

MIESIĘCZNIK
POŁOCKI.

Т о м I.
Р о к 1818.

«Вестник Полоцкого государственного университета» продолжает традиции первого в Беларуси литературно-научного журнала «Месячник Полоцкий».



ВЕСНІК ПОЛАЦКАГА ДЗЯРЖАУНАГА УНІВЕРСІТЭТА
Серыя С. Фундаментальныя навукі

У серыі С навукова-тэарэтычнага часопіса друкуюцца артыкулы, якія прайшлі рэцэнзаваўне, змяшчаюць новыя навуковыя вынікі ў галіне інфарматыкі і матэматыкі, фізікі.

ВЕСТНИК ПОЛОЦКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия С. Фундаментальные науки

В серии С научно-теоретического журнала публикуются статьи, прошедшие рецензирование, содержащие новые научные результаты в области информатики и математики, физики.

HERALD OF POLOTSK STATE UNIVERSITY
Series C. Fundamental sciences

Series C includes reviewed articles which contain novelty in research and its results in computer science and mathematics, physics.

Адрес редакции:
Полоцкий государственный университет, ул. Блохина, 29, г. Новополоцк, 211440, Беларусь
тел. + 375 (214) 53 34 58, e-mail: vestnik@psu.by

Отв. за выпуск В.А. Груздев, Д.О. Глухов, В.К. Железняк, А.А. Козлов.
Редактор О.П. Михайлова.

Подписано к печати 05.07.2018. Бумага офсетная 65 г/м². Формат 60×84^{1/8}. Ризография.
Усл. печ. л. 24,41. Уч.-изд. л. 29,43. Тираж 100 экз. Заказ

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 534.6:621.391

ОБНАРУЖЕНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ В МАСКИРУЮЩИХ ШУМАХ ВЫСОКОГО УРОВНЯ

канд. техн. наук, доц. И.Б. БУРАЧЕНОК, д-р техн. наук, проф. В.К. ЖЕЛЕЗНЯК,
канд. техн. наук А.Г. ФИЛИПОВИЧ
(Полоцкий государственный университет)

Описана методика обнаружения измерительных сигналов, используемых для оценки защищенности речевой информации в технических каналах утечки в условиях маскирующих шумов высокого уровня при значительных неравномерностях их амплитудно-частотных характеристик. Приведены результаты исследования оценки защищенности при использовании сложных измерительных сигналов с большой базой в полосах равной разборчивости с весовым коэффициентом 0,5 при их зашумлении хаотической импульсной последовательностью.

Ключевые слова: маскирующие шумы, гармонические измерительные сигналы, сложные измерительные сигналы, оценка защищенности, технические каналы утечки информации.

Введение. В основе теории оценивания защищенности речевых сигналов (РС) в технических каналах утечки (КУ) основным критерием их защищенности, как правило, является коэффициент разборчивости речи (информационный показатель) – уровень разборчивости речи, воспринимаемый человеческим слухом за пределами выделенного помещения объекта информатизации (ОИ). Он равен нормативному численному значению словесной разборчивости речи [1]. В научной школе под руководством Н.Б. Покровского разработана формантная теория разборчивости русской речи с учетом ее статистических особенностей с использованием стандартных акустических таблиц ГОСТ Р 50840-95. Однако оценка разборчивости речи по инструментально-расчетному методу, предложенному Н.Б. Покровским, весьма дорогостоящее и трудоемкое мероприятие (необходимо иметь целую артикуляционную экспертную бригаду). Поэтому чаще всего используется объективный метод оценки, когда разборчивость речи определяют по отношению мощности сигнала к мощности шума (ОСШ) (энергетический показатель), который математически зависит от разборчивости речи [2].

В Республике Беларусь оценка защищенности речевой информации (РИ) по техническим КУ на соответствие значениям, установленным нормативными требованиями к показателям эффективности защиты, регламентирована СТБ 34.101.29-2011. Оценка осуществляется при использовании гармонического измерительного сигнала (ИС) во всех технических КУ объектов информатизации, включая первую категорию, в реальном масштабе времени с высокой точностью и высокой чувствительностью по численным значениям ОСШ и критерию разборчивости речи. Защищенность РС в техническом КУ оценивают выделением слабых ИС из шумов высокого уровня с учетом неравномерности амплитудно-частотной характеристики (АЧХ), определяя ОСШ за пределами выделенного помещения ОИ при разбиении спектра РС (диапазон от 100 Гц до 10 кГц) на двадцать полос равной разборчивости (ПРР) с равными весовыми коэффициентами 0,05 [2].

В руководстве по эксплуатации на «Комплекс переносной автоматизированный программно-аппаратный для измерения акустических и виброакустических параметров "Филин А"» [3] установлено время излучения гармонических ИС в зависимости от влияющих факторов. Рекомендуемое время излучения гармонических измерительных сигналов $T_c = 1, 10$ и 25 с для каждой ПРР, что соответствует суммарному времени излучения всех ИС в двадцати полосах равной разборчивости соответственно $T_{\text{сум}} = 20, 200$ и 500 с. Время излучения гармонического измерительного сигнала определяется ослаблением преграды и степенью оценки защищенности РС по 1-й, 2-й и 3-й категориям. Для измерений с ослаблением преграды (например, стеклян- ное ограждение, двери и т.п.) достаточно излучать гармонический ИС длительностью $T_c = 1$ с, так как в точке приема за преградой его уровень достаточен для выделения на фоне шумов. Такой вид измерений используют для оценки защищенности РС по 3-й категории. Для преград с большим ослаблением сигнала (например, кирпичные, железобетонные стены и т.п.) и необходимостью оценки защищенности РС по 1-й и 2-й категориям необходимо увеличивать время излучения гармонического ИС до $T_c = 10$ с или $T_c = 25$ с. Выделяемые оптимальным приемником полосы частот гармонических ИС с заданными длительностями равны: 1 Гц для сигналов длительностью $T_c = 1$ с; 0,1 Гц – $T_c = 10$ с; 0,04 Гц – $T_c = 25$ с [2]. Таким образом, при ограничении

времени излучения гармонического ИС в измеряемом диапазоне частот его параметры ухудшаются, что приводит к снижению точности оценки в техническом КУ с явно выраженными неравномерностями АЧХ. Методическая погрешность оценки защищенности РС гармоническим ИС помимо ограничения продолжительности сигнала не учитывает и ряд других факторов: линейные искажения входного сигнала и точность его передачи через систему звукопередачи; возможность предскажений; ограничение полосы; значительные неравномерности АЧХ преграды (КУ речевой информации); его спектральную плотность в широком диапазоне частот и кривую чувствительности уха. Поэтому возникает необходимость в анализе и синтезе ИС и разработке новых методов их извлечения из шумов высокого уровня в условиях значительной неравномерности АЧХ, обеспечивающих улучшение важнейших параметров оценки защищенности технических каналов утечки.

Целью работы является повышение численных значений основных параметров оценки защищенности технических КУ при выделении ИС из маскирующих шумов высокого уровня в условиях значительной неравномерности АЧХ.

Формирование измерительных сигналов для обнаружения при маскировании шумами высокого уровня. С целью исключения методической погрешности присущей гармоническому измерительному сигналу и повышения численных значений основных параметров оценки защищенности РИ в технических каналах утечки предложено использовать сложный ИС с большой базой (значительно больше единицы). База сигнала B равна произведению длительности сигнала T_c на ширину спектра частот $2\Delta f$ [4].

Средствами пакета MatLab были сформированы в каждой ПРП k ($k = \{1, \dots, N\}$; $N=20$) ИС длительностью $T_c = 2$ с и частотой дискретизации $F_s = 44\,100$ Гц.

В таблице 1 представлены значения частот на которых проводилось излучение двадцати гармонических ИС.

Таблица 1. – Характеристики гармонических измерительных сигналов

Номер полосы k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Частота полосы, f_{0k} , Гц	260	495	640	787,5	947,5	1125	1315	1505	1690	1870

Окончание таблицы 1

Номер полосы k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Частота полосы, f_{0k} , Гц	2050	2230	2435	2725	3100	3480	3855	4530	6130	8625

В таблице 2 представлены основные характеристики двадцати сложных ИС с большой базой.

Таблица 2. – Характеристики сложных измерительных сигналов с большой базой

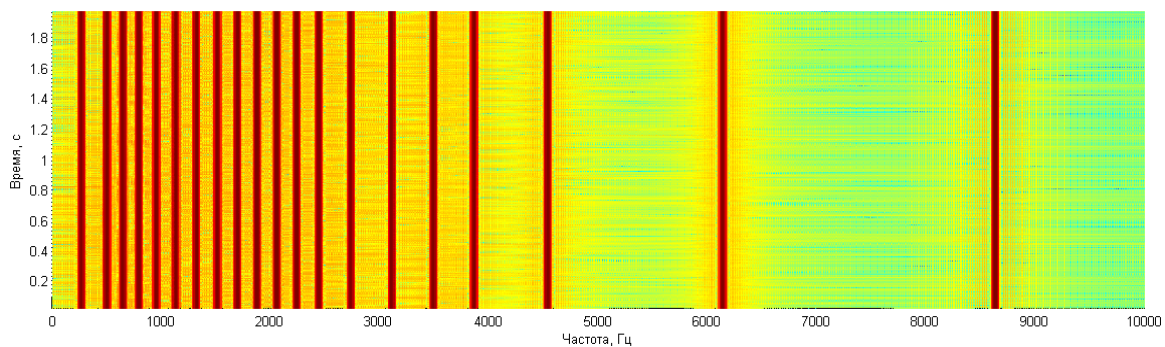
Номер полосы k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ширина полосы частот $2\Delta f_k$, Гц	320	150	140	155	165	190	190	190	180	180
База B_k	640	300	280	310	330	380	380	380	360	360

Окончание таблицы 2

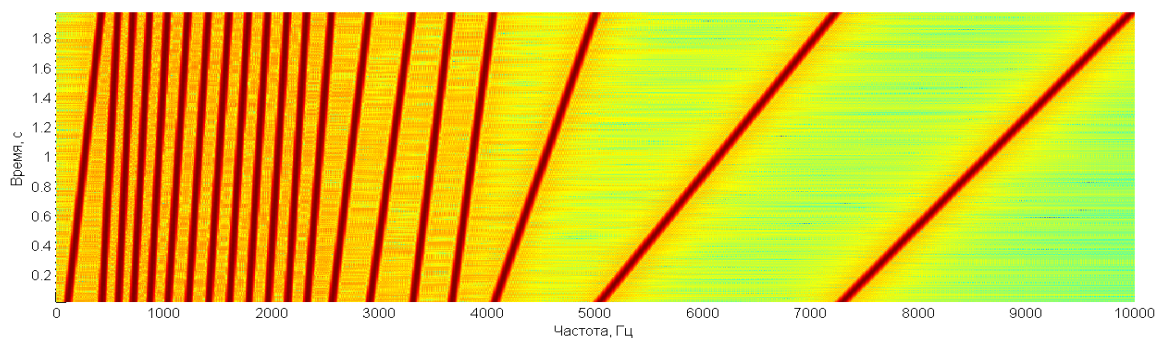
Номер полосы k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ширина полосы частот $2\Delta f_k$, Гц	180	180	230	350	400	360	390	960	2240	2750
База B_k	360	360	460	700	800	720	780	1920	4480	5500

Спектрограммы сравниваемых ИС, представленные на рисунке 1, наглядно демонстрируют, что использование при оценке защищенности РИ в КУ в качестве измерительных двадцати сложных сигналов (рисунок 1, б) с большой базой в отличие от двадцати гармонических (рисунок 1, а) позволяет контролировать всю полосу РС, а не только отдельные точки на оси частот.

В статье [4] приводятся экспериментальные доказательства преимущества при приеме сложного ИС, выраженного в улучшении ОСШ на величину его базы, равную $B_k = 2\Delta f_k T_c$ в каждой отдельно взятой ПРП.



а



б

**а – гармонические измерительные сигналы;
б – сложные измерительные сигналы с большой базой**
**Рисунок 1. – Спектрограммы измерительных сигналов
в двадцати полосах равной разборчивости**

Обоснование выбора сложных ИС с большой базой и оптимальными параметрами в ПРР позволило значительно снизить в сравнении с известными методами суммарное время оценки защищенности КУ РИ.

Доказанное преимущество предлагаемого для оценки сложного измерительного сигнала с большой базой перед гармоническим, равное величине базы сложного ИС, позволило при известной величине его базы установить величину разборчивости [4].

Обоснованные оптимальные значения базы сложного ИС в пределах ПРР спектра РС (в нашем случае при постоянном значении длительности $T_c = 4$ с в каждой отдельно взятой ПРР) позволили получить нормированные значения оценки защищенности РИ сложным ИС [5].

Обоснование выбора шума для маскирования. Степень защиты информации при активном зашумлении определяется характеристикой маскирующего шума [2]. Этой характеристикой является его коэффициент качества, который принято оценивать энтропийным коэффициентом подобия. Энтропийный коэффициент качества для нормального шума (гауссов случайный процесс) принят равным единице. При отклонении энтропийного коэффициента качества от единицы качество шума ухудшается [2].

Принято считать, что наилучшими маскирующими свойствами обладает шум с нормальным распределением вероятностей мгновенных значений [2, 6], определяемых по формуле

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1)$$

где σ – среднеквадратичное отклонение (σ^2 – дисперсия) шумового сигнала;

x – вектор выборочных значений;

m – математическое ожидание (среднее арифметическое) распределения.

Дисперсия шумового сигнала характеризует меру разброса случайной величины около математического ожидания m . Если случайная величина x имеет математическое ожидание $m(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot P(x) dx$,

то дисперсия случайной величины x определяется как $D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \cdot P(x)dx$ [6]. Для определения меры разброса значений случайной величины используется среднеквадратичное отклонение, связанное с дисперсией соотношением $\sigma = \sqrt{D}$.

Шум с нормальным (гауссовым) распределением имеет наибольшее значение информационной энтропии, которое определяется по формуле [6]

$$H = - \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \ln P(x) dx = \ln \sqrt{2\pi e \sigma^2}, \quad (2)$$

где $P(x)$ – плотность распределения вероятности измеряемой величины.

Энтропийный коэффициент качества маскирующего шума определяют по формуле [6]

$$K_H = \frac{e^H}{\sqrt{2\pi e \sigma^2}}. \quad (3)$$

Мощность эквивалентного нормального шума определяется произведением мощности реальной помехи на его энтропийный коэффициент качества K_H . Сигнал будет иметь меньшую энтропию при условии, что его дифференциальный закон распределения отличается от нормального. Следует заметить, что распределение нормального шума симметрично и имеет нулевой эксцесс [5]. Отличие распределения реального шумового сигнала от «нормального» определяется в соответствии с числовыми характеристикам закона распределения вероятностей, к которым относятся: коэффициент асимметрии γ_a и коэффициент эксцесса γ_3 [7]:

$$\gamma_a = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad \text{и} \quad \gamma_3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \quad (4)$$

где $\mu_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4$ – четвертый эмпирический центральный момент;

$\mu_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$ – третий эмпирический центральный момент;

n – количество элементов в выборке.

Коэффициент асимметрии положителен, если правый хвост распределения длиннее левого, и отрицателен в противном случае. Чтобы шум удовлетворял заданным требованиям, распределение его случайных выборок должно стремиться к симметричному нормальному закону, т.е. иметь коэффициенты асимметрии и эксцесса близкими к нулю. Поэтому для имитации виброакустического зашумления в технических КУ в соответствии с обеспечением минимума слоговой разборчивости речи важным является выбор маскирующего шума.

Для проведения эксперимента с целью снижения разборчивости после записи (передачи по каналу связи) сформирована хаотическая импульсная помеха (далее шум ХИП) в акустическом диапазоне частот при использовании генератора маскирующих сигналов (рисунок 2) на базе диодов-генераторов серии ND 100.

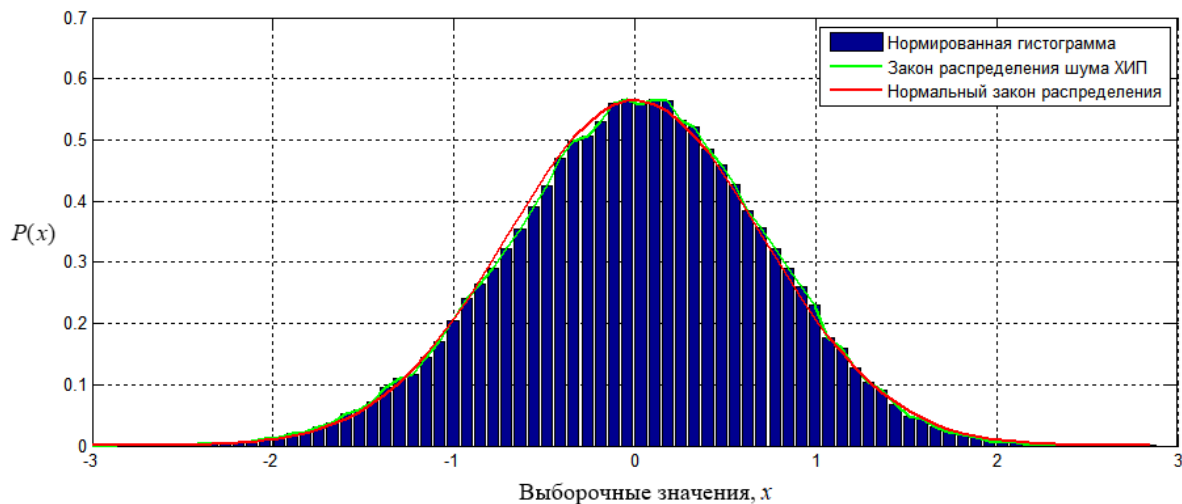
Шум ХИП предназначен для защиты различного рода переговоров от прослушивания противником в замкнутых пространствах.

Нормированная гистограмма распределения плотности вероятности шума ХИП с наложенной функцией плотности вероятности нормального закона представлена на рисунке 3.

Согласно полученным данным (см. рисунок 3) для шума ХИП определены коэффициент асимметрии $\gamma_a = -0,1 \pm 0,02$ и коэффициент эксцесса $\gamma_3 = -0,02 \pm 0,01$. Особенностью шума ХИП является его спектральная плотность мощности, которая экспоненциально спадает в заявленных диапазонах частот. Диапазон частот ХИП от 50 Гц до 10 МГц. Достоинством используемого для экспериментов шума является и высокий энтропийный коэффициент качества, не ниже $K_H \geq 0,92$.



Рисунок 2. – Генератор маскирующих сигналов



**Рисунок 3. – Нормированная гистограмма
распределения плотности вероятности шума ХИП**

ХИП универсален и применим для маскирования не только аналоговых РС, но и РС в цифровой форме, видеосигналов, сигналов звукового сопровождения видео и сигналов передачи данных. ХИП позволяет сократить количество генераторов маскирующих сигналов минимум в 2 раза, повысить адаптивность маскируемого и маскирующего сигналов и снизить уровень шумового излучения не менее чем в 3 раза. Кроме того, его использование повышает защищенность аналоговых и цифровых сигналов не менее чем в 3 раза по сравнению с известными маскирующими сигналами (например, белый шум), повышает акустическую комфортность в 2 раза. Он имеет высокую устойчивость метрологических параметров и характеристик, а также контролепригодность и превосходит известные шумы по уровню излучения, неравномерности АЧХ в рабочем диапазоне частот, разбросу характеристик при воздействующих факторах. Пик-фактор ХИП (отношение максимальной амплитуды сигнала к его среднеквадратичному значению [8]) превосходит белый шум.

Таким образом, для имитации виброакустического зашумления шум ХИП полностью соответствует всем заявленным требованиям.

Методика исследования. Предлагаемая методика базируется на методах корреляционного анализа с учетом различий между шумом и полезным сигналом (их некоррелированности). В ее основе лежит применение взаимокорреляционной функции (ВКФ) по времени $R_{1,2}(\tau)$:

$$R_{1,2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t-\tau) dt, \quad (5)$$

где τ – сдвиг по времени между входным и выходным сигналами;

$s_1(t)$ – не зашумленный в точке излучения сложный ИС (входной);

$s_2(t)$ – зашумленный шумом $n(t)$ в техническом КУ в точке приема сложный ИС с большой базой,

$s_2(t) = s_1(t) + n(t)$ (выходной).

Взаимокорреляционная функция при $s_1(t) = s_2(t)$ является автокорреляционной функцией (АКФ) сигнала. В точке $\tau = 0$ она максимальна и численно равна энергии сигнала, выделяющейся на сопротивлении $R = 1$ Ом. Функция $R_{1,2}(\tau)$ оценивает степень сходства двух сигналов, а также их взаимное расположение по оси времени. Она необязательно симметрична и ее максимум может оказаться не в точке $\tau = 0$. Сдвиг пика ВКФ относительно $\tau = 0$ равен времени задержки сигнала $s_2(t)$ относительно $s_1(t)$. Математический подход при использовании производных от ВКФ позволил, установив положение точки на временной оси, в которой данная производная равна нулю, с высокой точностью определить величину задержки τ между сложными ИС с большой базой на входе $s_1(t)$ и выходе $s_2(t)$ технического КУ и, тем самым, скомпенсировать случайное временное запаздывание сложного измерительного сигнала в каналах утечки [9]. Сдвиг определяют как разность между точками максимального значения АКФ сложного ИС с большой базой в точке излучения в техническом КУ и максимального значения построенной ВКФ [10].

По вновь построенной ВКФ определяют точку максимума, равного взаимной энергии двух сравниваемых сложных ИС с большой базой в точке излучения и точке приема в техническом КУ ($\text{Re}(R_{1,2}) \leq \frac{E_{s_1} + E_{s_2}}{2}$). Зная взаимную энергию двух сравниваемых сигналов, определяют их взаимную мощность:

$$R_{1,2}(\tau) = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} s_1(t) s_2(t-\tau) dt, \quad (6)$$

где T_c – длительности сигнала.

Далее определяют величину ОСШ в каждой k -й ПРР спектра РС и рассчитывают разборчивость речи, используя алгоритм расчета [2]. Полученные средние значения коэффициентов разборчивости речи в каждой k -й ПРР спектра РС сравнивают с нормативным значением.

На основании проведенных исследований, использование ВКФ ослабило шумовую составляющую $n(t)$ сложного ИС с большой базой и исключило погрешности, связанные с его запаздыванием в техническом КУ [10]. Применение математического подхода с использованием производных для определения положения точки на временной оси, сдвинутой на величину задержки, повысило точность оценки временного запаздывания, что позволило определить максимальное значение ВКФ с точностью, равной одному периоду дискретизации T_δ , и повысило точность оптимальной оценки параметров сложных ИС с большой базой при приеме. Использование взаимокорреляционной обработки сложного ИС позволило получить наилучшее ОСШ и упростить процедуру автоматизированных измерений за счет усовершенствования алгоритма оценки защищенности РИ в техническом КУ и без усложнения аппаратной части ПАК.

Корреляционная обработка также открывает дополнительную возможность определения не только взаимной мощности двух сравниваемых сигналов (это нам дает выигрыш в ОСШ), но и мощности принятого сложного ИС с большой базой в точке приема на выходе технического КУ, которая определяется по формуле [11]

$$P_{s_2} = \frac{E_{s_1 s_2}^2}{E_{s_1} T_c}, \quad (7)$$

где $E_{s_1 s_2}$ – энергия взаимодействия сложных ИС с большой базой в точках излучения $s_1(t)$ и приема $s_2(t)$ в техническом канале утечки, равная их взаимной корреляции $R_{1,2}(\tau)$ при $\tau = 0$;

E_{s_1} – энергия $s_1(t)$ сложного ИС с большой базой в точке излучения в техническом КУ.

Наиболее быстрым способом определения ОСШ является использование АКФ принятого в точке приема в техническом КУ прошедшего через преграду зашумленного маскирующим шумом при ОСШ 0 дБ сложного ИС. На рисунке 4, а показана нормированная АКФ исследуемого измерительного сигнала в третьей ПРР, а на рисунке 4, б – ее огибающая (без симметричного отражения).

Сужение АКФ выше уровня 0,5 наглядно демонстрирует наличие и величину присутствующего в полезном сигнале шума. Таким образом, при необходимости, возможно осуществить экспресс-анализ ОСШ по АКФ зашумленного маскирующим шумом некоррелированным с сигналом в техническом КУ в точке приема сложного ИС с большой базой по АКФ без дополнительных временных затрат.

