных ребрах статора 4 предусмотрены крепежные отверстия 5 для стяжных шпилек. Для снижения потерь тепла весь преобразовательный узел закрыт слоем теплоизоляции 7.

Условно возможный вариант подвески перекачиваемых роликов 2 на полюсах ротора 1 представлен на рисунке 8.



1 – ротор; 2 – ролик; 3 – обмотка с током; 4 – полюсь вращения

Рисунок 8. – Подвеска роликовых элементов на роторе

На рисунке 8 показан продольный разрез полюса ротора 1 с перекачиваемым роликом 2. В полюсе сделан поперечный вырез, в боковых стенках которого на полюсах 8 установлен ролик 2, а на сам полюс одета катушка с током 3. Все катушки 3 соединены последовательно таким образом, чтобы направления МДС в соседних полюсах были противоположны. Ток возбуждения в катушки 3 подается от внешнего источника через контактные кольца на валу ротора и щетки.

Устройство работает следующим образом. При подаче тока возбуждения в катушки 3 и при вращении ротора 1 магнитные потоки замыкаются в поперечном сечении через соседние полюсы ротора 1, через сам ротор, через перекачиваемые ролики 2 и статор 4. В результате того, что магнитные потоки в соседних полюсах ротора 1 противоположны, распределение магнитных потоков в поперечном сечении статора 4 имеет участки с разными направлениями магнитных потоков (рисунок 9).

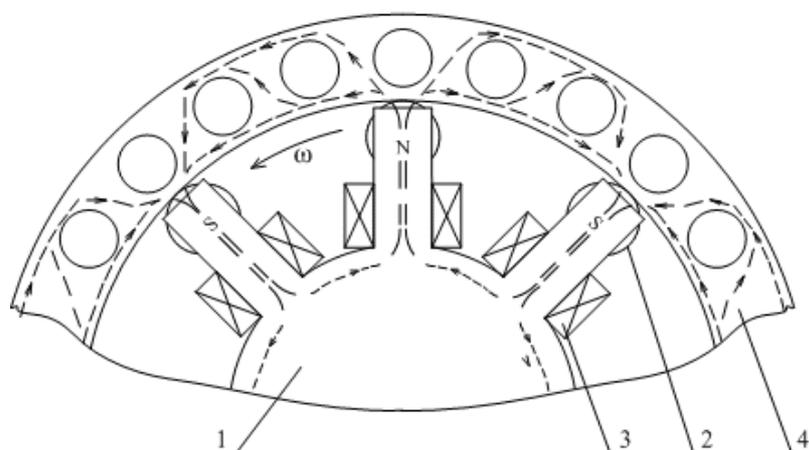


Рисунок 9. – Прохождение магнитных потоков в поперечном сечении преобразователя

Из рисунка 9 видно, что через соседние участки статора 4 между полюсами ротора 1 в поперечном сечении проходят магнитные потоки противоположных направлений. При вращении ротора 1 эти участки тоже смещаются. Следовательно, через каждую неподвижную точку статора 4 проходит переменный магнитный поток, который меняет направление несколько раз за один оборот ротора 1.

Возникающие вихревые токи в статоре 4 разогревают его, и проходящий теплоноситель в продольных каналах статора нагревается.

Поскольку в магнитных цепях этого преобразователя механической энергии в тепловую исключены воздушные зазоры, то эффективность такого преобразователя должна быть выше, чем у преобразователя⁶ при меньших затратах на возбуждение МДС.

Закключение.

1. В результате проведенного экспериментального исследования прохождения магнитных потоков через перекачиваемые ролики ряда различных конструкций получены функциональные зависимости $\Phi_i = f(F)$ (см. рисунок 6) магнитных потоков Φ_i от намагничивающей силы F в неразветвленной магнитной цепи. Полученные зависимости позволяют количественно оценить степень ослабления магнитного потока при его прохождении через роликовые элементы различных типов.

2. Разработана примерная схема построения одного из вариантов устройства для прямого преобразования механической энергии в тепловую с исключением воздушных зазоров в магнитных цепях устройства за счет перекачиваемых роликов. Это позволяет ожидать более высокой эффективности работы устройства прямого преобразования механической энергии в тепловую при меньших затратах на возбуждение МДС в магнитных цепях устройства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мамонов В. Н., Миськив Н. Б., Назаров А. Д. и др. Генерация тепла в мультицилиндровой системе Куэтта – Тэйлора // Теплофизика и аэромеханика. – 2019. – Т. 26, № 5. – С. 729–739.
2. Вершинин А. С., Грозберг Ю. Г. Повышение эффективности прямого преобразования механической энергии в тепловую // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2022. – № 4. – С. 56–61. – DOI: [10.52928/2070-1624-2022-38-4-56-61](https://doi.org/10.52928/2070-1624-2022-38-4-56-61).
3. Свириденко Э. А., Китунович Ф. Г. Основы электротехники и электроснабжения. – Минск: Техноперспектива, 2008. – 435 с.

REFERENCES

1. Mamonov, V. N., Mis'kiv, N. B., Nazarov, A. D., Serov, A. F., & Terekhov V. I. (2019) Generatsiya tepla v mul'titsilindrovoy sisteme Kuetta – Teilora [Heat Generation in a Multi-Cylinder Couette – Taylor System]. *Teplofizika i aeromekhanika [Thermophysics and Aeromechanics]*, 26(5), 729–739. (In Russ.).
2. Vershinin, A. S., & Grozberg, Ju. G. (2022). Povyshenie jeffektivnosti prjamogo preobrazovaniya mehanicheskoy jenerгии v teplovuju [Improving Direct Conversion Efficiency Mechanical Energy into Heat]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (4), 56–61. DOI: [10.52928/2070-1624-2022-38-4-56-61](https://doi.org/10.52928/2070-1624-2022-38-4-56-61). (In Russ., abstr. in Engl.).
3. Sviridenko, Je. A., & Kitunovich, F. G. (2008). *Osnovy jelektrotehniki i jelektrosnabzhenija*. Minsk: Tehnoperspektiva. (In Russ.).

Поступила 05.10.2023

STUDY OF THE PASSAGE OF MAGNETIC FLUXES THROUGH ROLLING ROLLERS AS PART OF MAGNETIC CIRCUITS

M. VYSOTSKI, A. VERSHININ, Y. GROZBERG
(*Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk*)

Among the wide variety of different converting devices, there are also devices for the direct conversion of mechanical energy into thermal energy. They are of various types, including the induction type. One way to improve the conversion efficiency in such devices is to eliminate air gaps in switched magnetic circuits to increase the intensity of magnetic fluxes. The degree of weakening of the magnetic flux during its passage through the rolling rollers as part of the magnetic circuit has not yet been evaluated. Therefore, in this paper, an attempt is made to quantify the degree of weakening of the magnetic flux in different modes of operation of an unbranched magnetic circuit containing a rolling roller element. The obtained dependencies will make it possible to judge the level of increase in the efficiency of induction devices for the direct conversion of mechanical energy into thermal energy with the indicated option of excluding air gaps in the magnetic circuits of the device.

Keywords: magnetic circuit, air gap, converter, mechanical energy, thermal energy, roller element, magnetic drive, ferromagnetic insert, magnetic flux.

⁶ Induction heating device and power generation system provided with same: pat. JP WO2012169398 / T. Okazaki, T. Matsuo, T. Mifune. – Publ. date 13.12.2012.

УДК 621.382.323; 538.9

DOI 10.52928/2070-1624-2023-41-2-63-68

**МОДЕЛЬ ВЗАИМОСВЯЗИ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ
ТРАНЗИСТОРНОЙ СТРУКТУРЫ С ДВУМЕРНЫМ КАНАЛОМ
ДЛЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ****В. А. ЗАЙЦЕВ, В. В. МЕЛЬНИКОВА, канд. физ.-мат. наук Д. А. ПОДРЯБИНКИН,
канд. физ.-мат. наук, доц. А. Л. ДАНИЛЮК****(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск)**

Представлена модель и установлены закономерности взаимосвязи электрофизических параметров транзисторной структуры с двумерным каналом, основанные на самосогласовании электрохимического потенциала и концентрации носителей заряда двумерного канала в полевой транзисторной структуре. Такое самосогласование обеспечивается совмещением статистики Ферми – Дирака с условием электронейтральности транзисторной структуры. Рассмотрено влияние на электрофизические параметры транзисторной структуры с двумерным полупроводниковым каналом ширины запрещенной зоны материала канала, емкости подзатворного диэлектрика, емкости интерфейсных состояний. Разработанная модель взаимосвязи электрофизических параметров транзисторной структуры с двумерным каналом может использоваться в системах автоматизированного проектирования элементной базы микро- и нанoeлектроники.

Ключевые слова: транзисторная структура, двумерный полупроводник, канал, взаимосвязь электрофизических параметров, электрохимический потенциал, квантовая емкость, зарядовая неустойчивость.

Введение. Разработка и модернизация систем автоматизированного проектирования элементной базы приборов и устройств обработки и передачи цифровой информации является одним из ключевых направлений цифровой трансформации общества и производства. Создание и внедрение новой, более энергоэффективной элементной базы микро- и нанoeлектроники помимо решения технологических проблем также требует непрерывного совершенствования алгоритмов для автоматизированного проектирования элементной базы, разработки моделей новых элементов, пригодных для применения в системах автоматизированного проектирования, решения вопросов, связанных с верификацией новых моделей и их адаптацией к производству, построения с их помощью эквивалентных (электрических) схем.

Рост энергоэффективности и быстродействия транзисторов в настоящее время связывается с применением двумерных полупроводников. В таких транзисторах отсутствуют недостатки, присущие объемным транзисторам при уменьшении их размеров. К примеру, отсутствие обеднённой области, существующей в традиционных кремниевых МОП-структурах, ведёт к уменьшению паразитных параметров. К тому же отличительной чертой транзистора с двумерным каналом является важная роль квантовой ёмкости, связанной с видом энергетической зависимости плотности состояний в двумерном полупроводнике.

Одними из наиболее перспективных считаются дихалькогениды молибдена и вольфрама, обладающие прямой запрещённой зоной [1–4]. Их применение, а также аналогичных двумерных полупроводников с шириной запрещенной зоны до 1-2 эВ, позволяет достичь необходимых электрических параметров транзисторов с двумерными каналами [5; 6].

Наряду с решением технологических проблем для применения двумерных материалов в транзисторных структурах необходимо еще решить вопросы, связанные с режимами их оптимального функционирования. Это связано с тем обстоятельством, что электрические характеристики транзисторов с двумерными каналами самым существенным образом определяются взаимосвязью электрофизических параметров транзисторной структуры. Кроме свойств материалов, из которых формируются транзисторные структуры с двумерными каналами, режимы функционирования в значительной мере обуславливаются такими электрофизическими параметрами, как электрохимический потенциал μ , заряд канала Q , квантовая емкость канала C_Q , емкость канала C_{CH} и затвора C_G , емкость интерфейсных состояний C_{it} , которые самосогласованным образом влияют друг на друга и в конечном счете определяют электрические выходные характеристики транзистора. Главным образом, электрофизические параметры определяют передаточную характеристику и ее крутизну, а также выходную характеристику и ее коэффициент усиления по напряжению [7].

Таким образом, актуальны исследования взаимосвязи электрофизических параметров транзисторных структур с двумерными каналами, выявление влияния этой взаимосвязи на выходные характеристики, разработка моделей подобных взаимосвязей, пригодных для систем автоматизированного проектирования транзисторов с двумерными каналами.

Целью работы является определение взаимосвязи между электрохимическим потенциалом, концентрацией носителей заряда, зарядом канала, квантовой емкостью, емкостями канала и затвора, потенциалом

полевого электрода, емкостью подзатворного диэлектрика, емкостью состояний на интерфейсах транзисторной структуры и разработка модели такой взаимосвязи, пригодной для систем автоматизированного проектирования.

Модель взаимосвязи электрофизических параметров. Объектом моделирования является транзисторная структура, включающая двумерный полупроводниковый канал на диэлектрической подложке и полевой электрод (затвор), с отделенным от канала подзатворным диэлектриком. Для материала двумерного канала используются прямозонные дихалькогениды переходных металлов [8; 9]. Взаимосвязь между концентрацией электронов на единицу площади двумерного полупроводниковый канала n_e и его электрохимическим потенциалом μ задается выражением [6]

$$n_e(\mu) = \int_{E_c}^{\infty} \left(\frac{4\pi m_e}{h^2} \right) \sum_n H(E - E_n) f(E - \mu) dE, \quad (1)$$

где m_e – эффективная масса электронов;

h – постоянная Планка;

H – функция Хэвисайда;

E_n – энергия n^{th} -подзоны (превалирующий вклад в концентрацию носителей заряда вносит основное состояние с $n=0$);

E_c – энергия минимума зоны проводимости;

f – функция Ферми – Дирака.

Концентрация дырок n_h определяется аналогичным выражением.

Другая взаимосвязь между концентрацией электронов и электрохимическим потенциалом посредством потенциала полевого электрода V_G с учетом емкостей подзатворного диэлектрика и интерфейсных состояний определяется уравнением электростатики исходя из условия электронейтральности транзисторной структуры [10]

$$qV_G = \mu \left(1 + \frac{C_{it}}{C_{ox}} \right) + \frac{q^2 n_s(\mu)}{C_{ox}}, \quad (2)$$

где V_G – потенциал полевого электрода;

$n_s = n_e - n_h$,

q – элементарный заряд.

Совместное решение уравнений (1) и (2) позволяет определить зависимости электрохимического потенциала, концентрации носителей заряда и квантовой емкости $C_Q = q^2 (dn_s / dm)$ от потенциала полевого электрода V_G и найти взаимосвязи между ними.

Кроме квантовой емкости, важными параметрами являются емкость затвора и емкость канала, которые также взаимосвязаны с концентрацией носителей заряда и квантовой емкостью. В области низких частот ёмкости затвора и канала записываются следующим образом [10]:

$$C_G = \frac{d(n_s + N_G)}{dV_G} = \frac{C_Q + C_{it}}{1 + (C_Q + C_{it}) / C_{ox}}; \quad (3)$$

$$C_{CH} = \frac{d(n_e + n_h)}{dV_G} = \frac{C_Q}{1 + (C_Q + C_{it}) / C_{ox}}, \quad (4)$$

где N_G – число положительных зарядов в подзатворном диэлектрике на единицу площади.

Результаты расчетов и обсуждение. Для проведения расчетов были использованы следующие величины параметров транзисторной структуры с двумерным каналом: ширина запрещенной зоны материала двумерного канала $E_g = 0,25 - 2,1$ эВ, удельная емкость подзатворного диэлектрика $(0,03 - 4)10^{-3}$ Ф/м², удельная емкость интерфейса $C_{it} = (1 - 5)10^{-3}$ Ф/м², потенциал полевого электрода $V_G = 0 - 5$ В, эффективная масса электронов $(0,45 - 0,56)m_0$. Здесь m_0 – масса свободного электрона. Для случая $V_G > 0$

и $n_e \gg n_h$ проводились расчеты электрохимического потенциала канала μ , концентрации электронов, квантовой емкости, емкости затвора и канала при варьировании ширины запрещенной зоны E_g , емкости подзатворного диэлектрика C_{ox} , емкости интерфейсных состояний C_{it} . В результате установлено, что с увеличением потенциала полевого электрода электрохимический потенциал растет и выходит на насыщение. Рост электрохимического потенциала соответствует увеличению концентрации электронов и, соответственно, заряда канала Q (рисунок 1). Увеличение ширины запрещенной зоны приводит к сдвигу зависимости $m(Q)$ по оси Q в сторону меньших значений Q . Как показали проведенные расчеты, квантовая емкость канала C_Q при $V_G = 5$ В, $C_{ox} = 1,77 \cdot 10^{-3}$ Ф/м² и $C_{it} = 10^{-3}$ Ф/м² достигает величины 0,25 – 0,65 Ф/м² в зависимости от ширины запрещенной зоны E_g . Уменьшению квантовой емкости способствует рост ширины запрещенной зоны, уменьшение удельной емкости подзатворного диэлектрика и увеличение емкости C_{it} .

Определена взаимосвязь квантовой емкости и заряда канала $C_Q(Q)$. Эта взаимосвязь характеризуется следующим эффектом. При изменении ширины запрещенной зоны, емкости C_{ox} и емкости C_{it} зависимости $C_Q(Q)$ стягиваются в одну кривую. Полученный эффект объясняется наличием в данном случае самосогласованного изменения заряда канала и его электрохимического потенциала при варьировании величин C_{ox} , C_{it} , E_g . Такое самосогласование обусловлено наличием двух взаимосвязей концентрации носителей заряда и электрохимического потенциала: с одной стороны посредством статистики Ферми – Дирака, а с другой – условия электронейтральности транзисторной структуры. При этом зависимость квантовой емкости от емкости подзатворного диэлектрика характеризуется монотонным ростом, зависящим от потенциала полевого электрода и не зависящим от ширины запрещенной зоны (рисунок 2).

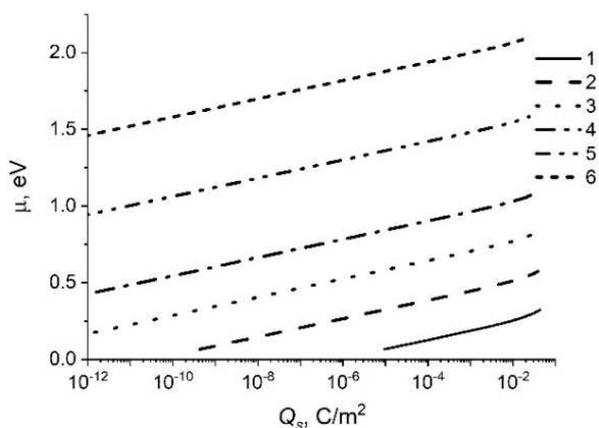


Рисунок 1. – Зависимость электрохимического потенциала двумерного канала от его заряда при варьировании E_g в диапазоне 0,26 – 2,08 эВ (соответственно кривые 1–6)

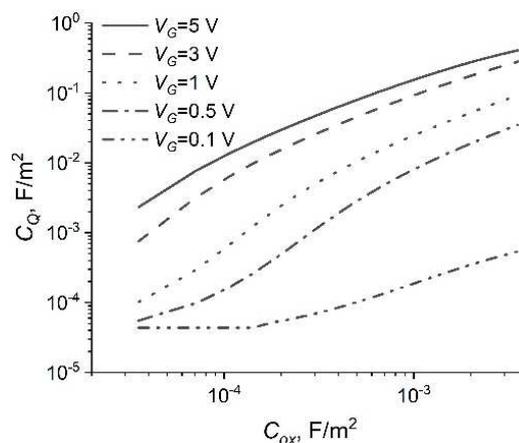


Рисунок 2. – Зависимость квантовой емкости транзисторной структуры с двумерным каналом от емкости подзатворного диэлектрика при варьировании V_G

Определены взаимосвязи емкостей затвора и канала с зарядом канала, а также установлено, что при варьировании ширины запрещенной зоны они также стягиваются в одну кривую, но при постоянных величинах емкости подзатворного диэлектрика и интерфейсных состояний. Полученные результаты характеризуют взаимосвязь емкостей затвора и канала с зарядом канала (рисунок 3). При варьировании ширины запрещенной зоны и постоянных значениях C_{ox} и C_{it} емкости канала и затвора стягиваются каждая в одну кривую, характеризуемую наличием насыщения. В области насыщения емкости C_G , $C_{CH} \approx C_{ox}$ (рисунок 4). Емкость C_{it} и потенциал V_G не влияют на насыщение, а только на начальные участки зависимостей $C_G(Q)$, $C_{CH}(Q)$ (см. рисунок 4). Следует отметить наличие характерных особенностей на кривых $C_G(Q)$, $C_{CH}(Q)$, которые связаны с их максимальными величинами в зависимости от ширины запрещенной зоны. Эти значения ограничиваются шириной запрещенной зоны. С ростом E_g наблюдается сдвиг областей насыщения в сторону меньших значений Q .

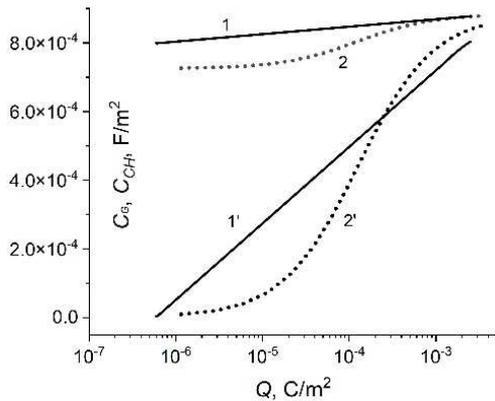


Рисунок 3. – Емкость затвора (1, 2) и канала (1', 2') в зависимости от заряда канала при различных емкостях интерфейса: 1, 1' – $C_{ii} = 8,2 \cdot 10^{-3} \text{ Ф/М}^2$, 2, 2' – $C_{ii} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Ф/М}^2$, $C_{ox} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ Ф/М}^2$

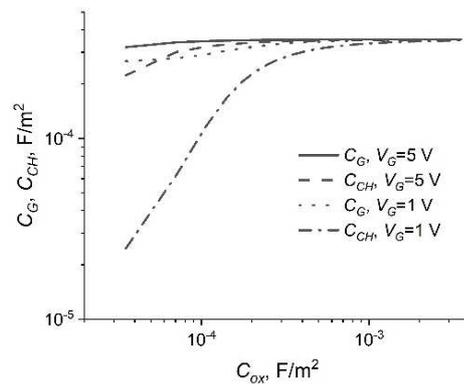


Рисунок 4. – Емкость затвора и канала в зависимости от емкости подзатворного диэлектрика при различных значениях потенциала V_G . $C_{ii} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Ф/М}^2$

Полученные в результате исследования взаимосвязи электрофизических параметров транзисторной структуры с двумерным каналом можно объяснить следующим образом. В первую очередь это связано с ограничением роста заряда канала при увеличении электрохимического потенциала μ , рост которого, в свою очередь, ограничивается величиной потенциала полевого электрода и соотношением емкостей интерфейса и подзатворного диэлектрика C_{ii} / C_{ox} . Это связано с тем, что разность зарядов полевого электрода и канала регулируется электрохимическим потенциалом канала. Такой эффект обуславливает наличие взаимосвязи заряда полевого электрода и канала через электрохимический потенциал. Это означает, что электрохимический потенциал, с одной стороны, управляет зарядом канала в соответствии со статистикой Ферми – Дирака, а с другой – регулирует зарядовый баланс структуры через условие электронейтральности.

Взаимосвязь квантовой емкости и заряда канала также объясняется тем обстоятельством, что электрохимический потенциал выполняет ключевую роль, определяющую согласование между условием электронейтральности и статистикой Ферми – Дирака, определяющей концентрацию носителей заряда в зависимости от электрохимического потенциала.

Вырождение квантовой емкости, емкости канала и затвора в зависимости от заряда канала при варьировании ширины запрещенной зоны, емкости подзатворного диэлектрика и емкости интерфейса свидетельствует о стремлении транзисторной структуры к компенсации снижения заряда канала с увеличением ширины запрещенной зоны путем увеличения электрохимического потенциала. Таким образом, зависимости квантовой емкости, емкости канала и затвора от заряда канала отражают наличие в системе самосогласованной взаимосвязи электрофизических параметров.

Для исследования устойчивости решения самосогласованной системы уравнений (1), (2), определяющей взаимосвязь электрофизических параметров транзисторной структуры с двумерным каналом, проводились расчеты чувствительности электрохимического потенциала, концентрации электронов, квантовой емкости к росту емкости интерфейсных состояний C_{ii} . Установлено, что при относительно низкой величине емкости C_{ii} зависимости $\mu(V_G)$ (рисунок 5, а, кривая 1), а также $n_s(V_G)$ и $C_Q(Q)$ (рисунок 5, б, кривая 1) монотонные. Вместе с тем увеличение емкости C_{ii} до $(8,1 - 8,3)10^{-2} \text{ Ф/М}^2$ приводит к возникновению резких подъемов (скачков) на зависимостях $\mu(V_G)$ и $n_s(V_G)$, $C_Q(V_G)$. Это может быть связано с тем, что существенное увеличение соотношения емкостей C_{ii} / C_{ox} приводит к расходимости самосогласованного решения системы (1), (2) в некоторой критической точке, определяемой величиной потенциала полевого электрода V_G . С физической точки зрения это объясняется тем, что высокая емкость интерфейса приводит к неустойчивости зарядового состояния в двумерном канале. Но дальнейший незначительный рост потенциала полевого электрода позволяет преодолеть такую неустойчивость, как можно видеть из рисунка 5, а, б, и далее наблюдается монотонный рост параметров $\mu(V_G)$ и $n_s(V_G)$, $C_Q(V_G)$, но уже с наличием разрыва в их значениях. Таким образом, происходит преодоление неустойчивости. Это может означать, что взаимосвязи электрофизических параметров транзисторной структуры характеризуются наличием бистабильных состояний при некоторых критических величинах некоторых свойств транзисторной структуры с двумерным каналом. Другими словами, можно предполагать существование критических точек, в которых нарушается зарядовый баланс и взаимосвязи электрофизических параметров претерпевают качественные изменения.