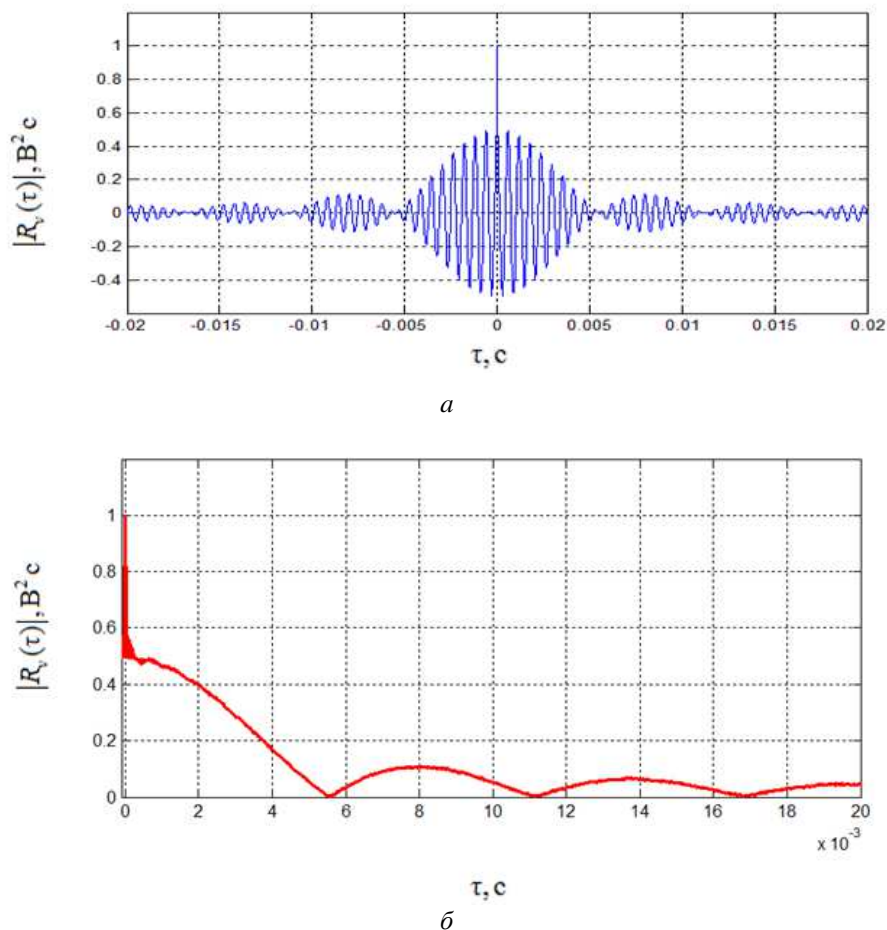
Дополнительно улучшить ОСШ пропорционально корню квадратному из количества накопленных сложных ИС (в $\sqrt{n}$ раз) возможно за счет его n -кратного синхронного накопления.

Проведенные исследования позволили получить следующие **результаты**.

Исследования процесса обнаружения слабых сложных ИС с большой базой с помощью процесса корреляции из шумов высокого уровня, генерируемых современными устройствами акустического и виброакустического зашумления [8], показали, что в третьей полосе ПРР измерительный сигнал обнаруживается при ОСШ -19 ± 1 дБ, а в двадцатой полосе – при ОСШ -32 ± 1 дБ. При формировании ИС с заданным уровнем эффективной длительности сигнала $a = 1$ получены наилучшие результаты оценки [12]. Это позволило выделить из маскирующих шумов высокого уровня слабые по уровню ИС в условиях значительной неравномерности и значительно повысить точность, а также чувствительность при оценке защищенности РИ в технических каналах утечки.

Предлагаемая методика оценки рекомендуется для проведения специальных акустических и вибрационных измерений в условиях шумов высокого уровня при значительных неравномерностях АЧХ в ОИ (системах передачи и обработки информации 3, 2 и 1 категории, выделенных помещениях 3, 2 и 1 катего-

рии, подвижных объектах: летательных аппаратах, командно-штабных машинах и стационарных объектах, где эксплуатируется специальная аппаратура преобразования РС, делающих их не разборчивыми) с целью оценки их защищенности от утечки РИ по акустическому, вибрационному и электроакустическому КУ и позволяет учитывать: энергетические показатели полос РС; усредненную спектральную плотность мощности РС с учетом неравномерности ее АЧХ; спектральную плотность мощности фонового шума; частотно-зависимую характеристику затухания в диапазоне частот РС элементами конструкции помещений; кривую чувствительности уха.



a – автокорреляционная функция;

б – огибающая автокорреляционной функции (без симметричного отражения)

Рисунок 4. – АКФ принятого сложного измерительного сигнала с большой базой, зашумленного шумом ХИП

Разработанная методика оценки ориентирована на технические каналы утечки РИ (акустический, виброакустический, электроакустический, магнитный, электрический, наводки сигналов рассеивания этих каналов на цепи управления, питания и заземления) при преобразовании физических информационных полей рассеивания в электрический сигнал с целью удобной реализации процедур оценки, контроля и технической диагностики. С использованием предлагаемой методики можно также проводить проверку эффективности маскирующих РС шумов, генерируемых современными устройствами акустического и виброакустического зашумления.

Выводы. Использование предложенной методики обнаружения сложных ИС в маскирующих шумах высокого уровня позволяет:

1) программными компонентами выполнять генерацию ИС и измерение их параметров, заменяя ряд приборов (генератор сигналов низкочастотный, селективный вольтметр, осциллограф, нановольтметр), что снижает стоимость ПАК, предназначенного для инструментального контроля эффективного защиты РИ по техническим каналам утечки, а также расширяет возможности в области генерации, анализа и оценки параметров стимулирующих сигналов, увеличивает масштабируемость;

- 2) проводить измерения не на отдельных средних частотах ПРР спектра РС, а в пределах диапазона каждой отдельной ПРР, охватывая весь диапазон РС при снижении времени генерирования ИС и их обработки;
- 3) учитывать неравномерность АЧХ спектра РС;
- 4) осуществить одновременное измерение энергетических показателей сигнала и шума;
- 5) снизить влияние эффектов реверберации и резонанса в выделенном помещении;
- 6) повысить разрешающую способность по времени и частоте, снизить предельную чувствительность и методическую погрешность оценки;
- 7) снизить время проведения исследования ОИ;
- 8) снизить массогабаритные характеристики ПАК.

ЛИТЕРАТУРА

1. Покровский, Н. Б. Расчет и измерение разборчивости речи / Н. Б. Покровский. – М. : Гос. изд-во лит. по вопросам связи и радио. 1962. – 392 с.
2. Железняк, В. К. Защита информации от утечки по техническим каналам : учеб. пособие / В. К. Железняк. – СПб. : ГУАП, 2006. – 188 с.
3. Бураченко, И. Б. Определение разборчивости речи в условиях воздействия шумов высокого уровня / И. Б. Бураченко, В. К. Железняк, К. Я. Раханов // Обеспечение пограничной безопасности и охрана Государственной границы Республики Беларусь: теория и практика : материалы 5-й науч.-практ. конф., Минск, 2015 г. : в 3 ч. / ГУО «ИПС РБ» ; редкол.: А. Е. Виноградов [и др.]. – Минск, 2015. – Ч. 1. – С. 228–231.
4. Бураченко, И. Б. Оценка нормативного показателя защищенности речевого сигнала сложным сигналом с большой базой / В. К. Железняк, И. Б. Бураченко // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 10–14.
5. Рябенко, Д. В. Критерии оценки защищенности от утечки речевых сигналов / Д. В. Рябенко, И. Б. Бураченко, В. К. Железняк // Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-технических наук. – 2017. – № 1. – С. 122–128.
6. Харкевич, А. А. Очерки общей теории связи / А. А. Харкевич. – М. : Гос. изд-во науч.-техн. лит., 1955. – 271 с.
7. Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения : ГОСТ Р ИСО 5479–2002. – М. : Изд-во стандартов, 2002. – 30 с.
8. Вибрация. Воздействие вибрации на человека. Средства измерения : ГОСТ ИСО 8041:2006 (ISO 8041:2005 Human response to vibration – Measuring instrumentation IDT). – М. : Стандартинформ, 2006. – 81 с.
9. Бураченко, И. Б. Компенсация временного запаздывания измерительного сигнала на выходе канала утечки речевой информации / И. Б. Бураченко, В. К. Железняк // Доклады БГУИР. – 2016. – № 6. – С. 100–106.
10. Бураченко, И. Б. Оценка с высокой точностью параметров измерительного сигнала компенсацией его временной задержки в каналах утечки речевой информации / И. Б. Бураченко, В. К. Железняк // Доклады БГУИР. – 2016. – № 5. – С. 60–66.
11. Раханов, К. Я. Оценка разборчивости речи взаимной корреляцией сигнала линейной частотной модуляции в каналах утечки информации / К. Я. Раханов, В. К. Железняк, И. Б. Бураченко // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 22–27.
12. Бураченко, И. Б. Анализ измерительных сигналов для оценки защищенности речевой информации в технических каналах утечки / В. К. Железняк, И. Б. Бураченко // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 8–14.

Поступила 20.03.2018

DETECTION OF MEASURING SIGNALS IN HIGH-LEVEL MASKING NOISE

I. BURACHONAK, V. ZHELEZNYAK, A. FILIPOVICH

The paper describes a method of detecting the measurement signals used for estimating speech information protection in technical channels of leakage under conditions of high-level masking noise at significant nonuniformities of their amplitude-frequency characteristics. The results of research of assessment of speech information protection using complex measuring signals with a large base in bands of equal intelligibility with a weighting factor of 0.5 when they are noisy by a chaotic impulse sequence.

Keywords: *masking noise, harmonic measuring signals, complex measurement signals, assessment of speech information protection, technical channels of information leakage.*

УДК 519.876

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ КРИТИЧЕСКИ ВАЖНЫХ ОБЪЕКТОВ ИНФОРМАТИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ КОЛИЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА ЖИВУЧЕСТИ

канд. техн. наук, доц. **Н.М. БОБОВИЧ**
(Академия МВД Республики Беларусь, Минск)

Рассматривается задача математического моделирования структуры критически важных объектов информатизации для количественного анализа живучести и управления ею с использованием метода сопряжения случайных структур по производительности. Приведенные алгоритмы эквивалентного преобразования реальных структур в их последовательно-параллельные аналоги позволяют в процессе исследования живучести наиболее полно учесть существующие реальные взаимосвязи между структурными элементами критически важного объекта информатизации.

Ключевые слова: объект информатизации, аналитический алгоритм, структурные элементы критически важного объекта информатизации, комплекс моделей количественной оценки живучести критически важного объекта информатизации, метод сопряжения случайных структур по производительности.

Введение. Общей особенностью количественной оценки показателей живучести критически важных объектов информатизации (КВОИ) является статистический характер оцениваемых показателей на всех иерархических уровнях: элемент–подсистема–система в целом. Возможность представления производительности на высших уровнях в виде операторов сопряжения, представляющих собой ее функциональную зависимость от производительностей на более низких уровнях, позволяет свести задачу количественной оценки живучести по показателю «производительность» к задачам расчета статистических характеристик функций случайных аргументов [1].

Сложность и громоздкость функциональных зависимостей между производительностями элементов и образуемых ими реальных систем существенно затрудняет прямое решение задачи. Поэтому предлагается использовать метод сопряжения случайных структур (систем) по производительности, который позволяет представить исследуемую систему в виде совокупности последовательно-параллельных связей, установить взаимно-однозначное соответствие между аналитическим выражением оператора сопряжения и его графическим отображением, а также упростить запись алгоритмов вычисления производительности и расчет ее статистических характеристик.

Основная часть. Алгоритмы вычисления производительностей элементарных звеньев и элементарных цепей назовем элементарными операторами сопряжения.

Под сопряжением понимается объединение элементов (элементарных звеньев) подсистемы в работоспособные элементарные цепи, которые включают набор элементов, необходимый и достаточный для получения на выходе отличной от нуля производительности.

Алгоритмы вычисления производительностей элементарного звена и элементарной цепи соответственно имеют вид:

$$I_i = \sum_{j=1}^{m_i} I_{ij} \left(j = \overline{1, m_i} \right), \quad (1)$$

$$I = \min_{(i)} \{ I_i \} \left(i = \overline{1, n} \right). \quad (2)$$

Для графического изображения элементарных операторов сопряжения используются параллельное объединение элементов в звене и последовательное – в цепи (рисунки 1, 2).

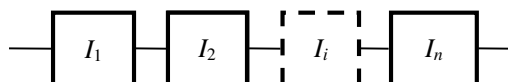


Рисунок 1. – Последовательное соединение элементов подсистемы

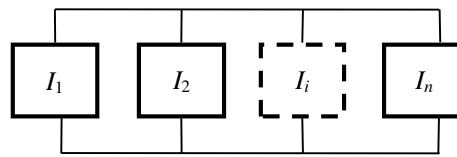


Рисунок 2. – Параллельное соединение элементов подсистемы

Алгоритм вычисления производительности некоторой k -й подсистемы через производительности ее структурных элементов:

$$I = \min_{(i)} \left\{ \sum_{j=1}^{m_i} I_{ij}^{(k)} \right\}. \quad (3)$$

Графическое изображение оператора сопряжения (3) представляет собой структурную схему сопряжения k -й подсистемы, которая включает исчерпывающее множество работоспособных элементарных цепей, имеющих в подсистеме.

Например, для структуры, изображенной на рисунке 3, алгоритм вычисления производительности может быть записан в следующем виде:

$$I = \min \{ [\min(I_1, I_2 + I_3) + \min(I_4, I_5)], I_6 \}.$$

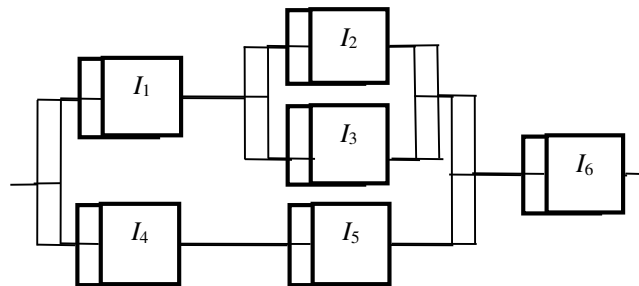


Рисунок 3. – Структурно-функциональная схема системы

Кроме последовательно-параллельных связей структурная схема сопряжения может содержать различные типы перекрестных связей. Основными из них являются различные виды заменяемости между элементами технологических звеньев, связи с усилением, простоем и некоторые другие (таблица).

В таблице приняты следующие обозначения:

I – производительность системы и ее аналога;

I_i, I_j – производительность подсистемы;

I_{ij} – производительность универсальной части подсистемы;

I_{ii} – производительность невазменяемой подсистемы;

β_{ij} – относительная трудоемкость операций;

α – коэффициент усиления;

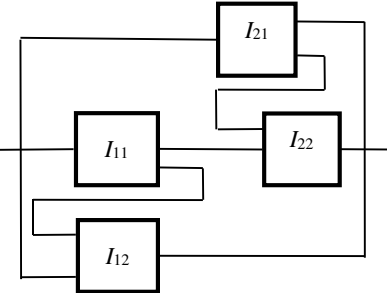
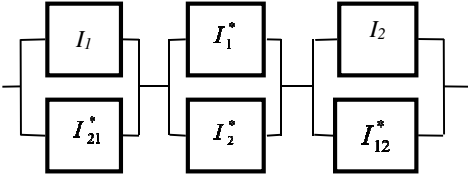
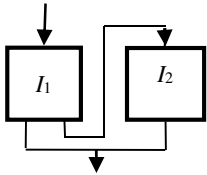
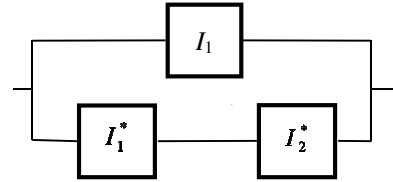
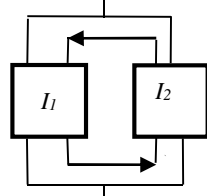
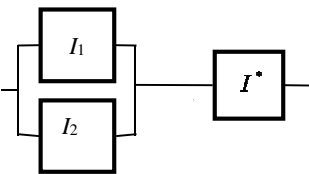
I^* – производительность, ограниченная фронтом работ;

$B = \beta_{ij}\beta_{ji}$ – характеристика организации структуры. Этот параметр характеризует степень совершенства системы по ее исходной организации.

Алгоритмы преобразования перечисленных связей к их последовательно-параллельным аналогам приведены в работах [2, 3].

Операторы сопряжения для функциональных связей, отличных от последовательно-параллельных, существенно зависят от управления структурой подсистемы, которое определяет распределение элементов между выполняемыми в подсистеме технологическими операциями. Поэтому эквивалентное преобразование таких функциональных связей к их последовательно-параллельным аналогам осуществляется при оптимальном распределении ресурса элементов подсистемы по критерию максимума производительности на ее выходе.

Таблица – Примеры функциональных связей и их последовательно-параллельных аналогов

Типовые функциональные связи	Последовательно-параллельный аналог	Оператор сопряжения
С взаимозаменяемостью 		$I = \min(I_1^*, I_2^*, I_1^{**}, I_2^{**})$ $I_i^* = I_i + \beta_{ij} I_{il}$ $I_i^{**} = \frac{I_i + \beta_{ij} I_{ji}}{1 + \beta_{ij}}$ $i, j = 1, 2$ $i \neq j$
С усилением 		$I = I_1 + \min(I_1^*, I_2^*)$ $I^* + (\alpha - 1)I_1$ $I = (1 - \frac{1}{\alpha})I_2$
С простоями 		$I = \min(I^*, I_1 + I_2)$

Достаточно адекватной моделью структуры отдельных подсистем и КВОИ в целом, элементы которых связаны между собой функциональными связями отличными от последовательно-параллельных, является однородная структура с заменяемостью.

Однородная структура с заменяемостью представляет собой структуру, в которой любой элемент может функционировать с отличной от нуля производительностью не более чем в двух элементарных звеньях. При этом относительные трудоемкости операций в этих звеньях отвечают условию:

$$\beta_{lr}^{(k)} \beta_{rl}^{(k)} = 1, \quad (4)$$

где $\beta_{lr}^{(k)} = \frac{I_r^{(k)}}{I_l^{(k)}}$, $\beta_{rl}^{(k)} = \frac{I_l^{(k)}}{I_r^{(k)}}$ – соответственно относительные трудоемкости операций r относительно операций l и операций l относительно операций r .

Физически это условие означает, что перемещение элементов между подсистемами не увеличивает их совместной производительности, т.е. система в исходном состоянии оптимальна по распределению элементов между подсистемами.

Производительность однородной структуры с заменяемостью может быть определена с помощью методики, изложенной в работе [2].

Любая система со случайной фиксированной структурой может быть сбалансирована, если ресурс заменяемости позволяет сбалансировать ее по производительности всех элементарных звеньев. Производительность сбалансированной структуры максимальна. Эта максимально возможная производительность для однородной структуры определяется величиной

$$I_{\max \max} = \frac{\sum \beta_{ir} I_i}{\sum \beta_{ir}}, \quad (5)$$

где r – фиксированный индекс произвольно выбранного элемента подсистемы.

Для доказательства (5) суммарную производительность всех элементов структуры, приведенную к производительности произвольно выбранного элементарного звена, запишем в следующем виде:

$$I_{\Sigma(r)} = \beta_{1r}I_1 + \beta_{2r}I_2 + \dots + I_r + \dots + I_n\beta_{nr}. \quad (6)$$

Распределим $I_{\Sigma(r)}$ между звеньями, соблюдая условие равенства производительностей:

$$\Delta I_1\beta_{r1} = \Delta I_2\beta_{r2} = \dots = \Delta I_r = \dots = \Delta I_n\beta_{rn}, \quad (7)$$

где $\Delta I_1, \Delta I_2, \dots, \Delta I_n$ – производительности, выделяемые в 1, 2, ..., n звеньях из приведенной к r -му звену суммарной производительности элементов (6);

$\beta_{r1}, \beta_{r2}, \dots, \beta_{rn}$ – коэффициенты приведения производительности r -го звена к 1, 2, ..., n звеньям.

Из равенства (7) для любого $i = 1, 2, \dots, n$ следует, что

$$\Delta I_i = \frac{\Delta I_r}{\beta_{ri}}.$$

Так как по условию $\sum_{i=1}^n \Delta I_i = I_{\Sigma(r)}$, то

$$I_{\Sigma(r)} = \Delta I_r \left(\frac{1}{\beta_{r1}} + \frac{1}{\beta_{r2}} + \dots + 1 + \dots + \frac{1}{\beta_{rn}} \right). \quad (8)$$

Принимая во внимание свойство однородной структуры (4) и выражение (6), окончательно получим сбалансированные производительности звеньев и равную им производительность на выходе структуры:

$$\Delta I = \Delta I_r = \frac{\sum_{(i)} \beta_{ir} I_i}{\sum_{(i)} \beta_{ik}}. \quad (9)$$

Приведем доказательство, что полученное значение (9) является единственным и оптимальным. Для этого предварительно покажем справедливость равенства:

$$\beta_{ir}\beta_{rl} = \beta_{il}.$$

По определению (4), $\beta_{ir} = \frac{I_r}{I_i}$, $\beta_{rl} = \frac{I_l}{I_r}$, отсюда

$$\beta_{ir}\beta_{rl} = \frac{I_r}{I_i} \frac{I_l}{I_r} = \frac{I_l}{I_i} = \beta_{il}.$$

С учетом этого

$$\Delta I = \frac{\sum_{(i)} \beta_{ir} I_i}{\sum_{(i)} \beta_{il}} \frac{\beta_{rl}}{\beta_{rl}} = \frac{\sum_{(i)} \beta_{il} I_i}{\sum_{(i)} \beta_{il}} = \text{const}.$$

При любом l ($l = \overline{1, n}$), т.е. полученный результат не зависит от выбора звена, к которому приводится производительность при расчете сбалансированной структуры.

Покажем, что перемещение элементов между звеньями в сбалансированной однородной структуре не повышает ее производительности. Для этого достаточно показать, что уносимая из r -го звена производительность I_r строго компенсируется (и не более) переводимой в него производительностью I_l из l -го

звена. При перемещении только между двумя звеньями это следует из равенства $I_r = \beta_{lr} I_l$. При последовательных перемещениях между несколькими звеньями равенство $\beta_{rl}\beta_{ln} = \beta_{rn}$ сводит их к перемещению между двумя конечными звеньями.

Доказанное вытекает также из свойства $\beta_{rl}\beta_{lr} = 1$, в соответствии с которым однородная структура всегда сохраняет нормальную организацию, в которой перемещение элементов между звеньями не приводит к повышению производительности подсистемы.

Таким образом, полученная сбалансированная структура имеет максимальную производительность, следовательно, решение является единственным и оптимальным.

Закключение. Сложность и громоздкость функциональных зависимостей между производительностями элементов и образуемых ими реальных систем существенно затрудняет решение задачи моделирования их структуры. Предлагаемый подход, основанный на использовании метода сопряжения случайных структур (систем) по производительности, позволяет представить исследуемую систему в виде совокупности последовательно-параллельных связей, установить взаимно-однозначное соответствие между аналитическим выражением оператора сопряжения и его графическим отображением, а также упростить запись алгоритмов вычисления производительности и расчет ее статистических характеристик. Кроме того, такое представление в ряде случаев позволяет анализировать влияние структуры на живучесть системы непосредственно, без ее количественных показателей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М. : Наука, 1969. – С. 564.
2. Александров, Г. В. Методология и инженерные методики расчета живучести сложных систем военного назначения / Г. В. Александров // Научно-методические материалы по оценке эффективности комплексов авиационного вооружения. – М. : ВВИА, 1980. – С. 183–197.
3. Бобович, Н.М. Методы оценки ущербов в задачах количественного анализа живучести критически важных объектов информатизации / Н.М. Бобович, В.В. Маликов // Доклады БГУИР 4 (82). – Минск, 2014. – С. 59–66.

Поступила 31.10.2017

MODELING OF STRUCTURE INFORMATION CRITICAL OBJECTS IN PROBLEMS OF THE QUANTITATIVE ANALYSIS OF SURVIVABILITY

N. BOBOVICH

The article considers the problem of mathematical modeling of the structure of information critical facilities for the quantitative analysis of survivability and management using the method of random mating structures on performance. The above algorithms for equivalent transformation of real structures in their series-parallel analogs allow in the vitality of research more fully into account there is a real relationship between the structural elements of the critical facility information, which have a significant impact on its vitality.

Keywords: object of informatization, analytical algorithm, structural elements of crucial object of informatization, complex of models of a quantitative assessment of a survivability critical of important object of informatization, method of random mating structures on performance.

УДК 621.317+681.849

**СИСТЕМЫ ИНСТРУМЕНТАРИЯ ЭКСПЕРТИЗЫ
АУДИО- И ВИДЕОЗАПИСИ В УКРАИНЕ****д-р техн. наук, проф. О.В. РЫБАЛЬСКИЙ**
(Национальная академия внутренних дел, Киев);**канд. техн. наук, доц. В.И. СОЛОВЬЕВ**

(Восточноукраинский национальный университет имени В. Даля, Северодонецк);

канд. техн. наук В.В. ЖУРАВЕЛЬ

(Киевский научно-исследовательский экспертно-криминалистический центр МВД Украины)

Показаны новые системы инструментария для проведения технической экспертизы материалов и средств видеозвукозаписи. Одна часть систем прошла стадию внедрения в практику экспертных подразделений Украины, другая – в стадии разработки и внедрения. Системы обладают высокими характеристиками, превышающими мировые аналоги.

Ключевые слова: аппаратура цифровой видео и звукозаписи, аналоговая запись, цифровая запись, фонограмма, экспертиза.

Введение. Основными задачами технической экспертизы материалов и средств видеозвукозаписи (фоноскопической экспертизы) являются проверка аутентичности сигналограмм, представленных на экспертизу, и идентификация дикторов по физическим параметрам их голосов.

Состоявшийся окончательный переход к цифровым методам записи аудио- и видеоинформации как в быту, так и при проведении оперативно-розыскных и следственных действий, потребовали создания нового инструментария (экспертных методик, специализированных программных средств и аппаратно-программных комплексов), предназначенного для проведения фоноскопических экспертиз, отвечающих уровню развития техники записи и обработки информации.

Сложность создания такого инструментария заключается в особенностях цифровых методов записи. Она состоит в том, что динамический диапазон и уровень нелинейных искажений этих методов теоретически зависит только от правильности выбора частоты дискретизации и разрядности преобразования аналоговой информации в цифровую форму. Разумеется, что и цифровая аппаратура аудио- и видеозаписи имеет свои паразитные параметры, фиксируемые в сигналограммах при записи. Именно эти параметры являются теми идентификационными признаками, по которым проводится современная экспертиза. Однако сложность создания экспертного инструментария, основанного на паразитных параметрах цифровой аппаратуры записи, состоит в их крайне малых уровнях, что требует применения новых сверхчувствительных методов анализа.

Цель статьи – показать широкому кругу специалистов новые пути построения целого комплекса отечественных инструментальных средств, предназначенных для проведения фоноскопической экспертизы, внедряемого в экспертных учреждениях МВД Украины.

Основная часть. В общем случае комплекс должен объединять ряд методик и средств экспертизы для:

- идентификации диктора по физическим параметрам голоса;
- проверки аутентичности сигналограмм, т.е. проверки их оригинальности и подлинности.

С криминалистической точки зрения это должен быть комплекс методик и средств идентификационных и диагностических исследований речи диктора и аппаратуры цифровой записи.

В результате проведенных теоретических исследований и практических разработок в настоящее время создана система «АВАТАР», предназначенная для ускоренного поиска фигурантов в голосовой базе данных большого объема. Она позволяет ранжировать дикторов по голосовым сообщениям, зафиксированным в такой базе, что, в свою очередь, ускоряет розыск лиц, делающих ложные сообщения, например, о минировании важных общественных учреждений [1, 2]. Система построена с использованием ряда новых физических и математических подходов, например, применения элементов фонемической машины. Это позволило сократить время сообщения, пригодного для эффективного ранжирования дикторов. Ее испытания показали высокие качественные характеристики системы: минимальная достаточная длительность записи голоса диктора, необходимая для ранжирования, составляет 5 с при точке пересечения кривых ошибок I и II рода порядка 8,5 % (рисунок 1).

Кроме того, данные методы положены в основу созданной и испытываемой в настоящее время системы криминалистической идентификации диктора по физическим параметрам его голоса. Отметим, что аналогичные системы, разработанные в других странах, обеспечивают идентификацию личности по

голосу при длительности записи, как правило, более 1 мин с точкой пересечения кривых ошибок I и II рода на уровне 6 % [3]. В разработанной нами системе увеличение длительности записи голоса идентифицируемого диктора в диапазоне от 13 до 30 с снижает положение точки пересечения кривых ошибок I и II рода до уровня 6 %. Данные по кривым ошибок I и II рода получены при испытаниях на голосовых базах, данных для двух языков (русский и украинский) объемом в 500 фонограмм.

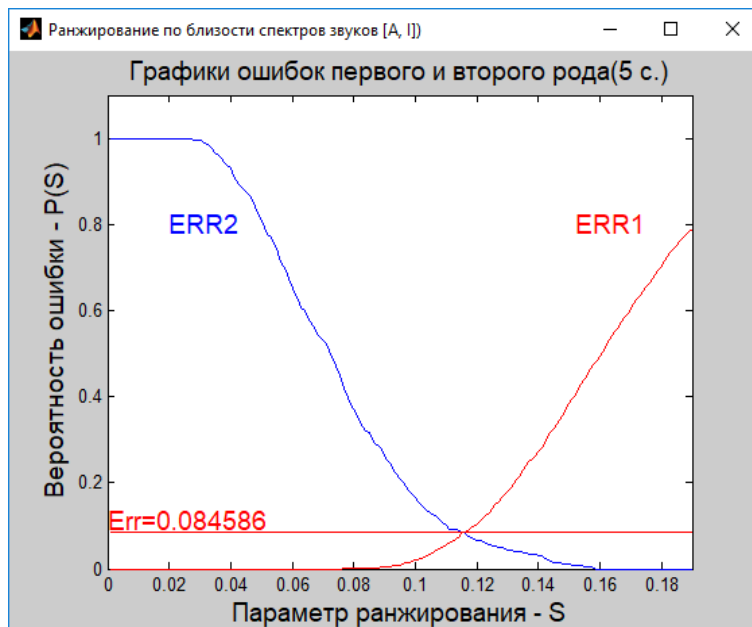


Рисунок 1. – Кривые ошибок I и II рода при ранжировании сообщений с длительностью речевого сообщения диктора от 2 до 5 с

Кроме того, разработана система идентификации аппаратуры аналоговой и цифровой звукозаписи (ААЗЗ и АЦЗЗ соответственно) «Фрактал», позволяющая проводить криминалистическую идентификацию такой аппаратуры и устанавливать оригинальность аналоговых и цифровых фонограмм (АФ и ЦФ соответственно), а также выявлять в них следы цифровой обработки [4].

Система построена на сравнении самоподобных структур, выделяемых из пауз в речевой информации образцовых (экспериментальных) фонограмм, с самоподобными структурами, выделяемыми из исследуемой (спорной) фонограммы [5]. Используется различие в плотностях вероятности меры близости самоподобных структур, зафиксированных на разной аппаратуре записи. Примеры таких распределений показаны на рисунках 2 и 3.

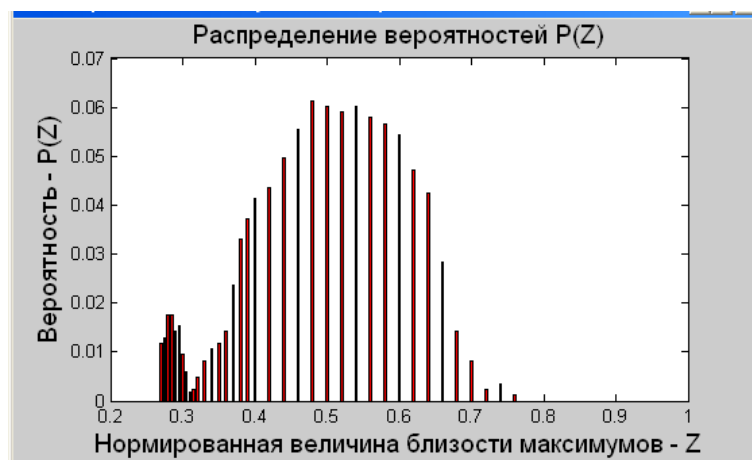


Рисунок 2. – Плотность вероятности меры близости Z для записи двух фонограмм на одной АЦЗЗ

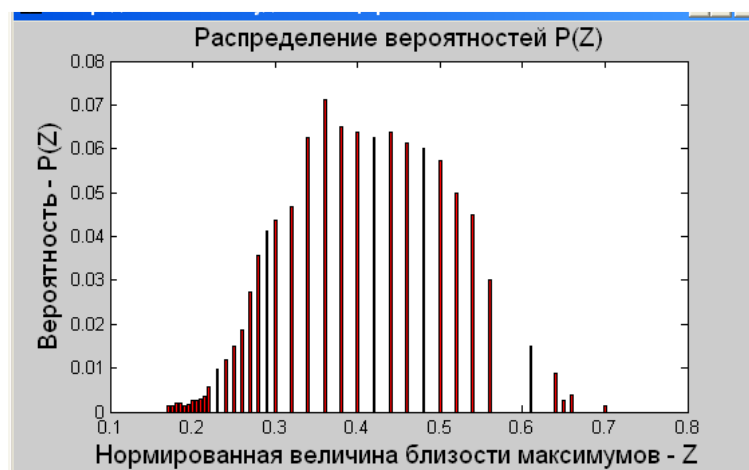


Рисунок 3. – Плотность вероятности меры близости Z для записи двух фонограмм на разной АЦЗЗ

Многочисленные экспериментальные исследования статистических характеристик пауз различных ЦФ при записи в различных условиях звуковой среды показали устойчивую особенность плотности вероятности $P(Z)$ величины меры близости Z [13].

Как видно из сравнения рисунков 2 и 3, при записи фонограмм на разной аппаратуре в плотности вероятности меры близости отсутствует характерный участок, который прослеживается при записи сравниваемых фонограмм на одной аппаратуре.

Многочисленные экспериментальные исследования статистических характеристик пауз различных ЦФ при записи в различных условиях звуковой среды показали устойчивую особенность плотности вероятности $P(Z)$ величины меры близости Z [6].

Полученные закономерности обеспечили построение автоматизированной системы «Фрактал». При этом были использованы новые решения как при построении аппаратно-программного комплекса, так и при создании методики проведения экспертизы. В частности, при разработке комплекса были созданы и применены новые методы сегментации фонограмм и выделения пауз и оригинальные методы выделения и статистической обработки самоподобных структур [7, 8]. Был предложен метод автоматического расчета величины фрактальных масштабов [9]. При отработке методики и программы была установлена, во-первых, зависимость результата экспертных исследований от величины фрактального масштаба самоподобных структур, что обусловлено наличием отдельной области этих масштабов в распределении меры близости таких структур двух ЦФ, при которых проявляются индивидуальные особенности АЦЗЗ (см. рисунки 2 и 3). Во-вторых, выявлена необходимость при проведении проверки ЦФ установления области фрактальных масштабов, соответствующей аномальной зоне в плотности вероятности меры близости для каждой конкретной АЦЗЗ, на которой были записаны исследуемые ЦФ. И, в-третьих, выявления такого значения фрактального масштаба в установленной области, при котором ошибка I рода минимальна. В частности, было отмечено, что при сравнении двух ЦФ всегда будут существовать две области фрактальных масштабов: область близости характеристик (совпадения) двух ЦФ и область несовпадения (различия) характеристик двух ЦФ. Между ними существует четкая граница. Это поясняется тем, что как в случае близости характеристик ЦФ, так и в случае их несовпадения обязательно существует область фрактальных масштабов, где проявляются индивидуальность характеристик аппаратуры, на которой они записаны [5, 7, 8, 10]. И именно в этой области лежит правильное решение. Таким образом, эксперту при принятии решения следует выбрать правильную область: или близости, или несовпадения фрактальных характеристик. Корректность этого выбора обеспечивает разработанная методика, определяющая ряд критериальных точек на образцовых (экспериментальных) фонограммах и доверительный интервал, которым накрывается или не накрывается критериальная точка исследуемой (спорной) фонограммы.

При этом доверительный интервал рассчитывается по формуле

$$I_{\beta} = [(a_{\min} - 0,2a_{\min}), (a_{\max} + 0,2a_{\max})], \quad (1)$$

где I_{β} – доверительный интервал;

β – вероятность того, что покрытие доверительным интервалом критериальной точки, полученной при сравнении образцовой и спорной ЦФ, отвечает гипотезе близости их фрактальных характеристик;

$a_{\min}$ – минимальная величина значения критериальной точки;

$a_{\max}$ – максимальная величина значения критериальной точки.

Этим полностью исключается субъективность принятия решения экспертом [11].

Результаты экспертных исследований представляются в виде иллюстраций отдельных этапов их проведения, как это показано на рисунках 4 и 5.

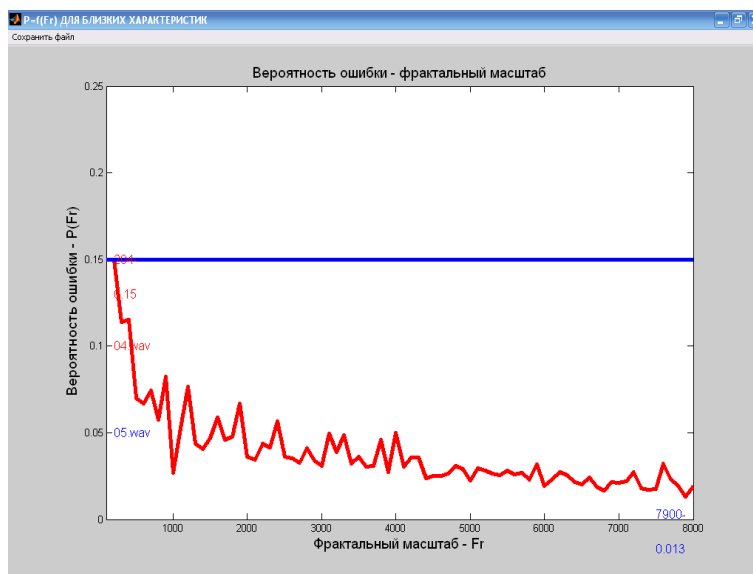


Рисунок 4. – Результат расчета характеристик фрактальных масштабов для области близких характеристик фонограмм 04 и 05, записанных на одной АЦЗЗ

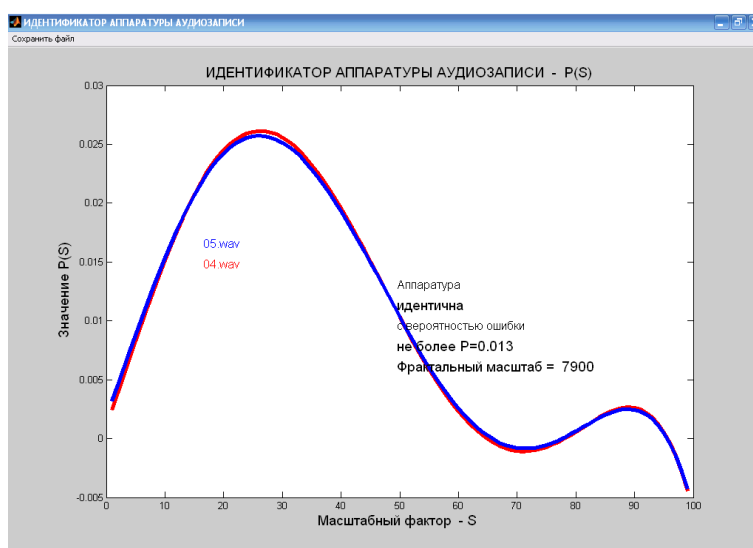


Рисунок 5. – Плотности вероятности меры близости самоподобных структур для фонограмм № 2 и № 6, записанных на одной АЦЗЗ

К сожалению, ограниченность объема излагаемого здесь материала не позволяет нам более подробно расписать все особенности разработанной системы. Экспериментально при сравнении 363 пар фонограмм было определено, что вероятность β принятия адекватного решения при принятой величине доверительного интервала в 20% составляет 0,994 [11]. При этом математическое ожидание величины ошибки I рода для двух сравниваемых фонограмм равно 0,0249 при среднеквадратическом отклонении, составляющим 0,0225 [11].

Отметим, что в настоящее время успешно разрабатывается еще ряд систем, предназначенных для установления точек монтажа в фонограммах и проверки аутентичности видеозаписей и цифровых фотографий.

Выводы. В настоящее время в Украине разрабатываются и внедряются в процесс проведения технической экспертизы материалов и средств видеозвукозаписи ряд новых систем, позволяющих проводить такую экспертизу на самом современном уровне. Это позволит обеспечить экспертные подразделения отечественным инструментарием, отвечающим самым высоким требованиям надежности и достоверности получаемых экспертных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Система автоматизированного поиска голосов / В.И. Соловьев [и др.] // Информатика та математичні методи в моделюванні. – 2015. – Т. 5, № 4. – С. 302–307.
2. Рыбальский О.В. Методика верифікації особи за фізичними параметрами мовленнєвих сигналів повідомлень, що містяться у голосовій базі даних, з використанням системи автоматичного пошуку «АВАТАР» / О.В. Рыбальский, В.В. Журавель, В.І. Соловйов. – Київ : ЛОНМР ДНДЕКЦ МВС України. – 2018. – 44 с.
3. Speaker Recognition Evaluation 2016 // NIST. – Режим доступа: <https://www.nist.gov/itl/iad/mig/speaker-recognition-evaluation-2016>.
4. Методика ідентифікаційних і діагностичних досліджень аналогової та цифрової апаратури звукозапису та аналогових і цифрових фонограм при проведенні технічних досліджень звуко- та відеозаписів на основі використання програмного комплексу «Фрактал» : а. с. № 75496 / О.В. Рыбальский, В.І. Соловйов, В.В. Журавель. – Від. 25.10. 2017.
5. Рыбальский, О.В. Методология построения системы экспертной проверки цифровых фонограмм и идентификации аппаратуры цифровой звукозаписи с применением программы «Фрактал» / О. В. Рыбальский, В. И. Соловьев В. В. Журавель // Информатика та математичні методи в моделюванні. – 2016. – Т. 6, № 2. – С. 105–115.
6. Соловьев, В.И. Идентификация аппаратуры аудиозаписи по статистическим характеристикам аудиофайлов / В.И. Соловьев // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2013. – Т. 14, № 1. – С. 59–70.
7. Обобщенная модель выделения фрактальных структур из цифровых сигналов методом максимумов вейвлет-преобразования / О.В. Рыбальский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. – Серия С. Фундаментальные науки. – 2016. – № 4. – С. 13–16.
8. Журавель, В.В. Принципы, использованные при проектировании программного обеспечения проверки целостности информации в цифровых фонограммах / В. В. Журавель // Сучасна спеціальна техніка. – 2016. – № 2, (45). – С. 39–43.
9. Automatic calculation of the coefficients of fractal scale in the program “Fractal” / O.V. Rybalsky [et al.] // Сучасна спеціальна техніка. – 2014. – № 4 (39). – С. 5–11.
10. Статистическая обработка самоподобных структур, выделенных из шумов фонограмм, при определении идентичности аппаратуры цифровой звукозаписи / О.В. Рыбальский [и др.] // Электротехнические и компьютерные системы. – 2016. – № 22 (98). – С. 413–417.
11. Рыбальский О.В. Визначення ефективності інструментарію експертизи матеріалів і засобів цифрового звукозапису «Фрактал» / О.В. Рыбальский, В.В. Журавель, В.І. Соловйов // Актуальні питання експертно-криміналістичного забезпечення правоохоронної діяльності : зб. матер. наук.-практ. конф., Київ, 25 листопада 2016 р. / Національної академії внутрішніх справ. – Київ, 2016. – С. 251–253.

Поступила 20.03.2018

THE SYSTEMS OF TOOL OF EXAMINATION OF AUDIO AND VIDEOTAPE RECORDING ARE IN UKRAINE

O. RYBALSKY, V. SOLOVYOV, V. ZHURAVEL

The new systems of tool are shown for realization of technical examination of materials and facilities of the audio and video recording. Part of the systems was passed the stage of introduction in practice of expert subdivisions of Ukraine. Part of the systems are in the stage of development and introduction. The systems possess high descriptions exceeding world analogues.

Keywords: *apparatus digital video and audio recording, analog record, digital record, phonogram, examination.*

УДК 621.396:621.391.037

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕРЫ СХОЖЕСТИ ИДЕНТИФИКАЦИОННЫХ ОБРАЗОВ ЗАКЛАДНЫХ УСТРОЙСТВ

В.М. ЧЕРТКОВ, д-р техн. наук, проф. В.К. ЖЕЛЕЗНЯК
(Полоцкий государственный университет)

Рассмотрены основные алгоритмы и методы определения меры сходства изображений. Даны общая характеристика и требование к мерам, вычисляющим сходство. Приведены функции схожести корреляционного типа. Описан процесс формирования идентификационного изображения. Представлена блок-схема модели исследования меры сходства степенных полиномов. Приведены результаты вычислительного эксперимента метрических функций с целью определения наилучшей метрики под решение поставленной задачи, а также определения по вычислительным характеристикам и точности меры сходства полиномов третьего порядка.

Ключевые слова: нелинейный радиолокатор, идентификационный образ, закладное устройство.

Введение. Мера сходства играет ключевую роль при формировании классификации изучаемого множества объектов и при распознавании принадлежности объектов к тому или иному классу. Специфика этих задач состоит в том, что мера сходства здесь является величиной относительной, она зависит не только от сходства объекта с определенным классом, но и от его сходства с другими классами. Актуальность темы обусловлена решением проблемы определения меры сходства идентификационных образов (сложных множеств) закладных устройств, полученных нелинейным радиолокатором при обследовании помещений в условиях неполной исходной информации и при воздействии шумовых факторов.

Разработка новых алгоритмов нахождения меры схожести идентификационных образов для современной науки и техники является актуальной задачей. Она играет важную роль в научных исследованиях по защите информации и информационной безопасности, обработке космических изображений, других отраслях деятельности человека [1] и направлена в первую очередь на исследование метрических характеристик и сравнение функций между собой в условиях неполной исходной информации и внешних негативных воздействий.

Оценка сходства идентификационных образов подобна оценке сходства изображений. Выбранная функция схожести должна удовлетворять некоторым требованиям, и ее свойства должны быть известны. В качестве функции схожести может использоваться мера расстояния либо функция схожести. Если два изображения абсолютно идентичны, то мера расстояния M между ними равна 0, а нормализованная функция схожести R равна 1, следовательно, $M = 1 - R$ или $R = 1 - M$ [2].

Совокупность требований, которым удовлетворяет некоторая мера сходства M , определяет более строгую либо слабую (на качественном уровне) оценку сходства. Мера является строгой, если она удовлетворяет большинству предъявляемых требований, и слабой – если она не удовлетворяет нескольким требованиям [3].

Формирование идентификационного образа закладного устройства. При обследовании помещений нелинейным радиолокатором формируют идентификационный образ предполагаемого закладного устройства, согласно методике, представленной в [4].

Формирование идентификационного образа сводится к следующему алгоритму действий:

- обнаружение нелинейного объекта по наличию отклика на второй и третьей гармониках переизлученного зондирующего сигнала;
- определение необходимого уровня излучения для более качественного приема и регистрации данных. На данном этапе происходит регулирование мощности излучения и соответствующего ему оптимального расстояния до объекта;
- получение вида нелинейности вольт-амперной характеристики (ВАХ) на основе разработанного алгоритма, который по измеренным значениям уровней комбинационных гармоник определяет коэффициенты аппроксимирующего полинома [5];
- с помощью датчика гироскопа происходит смена угла облучения по азимуту на 1–5 град (дискретность может варьироваться) и производится повторное получение ВАХ;
- по достижении 360 град, т.е. полного круга азимута, происходит смена угла места на 1–5 град и повторяется весь цикл измерений по азимуту.

В результате полученные данные можно представить в виде трех графиков для каждого коэффициента полинома, аппроксимирующего ВАХ нелинейного объекта, которые и будут составлять идентификационный образ предполагаемого закладного устройства. По осям X и Y графика будут отложены соответственно градусы угла азимута и угла места, а по оси Z – значение квадратичного либо кубического, либо линейного коэффициента в размах для каждого из трех графиков.