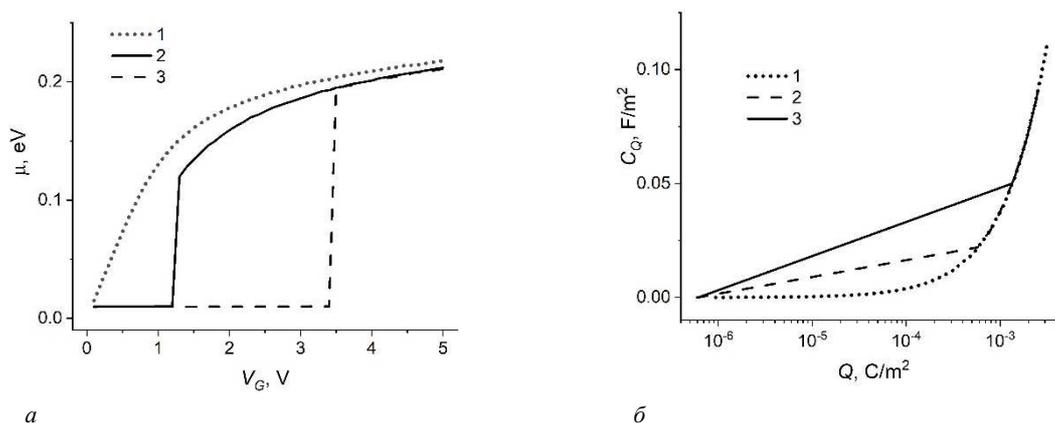


Рисунок 5. – Электрохимический потенциал в зависимости от V_G (а) и квантовая емкость в зависимости от заряда двумерного канала (б): $C_{ox} = 9,44 \cdot 10^{-3}$ F/m^2 , $C_{it} = 8 \cdot 10^{-3}$ F/m^2 (кривые 1); $C_{it} = 8,1 \cdot 10^{-2}$ F/m^2 (кривые 2); $C_{it} = 8,3 \cdot 10^{-2}$ F/m^2 (кривые 3)

Таким образом, при моделировании режимов функционирования транзисторов с двумерными каналами, помимо учета наличия взаимосвязи электрофизических параметров, необходимо обращать внимание на возникновение неустойчивостей, вызванных нарушением зарядового баланса, что ведет к перестройке указанных взаимосвязей.

Заключение. Проведено исследование и разработана модель взаимосвязи электрофизических параметров транзисторной структуры с двумерным полупроводниковым каналом. Найдены и проанализированы закономерности взаимовлияния потенциала полевого электрода, ширины запрещенной зоны двумерного канала, емкости подзатворного диэлектрика и емкости интерфейсных состояний, электрохимического потенциала, заряда канала, его квантовой емкости, емкости затвора и емкости канала. Установлено, что квантовая емкость, емкость канала и емкость затвора при постоянных емкостях подзатворного диэлектрика и интерфейса определяются только зарядом канала и не зависят от ширины запрещенной зоны.

Выявленные взаимосвязи объясняются наличием самосогласованной реакции, заключающейся в подстройке заряда канала к его электрохимическому потенциалу при варьировании таких параметров, как ширина запрещенной зоны, емкость подзатворного диэлектрика и емкость интерфейсных состояний. Такое взаимовлияние вызвано самосогласованием концентрации носителей заряда и электрохимического потенциала за счет условия электронейтральности и статистики Ферми – Дирака, связанных через потенциал затвора транзисторной структуры. Также выявлена возможность возникновения неустойчивости, обусловленной нарушением зарядового баланса в критических точках.

Использование полученных взаимосвязей электрофизических параметров при моделировании электрических характеристик транзисторных структур с каналами из двумерных полупроводников позволяет выявить особенности токопереноса в них и повысить эффективность функционирования таких приборов, а также способствует созданию моделей, пригодных для использования в системах автоматизированного проектирования.

Благодарность. Исследования выполнены при финансовой поддержке и в рамках решения задач заданий 3.2 и 3.15 Государственной программы научных исследований «Фотоника и электроника для инноваций», 2021–2025 гг.

ЛИТЕРАТУРА / REFERENCES

1. Yoon, Y., Ganapathi, K., & Salahuddin, S. (2011). How good can monolayer MoS₂ transistors be? *Nano Letters*, 11(9), 3768–3773. DOI: [10.1021/nl2018178](https://doi.org/10.1021/nl2018178).
2. Wang, Q. H., Kalantar-Zadeh, K., Kis, A., Coleman, J. N., & Strano, M. S. (2012). Electronics and optoelectronics of two-dimensional transition metal dichalcogenides. *Nature Nanotechnology*, 7(11), 699–712. DOI: [10.1038/nnano.2012.193](https://doi.org/10.1038/nnano.2012.193).
3. Mingsheng, X. Tao, L., Minmin, S., & Hongzheng, C. (2013). Graphene-Like Two-Dimensional Materials. *Chemical Reviews*, 113(5), 3766–3798. DOI: [10.1021/cr300263a](https://doi.org/10.1021/cr300263a).
4. Radisavljevic, B., Radenovic, A., Brivio, J., Giacometti, V., & Kis, A. (2011). Single-layer MoS₂ transistors. *Nature Nanotechnology*, 6(3), 147–150. DOI: [10.1038/nnano.2010.279](https://doi.org/10.1038/nnano.2010.279).
5. Cao, W., Kang, J., Liu, W., & Banerjee, K. (2014). A Compact Current–Voltage Model for 2D Semiconductor Based Field-Effect Transistors Considering Interface Traps, Mobility Degradation, and Inefficient Doping Effect. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 61(12), 4282–4290. DOI: [10.1109/TED.2014.2365028](https://doi.org/10.1109/TED.2014.2365028).

6. Jiménez, D. (2012). Drift-diffusion model for single layer transition metal dichalcogenide field-effect transistors. *Applied Physics Letters*, 101(24), 243501. DOI: [10.1063/1.4770313](https://doi.org/10.1063/1.4770313).
7. Makovskaya, T., Danilyuk, A., Krivosheeva, A., Shaposhnikov, V., & Borisenko, V. (2020). Charge Properties of the MOS Transistor Structure with the Channel Made from a Two-Dimensional Crystal. *Russian Microelectronics*, 49(7), 507–515. DOI: [10.1134/S1063739720070069](https://doi.org/10.1134/S1063739720070069).
8. Chernozatonskii, L., & Artyukh, A. (2017). Quasi- two-dimensional transition metal dichalcogenides: structure, synthesis, properties and applications. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, 61(1), 2–28. DOI: [10.3367/ufne.2017.02.038065](https://doi.org/10.3367/ufne.2017.02.038065).
9. Wang, G., Chernikov, A., Glazov, M. M., Heinz, T. F., Marie, X., Amand, T., & Urbaszek, B. (2018). Excitons in atomically thin transition metal dichalcogenides. *Review of Modern Physics*, 90(2), 021001. DOI: [10.3367/UFNr.2017.02.038065](https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.02.038065).
10. Zebrev, G. I. (2011). Graphene Field Effect Transistors: Diffusion-Drift Theory. In S. Mikhailov (Eds.), *Physics and Applications of Graphene-Theory* (476–498). InTech. DOI: [10.5772/14211](https://doi.org/10.5772/14211).

Поступила 28.08.2023

ELECTROPHYSICAL PARAMETERS INTERRELATION MODEL FOR CAD SYSTEMS

U. ZAITSAU, V. MELNIKOVA, D. PODRYABINKIN, A. DANILYUK
(*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk*)

A model is presented and regularities are established for the relationship between the electrophysical parameters of a transistor structure and a two-dimensional channel, based on the self-consistency of the electrochemical potential and the concentration of charge carriers of a two-dimensional channel in a field-effect transistor structure. Such self-consistency is ensured by combining the Fermi – Dirac statistics with the condition of electrical neutrality of the transistor structure. The effect on the electrophysical parameters of a transistor structure with a two-dimensional semiconductor channel is considered for the band gap of the channel material, the capacitance of the gate dielectric, and the capacitance of interface states. The developed model of the relationship between the electrophysical parameters of a transistor structure with a two-dimensional channel can be used in computer-aided design systems for the element base of micro- and nanoelectronics.

Keywords: *transistor structure, two-dimensional semiconductor, channel, electrophysical parameters relationship, electrochemical potential, quantum capacitance, charge instability.*

УДК 621.371: 550.837.6

DOI 10.52928/2070-1624-2023-41-2-69-76

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ СВОЙСТВ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ НАД УГЛЕВОДОРОДАМИ ОТ РЕЖИМОВ ЗОНДИРОВАНИЯ

канд. техн. наук, доц. В. Ф. ЯНУШКЕВИЧ, С. В. КАЛИНЦЕВ, К. В. ШПАК
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

Проанализированы закономерности изменения свойств анизотропной среды над углеводородами при различных режимах зондирования: модуляции сигналов по частоте и смешанной амплитудно-частотной модуляции. Проведено моделирование компонент поверхностного импеданса среды над углеводородами. Исследованы характеристики среды над скоплениями углеводородов для частотно-модулированных сигналов в зависимости от индекса модуляции, коэффициента соотношения частот и проводимости диэлектрического наполнителя вмещающих пород. Для амплитудно-частотно-модулированных сигналов проанализированы амплитудные и фазовые характеристики комбинационных составляющих электромагнитных волн с двумя видами круговой поляризации. Даны рекомендации по разработке методов поиска углеводородов на основе частотно-модулированных и амплитудно-частотно-модулированных сигналов. Показаны способы повышения информативности электромагнитных методов электроразведки. Результаты исследований актуальны для геологоразведочных работ.

Ключевые слова: углеводородная залежь, частотная модуляция, амплитудно-частотная модуляция.

Введение. Актуальность поиска и идентификации подземных объектов определяет рост требований к современной георадиолокации [1]. Сейсмические исследования являются наиболее часто используемым инструментом для наземной разведки углеводородных залежей (УВЗ). Сейсмические методы с течением времени развивались и теперь обеспечивают изображения недр с высоким разрешением и используются для разработки геологических моделей структуры и стратиграфии [2]. Многокомпонентный индукционный прибор исследует пласт в трех измерениях с помощью многокомпонентных массивов индукционных катушек передатчика и приемника для определения истинного горизонтального и вертикального удельного сопротивления пласта [3]. Геофизические методы основаны на изучении распространения различных физических полей в пределах недр земли с использованием волн, генерируемых естественными или искусственными (управляемыми) источниками [4]. Исследованию влияния анизотропных сред на характеристики распространения радиоволн посвящена работа [5].

Примеры разработки электромагнитных методов (ЭММ) и устройств приведены в [6; 7]. Определение месторождений нефти и газа в Западной Сибири основывается на решении задачи методом монотонных функций на пространстве признаков [8]. Вариация характеристик сложных сигналов повышает информативность методов поиска [9]. Точность поиска и идентификации углеводородов улучшается в различных модифицированных способах и средствах для реализации вертикального зондирования при поиске углеводородов [10]. По крайней мере, в трех областях морские электромагнитные исследования для структурных исследований значительно продвинулись: накопление данных, технические достижения как в аппаратном, так и в программном обеспечении и интерпретации, основанные на междисциплинарных подходах [11].

Выбор метода исследований может быть осуществлен на основании данных работ [12; 13]. Современное состояние науки и техники позволяет производить оценку проявления различных аномальных эффектов, за счет которых расширяются функциональные зависимости компонент диэлектрической проницаемости среды над залежами от воздействующих сигналов. Анизотропная модель покрывающей породы была получена путем масштабирования трехосных каротажей удельного сопротивления, полученных от поверхности до глубины пласта в скважине [14]. Акцент тенденций развития поисковой электроразведки направлен на решение поставленных задач с высоким уровнем точности и достоверности выделения месторождений УВЗ с использованием эффективных методов георазведки [15; 16].

Влияние любой новой технологии на успех геологоразведочных работ можно оценить по данным морских методов CSEM [17]. В современных системах поиска полезных ископаемых достигаются высокие показатели на базе технико-экономического обоснования наземного мониторинга резервуаров CSEM в сложной трехмерной модели [18].

Методика исследований. Для реализации новых методов электроразведки представляют интерес процессы взаимодействия частотно-модулированных (ЧМ) сигналов с параметрами: ω_1 – модулирующая

частота; ω_2 – частота несущего колебания; $\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_1}$ – индекс модуляции; $\Delta\omega$ – девиация частоты.

Компоненты тензора диэлектрической проницаемости среды для такого режима имеют вид [7]

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_1 = \epsilon_r (1 + \beta \cdot k_\omega \cos \omega_1 t) + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Pi i}^2 \tilde{\omega}_3}{\omega_2} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_3^2 - v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_3^2)^2 + 4\tilde{\omega}_3^2 v_i^2} - j \left[\frac{\sigma_r}{\omega_2 \epsilon_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega_{\Pi i}^2 v_i}{\omega_2} \frac{\tilde{\omega}_3^2 + v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_3^2)^2 + 4\tilde{\omega}_3^2 v_i^2} \right] \right\}, \\ \dot{\epsilon}_2 = \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Pi i}^2 \omega_{\Gamma i}}{\omega_2} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_3^2 + v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_3^2)^2 + 4\tilde{\omega}_3^2 v_i^2} - \frac{2j\tilde{\omega}_3 v_i \omega_{\Pi i}^2 \omega_{\Gamma i}}{[(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_3^2)^2 + 4\tilde{\omega}_3^2 v_i^2] \omega_2} \right\}, \\ \dot{\epsilon}_3 = \epsilon_r (1 + \beta \cdot k_\omega \cos \omega_1 t) + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Pi i}^2 \tilde{\omega}_3}{\omega_2} \frac{1}{v_i^2 + \tilde{\omega}_3^2} - j \left[\frac{\sigma_r}{\omega_2 \epsilon_0} + \frac{\omega_{\Pi i}^2 v_i}{\omega_2} \frac{1}{\tilde{\omega}_3^2 + v_i^2} \right] \right\}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3$ – компоненты тензора диэлектрической проницаемости среды над УВЗ;

$\omega_{\Pi i}$ – плазменная частота;

$\omega_{\Gamma i}$ – гиротропная частота;

k_ω – коэффициент отношения частот;

v_i – частота столкновения частиц;

ϵ_r – относительная диэлектрическая проницаемость среды;

σ_r – проводимость среды;

ϵ_0 – диэлектрическая постоянная.

При этом

$$\tilde{\omega}_3 = \omega_2 [1 + \beta \cdot k_\omega \cos \omega_1 t]. \quad (2)$$

Для режима смешанной модуляции применяются коэффициент амплитудной модуляции k_m и модулирующая частота Ω , несущая частота ω . При этом

$$\tilde{\omega}_4 = \omega [1 - k_m^2 \sin \Omega t]; \quad (3)$$

$$\dot{Z}_{11} = \dot{Z}_{22} = -\frac{1}{2j\sqrt{\epsilon_R \epsilon_L}} (\sqrt{\epsilon_R} - \sqrt{\epsilon_L}); \quad (4)$$

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_R \epsilon_L}} (\sqrt{\epsilon_R} + \sqrt{\epsilon_L}).$$

Был исследован поверхностный импеданс по формулам (4) с учетом компонент тензора

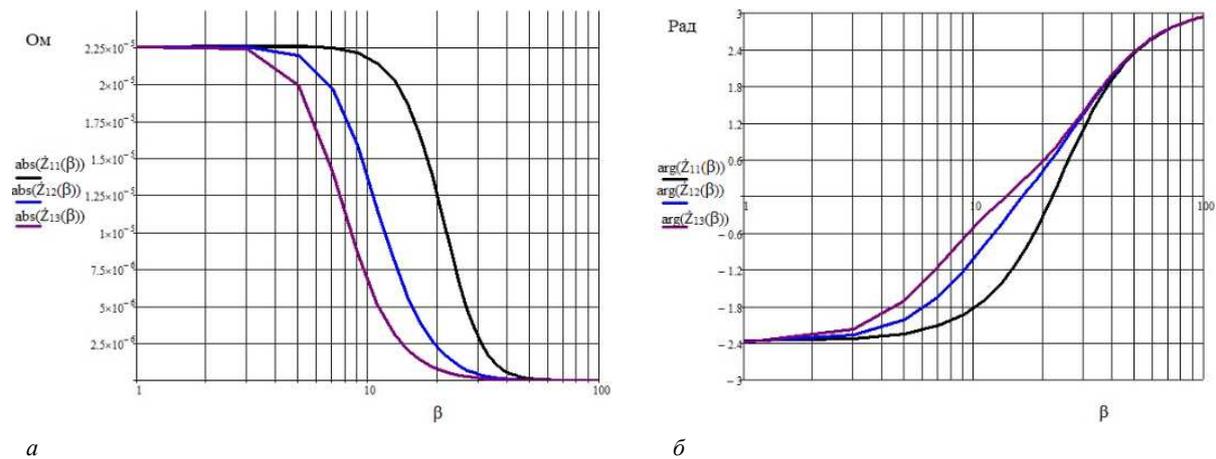
$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_R &= \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 = \text{Re} \dot{\epsilon}_R + j \text{Im} \dot{\epsilon}_R; \\ \dot{\epsilon}_L &= \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2 = \text{Re} \dot{\epsilon}_L + j \text{Im} \dot{\epsilon}_L \end{aligned} \quad (5)$$

для следующих параметров среды над залежами углеводородов [5]: диэлектрической проницаемости вмещающих пород $\epsilon_r = 1 - 30$, электрической проводимости $\sigma_r = 1 \cdot 10^{-5} - 1$ См/м, частоты столкновения частиц $v = 0,6 \cdot \pi \cdot 10^9 - 3 \cdot \pi \cdot 10^9$ рад/с, концентрации частиц $N_e = N_n = (10^{16} - 10^{18}) \text{ м}^{-3}$.

Составляющие тензора для режима смешанной модуляции имеют вид [7]

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \epsilon_r (1 - k_m^2 \sin^2 \Omega \cdot t) + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Gamma_i}^2 \tilde{\omega}_4}{\omega} \frac{\omega_{\Gamma_i}^2 - \tilde{\omega}_4^2 - v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma_i}^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2} + j \left[\frac{\epsilon_r \beta \cdot k_m \sin \Omega \cdot t}{1 + \beta \cdot \cos \Omega \cdot t} - \frac{\sigma_r}{\omega \epsilon_0} - \frac{\omega_{\Gamma_i}^2 v_i}{\omega} \frac{\tilde{\omega}_4^2 + v_i^2 + \omega_{\Gamma_i}^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma_i}^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2} \right] \right\}; \\ \dot{\epsilon}_2 &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Gamma_i}^2 \omega_{\Gamma_i}}{\omega} \frac{\omega_{\Gamma_i}^2 - \tilde{\omega}_4^2 + v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma_i}^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2} - \frac{2j \tilde{\omega}_4 v_i \omega_{\Gamma_i}^2 \omega_{\Gamma_i}}{\omega [(v_i^2 + \omega_{\Gamma_i}^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2]} \right\}; \\ \dot{\epsilon}_3 &= \epsilon_r (1 - k_m^2 \sin^2 \Omega \cdot t) + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Gamma_i}^2 \tilde{\omega}_4}{\omega} \frac{1}{v_i^2 + \tilde{\omega}_4^2} + j \left[\frac{\epsilon_r \beta \cdot k_m \sin \Omega \cdot t}{1 + \beta \cdot \cos \Omega \cdot t} - \frac{\sigma_r}{\omega \epsilon_0} - \frac{\omega_{\Gamma_i}^2 v_i}{\omega} \frac{1}{\tilde{\omega}_4^2 + v_i^2} \right] \right\}. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Результаты исследований. Изменение модуля и фазы поверхностного импеданса \dot{Z}_{11} от индекса модуляции показано на рисунке 1 (*a* – модуль поверхностного импеданса, *б* – фазовая составляющая поверхностного импеданса). Как видно из рисунка, на отрезке индексов модуляции (3 – 50) происходит уменьшение абсолютной компоненты. С ростом диэлектрической проницаемости вмещающих пород над месторождением нефти и газа точки уменьшения смещаются влево по оси абсцисс. Значения индексов модуляции, соответствующих переходу через нуль, равны (10 – 30).



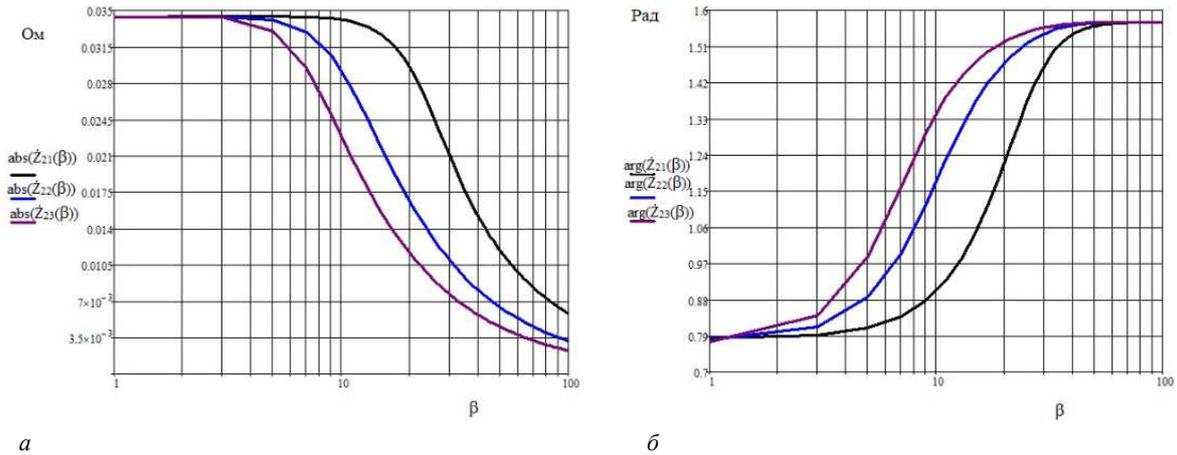
a – $|\dot{Z}_{11}(\beta)|$ для $\epsilon_r = 3, f_1 = 10^6$ Гц, $|\dot{Z}_{12}(\beta)|$ для $\epsilon_r = 10, f_1 = 10^6$ Гц, $|\dot{Z}_{13}(\beta)|$ для $\epsilon_r = 20, f_1 = 10^6$ Гц;
б – $\arg(\dot{Z}_{11}(\beta))$ для $\epsilon_r = 3, f_1 = 10^6$ Гц, $\arg(\dot{Z}_{12}(\beta))$ для $\epsilon_r = 10, f_1 = 10^6$ Гц, $\arg(\dot{Z}_{13}(\beta))$ для $\epsilon_r = 20, f_1 = 10^6$ Гц

Рисунок 1. – Зависимости модуля и фазы поверхностного импеданса \dot{Z}_{11} от индекса модуляции

Фаза поверхностного импеданса \dot{Z}_{11} увеличивается во всем диапазоне исследуемых индексов модуляции и с ростом диэлектрической проницаемости анизотропной среды над УВЗ точки перехода через нуль сдвигаются влево по координате x .

Изменение модуля и фазы поверхностного импеданса \dot{Z}_{21} от индекса модуляции показано на рисунке 2 (*a* – модуль поверхностного импеданса, *б* – фазовая составляющая поверхностного импеданса). Закономерность поведения указанных характеристик имеет сходство с приведенными выше зависимостями, отличаются только численные значения.

Фазовые характеристики принимают только положительные значения в отличие от $\arg \dot{Z}_{21}(\beta)$, когда фаза может быть и отрицательной. Проведено моделирование зависимостей модуля и фазы поверхностного импеданса \dot{Z}_{11} от коэффициента соотношения частот (рисунок 3, *a* – модуль поверхностного импеданса, *б* – фазовая составляющая поверхностного импеданса).

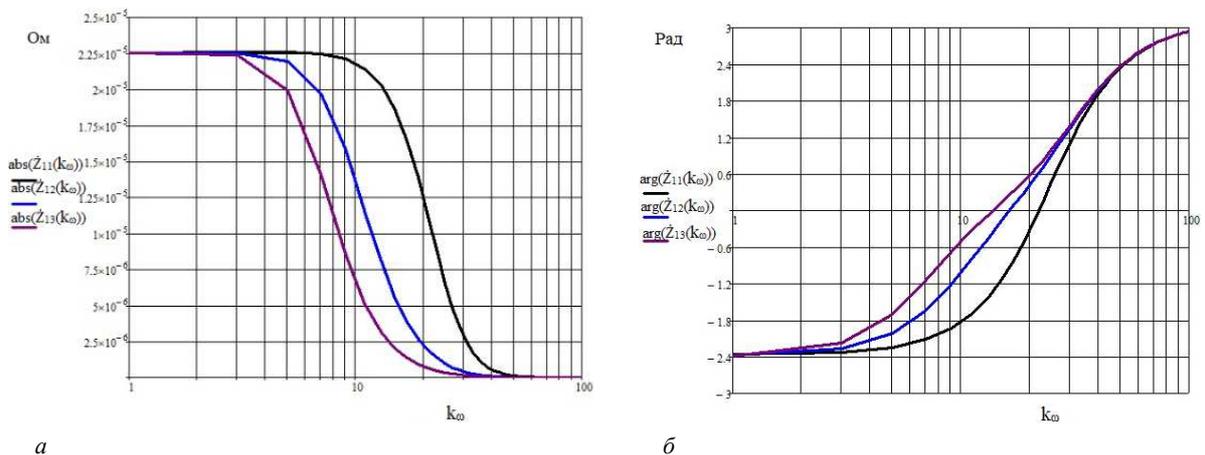


а

б

а – $|\dot{Z}_{21}(\beta)|$ для $\epsilon_r = 3, f_1 = 10^6$ Гц, $|\dot{Z}_{22}(\beta)|$ для $\epsilon_r = 10, f_1 = 10^6$ Гц, $|\dot{Z}_{23}(\beta)|$ для $\epsilon_r = 20, f_1 = 10^6$ Гц;
 б – $\arg \dot{Z}_{21}(\beta)$ для $\epsilon_r = 3, f_1 = 10^6$ Гц, $\arg \dot{Z}_{22}(\beta)$ для $\epsilon_r = 10, f_1 = 10^6$ Гц, $\arg \dot{Z}_{23}(\beta)$ для $\epsilon_r = 20, f_1 = 10^6$ Гц;

Рисунок 2. – Зависимости модуля и фазы поверхностного импеданса \dot{Z}_{21} от индекса модуляции



а

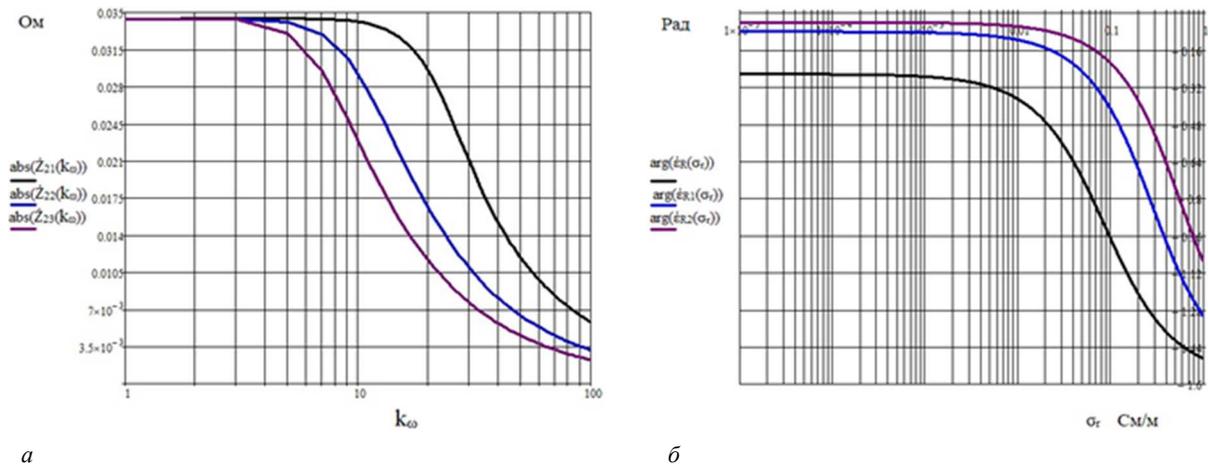
б

а – $|\dot{Z}_{11}(k_\omega)|$ для $\epsilon_r = 3, f_1 = 10^6$ Гц, $|\dot{Z}_{12}(k_\omega)|$ для $\epsilon_r = 10, f_1 = 10^6$ Гц, $|\dot{Z}_{13}(k_\omega)|$ для $\epsilon_r = 20, f_1 = 10^6$ Гц;
 б – $\arg(\dot{Z}_{11}(k_\omega))$ для $\epsilon_r = 3, f_1 = 10^6$ Гц, $\arg(\dot{Z}_{12}(k_\omega))$ для $\epsilon_r = 10, f_1 = 10^6$ Гц, $\arg(\dot{Z}_{13}(k_\omega))$ для $\epsilon_r = 20, f_1 = 10^6$ Гц;

Рисунок 3. – Зависимости модуля и фазы поверхностного импеданса \dot{Z}_{11} от коэффициента соотношения частот

Установлено, что на модуль данной составляющей поверхностного импеданса оказывают наибольшее влияние коэффициенты соотношения частот в диапазоне от 3 до 40. Фазовые значения данной составляющей поверхностного импеданса увеличиваются во всем диапазоне исследуемых коэффициентов соотношения частот, и с ростом диэлектрической проницаемости вмещающих пород над месторождением нефти и газа точки перехода через нуль сдвигаются влево по координате x .