Основная часть. Для разработки алгоритма определения степени подобия идентификационных образов на основе оценки меры сходства степенных полиномов проведем анализ функций схожести корреляционного типа. Для сравнения двух идентификационных образов $O = \{o_{ij}\}$ и $B^* = \{b_{ij}^*\}$ выберем следующие типы функций схожести [6, 7].

1. Нормированная усредненная функция корреляции:

$$R^{COR} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (o_{ij} - \bar{o})(b_{ij}^* - \bar{b}^*)}{\sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (o_{ij} - \bar{o})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (b_{ij}^* - \bar{b}^*)^2}}, \quad (1.7)$$

где $\bar{o}$ и $\bar{b}^*$ – средние значения изображений o и b^* соответственно.

2. Функция на основе суммы квадратов разностей

$$R^{SSD} = 1 - \frac{1}{LN^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (a_{ij} - b_{ij}^*)^2, \quad (1.8)$$

где L – диапазон допустимых значений яркости.

3. Функция на основе метрики Хаусдорфа

$$R^H = 1 - \frac{1}{L} \max_{ij} |a_{ij} - b_{ij}^*|, \quad (1.9)$$

где $i \in 0 \dots N-1, j \in 0 \dots N-1$ – диапазон допустимых значений яркости.

4. Функция на основе городской метрики

$$R^C = 1 - \frac{1}{LN^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} |a_{ij} - b_{ij}^*|. \quad (1.10)$$

5. Функция на основе среднеквадратичной погрешности

$$R^e = 1 - \frac{1}{LN^2} \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (a_{ij} - b_{ij}^*)^2}. \quad (1.11)$$

Модель исследования меры сходства идентификационных образов. В ходе разработки алгоритма нахождения меры сходства идентификационных образов была разработана имитационная модель, представленная на рисунке 1.

Модель состоит из блоков, которые описывают следующие функции:

- 1) эталонный полином – генерируется эталонный полином;
- 2) множество полиномов и их коэффициентов – формируется множество значений полиномов и их коэффициентов при воздействии на него нормального закона распределения величин;
- 3) расчет метрик по коэффициентам полиномов – подставляются основные расчетные метрические функции, такие как метрика Хаусдорфа, метрика среднеквадратичного отклонения, нормированная усредненная функция корреляции, метрика городских кварталов и производится расчет по коэффициентам полиномов;

- 4) расчет метрик по данным полиномов – рассчитываются метрики по данным значений полиномов, полученных в диапазоне от 0 до 1;
- 5) поиск минимального значения среди рассчитанных значений метрик – производится поиск минимального значения метрики из множества полученных значений;
- 6) анализ результатов – осуществляется расчет значений для каждой метрики, выходные данные блока выводятся в виде графиков.

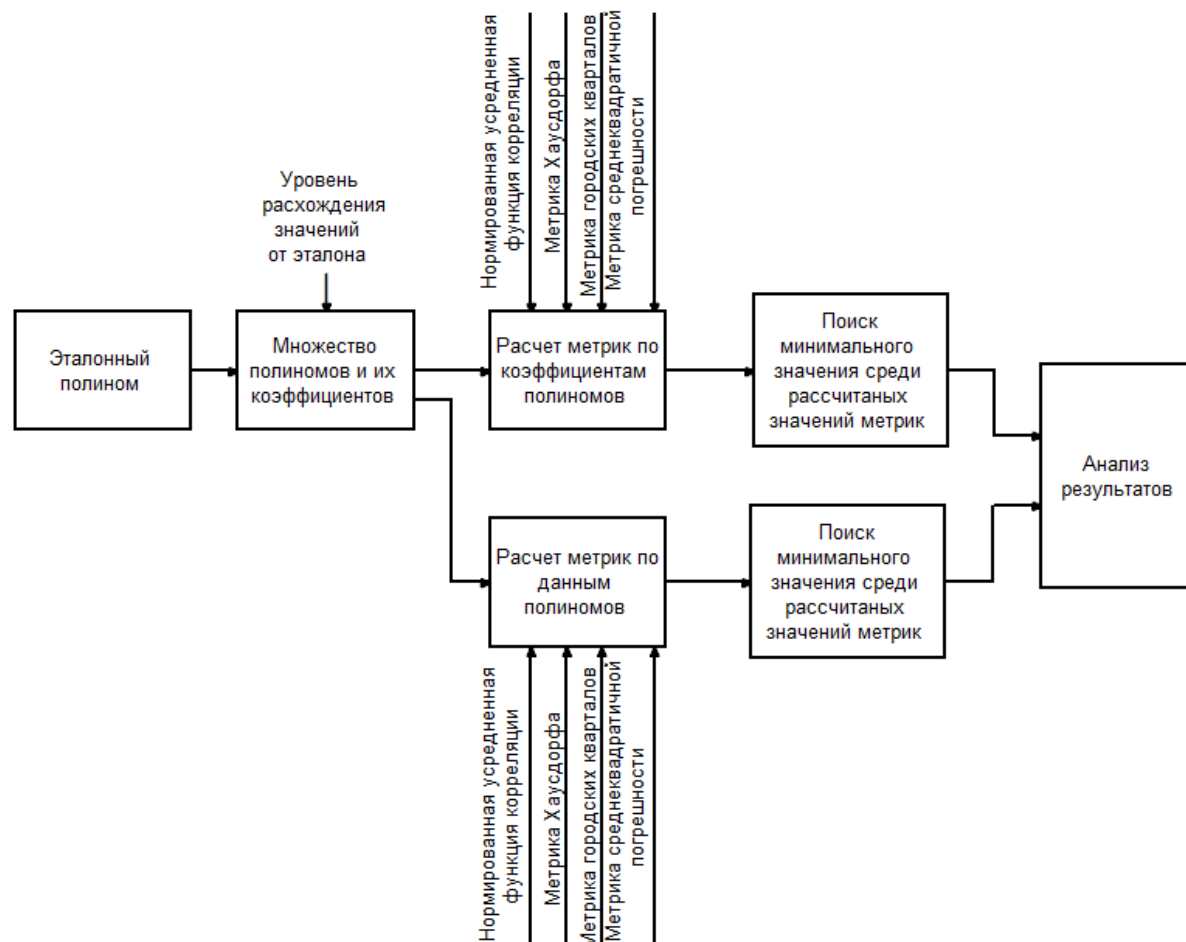


Рисунок 1. – Структура имитационной модели исследования меры сходства степенных полиномов

Результаты вычислительного эксперимента. Проведение вычислительного эксперимента сравнения коэффициента корреляции и метрических функций между собой обосновано нахождением наилучшего результата в определении меры схожести по коэффициентам полинома либо по его данным, определением наилучшей функции для алгоритма установления меры схожести идентификационных образов закладных устройств [8].

При проведении экспериментов по оценке меры схожести полиномов задавался эталонный полином со своими коэффициентами и генерировались полиномы с измененными коэффициентами относительно эталона по нормальному закону распределения.

Результаты моделирования функции схожести полиномов на основе метрики Хаусдорфа приведены на рисунке 2. Эталонный полином выделен красным цветом, значения его коэффициентов задавались перед началом проведения эксперимента. На основе функции по вычислению метрики Хаусдорфа из 100 сгенерированных полиномов найден самый близкий полином, согласно рассчитанной метрике, отмеченный синим цветом. Согласно любой метрической функции, чем ближе результат функции к 0, тем более схожи сравниваемые полиномы.

Следует отметить, что метрика Хаусдорфа рассчитывается только по значениям полиномов в точках от минуса 1 до 1 с шагом дискретности 0,01.

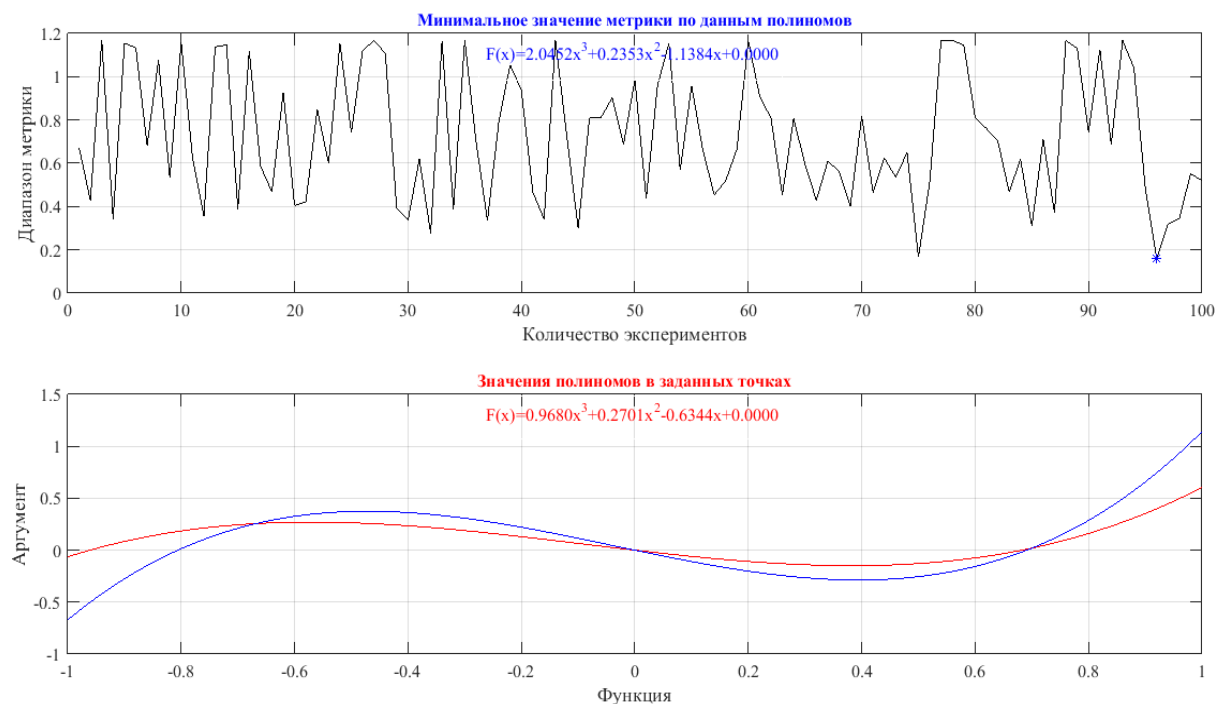


Рисунок 2. – Результаты моделирования функции Хаусдорфа

В ходе экспериментов было установлено, что с помощью функции Хаусдорфа определен самый схожий полином в 96 экспериментах из 100 проведенных.

В результате моделирования функции на базе среднеквадратичной погрешности установлен самый схожий полином в 84 экспериментах из 100 заданных.

При моделировании функции городской метрики отмечено, что самый схожий полином встречается на 78 экспериментах из 100 заданных.

Моделирование функции корреляции позволило установить, что самый схожий полином был найден на 61 эксперименте из 100 проведенных.

Особенность корреляции заключается в том, что ее коэффициент принимает значения от минус 1 до 1. При этом значение минус 1 говорит об отсутствии корреляции между величинами, 0 – о нулевой корреляции и 1 – о полной корреляции величин. Чем ближе значение коэффициента корреляции к 1, тем сильнее связь между двумя случайными величинами.

Вычислительный эксперимент и анализ полученных результатов показывают, что метрики среднеквадратичной погрешности и городской метрики по вычислительным результатам схожи и определяют одни и те же полиномы близкие к задаваемому эталону. Наилучшие показатели по поиску меры схожести по данным полиномов продемонстрировали метрики на основе среднеквадратичной погрешности и метрика на основе функции Хаусдорфа. Функция корреляции в эксперименте по поиску меры схожести по данным и коэффициентам не соответствует требованиям поставленной задачи ввиду большой погрешности определения сходства.

Установлено, что в качестве наиболее перспективного можно отметить метод нахождения меры схожести по коэффициентам полинома, так как по сравнению с методом расчета по данными он обладает на порядок более низкими вычислительными затратами. Для определения меры схожести по значениям полинома лучшие результаты показывает метрика Хаусдорфа, но эта функция ресурсоемкая для вычислений, что несомненно окажет негативное влияние при проектировании систем в реальном времени.

Алгоритм определения степени подобия. Для определения степени подобия идентификационных образов в среде MATLAB был разработан алгоритм, в котором выполняются последовательно следующие операции:

Операция 1. Генерация эталона идентификационного образа.

Генерируется трехмерная матрица размером $72 \times 72 \times 3$ пикселя со случайными значениями, которые распределены по нормальному закону.

Операция 2. Наложение белого шума.

Происходит наложение белого шума на эталонный образ с возможностью отдельного регулирования его уровня в децибелах для трех каналов матрицы идентификационного образа.

Операция 3. Генерирование тестового идентификационного образа.

Формируется тестовый идентификационный образ, который представляет фрагмент идентификационного эталонного портрета.

Операция 4. Наложения шумов на идентификационный портрет.

На сгенерированный идентификационный образ происходит наложение шумов.

Операция 5. Сравнение идентификационного образа.

Происходит перебор значений коэффициентов эталона идентификационного образа и сравнение с наложенным на него тестовым идентификационным образом.

Операция 6. Расчет метрик.

Рассчитываются метрики, на основании которых выполняется проверка схожести рассматриваемых коэффициентов, записанных в идентификационном образе.

Операция 8. Проверка превышения порога.

Проверка проводится посредством сравнения полученных значений метрик с установленным пороговым значением для каждой метрики в отдельности. При превышении установленного уровня для каждой метрики записывается единица в результирующую матрицу, иначе – ноль.

Операция 9. Расчет числового значения степени схожести идентификационных образов.

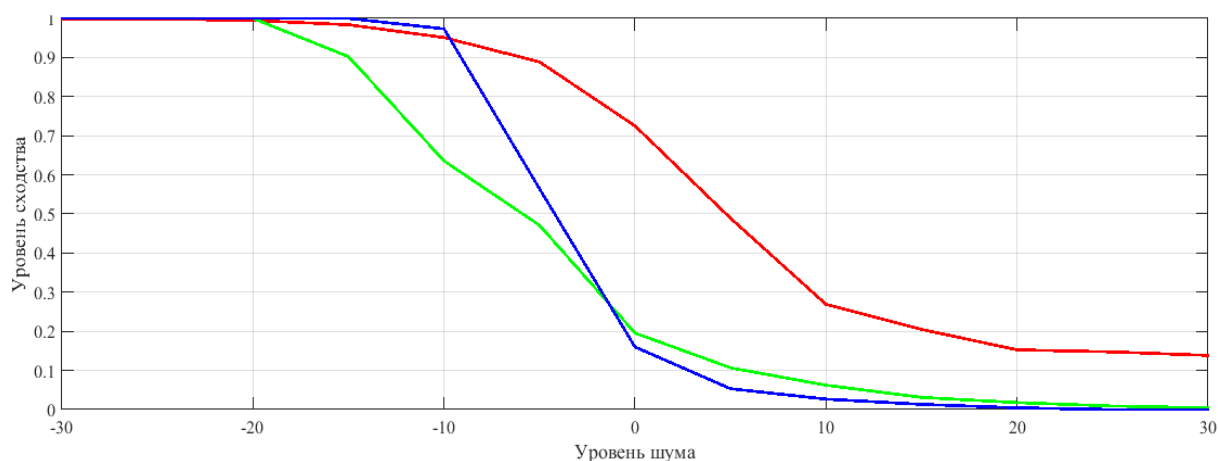
Расчет окончательного значения числовой меры схожести по каждой метрике выполняется путем подсчета единиц в результирующей матрице.

Операция 10. Вывод значений.

Процедура выводит данные эталона и идентификационного образа, а также графики нахождения меры схожести по каждой функции.

Влияние шума на вычисление меры сходства. Был проведен вычислительный эксперимент в ходе которого проверялась работоспособность алгоритма по определению численного значения схожести двух идентификационных образов. Вычислительный эксперимент выполнялся с тремя рассмотренными ранее метрическими функциями. В таблице 1 представлены зависимости трех метрик от шума в пределах от минус 30 дБ до плюс 30 дБ.

По результатам таблицы построены зависимости уровня сходства в зависимости от уровня шума, представленные на рисунке 3.



Синяя линия на графике – функция среднеквадратичной погрешности

Красная линия на графике – корреляционная функция

Зеленая линия на графике – функция Хаусдорфа

Рисунок 3. – Зависимость уровня сходства метрик от уровня шума

Условия неполной исходной информации. Одним из этапов проверки работоспособности алгоритма нахождения меры сходства идентификационных образов является проверка его в условиях неполной исходной информации. Под условиями неполной исходной информации подразумевается наложение на идентификационный эталонный образ нескольких одинаковых фрагментов, являющихся частью этого эталона.

Таблица 1. – Зависимость метрических функций от уровня шума

Уровень шума, дБ	Разность уровня схожести с шумом (метрика на основе среднеквадратичного отклонения)	Уровень схожести (метрика на основе среднеквадратичного отклонения)	Разность уровня схожести с шумом (метрика Хаусдорфа)	Уровень схожести (метрика Хаусдорфа)	Разность уровня схожести с шумом (метрика на основе корреляция)	Уровень схожести
-30	0,6667	1	0,6667	1	0,6663	0,9994
-25	0,6667	1	0,6667	1	0,6657	0,9985
-20	0,6667	1	0,6667	1	0,6632	0,9948
-15	0,6667	1	0,6015	0,9022	0,6559	0,9838
-10	0,6489	0,9733	0,4237	0,6356	0,6341	0,9511
-5	0,3763	0,5644	0,3141	0,4711	0,5926	0,8889
0	0,1067	0,16	0,1304	0,1956	0,4834	0,7251
5	0,0355	0,0533	0,0667	0,1067	0,3261	0,4891
10	0,0178	0,0267	0,0415	0,0622	0,1793	0,2689
15	0,0089	0,0133	0,0207	0,0311	0,1365	0,2049
20	0,0029	0,0044	0,0119	0,0178	0,1018	0,1527
25	0	0	0,0059	0,0089	0,09	0,1474
30	0	0	0,0029	0,0044	0,0893	0,1384

В первом случае нахождение меры схожести общий критерий сходства заключался в поиске наибольшего из пиков на результирующих графиках метрических функций, во втором случае – в расчете среднего значения всех пиков.

Для проведения исследования программой алгоритма генерируется идентификационный эталонный портрет 72×72 , который представлен на рисунке 4, и идентификационный портрет размером 18×18 на рисунке 5.

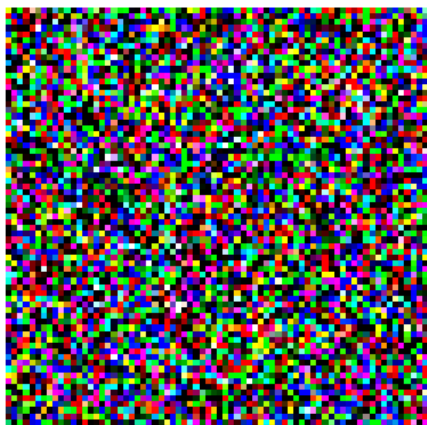


Рисунок 4. – Сгенерированный идентификационный эталонный портрет 72×72

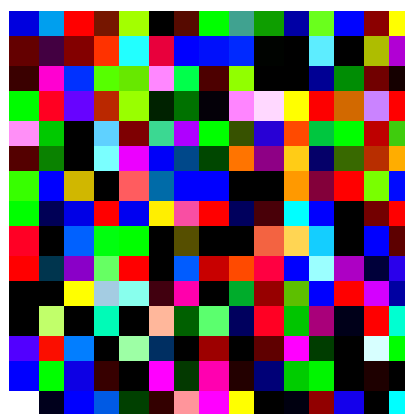


Рисунок 5. – Сгенерированный идентификационный портрет 18×18

Вычислительный эксперимент проводился в условиях наложения (вычисления среднего значения для каждого пикселя) на эталонный идентификационный образ в разных местах расположения трех тестовых идентификационных образов, обработанных шумами с задаваемым уровнем.

Первый этап исследования работы алгоритма при наложении на идентификационный эталон трех образов при уровне зашумления минус 30 дБ соответственно для каждого расположения. График результатов работы алгоритма поиска и определения значения сходства на основе корреляционной функции представлен на рисунке 6.

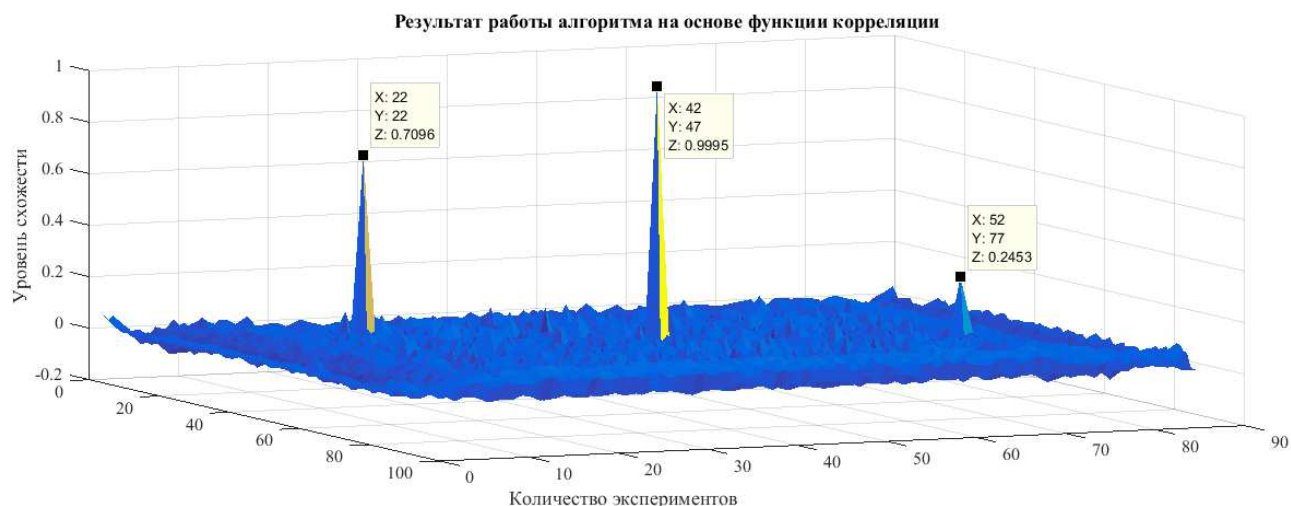


Рисунок 6. – График работы алгоритма в условиях не полной исходной информации

В результате проведенных исследований выявлено, что при зашумлении идентификационного образа шумами на уровне минус 30 дБ для каждого располагаемого фрагмента, уровень схожести его на эталоне составляет 0,9995, исходя из максимального значения пика функции, и 0,6514 – если считать коэффициент схожести равным среднему значению по трем пикам.

В таблице 2 представлены результаты эксперимента по вычислению значения меры схожести идентификационных портретов в условиях неполной исходной информации для различных метрик в зависимости от задаваемого уровня шума.

Таблица 2. – Результаты вычислительного эксперимента

Уровень шума, дБ	Функция корреляции		Метрика Хаусдорфа		Метрика среднеквадратичной погрешности	
	максимальное значение пика	среднее значение по трем пикам	максимальное значение пика	среднее значение по трем пикам	максимальное значение пика	среднее значение по трем пикам
–30	0,9995	0,6514	0,2623	0,2499	0,6281	0,6378
–15	0,9854	0,6156	0,2901	0,2479	0,6204	0,6039
–5	0,8707	0,5544	0,2562	0,2212	0,5741	0,5329

Закключение. В ходе анализа результатов установлено, что метрические функции Хаусдорфа и среднеквадратичной погрешности наиболее перспективны для использования в реализованном алгоритме вычисления меры схожести идентификационных образов. Составлена таблица зависимости метрических функций от уровня шума, на основании ее построены две зависимости рассчитанных числовых значений степеней подобия от воздействия шума на идентификационные образы. Результаты исследования работы алгоритма в условиях неполной исходной информации и определение степеней подобия неполного идентификационного образа позволили установить пороговое значение для метрики Хаусдорфа и метрики среднеквадратичной погрешности для принятия решения о схожести двух полиномов третьей степени. Кроме того, следует отметить, что в условиях неполной исходной информации хорошие результаты получены при применении алгоритмов на основе функции среднеквадратичной погрешности и на основе метрики Хаусдорфа, хотя последний при работе требует больших вычислительных затрат, что при реализации на аппаратном уровне может привести к уменьшению быстродействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борискевич А.А, Защита контента изображений на основе частотного полухрупкого маркирования // А.А. Борискевич, О.Л. Киндеева // Специальная техника. – 2012. – № 1. – С. 7–16.
2. Богуш, Р.П. Цифровая обработка сигналов и изображений : учеб.-метод. комплекс для студентов специальности 1-40 02 01 «Вычислительные машины, системы и сети» / Р.П. Богуш, В.М. Чертов. – Новополоцк : Полоцкий государственный университет, 2009. – 320 с.
3. Абламейко, С.В. Корреляционная обработка сигналов и изображений / С.В. Абламейко, С.В. Мальцев, Р.П. Богуш // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. — 2005. — № 4. — С. 45–54.
4. Чертов, В.М. Способ получения идентификационного портрета радиоэлектронных средств перехвата информации методами нелинейной радиолокации / В.М. Чертов, В.К. Железняк // Теоретические и прикладные аспекты информационной безопасности : тез. докл. Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 18 мая 2017 г. / редкол.: А.В. Яскевич (отв. ред.) [и др.] / Акад. М-ва внутр. дел. – Минск, 2018. – С. 131–134.
5. Чертов, В.М. Определение нелинейности вольтамперной характеристики объекта, исследуемого нелинейным радиолокатором / В.М. Чертов, В.К. Железняк // Доклады БГУИР. – 2017. – № 8. – С. 60–66.
6. Мальцев, С.В. Эффективные приемы при корреляционной обработке сигналов и изображений : моногр. / С.В. Мальцев, Р.П. Богуш. – Saarbruecken : LAP Lambert Academic Publishing GmbH&Co, 2014. – 180 с.
7. Zaleski, A. Methods and measures similarities algorithm for finding a complex array / A. Zaleski, V. Chertkov // European and national dimension in research. Technology = Европейский и национальный контексты в научных исследованиях : materials of IX Junior Researchers' Conference, Novopolotsk, April 26–27, 2017 / ed.: D. Lazouski [et al.] / Polotsk State University. – Novopolotsk, 2017. – С. 327–330.
8. В.Ю. Цветков. Контурное позиционирование полутоновых изображений на основе модифицированного фильтра Робертса / В.Ю. Цветков, О.Дж. Аль-Фурайджи, // Доклады Белорус. гос. ун-та информатики и радиоэлектроники, 2009. – № 5 (43). – С. 30–37.

Поступила 20.03.2018

ALGORITHM FOR DETERMINING THE DEGREE OF SIMILARITY OF IDENTIFICATION IMAGES FROM SECRET INTELLIGENCE DEVICE

V. CHERTKOV, V. ZHELEZNIAK

The algorithms and methods for determining the similarity measure of images are considered. A general characteristic and a requirement for measures calculating similarities are given. The functions of similarity of correlation type are given. The formation of the identification image is described. A block diagram is presented for investigating the measure of similarity of power polynomials. The results of a computational experiment for determining the best metric for solving the problem are presented. The results of calculating the accuracy of determining the measure of similarity of third-order polynomials are presented.

Keywords: nonlinear radar, identification shape, bug.

УДК 004.6

ОБОБЩЕННЫЕ КОДЫ БОУЗА – ЧОУДХУРИ – ХОКВИНГЕМА И ИХ ПАРАМЕТРЫ

А.В. КУШНЕРОВ

(Белорусский государственный университет, Минск);

В.А. ЛИПНИЦКИЙ

(Военная академия Республики Беларусь, Минск);

М.Н. КОРОЛЁВА

(Белорусский национальный технический университет, Минск)

Проведено исследование помехоустойчивых обобщенных кодов Боуза – Чоудхури – Хоквингема. Как показало их изучение, представители данного семейства кодов имеют ряд замечательных свойств. Отдельное место отведено рассмотрению корректирующих возможностей кодов упомянутого класса и сравнению с таковыми у классических БЧХ-кодов. На представленных конкретных примерах рассмотрены некоторые параметры и особенности отдельных кодов.

Ключевые слова: помехоустойчивые коды, минимальное расстояние кода, реверсивные коды, коды-БЧХ, норменный метод декодирования.

Введение. Семейство кодов Боуза – Чоудхури – Хоквингема (БЧХ-кодов) является классическим в теории помехоустойчивого кодирования и наиболее популярным в приложениях, особенно в высокоскоростных системах передачи информации [1]. Цикличность кодов, их четкая конструктивность, возможность представления компонент синдромов ошибок элементами поля Галуа позволили развить алгебраические методы обработки этих кодов [1, 2]. Ярким образцом таких методов является коррекция ошибок БЧХ-кодами решением алгебраических уравнений в конечных полях. Теория норм синдромов (ТНС), последовательно применяя свойства автоморфизмов кодов, позволила предложить высокоскоростные перестановочные алгоритмы обработки БЧХ-кодов [3]. Эти алгоритмы оказались особенно эффективными для непримитивных кодов Хемминга и БЧХ – для коррекции ими многократных ошибок, кратность которых выходит далеко за конструктивные возможности самих кодов [4]. Логика исследования непримитивных БЧХ-кодов приводит к естественному расширению класса этих кодов с сохранением их базовых свойств. Об этом и пойдет в дальнейшем речь.

Основные определения и факты, связанные с БЧХ-кодами. В конечном поле $GF(q^m)$ из q^m элементов (расширении своего минимального подполя $GF(q)$ степени m , q – простое число) зафиксируем примитивный элемент α [1, 5]. Для всякого натурального n , делящего $q^m - 1$, в поле Галуа $GF(q^m)$ найдется элемент β порядка n (например, $\beta = \alpha^c$ для натурального $c = (q^m - 1)/n$). Зафиксируем целые числа $b \geq 0$, не делящиеся на n , $\delta > 1$, натуральное n , делящее или равное $q^m - 1$, но не делящее $q^s - 1$ для всех целых s , $0 < s < m$. При этом значение δ должно быть таким, что выполняется неравенство: $m(\delta - 1) < n$. В поле $GF(q^m)$ зафиксируем $\delta - 1$ элементов $\beta^b, \beta^{b+1}, \dots, \beta^{b+\delta-2}$. Для каждого из них в кольце полиномов $GF(p)[x]$ существует однозначно определенный неприводимый полином $g(\beta^i, x)$ с корнем β^i соответственно, $b \leq i \leq b + \delta - 1$. Пусть $M(x)$ – наименьшее общее кратное полиномов $g(\beta^b, x), g(\beta^{b+1}, x), \dots, g(\beta^{b+\delta-2}, x)$.

Определение 1. Линейный циклический код $C = \{M(x)\}$ в кольце $R_n = GF(p)[x]/\langle x^n - 1 \rangle$ называется кодом Боуза – Чоудхури – Хоквингема над полем $GF(q^m)$ длиной n и с конструктивным расстоянием δ . При $n = q^m - 1$ элемент $\beta = \alpha$ и БЧХ-код C называют примитивным, если же $n < q^m - 1$, код называют непримитивным.

Согласно [1], таким образом заданный БЧХ-код C имеет в качестве одной из проверочных матриц матрицу

$$H = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \beta^b & \beta^{2b} & \beta^{(n-1)b} \\ 1 & \beta^{b+1} & \beta^{2(b+1)} & \beta^{(n-1)(b+1)} \\ \hline 1 & \beta^{b+\delta-2} & \beta^{2(b+\delta-2)} & \beta^{(n-1)(b+\delta-2)} \end{array} \right] = [\beta^{bi}, \beta^{(b+1)i}, \dots, \beta^{(b+\delta-2)i}]^T, \quad (1)$$

в которой каждый элемент β^i представляет собой столбец из m элементов поля $GF(q)$ – координат вектора β^i в базисе $\alpha^{m-1}, \alpha^{m-2}, \dots, 1$.

Неравенство $m(\delta-1) < n$ гарантирует, что ядро матрицы (1) – код C – является линейным пространством над полем $GF(q)$ размерности, не меньшей, чем $n-m(\delta-1)$. Точное значение минимального расстояния БЧХ-кодов $d \leq \delta$.

На практике наибольшее значение играют двоичные БЧХ-коды, то есть коды C над полем $GF(q) = GF(2)$. Здесь специализацией параметров можно существенно увеличить размерность и скорость кода. Так, при значении $b=1$ элементы $\beta, \beta^2, \beta^4, \dots$ являются сопряженными в поле $GF(2^m)$, $m \geq 2$, то есть являются корнями одного и того же неприводимого полинома над полем $GF(2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (детали см. в [1–3]). Тогда, с одной стороны, степень полинома $M(x)$ существенно уменьшится, а с другой – ранги следующих подматриц матрицы H окажутся равными: $\text{rang}[\beta, \beta^2, \beta^4, \dots]^T = \text{rang}[\beta]$ [4]. Следовательно, в H подматрица $[\beta, \beta^2, \beta^4, \dots]^T$ заменяется подматрицей $[\beta]$. Получаем каноническую проверочную матрицу двоичного БЧХ-кода C с конструктивным расстоянием $\delta = 2t + 1$:

$$H = [\beta^i, \beta^{3i}, \dots, \beta^{(2t-1)i}]^T. \quad (2)$$

Размерность этого кода $k = n - mt$, а минимальное расстояние $d = 2t + 1$ в примитивном случае, как правило, а в не примитивном – велика доля кодов со значением $d > 2t + 1$ [5]. При $t = 1$ матрица (2) имеет вид $H = [\beta^i]$. Задаваемый ею код известен как код Хемминга, непримитивный при $\beta \neq \alpha$.

Цикличность означает, что код C вместе с каждым своим кодовым словом $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ содержит и вектор $\sigma(\bar{c}) = (c_n, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ для оператора σ циклического сдвига координат векторов. Другими словами, оператор σ принадлежит группе $\text{Aut}C$ автоморфизмов кода C вместе с порождаемой им циклической подгруппой Γ порядка n .

БЧХ-коды и их обобщение. Изучение циклотомических классов по различным модулям показывает, что существует бесчисленное море двоичных БЧХ-кодов с разнообразным и причудливым сочетанием сопряженных элементов в соответствующих полях Галуа и с весьма интересными упрощенными проверочными матрицами. Ряд подобных примеров дан в работах [4, 5]. Приведем еще несколько примеров.

Пример 1. Двоичные БЧХ-коды длиной 51 определены над полем Галуа $GF(2^8)$. Априори, их проверочная матрица (2) может иметь значения t в диапазоне от 1 до 6. Вычисления показывают, что по модулю 51 следующие циклотомические классы совпадают: $C_7 = C_5$; $C_{13} = C_1$; $C_{15} = C_9$. Это означает сопряженность элементов: β^{7i} и β^{5i} , β^i и β^{13i} , β^{15i} и β^{9i} . В силу сказанного выше, в БЧХ-коде с максимальным значением $t = 6$ и с проверочной матрицей $H = (\beta^i, \beta^{3i}, \beta^{5i}, \beta^{7i}, \beta^{9i}, \beta^{11i})^T$, $0 \leq i \leq 50$, на самом деле подматрица $[\beta^{7i}]$ должна быть удалена. Таким образом, БЧХ-код длиной 51 с проверочной матрицей $H = (\beta^i, \beta^{3i}, \beta^{5i}, \beta^{9i}, \beta^{11i})^T$, $0 \leq i \leq 50$, над полем $GF(2^8)$ имеет размерность $k = 51 - 8 \cdot 5 = 11$, его минимальное расстояние $d \geq 17$. Данный код способен исправлять все случайные ошибки весом от 1 до 8. Количество всех исправляемых ошибок равно $K = C_{51}^1 + C_{51}^2 + \dots + C_{51}^8 = 773\,168\,721$.

Пример 2. Двоичные БЧХ-коды длиной 57 определены над полем $GF(2^{28})$. Здесь имеет место равенство следующих циклотомических классов: $C_7 = C_1$; $C_{13} = C_{17} = C_3$; $C_{15} = C_9 = C_3$. Следовательно, БЧХ-код длиной 57 с проверочной матрицей $H = (\beta^i, \beta^{3i}, \beta^{5i})^T$, $0 \leq i \leq 56$, над полем $GF(2^{18})$ имеет размерность $k = 57 - 18 \cdot 3 = 3$, его минимальное расстояние $d \geq 19$. Данный код способен исправлять все

случайные ошибки весом от 1 до 9. Количество всех исправляемых ошибок равно $K = C_{57}^1 + C_{57}^2 + \dots + C_{57}^9 = 10\,954\,161\,067$.

Пример 3. Двоичные БЧХ-коды длиной 119 определены над полем $GF(2^{24})$. Здесь имеет место равенство следующих циклотомических классов: $C_9 = C_1$; $C_5 = C_3$. Следовательно, БЧХ-код длиной 119 с проверочной матрицей $H = (\beta^i, \beta^{3i}, \beta^{7i})^T$, $0 \leq i \leq 118$, имеет размерность $k = 119 - 24 \cdot 3 = 47$, его минимальное расстояние $d \geq 11$. Данный код способен исправлять все случайные ошибки весом от 1 до 5.

Пример 4. Двоичные БЧХ-коды длиной 143 определены над полем $GF(2^{60})$. Здесь имеет место равенство следующих циклотомических классов: $C_9 = C_7 = C_3 = C_1$. Следовательно, БЧХ-код длиной 143 с проверочной матрицей $H = (\beta^i, \beta^{5i})^T$, $0 \leq i \leq 142$, имеет размерность $k = 23$, его минимальное расстояние $d \geq 11$. Данный код способен исправлять все случайные ошибки весом от 1 до 5.

Опираясь на изученные свойства двоичных БЧХ-кодов и приведенные примеры, возникает необходимость рассмотрения и исследования следующего класса линейных кодов.

Определение 2. Обобщенным двоичным БЧХ-кодом назовем двоичный линейный циклический код с проверочной матрицей

$$H = [\beta^{ki}, \beta^{li}, \beta^{si}, \dots]^T, \quad (3)$$

где $1 \leq k < l < s < \dots$ и среди степеней $\beta^{ki}, \beta^{li}, \beta^{si}, \dots$ не имеется ни одной пары сопряженных.

В этом случае данный код имеет конструктивное расстояние $\delta = 2t + 1$ для количества t последовательных двоичных подматриц по m строк в каждой в матрице (3), соответствующих элементам $\beta^{ki}, \beta^{li}, \beta^{si}, \dots$.

По определению 2, к примитивным БЧХ-кодам длиной 31 и с конструктивным расстоянием 5 следует отнести не только уже ставший классическим БЧХ-код с проверочной матрицей $H = [\alpha^i, \alpha^{3i}]^T$, но и целый ряд других, к примеру, коды с проверочными матрицами $H = [\alpha^i, \alpha^{5i}]^T$, $H = [\alpha^i, \alpha^{7i}]^T$, $H = [\alpha^{3i}, \alpha^{5i}]^T$, $H = [\alpha^{3i}, \alpha^{7i}]^T$, $H = [\alpha^{5i}, \alpha^{7i}]^T$ и так далее, наконец, и реверсивный код с матрицей $H = [\alpha^i, \alpha^{30i}]^T$. Вычисления показывают, что минимальное расстояние каждого из названных кодов равно 5.

К обобщенным БЧХ-кодам применима теория норм синдромов, причем в упрощенном виде, что во все не является недостатком, так как облегчает вычисления и применение перестановочных методов к ним.

Обобщенные БЧХ-коды проявляют порой весьма интересные свойства.

Пример 5. Рассмотрим обобщенный БЧХ-код с конструктивным расстоянием 5 длиной 15, построенный над полем $GF(2^4)$ с примитивным полиномом $p(x) = 1 + x^3 + x^4$, проверочная матрица которого определяется формулой $H = (\alpha^i, \alpha^{5i})^T$, $0 \leq i \leq 14$, где α – примитивный элемент названного поля. Согласно теории, размерность кодового пространства в данном случае равна $k = 15 - 2 \cdot 4 = 7$. Построим проверочную матрицу данного кода.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Несложно заметить, что ранг данной матрицы равен 6, а не 8. А, следовательно, и размерность кодового пространства возрастает до 9. Дело в том, что элемент α^5 в мультипликативной группе поля $GF(2^4)$ имеет порядок 3, поэтому его степени в подматрице (α^{5i}) матрицы H имеют лишь три вариации, три различных столбца и, следовательно, ранг этой подматрицы $\text{rang}(\alpha^{5i}) \leq 3$. Очевидно, этот ранг совпадает с рангом подматрицы из первых трех столбцов матрицы (α^{5i}) , который, как легко видеть, равен 2. Ранг системы столбцов матрицы равен рангу системы ее строк. Все закономерно. Минимальное же расстояние этого кода равно 3, потому что сумма 5-го, 10-го и 15-го столбцов равна нулю. Это обстоятельство делает этот код не применимым на практике.

На длине 15 имеется четыре различных циклотомических класса: $C_1 = \{1, 2, 4, 8\}$; $C_3 = \{3, 6, 12, 9\}$; $C_5 = \{5, 10\}$; $C_7 = \{7, 11, 13, 14\}$ Исходя из этих свойств и **определения 2**, получим ряд БЧХ-кодов с конструктивным расстоянием 5, задаваемых проверочной матрицей вида $H = (\beta^{p_1 i}, \beta^{p_2 i})^T$. Результаты вычислений минимального расстояния для различных комбинаций степеней p_1, p_2 представлены в таблице 1.

Таблица 1. – Параметры кодового расстояния для обобщенных БЧХ-кодов длины 15

Комбинация степеней p_1, p_2	Значение кодового расстояния
(1,3)	5
(1,5)	3
(1,7)	3
(3,5)	4
(3,7)	5
(5,7)	3

Подобные ситуации изменения параметра k обусловлены свойствами циклических подгрупп мультипликативной группы поля и могут проявлять себя на некоторых длинах и комбинациях степеней обобщенных БЧХ-кодов.

Конечно, реальный интерес представляют те обобщенные БЧХ-коды, чье минимальное расстояние больше конструктивного. Как и в случае непримитивных БЧХ-кодов, подобные обобщенные БЧХ-коды существуют и не являются чем-то исключительным.

Пример 6. Рассмотрим серию БЧХ-кодов с конструктивным расстоянием 5, длиной $n = 43$. Они определены над полем $GF(2^{14})$. Сначала изучим корректирующие возможности кода с проверочной

матрицей $H = (\beta^i, \beta^{3i})^T$, $0 \leq i \leq 42$, где $\beta = \alpha^{\frac{2^{14}-1}{43}}$, α – примитивный элемент поля $GF(2^{14})$, корень полинома $p(x) = 1 + x^3 + x^4 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{14}$, неприводимого над $Z/2Z$ и примитивного. Исходя из соотношения $HG^T = 0$, однозначно находим G – порождающую матрицу кода. В строках матрицы $G = [\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_k]$ содержится $k = 43 - 2 \cdot 14 = 15$ базисных векторов кодового пространства. Тогда, по определению порождающей матрицы кода, любое кодовое слово $\bar{c}$ может быть получено как линейная комбинация строк матрицы G : $\bar{c} = \sum_{j=1}^k \bar{g}_j \cdot l_j$, где $l_j \in GF(2)$. Несложно вычислить, что все

кодировое пространство данного БЧХ-кода содержит в точности $2^{15} = 32768$ векторов. Относительно небольшое количество кодовых слов открывает перспективы для подсчета минимального расстояния полным перебором кодового пространства. В ходе проведения необходимых вычислений устанавливаем, что минимальное расстояние данного кода равно 13. Найденное значение кодового расстояния подтверждает гистограмма весов кодовых слов.

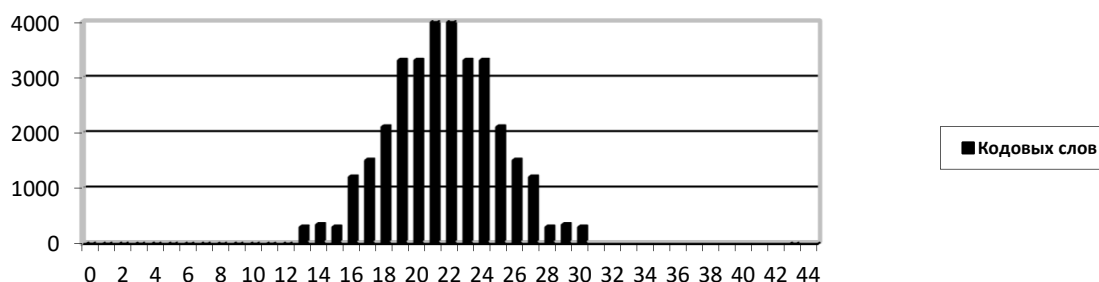


Рисунок 1. – Диаграмма весов кодовых слов классического БЧХ-кода длины 43

Попробуем вычислить аналогичным методом минимальное расстояние других БЧХ-кодов с конструктивным расстоянием 5 на длине 43. Общий вид проверочной матрицы для таких кодов $H = (\beta^{p_1 i}, \beta^{p_2 i})^T$. На длине 43 имеются лишь три различных циклотомических класса:

$$C_1 = \{1, 2, 4, 8, 11, 16, 21, 22, 27, 32, 35, 39, 41, 42\};$$

$$C_3 = \{3, 5, 6, 10, 12, 19, 20, 23, 24, 31, 33, 37, 38, 40\};$$

$$C_7 = \{7, 9, 13, 14, 15, 17, 18, 25, 26, 28, 29, 30, 34, 36\}.$$

Исходя из свойств циклотомических классов, определим комбинации степеней p_1, p_2 для изучения. В таблице 2 представлены найденные комбинации и значения минимального расстояния для обобщенных БЧХ-кодов длиной 43.

Таблица 2. – Параметры кодового расстояния для обобщенных БЧХ-кодов длины 43

Комбинация степеней p_1, p_2	Значение кодового расстояния
(1,3)	13
(1,7)	13
(3,7)	13

Видим, что корректирующие возможности различных БЧХ-кодов сходны с таковыми у классического кода с проверочной матрицей $H = (\beta^i, \beta^{3i})$ и превосходят конструктивные.

Пример 7. Рассмотрим обобщенный БЧХ-код длиной $n = 69$, который определен над полем $GF(2^{22})$ с примитивным полиномом $p(x) = 1 + x^{21} + x^{22}$. Здесь также имеются только три различных циклотомических класса и возможны лишь три различных БЧХ-кода. При подсчете минимального расстояния всех трех различных обобщенных БЧХ-кодов на данной длине можно обнаружить необычные свойства.

Таблица 3. – Параметры кодового расстояния для обобщенных БЧХ-кодов длины 69

Комбинация степеней p_1, p_2	Значение кодового расстояния
(1,3)	7
(1,15)	11

Как видим, в некоторых случаях минимальное расстояние обобщенного БЧХ-кода может и превышать минимальное расстояние классического БЧХ-кода на той же длине.

Закключение. Логика исследований семейства кодов Боуза – Чоудхури – Хоквингема приводит к необходимости рассмотрения обобщенных БЧХ-кодов. Как показывают первые исследования, обобщенные БЧХ-коды требуют более осторожного и тщательного подхода к ним.

Внешне стандартные задания этих кодов могут характеризоваться нетипичными особенностями: неожиданное увеличение размерности кода, всплески минимального расстояния как в сторону увеличе-

ния, так и в сторону уменьшения по сравнению с классическими БЧХ-кодами, тем не менее вводимый класс кодов обещает новые примеры, перспективные для приложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мак-Вильямс, Ф. Дж. Теория кодов, исправляющих ошибки : пер. с англ. / Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн. – М. : Связь, 1979. – 744 с.
2. Блейхут, Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки / Р. Блейхут. – М. : Мир, 1986. – 576 с.
3. Липницкий, В.А. Норменное декодирование помехоустойчивых кодов и алгебраические уравнения / В.А. Липницкий, В.К. Конопелько. – Минск : Издат. центр БГУ, 2007. – 216 с.
4. Липницкий, В.А. Теория норм синдромов и плюс-декодирование / В.А. Липницкий, А.О. Олексюк // Доклады БГУИР. – 2014. – № 8. – С. 71–78.
5. Лидл, Р. Конечные поля : в 2 т. : пер. с англ. / Р. Лидл, Г. Нидеррайтер. – М. : Мир, 1988.
6. Липницкий, В.А. Современная прикладная алгебра. Математические основы защиты информации от помех и несанкционированного доступа / В.А. Липницкий. – 2-е изд. – Минск : БГУИР, 2006. – 88 с.
7. Виноградов, И.М. Основы теории чисел / И.М. Виноградов. – М. : Наука, 1972. – 168 с.