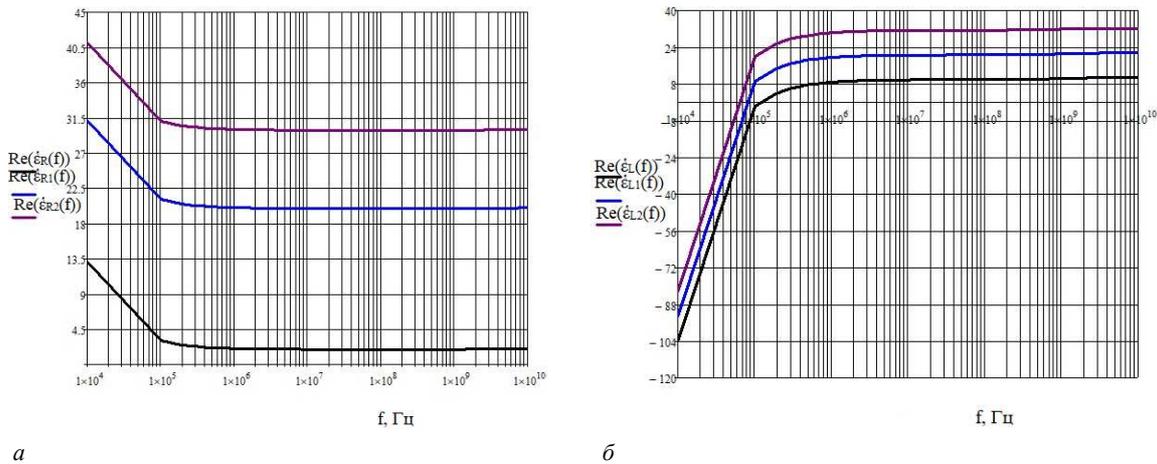
Проведено моделирование зависимостей компонент поверхностного импеданса \dot{Z}_{21} и фазовой составляющей для правой поляризации от коэффициента соотношения частот и проводимости, представленных на рисунке 4 (а – абсолютная часть поверхностного импеданса, б – фазовая составляющая для суммарной составляющей). В отличие от предыдущей составляющей, на компоненту поверхностного импеданса \dot{Z}_{21} воздействует практически весь диапазон коэффициентов соотношения частот, кроме начальных значений (1 – 3). На фазовую составляющую для правой поляризации проводимость среды оказывает влияние в диапазоне (0,01 – 1) См/м. Информативность повышается за счет конкретизации моделей среды и учета влияния водонасыщенности слоев, климатических особенностей. С ростом диэлектрической проницаемости фаза поверхностного импеданса увеличивается.



а – $|\dot{Z}_{21}(k_\omega)|$ для $\epsilon_r = 3, f_1 = 10^6$ Гц, $|\dot{Z}_{22}(k_\omega)|$ для $\epsilon_r = 10, f_1 = 10^6$ Гц, $|\dot{Z}_{23}(k_\omega)|$ для $\epsilon_r = 20, f_1 = 10^6$ Гц;
б – $\arg(\dot{\epsilon}_R(\sigma_r))$ для $\epsilon_r = 3, \beta=1, f_1 = 10^9$ Гц, $\arg(\dot{\epsilon}_{R1}(\sigma_r))$ для $\epsilon_r = 10, \beta=1, f_1 = 10^9$ Гц,
 $\arg(\dot{\epsilon}_{R2}(\sigma_r))$ для $\epsilon_r = 20, \beta=1, f_1 = 10^9$ Гц

Рисунок 4. – Зависимости компонент поверхностного импеданса \dot{Z}_{21} и фазовой составляющей для правой поляризации от коэффициента соотношения частот и проводимости

Проанализированы формулы (5) для тензора среды над УВЗ. Данные исследований для ЭМВ с правой круговой поляризацией показаны на рисунке 5 (*а* – суммарная компонента, *б* – разностная компонента).

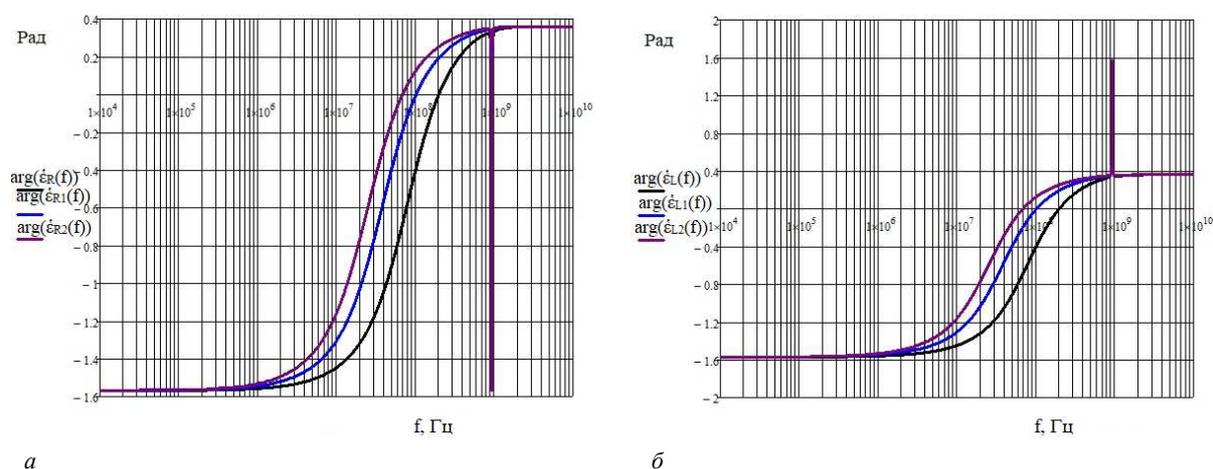


а – для ЭМВ с правой поляризацией; **б** – для ЭМВ с левой поляризацией;
 $\text{Re}(\dot{\epsilon}_R(f)), \text{Re}(\dot{\epsilon}_L(f))$ для $\epsilon_r = 3, \beta= 5; \text{Re}(\dot{\epsilon}_{R1}(f)), \text{Re}(\dot{\epsilon}_{L1}(f))$ для $\epsilon_r = 20, \beta= 5;$
 $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{R2}(f)), \text{Re}(\dot{\epsilon}_{L2}(f))$ для $\epsilon_r = 30, \beta= 5$

Рисунок 5. – Зависимости $\text{Re}(\dot{\epsilon}_R(f)), \text{Re}(\dot{\epsilon}_L(f))$

Вещественная составляющая для ЭМВ с правой поляризацией имеет точку перелома на частотах $f_{2П}$, соответствующих электронному циклотронному резонансу, и равна 100 кГц – 1 МГц, причем с ростом диэлектрической проницаемости она увеличивается. Частота электронного плазменного резонанса $f_{2П}$ лежит в диапазоне (100 – 1000) МГц и следует отметить, что для режима амплитудно-модулированных сигналов влияние частоты электронного плазменного резонанса на комбинированные составляющие тензора практически незаметно в отличие от других режимов зондирования [7]. На приведенных графиках это не прослеживается, а точные расчеты дают увеличение рассматриваемой компоненты на частотах электронного плазменного резонанса примерно на (0,01 – 0,05). Для комбинированной составляющей ЭМВ с левой поляризацией для высокочастотной составляющей (60 кГц – 2 МГц) происходит рост рассматриваемой компоненты. Фазовые характеристики неизменны для частот 2 МГц – 10 ГГц.

Проведено моделирование зависимостей фазовых составляющих компонент тензора диэлектрической проницаемости среды от несущей частоты, представленных на рисунке 6 (*a* – для ЭМВ с правой поляризацией; *b* – для ЭМВ с левой поляризацией). Наблюдается рост фазовой составляющей на частотах 1 МГц – 1 ГГц. По рисункам видно, что с точки зрения выделения границ и идентификации УВЗ уникальной является частота 1 ГГц, на которой происходит скачкообразное уменьшение фазы суммарной компоненты и скачкообразное увеличение фазы разностной компоненты. Также следует отметить, что эта частота соответствует частоте электронного плазменного резонанса $f_{2\Pi}$ и данные результаты моделирования хорошо с этим коррелируются.



a – для ЭМВ с правой поляризацией; *b* – для ЭМВ с левой поляризацией;
 $\arg(\dot{\epsilon}_R(f))$, $\arg(\dot{\epsilon}_L(f))$ для $\epsilon_r = 3$, $\beta = 5$; $\arg(\dot{\epsilon}_{R1}(f))$, $\arg(\dot{\epsilon}_{L1}(f))$ для $\epsilon_r = 20$, $\beta = 5$;
 $\arg(\dot{\epsilon}_{R2}(f))$, $\arg(\dot{\epsilon}_{L2}(f))$ для $\epsilon_r = 30$, $\beta = 5$

Рисунок 6. – Зависимости $\arg(\dot{\epsilon}_R(f))$, $\arg(\dot{\epsilon}_L(f))$

Информативность ЭММ поиска углеводородов может быть повышена за счет применения измерения поверхностного импеданса по двухканальной схеме (\dot{Z}_{11} и \dot{Z}_{21}) в режимах с правой и левой круговыми поляризациями.

Закключение. Проведенный анализ распространения ЭМВ в среде над углеводородами в режимах частотной модуляции и амплитудно-частотной модуляции показал следующее:

- значения индексов модуляции, соответствующих переходу через нуль характеристик комбинированных элементов тензоров диэлектрической проницаемости среды над УВЗ, в режиме частотной модуляции равны (10 – 30);
- фазовая характеристика составляющей поверхностного импеданса \dot{Z}_{11} в режиме частотной модуляции увеличивается во всем диапазоне исследуемых индексов модуляции, и с ростом диэлектрической проницаемости вмещающих пород над месторождением нефти и газа точки перехода через нуль сдвигаются влево по координате x ;
- на фазовую составляющую для правой поляризации проводимость среды оказывает влияние в диапазоне (0,01 – 1) См/м;
- частота электронного циклотронного резонанса в режиме амплитудно-частотной модуляции лежит в пределах 100 кГц – 1 МГц, причем с ростом диэлектрической проницаемости величина вещественной составляющей увеличивается, частота электронного плазменного резонанса равна (100 – 1000) МГц;
- для выделения границ и идентификации УВЗ можно рекомендовать частоту 1 ГГц, на которой происходит скачкообразное уменьшение фазы суммарной компоненты и скачкообразное увеличение фазы разностной компоненты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владов М. Л., Старовойтов А. В. Введение в георадиолокацию. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – 153 с.
2. Harris P. E., Du Z., Macgregor L. et al. Joint interpretation of seismic and CSEM data using well log constraints: An example from the Luva Field // First Break. – 2009. – Vol. 27, iss 5. – P. 73–81. – DOI: [10.3997/1365-2397.27.1299.28932](https://doi.org/10.3997/1365-2397.27.1299.28932).

3. Yu L. et al. Enhanced evaluation of lowresistivity reservoirs using new multicomponent induction log data // *Petrophysics*. – 2001. – Vol. 42. – P. 611–623.
4. Zhdanov, M. S. *Geophysical electromagnetic theory and methods*. – Amsterdam – New York – Tokyo: Elsevier, 2009. – 861 p.
5. Moskvichew V. N. Interaction of electromagnetic waves (EMW) with anisotropic inclusion in communication line // 9th Microw. Conf. NICON – 91, Rydzyna, May 20–22, 1991. – Vol. 1. – P. 240–244.
6. Гололобов Д. В. Взаимодействие электромагнитных волн и углеводородных залежей. – Минск: Бестпринт, 2009. – 185 с.
7. Янушкевич, В. Ф. Электромагнитные методы поиска и идентификации углеводородных залежей. – Новополоцк: ПГУ, 2017. – 232 с.
8. Петров К. Н. Метод монотонных функций и его применение к прогнозу залежей углеводородов // Информационные процессы. – 2023. – Т. 23. – № 1. – С. 126–137.
9. Степуленок С. В., Янушкевич В. Ф. Взаимодействие амплитудно-частотно-модулированных сигналов со средой над углеводородными залежами // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – Новополоцк, 2009. – № 9. – С. 103–108.
10. Helwig S. L., Wood W., Gloux B. Vertical–vertical controlled-source electromagnetic instrumentation and acquisition // *Geophysical Prospecting*. – 2019. – Vol. 67, iss. 6. – P. 1582–1594. – DOI: [10.1111/1365-2478.12771](https://doi.org/10.1111/1365-2478.12771).
11. Baba K. Electrical structure in marine tectonic settings // *Surveys in Geophysics*. – 2005. – Vol. 26. – P. 701–731.
12. Garina S., Ivanov S., Kudryavceva E. et al. EM and IP inversion using relaxation time constraints // *First Break*. – 2013. – Vol. 31, iss. 4. – P. 69–72. – DOI: [10.3997/1365-2397.31.4.67467](https://doi.org/10.3997/1365-2397.31.4.67467).
13. Каратаев Г. И. Геофизические методы исследований. – Минск: БГУ, 2008. – 147 с.
14. Colombo D., McNeice G. W. Quantifying surface-to-reservoir electromagnetics for water flood monitoring in a Saudi Arabian carbonate reservoir // *Geophysics*. – 2013. – Vol. 78, iss. 6. – P. E281–E297. – DOI: [10.1190/geo2012-0206.1](https://doi.org/10.1190/geo2012-0206.1).
15. Констебл С. Десять лет морской CSEM для разведки углеводородов // Геофизика. – 2010. – Т. 75, № 5.
16. Ellis M., Ruiz F., Nanduri S. et al. Importance of anisotropic rock physics modelling in integrated seismic and CSEM interpretation // *First Break*. – 2011. – Vol. 29, iss. 6. – P. 87–95. – DOI: [10.3997/1365-2397.29.6.51279](https://doi.org/10.3997/1365-2397.29.6.51279).
17. Hesthammer, J., Stefatos, A., Boulaenko, M. et al. CSEM performance in light of well results // *The Leading Edge*. – 2010. – Vol. 29, iss. 1. – P. 34–41. – DOI: [10.1190/1.3284051](https://doi.org/10.1190/1.3284051).
18. Wirianto M., Mulder W., Slob E. Feasibility study of land CSEM reservoir monitoring in a complex 3-D model // *Geophys. J. Int.* – Vol. 181, iss. 2. – 2010. – P. 741–755. – DOI: [10.1111/j.1365-246X.2010.04544.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2010.04544.x).

REFERENCES

1. Vladov, M. L., & Starovojtov, A. V. (2004). *Vvedenie v georadiolokaciju [Introduction to GPR]*. Moscow: Publ. MGU, (In Russ.).
2. Harris, P. E., Du, Z., MacGregor, L., Olsen, W., Shu, R., & Cooper, R. (2009). Joint interpretation of seismic and CSEM data using well log constraints: An example from Luvu Field. *First Break*, 27(5), 73–81. DOI: [10.3997/1365-2397.27.1299.28932](https://doi.org/10.3997/1365-2397.27.1299.28932).
3. Yu, L. et al. (2001). Enhanced evaluation of lowresistivity reservoirs using new multicomponent induction log data. *Petrophysics*, (42), 611–623.
4. Zhdanov, M. S. (2009). *Geophysical electromagnetic theory and methods*. Amsterdam – New York – Tokyo: Elsevier.
5. Moskvichew, V. N. (1991). Interaction of electromagnetic waves (EMW) with anisotropic inclusion in communication line, *9th Microw. Conf. NICON – 91: Vol. 1*, (240–244). Rydzyna.
6. Gololobov, D. V. (2009). *Vzaimodeistvie elektromagnitnykh voln i uglevodorodnykh zalezhei*. Minsk: Bestprint. (In Russ.).
7. Yanushkevich, V. F. (2017). *Elektromagnitnye metody poiska i identifikatsii uglevodorodnykh zalezhei [Electromagnetic methods for searching and identifying hydrocarbon deposits]*. Novopolotsk: PGU. (In Russ.).
8. Geldmacher, I., & Strack, K. (2017). A Fit-for-purpose electromagnetic System for Reservoir Monitoring and Geothermal Exploration. *GRC Transactions*, (41), 1649–1658.
9. Stepulenok, S. V., & Yanushkevich, V. F. (2009). Vzaimodeistvie amplitudno-chastotno-modulirovannykh signalov so sredoi nad uglevodo-rodnyimi zalezhami [Interaction of amplitude-frequency-modulated signals with the environment above hydrocarbon deposits]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (9), 103–108. (In Russ., abstr. in Engl.).
10. Helwig, S. L., Wood, W., & Gloux B. (2019). Vertical–vertical controlled-source electromagnetic instrumentation and acquisition. *Geophysical Prospecting*, 67(6), 1582–1594. DOI: [10.1111/1365-2478.12771](https://doi.org/10.1111/1365-2478.12771).
11. Baba, K. (2005). Electrical structure in marine tectonic settings. *Surveys in Geophysics*, (26), 701–731.
12. Garina, S., Ivanov, S., Kudryavceva, E., Legeydo, P., Veeken, P., & Vladimirov, V. (2013). Simultaneous EM and IP inversion using relaxation time constraints. *First Break*, 31(4), 69–72. DOI: [10.3997/1365-2397.31.4.67467](https://doi.org/10.3997/1365-2397.31.4.67467).
13. Karataev, G. I. (2008). *Geofizicheskie metody issledovaniy [Geophysical research methods]*. Minsk: BGU. (In Russ.).
14. Colombo, D., & Mcneice, G. (2013). Quantifying surface-to-reservoir electromagnetics for waterflood monitoring in a Saudi Arabian carbonate reservoir. *Geophysics*, 78(6), E281–E297. DOI: [10.1190/geo2012-0206.1](https://doi.org/10.1190/geo2012-0206.1).
15. Konstebl, S. (2010). Desyat' let morskoi CSEM dlya razvedki uglevodorodov [Ten years of offshore CSEM for hydrocarbon exploration]. *Geofizika*, 75(5). (In Russ.).
16. Ellis, M., Ruiz, F., Nanduri, S., Keirstead, R., Azizov, I., Frenkel, M., & Macgregor, L. (2011). Importance of anisotropic rock physics modelling in integrated seismic and CSEM interpretation. *First Break*, 29(6), 87–95. DOI: [10.3997/1365-2397.29.6.51279](https://doi.org/10.3997/1365-2397.29.6.51279).

17. Hesthammer, J., Stefatos, A., Boulaenko, M., Fanavoll, S., & Danielsen, J. (2010). CSEM performance in light of well results. *The Leading Edge*, 29(1), 34–41, DOI: [10.1190/1.3284051](https://doi.org/10.1190/1.3284051).
18. Wirianto, M., Mulder, W., & Slob, E. (2010). A feasibility study of land CSEM reservoir monitoring in a complex 3-D model. *Geophys. J. Int.*, 181(2), 741–755. DOI: [10.1111/j.1365-246X.2010.04544.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2010.04544.x).

Поступила 04.10.2023

REGULARITIES OF CHANGE IN PROPERTIES OF THE ANISOTROPIC MEDIUM OVER HYDROCARBONS FROM SENSING MODES

V. YANUSHKEVICH, S. KALINTSEV, K. SHPAK
(*Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk*)

The article discusses the analysis of the patterns of changes in the properties of an anisotropic medium over hydrocarbons from sounding modes when using frequency modulation of signals and mixed amplitude-frequency modulation. The components of the surface impedance of the medium above hydrocarbons were modeled. A study was carried out of the characteristics of the environment above hydrocarbon accumulations for frequency-modulated signals from the modulation index, the frequency ratio coefficient and the conductivity of the dielectric filler of the host rocks. For amplitude-frequency modulated signals, the amplitude and phase characteristics of the combination components of electromagnetic waves with two types of circular polarization are analyzed. Recommendations are given for the development of methods for searching for hydrocarbons based on frequency-modulated and amplitude-frequency-modulated signals. Methods for increasing the information content of electromagnetic methods of electrical prospecting are shown. The research results are relevant for geological exploration work.

Keywords: hydrocarbon reservoir, frequency modulation, amplitude-frequency modulation.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.32

DOI 10.52928/2070-1624-2023-41-2-77-92

ОБЩИЙ ИНТЕГРАЛ МОДЕЛЬНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ
С ПЕРЕМЕННЫМИ СКОРОСТЯМИ $a_1(x,t)$ И $a_2(x,t)$ В ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ*д-р физ.-мат. наук, проф. Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ*
(Белорусский государственный университет, Минск)*Предложено новое одномерное двухскоростное линейное модельное волновое уравнение*

$$u_{tt}(x,t) + (a_1 - a_2)u_{tx}(x,t) - a_1a_2u_{xx}(x,t) - a_2^{-1}(a_2)_t u_t(x,t) - a_1(a_2)_x u_x(x,t) = f(x,t) \quad (1)$$

с двумя переменными скоростями $a_{3-i}(x,t) \geq a_{3-i}^{(0)} > 0$, $(x,t) \in G =]-\infty, +\infty[\times]0, +\infty[$, $a_{3-i} \in C^2(G)$, $i = 1, 2$. Вычислено частное классическое решение F этого двухскоростного модельного волнового уравнения в верхней полуплоскости G . Проведена двойная проверка этого решения подстановкой F в уравнение (1) и в соответствующий канонический вид уравнения (1), из которого вычислялась функция F . Найден критерий гладкости правой части f уравнения (1) для классического решения F в верхней полуплоскости G . Обсуждается критерий гладкости на f для дважды непрерывной дифференцируемости F в первой четверти плоскости. С помощью классического решения F выведен общий интеграл уравнения (1) из множества всех его классических решений $u \in C^2(G)$, который нужен при решении задачи Коши и начально-граничных задач для уравнения (1). Эти результаты получены применением разработанного автором ранее нового «метода неявных характеристик» уравнения.

Ключевые слова: *двухскоростное модельное волновое уравнение, переменные скорости двух волн, метод неявные характеристик, общий интеграл, классические решения, критерий гладкости.*

Введение. Односкоростное модельное волновое уравнение с переменной скоростью появилось в диссертации Барановской С. Н.¹. Во втором разделе настоящей статьи построен общий интеграл (общее решение) классических решений двухскоростного модельного волнового уравнения с разными переменными скоростями в верхней полуплоскости (теорема 1). Выведена явная формула частного классического решения этого модельного волнового уравнения. Вывод формулы частного классического решения уравнения основан на введенных двенадцати тождествах обращения двух неявных функций характеристик волнового уравнения и их четырёх обратных неявных функций. Правильность решения проверена его подстановкой в волновое уравнение и его канонический вид. Указан критерий (необходимые и достаточные требования) гладкости на правую часть двухскоростного модельного волнового уравнения с переменными скоростями для его дважды непрерывной дифференцируемости в верхней полуплоскости. Этот критерий гладкости правой части двухскоростного модельного волнового уравнения с разными переменными скоростями в верхней полуплоскости совпадает с её критерием гладкости в задаче Коши для данного волнового уравнения.