Поступила 20.03.2018

PROPERTIES AND OPTIONS OF THE GENERIC BCH-CODES

A. KUSHNEROV, V. LIPINSKI, M. KOROLIOVA

This work is devoted to generic error-correcting BCH-codes investigation. During investigations we can make some interesting conclusions about its properties. Also we consider correcting possibilities of this codes in comparison with classic BCH-codes. There are some examples of codes in this work. Those examples show parameters and features of generic BCH-codes.

Keywords: error correcting codes, code minimal distance, reverse codes, BCH-codes, norm method of error correction.

УДК 004.056.2

ШИФРОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ С ЭЛЕМЕНТАМИ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

д-р техн. наук, проф. А.В. СИДОРЕНКО, М.С. ШИШКО
(Белорусский государственный университет, Минск)

Предложен новый алгоритм шифрования на основе хаотической динамики с элементами генетического алгоритма и осуществлена его реализация. В схеме предложенного алгоритма шифрования выделяются три этапа: инициализация, генерация изображений-шифров и применение элементов генетического алгоритма. В качестве критерия при выполнении этапов генерации изображений-шифров и применения элементов генетического алгоритма используется выбранное значение информационной энтропии в зашифрованном изображении. Определена стойкость алгоритма к статистическому и дифференциальному криптоанализу. Для оценки стойкости рассчитывались коэффициенты: NPCR (Number of Pixel Change Rate) и UACI (Unified Averaged Changed Intensity). Проведена оценка производительности рассматриваемого алгоритма. Представленный алгоритм может быть интегрирован в аппаратуру.

Ключевые слова: шифрование, изображение, динамический хаос, алгоритм, стойкость алгоритма.

Введение. Широкое распространение информационных технологий и Интернета вызывают проблемы обеспечения безопасного хранения и передачи данных в виде изображений. Одним из наиболее эффективных способов для решения этой задачи является шифрование информации [1]. Стандартные методы шифрования, включая AES, DES или RSA, из-за особенностей, свойственных изображениям, практически не дают эффекта.

В последние годы появился ряд алгоритмов шифрования изображений, использующих для маскирования динамический хаос. Благодаря присущим динамическому хаосу особенностям, связанным с наличием чувствительности к начальным условиям и случайности, такие методы подходят для шифрования изображений с высокой степенью защиты. При этом шифрование, как правило, происходит с использованием перестановки и диффузии. При перестановке с помощью хаотического отображения производится перераспределение пикселей изображения без изменения уровня их яркости. На стадии диффузии путем применения хаотической последовательности к изображению изменяется значение каждого пикселя.

В данной работе предлагается алгоритм шифрования изображений с использованием модели дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК) [2] и динамического хаоса. В схеме предложенного нами алгоритма шифрования выделяются три этапа: инициализация, генерация изображений-шифров и использование генетического алгоритма. Два последних могут повторяться до тех пор, пока не будут удовлетворять выбранным критериям. В нашем случае в качестве критерия используется достижение соответствующего уровня информационной энтропии в зашифрованном изображении, что обусловлено необходимостью обеспечения лучшего быстродействия функционирования алгоритма. Рассмотрим подробнее этапы алгоритма.

Инициализация параметров алгоритма шифрования. Вводятся данные о необходимом значении энтропии, величине начальной популяции и значении процента мутирующих членов популяции. Производится вычисление хеш-суммы для изображения по алгоритму SHA-256. Для этого хеш-сумма разбивается на блоки, с помощью которых определяются начальные условия для хаотического отображения. Формирование начальной популяции производится при генерации хаотических последовательностей путем итерации логистического отображения. Она образуется за счет последовательностей, число которых равно размеру популяции, а размер каждой последовательности в три раза превышает количество пикселей шифруемого цветного изображения. Затем с помощью соответствующих кодировок начальная популяция и шифруемое изображение преобразуются в ДНК-последовательности. При этом получается ДНК-последовательность, соответствующая изображению, и некоторое количество ДНК-последовательностей, соответствующих начальной популяции (ДНК-маски).

Генерация изображений – шифров. На данном этапе происходит маскирование изображения ДНК-масками. После кроссовера для каждой ДНК-маски рассчитывается энтропия. Получаем несколько замаскированных ДНК-последовательностей, для которых рассчитывается энтропия замаскированных изображений.

Использование элементов генетического алгоритма. После вычисления энтропии происходит кроссовер между парами ДНК-масок, которые выбираются случайным образом по правилу рулетки, размеры векторов которой пропорциональны энтропии каждого члена. Точка кроссовера выбирается посередине каждой ДНК-маски. Маски с минимальным значением энтропии проходят процесс мутации и заменяются на новые маски, генерируемые как и члены начальной популяции. Рассчитывается энтропия. Если в популяции ДНК-масок есть хотя бы одна с энтропией, большей требуемого значения, то эта ДНК-маска используется для шифрования изображения, а соответствующие ей начальные условия – в качестве ключа расшифрования. При отсутствии этого популяция вновь проходит стадию кроссовера и мутации, пока не появится подходящая маска.

Тестирование и оценка производительности алгоритма. В данной работе проведена оценка стойкости шифра к статистическому и дифференциальному криптоанализам. При проведении статистического анализа шифрованного текста рассчитаны коэффициенты, позволяющие оценить стойкость шифра к статистическому криптоанализу: корреляция между соседними пикселями изображения и информационная энтропия. Как показали результаты проведенных вычислений, модуль коэффициента корреляции близок к нулевому значению и не превосходит двух сотых. Энтропия же в зашифрованном изображении близка к своему максимальному значению. В совокупности с низким уровнем корреляции это означает хорошую стойкость алгоритма к статистическому анализу.

Дифференциальный криптоанализ заключается в следующем. В исходное изображение вносится небольшое изменение, затем производится шифрование исходного и измененного изображений. После чего определяют различия в двух рассматриваемых изображениях, чтобы найти закономерности между изменениями в зашифрованных и исходных изображениях.

Для оценки стойкости к данному типу анализа открытый текст изображения зашифровывается, получаем изображение-шифр С1. Затем в открытом тексте изображения произвольно меняется один пиксель. Это измененное изображение зашифровывается тем же ключом, получаем изображение-шифр С2. С помощью коэффициентов NPCR (Number of Pixel Change Rate) и UACI (Unified Averaged Changed Intensity) [3] проводим сравнительный анализ полученных С1 и С2.

Тестирование проводилось с использованием изображений «Лена» и «Бабуин» с различным разрешением. Полученные результаты показывают, что и коэффициенты NPCR и UACI стремятся к своим идеальным значениям, что свидетельствует о хорошей стойкости к дифференциальному криптоанализу.

В данной работе проведена оценка производительности предложенного алгоритма, которая осуществлялась с помощью процессора Intel Core i5-3230M 2,4 GHz с 6 GB RAM. Результаты приведены на рисунках 1–3.

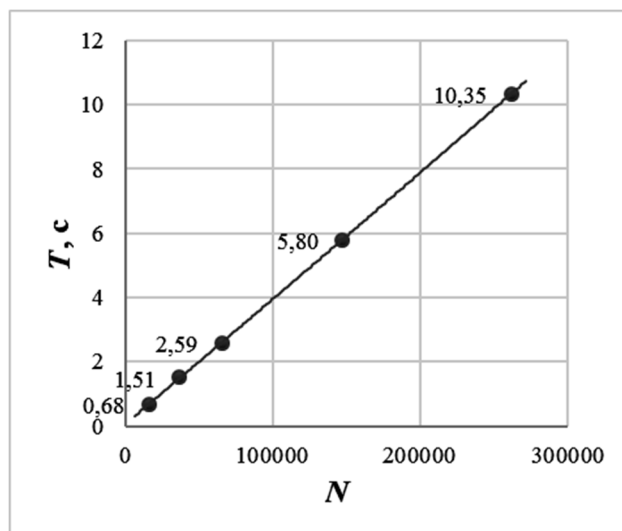


Рисунок 1. – График зависимости времени шифрования T (в секундах) от размера изображения N (в пикселях)

Как видно из рисунка 1, время шифрования растет по линейному закону в зависимости от количества пикселей изображения при постоянных остальных параметрах.

Приведенная на рисунке 2 зависимость времени шифрования от заданного значения энтропии показывает, что при малых значениях энтропии время шифрования практически остается постоянным. Это

связано с тем, что для достижения данного уровня достаточно одной итерации генетического алгоритма. Далее по графику происходит экспоненциальный рост времени шифрования от заданного значения энтропии.

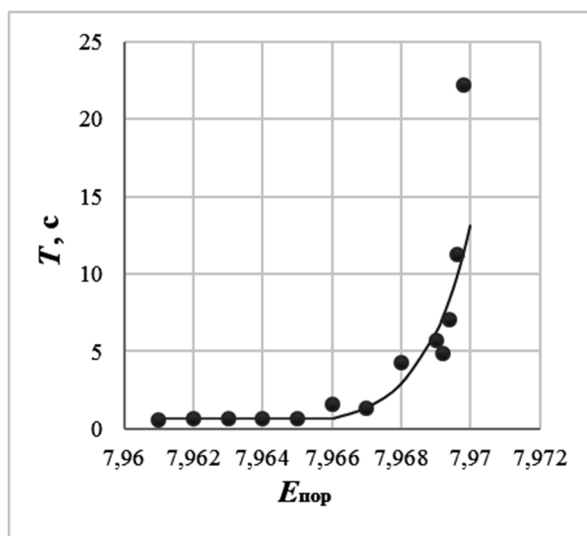


Рисунок 2. – График зависимости времени шифрования T (в секундах) от порогового значения энтропии $E_{\text{пор}}$

Приведенный на рисунке 3 график зависимости времени шифрования от заданного процента мутаций показывает, что существует минимум при 30% уровне мутаций.

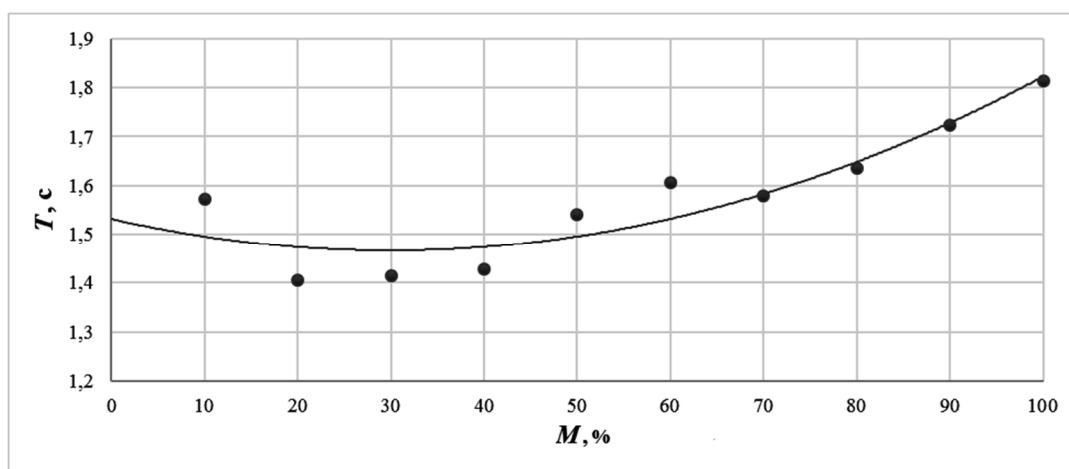


Рисунок 3. – График зависимости времени шифрования T (в секундах) от заданного процента мутаций M

Заключение. Предложенный алгоритм шифрования изображений позволяет повысить степень защиты информации, стойкость к различным атакам и может быть интегрирован в аппаратуру. Преимуществами данного алгоритма является его гибкость, а также возможность обеспечения шифрования с необходимым уровнем безопасности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wu, Y. NPCR and UACI Randomness Tests for Image Encryption / Y. Wu, J.P. Noonan, S. Aghaian // Cyber journals: multidisciplinary journals in science and technology ; Journal of Selected Areas in Telecommunications (JSAT). – 2007. – April ed. – P. 31–38.

2. A novel color image encryption algorithm based on DNA sequence operation and hyper-chaotic system / X. Wei [et al.] // The Journal of Systems and Software. – 2012. – Vol. 85, iss. 2. – P. 290–299.
3. A novel image encryption scheme based on an improper fractional-order chaotic system / J. Zhao [et al.] // Nonlinear Dynamics. – 2015. – Vol. 80, iss. 4. – P. 1721–1729.

Поступила 19.03.2018

THE IMAGE ENCRYPTION BASED ON CHAOTIC DYNAMICS AND GENETIC ALGORITHM ELEMENTS

A. SIDORENKO, M. SHISHKO

New image encryption algorithm based on chaotic dynamics and genetic algorithm elements has been proposed and implemented as software. This algorithm went through three stages: initialization, generation of cipher-images and genetic algorithm elements. The chosen value of information entropy in encrypted image was used as criteria for realization the generation of cipher-images stage and genetic algorithm elements stage of considered algorithm. The resistance of the encrypted algorithm to statistic and differential cryptographic attacks has been examined. The coefficients: NPCR (Number of Pixel Change Rate) and UACI (Unified Averaged Changed Intensity) were calculated to estimate the resistance of the image encryption algorithm. The productivity estimation of the image encryption algorithm has been carried out. The present image encryption algorithm may be to integrate in the apparatus means.

Keywords: encryption, image, dynamic chaos, algorithm, algorithm resistance.

УДК 004.052.2

ОЦЕНКА ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ТОЧКИ ПРИЕМА СИГНАЛОВ СПУТНИКОВОЙ СИСТЕМЫ ТОЧНОГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ ВЕТРОВЫХ НАГРУЗКАХ

А.И. ЯРИЦА*(Полоцкий государственный университет)*

Повышение точности координат объекта, полученных с помощью спутниковой системы точного позиционирования Республики Беларусь, является актуальной и важной задачей. Рассмотрены конструктивные и методические методы снижения влияния природных воздействующих факторов на точность приема сигналов GPS. Представлена математическая обработка ветрового воздействия на постоянно действующий пункт.

Ключевые слова: спутниковая система точного позиционирования, постоянно действующие пункты, воздействующие факторы, ветровое давление.

Введение. Проблема обеспечения надежности передачи сигналов при наличии помех является одной из важнейших в прикладной теории информации. Надежность передачи сигналов в радиотехнической системе в значительной мере определяется ее помехоустойчивостью – способностью противостоять вредному воздействию помех [1]. Оценка помехоустойчивости производится на основе рассмотрения соотношения между помехой и сигналом, при котором обеспечивается заданное качество функционирования устройства передачи информации.

Данная проблема возникла в геодезии с внедрением спутниковых технологий в геодезические измерения. **Спутниковое позиционирование** — метод определения координат объекта в трехмерном пространстве с помощью спутниковых систем. Системы спутникового позиционирования — современные средства координатно-временного обеспечения разнообразных работ, спектр которых с каждым годом увеличивается. Основным достоинством спутниковых систем позиционирования является их глобальность, оперативность, всепогодность и оптимальная точность.

В Беларуси спутниковые измерения представлены спутниковой системой точного позиционирования (ССТП), которая объединяет 98 постоянно действующих пунктов (ПДП) равномерно расположенных на всей территории страны. Постоянно действующий пункт представляет собой железобетонную подставку с установленным на ней спутниковым геодезическим приемником. Несмотря на прогресс, в настоящее время сложилась проблемная ситуация, когда существуют противоречия между методической и инструментальной погрешностью. Точность геодезических антенн достигает 2 мм в плане и 3 мм по высоте. Однако точность определения координат объектов, предоставляемых ССТП Республики Беларусь ниже: точность определения в плане составляет 25 мм, а по высоте – 30 мм. Повышение точности координат, получаемых от спутниковой системы, позволит глобально расширить спектр ее применения:

- наблюдение за деформациями земной коры,
- монтаж и мониторинг магистральных трубопроводов, строительство гидро- и атомных электростанций,
- снижение стоимости этих работ и оперативность их выполнения.

В мире уже существует такой пример, реализованный в виде международной службы IGS, предоставляющей координаты объектов в ITRF с точностью до 5 мм.

Основная часть. От приборной точности геодезических приемников, точность, получаемая спутниковой системой, отличается в большей степени вследствие непосредственного соприкосновения окружающей среды, так как подвергается внешним температурным (сезонным и суточным изменениям температуры, перегреву поверхности солнечным излучением) и механическим, например, ветровым и вибрационным, воздействиям. Указанные внешние факторы в той или иной мере влияют на каждый постоянно действующий пункт, в связи с чем снижается точность всей спутниковой сети и возникает необходимость оценки влияния и определения путей повышения устойчивости к ним.

В связи с тем, что ПДП ССТП Республики Беларусь в основном установлены на крышах зданий, то для получения полной информации в сложившейся ситуации требуется дать оценку возмущающего

воздействия как на подстилающую поверхность (в данном случае здания и сооружения), так и на сам геодезический приемник.

Атмосфера всегда находится в непрерывном случайном движении относительно Земли. Это движение воздушных масс проявляется в виде ветра. Скорость ветра определяют, как сумму двух составляющих: постоянной и переменной. Составляющую скорости ветра считают постоянной, если в течение 2 мин ветер сохраняет свою скорость и его направление меняется не более чем на один румб. Плотность вероятности постоянной составляющей скорости ветра имеет закон распределения вероятности Рэлея [2]:

$$f(W) = \frac{W}{\sigma^2} e^{-\frac{W^2}{2\sigma^2}}$$

В этой формуле среднее квадратическое отклонение постоянной составляющей скорости ветра зависит от высоты над поверхностью Земли. В приземном слое атмосферы среднее квадратическое отклонение выражается следующей зависимостью от высоты:

$$\sigma = \frac{2}{\pi} m_{w0} \left(\frac{H}{H_0} \right)^n,$$

где m_{w_0} – математическое ожидание скорости ветра на некоторой опорной высоте H_0 ;

H – текущая высота;

n – показатель степени, величину которого рекомендуется выбирать в пределах 0,15–0,20.

При опорной высоте $H_0 = 10$ м рекомендуется принимать $m_{\text{н}} = 3-4 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$.

Переменная составляющая скорости ветра, пульсация, характеризует турбулентное движение атмосферы, выражающееся в хаотическом случайном перемещении частиц воздуха.

Оценка фактора ветрового воздействия затрудняется тем, что действующие нормативно-регламентированные методики не содержат рекомендаций по назначению аэродинамических коэффициентов для сложных и уникальных по форме зданий и не учитывают влияние сочетания форм здания, изменения спектра набегающего потока, рельефа. Наличие в ветровом потоке сдвига и пульсаций скорости еще более усложняет ситуацию, приводя к дополнительным нестационарным воздействиям. Нестационарный расчет – это анализ процесса во времени, именно он даст наиболее правдоподобные результаты. Для создания и обработки такой математической модели потребуются огромные вычислительные мощности, и в разумные сроки эту задачу можно решить лишь на суперкомпьютере [2].

Однако можно оценить ветровое воздействие на здания типовой, простой прямоугольной формы. Так, на рисунке 1 представлена схема обтекания здания потоком воздуха.

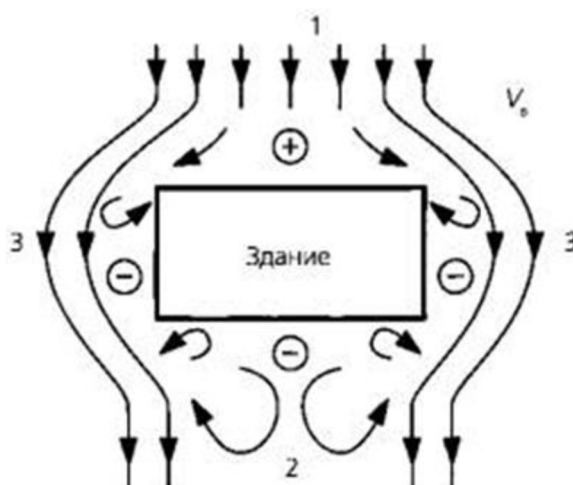
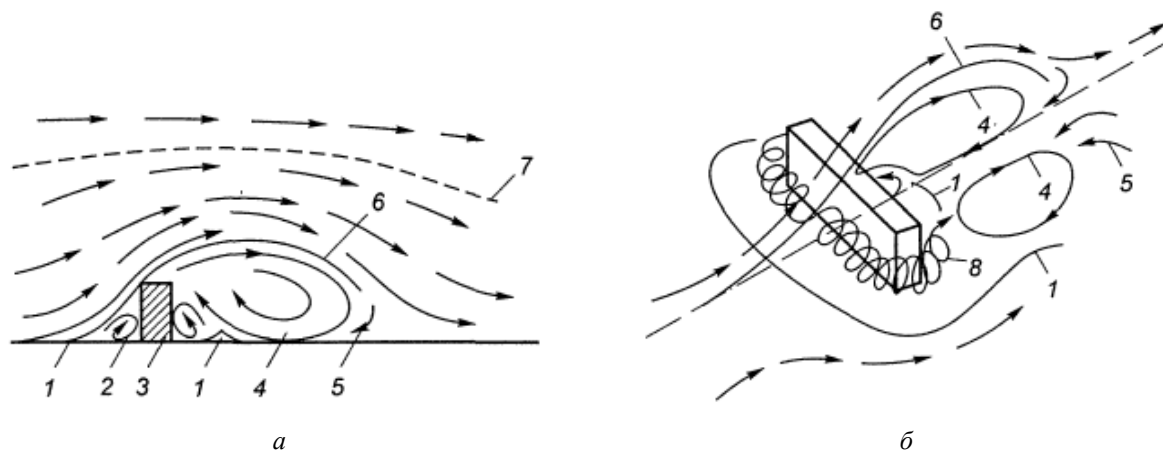


Рисунок 1. – Схема ветровых потоков (горизонтальный разрез)

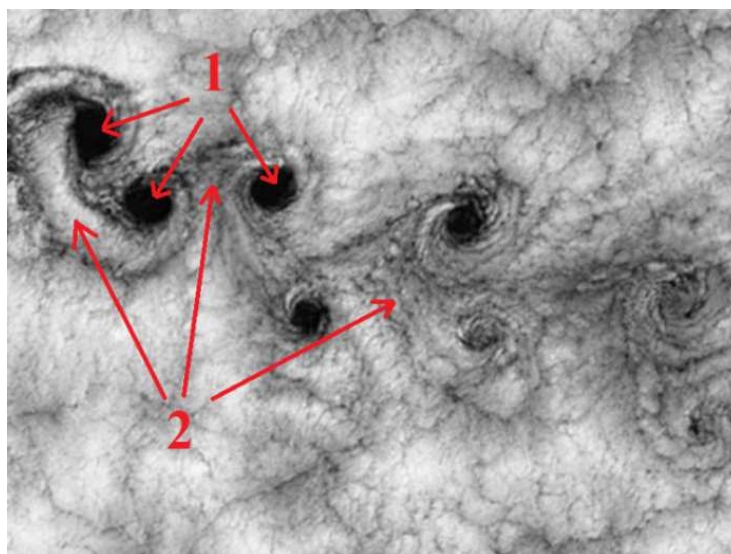
Набегающий поток воздуха образует зону циркуляции у наветренной поверхности здания (рисунок 2). При этом поток ветра затормаживается, кинетическая энергия этой части потока переходит в потенциальную и статическое давление в зоне аэродинамического следа возрастает. Часть воздуха наветренной зоны в виде вихрей уходит в заветренную сторону здания [3].



а – вертикальный разрез; **б** – схема движения воздуха в зоне аэродинамического следа;
1 – граница между вихрями в зоне аэродинамического следа, участок с нулевой скоростью движения воздуха, **2** – зона избыточного давления, **3** – здание, **4** – зона разрежения и вихревого движения воздуха, **5** – обратные потоки воздуха, входящие в зону аэродинамического следа, **6** – граница зоны аэродинамического следа, **7** – граница влияния здания на поток воздуха, **8** – вихреобразные потоки воздуха из зоны избыточного давления в зону разрежения

Рисунок 2. – Схема обтекания здания потоком воздуха

Исследования, проведенные для отдельно стоящего здания при установившемся потоке, позволили выявить лишь принципиальную схему потоков воздуха вблизи здания. В реальных условиях поток воздуха обычно не установившийся. Пульсирующие изменения направления и силы ветра приводят к тому, что в натуральных условиях габариты зоны аэродинамического следа и циркуляция воздуха в пределах зоны изменяются во времени. При обтекании ветром группы зданий зоны аэродинамических следов влияют друг на друга, и аэродинамика обтекания усложняется [3]. Космические съемки демонстрируют такие изменения, представленные на рисунке 3.



1 – зданий и сооружений, обтекаемые ветром; **2** – вихревые потоки
Рисунок 3. – Образование вихревых ветровых потоков вокруг группы зданий и сооружений

Для расчета ветровой нагрузки на здания и сооружения воспользуемся [4]. Особенностью вычислений является то, что до последней редакции в 2011 году ветровая нагрузка определялась по формуле

$$w_m = w_0 \cdot c \cdot k_{(z)} \quad (1)$$

где w_m – нормативное значение средней составляющей ветровой нагрузки;
 w_0 – нормативное ветровое давление в зависимости от принадлежности объекта к ветровому району;
 c – аэродинамический коэффициент;
 $k_{(z)}$ – коэффициент, учитывающий изменение ветрового давления в зависимости от типа местности и высоты [4].

После редакции 2011 года в [4] обязательным стал учет пульсационной w_p -составляющей ветровой нагрузки

$$w_{+(-)} = w_0 k(z_e) [1 + \xi(z_e)] c_{p_{+(-)}} v_{+(-)}, \quad (2)$$

где $w_{+(-)}$ – нормативное значение пикового положительного и отрицательного воздействия ветровой нагрузки;
 z_e – эквивалентная высота (приравниваемая высоте здания);
 $k(z_e), \xi(z_e)$ – коэффициенты, учитывающие соответственно изменение давления и пульсаций давления ветра на высоте z_e ;
 $v_{+(-)}$ – коэффициенты корреляции ветровой нагрузки, соответствующие положительному давлению (+) и отсосу (–);
 $c_{p_{+(-)}}$ – пиковые значения аэродинамических коэффициентов положительного давления (+) или отсоса (–).

Применим данные формулы (2) для получения расчетного ветрового давления для стандартной прямоугольной конструкции. Для примера возьмем пятиэтажный дом, имеющий следующие параметры: ширину $a = 15$ м, длину $b = 100$ м, высоту $h = 18$ м, находящийся в I ветровом районе, тип местности – городская застройка, аэродинамический коэффициент, равный 0,8, и коэффициент логарифмического декремента колебаний δ для железобетонных и каменных сооружений, равный 0,3.

При расчете будем учитывать, что ветровое давление направлено на сторону b . Для получения нагрузки выберем две точки на высоте 10 и 17 м. Результаты вычислений представлены в таблице.

Таблица. – Результаты расчета ветрового давления

Точка измерения	Высота, м	Расчетное среднее давление на высоте, кПа	Расчетное суммарное давление на высоте, кПа
Первая	10	0,167	0,312
Вторая	17	0,204	0,415

По результатам применения формулы получаем суммарное расчетное давление во второй точке, равное 0,450 кПа или 45,8 кг/м². Построим график (рисунок 4)

В ходе системного анализа выделены основные конструктивные решения по снижению ветрового воздействия на здания. Большое влияние на его устойчивость к нагрузкам имеет форма. Приоритеты форм следующие: лидеры – здания с круглым, овальным, каплевидным планом; следующая группа – здания с треугольным планом со скругленными углами; далее – прямоугольные, квадратные, четырехугольные планы. Правильное расположение здания с учетом розы ветров и других сооружений, также значительно снизит влияние ветра. Однако, учитывая особенности работы геодезических приемников, соседний здания не должны быть значительно выше, так как для качественного приема спутниковых сигналов должен быть максимально открытый горизонт.

Исследование влияния внешних воздействий на спутниковые геодезические приемники, проведенное в предыдущей работе [5], указывает на возможность оптимизации конструкторских решений, однако полностью исключить такое влияние не представляется возможным. В связи с этим можно отметить эффективность предлагаемой теоретической модели управления параметрами спутниковой системы в процессе эксплуатации геодезического приемника с учетом реальных воздействий окружающей среды

и результатов априорного анализа этих воздействий на математических моделях в процессе проектирования. Для реализации такой модели необходимо в процессе эксплуатации геодезических приемников, установленных на ПДП, контролировать климатические параметры окружающей среды: температуру и интенсивность потока солнечного излучения, скорость и направление ветра.

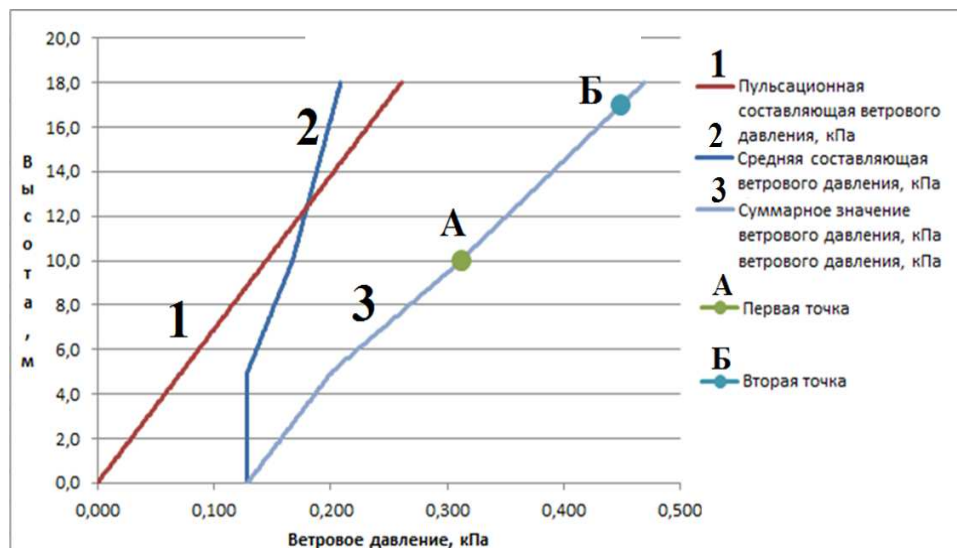


Рисунок 4. – Расчетные значения ветрового давления

В соответствии с этой схемой предлагается скорость и направление ветра измерять с помощью анемометра и румбометра соответственно, которые могут быть объединены в едином метеорологическом приборе анеморумбометре (рисунок 5). Эти приборы имеют достаточно высокую точность. Так, например, манометрический анемометр позволяет определить мгновенную скорость ветра с точностью 0,01 м/с.

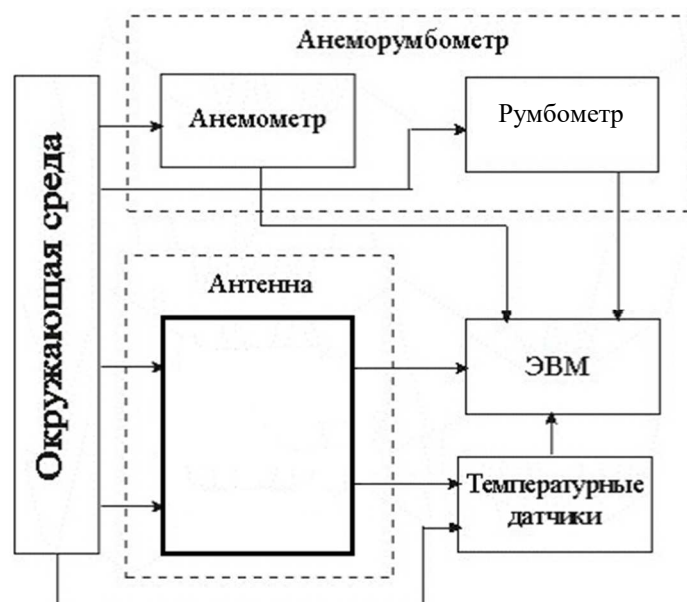


Рисунок 5. – Схема контроля параметров антенны с учетом воздействий окружающей среды

Температурные датчики несут информацию о температуре окружающей среды и температуре поверхности ПДП в его характерных точках.

Измеренные параметры скорости и направления ветра, а также температуры окружающей среды и ПДП в контрольных точках позволяют получить из базы данных информацию о поведении этого пунк-

та в конкретных условиях и соответствующих характеристиках. Это дает возможность скорректировать характеристики приемника и сигнала на его выходе, приблизив их к тем, которые были у приемника без внешних воздействий на него [6].

Таким образом, с учетом данных о состоянии окружающей среды и результатов априорного анализа поведения конструкции постоянно действующего пункта с геодезическим приемником в текущих условиях эксплуатации появляется возможность вносить поправки в реальные характеристики координат приемника и решения, принимаемые спутниковой системой, в составе которой он используется.

Чтобы оценить изменение точности определения координат в реальных условиях эксплуатации, а также их зависимость от параметров приемника, необходимо определить влияние изменений окружающей среды на соотношение сигнал/шум, зависящее от мощности полезного сигнала и мощности шумов и помех, действующих на входе приемника. Мощность принимаемого сигнала P_2 рассчитывается по формуле уравнения мощности аналогично, как и для двухпозиционной радиолокационной системы [7]:

$$P_2 = P_1 \frac{G_1 G_2 \lambda^2 F}{(4\pi)^2 R_H^2},$$

где P_1 – мощность сигнала, излучаемого антенной передатчика;
 G_1, G_2 – коэффициенты усиления передающей и приемной антенн соответственно;
 λ – длина волны излучения;
 R_H – дальность между спутником и приемником;
 F – интерференционный множитель, учитывающий отражение от подстилающей поверхности.

Заключение. В ходе системного анализа и расчетных данных влияния ветровой нагрузки на здание можно сделать вывод о том, что нагрузка при постоянной скорости ветра возрастает линейно с увеличением высоты. Пульсация ветра имеет нелинейную зависимость и суммарное расчетное значение, учитывающее постоянную составляющую скорость и пульсацию, превосходит нормативное значение на 40%.

Использование робастно устойчивых материалов и конструкций позволит снизить внешнее воздействие на постоянно действующие пункты. Так, в архитектуре хорошо себя зарекомендовали сферические, обтекаемые ветром формы. Перед установкой пункта требуется уделить внимание месту его расположения: рассчитать розу ветров и выбирать невысокие, окруженные другими постройками здания. Анализ литературы позволил выделить такие методы снижения ветровой нагрузки на пункт, как ограждение и обваловка.

Несмотря на робастно устойчивые материалы и конструкции, полностью убрать внешнее возмущающее воздействие невозможно. Эффективным методом снижения воздействия может стать использование результатов априорного анализа внешних воздействий на спутниковые геодезические приемники на этапе проектирования пунктов и, в дальнейшем, учета последствий этого влияния в процессе эксплуатации для обеспечения помехоустойчивости информационных коммуникаций в спутниковой системе точного позиционирования. На данный момент проходит анализ и разработка такой интеллектуальной системы.

Автор благодарит научного руководителя, доктора технических наук, профессора В.К. Железняк, за оказанную помощь в проводимых исследованиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харкевич, А.А., Борьба с помехами / А.А. Харкевич. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 280 с.
2. Оленьков, В.Д. Численное моделирование ветрового воздействия на уникальные здания / В.Д. Оленьков, П.И. Пузырев // Академический Вестник УРАЛНИИПРОЕКТ РААСН. Сер. Строительные науки. – 2014. – № 4. – С. 87–89.
3. Богословский, В.Н. Отопление и вентиляция : учебник для вузов : в 2 ч. / В.Н. Богословский. – М. : Стройиздат, 1976. – Ч. 2 : Вентиляция. – 439 с.

4. Строительные нормы и правила. Нагрузки и воздействия : СНиП 2.01.07-85. – Введ. 01.01.87. – М. : [б.и.], 2011. – 81 с.
5. Железняк, В.К. Анализ случайных физических явлений, снижающих точность координат точки прием сигналов GPS / В.К. Железняк, А.И. Ярица // Современные средства связи : материалы XXI Междунар. науч.-техн. конф., Минск, 20–21 окт. 2016 г. / Белорусская государственная академия связи ; редкол.: А.О. Зеневич [и др.]. – Минск, 2016. – С. 240–243.
6. Якимов, А.Н. Обеспечение помехоустойчивости информационных коммуникаций в интеллектуальной радиолокационной системе / А.Н. Якимов, В.Б. Лебедев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2012. – № 1 (21). – С. 124–132.
7. Горбалысов, М.С. Оценка влияния параметров антенны на характеристики радиолокационной системы обнаружения / М.С. Горбалысов, А.Н. Якимов // Цифровые модели в проектировании и производстве РЭС : межвуз. сб. науч. тр. / Пенз. гос. ун-т ; под ред. Н. К. Юркова. – Пенза, 2011. – Вып. 16. – С. 148–152.

Поступила 26.03.2018

**EVALUATION OF IMPACT ON ACCURACY OF DETERMINATION OF COORDINATES
OF THE ACCEPTANCE POINT OF SIGNALS OF THE SATELLITE SYSTEM
OF ACCURATE POSITIONING AT DYNAMIC WIND LOADS**

A. YARYTSA

Increasing the accuracy of the coordinates of the object obtained with the help of the satellite system of precise positioning of the Republic of Belarus is an actual and important task. The article deals with constructive and methodical methods of reducing the influence of the factors that influence. The mathematical treatment of the wind effect is presented.

Keywords: *satellite system of precise positioning, permanently operating points, influencing factors, wind pressure.*

УДК 621.372.037.372;621.391.26

МНОГОМЕРНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МОМЕНТНЫХ ВЕЛИЧИН СИГНАЛА С ИХ КОРРЕЛЯЦИОННО-МАТРИЧНОЙ ОБРАБОТКОЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЗАЩИЩЕННОСТИ РЕЧЕВОЙ ИНФОРМАЦИИ

канд. техн. наук Д.С. РЯБЕНКО, С.В. ЛАВРОВ
(Полоцкий государственный университет)

Оценка защищенности речевой информации на всех стадиях жизненного цикла информационных систем и их составных элементов остается сложной научной задачей, несмотря на использование новых перспективных моделей помехоустойчивых сигналов с оптимальной их обработкой. Важнейшим средством обработки аналоговых и цифровых сигналов для оценки защиты речевой информации остается корреляционный метод [1].

Ключевые слова: аналоговый и цифровой сигнал, корреляционный метод, матричная обработка.

Корреляционная функция периодических процессов характеризует взаимную связь двух мгновенных значений различных сигналов с временным сдвигом τ [2]. Преобразование Фурье корреляционной функции определяет спектральное распределение средней мощности периодических сигналов и спектральное распределение энергии аperiodических сигналов с конечной энергией [2]. Для двух действительных периодических процессов с одинаковой основной частотой его взаимная корреляционная функция

$$R_{v_1 v_2}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v_1(t) v_2(t + \tau) dt.$$

Важно, что взаимная корреляционная функция устанавливается по разности фаз исходных сигналов и разности фаз их соответствующих гармоник.

Коэффициент корреляции пары случайных величин является мерой линейной связи, т.е. с какой точностью одна величина может быть выражена через другую.

Коэффициент взаимной корреляции [3]

$$r(v_1, v_2) = \frac{R_{v_1 v_2}}{\sigma_{v_1} \sigma_{v_2}} = \frac{R_{v_1 v_2}}{\sqrt{R(v_1 \cdot v_1) \cdot R(v_2 \cdot v_2)}},$$

где $R_{v_1 v_2}$ – взаимная корреляционная функция;

σ^2 – дисперсия.

Совокупность двух или нескольких случайных величин является многомерным вектором [4] в виде матрицы порядка $n \times n$.

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}.$$

Члены, не лежащие на главной диагонали, представляют взаимную корреляционную функцию, связанные с составляющими векторного процесса. Члены, связанные с составляющими векторного процесса и находящиеся на главной диагонали, представляют автокорреляционную функцию (АКФ). АКФ является средней мощностью процесса $w(t)$.

Опираясь на симметричность корреляционной матрицы (1), ее представляют в виде

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \dots & R_{nn} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Если случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ попарно некоррелированы, т.е. $R_{ij} = 0$ при $i \neq j$, матрица принимает вид

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & R_{22} & 0 & \dots & 0 \\ & & R_{33} & \dots & 0 \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & R_{nn} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Единичную матрицу коэффициентов корреляции формируют из матрицы (2):

$$r_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & 1 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

Такую матрицу (3) называют диагональной.

В работе [5] представлены теоремы о числовых характеристиках функций случайных величин при случайном числе их слагаемых. Сложение некоррелированных случайных векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ на плоскости xOy с составляющими (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) при случайном числе их слагаемых позволяет определить векторную сумму $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ и их векторные составляющие $X = (X_1 + X_2)$ и $Y = (Y_1 + Y_2)$, числовую характеристику случайного вектора $\vec{v}$, дисперсию и корреляционный момент D_x , D_y и K_{xy} . По теории сложения дисперсий и корреляционных моментов составляющих каждого из векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$:

$$\begin{aligned} D_x &= (D_{x_1} + D_{x_2}); \\ D_y &= (D_{y_1} + D_{y_2}); \\ K_{xy} &= (K_{x_1 y_1} + K_{x_2 y_2}). \end{aligned}$$

Результаты обобщаются на произвольное число слагаемых некоррелированных систем случайных величин для n -мерных случайных векторов:

$\vec{x}$ с составляющими $X_1, X_2, \dots, X_n$;

$\vec{y}$ с составляющими $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$.

Их векторная сумма $\vec{Z} = \vec{x} + \vec{y}$ имеет корреляционную матрицу, элементы которой получаются суммированием элементов.

Вероятность p_{ij} того, что случайная величина X примет значение x_i , а $Y = y_j$, можно выразить следующей формулой

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}.$$

Событие $\{X = x_i, Y = y_j\}$ есть произведение событий $\{X = x_i\}$ на $\{Y = y_j\}$. Для двух случайных величин $\{X, Y\}$ матрицу распределения $p_{ij} (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$ представим таблицей [6].

Таблица – Представление матрицы распределения для двух случайных величин

	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{1j}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\dots$	p_{2j}	$\dots$	p_{2m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	p_{i3}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{im}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}	$\dots$	p_{nj}	$\dots$	p_{nm}

Сумма всех вероятностей p_{ij} данной матрицы равна единице как сумма вероятностей полной группы несовместимых событий $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$.

Закон распределения системы n случайных величин необходим в исследовательских целях. Для случайной величины x корреляционная матрица представляется в виде [6]

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Матрица симметрична относительно главной диагонали. По главной диагонали матрицы (4) дисперсии равны $D_1 = D_1(x_1)$, $D_2 = D_2(x_2)$, ..., $D_n = D_n(x_n)$, $D_{ii} = R_{ii} = R_{ii}[x_i x_i]$, $i = [1, 2, \dots, n]$.

Геометрическую интерпретацию корреляции можно получить сравнением двух векторов. На рисунке 1 показаны два вектора V_1 и V_2 и разложение каждого из них на ортогональные составляющие.

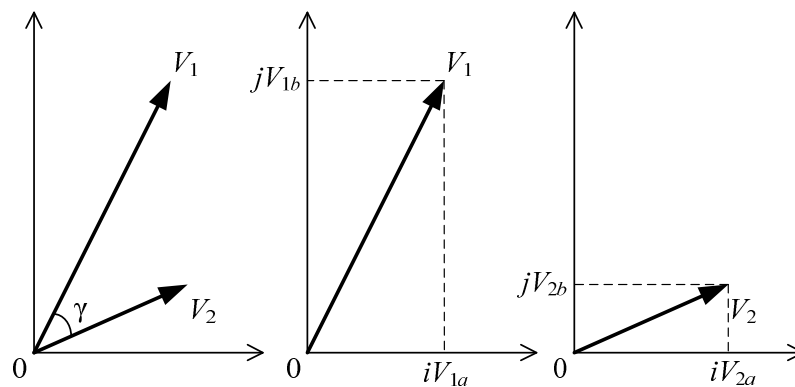


Рисунок 1. – Векторы V_1 и V_2 и их разложение на ортогональные составляющие

Определим количественную меру степени подобия V_1 и V_2 . Один из подходов заключается в образовании разностного вектора V_p (рисунок 2, а). Если $V_p = 0$, то векторы V_1 и V_2 идентичны. Когда $V_p \neq 0$, подбирают значение V_2 для уменьшения V_p . Рассмотрим вектор

$$V_p = V_1 - c_{12}V_2,$$

где c_{12} – вещественная постоянная.

Из рисунка 2, б видно, что V_p имеет наименьшее значение, когда ортогонален $c_{12}V_2$. Тогда вектор V_1 состоит из составляющей $c_{12}V_2$, которая отличается от V_2 только по величине, и составляющей V_p , ортогональной V_2 .

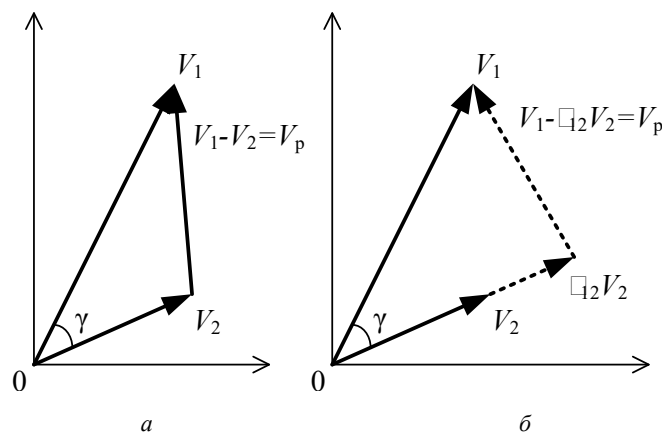


Рисунок 2 – Образование разностного вектора

Из рисунка 2, б найдём постоянную

$$c_{12} = |V_1| \cos \gamma / |V_2|.$$

Если угол $\gamma = 90^\circ$ (V_1 и V_2 ортогональны), то $c_{12} = 0$, а векторы V_1 и V_2 отличаются друг от друга максимально возможным образом, то есть некоррелированы. В противоположном случае, если угол $\gamma = 0$, c_{12} будет просто отношением амплитуд векторов, и $c_{12} = 1$, если $|V_1| = |V_2|$.

Альтернативное уравнению выражение можно получить, обратившись к определению скалярного произведения двух векторов. Если γ – угол между двумя векторами, тогда

$$V_1 \cdot V_2 = |V_1| |V_2| \cos \gamma,$$

откуда

$$c_{12} = V_1 \cdot V_2 / |V_2|^2.$$

Определим далее значение c_{12} так, чтобы его можно было применить к сравнению функций, отличных от простых двумерных векторов. Запишем разложение V_1 и V_2 на прямоугольные составляющие

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= iV_{1a} + jV_{1b}; \\ V_2 &= iV_{2a} + jV_{2b}; \\ V_p &= i(V_{1a} - c_{12}V_{2a}) + j(V_{1b} - c_{12}V_{2b}). \end{aligned} \right\}$$

Квадрат модуля (величины) V_p равен сумме квадратов его ортогональных составляющих:

$$|V_p|^2 = |V_1 - c_{12}V_2|^2 = (V_{1a} - c_{12}V_{2a})^2 + (V_{1b} - c_{12}V_{2b})^2.$$

В более общей форме

$$|V_p|^2 = \sum_{k=a}^b (V_{1k} - c_{12}V_{2k})^2.$$

Следовательно, значение c_{12} , которое минимизирует $|V_p|^2$, минимизирует также и $|V_p|$. Поэтому уравнение можно дифференцировать по c_{12} и, приравняв нулю, решить относительно c_{12} :

$$\frac{\partial |V_p|^2}{\partial c_{12}} = \frac{\partial}{\partial c_{12}} \left[\sum_{k=a}^b (V_{1k}^2 - 2c_{12}V_{1k}V_{2k} + c_{12}^2V_{2k}^2) \right] = 0;$$

$$\frac{\partial |V_p|^2}{\partial c_{12}} = 2c_{12} \sum_{k=a}^b V_{2k}^2 - 2 \sum_{k=a}^b V_{1k}V_{2k} = 0;$$

$$c_{12} = \frac{\sum_{k=a}^b V_{1k}V_{2k}}{\sum_{k=a}^b V_{2k}^2}.$$

Числитель в уравнении является по определению скалярным произведением V_1 и V_2 , а знаменатель представляет собой квадрат модуля V_2 . Постоянную c_{12} получили минимизацией квадрата разности между V_1 и V_2 .