Гладкость аналогичного частного решения односкоростного модельного волнового уравнения с переменной скоростью в первой четверти плоскости изучена в статьях [1; 2]. Пробные решения общего двухскоростного волнового уравнения с разными постоянными скоростями на первой четверти плоскости корректировались до классических решений и строились классические решения в [3]. В них же строились общие интегралы из классических решений этих волновых уравнений на первой четверти плоскости. Выводу явных классических решений и доказательству глобальных теорем корректности смешанных задач для двухскоростных волновых уравнений с разными постоянными скоростями посвящены работы Новикова Е. Н.² для случая нестационарных нехарактеристических первых косых производных и Точки Т. С., Устилко Е. В. [4; 5] – для нестационарных характеристических первых косых производных в граничных условиях. В статьях Лысенко В. В. и Спесивцевой К. А. [6; 7] выведены явные формулы классических решений и полные критерии корректности смешанных задач для двухскоростных волновых уравнений с разными постоянными скоростями соответственно при нестационарных нехарактеристических и характеристических

¹ Барановская С. Н. О классическом решении первой смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Минск, 1991. – 59 с.

² Новиков Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Минск, 2017. – 258 л.

вторых производных в граничных условиях. Глобальные теоремы корректности с явными классическими решениями первой и второй смешанных задач для односкоростного модельного волнового уравнения с переменной скоростью в первой четверти плоскости получены в [8; 9].

В третьем разделе настоящей статьи подробно обсуждаются возможности приложения результатов настоящей работы к смешанным (начально-граничным) задачам для двухскоростного модельного волнового уравнения с разными переменными скоростями. Общий интеграл может использоваться для явного решения и вывода критериев корректности по Адамару смешанных задач для двухскоростного модельного волнового уравнения с разными переменными скоростями сначала в первой четверти плоскости. Потом методом «вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны» из [10] можно находить явные решения и критерии корректности по Адамару смешанных задач в полуполосе плоскости. Существуют белорусские работы [1–9; диссертации Барановской С. Н. и Новикова Е. Н.] с явными классическими решениями и доказательствами корректности смешанных задач для односкоростного модельного волнового уравнения с переменной скоростью и двухскоростного модельного волнового уравнения с постоянными скоростями. Отсутствуют аналогичные работы зарубежных авторов.

1. Двухскоростное модельное волновое уравнение в верхней полуплоскости. Решается одномерное двухскоростное модельное волновое уравнение в верхней полуплоскости $\dot{G} = R \times]0, +\infty[$, $R =]-\infty, +\infty[$,

$$u_{tt}(x,t) + (a_1 - a_2)u_{tx}(x,t) - a_1 a_2 u_{xx}(x,t) - a_2^{-1}(a_2)_t u_t(x,t) - a_1(a_2)_x u_x(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \dot{G}, \quad (1)$$

где его правая часть f и коэффициенты a_1, a_2 – заданные вещественные функции переменных x и t , $a_{3-i}(x,t) \geq a_{3-i}^{(0)} > 0$, $(x,t) \in G =]-\infty, +\infty[\times]0, +\infty[$, $a_{3-i} \in C^2(G)$, $i=1, 2$. Здесь $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset R^2$, $R =]-\infty, +\infty[$, и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. Уравнению (1) соответствуют характеристические уравнения

$$dx = (-1)^i a_{3-i}(x,t) dt, \quad i=1, 2, \quad (2)$$

которые имеют общие интегралы $g_i(x,t) = C_i$, $C_i \in R$, $i=1, 2$. Если коэффициенты a_{3-i} строго положительны, т. е. $a_{3-i}(x,t) \geq a_{3-i}^{(0)} > 0$, $(x,t) \in G$, то переменная t на характеристиках $g_1(x,t) = C_1$, $C_1 \in R$ строго убывает, на характеристиках $g_2(x,t) = C_2$, $C_2 \in R$ строго возрастает вместе с ростом x . Поэтому неявные функции $y_i = g_i(x,t) = C_i$, $x \in R$, $t \geq 0$, обладают строго монотонными обратными функциями $x = h_i\{y_i, t\}$, $t \geq 0$, $t = h^{(i)}[x, y_i]$, $x \in R$, $i=1, 2$. По определению обратных отображений на G они удовлетворяют следующим тождествам обращения [8]:

$$g_i(h_i\{y_i, t\}, t) = y_i, \quad t \geq 0, \quad h_i\{g_i(x, t), t\} = x, \quad x \in R, \quad i=1, 2, \quad (3)$$

$$g_i(x, h^{(i)}[x, y_i]) = y_i, \quad x \in R, \quad h^{(i)}[x, g_i(x, t)] = t, \quad t \geq 0, \quad i=1, 2, \quad (4)$$

$$h_i\{y_i, h^{(i)}[x, y_i]\} = x, \quad x \in R, \quad h^{(i)}[h_i\{y_i, t\}, y_i] = t, \quad t \geq 0, \quad i=1, 2. \quad (5)$$

В правых частях тождеств (3)–(5) вместе с взаимобратными функциями исключаются переменные, повторяющиеся дважды в левых частях, если даже в левых частях этих тождеств повторяется дважды лишь одно из возможных значений этих переменных. Если коэффициенты $a_{3-i}(x,t) \geq a_{3-i}^{(0)} > 0$, $(x,t) \in G$, $a_{3-i} \in C^2(G)$, то функции $g_i, h_i, h^{(i)}$ дважды непрерывно дифференцируемы по x, t, y_i , $i=1, 2$, на G [8].

Замечание 1. В случае $a_{3-i}(x,t) = \text{const} > 0$, $i=1, 2$, ими являются функции: $g_1(x,t) = x + a_2 t$, $g_2(x,t) = x - a_1 t$, $h_1\{y_1, t\} = y_1 - a_2 t$, $h_2\{y_2, t\} = y_2 + a_1 t$, $h^{(1)}[x, y_1] = (y_1 - x) / a_2$, $h^{(2)}[x, y_2] = (x - y_2) / a_1$.

Определение 1. Классическим решением уравнения (1) называется функция $u \in C^2(G)$, удовлетворяющая уравнению (1) в каждой внутренней точке $(x,t) \in \dot{G}$ множества G .

Найти в явном виде общий интеграл классических решений и критериев (необходимые и достаточные условия) гладкости правой части f нового модельного волнового уравнения (1) в верхней полуплоскости G . В будущем найденный общий интеграл классических решений потребуется нам для явного решения и вывода критериев корректности по Адамару смешанных (начально-граничных) задач для одномерного модельного волнового уравнения (1) сначала на полупрямой и потом на ограниченном отрезке.

Из определения 1 классических решений уравнения (1) следует необходимость непрерывности функции $f \in C(G)$. Ниже мы укажем и обсудим дополнительные необходимые и достаточные требования гладкости на f в верхней полуплоскости G и в первой четверти G_∞ .

Теорема 1. Пусть коэффициенты $a_{3-i}(x, t) \geq a_{3-i}^{(0)} > 0$, $(x, t) \in G =]-\infty, +\infty[\times]0, +\infty[$, $a_{3-i} \in C^2(G)$, $i = 1, 2$. Тогда общим интегралом уравнения (1) в верхней полуплоскости G с критерием гладкости

$$f \in C(G), \quad \int_0^t f(h_i\{g_i(x, t), \tau\}, \tau) d\tau \in C^1(G), \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

из классических (дважды непрерывно дифференцируемых на G) решений являются функции

$$u(x, t) = \tilde{f}_1(g_1(x, t)) + \tilde{f}_2(g_2(x, t)) + F(x, t), \quad (x, t) \in G, \quad (7)$$

$$F(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{f(\delta, \tau)}{a_1(\delta, \tau) + a_2(\delta, \tau)} \exp \left\{ \int_{g_1(\delta, \tau)}^{g_1(x, t)} \frac{a_2^2(a_1/a_2)_\delta - a_2(a_1/a_2)_\tau}{[a_1(\tilde{\delta}, \tilde{\tau}) + a_2(\tilde{\delta}, \tilde{\tau})]^2 (g_1(\tilde{\delta}, \tilde{\tau}))_\delta} ds \right\} d\delta, \quad (8)$$

где \tilde{f}_1 и \tilde{f}_2 – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции от ξ и η вида

$$\tilde{f}_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(g_2(0, 0)), \quad \tilde{f}_2(\eta) = f_2(\eta) - f_2(g_2(0, 0)). \quad (9)$$

Доказательство. При равных переменных коэффициентах $a_1(x, t) \equiv a_2(x, t) \equiv a(x, t)$ двухскоростное модельное волновое уравнение (1) становится однокоростным модельным волновым уравнением из работ [1; 2]. Согласно этим работам в первой четверти плоскости $G_\infty = [0, +\infty[\times]0, +\infty[$ на подмножестве G_- , где выполняется неравенство $g_2(x, t) > g_2(0, 0)$, требования гладкости (6) с функциями f, a_1, a_2 под интегралом F без модуля $|\delta|$ переменной δ необходимы и достаточны для дважды непрерывной дифференцируемости решения F вида (8) неоднородного уравнения (1) с коэффициентами $a_1(x, t) \equiv a_2(x, t)$ на G_- и, следовательно, на верхней полуплоскости G в теореме 1. Аналогичному переходу от множества G_- к верхней полуплоскости G также посвящено замечание 3 статьи [3] для уравнения (1) с различными постоянными коэффициентами $a_i(x, t) = a_i^{(0)} = const$, $i = 1, 2$, которое остаётся справедливым и для различных переменных коэффициентов $a_1(x, t) \neq a_2(x, t)$ на верхней полуплоскости G .

Вывод формулы решения. Приводим уравнение (1) к каноническому виду заменой переменных

$$\xi = g_1(x, t), \quad \eta = g_2(x, t) \quad (10)$$

с невырожденным якобианом $J(x, t) = \xi_x \eta_t - \xi_t \eta_x \neq 0$ в G , так как $a_{3-i}(x, t) \geq a_{3-i}^{(0)} > 0$, $i = 1, 2$, в G . Сначала для новой функции $u(x, t) = u(\xi, \eta), t(\xi, \eta) = \tilde{u}(\xi, t), \eta(x, t)$ вычисляем первые и вторые производные

$$\begin{aligned} u_t &= \tilde{u}_\xi \xi_t + \tilde{u}_\eta \eta_t, \quad u_x = \tilde{u}_\xi \xi_x + \tilde{u}_\eta \eta_x, \quad u_{tt} = \tilde{u}_{\xi\xi} (\xi_t)^2 + 2\tilde{u}_{\xi\eta} \xi_t \eta_t + \tilde{u}_{\eta\eta} (\eta_t)^2 + \tilde{u}_\xi \xi_{tt} + \tilde{u}_\eta \eta_{tt}, \\ u_{tx} &= (\tilde{u}_{\xi\xi} \xi_x + \tilde{u}_{\xi\eta} \eta_x) \xi_t + (\tilde{u}_{\eta\xi} \xi_x + \tilde{u}_{\eta\eta} \eta_x) \eta_t + \tilde{u}_\xi \xi_{tx} + \tilde{u}_\eta \eta_{tx}, \\ u_{xx} &= \tilde{u}_{\xi\xi} (\xi_x)^2 + 2\tilde{u}_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + \tilde{u}_{\eta\eta} (\eta_x)^2 + \tilde{u}_\xi \xi_{xx} + \tilde{u}_\eta \eta_{xx}. \end{aligned} \quad (11)$$

Согласно уравнениям (2) полные дифференциалы от характеристик $g_i(x, t) = C_i, i = 1, 2$, равны нулю

$$dg_i = (g_i)_x dx + (g_i)_t dt = [(g_i)_t + (-1)^i a_{3-i}(x, t)(g_i)_x] dt \equiv 0, \quad (x, t) \in G, \quad i = 1, 2,$$

и, следовательно, находим соотношения первых частных производных от характеристик

$$(g_i)_t = (-1)^{i+1} a_{3-i}(x, t)(g_i)_x, \quad (x, t) \in G, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

Отсюда для новых переменных из (10) мы имеем тождества

$$\xi_t - a_2(x, t)\xi_x = 0, \quad \eta_t + a_1(x, t)\eta_x = 0, \quad (x, t) \in G. \quad (13)$$

Первое уравнение из (13) один раз дифференцируем сначала только по t и потом только по x , результаты дифференцирования по t складываем с произведением на коэффициент a_1 результата дифференцирования по x , в полученной сумме применяем первое уравнение из (13) и выводим равенство

$$\xi_{tt} + (a_1 - a_2)\xi_{tx} - a_1 a_2 \xi_{xx} = (a_2)_t \xi_x + a_1 (a_2)_x \xi_x = a_2^{-1} (a_2)_t \xi_t + a_1 (a_2)_x \xi_x, \quad (x, t) \in G_\infty. \quad (14)$$

Второе уравнение из (13) один раз дифференцируем сначала только по t и потом только по x , результаты дифференцирования по t складываем с произведением на коэффициент $-a_2$ результата дифференцирования по x , в полученной сумме применяем второе уравнение из (13) и выводим

$$\eta_{tt} + (a_1 - a_2)\eta_{tx} - a_1 a_2 \eta_{xx} = (a_2)_t \eta_x + a_1 (a_2)_x \eta_x = a_2^{-1} (a_2)_t \eta_t + a_1 (a_2)_x \eta_x, \quad (x, t) \in G_\infty. \quad (15)$$

Теперь частные производные из (11) подставляем в уравнение (1) и вычисляем коэффициенты при следующих частных производных:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\xi\xi} &: (\xi_t)^2 + (a_1 - a_2)\xi_t \xi_x - a_1 a_2 (\xi_x)^2 = (\xi_t + a_1 \xi_x)(\xi_t - a_2 \xi_x) = 0, \\ 2\tilde{u}_{\xi\eta} &: \xi_t \eta_t + (a_1 - a_2)(\xi_t \eta_x + \xi_x \eta_t) - a_1 a_2 \xi_x \eta_x = a_2 \xi_x \eta_t + \frac{1}{2} a_1 (\xi_t \eta_x + \xi_x \eta_t) - \frac{1}{2} a_2 (\xi_t \eta_x + \xi_x \eta_t) - a_1 \xi_t \eta_x = \\ &= \frac{1}{2} a_2 \xi_x \eta_t + \frac{1}{2} a_1 \xi_x \eta_t - \frac{1}{2} a_2 \xi_t \eta_x - \frac{1}{2} a_1 \xi_t \eta_x = \frac{1}{2} (a_1 + a_2) (\xi_x \eta_t - \xi_t \eta_x) = \frac{1}{2} (a_1 + a_2) J(x, t), \\ \tilde{u}_{\eta\eta} &: (\eta_t)^2 + (a_1 - a_2)\eta_t \eta_x - a_1 a_2 (\eta_x)^2 = (\eta_t + a_1 \eta_x)(\eta_t - a_2 \eta_x) = 0, \\ \tilde{u}_{\xi} &: \xi_{tt} + (a_1 - a_2)\xi_{tx} - a_1 a_2 \xi_{xx} - a_2^{-1} (a_2)_t \xi_t - a_1 (a_2)_x \xi_x = \\ &= a_2^{-1} (a_2)_t \xi_t + a_1 (a_2)_x \xi_x - a_2^{-1} (a_2)_t \xi_t - a_1 (a_2)_x \xi_x = 0, \\ \tilde{u}_{\eta} &: \eta_{tt} + (a_1 - a_2)\eta_{tx} - a_1 a_2 \eta_{xx} - a_2^{-1} (a_2)_t \eta_t - a_1 (a_2)_x \eta_x = \\ &= a_1^{-1} (a_1)_t \eta_t + a_2 (a_1)_x \eta_x - a_2^{-1} (a_2)_t \eta_t - a_1 (a_2)_x \eta_x = \\ &= \left[a_1^{-1} (a_1)_t - a_2^{-1} (a_2)_t \right] \eta_t + \left[a_2 (a_1)_x - a_1 (a_2)_x \right] \eta_x = \left[\frac{(a_1)_t}{a_1} - \frac{(a_2)_t}{a_2} \right] \eta_t + \left[(a_1)_x a_2 - a_1 (a_2)_x \right] \eta_x = \\ &= a_2^2 \frac{(a_1 / a_2)_t}{a_1 a_2} \eta_t + a_2^2 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)_x \eta_x = \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)_t (g_2)_t + a_2^2 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)_x (g_2)_x = \left[a_2^2 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)_x - a_2 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)_t \right] (g_2)_x. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты при вторых производных $\tilde{u}_{\xi\xi}$ и $\tilde{u}_{\eta\eta}$ обратились в ноль в силу тождеств (13). В коэффициенте при смешанной производной $\tilde{u}_{\xi\eta}$ нами также применены тождества (13). В коэффициентах при первых производных \tilde{u}_{ξ} и \tilde{u}_{η} соответственно использовались равенства (14) и (15), а при первой производной \tilde{u}_{η} – ещё замена переменных (10) и равенство (12) при $i = 2$. Когда в уравнении (1) коэффициенты равны $a_1(x, t) = a_2(x, t)$, тогда здесь коэффициент при первой производной \tilde{u}_{η} , очевидно, тоже обращается в ноль и двухскоростное модельное волновое уравнение (1) настоящей работы становится односкоростным модельным волновым уравнением из работы [8].

В результате замены (10) уравнение (1) на G приводится к уравнению

$$(a_1 + a_2)J(x,t)\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\eta) + \left\{ \left[a_2^2(a_1/a_2)_x - a_2(a_1/a_2)_t \right] (g_2)_x \right\} \Big|_{\substack{x=x(\xi,\eta) \\ t=t(\xi,\eta)}} \tilde{u}_\eta(\xi,\eta) = \tilde{f}(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta) \in \tilde{G},$$

с правой частью $\tilde{f}(\xi,\eta) = f(x(\xi,\eta),t(\xi,\eta))$ на образе \tilde{G} первой четверти плоскости G при замене переменных (10). Уравнение (1) на G равносильно его следующему каноническому виду на \tilde{G} :

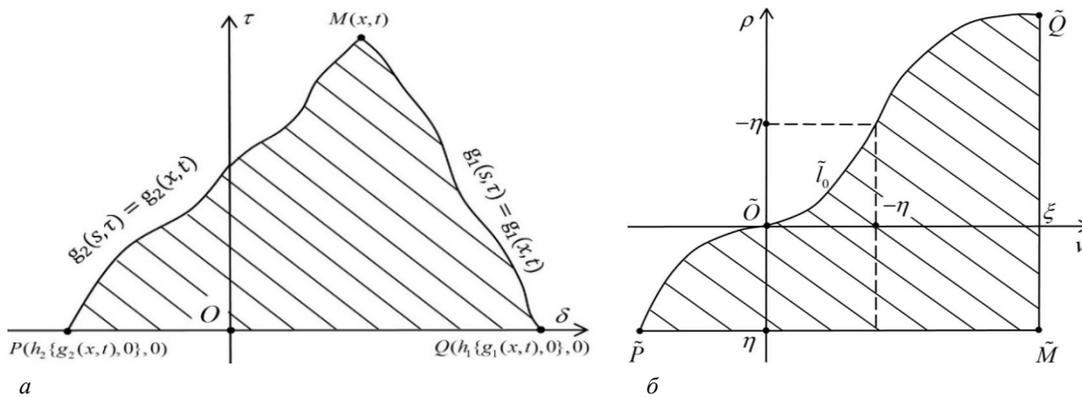
$$\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\eta) + \frac{\left[a_2^2(a_1/a_2)_x - a_2(a_1/a_2)_t \right] (g_2)_x}{(a_1 + a_2)J(x,t)} \Big|_{\substack{x=x(\xi,\eta) \\ t=t(\xi,\eta)}} \tilde{u}_\eta(\xi,\eta) = \frac{\tilde{f}(\xi,\eta)\tilde{J}(\xi,\eta)}{\tilde{a}_1(\xi,\eta) + \tilde{a}_2(\xi,\eta)}, \quad (\xi,\eta) \in \tilde{G}, \quad (16)$$

где якобиан обратной замены к (10) равен $\tilde{J}(\xi,\eta) = x_\xi t_\eta - x_\eta t_\xi \neq 0$ на \tilde{G} и $J(x,t)\tilde{J}(\xi,\eta) = 1$.

Для каждого фиксированного значения η находим интегрирующий множитель уравнения (16)

$$\mu(\xi) = \exp \left\{ \int_{g_1(h_2\{\eta,0\},0)}^{\xi} \frac{\left[a_2^2(a_1/a_2)_\delta - a_2(a_1/a_2)_\tau \right] (g_2)_\delta}{(a_1(\delta,\tau) + a_2(\delta,\tau))J(\delta,\tau)} \Big|_{\substack{\delta=\delta(\tilde{v},\eta) \\ \tau=\tau(\tilde{v},\eta)}} d\tilde{v} \right\}, \quad (17)$$

где подынтегральная функция берется до указанной ниже замены (18) с независимыми переменными в плоскости $O\delta\tau$ и вершиной $M(x,t)$ характеристического треугольника ΔMPQ на рисунке 1, a .



a – для функции F ; b – для функции \tilde{F}

Рисунок 1. – Характеристические треугольники ΔMPQ и $\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$

В интеграле (17) нижний предел интегрирования $v = g_1(h_2\{\rho,0\},0)$ в плоскости $\tilde{O}\nu\rho$ является уравнением кривой \tilde{l}_0 криволинейного основания $\tilde{P}\tilde{Q}$ треугольника $\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ из рисунка 1, b . Треугольник $\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ представляет собой образ треугольника ΔMPQ при замене переменных, равносильной на G замене (10), т. е.

$$v = g_1(\delta,\tau), \quad \rho = g_2(\delta,\tau), \quad (\delta,\tau) \in G. \quad (18)$$

В интеграле (17) верхний предел интегрирования $v = \xi$ соответствует уравнению прямой $\tilde{M}\tilde{Q}$, т. е. уравнению стороны характеристического треугольника $\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ из рисунка 1, b .

Умножаем уравнение (16) на интегрирующий множитель $\mu(\xi)$, для каждого фиксированного значения η интегрируем результат этого умножения по ξ , т. е. по v , от $v = g_1(h_2\{\eta,0\},0)$ до $v = \xi$ также, как в множителе $\mu(\xi)$, и находим функцию

$$\mu(\xi)\tilde{u}_\eta(\xi,\eta) = \int_{g_1(h_2\{\eta,0\},0)}^{\xi} \frac{\tilde{f}(v,\eta)\tilde{J}(v,\eta)}{\tilde{a}_1(v,\eta) + \tilde{a}_2(v,\eta)} \exp \left\{ \int_{g_1(h_2\{\eta,0\},0)}^v \frac{\left[a_2^2(a_1/a_2)_\delta - a_2(a_1/a_2)_\tau \right] (g_2)_\delta}{(a_1(\delta,\tau) + a_2(\delta,\tau))J(\delta,\tau)} \Big|_{\substack{\delta=\delta(\tilde{v},\eta) \\ \tau=\tau(\tilde{v},\eta)}} d\tilde{v} \right\} dv. \quad (19)$$

Функцию (19) делим на $\mu(\xi)$, при каждом фиксированном значении ξ интегрируем результат умножения по η , т. е. по ρ , и получаем частное решение $\tilde{F}(\xi, \eta)$ неоднородного канонического уравнения (16)

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \int_{g_2(h_1\{\xi, 0\}, 0)}^{\eta} \int_{g_1(h_2\{\rho, 0\}, 0)}^{\xi} \frac{\tilde{f}(v, \rho) \tilde{J}(v, \rho)}{\tilde{a}_1(v, \rho) + \tilde{a}_2(v, \rho)} \exp \left\{ \int_{\xi}^v \left[\frac{a_2^2(a_1/a_2)_{\delta} - a_2(a_1/a_2)_{\tau}}{(a_1(\delta, \tau) + a_2(\delta, \tau)) J(\delta, \tau)} \right]_{\substack{\delta = \delta(\tilde{v}, \rho) \\ \tau = \tau(\tilde{v}, \rho)}} d\tilde{v} \right\} dv d\rho. \quad (20)$$

Во внешнем интеграле пределы интегрирования совпадают со вторыми координатами вершин $\tilde{M}(\xi, \eta)$ и $\tilde{Q}(\xi, g_2(h_1\{\xi, 0\}, 0))$ характеристического треугольника $\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ из рисунка 1, б.

Если интегрируем канонической вид (16) на треугольнике $\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$, то имеем общий интеграл

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \tilde{f}_1(\xi) + \tilde{f}_2(\eta) + \tilde{F}(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \tilde{G}, \quad (21)$$

где частное решение $\tilde{F}(\xi, \eta)$ уравнения (16) равно двойному повторному интегралу вида (20) и \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции соответственно переменных ξ и η . Из этого общего интеграла (21) на \tilde{G} обратной заменой к (10) выводим общий интеграл уравнения (1) на G

$$u(x, t) = \tilde{f}_1(g_1(x, t)) + \tilde{f}_2(g_2(x, t)) + F(x, t), \quad (x, t) \in G, \quad (22)$$

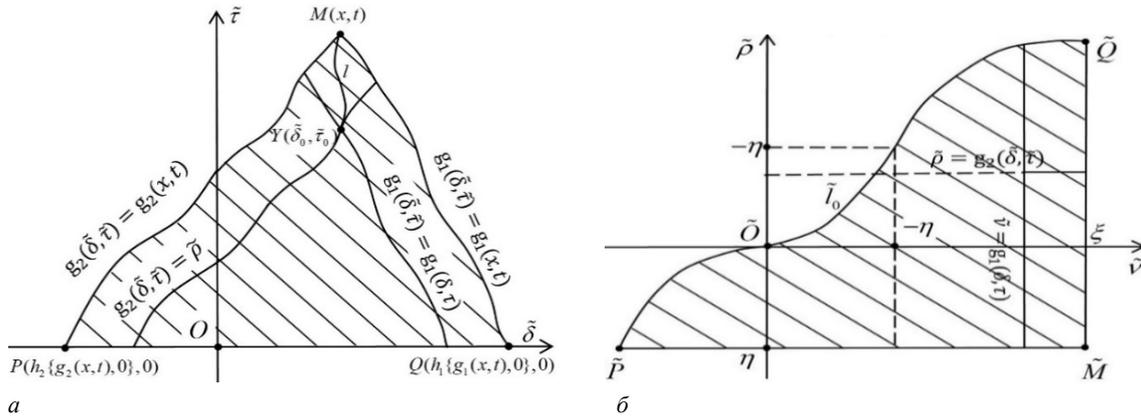
в котором частное решение $F(x, t)$ уравнения (16) равно двойному повторному интегралу (8) из теоремы 1 и \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции от ξ, η из (9). При этом благодаря формулам (12) для интеграла (8) в интеграле (20) мы воспользовались значением якобиана

$$J(\delta, \tau) = v_{\delta} \rho_{\tau} - v_{\tau} \rho_{\delta} = (g_1)_{\delta} (g_2)_{\tau} - (g_1)_{\tau} (g_2)_{\delta} = -(a_1 + a_2)(g_1)_{\delta} (g_2)_{\delta}.$$

На плоскости $\tilde{O}\tilde{v}\tilde{\rho}$ в показателе экспоненты решения (20) для каждого фиксированного ρ берется определенный интеграл по длине ds отрезка прямой $\tilde{\rho} = \rho$ от $\tilde{v} = \xi$ до $\tilde{v} = v$ треугольника $\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ (рисунок 2, б). Поэтому на плоскости $\tilde{O}\tilde{\delta}\tilde{\tau}$ после обратной замены переменных к замене $\tilde{v} = g_1(\tilde{\delta}, \tilde{\tau}), \tilde{\rho} = g_2(\tilde{\delta}, \tilde{\tau})$ типа (18) с волнами над всеми переменными этот интеграл становится интегралом по длине ds кривой l в треугольнике ΔMPQ , т. е. криволинейным интегралом первого типа в (8) в плоскости $\tilde{O}\tilde{\delta}\tilde{\tau}$ (рисунок 2, а). Следовательно, на плоскости $\tilde{O}\tilde{\delta}\tilde{\tau}$ в этом криволинейном интеграле первого типа подынтегральная функция определяется от точки $Y(\tilde{\delta}_0, \tilde{\tau}_0)$ до точки $Z(\tilde{\delta}_1, \tilde{\tau}_1)$ треугольника ΔMPQ из рисунка 2, а. Таким образом, в плоскости $\tilde{O}\tilde{\delta}\tilde{\tau}$ для каждого фиксированного $\rho = \tilde{\rho}$ в показателе экспоненты этот криволинейный интеграл берется от меняющейся точки $Y(\tilde{\delta}_0, \tilde{\tau}_0)$ пересечения характеристики $g_2(\tilde{\delta}, \tilde{\tau}) = \tilde{\rho}$ с характеристикой $g_1(\tilde{\delta}, \tilde{\tau}) = g_1(\delta, \tau)$ из рисунка 2, а, т. е. её координаты являются единственным решением системы уравнений $h_2\{\tilde{\rho}, \tilde{\tau}_0\} = h_1\{g_1(\delta, \tau), \tilde{\tau}_0\}, \tilde{\delta}_0 = h_2\{\tilde{\rho}, \tilde{\tau}_0\}$ в силу строгой монотонности функций $g_i, h_i, i = 1, 2$, и формул обращения (3). В экспоненте формулы (8) этот криволинейный интеграл берется до точки $Z(\tilde{\delta}_1, \tilde{\tau}_1)$ пересечения характеристики $g_2(\tilde{\delta}, \tilde{\tau}) = \tilde{\rho}$ при обязательном значении $\tilde{\rho} = g_2(x, t)$ с характеристикой $g_1(\tilde{\delta}, \tilde{\tau}) = g_1(x, t)$, которые, очевидно, пересекаются в точке $M(x, t)$. Итак, в треугольнике ΔMPQ плоскости $\tilde{O}\tilde{\delta}\tilde{\tau}$ у точки Z координаты

$$Z(\tilde{\delta}_1, \tilde{\tau}_1) = M(x, t) \Leftrightarrow \tilde{\delta}_1 = x, \tilde{\tau}_1 = t. \quad (23)$$

В подынтегральной функции показателя экспоненты решения (20) мы не перешли к новым переменным (18), потому что ниже в этой подынтегральной функции мы должны делать обратную замену переменных к (18).



a – для функции F ; б – для функции F̃

Рисунок 2. – Характеристические треугольники ΔMPQ и ΔM̃P̃Q̃

Проверка формулы решения 1. Самой точной проверкой решений уравнения (1) является их подстановка в это же уравнение (1). Вычисляем первые частные производные от функции F вида (8)

$$\begin{aligned}
 F_t(x,t) &= \int_0^t \left[\frac{f(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial t} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{f(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial t} e^{B(x,t)} \right] d\tau - \\
 &\quad - \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x,t), \tau\}} \frac{f(\delta, \tau)}{a_1(\delta, \tau) + a_2(\delta, \tau)} e^{A(x,t)} \frac{a_2^2(a_1/a_2)_\delta - a_2(a_1/a_2)_\tau}{[a_1(\delta, \tau) + a_2(\delta, \tau)]^2 (g_1(\delta, \tau))_\delta} \Big|_{\tau=t}^{\delta=x} (g_1)_t d\delta, \\
 F_x(x,t) &= \int_0^t \left[\frac{f(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial x} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{f(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial x} e^{B(x,t)} \right] d\tau - \\
 &\quad - \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x,t), \tau\}} \frac{f(\delta, \tau)}{a_1(\delta, \tau) + a_2(\delta, \tau)} e^{A(x,t)} \frac{a_2^2(a_1/a_2)_\delta - a_2(a_1/a_2)_\tau}{[a_1(\delta, \tau) + a_2(\delta, \tau)]^2 (g_1(\delta, \tau))_\delta} \Big|_{\tau=t}^{\delta=x} (g_1)_x d\delta, \quad (x,t) \in G, \quad (24)
 \end{aligned}$$

где показателями экспонент являются интегральные функции

$$\begin{aligned}
 A(x,t) &\equiv \int_{g_1(\delta, \tau)}^{g_1(x,t)} \frac{a_2^2(a_1/a_2)_\delta - a_2(a_1/a_2)_\tau}{[a_1(\delta, \tau) + a_2(\delta, \tau)]^2 (g_1(\delta, \tau))_\delta} ds, \\
 B(x,t) &\equiv \int_{g_1(\delta, \tau)}^{g_1(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{a_2^2(a_1/a_2)_\delta - a_2(a_1/a_2)_\tau}{[a_1(\delta, \tau) + a_2(\delta, \tau)]^2 (g_1(\delta, \tau))_\delta} ds,
 \end{aligned}$$

так как в первых интегралах $g_1(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau) = g_1(x,t)$ по первому тождеству обращения из (3) при $i = 1$ и во вторых интегралах значение подынтегральной функции из $A(x,t)$ взято при $\delta_1 = x, \tau_1 = t$ в силу (23).

Находим вторые частные производные от функции F из (8):

$$\begin{aligned}
 F_{tt}(x,t) &= \frac{f(x,t)}{a_1(x,t)+a_2(x,t)} a_2(x,t) - \frac{f(x,t)}{a_1(x,t)+a_2(x,t)} (-a_1(x,t)) + \\
 &+ \int_0^t \left[\left(\frac{f(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial t} \right)_t - \left(\frac{f(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)} \times \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial t} \right)_t \right] e^{B(x,t)} d\tau + \int_0^t \frac{f(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial t} e^{B(x,t)} \times \\
 &\quad \times \frac{a_2^2(a_1/a_2)_x - a_2(a_1/a_2)_t}{[a_1(x,t)+a_2(x,t)]^2 (g_1(x,t))_x} (g_1)_t d\tau - \int_0^t \frac{f(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial t} e^{B(x,t)} \times \\
 &\quad \times \frac{a_2^2(a_1/a_2)_{\delta} - a_2(a_1/a_2)_{\tau}}{[a_1(\tilde{\delta}, \tilde{\tau}) + a_2(\tilde{\delta}, \tilde{\tau})]^2 (g_1(\tilde{\delta}, \tilde{\tau}))_{\delta}} \Big|_{\substack{\tilde{\delta}=\delta_0 \\ \tilde{\tau}=\tau_0}} \frac{\partial g_1(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)}{\partial t} d\tau - \\
 &\quad - \int_0^t \frac{f(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial t} \frac{a_2^2(a_1/a_2)_{\delta} - a_2(a_1/a_2)_{\tau}}{[a_1(\tilde{\delta}, \tilde{\tau}) + a_2(\tilde{\delta}, \tilde{\tau})]^2 (g_1(\tilde{\delta}, \tilde{\tau}))_{\delta}} \Big|_{\substack{\tilde{\delta}=x \\ \tilde{\tau}=t}} (g_1)_t d\tau + \\
 &\quad + \int_0^t \frac{f(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial t} e^{B(x,t)} \frac{a_2^2(a_1/a_2)_x - a_2(a_1/a_2)_t}{[a_1(x,t)+a_2(x,t)]^2 (g_1)_x} (g_1)_t d\tau + \\
 &\quad + \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x,t), \tau\}} \frac{f(\delta, \tau)}{a_1(\delta, \tau) + a_2(\delta, \tau)} e^{A(x,t)} d\delta \left(\frac{a_2^2(a_1/a_2)_x - a_2(a_1/a_2)_t}{[a_1(x,t)+a_2(x,t)]^2 (g_1(x,t))_x} (g_1(x,t))_t \right)^2 - \\
 &\quad - \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x,t), \tau\}} \frac{f(\delta, \tau)}{a_1(\delta, \tau) + a_2(\delta, \tau)} e^{A(x,t)} d\delta \left(\frac{a_2^2(a_1/a_2)_x - a_2(a_1/a_2)_t}{[a_1(x,t)+a_2(x,t)]^2 (g_1(x,t))_x} (g_1(x,t))_t \right), \quad (x,t) \in G, \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{tx}(x,t) &= \int_0^t \left[\left(\frac{f(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial t} \right)_x - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{f(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial t} \right)_x \right] e^{B(x,t)} d\tau + \\
 &\quad + \int_0^t \frac{f(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial t} e^{B(x,t)} \frac{a_2^2(a_1/a_2)_x - a_2(a_1/a_2)_t}{[a_1(x,t)+a_2(x,t)]^2 (g_1(x,t))_x} (g_1)_x d\tau - \\
 &\quad - \int_0^t \frac{f(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial t} e^{B(x,t)} \times \\
 &\quad \times \frac{a_2^2(a_1/a_2)_{\delta} - a_2(a_1/a_2)_{\tau}}{[a_1(\tilde{\delta}, \tilde{\tau}) + a_2(\tilde{\delta}, \tilde{\tau})]^2 (g_1(\tilde{\delta}, \tilde{\tau}))_{\delta}} \Big|_{\substack{\tilde{\delta}=\delta_0 \\ \tilde{\tau}=\tau_0}} \frac{\partial g_1(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)}{\partial x} d\tau -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^t \frac{f(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial x} \frac{a_2^2(a_1/a_2)_{\tilde{\delta}} - a_2(a_1/a_2)_{\tilde{\tau}}}{[a_1(\tilde{\delta}, \tilde{\tau}) + a_2(\tilde{\delta}, \tilde{\tau})]^2 (g_1(\tilde{\delta}, \tilde{\tau}))_{\tilde{\delta}}} \Big|_{\substack{\tilde{\delta}=x \\ \tilde{\tau}=t}} (g_1)_t d\tau + \\
 & + \int_0^t \frac{f(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial x} e^{B(x,t)} \frac{a_2^2(a_1/a_2)_x - a_2(a_1/a_2)_t}{[a_1(x,t) + a_2(x,t)]^2 (g_1)_x} (g_1)_t d\tau + \\
 & + \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x,t), \tau\}} \frac{f(\delta, \tau)}{a_1(\delta, \tau) + a_2(\delta, \tau)} e^{A(x,t)} d\delta \left(\frac{a_2^2(a_1/a_2)_x - a_2(a_1/a_2)_t}{[a_1(x,t) + a_2(x,t)]^2 (g_1)_x} \right)^2 (g_1)_t (g_1)_x - \\
 & - \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x,t), \tau\}} \frac{f(\delta, \tau)}{a_1(\delta, \tau) + a_2(\delta, \tau)} e^{A(x,t)} d\delta \left(\frac{a_2^2(a_1/a_2)_x - a_2(a_1/a_2)_t}{[a_1(x,t) + a_2(x,t)]^2 (g_1)_x} (g_1)_t \right)_x, \quad (x,t) \in G, \quad (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{xx}(x,t) &= \int_0^t \left[\left(\frac{f(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial x} \right)_x - \right. \\
 & \left. - \left(\frac{f(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial x} \right)_x e^{B(x,t)} \right] d\tau + \\
 & + \int_0^t \frac{f(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial x} e^{B(x,t)} \frac{a_2^2(a_1/a_2)_x - a_2(a_1/a_2)_t}{[a_1(x,t) + a_2(x,t)]^2 (g_1(x,t))_x} (g_1)_x d\tau - \\
 & - \int_0^t \frac{f(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial x} e^{B(x,t)} \times \\
 & \times \frac{a_2^2(a_1/a_2)_{\tilde{\delta}} - a_2(a_1/a_2)_{\tilde{\tau}}}{[a_1(\tilde{\delta}, \tilde{\tau}) + a_2(\tilde{\delta}, \tilde{\tau})]^2 (g_1(\tilde{\delta}, \tilde{\tau}))_{\tilde{\delta}}} \Big|_{\substack{\tilde{\delta}=\tilde{\delta}_0 \\ \tilde{\tau}=\tilde{\tau}_0}} \frac{\partial g_1(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)}{\partial x} d\tau - \\
 & - \int_0^t \frac{f(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial x} \frac{a_2^2(a_1/a_2)_{\tilde{\delta}} - a_2(a_1/a_2)_{\tilde{\tau}}}{[a_1(\tilde{\delta}, \tilde{\tau}) + a_2(\tilde{\delta}, \tilde{\tau})]^2 (g_1(\tilde{\delta}, \tilde{\tau}))_{\tilde{\delta}}} \Big|_{\substack{\tilde{\delta}=x \\ \tilde{\tau}=t}} (g_1)_x d\tau + \\
 & + \int_0^t \frac{f(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial x} e^{B(x,t)} \frac{a_2^2(a_1/a_2)_x - a_2(a_1/a_2)_t}{[a_1(x,t) + a_2(x,t)]^2 (g_1)_x} (g_1)_x d\tau + \\
 & + \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x,t), \tau\}} \frac{f(\delta, \tau)}{a_1(\delta, \tau) + a_2(\delta, \tau)} e^{A(x,t)} d\delta \left(\frac{a_2^2(a_1/a_2)_x - a_2(a_1/a_2)_t}{[a_1(x,t) + a_2(x,t)]^2 (g_1)_x} \right)^2 (g_1)_x - \\
 & - \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x,t), \tau\}} \frac{f(\delta, \tau)}{a_1(\delta, \tau) + a_2(\delta, \tau)} e^{A(x,t)} d\delta \left(\frac{a_2^2(a_1/a_2)_x - a_2(a_1/a_2)_t}{[a_1(x,t) + a_2(x,t)]^2 (g_1)_x} (g_1)_x \right)_x, \quad (x,t) \in G. \quad (27)
 \end{aligned}$$

В этих вторых производных нижними индексами x и t функций и выражений обозначены их первые частные производные соответственно по переменным x и t .

Суммируем коэффициенты при подобных интегралах после подстановки первых и вторых производных (24)–(27) в (1). Коэффициент интегралов с первыми производными по x и t от $C(x, t)$ равен

$$\begin{aligned} & C_t(x, t)(h_1)_t\{\bullet\} + (a_1 - a_2)C_x(h_1)_t\{\bullet\} - a_1a_2C_x(h_1)_{xt}\{\bullet\} = \\ & = a_2C_x(x, t)(h_1)_t\{\bullet\} + (a_1 - a_2)C_x(h_1)_t\{\bullet\} - a_1a_2C_x(h_1)_{xt}\{\bullet\} = \\ & = a_1C_x(h_1)_t\{\bullet\} - a_1a_2C_x(h_1)_{xt}\{\bullet\} = a_1a_2C_x(h_1)_{xt}\{\bullet\} - a_1a_2C_x(h_1)_{xt}\{\bullet\} = 0, \quad (x, t) \in G, \end{aligned} \quad (28)$$

где символ $\{\bullet\} = \{g_1(x, t), \tau\}$ и функция

$$C(x, t) \equiv \frac{f(h_1\{g_1(x, t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_1\{g_1(x, t), \tau\}, \tau) + a_2(h_1\{g_1(x, t), \tau\}, \tau)}.$$

В равенствах (28) мы применили при $i=1$ по одному из двух тождеств на G

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{f(h_i\{\bullet\bullet\bullet\}, \tau)}{a_1(h_i\{\bullet\bullet\bullet\}, \tau) + a_2(h_i\{\bullet\bullet\bullet\}, \tau)} \right) = \frac{\partial}{\partial g_i} \left(\frac{f(h_i\{\bullet\bullet\bullet\}, \tau)}{a_1(h_i\{\bullet\bullet\bullet\}, \tau) + a_2(h_i\{\bullet\bullet\bullet\}, \tau)} \right) (g_i)_t = \\ & = (-1)^{i+1} a_{3-i} \frac{\partial}{\partial g_i} \left(\frac{f(h_i\{\bullet\bullet\bullet\}, \tau)}{a_1(h_i\{\bullet\bullet\bullet\}, \tau) + a_2(h_i\{\bullet\bullet\bullet\}, \tau)} \right) (g_i)_x = (-1)^{i+1} a_{3-i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f(h_i\{\bullet\bullet\bullet\}, \tau)}{a_1(h_i\{\bullet\bullet\bullet\}, \tau) + a_2(h_i\{\bullet\bullet\bullet\}, \tau)} \right), \quad i=1, 2, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{\partial h_i\{\bullet\bullet\bullet\}}{\partial t} = \frac{\partial h_i\{\bullet\bullet\bullet\}}{\partial g_i} (g_i)_t = (-1)^{i+1} a_{3-i} \frac{\partial h_i\{\bullet\bullet\bullet\}}{\partial g_i} (g_i)_x = (-1)^{i+1} a_{3-i} \frac{\partial h_i\{\bullet\bullet\bullet\}}{\partial x}, \quad i=1, 2, \quad (x, t) \in G, \quad (30)$$

где символы $\{\bullet\bullet\bullet\} = \{g_i(x, t), \tau\}$. Для вывода (29) и (30) нами использованы равенства из (12) при $i=1, 2$.

Согласно (30) при $i=1$ коэффициент под интегралами от $C(x, t)$ равен

$$\begin{aligned} & (h_1)_{tt}\{\bullet\} + (a_1 - a_2)(h_1)_{tx}\{\bullet\} - a_1a_2(h_1)_{xtx}\{\bullet\} - a_2^{-1}(a_2)_{tt}(h_1)_t\{\bullet\} - a_1(a_2)_{tx}(h_1)_x\{\bullet\} = \\ & = (a_2)_t(h_1)_{tx}\{\bullet\} + a_2(h_1)_{tx}\{\bullet\} + (a_1 - a_2)(h_1)_{tx}\{\bullet\} - a_1a_2(h_1)_{xtx}\{\bullet\} - a_2^{-1}(a_2)_{tt}(h_1)_t\{\bullet\} - a_1(a_2)_{tx}(h_1)_x\{\bullet\} = \\ & = (a_2)_t(h_1)_{tx}\{\bullet\} + a_1(h_1)_{tx}\{\bullet\} - a_1a_2(h_1)_{xtx}\{\bullet\} - (a_2)_t(h_1)_{tx}\{\bullet\} - a_1(a_2)_{tx}(h_1)_x\{\bullet\} = a_1[(h_1)_{tx}\{\bullet\} - \\ & - a_2(h_1)_{xtx}\{\bullet\} - (a_2)_{tx}(h_1)_x\{\bullet\}] = a_1[(a_2)_{tx}(h_1)_x\{\bullet\} + a_2(h_1)_{xtx}\{\bullet\} - a_2(h_1)_{xtx}\{\bullet\} - (a_2)_{tx}(h_1)_x\{\bullet\}] = 0, \quad (x, t) \in G, \end{aligned} \quad (31)$$

потому что справедливы ещё тождества

$$\frac{\partial^2 h_i\{\bullet\bullet\}}{\partial t^2} = (-1)^{i+1} \frac{\partial}{\partial t} \left[a_{3-i} \frac{\partial h_i\{\bullet\bullet\}}{\partial x} \right] = (-1)^{i+1} \left[(a_{3-i})_t \frac{\partial h_i\{\bullet\bullet\}}{\partial x} + a_{3-i} \frac{\partial^2 h_i\{\bullet\bullet\}}{\partial t \partial x} \right], \quad i=1, 2, \quad (x, t) \in G, \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 h_i\{\bullet\bullet\}}{\partial x \partial t} = (-1)^{i+1} \frac{\partial}{\partial x} \left[a_{3-i} \frac{\partial h_i\{\bullet\bullet\}}{\partial x} \right] = (-1)^{i+1} \left[(a_{3-i})_x \frac{\partial h_i\{\bullet\bullet\}}{\partial x} + a_{3-i} \frac{\partial^2 h_i\{\bullet\bullet\}}{\partial x^2} \right], \quad i=1, 2, \quad (x, t) \in G, \quad (33)$$

в которых нами использованы тождества (30) с символами $\{\bullet\bullet\} = \{g_i(x, t), \tau\}$ при $i=1, 2$.

Коэффициент у интегралов с первыми производными по x и t от функции $D(x, t)$ равен

$$e^{B(x,t)} [D_t(x, t)(h_2)_t\{\bullet\bullet\} + (a_1 - a_2)D_x(h_2)_t\{\bullet\bullet\} - a_1a_2D_x(h_2)_{tx}\{\bullet\bullet\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{B(x,t)}[-a_1 D_x(x,t)(h_2)_t\{\bullet\bullet\} + (a_1 - a_2)D_x(h_2)_t\{\bullet\bullet\} - a_1 a_2 D_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\}] = \\
 &= e^{B(x,t)}[-a_2 D_x(h_2)_t\{\bullet\bullet\} - a_1 a_2 D_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\}] = e^{B(x,t)}[a_1 a_2 D_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\} - a_1 a_2 D_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\}] = 0, \quad (x,t) \in G, \quad (34)
 \end{aligned}$$

где символ $\{\bullet\bullet\} = \{g_2(x,t), \tau\}$ и функция

$$D(x,t) \equiv \frac{f(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau) + a_2(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)}.$$

В равенствах (34) мы применили при $i = 2$ по одному из двух тождеств в (29) и (30).

Согласно (30) при $i = 2$ коэффициент под первыми интегралами от $D(x,t)e^{B(x,t)}$ в (24)–(27) равен

$$\begin{aligned}
 &(h_2)_{tt}\{\bullet\bullet\} + (a_1 - a_2)(h_2)_{tx}\{\bullet\bullet\} - a_1 a_2 (h_2)_{xx}\{\bullet\bullet\} - a_2^{-1}(a_2)_t(h_2)_t\{\bullet\bullet\} - a_1(a_2)_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\} = \\
 &= -(a_1)_t(h_2)_x\{\bullet\bullet\} - a_1(h_2)_{tx}\{\bullet\bullet\} + (a_1 - a_2)(h_2)_{tx}\{\bullet\bullet\} - a_1 a_2 (h_2)_{xx}\{\bullet\bullet\} - a_2^{-1}(a_2)_t(h_2)_t\{\bullet\bullet\} - a_1(a_2)_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\} = \\
 &= -(a_1)_t(h_2)_x\{\bullet\bullet\} - a_2(h_2)_{tx}\{\bullet\bullet\} - a_1 a_2 (h_2)_{xx}\{\bullet\bullet\} - a_2^{-1}(a_2)_t(h_2)_t\{\bullet\bullet\} - a_1(a_2)_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\} = \\
 &= -(a_1)_t(h_2)_x\{\bullet\bullet\} - a_2[-(a_1)_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\} - a_1(h_2)_{xx}\{\bullet\bullet\}] - a_1 a_2 (h_2)_{xx}\{\bullet\bullet\} - a_2^{-1}(a_2)_t(h_2)_t\{\bullet\bullet\} - a_1(a_2)_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\} = \\
 &= -(a_1)_t(h_2)_x\{\bullet\bullet\} + (a_1)_x a_2 (h_2)_x\{\bullet\bullet\} - a_2^{-1}(a_2)_t(h_2)_t\{\bullet\bullet\} - a_1(a_2)_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\} = \\
 &= -(a_1)_t(h_2)_x\{\bullet\bullet\} + (a_1)_x a_2 (h_2)_x\{\bullet\bullet\} + a_2^{-1} a_1 (a_2)_t(h_2)_x\{\bullet\bullet\} - a_1(a_2)_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\} = \\
 &= \{[(a_1)_x a_2 - a_1(a_2)_x] - [(a_1)_t a_2 - a_1(a_2)_t] / a_2\}(h_2)_x\{\bullet\bullet\} = \\
 &= [a_2^2(a_1 / a_2)_x - a_2(a_1 / a_2)_t](h_2)_x\{\bullet\bullet\}, \quad (x,t) \in G. \quad (35)
 \end{aligned}$$

Вывод равенств (35) основан на тождествах (30), (32), (33) при $i = 2$.

Находим коэффициент функции $D(x,t)e^{B(x,t)}$ после подстановки вторых и пятых интегралов из вторых производных (25)–(27) в уравнение (1)

$$\begin{aligned}
 &E(x,t)[2(h_2)_t\{\bullet\bullet\}(g_1)_t + (a_1 - a_2)((h_2)_t\{\bullet\bullet\}(g_1)_x + (h_2)_x\{\bullet\bullet\}(g_1)_t) - 2a_1 a_2 (h_2)_x\{\bullet\bullet\}(g_1)_x] = \\
 &= E(x,t)[(h_2)_t\{\bullet\bullet\} a_2 (g_1)_x + (a_1 - a_2)(h_2)_t\{\bullet\bullet\}(g_1)_x - (h_2)_x\{\bullet\bullet\} a_1 (g_1)_t + \\
 &\quad + (a_1 - a_2)(h_2)_x\{\bullet\bullet\}(g_1)_t - 2a_1 a_2 (h_2)_x\{\bullet\bullet\}(g_1)_x] = \\
 &= E(x,t)[a_1 (h_2)_t\{\bullet\bullet\}(g_1)_x - a_1 a_2 (h_2)_x\{\bullet\bullet\}(g_1)_x - a_2 (h_2)_x\{\bullet\bullet\}(g_1)_t - a_1 a_2 (h_2)_x\{\bullet\bullet\}(g_1)_x] = \\
 &= E(x,t)[-a_1(a_1 + a_2)(h_2)_x\{\bullet\bullet\}(g_1)_x - a_2(a_1 + a_2)(h_2)_x\{\bullet\bullet\}(g_1)_x] = -E(x,t)(a_1 + a_2)^2 (h_2)_x\{\bullet\bullet\}(g_1)_x = \\
 &= -[a_2^2(a_1 / a_2)_x - a_2(a_1 / a_2)_t](h_2)_x\{\bullet\bullet\}, \quad (x,t) \in G. \quad (36)
 \end{aligned}$$

в котором символом $E(x,t)$ обозначена подынтегральная функция из показателя экспоненты решения (7)

$$E(x,t) = \frac{a_2^2(a_1 / a_2)_x - a_2(a_1 / a_2)_t}{[a_1(x,t) + a_2(x,t)]^2 (g_1(x,t))_x}.$$

Равенства (35) получены нами с помощью тождеств (12) при $i = 1$ и (30) при $i = 2$.

Вычисляем коэффициент функции $D(x, t)e^{B(x, t)} E(\tilde{\delta}_0, \tilde{\tau}_0)$ после подстановки третьих интегралов из вторых производных (25)–(27) в уравнение (1)

$$\begin{aligned} & -\left[(h_2)_i \{ \bullet \bullet \} (g_1(h_2 \{ \bullet \bullet \}, \tau))_i + (a_1 - a_2)(h_2)_i \{ \bullet \bullet \} (g_1(h_2 \{ \bullet \bullet \}, \tau))_x - a_1 a_2 (h_2)_x \{ \bullet \bullet \} (g_1(h_2 \{ \bullet \bullet \}, \tau))_x \right] = \\ & = a_1 (h_2)_i \{ \bullet \bullet \} (g_1(h_2 \{ \bullet \bullet \}, \tau))_x - (a_1 - a_2)(h_2)_i \{ \bullet \bullet \} (g_1(h_2 \{ \bullet \bullet \}, \tau))_x + a_1 a_2 (h_2)_x \{ \bullet \bullet \} (g_1(h_2 \{ \bullet \bullet \}, \tau))_x = \\ & = a_2 (h_2)_i \{ \bullet \bullet \} (g_1(h_2 \{ \bullet \bullet \}, \tau))_x + a_1 a_2 (h_2)_x \{ \bullet \bullet \} (g_1(h_2 \{ \bullet \bullet \}, \tau))_x = \\ & = a_2 \left[-a_1 (h_2)_x \{ \bullet \bullet \} (g_1(h_2 \{ \bullet \bullet \}, \tau))_x + a_1 (h_2)_x \{ \bullet \bullet \} (g_1(h_2 \{ \bullet \bullet \}, \tau))_x \right] = 0, \quad (x, t) \in G, \end{aligned} \quad (37)$$

где мы воспользовались тождеством (30) при $i = 2$ и его аналогом

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g_1(h_2 \{ g_2(x, t), \tau \}, \tau)}{\partial t} = \frac{\partial g_1(h_2 \{ g_2(x, t), \tau \}, \tau)}{\partial g_2} (g_2)_t = \\ & = -a_1 \frac{\partial g_1(h_2 \{ g_2(x, t), \tau \}, \tau)}{\partial g_2} (g_2)_x = -a_1 \frac{\partial g_1(h_2 \{ g_2(x, t), \tau \}, \tau)}{\partial x}, \quad (x, t) \in G. \end{aligned} \quad (38)$$

Доказательство тождества (38) аналогично доказательству тождества (30) при $i = 2$.

Коэффициент функции $K(\delta, \tau)e^{A(x, t)} [E(x, t)]^2$ после подстановки предпоследних двойных интегралов из вторых производных (25)–(27) в уравнение (1) равен

$$\begin{aligned} & ((g_1)_t)^2 + (a_1 - a_2)(g_1)_t (g_1)_x - a_1 a_2 ((g_1)_x)^2 = a_2 (g_1)_t (g_1)_x + (a_1 - a_2)(g_1)_t (g_1)_x - a_1 a_2 ((g_1)_x)^2 = \\ & = a_1 (g_1)_t (g_1)_x - a_1 a_2 ((g_1)_x)^2 = a_1 (g_1)_x [(g_1)_t - a_2 (g_1)_x] = 0, \quad (x, t) \in G, \end{aligned} \quad (39)$$

где символом $K(\delta, \tau)$ обозначена подынтегральная функция

$$K(\delta, \tau) = \frac{f(\delta, \tau)}{a_1(\delta, \tau) + a_2(\delta, \tau)}.$$

Доказательство равенств (39) основано на тождестве из (12) при $i = 1$.

Находим коэффициент функции $K(\delta, \tau)e^{A(x, t)}$ после подстановки последних двойных интегралов из первых и вторых производных (24)–(27) в уравнение (1)

$$\begin{aligned} & -E_t(x, t)(g_1)_t - E(x, t)(g_1)_{tt} - (a_1 - a_2)E_x(x, t)(g_1)_t + a_1 a_2 E_x(x, t)(g_1)_x + a_1 a_2 E(x, t)(g_1)_{xx} + a_2^{-1}(a_2)_t E(x, t)(g_1)_t + \\ & + a_1(a_2)_x E(x, t)(g_1)_x = -E_t(x, t)(g_1)_t - (a_1 - a_2)E_x(x, t)(g_1)_t + a_1 a_2 E_x(x, t)(g_1)_x - E(x, t)(g_1)_{tt} + a_1 a_2 E(x, t)(g_1)_{xx} + \\ & + a_2^{-1}(a_2)_t E(x, t)(g_1)_t + a_1(a_2)_x E(x, t)(g_1)_x = -E_{g_1}(x, t) \left[((g_1)_t)^2 + (a_1 - a_2)(g_1)_t (g_1)_x - a_1 a_2 ((g_1)_x)^2 \right] - \\ & - E(x, t) \left[(g_1)_{tt} + (a_1 - a_2)(g_1)_{tx} - a_1 a_2 (g_1)_{xx} - a_2^{-1}(a_2)_t (g_1)_t - a_1(a_2)_x (g_1)_x \right] = \\ & - E_{g_1}(x, t) \left[a_2 (g_1)_t (g_1)_x + (a_1 - a_2)(g_1)_t (g_1)_x - a_1 (g_1)_t (g_1)_x \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -E(x,t)\left[\xi_{tt} + (a_1 - a_2)\xi_{tx} - a_1 a_2 \xi_{xx} - a_2^{-1}(a_2)_t \xi_t - a_1(a_2)_x \xi_x\right] = \\
 & = -E(x,t)\left[a_2^{-1}(a_2)_t \xi_t + a_1(a_2)_x \xi_x - a_2^{-1}(a_2)_t \xi_t - a_1(a_2)_x \xi_x\right] = 0, \quad (x,t) \in G,
 \end{aligned} \tag{40}$$

на основании тождеств (12) при $i = 1$, (14), $E_t(x,t) = E_{g_1}(x,t)(g_1)_t$, $E_x(x,t) = E_{g_1}(x,t)(g_1)_x$, так как подынтегральная функция $E(x,t)$ интеграла по длине ds характеристики $g_1(\tilde{\delta}, \tilde{\tau}) = g_1(x,t)$ из показателя экспоненты решения (7) фактически также представима в виде $E(x,t) = E(\tilde{\delta}, \tilde{\tau})|_{g_1(\tilde{\delta}, \tilde{\tau})=g_1(x,t)}$.

На основании равенств (28), (31), (34)–(37), (39), (40) заключаем, что в результате подстановки частных производных $F_t, F_x, F_{tt}, F_{tx}, F_{xx}$ из (24)–(27) в уравнение (1) получаем его правую часть $f(x,t)$ для всех $(x,t) \in G$, т. е. функция F вида (8) является классическим решением уравнения (1) на G .

Проверка формулы решения 2. Выше нами показано, что действительно функция F из (8) удовлетворяет уравнению (1) на G . Это, в частности, указывает на справедливость канонического вида (16) на \tilde{G} и его решения \tilde{F} вида (20), из которого нами найдено решение F вида (8) обратной заменой к (10). Поэтому, как правило, проверку формулы решения F из (8) уравнения (1) можно реализовать проще: подстановкой \tilde{F} из (20) в уравнение (16). Канонические виды уравнений обычно содержат меньше слагаемых.

Берём от функции \tilde{F} вида (20) сначала первую частную производную по η

$$\tilde{F}_\eta(\xi, \eta) = \int_{g_1(h_2(\eta, 0), 0)}^{\xi} \frac{\tilde{f}(v, \eta)\tilde{J}(v, \eta)}{\tilde{a}_1(v, \eta) + \tilde{a}_2(v, \eta)} \exp\left\{ \int_{\xi}^v \frac{[a_2^2(a_1/a_2)_\delta - a_2(a_1/a_2)_\tau](g_2)_\delta}{(a_1(\delta, \tau) + a_2(\delta, \tau))J(\delta, \tau)} d\tilde{v} \Big|_{\substack{\delta=\delta(\tilde{v}, \eta) \\ \tau=\tau(\tilde{v}, \eta)}} \right\} dv \tag{41}$$

и затем ещё первую частную производную по ξ

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_{\xi\eta}(\xi, \eta) &= \frac{\tilde{f}(\xi, \eta)\tilde{J}(\xi, \eta)}{\tilde{a}_1(\xi, \eta) + \tilde{a}_2(\xi, \eta)} - \frac{[a_2^2(a_1/a_2)_\delta - a_2(a_1/a_2)_\tau](g_2)_\delta}{(a_1(\delta, \tau) + a_2(\delta, \tau))J(\delta, \tau)} \Big|_{\substack{\delta=\delta(\xi, \eta) \\ \tau=\tau(\xi, \eta)}} \times \\
 &\times \int_{g_1(h_2(\eta, 0), 0)}^{\xi} \frac{\tilde{f}(v, \eta)\tilde{J}(v, \eta)}{\tilde{a}_1(v, \eta) + \tilde{a}_2(v, \eta)} \exp\left\{ \int_{\xi}^v \frac{[a_2^2(a_1/a_2)_\delta - a_2(a_1/a_2)_\tau](g_2)_\delta}{(a_1(\delta, \tau) + a_2(\delta, \tau))J(\delta, \tau)} d\tilde{v} \Big|_{\substack{\delta=\delta(\tilde{v}, \eta) \\ \tau=\tau(\tilde{v}, \eta)}} \right\} dv.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Подстановка производных (41), (42) в канонический вид (16) указывает на то, что \tilde{F} из (20) удовлетворяет уравнению (16) на \tilde{G} . Отсюда вытекает правильность нашего краткого вывода частного решения (8) уравнения (1) из частного решения (20) уравнения (16). Если бы канонический вид (16) и, следовательно, решение (20) оказались ложными, то решение (8) тоже было бы ложным. Теорема 1 строго доказана.

Замечание 2. Ясно, что функции \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 и f_1, f_2 дважды непрерывно дифференцируемы одновременно в общем интеграле (7) уравнения (1) на G . Решения (8) однородного уравнения (1) при $f = 0$ получены «методом погружения в решения с фиксированными значениями» из [6]. После подстановки функций (9) в общий интеграл (7) постоянная $f_2(g_2(0,0))$ конечно сокращается, но значение $\tilde{f}_2(g_2(0,0)) = 0$ в (9) существенно упрощает вычисления решений систем дифференциальных уравнений при нахождении классических решений смешанных задач для уравнений в частных производных методом характеристик [11].

Следствие 1. Если правая часть f уравнений (1) зависит только от x или t , то утверждение теоремы 1 верно без интегральных требований гладкости из (6).

В случае зависимости правой части уравнений (1) только от x или только от t необходимо и достаточно непрерывности правой части $f \in C(G)$ уравнения (1) [1–9; диссертация Новикова Е. Н.].

Следствие 2. Указанная в требованиях гладкости (6) теоремы 1 принадлежность интегралов от непрерывной функции $f \in C(G)$ множеству $C^1(G)$ эквивалентна их принадлежности множеству $C^{(1,0)}(G)$ или $C^{(0,1)}(G)$. Здесь $C^{(1,0)}(G)$ или $C^{(0,1)}(G)$ – соответственно множества непрерывно дифференцируемых по x или t и непрерывных по t или x функций в верхней полуплоскости G [1; 2].

Замечание 3. Вместо уравнений $dx = (-1)^i a_{3-i}(x,t)dt, i = 1, 2$, из (2) лучше было бы взять характеристические уравнения $dx = (-1)^i a_i(x,t)dt, i = 1, 2$. В статье [8] взяты характеристические уравнения (2) только ради того, чтобы на G_- криволинейная формула Даламбера совпала с формулой Даламбера из диссертации Барановской С. Н.

2. Двухскоростное модельное волновое уравнение в первой четверти плоскости. В предыдущем разделе вывод общего решения двухскоростного модельного волнового уравнения в верхней полуплоскости соответствует его выводу на подмножестве G_- с неравенством $g_2(x,t) > g_2(0,0)$ из первой четверти плоскости $G_\infty =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

В будущих решениях методом неявных характеристик смешанных (начально-граничных) задач для уравнения (1) на первой четверти плоскости $G_\infty =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ в общем интеграле (7) на подмножестве $G_+ \subset G_\infty$, где выполняется обратное неравенство $g_2(x,t) \leq g_2(0,0)$, под интегралом F переменную δ функций f, a_1, a_2 надо брать с модулем $|\delta|$, так как в смешанных задачах на первой четверти плоскости G_∞ функции f, a_1, a_2 заданы только для неотрицательных $x \geq 0$.

Кроме того, из статьи [3] известно, что при различных постоянных коэффициентах $a_1^{(0)} \neq a_2^{(0)}$, где $a_i(x,t) = a_i^{(0)} = const, i = 1, 2$, в уравнении (1) для только непрерывных правых частей $f \in C(G_\infty)$, которые зависят одновременно от x и t , функция F из (8) с модулем $|\delta|$ переменной δ функции f не является дважды непрерывно дифференцируемой на G_+ . Поэтому в случае различных постоянных коэффициентов $a_1^{(0)} \neq a_2^{(0)}$ в уравнении (1) и не более гладких, зависящих от x и t правых частей, чем $f \in C(G_\infty)$, эта функция F из (8) вида

$$F(x,t) = \frac{1}{a_1^{(0)} + a_2^{(0)}} \int_0^t d\tau \int_{x-a_1^{(0)}(t-\tau)}^{x+a_2^{(0)}(t-\tau)} f(|\delta|, \tau) d\delta \quad (43)$$

требует корректировки на подмножестве G_+ первой четверти плоскости G_∞ . Методом корректировки в [3 и др.] пробное обобщённое решение F вида (43) при $a_1^{(0)} \neq a_2^{(0)}$ неоднородного уравнения (1) корректируется соответствующими его обобщёнными решениями до классических решений на подмножестве G_+ . Более того, в теореме 3 работы [3 и др.] корректируются также классические решения (43) на G_- другими классическими решениями на G_- для того, чтобы потом из полученных скорректированных классических решений на G_+ и G_- на всей первой четверти плоскости G_∞ для уравнения (1) строить общие интегралы классических решений, которые дважды непрерывно дифференцируемы ещё и на критической характеристике $x = a_1^{(0)}t$. При переменных коэффициентах $a_1(x,t), a_2(x,t)$ в (1) критическая характеристика имеет уравнение $g_2(x,t) = g_2(0,0)$.

Отметим, что в статье [3] для случая постоянных коэффициентов $a_1^{(0)} \neq a_2^{(0)}$ говорится, что для более гладких правых частей и, например, $f \in C^1(G_\infty)$ эта функция F вида (43) дважды непрерывно дифференцируема в первой четверти плоскости G_∞ . Обращаем внимание читателей на то, что в этой статье [3] ищутся классические решения уравнения (1) с постоянными коэффициентами $a_i(x,t) = a_i^{(0)} = const, i = 1, 2$, при минимальной гладкости его правой части f в первой четверти плоскости G_∞ . При минимальной достаточной (необходимой) гладкости правой части f также надо искать классические решения уравнения (1) с различными переменными коэффициентами $a_1(x,t) \neq a_2(x,t)$ в первой четверти плоскости G_∞ . В уравнении (1) с разными переменными коэффициентами $a_1(x,t) \neq a_2(x,t)$ гладкость функции F из (8) с модулем $|\delta|$ переменной δ функций f, a_1, a_2 подробно не изучена в первой четверти плоскости G_∞ .

Замечание 4. Можно предположить, что в первой четверти плоскости $G_\infty =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ интеграл (8) с модулем $|\delta|$ переменной δ в функциях f, a_1, a_2 является классическим (дважды непрерывно дифференцируемым на G_∞) решением уравнения (1) при одном коэффициенте $a_1 \equiv a_2$ и только один раз непрерывно дифференцируемой функцией на G_+ при двух коэффициентах $a_1 \neq a_2$.

Заключение. Предложено новое одномерное двухскоростное модельное волновое уравнение (1) с переменными скоростями $a_1(x,t)$ и $a_2(x,t)$ в верхней полуплоскости G . Найдена явная формула его классического решения F вида (8). Выведен общий интеграл (7) его классических (дважды непрерывно дифференцируемых) решений $u \in C^2(G)$. Справедливость формулы решения F проверена его подстановкой в уравнение (1) и канонический вид (16). Указан критерий (необходимые и достаточные требования) гладкости на правую часть двухскоростного модельного волнового уравнения с переменными скоростями для его дважды непрерывной дифференцируемости в верхней полуплоскости. Эти результаты получены разработанным новым «методом неявных характеристик» волнового уравнения и их неявных обратных функций. Общий интеграл (7) будет использован нами для явного решения и вывода критериев корректности смешанных задач для двухскоростного волнового уравнения (1) с переменными скоростями только там, где нет влияния граничных условий.

Работа выполнена в рамках программы ГПНИ № 11, «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», НИР 1.2.02.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lomovtsev F. E. The Smoothness Criterion for the Classical Solution to Inhomogeneous Model Telegraph Equation at the Rate $a(x,t)$ on the Half-Line // Труды 10-го междунар. науч. семинара АМАДЕ-2021. – Минск: БГУ: ИВЦ Минфина. – 2022. – С. 43–53.
2. Ломовцев Ф. Е. Критерий гладкости частного классического решения неоднородного модельного телеграфного уравнения в первой четверти плоскости // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2022. – № 11. – С. 99–116. – DOI: [10.52928/2070-1624-2022-39-11-99-116](https://doi.org/10.52928/2070-1624-2022-39-11-99-116).
3. Ломовцев Ф. Е. Метод корректировки пробного решения общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2017. – № 3. – С. 38–52.
4. Ломовцев Ф. Е., Точко Т. С. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при характеристических нестационарных первых косых производных на концах // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2019. – Т. 9, № 2. – С. 56–75.
5. Ломовцев Ф. Е., Устилко Е. В. Смешанная задача для одномерного волнового уравнения при характеристической первой косой производной в нестационарном граничном режиме для гладких решений // Весн. Магілёўскага дзярж. ун-та імя А. А. Куляшова. Сер. В, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2020. – № 2(56). – С. 21–36.
6. Ломовцев Ф. Е., Лысенко В. В. Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2019. – № 3(104). – С. 5–17.
7. Ломовцев Ф. Е., Спесивцева К. А. Смешанная задача для общего одномерного волнового уравнения с характеристическими вторыми производными в нестационарном граничном режиме // Матем. заметки. – 2021. – Т. 110, вып. 3. – С. 345–357. – DOI: [10.4213/mzml3243](https://doi.org/10.4213/mzml3243).
8. Ломовцев Ф. Е. Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2021. – № 1. – С. 18–38.
9. Ломовцев Ф. Е. Вторая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2022. – Т. 12, № 3. – С. 50–70.
10. Ломовцев Ф. Е. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: материалы Междунар. матем. конф., Минск, 7–10 дек. 2015 г.: в 2 ч. / Белорус. гос. ун-т; ред. С. Г. Красовский. – Минск, 2015. – Ч. 2. – С. 74–75.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука. 2004. – 798 с.

REFERENCES

1. Lomovtsev, F. E. (2022). The Smoothness Criterion for the Classical Solution to Inhomogeneous Model Telegraph Equation at the Rate $a(x,t)$ on the Half-Line. In *Trudy 10-go mezhduнародного nauchnogo seminara AMADE-2021 [Proc. 10th International Workshop AMADE-2021]* (43–53). Minsk: BSU, ITC of the Ministry of Finance. (In Russ.).
2. Lomovtsev, F. E. (2022). Kriterii gladkosti chastnogo klassicheskogo resheniya neodnorodnogo model'nogo telegrafnogo uravneniya v pervoi chetverti ploskosti [Smoothness Criterion for a Particular Classical Solution of an Inhomogeneous Model Telegraph Equation in the First Quarter of the Plane]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (11), 99–116. DOI: [10.52928/2070-1624-2022-39-11-99-116](https://doi.org/10.52928/2070-1624-2022-39-11-99-116). (In Russ., abstr. in Engl.).
3. Lomovtsev, F. E. (2017). Metod korrektyrovki probnogo resheniya obshchego volnovogo uravneniya v pervoi chetverti ploskosti dlya minimal'noi gladkosti ego pravoї chasti [Correction method of test solutions of the general wave equation in the first quarter of the plane for the minimum smoothness of its right-hand side]. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika [J. of the Belarusian State University. Mathematics and informatics]*, (3), 38–52. (In Russ., abstr. in Engl.).

4. Lomovtsev, F. E., & Tochko, T. S. (2019). Smeshannaya zadacha dlya neodnorodnogo uravneniya kolebanii ogranichennoi struny pri kharakteristicheskikh nestatsionarnykh pervykh kosykh proizvodnykh na kontsakh [Mixed problem for an inhomogeneous vibration equation of a bounded string with characteristic non-stationary first oblique derivatives at the ends]. *Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhavnaha Universiteta imia Ianki Kupaly. Seriya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, Vylichal'naia Tekhnika i Kiravanne [Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control]*, 9(2), 56–75. (In Russ.).
5. Lomovtsev, F. E., & Ustilko, E. V. (2020). Smeshannaya zadacha dlya odnomernogo volnovogo uravneniya pri kharakteristicheskoi pervoi kosoi proizvodnoi v nestatsionarnom granichnom rezhime dlya gladkikh reshenii [A mixed problem for a one-dimensional wave equation with a characteristic first oblique derivative in a non-stationary boundary regime for smooth solutions]. *Vesnik Magileuskaga dzyarzhavnaha universiteta imya A. A. Kulyashova. Ser B. Pryrodaznauchyya navuki [Mogilev State A. Kuleshov Bulletin. Series B. Natural Sciences]*, 2(56), 21–36. (In Russ., abstr. in Engl.).
6. Lomovtsev, F. E., & Lysenko, V. V. (2019). Nekharakteristicheskaya smeshannaya zadacha dlya odnomernogo volnovogo uravneniya v pervoi chetverti ploskosti pri nestatsionarnykh granichnykh vtorykh proizvodnykh [A non-characteristic mixed problem for a one-dimensional wave equation in the first quarter of the plane with non-stationary boundary second derivatives]. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhavnaha universiteta [Bulletin of the Vitebsk Dzyarzhavnaha University]*, 3(104), 5–17. (In Russ., abstr. in Engl.).
7. Lomovtsev, F. E., & Spesivtseva, K. A. (2021). Mixed Problem for a General 1D Wave Equation with Characteristic Second Derivatives in a Nonstationary Boundary Mode. *Math Notes*, 110(3), 329–338. DOI: [10.1134/S0001434621090030](https://doi.org/10.1134/S0001434621090030).
8. Lomovtsev, F. E. (2021). Pervaya smeshannaya zadacha dlya obshchego telegrafnogo uravneniya s peremennymi koefitsientami na polupryamoi [The first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line]. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika [J. of the Belarusian State University. Mathematics and informatics]*, (1), 18–38. (In Russ., abstr. in Engl.).
9. Lomovtsev, F. E. (2022). Vtoraya smeshannaya zadacha dlya obshchego telegrafnogo uravneniya s peremennymi koefitsientami v pervoi chetverti ploskosti [The second mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients in the first quarter of the plane]. *Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhavnaha Universiteta imia Ianki Kupaly. Seriya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, Vylichal'naia Tekhnika i Kiravanne [Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control]*, 12(3), 50–70. (In Russ., abstr. in Engl.).
10. Lomovtsev, F. E. (2015). Metod vspomogatel'nykh smeshannykh zadach dlya poluogranichennoi struny [Method of auxiliary mixed problems for a semi-bounded string]. In S. G. Krasovskii (Eds.), *Shestyte Bogdanovskie chteniya po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam: materialy Mezhdunar. matem. konf.: v 2 ch. Ch. 2. [Sixth Bogdanov Readings on Ordinary Differential Equations: Proceedings of Intern. math. Conf. (in 2 part, Part 2)]* (74–75). Minsk: BGU. (In Russ.).
11. Tikhonov, A. N., & Samarskii, A. A. (2004). *Uravneniya matematicheskoi fiziki*. Moscow: Nauka. (In Russ.).

Поступила 15.05.2023

GENERAL INTEGRAL OF THE MODEL WAVE EQUATION WITH VARIABLE RATES $a_1(x,t)$ AND $a_2(x,t)$ IN THE UPPER HALF-PLANE

F. LOMOVTSEV
(Belarusian State University, Minsk)

A new one-dimensional two-rate linear model wave equation

$$u_{tt}(x,t) + (a_1 - a_2)u_{tx}(x,t) - a_1a_2u_{xx}(x,t) - a_2^{-1}(a_2)_t u_t(x,t) - a_1(a_2)_x u_x(x,t) = f(x,t) \quad (1)$$

is proposed with two variable rates $a_{3-i}(x,t) \geq a_{3-i}^{(0)} > 0$, $(x,t) \in G =]-\infty, +\infty[\times]0, +\infty[$, $a_{3-i} \in C^2(G)$, $i = 1, 2$. A particular classical solution F of this two-rate model wave equation in the upper half-plane G is calculated. A double verification of this solution is made by substituting F into equation (1) and into the corresponding canonical form of equation (1), from which the function F was calculated. A smoothness criterion for the right-hand side f of Eq. (1) for the classical solution F in the upper half-plane G is found. A smoothness criterion on f for twice continuous differentiability F in the first quarter of the plane is discussed. With the help of the classical solution F , the general integral of equation (1) is derived from the set of all its classical solutions $u \in C^2(G)$, which is needed in solving the Cauchy problem and initial-boundary problems for equation (1). These results are obtained by applying the new "implicit characteristic method" of the equation developed earlier by the author.

Keywords: two-rate model wave equation, two-wave rate variables, implicit characteristic method, general integral, classical solutions, smoothness criterion.

**ДВУМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ Н-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ
В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ**

д-р физ.-мат. наук, доц. С. М. СИТНИК

(Белгородский государственный национальный исследовательский университет);

канд. физ.-мат. наук, доц. О. В. СКОРОМНИК, М. В. ПАПКОВИЧ

(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

Изучено двумерное интегральное Н-преобразование в пространствах интегрируемых функций $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$. Получены условия ограниченности и взаимной однозначности оператора такого преобразования из одних пространств $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ в другие, доказан аналог формулы интегрирования по частям, установлены различные интегральные представления для рассматриваемого преобразования. Результаты исследования обобщают полученные ранее для соответствующего одномерного преобразования.

Ключевые слова: *двумерное интегральное Н-преобразование, пространство интегрируемых функций, специальные функции в ядрах, двумерное преобразование Меллина, дробные интегралы и производные.*

Введение. Рассматривается интегральное преобразование [1, формула (43)]

$$(Hf)(x) = \int_0^\infty H_{p,q}^{m,n} \left[x t \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] f(t) dt \quad (x > 0), \tag{1}$$

где (см., например, [1; 2; 3, §28.4; 4, гл. 1; 5; 6]) $x = (x_1, x_2) \in R^2$; $t = (t_1, t_2) \in R^2$ – векторы; $x \cdot t = \sum_{k=1}^2 x_k t_k$ – их скалярное произведение, в частности, $x \cdot 1 = \sum_{k=1}^2 x_k$ для $1 = (1, 1)$; $x > t$ означает $x_1 > t_1, x_2 > t_2$ и аналогично для знаков $\geq, <, \leq$; $\int_0^\infty \int_0^\infty$; $N = \{1, 2, \dots\}$ – множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^2 = N_0 \times N_0$; $k = (k_1, k_2) \in N_0^2$, где $k_1 \in N_0, k_2 \in N_0$, – мультииндекс, $k! = k_1! k_2!$ и $|k| = k_1 + k_2$; $R_+^2 = R_+^1 \times R_+^1 = \{x \in R^2, x > 0\}$; для $l = (l_1, l_2) \in R_+^2$ $D^k = \frac{\partial^{|k|}}{(\partial x_1)^{k_1} (\partial x_2)^{k_2}}$; $dt = dt_1 \cdot dt_2$; $t^l = t^{l_1} \cdot t^{l_2}$; $f(\mathbf{t}) = f(t_1, t_2)$; $z = (z_1, z_2)$ ($z_j \in C, j = 1, 2$); $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ ($\lambda_j \in C, j = 1, 2$); $\bar{h} = (h_1, h_2)$, ($h_i \in R \setminus \{0\}, i = 1, 2$); $\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx_1 dx_2}$; $m = (m_1, m_2) \in N_0^2$ и $m_1 = m_2$; $n = (n_1, n_2) \in N_0^2$ и $n_1 = n_2$; $p = (p_1, p_2) \in N_0^2$ и $p_1 = p_2$; $q = (q_1, q_2) \in N_0^2$ и $q_1 = q_2$ ($0 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p$); $\mathbf{a}_i = (a_i, a_{i_2}), 1 \leq i \leq p, a_i, a_{i_2} \in C$ ($1 \leq i_1 \leq p_1, 1 \leq i_2 \leq p_2$); $\mathbf{b}_j = (b_j, b_{j_2}), 1 \leq j \leq q, b_j, b_{j_2} \in C$ ($1 \leq j_1 \leq q_1, 1 \leq j_2 \leq q_2$); $\bar{\alpha}_i = (\alpha_i, \alpha_{i_2}), 1 \leq i \leq p, \alpha_i, \alpha_{i_2} \in R_+^1$ ($1 \leq i_1 \leq p_1, 1 \leq i_2 \leq p_2$); $\bar{\beta}_j = (\beta_j, \beta_{j_2}), 1 \leq j \leq q, \beta_j, \beta_{j_2} \in R_+^1$ ($1 \leq j_1 \leq q_1, 1 \leq j_2 \leq q_2$).

Функция $H_{p,q}^{m,n} \left[\frac{x}{t} \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right]$ в ядре (1) представляет собой произведение Н-функций $H_{p,q}^{m,n} [z]$:

$$H_{p,q}^{m,n} \left[\frac{x}{t} \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] = \prod_{k=1}^2 H_{p_k, q_k}^{m_k, n_k} \left[\frac{x_k}{t_k} \left| \begin{matrix} (a_{i_k}, \alpha_{i_k})_{1, p_k} \\ (b_{j_k}, \beta_{j_k})_{1, q_k} \end{matrix} \right. \right]. \tag{2}$$

Для целых неотрицательных m, n, p, q ($0 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p$), комплексных $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ и положительных α_i, β_j ($1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q$) H -функция $H_{p,q}^{m,n}[z]$ определяется интегралом Меллина – Барнса:

$$H_{p,q}^{m,n}[z] = H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) z^{-s} ds, \quad z \neq 0, \quad (3)$$

где

$$\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) \equiv \mathcal{H}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + \beta_j s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)}{\prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i + \alpha_i s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - \beta_j s)}. \quad (4)$$

Пустые произведения в (4), если таковые имеются, считаются равными единице, а полюса

$$b_{jl} = \frac{-b_j - l}{\beta_j}, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

гамма-функций $\Gamma(b_j + \beta_j s)$ и полюса

$$a_{ik} = \frac{1 - a_i + k}{\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

гамма-функций $\Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)$ не совпадают:

$$\alpha_i(b_j + l) \neq \beta_j(a_i - k - 1), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad k, l = 0, 1, 2, \dots$$

В (3) L – специально выбранный бесконечный контур, оставляющий полюса b_{jl} в (5) слева, а полюса a_{ik} в (6) – справа от контура L .

Отметим, что большинство элементарных и специальных функций являются частными случаями H -функции (3). Более подробно с H -функцией и ее свойствами можно ознакомиться, например, в книгах [7, гл. 2; 8, гл. 1; 9, §8.3; 10, гл. 1, 2].

Настоящая работа посвящена изучению H -преобразования (1) в весовых пространствах $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$, $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ($v_1 = v_2$), $\bar{2} = (2, 2)$, интегрируемых функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2)$ на \mathbb{R}_+^2 , для которых $\|f\|_{\bar{v}, \bar{2}} < \infty$, где

$$\|f\|_{\bar{v}, \bar{2}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} x_2^{v_2-2-1} \left[\int_{\mathbb{R}_+^2} x_1^{v_1-2-1} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 \right] dx_2 \right\}^{1/2} < \infty.$$

На основании полученных в [2] результатов в работе построена $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ -теория двумерного интегрального H -преобразования (1).

Результаты исследования обобщают полученные ранее для соответствующего одномерного преобразования [10, гл. 3]

$$(Hf)(x) = \int_0^\infty H_{p,q}^{m,n} \left[xt \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] f(t) dt \quad (x > 0) \quad (7)$$

в пространствах $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ -интегрируемых по Лебегу функций f на $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ таких, что

$$\int_0^\infty |t^\nu f(t)|^2 \frac{dt}{t} < \infty \quad (\nu \in \mathbb{R}).$$

H -преобразование обобщает многие интегральные преобразования: преобразования с G -функцией Мейера, преобразования Ханкеля и Лапласа, преобразования с гипергеометрической функцией Гаусса, преобразования с функцией Бесселя и другими гипергеометрическими функциями в ядрах. Основные результаты и библиография представлены в монографии [10]. В работах [1; 12–16] были изучены интегральные преобразования типа Бушмана – Эрдейи. Следует отметить, что тематика данной работы тесно связана с теорией преобразований, изложенной в [17–21].

1. Предварительные сведения. Свойства H -функции $H_{p,q}^{m,n}[z]$ (3) зависят от следующих постоянных [10, (1.1.7)–(1.1.15)]:

$$a^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=n+1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^m \beta_j - \sum_{j=m+1}^q \beta_j, \quad \Delta = \sum_{j=1}^q \beta_j - \sum_{i=1}^p \alpha_i, \tag{8}$$

$$\delta = \prod_{i=1}^p \alpha_i^{-\alpha_i} \prod_{j=1}^q \beta_j^{\beta_j}, \tag{9}$$

$$\mu = \sum_{j=1}^q b_j - \sum_{i=1}^p a_i + \frac{p-q}{2}, \tag{10}$$

$$a_1^* = \sum_{j=1}^m \beta_j - \sum_{i=n+1}^p \alpha_i; \quad a_2^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{j=m+1}^q \beta_j, \quad a_1^* + a_2^* = a^*, \quad a_1^* - a_2^* = \Delta, \tag{11}$$

$$\xi = \sum_{j=1}^m b_j - \sum_{j=m+1}^q b_j + \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=n+1}^p a_i, \tag{12}$$

$$c^* = m + n - \frac{p+q}{2}. \tag{13}$$

Пустые суммы в (8), (10), (11), (12) и пустые произведения в (9), если таковые имеются, считаются равными единице и нулю соответственно.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1 [10, лемма 1.2]. Для $\sigma, t \in R$ выполняется оценка

$$\left| \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(\sigma + it) \right| \sim C |t|^{\Delta\sigma + \text{Re}(\mu)} \exp^{-\pi|t|a^* + \text{Im}(\xi)\text{sign}(t)/2} \quad (|t| \rightarrow \infty) \tag{14}$$

равномерно в σ на любом ограниченном интервале в R , где

$$C = (2\pi)^{c^*} \exp^{-c^* - \Delta\sigma - \text{Re}(\mu)} \delta^\sigma \prod_{i=1}^p \alpha_i^{1/2 - \text{Re}(\alpha_i)} \prod_{j=1}^q \beta_j^{\text{Re}(\beta_j) - 1/2}, \tag{15}$$

ξ дается в (12).

Теорема 1 [10, теорема 3.4]. Пусть $\alpha < \gamma < \beta$ и выполняется одно из условий: $a^* > 0$ или $\Delta\gamma + \text{Re}(\mu) < -1$.

Тогда для $x > 0$, кроме $x = \delta$, когда $a^* = 0$ и $\Delta = 0$, выполняется равенство

$$H_{p,q}^{m,n} \left[x \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mathcal{H}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| t \right] x^{-t} dt \tag{16}$$

и справедлива оценка

$$\left| H_{p,q}^{m,n} \left[x \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] \right| \leq A_\gamma x^{-\gamma}, \tag{17}$$

где A_γ – положительная постоянная, зависящая только от γ .

Обозначим через $[X, Y]$ множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y . Через $\mathfrak{L}_{\bar{v}, \bar{r}}, \bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2, \bar{r} = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2, 1 < \bar{r} < \infty$, обозначим весовое пространство интегрируемых функций $f(x) = f(x_1, x_2)$ на \mathbb{R}_+^2 , для которых $\|f\|_{\bar{v}, \bar{r}} < \infty$, где

$$\|f\|_{\bar{v}, \bar{r}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} x_2^{v_2 \cdot r_2 - 1} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} x_1^{v_1 \cdot r_1 - 1} |f(x_1, \dots, x_n)|^{\bar{r}} dx_1 \right\}^{r_2 / r_1} dx_2 \right\}^{1/\bar{r}} < \infty.$$

Для функции $f(x) = f(x_1, x_2) \in \mathfrak{L}_{\bar{v}, \bar{r}} (\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2, v_1 = v_2, 1 \leq \bar{r} \leq 2)$ двумерное преобразование Меллина $(\mathfrak{M}f)(s)$ определяется равенством

$$(\mathfrak{M}f)(s) = f^*(s) = \int_{\mathbb{R}_+^2} f(e^t) e^{st} dt, \quad s = \bar{v} + it; \quad \bar{v} = (v_1, v_2), \quad t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{18}$$

Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{v}, \bar{r}} \cap \mathfrak{L}_{\bar{v}, 1}$, то (18) совпадает с классическим двумерным преобразованием Меллина функции $f(x) = f(x_1, x_2) (x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2)$, определяемым формулой [4, формула (1.4.42)]

$$(\mathfrak{M}f)(s) = \int_0^\infty f(t) t^{s-1} dt, \quad \text{Re}(s) = \bar{v}, \quad s = (s_1, s_2), \quad s_j \in \mathbb{C} (j=1, 2).$$

Обратное преобразование Меллина для $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ дается формулой [3, формула (1.4.43)]

$$(\mathfrak{M}^{-1}g)(x) = \mathfrak{M}^{-1}[g(s)](x) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \int_{\gamma_2 - i\infty}^{\gamma_2 + i\infty} x^{-s} g(s) ds, \quad \gamma_j = \text{Re}(s_j) (j=1, 2).$$

Нам понадобятся следующие пространства.

Через $L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^2)$, как обычно, обозначим пространство функций $f(x) = f(x_1, x_2)$, для которых

$$\|f\|_{\bar{p}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^{\bar{p}} dx \right\}^{1/\bar{p}} < \infty, \quad \bar{p} = (p_1, p_2), \quad 1 \leq \bar{p} < \infty.$$

При $\bar{p} = \infty$ пространство $L_\infty(\mathbb{R}^2)$ вводится как совокупность всех измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} = \text{ess sup} |f(x)|, \tag{19}$$

где $\text{ess sup} |f(x)|$ – существенный супремум функции $|f(x)|$ [25].

На основании утверждения 3.1 [10] непосредственно проверяется справедливость следующих свойств преобразования Меллина (18).

Лемма 2 [2, лемма 1]. *Справедливы следующие свойства преобразования Меллина (18):*

(a) преобразование (18) есть унитарное отображение пространства $\mathfrak{L}_{\bar{v}, \bar{2}}, \bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 (v_1 = v_2)$, на пространство $L_{\bar{2}}(\mathbb{R}^2)$;

(b) для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{v}, \bar{2}}, \bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 (v_1 = v_2)$,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \lim_{\substack{R_1 \rightarrow \infty \\ R_2 \rightarrow \infty}} \int_{v_1 - iR_1}^{v_1 + iR_1} \int_{v_2 - iR_2}^{v_2 + iR_2} (\mathfrak{M}f)(s) x^{-s} ds, \tag{20}$$

где предел берется в топологии пространства $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ ($\bar{v} = (v_1, v_2) \in R^2$), и если $F(\bar{v} + it) = F_1(v_1 + it_1)F_2(v_2 + it_2)$, $F_k(v_k + it_k) \in L_1(-R, R)$, $k=1, 2$, то

$$\int_{v_1 - iR_1}^{v_1 + iR_1} \int_{v_2 - iR_2}^{v_2 + iR_2} F(s) ds = - \int_{-R_1 - R_2}^{R_1} \int_{-R_2}^{R_2} F(\bar{v} + it) dt;$$

(с) для функции $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ и функции $g \in \mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{2}}$ справедливо равенство

$$\int_0^\infty f(x)g(x) dx = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\bar{v}-i\infty}^{\bar{v}+i\infty} (\mathfrak{M}f)(s)(\mathfrak{M}g)(1-s)x^{-s} ds. \tag{21}$$

Рассмотрим общее двумерное интегральное преобразование [2, формула (1)]

$$(Kf)(x) = \bar{h} x^{1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{dx} x^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \int_0^\infty k(xt)f(t) dt \quad (x > 0), \tag{22}$$

где функция $k(xt)$ в ядре (22) есть произведение некоторых специальных функций одного типа [2]

$$k(xt) = k(x_1t_1) \cdot k(x_2t_2).$$

Для преобразования (22) справедлива теорема 2.

Теорема 2 [2, теорема 1].

(а) Пусть оператор преобразования (22) удовлетворяет условию $K \in [\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}, \mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{2}}]$, тогда ядро k в правой части (22) $k \in \mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{2}}$. Если для $v_1 \neq 1 - (\text{Re}(\lambda_1) + 1) / h_1$, $v_2 \neq 1 - (\text{Re}(\lambda_2) + 1) / h_2$, ($v_1 = v_2$) выполняется

$$(\mathfrak{M}k)(1 - \bar{v} + it) = \frac{\theta(t)}{\bar{\lambda} + 1 - (1 - \bar{v} + it)\bar{h}}, \tag{23}$$

тогда $\theta \in L_\infty(R^2)$ и для $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ имеет место формула

$$(\mathfrak{M}Kf)(1 - \bar{v} + it) = \theta(t)(\mathfrak{M}f)(\bar{v} - it); \tag{24}$$

(б) обратно, для данной функции $\theta \in L_\infty(R^2)$, $\bar{v} = (v_1, v_2) \in R^2$ ($v_1 = v_2$) и $\bar{h} = (h_1, h_2) \in R_+^2$ существует преобразование $K \in [\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}, \mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{2}}]$ такое, что равенство (24) выполняется для $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$. Более того, если $v_1 \neq 1 - (\text{Re}(\lambda_1) + 1) / h_1$, $v_2 \neq 1 - (\text{Re}(\lambda_2) + 1) / h_2$, ($v_1 = v_2$), то преобразование Kf дается (22) с ядром k , определяется соотношением (23);

(в) при выполнении условий (а) или (б) с $\theta \neq 0$ оператор преобразования K взаимно однозначно действует из пространства $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ в пространство $\mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{2}}$, если еще выполняется $1 / \theta \in L_\infty(R^2)$, то K отображает $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ на $\mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{2}}$. Для функций $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ и $g \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ верно равенство

$$\int_0^\infty f(x)(Kg)(x) dx = \int_0^\infty (Kf)(x)g(x) dx.$$

2. $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ -теория двумерного Н-преобразования. Для формулировки утверждений, представляющих $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ -теорию преобразования Hf (1), нам понадобятся следующие двумерные постоянные [1, (57)–(60)]: $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$, $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2)$, где

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= \begin{cases} -\min_{1 \leq j_1 \leq m_1} \left[\frac{\operatorname{Re}(b_{j_1})}{\beta_{j_1}} \right], & m_1 > 0, \\ -\infty, & m_1 = 0, \end{cases} & \tilde{\alpha}_2 &= \begin{cases} -\min_{1 \leq j_2 \leq m_2} \left[\frac{\operatorname{Re}(b_{j_2})}{\beta_{j_2}} \right], & m_2 > 0, \\ -\infty, & m_2 = 0, \end{cases} \\ \tilde{\beta}_1 &= \begin{cases} \min_{1 \leq i_1 \leq \bar{n}_1} \left[\frac{1 - \operatorname{Re}(a_{i_1})}{\alpha_{i_1}} \right], & \bar{n}_1 > 0, \\ \infty, & \bar{n}_1 = 0, \end{cases} & \tilde{\beta}_2 &= \begin{cases} \min_{1 \leq i_2 \leq \bar{n}_2} \left[\frac{1 - \operatorname{Re}(a_{i_2})}{\alpha_{i_2}} \right], & \bar{n}_2 > 0, \\ \infty, & \bar{n}_2 = 0; \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

$a^* = (a_1^*, a_2^*)$, $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2)$, где

$$\begin{aligned} a_1^* &= \sum_{i=1}^{\bar{n}_1} \alpha_{i_1} - \sum_{i=\bar{n}_1+1}^{p_1} \alpha_{i_1} + \sum_{j=1}^{m_1} \beta_{j_1} - \sum_{j=m_1+1}^{q_1} \beta_{j_1}, & a_2^* &= \sum_{i=1}^{\bar{n}_2} \alpha_{i_2} - \sum_{i=\bar{n}_2+1}^{p_2} \alpha_{i_2} + \sum_{j=1}^{m_2} \beta_{j_2} - \sum_{j=m_2+1}^{q_2} \beta_{j_2}, \\ \Delta_1 &= \sum_{j=1}^{q_1} \beta_{j_1} - \sum_{i=1}^{p_1} \alpha_{i_1}, & \Delta_2 &= \sum_{j=1}^{q_2} \beta_{j_2} - \sum_{i=1}^{p_2} \alpha_{i_2}; \end{aligned} \quad (26)$$

$\mu = (\mu_1, \mu_2)$, где

$$\mu_1 = \sum_{j=1}^{q_1} b_{j_1} - \sum_{i=1}^{p_1} a_{i_1} + \frac{p_1 - q_1}{2}, \quad \mu_2 = \sum_{j=1}^{q_2} b_{j_2} - \sum_{i=1}^{p_2} a_{i_2} + \frac{p_2 - q_2}{2}. \quad (27)$$

Исключительным множеством $\mathcal{E}_{\bar{\mathcal{H}}}$ функции $\bar{\mathcal{H}}_{p,q}^{m,n}(\mathbf{s})$

$$\bar{\mathcal{H}}_{p,q}^{m,n}(\mathbf{s}) \equiv \bar{\mathcal{H}}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \boldsymbol{\alpha}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \boldsymbol{\beta}_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| \mathbf{s} \right] = \prod_{k=1}^2 \mathcal{H}_{p_k, q_k}^{m_k, \bar{n}_k} \left[\begin{matrix} (a_{i_k}, \alpha_{i_k})_{1, p_k} \\ (b_{j_k}, \beta_{j_k})_{1, q_k} \end{matrix} \middle| s_k \right] \quad (28)$$

назовем множество векторов $\bar{\mathbf{v}} = (v_1, v_2) \in R^2$ ($v_1 = v_2$) таких, что $\alpha_1 < 1 - v_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < 1 - v_2 < \beta_2$, и функции вида (14) $\mathcal{H}_{p_1, q_1}^{m_1, \bar{n}_1}(s_1)$, $\mathcal{H}_{p_2, q_2}^{m_2, \bar{n}_2}(s_2)$ имеют нули на прямых $\operatorname{Re}(s_1) = 1 - v_1$, $\operatorname{Re}(s_2) = 1 - v_2$ соответственно.

Применяя двумерное преобразование Меллина (18) к преобразованию (1), получаем

$$(\mathfrak{M} H f)(\mathbf{s}) = \bar{\mathcal{H}}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \boldsymbol{\alpha}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \boldsymbol{\beta}_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| \mathbf{s} \right] (\mathfrak{M} f)(1 - \mathbf{s}). \quad (29)$$

Теорема 3. Пусть

$$\tilde{\alpha}_1 < 1 - v_1 < \tilde{\beta}_1, \quad \tilde{\alpha}_2 < 1 - v_2 < \tilde{\beta}_2, \quad v_1 = v_2 \quad (30)$$

и выполняется любое из условий

$$a_1^* > 0, \quad a_2^* > 0 \quad (31)$$

или

$$a_1^* = 0, \quad a_2^* = 0, \quad \Delta_1 [1 - v_1] + \operatorname{Re}(\mu_1) \leq 0, \quad \Delta_2 [1 - v_2] + \operatorname{Re}(\mu_2) \leq 0. \quad (32)$$

Верны следующие утверждения:

(а) существует взаимно однозначное преобразование $H \in [\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}}}, \mathcal{L}_{1-\bar{\mathbf{v}}, 1-\bar{\mathbf{v}}}]$ такое, что равенство (29) выполняется для $f \in \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}}}$ и $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = 1 - \bar{\mathbf{v}}$. Если $a_1^* = 0$, $a_2^* = 0$, $\Delta_1 [1 - v_1] + \operatorname{Re}(\mu_1) = 0$, $\Delta_2 [1 - v_2] + \operatorname{Re}(\mu_2) = 0$, и $\bar{\mathbf{v}} \notin \mathcal{E}_{\bar{\mathcal{H}}}$, то оператор преобразования H биективно отображает $\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}}}$ на $\mathcal{L}_{1-\bar{\mathbf{v}}, 1-\bar{\mathbf{v}}}$;

(б) если $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ и $g \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$, то имеет место формула

$$\int_0^{\infty} f(x)(H g)(x) dx = \int_0^{\infty} (H f)(x)g(x) dx; \tag{33}$$

(в) пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_1) \in C^2$ и $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$. Если $\text{Re}(\bar{\lambda}) > (1 - \bar{v})\bar{h} - 1$, преобразование $H f$ представимо в виде

$$(H f)(x) = \bar{h} x^{1 - (\bar{\lambda} + 1)/\bar{h}} \frac{d}{dx} x^{(\bar{\lambda} + 1)/\bar{h}} \int_0^{\infty} H_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[xt \left| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1, p} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1, q}, (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}) \end{matrix} \right. \right] f(t) dt, \tag{34}$$

а при $\text{Re}(\bar{\lambda}) < (1 - \bar{v})\bar{h} - 1$ дается формулой

$$(H f)(x) = -\bar{h} x^{1 - (\bar{\lambda} + 1)/\bar{h}} \frac{d}{dx} x^{(\bar{\lambda} + 1)/\bar{h}} \int_0^{\infty} H_{p+1, q+1}^{m+1, n} \left[xt \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1, p}, (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}), (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1, q} \end{matrix} \right. \right] f(t) dt; \tag{35}$$

(г) преобразование $H f$ не зависит от \bar{v} в том смысле, что если \bar{v} и \bar{v}' удовлетворяют (30) и выполняются условия (31) или (32), и если преобразования $H f$ и $\tilde{H} f$ определяются в пространствах $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ и $\mathcal{L}_{\bar{v}', \bar{2}}$ равенством (29), то $H f = \tilde{H} f$ для $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}} \cap \mathcal{L}_{\bar{v}', \bar{2}}$.

Доказательство. Пусть $\bar{\omega}(t) = \bar{H}(1 - \bar{v} + it) = \prod_{k=1}^2 \bar{H}(1 - v_k + it_k)$. На основании (4), (25) и условий (30) функции $\mathcal{H}_{p_1, q_1}^{m_1, \bar{m}_1}(s_1), \mathcal{H}_{p_2, q_2}^{m_2, \bar{m}_2}(s_2)$ аналитические в интервалах $\alpha_1 < 1 - v_1 < \beta_1, \alpha_2 < 1 - v_2 < \beta_2$ соответственно. Согласно (14) и условию (31) или (32) $\bar{\omega}(t) = O(1)$, когда $|t| \rightarrow \infty$. Поэтому $\bar{\omega} \in L_{\infty}(R^2)$, и из утверждения пункта (б) теоремы 2 следует, что существует преобразование $H \in [\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}, \mathcal{L}_{1 - \bar{v}, \bar{2}}]$ такое, что

$$(\mathfrak{M} H f)(s)(1 - \bar{v} + it) = \bar{H}(1 - \bar{v} + it)(\mathfrak{M} f)(\bar{v} - it), \quad f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}.$$

Это означает, что равенство (29) выполняется для $\text{Re}(s) = 1 - \bar{v}$. Т. к. функции $\mathcal{H}_{p_1, q_1}^{m_1, \bar{m}_1}(s_1), \mathcal{H}_{p_2, q_2}^{m_2, \bar{m}_2}(s_2)$ аналитические в интервалах $\alpha_1 < 1 - v_1 < \beta_1, \alpha_2 < 1 - v_2 < \beta_2$ соответственно, и имеют изолированные нули, то $\bar{\omega}(t) = \prod_{k=1}^2 \alpha(t_k) \neq 0$ почти везде. Тогда на основании пункта (в) теоремы 2 заключаем, что оператор преобразования $H \in [\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}, \mathcal{L}_{1 - \bar{v}, \bar{2}}]$ является взаимно однозначным. Если $a_1^* = 0, a_2^* = 0; \Delta_1[1 - v_1] + \text{Re}(\mu_1) = 0, \Delta_2[1 - v_2] + \text{Re}(\mu_2) = 0$ и \bar{v} не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\bar{H}}$, тогда $1/\bar{\omega} \in L_{\infty}(R^2)$ и снова из пункта (б) теоремы 2 получаем, что оператор H биективно отображает $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ на $\mathcal{L}_{1 - \bar{v}, \bar{2}}$. Таким образом, утверждение (а) теоремы 3 доказано.

Если $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ и $g \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$, тогда равенство (33) выполняется в соответствии с пунктом (в) теоремы 2.

Пусть $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$. Чтобы показать справедливость отношения (34) достаточно вычислить ядро $k(x, t)$ в преобразовании (22) для таких $\bar{\lambda}$, удовлетворяющих условию $\text{Re}(\bar{\lambda}) > (1 - \bar{v})\bar{h} - 1$. Из (23) получаем равенство

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M} k)(1 - \bar{v} + it) &= \bar{H}(1 - \bar{v} + it) \frac{1}{\bar{\lambda} + 1 - (1 - \bar{v} + it)\bar{h}} = \\ &= \prod_{k=1}^2 \bar{H}(1 - v_k + it_k) \frac{1}{\lambda_k + 1 - (1 - v_k + it_k)h_k} \end{aligned}$$

или для $\text{Re}(s) = 1 - \bar{\nu}$

$$(\mathfrak{M}k)(s) = \bar{\mathcal{H}}(s) \frac{1}{\bar{\lambda} + 1 - \bar{h}s} = \prod_{k=1}^2 \mathcal{H}(s_k) \frac{1}{\lambda_k + 1 - h_k s_k}. \tag{36}$$

Далее, из (20) и (36) получаем формулу для ядра k , а именно

$$\begin{aligned} k(x) &= \prod_{k=1}^2 k(x_k) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \prod_{k=1}^2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{1-\nu_k-iR}^{1-\nu_k+iR} (\mathfrak{M}k)(s_k) x_k^{-s_k} ds_k = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \prod_{k=1}^2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{1-\nu_k-iR}^{1-\nu_k+iR} \mathcal{H}_k(s_k) \frac{1}{\lambda_k + 1 - h_k s_k} x_k^{-s_k} ds_k, \end{aligned} \tag{37}$$

где предел берется в топологии пространства $\mathcal{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$.

В соответствии с (4) и (28) имеем

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}(s) \frac{1}{\bar{\lambda} + 1 - \bar{h}s} &= \bar{\mathcal{H}}(s) \frac{\Gamma(1 - (-\bar{\lambda}) - \bar{h}s)}{\Gamma(1 - (-\bar{\lambda} - 1) - \bar{h}s)} = \bar{\mathcal{H}}_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[\begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1, p} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1, q}, (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}) \end{matrix} \middle| s \right] = \\ &= \prod_{k=1}^2 \mathcal{H}_{p_k+1, q_k+1}^{m_k, \bar{m}_k+1} \left[\begin{matrix} (-\lambda_k, h_k), (a_i, \alpha_i)_{1, p_k} \\ (b_j, \beta_j)_{1, q_k}, (-\lambda_k - 1, h_k) \end{matrix} \middle| s_k \right]. \end{aligned} \tag{38}$$

Обозначим через $\hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k (k = 1, 2)$ константы $\tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k (k = 1, 2)$ в (25) соответственно; через $\tilde{a}_k^* (k = 1, 2)$ – константы $a_k^* (k = 1, 2)$ в (26); через $\tilde{\Delta}_k (k = 1, 2)$ – константы $\Delta_k (k = 1, 2)$ в (26); через $\tilde{\mu}_k (k = 1, 2)$ – константы $\mu_k (k = 1, 2)$ в (27) соответственно для $\mathcal{H}_{p_1, q_1}^{m_1, \bar{m}_1}(s_1), \mathcal{H}_{p_2, q_2}^{m_2, \bar{m}_2}(s_2)$ в (38). Тогда $\hat{\alpha}_k = \tilde{\alpha}_k (k = 1, 2)$; $\hat{\beta}_k = \min[\tilde{\beta}_k, (1 + \text{Re}(\lambda_k))/h_k] (k = 1, 2)$; $\tilde{a}_k^* = a_k^* (k = 1, 2)$; $\tilde{\Delta}_k = \Delta_k (k = 1, 2)$; $\tilde{\mu}_k = \mu_k - 1 (k = 1, 2)$.

Отсюда следует, что

$$(a') \hat{\alpha}_1 < 1 - \bar{\nu} < \hat{\beta}_1, \quad \hat{\alpha}_2 < 1 - \bar{\nu} < \hat{\beta}_2 \text{ при } \text{Re}(\bar{\lambda}) > (1 - \bar{\nu})\bar{h} - 1$$

и любое из условий

$$(b') \tilde{a}_1^* > 0, \tilde{a}_2^* > 0$$

или

$$(c') \tilde{a}_1^* = 0, \tilde{a}_2^* = 0, \quad \tilde{\Delta}_k (1 - \bar{\nu}) + \text{Re}(\tilde{\mu}_k) = \Delta_k (1 - \bar{\nu}) + \text{Re}(\mu_k) - 1 \leq -1 (k = 1, 2)$$

выполняется.

Применяя теорему 1 для $x > 0$, получаем, что равенство

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[x \middle| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1, p} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1, q}, (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}) \end{matrix} \right] &= \prod_{k=1}^2 \mathbb{H}_{p_k+1, q_k+1}^{m_k, \bar{m}_k+1} \left[x_k \middle| \begin{matrix} (-\lambda_k, h_k), (a_i, \alpha_i)_{1, p_k} \\ (b_j, \beta_j)_{1, q_k}, (-\lambda_k - 1, h_k) \end{matrix} \right] = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \prod_{k=1}^2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{1-\nu_k-iR}^{1-\nu_k+iR} \mathcal{H}_k(s_k) \frac{1}{\lambda_k + 1 - h_k s_k} x_k^{-s_k} ds_k \end{aligned} \tag{39}$$

выполняется почти везде. Тогда из формул (37) и (39) следует, что ядро k дается формулой

$$k(x) = \mathbb{H}_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[x \middle| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1, p} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1, q}, (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}) \end{matrix} \right] = \prod_{k=1}^2 \mathbb{H}_{p_k+1, q_k+1}^{m_k, \bar{m}_k+1} \left[x_k \middle| \begin{matrix} (-\lambda_k, h_k), (a_i, \alpha_i)_{1, p_k} \\ (b_j, \beta_j)_{1, q_k}, (-\lambda_k - 1, h_k) \end{matrix} \right]$$

и (34) доказано.

Отношение (35) доказывается аналогично (34), если вместо (38) использовать равенство

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}(\mathbf{s}) \frac{1}{\bar{\lambda} + 1 - \bar{h}\mathbf{s}} &= -\bar{\mathcal{H}}(\mathbf{s}) \frac{\Gamma(\bar{h}\mathbf{s} - \bar{\lambda} - 1)}{\Gamma(\bar{h}\mathbf{s} - \bar{\lambda})} = -\bar{\mathcal{H}}_{p^{+1}, q^{+1}}^{m+1, n} \left[\begin{matrix} (\mathbf{a}_j, \boldsymbol{\alpha}_j)_{1, p}, (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}), (\mathbf{b}_j, \boldsymbol{\beta}_j)_{1, q} \end{matrix} \middle| \mathbf{s} \right] = \\ &= \prod_{k=1}^2 \mathcal{H}_{p_k^{+1}, q_k^{+1}}^{m_k+1, \bar{n}_k} \left[\begin{matrix} (a_k, \alpha_k)_{1, p_k}, (-\lambda_k, h_k) \\ (-\lambda_k - 1, h_k), (b_j, \beta_j)_{1, q_k} \end{matrix} \middle| s_k \right], \end{aligned} \quad (40)$$

что завершает доказательство утверждения (в) теоремы 3.

Докажем пункт (d) теоремы 3. Если $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{z}} \cap \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{z}}$ и $\text{Re}(\bar{\lambda}) > \max[(1 - \bar{v})\bar{h} - 1, (1 - \bar{v})\bar{h} - 1]$ или $\text{Re}(\bar{\lambda}) < \min[(1 - \bar{v})\bar{h} - 1, (1 - \bar{v})\bar{h} - 1]$, тогда оба преобразования $\mathbf{H}f$ и $\tilde{\mathbf{H}}f$ даются в (34) или (35) соответственно, что означает их независимость от \bar{v} . Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sitnik S. M., Skoromnik O. V. One-Dimensional and Multi-Dimensional Integral Transforms of Buschman–Erdélyi Type with Legendre Functions in Kernels // Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. – Birkhäuser, Cham. – 2020. – P. 293–319. – DOI: [10.1007/978-3-030-35914-0_13](https://doi.org/10.1007/978-3-030-35914-0_13).
2. Sitnik S. M., Skoromnik O. V., Shlapakov S. A. Multi-Dimensional Generalized Integral Transform in the Weighted Spaces of Summable Functions // Lobachevskii J. Math. – 2022. – Vol. 43, iss. 6. – P. 1408–1416. – DOI: [10.1134/S1995080222090244](https://doi.org/10.1134/S1995080222090244).
3. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. – Switzerland; Philadelphia, Pa., USA: Gordon and Breach Science Publishers. – 1993. – 976 p.
4. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. – Elsevier, 2006. – 523 p. – DOI: [10.1016/S0304-0208\(06\)80001-0](https://doi.org/10.1016/S0304-0208(06)80001-0).
5. Скоромник О. В., Папкович М. В. Многомерные модифицированные G-преобразования и интегральные преобразования с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций // Весн. Вісб. дзярж. ун-та. – 2022. – № 1(114). – С. 11–25.
6. Ситник С. М., Скоромник О. В., Папкович М. В. Многомерные модифицированные G- и H-преобразования и их частные случаи // АМАДЕ-2021: сб. тр. 10-го междунар. науч. семинара, Минск, 13–17 сент. 2021 г. / Белорус. гос. ун-т. – Минск: ИВЦ Минфина, 2022. – С. 104–116. – URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/282282>.
7. Mathai A. M., Saxena R. K. The H-Function with Applications in Statistics and other Disciplines. – New Delhi: Wiley Eastern; New York: Halsted Press, 1978. – 192 p. – DOI: [10.2307/3314682](https://doi.org/10.2307/3314682).
8. Srivastava H. M., Gupta K. C., Goyal S. L. The H-Function of One and Two Variables with Applications. – New Delhi: South Asian Publishers, 1982. – 415 p.
9. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integrals and Series. Vol. 3: More Special Functions. – New York: Gordon and Breach, 1990.
10. Kilbas A. A., Saigo M. H. H-Transforms. Theory and Applications. – London [etc.]: Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
11. Kiryakova V. Generalized Fractional Calculus and Applications. New York: Wiley and Son., 1994. – 205 p.
12. Katrakhov V. V., Sitnik S. M. A boundary-value problem for the steady-state Schrodinger equation with a singular potential // Sov. Math. Dokl. – 1984. – Vol. 30, iss. 2. – P. 468–470.
13. Sitnik S. M. Factorization and estimates of the norm of Buschman–Erdelyi operators in weighted Lebesgue spaces // Sov. Math. Dokl. – 1992. – Vol. 44, iss. 2. – P. 641–646.
14. Katrakhov V. V., Sitnik S. M. Composition method for constructing B-elliptic, B-hyperbolic, and B-parabolic transformation operators // Russ. Acad. Sci., Dokl. Math. – 1995. – Vol. 50, iss. 1. – P. 70–77.
15. Sitnik S. M. A short survey of recent results on Buschman-Erdelyi transmutations // J. of Inequalities and Special Functions (Special issue to honor Prof. Ivan Dimovski’s contributions). – 2017. – Vol. 8, iss. 1. – P. 140–157.
16. Скоромник О. В. Интегральные преобразования с функциями Гаусса и Лежандра в ядрах и интегральные уравнения первого рода. – Новополоцк: ПГУ, 2019. – 180 с.
17. Katrakhov V. V., Sitnik S. M. The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations // CMFD. – 2018. – Vol. 64, iss. 2. – P. 211–426. DOI: [10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426).
18. Shishkina E. L., Sitnik S. M. Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. – Elsevier, 2020.
19. Sitnik S. M., Shishkina E. L. Transmutation Method for Differential Equations with Bessel Operators. – Moscow: Fizmatlit, 2019.
20. Kravchenko V. V., Sitnik S. M. (Eds.). Transmutation Operators and Applications (Trends in Mathematics). – Birkhauser, 2020. – 703 p.
21. Fitouhi A., Jebabli I., Shishkina E. L. et al. Applications of integral transforms composition method to wave-type singular differential equations and index shift transmutations // Electron. J. Differential Equations. – 2018. – Vol. 2018, iss. 130. – P. 1–27. – DOI: [10.48550/arXiv.1805.06925](https://doi.org/10.48550/arXiv.1805.06925).

22. Vu Kim Tuan, Marichev O. I., Yakubovich S. B. On a boundary-value problem for elliptic equations of the second order at the sphere domain // Dokl. AN SSSR. – 1986. – Vol. 286, iss. 4. – 786–790.
23. Marichev O. I. Method evaluation of integrals of Special Functions (Theory and Formulas Tables). – Minsk: Nauka i tekhnika, 1978. – 310 p.
24. Brychkov Yu. A., Glaeske H.-Y., Prudnikov A. P. et al. Multidimensional Integral Transformations. – Philadelphia: Gordon and Breach, 1992.
25. Nikolski S. M. Approximation of Functions of Many Variables and Embedding Theorems. Moscow: Nauka, 1975. – 455 p.
26. Rooney P. G. On integral transformations with G-function kernels // Proc. Royal Soc. Edinburgh. Sect. A. – 1983. – Vol. 93. – P. 265–297. – DOI: [10.1017/S0308210500015973](https://doi.org/10.1017/S0308210500015973).
27. Rooney, P. G. On the range of the integral transformation // Canad. Math. Bul. – 1994. – Vol. 37, iss. 4. – P. 545–548.
28. Rooney, P. G. On the representation of functions by the Hankel and some related transformations // Proc. Royal Soc. Edinburgh. Sect. A. – 1995. – Vol. 125, iss. 3. – P. 449–463.
29. Sitnik S. M. Refinements and generalizations of classical inequalities // Studies in mathematical analysis. Series: Mathematical Forum. – 2009. – Vol. 3. – P. 221–226.

REFERENCES

1. Sitnik, S. M., & Skoromnik, O. V. (2020). One-Dimensional and Multi-Dimensional Integral Transforms of Buschman–Erdélyi Type with Legendre Functions in Kernels. In V. Kravchenko, & S. Sitnik (Eds.), *Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics* (293–319). Birkhäuser, Cham. DOI: [10.1007/978-3-030-35914-0_13](https://doi.org/10.1007/978-3-030-35914-0_13).
2. Sitnik, S. M., Skoromnik, O. V., & Shlapakov, S. A. (2022). Multi-Dimensional Generalized Integral Transform in the Weighted Spaces of Summable Functions. *Lobachevskii J. Math.*, 43(6), 1408–1416. DOI: [10.1134/S1995080222090244](https://doi.org/10.1134/S1995080222090244).
3. Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1993). *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Switzerland; Philadelphia, Pa., USA: Gordon and Breach Science Publishers.
4. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies: vol. 204*. Elsevier. DOI: [10.1016/S0304-0208\(06\)80001-0](https://doi.org/10.1016/S0304-0208(06)80001-0).
5. Skoromnik, O. V., & Papkovich, M. V. (2022). Mnogomernye modifitsirovannye G-preobrazovaniya i integral'nye preobrazovaniya s gipergeometricheskoi funktsiei Gaussa v yadrakh v vesovykh prostranstvakh summiruemykh funktsii [Multidimensional modified G-transformations and integral transformations with hypergeometric Gauss functions in kernels in weight spaces of summed functions]. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhavnaga universiteta [Bulletin of VVSU]*, 1(114), 11–25. (In Russ., abstr. in Engl.).
6. Sitnik, S. M., Skoromnik, O. V., & Papkovich, M. V. (2022). Mnogomernye modifitsirovannye G- i H-preobrazovaniya i ih chastnye sluchai [Multidimensional Modified G- and H-Transforms and Their Special Cases]. In *Trudy 10-go mezhdunarodnogo nauchnogo seminaru AMADE-2021 [Proc. 10th Intern. Workshop AMADE-2021]* (104–116). Minsk: BSU, ITC of the Ministry of Finance. (In Russ., abstr. in Engl.). <https://elib.bsu.by/handle/123456789/282282>.
7. Mathai, A. M., & Saxena, R. K. (1978). *The H-Function with Applications in Statistics and other Disciplines*. New Delhi: Wiley Eastern; New York: Halsted Press. DOI: [10.2307/3314682](https://doi.org/10.2307/3314682).
8. Srivastava, H. M., Gupta, K. C., & Goyal, S. L. (1982). *The H-Function of One and Two Variables with Applications*. New Delhi: South Asian Publishers.
9. Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A., & Marichev, O. I. (1990). *Integrals and Series. More Special Functions. Vol. 3: More Special Functions*. New York: Gordon and Breach.
10. Kilbas, A. A., & Saigo, M. H. (2004). *H-Transforms. Theory and Applications*. London [etc.]: Chapman and Hall. CRC Press.
11. Kiryakova V. (1994). *Generalized Fractional Calculus and Applications*. New York: Wiley and Son.
12. Katrakhov, V. V., & Sitnik, S. M. (1984). A boundary-value problem for the steady-state Schrodinger equation with a singular potential, *Sov. Math. Dokl.*, 30(2), 468–470.
13. Sitnik, S. M. (1992). Factorization and estimates of the norm of Buschman–Erdelyi operators in weighted Lebesgue spaces. *Sov. Math. Dokl.*, 44(2), 641–646.
14. Katrakhov, V. V., & Sitnik, S. M. (1995). Composition method for constructing B-elliptic, B-hyperbolic, and B-parabolic transformation operators. *Russ. Acad. Sci., Dokl. Math.*, 50(1), 70–77.
15. Sitnik, S. M. (2017). A short survey of recent results on Buschman–Erdelyi transmutations. *J. of Inequalities and Special Functions (Special issue to honor Prof. Ivan Dimovski's contributions)*, 8(1), 140–157.
16. Skoromnik O. V. (2019). *Integral'nye preobrazovaniya s funktsijami Gaussa i Lezhandra v yadrah i integral'nye uravneniya pervogo roda*. Novopolock: PSU. (In Russ.).
17. Katrakhov, V. V., & Sitnik, S. M. (2018). The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations. *CMFD*, 64(2), 211–426. DOI: [10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426).
18. Shishkina, E. L., & Sitnik S. M. (2020). *Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics*. Elsevier.
19. Sitnik, S. M., & Shishkina, E. L. (2019). Transmutation Method for Differential Equations with Bessel Operators. Moscow: Fizmatlit.
20. Kravchenko V. V., Sitnik S. M. (Eds.). (2020). *Transmutation Operators and Applications (Trends in Mathematics)*. Birkhauser.
21. Fitouhi, A., Jebabli, I., Shishkina, E. L., & Sitnik, S. M. (2018). Applications of integral transforms composition method to wave-type singular differential equations and index shift transmutations. *Electron. J. Differential Equations*, 2018(130), 1–27. DOI: [10.48550/arXiv.1805.06925](https://doi.org/10.48550/arXiv.1805.06925).
22. Vu Kim Tuan, Marichev, O. I., & Yakubovich, S. B. (1986). On a boundary-value problem for elliptic equations of the second order at the sphere domain. *Dokl. AN SSSR*, 286(4), 786–790.

23. Marichev, O. I. (1978). *Method evaluation of integrals of Special Functions (Theory and Formulas Tables)*. Minsk: Nauka i tekhnika.
24. Brychkov, Yu. A., Glaeske, H.-Y., Prudnikov, A. P., & Vu Kim Tuan. (1992). *Multidimensional Integral Transformations*. Philadelphia: Gordon and Breach.
25. Nikolski, S. M. (1975). *Approximation of Functions of Many Variables and Embedding Theorems*. Moscow: Nauka.
26. Rooney, P. G. (1983). On integral transformations with G-function kernels. *Proc. Royal Soc. Edinburgh. Sect. A*, (93), 265–297. DOI: [10.1017/S0308210500015973](https://doi.org/10.1017/S0308210500015973).
27. Rooney, P. G. (1994). On the range of the integral transformation. *Canad. Math. Bul.*, 37(4), 545–548.
28. Rooney, P. G. (1995). On the representation of functions by the Hankel and some related transformations. *Proc. Royal Soc. Edinburgh. Sect. A*, 125(3), 449–463.
29. Sitnik S. M. (2009). Refinements and generalizations of classical inequalities. *Studies in mathematical analysis. Series: Mathematical Forum*, (3), 221–226.

Поступила 20.10.2023

TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL H-TRANSFORM IN WEIGHTED SPACES OF SUMMABLE FUNCTIONS

S. SITNIK

(Belgorod State National Research University "BelGU");

O. SKOROMNIK, M. PAPKOVICH

(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

Two-dimensional integral H-transform in spaces of integrable functions $\mathcal{L}_{\sqrt{\lambda}}$ has been studied. Conditions for the boundedness and one-to-one action of the operator of such a transform from one $\mathcal{L}_{\sqrt{\lambda}}$ -space to another have been obtained, an analogue of the formula for integration by parts has been proven, and various integral representations have been established for the transformation under consideration. The results of the study generalize those previously obtained for the corresponding one-dimensional transform.

Keywords: *two-dimensional integral H-transform, space of integrable functions, special functions in kernels, two-dimensional Mellin transform, fractional integrals and derivatives.*

СОДЕРЖАНИЕ

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

<i>Богуш Р. П., Адамовский Е. Р., Чен Х.</i> Детектирование дыма на видеопоследовательностях в режиме реального времени	2
<i>Липницкий Д. М., Садов В. С.</i> Защита полиграфической продукции с применением цифровых водяных знаков	9
<i>Ловецкий М. Ю., Цветков В. Ю., Борискевич А. А., Лапицкая В. А., Чижик С. А.</i> Взвешенное сложение АСМ-изображений с использованием локальной корреляционной метрики	18
<i>Сорокина В. В., Абламейко С. В.</i> Метод аугментации данных для улучшения качества распознавания изображений электронной коммерции	29

ЭЛЕКТРОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ УСТАНОВКИ (ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ)

<i>Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Бринкевич Д. И., Просолович В. С., Колос В. В., Зубова О. А.</i> Прочностные свойства облученных электронами пленок негативных новолачных фоторезистов на монокристаллическом кремнии	35
<i>Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Бринкевич Д. И., Просолович В. С.</i> Пленки позитивного диазохинон-новолачного фоторезиста ФП9120, имплантированные ионами серебра	42
<i>Высоцкий М. Э., Вершинин А. С., Грозберг Ю. Г.</i> Выбор типа магнитных цепей в индукционных устройствах прямого преобразования механической энергии в тепловую	48
<i>Высоцкий М. Э., Вершинин А. С., Грозберг Ю. Г.</i> Исследование прохождения магнитных потоков через перекатывающиеся ролики в составе магнитных цепей	56
<i>Зайцев В. А., Мельникова В. В., Подрябинкин Д. А., Данилюк А. Л.</i> Модель взаимосвязи электрофизических параметров транзисторной структуры с двумерным каналом для систем автоматизированного проектирования	63
<i>Янушкевич В. Ф., Калинин С. В., Шпак К. В.</i> Закономерности изменения свойств анизотропной среды над углеводородами от режимов зондирования.....	69

МАТЕМАТИКА

<i>Ломовцев Ф. Е.</i> Общий интеграл модельного волнового уравнения с переменными скоростями $a_1(x,t)$ и $a_2(x,t)$ в верхней полуплоскости	77
<i>Ситник С. М., Скоромник О. В., Папкович М. В.</i> Двумерное интегральное Н-преобразование в пространстве суммируемых функций	93