В этом примере для минимизации вектора разности следовало бы изменять величину не модуля V_2 , а модуля V_1 . Такая операция даёт в результате следующее выражение:

$$c_{12} = \frac{\sum_{k=a}^b V_{1k}V_{2k}}{\sum_{k=a}^b V_{1k}^2}.$$

Если записать $V_2 = c_{12}V_1 + V_p$, увидим, что V_2 можно разложить на составляющие: одна будет отличаться от V_1 только по модулю, другая – V_p , ортогональная V_1 .

Заключение. Применяя методы представления, становится возможным введение и широкое использование методики снижения полей рассеивания.

Метод взаимной корреляции (векторное его представление) позволяет реализовать компенсацию полей рассеивания формированием взаимопротивоположной направленности векторов.

Авторы благодарят научного руководителя, доктора технических наук, профессора В.К. Железняк, за оказанную помощь в проводимых исследованиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Железняк, В.К. Защита информации от утечки по техническим каналам : учеб. пособие / В.К. Железняк. – СПб. : ГУАП, 2006. – 188 с.
2. Стейн, С. Принципы современной теории связи и их применение к передаче дискретных сообщений / С. Стейн, Дж. Джонс. – М. : Связь, 1971. – 376 с.
3. Гихман, И.И. Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М. : Наука, 1977. – 558 с.
4. Мидлтон, Д. Введение в статистическую теорию связи / Д. Мидлтон. – М. : Сов. радио, 1961. – 782 с.
5. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей: учеб. для вузов / Е.С. Вентцель. – М. : Наука, 1964. – 576 с.
6. Вентцель, Е.С., Теория вероятностей и ее инженерное приложение / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М. : Наука, 1988. – 480 с.

Поступила 02.03.2018

MULTIDIMENSIONAL VECTOR REPRESENTATION OF MOMENTUM SIGNAL VALUES WITH THEIR CORRELATION-MATRIX TREATMENT FOR ESTIMATION OF PROTECTION OF VOICE INFORMATION

D. RYABENKO, S. LAVROV

Evaluation of the security of speech information at all stages of the life cycle of information systems and their constituent elements remains a complex scientific task, in spite of the use of new promising models of noise-immune signals with optimal processing. The most important means of processing analog and digital signals for evaluating the protection of voice information remains the correlation method.

Keywords: analog and digital signal, correlation method, matrix processing.

УДК 621.396+517

МАЛОГАБАРИТНЫЙ ТЕСТОВЫЙ ГЕНЕРАТОР ПОМЕХ

В.М. ЧЕРТКОВ, А.В. ТОЛМАЧЕВ
(Полоцкий государственный университет)

Отражены результаты исследования, полученные в ходе разработки малогабаритного генератора радиопомех для испытаний радиолокационного оборудования и моделирования различных тактических ситуаций в условиях интенсивного использования противником средств радиоэлектронной борьбы. Представлен анализ структурных схем генератора радиопомех. Указаны достоинства и недостатки рассмотренных структур. Обоснована принципиальная схема исполнения малогабаритного тестового генератора радиопомех.

Ключевые слова: генератор помех, радиоэлектронная борьба, зондирующий сигнал, радиопомеха, лавинно-пролетный диод.

Введение. В последнее время значимость радиоэлектронной борьбы (РЭБ) значительно возросла. С каждым годом увеличивается разнообразие средств РЭБ и способов их применения. Возникает необходимость создания образцов РЭБ, максимально реализующих свои боевые возможности в условиях применения противником всех возможных средств и систем противодействия.

В ходе проектирования и разработки радиолокационного оборудования возникает вопрос об имитации сложной помеховой обстановки в процессе испытаний. При этом существует необходимость моделирования реальных тактических ситуаций, в которых для решения подобных задач можно использовать малогабаритные тестовые генераторы радиопомех.

Основная часть. Малогабаритный тестовый генератор радиопомех (МТГР) разработан с целью испытаний радиолокационного оборудования в условиях широкого применения условным противником средств РЭБ с использованием тактических приемов. Для полноценной имитации какой-либо тактической обстановки генератор обеспечивает создание помех в рабочем частотном диапазоне испытуемого радиолокационного оборудования.

Для повышения точности измерения координат воздушных объектов в радиолокации используют волны сантиметрового диапазона, исходя из этого будем считать, что частота зондирующего сигнала радиолокационной станции (РЛС) находится в X-диапазоне от 9100 до 9500 МГц [1].

Для эффективной защиты от активных помех в РЛС зачастую используются сложные импульсные зондирующие сигналы с двумя типами законов модуляции: кодо-фазовой модуляцией (КФМ) и линейной частотной модуляцией (ЛЧМ), а также прямоугольные радиоимпульсы. Сигналы КФМ построены в соответствии с кодами Баркера или вырезками из кодов М-последовательностей [2].

При использовании М-последовательности из N_d символов может быть сформировано несколько типов импульсных КФМ-сигналов со схожими автокорреляционными функциями. Каждый из различных типов КФМ сигналов имеет характерную только для него автокорреляционную функцию. Автокорреляционные функции таких типов сигналов отличаются друг от друга расположением и уровнем боковых выбросов [3].

Для снижения уровня взаимных помех от близко расположенных РЛС используют ЛЧМ-сигналы с возрастающим и убывающим законами изменения частоты. Изменение типа сигнала происходит с изменением режима работы станции [2].

Определив основные характеристики зондирующего сигнала, выбирают ширину спектра зондирующего сигнала таким образом, чтобы обеспечить разрешающую способность по дальности $\Delta r = 300$ м [1]. В соответствии с этим требованием ширина спектра зондирующего КФМ-сигнала равна $\Delta f_0 = 500$ кГц. Такой ширине спектра соответствует длительность дискрета КФМ-сигнала, равная $T_d = 2$ мкс. Ширина спектра ЛЧМ-сигнала с учетом расширения отклика фильтра сжатия на 33% при весовой обработке принятого сигнала с помощью окна Хемминга равна $\Delta f_0 = 665$ кГц. Ширина спектра зондирующего прямоугольного радиоимпульса равна $\Delta f_0 = 500$ кГц, а его длительность – $T_0 = 2$ мкс [3].

Выбор частоты зондирующего сигнала РЛС обуславливает частотный диапазон излучений от 9100 до 9500 МГц для малогабаритного генератора радиопомех. Для обеспечения перестройки по частоте в течение длительности импульса предлагается использовать ЛЧМ-сигнал, который должен иметь ширину спектра, перекрывающую ширину спектра излучаемых радиолокационных сигналов. Согласно проведенным нами расчетам, мощность излучаемого сигнала должна составлять от единиц до десятков милливатт. Для создания помехи прицельного типа антенная система должна обладать хорошими направленными свойствами и обеспечивать работу при изменении частоты излучаемого сигнала [3].

Коэффициент усиления антенны для создания помехи на входе приемника РЛС заданной мощности при известной мощности излучаемой помехи должен быть около 24 дБ. Габариты генератора совместно с антенной системой составляют 315×300×120 мм с учетом расчета на эксплуатацию одним человеком.

Чтобы уменьшить габаритные размеры и вес в современной радиоэлектронной аппаратуре широко применяются диодные твердотельные генераторы (ДТГ). К их достоинствам относятся также большой срок службы, высокая механическая прочность и низкие рабочие напряжения [4]. В качестве активного элемента в таких генераторах используют туннельный диод (ГТД), лавинно-пролетный диод (ЛПД) и диод Ганна (ДГ), работу которых наиболее целесообразно рассматривать с позиции понятия отрицательной проводимости (сопротивления) нелинейного элемента.

Для разработки структурной схемы МТГР выполнен анализ трех вариантов построения малогабаритного генератора радиопомех с использованием ДТГ на лавинно-пролетном диоде с входным сигналом, представляющим:

- 1) аддитивную смесь шума и пилообразного напряжения;
- 2) усиленный по мощности шум;
- 3) пилообразное напряжение.

Первый вариант построения. Структурная схема первого варианта показана на рисунке 1. Вид спектра излучаемого сигнала, полученного в результате компьютерного моделирования в пакете MATLAB, представлен на рисунке 2.

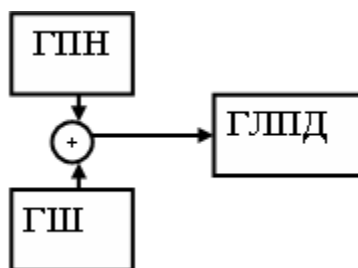


Рисунок 1. – Структурная схема генератора радиопомех (вариант 1)

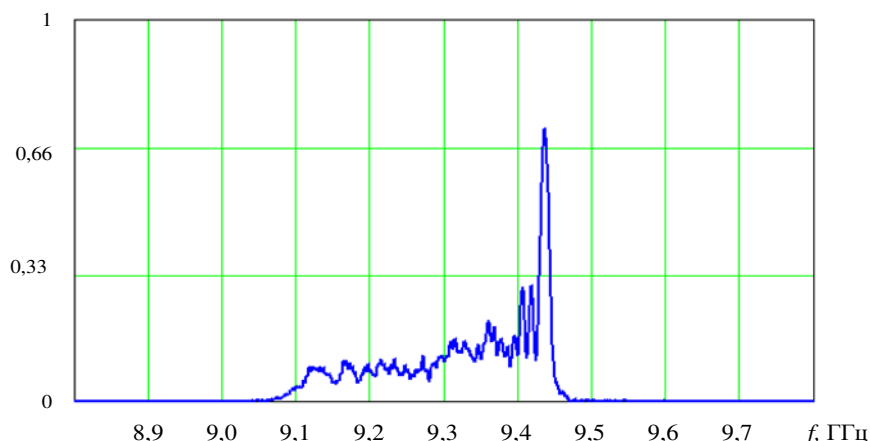


Рисунок 2. – Вид спектра излучаемого сигнала

В схему включены генератор пилообразного напряжения (ГПН), генератор шума (ГШ), смеситель и генератор на лавинно-пролетном диоде (ГЛПД). Пилообразное напряжение, создаваемое ГПН, суммируется с шумом на смесителе. Результирующий сигнал поступает на ГЛПД, на выходе которого формируется ЛЧМ-сигнал со случайными составляющими в амплитуде и фазе. Таким образом формируется сигнал помехи с шириной спектра чуть более 50 МГц. Благодаря шумовой составляющей спектр образованного сигнала несколько «размывается» по частоте. Однако необходимо отметить, что уровень шума, вырабатываемого ГШ, должен быть невысоким, иначе спектр выходного сигнала полностью «размывается» по частоте, что приводит к потере мощности. Необходимо также отметить, что получить строго линейное изменение модулирующего напряжения сложно.

К достоинствам структурной схемы на лавинно-пролетном диоде с входным сигналом, представляющим аддитивную смесь шума и пилообразного напряжения, можно отнести следующее:

- спектр выходного сигнала расширяется, что обеспечивает работу в более широком диапазоне частот;
- при незначительном уровне шума в модулирующем напряжении получают достаточно большую мощность излучаемого сигнала.

Вместе с тем определены и недостатки:

- усложняется техническая реализация схемы за счет применения смесителя и генератора шума;
- при большом уровне шума спектр выходного сигнала «размывается» по частоте, в результате чего теряется мощность формируемого сигнала.

Второй вариант построения. Структурная схема генератора радиопомех, включающая в себя лавинно-пролетный диод с усилителем мощности, изображена на рисунке 3. Вид спектра, сформированного по такой структуре излучаемого сигнала в результате моделирования в MATLAB, представлен на рисунке 4.

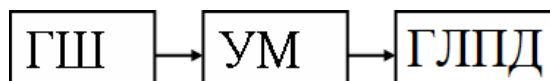


Рисунок 3. – Структурная схема генератора радиопомех (вариант 2)

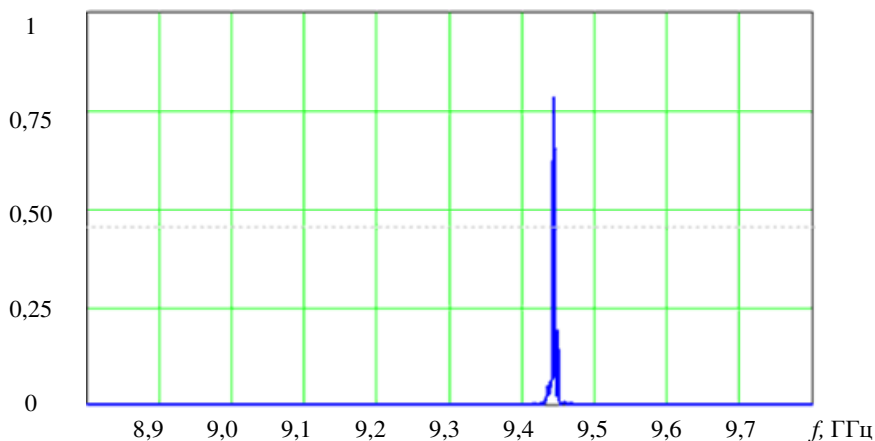


Рисунок 4. – Вид спектра излучаемого сигнала радиопомех

Структура генератора радиопомех представляет собой последовательную цепочку, состоящую из генератора шума, усилителя мощности (УМ) и генератора на лавинно-пролетном диоде. Шум на выходе ГШ усиливается и поступает на ГЛПД в качестве модулирующего напряжения. На выходе генератора на лавинно-пролетном диоде формируется помеха, у которой амплитуда и частота меняются только по случайному закону. Спектр такого сигнала очень узкий (от сотен герц до единиц килогерц, в зависимости от уровня шума), что в конечном итоге не обеспечивает создание помехи с необходимой шириной спектра. Следовательно, образованная помеха будет эффективной только для нескольких отдельных частот. Это обстоятельство не удовлетворяет предъявляемым к МТГР требованиям. К тому же, если подать в качестве модулирующего напряжения шум, то управлять режимами работы ГЛПД становится невозможно: уровень мощности излучаемого сигнала и его частота не поддаются регулированию.

К достоинствам такой схемы можно отнести следующие свойства:

- нет необходимости создавать модулирующее напряжение, которое должно изменяться по определенному закону;
- высокий уровень энергетического спектра сформированного сигнала помехи.

Недостатки:

- небольшая ширина энергетического спектра сигнала;
- невозможно управлять режимами ГЛПД (амплитудой и частотой излучаемого сигнала);
- конструкция усложняется введением дополнительного усилителя мощности.

Третий вариант построения. Структурная схема имеет последовательную цепочку, состоящую лишь из двух элементов, и представлена на рисунке 5. По результатам моделирования в MATLAB вид

спектра формируемого сигнала показан на рисунке 6. В качестве модулятора используется генератор пилообразного напряжения. На его выходе создается линейное пилообразное напряжение.

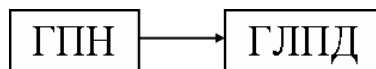


Рисунок 5. – Структурная схема генератора радиопомех (вариант 3)

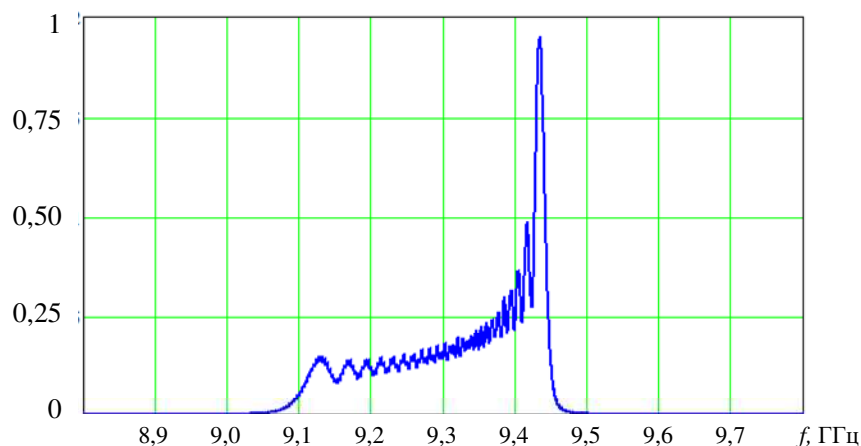


Рисунок 6. – Вид спектра излучаемого сигнала радиопомех

В результате на выходе ГЛПД формируется ЛЧМ-сигнал без шумовой составляющей, обеспечивающий автоматическую перестройку по частоте. Ширина энергетического спектра ЛЧМ-сигнала составляет чуть менее 50 МГц, что несколько меньше, чем в структуре первого варианта. Но это удовлетворяет предъявляемым требованиям к генератору помех. В энергетическом спектре имеется четко выраженный максимум, который объясняется наличием в модулирующем напряжении некоторой нелинейности. Уровень мощности помехи незначительно меньше, чем в случае дополнительного использования шума в качестве модулирующего напряжения. При этом упрощается техническая реализация устройства, так как нет необходимости дополнительного использования генератора шума, смесителя или усилителя мощности.

К достоинствам такой схемы можно отнести следующие свойства:

- ширина энергетического спектра позволяет создавать помехи РЛС в заданном частотном диапазоне;
- большая мощность сигнала на выходе;
- простота технической реализации по сравнению с другими вариантами;
- высокая вероятность безотказной работы благодаря использованию малого количества элементов.

Недостаток – отсутствие случайной составляющей в законе модуляции выходного сигнала.

Разработка принципиальной схемы малогабаритного тестового генератора радиопомех. По результатам анализа и сравнения вариантов структурных схем построения МТПР был выбран третий вариант, который является более надежным и простым в технической реализации. Данное решение базируется на следующих выводах:

- мощность, достигаемая при использовании ЛПД, может составлять до 12 Вт, в то время как у туннельных диодов – менее 10 мВт, а у диодов Ганна – от 100 до 400 мВт [5];
- долговечность ЛПД выше, чем у ГДГ и ГТД с параметрами: $t_{\text{ЛПД}} = 10^4\text{--}10^7$ ч, $t_{\text{ДГ}} = 10^5$ ч, $t_{\text{ТД}} = 10^4\text{--}10^6$ ч [5];
- коэффициент полезного действия, получаемый при использовании ЛПД, выше, чем при использовании ТД и ДГ [5]: $\eta_{\text{ЛПД}} \leq 42\%$, $\eta_{\text{ГДГ}} \leq 20\%$, $\eta_{\text{ДГ}} \leq 15\%$.

В отличие от генераторов на туннельных диодах, в ГЛПД эффект образования отрицательной проводимости проявляется только в динамическом режиме. Лавинное умножение носителей с образованием пространственного заряда происходит при напряжении на диоде $e_d > E_{\text{лп}}$, где $E_{\text{лп}}$ – напряжение лавинного пробоя.

Существует несколько разновидностей динамического режима колебаний с образованием пространственного заряда. Из них широко используются два основных: пролетный режим и режим с захва-

том плазмы (аномальный режим). В рассматриваемом случае использован пролетный режим. Этот режим удобно рассматривать с использованием диода Рида, рассмотренном более подробно в [5], где представлено распределение напряженности электрического поля и отмечен слой умножения заряда, в котором напряженность поля превышает $E_{\text{лп}}$.

Кроме диода ГЛПД включает в себя источник питания $E_{\text{лп}}$ и резонансную колебательную систему $L_K C_K$. Поскольку параллельно диоду подключена колебательная система, то на нем в стационарном режиме кроме $E_{\text{лп}}$ будет действовать гармоническое колебание с установившейся амплитудой U_m . Следовательно, суммарное мгновенное напряжение на диоде будет равно $e_d = E_{\text{лп}} + U_m \sin \omega t$ [5].

Пространственно-временные диаграммы движения электронов в пролетном пространстве, а также эпюры процесса образования импульсов тока лавинного пробоя и наведенного тока в ГЛПД представлены и проанализированы в [5].

Следует отметить, что процесс лавинного пробоя повторяется с периодом, равным периоду высокочастотных колебаний. Таким образом, наведенный ток представляет собой периодическую последовательность импульсов.

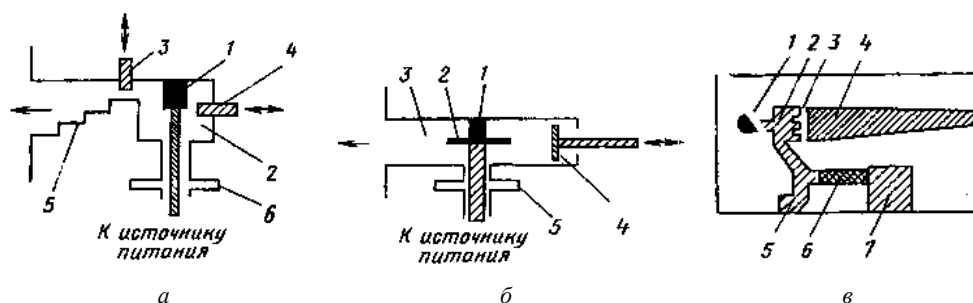
Определив лавинно-пролетный диод в качестве активного элемента, возникает необходимость выбора конкретной марки ЛПД с учетом того, что генератор должен излучать помеху в диапазоне от 9100 до 9500 МГц с мощностью от единиц до десятков милливатт. По результатам анализа справочной литературы [6] и возможностей реализации генератора выбор был сделан в пользу ЛПД 1А704В (диод германиевый планарно-диффузионный лавинно-пролетный), предназначенного для работы в генераторах в диапазоне частот от 8,3 до 10 ГГц.

Источник питания диода должен быть стабилизированным источником тока с внутренним сопротивлением более 2 кОм и емкостью не менее 10 пФ. Напряжение на зажимах источника тока при разрыве цепи питания диода не должно превышать более чем на 15 В напряжение при замкнутой цепи питания и установлении на диоде рабочего режима. Пределы регулирования тока источника от 15 до 50 мА. Максимальный ток диода с учетом выбросов не должен превышать $1,4 I_p$, где I_p – номинальный рабочий ток диода. В этом режиме допускается работа диода не более 3 мин [6].

Не допускается проверка годности диода с помощью прибора, который может задавать прямой ток более 50 мА. Допускается работа диода 1А704В:

- в импульсном режиме при токе в импульсе $I_{\text{и}} \leq I_p$ любой длительности и скважности;
- в диапазоне частот от 6 до 8 ГГц [6].

Основные конструкции ГЛПД схематически изображены на рисунке 7.



а – генератор волнового типа с коаксиальным резонатором; б – генератор волнового типа с открытым радиальным резонатором; в – генератор на микрополосковых линиях

Рисунок 7. – Основные схемы подключения ГЛПД

На рисунке 4, а показана конструкция генераторов волноводного типа с коаксиальным резонатором. Лавинно-пролетный диод 1 расположен в коаксиальном резонаторе 2, который перестраивается с помощью винта 4. Винт 3 служит для регулировки связи генератора с нагрузкой. Ступенчатый переход 5 является трансформатором сопротивлений. Дроссель 6 предназначен для разделения СВЧ-цепи и цепи питания [4].

Рисунок 4, б иллюстрирует другой вариант конструкции волноводного генератора. Лавинно-пролетный диод 1 установлен в открытом радиальном резонаторе 2, помещенном в прямоугольном волноводе 3. Перемещение замыкающего волновод плунжера 4 изменяет степень связи генератора с нагрузкой. Дроссель 5, как и в предыдущей конструкции, служит для разделения СВЧ-цепи и цепи питания [4].

На рисунке 4, в показана топология генератора на микрополосковых линиях. Бескорпусный ЛПД 1 установлен в полосковом резонаторе 2, который связан с выходной линией через трансформирующую

сопротивление линии 4 и блокировочный конденсатор 3. Питание ЛПД подводится через контактную площадку 7, ограничительный резистор 6 и фильтр 5, отделяющий СВЧ-цепь от цепи питания [4].

Заключение. При проектировании и разработке малогабаритного генератора помех был произведен анализ всех возможных активных элементов. Исходя из требований к уровню излучаемой мощности, частотному диапазону и долговечности, в качестве управляемого источника электронов был выбран лавинно-пролетный диод 1A704В, который полностью удовлетворяет размерам имеющегося короткозамкнутого волновода.

В качестве дополнительных мер для перестройки по частоте было выбрано параллельно колебательное включение в контур варикапа, подавая на который небольшое положительное напряжение получают изменение емкости, и, как следствие, изменение частоты излучаемого сигнала (на 200 МГц, по результатам проведения натурных экспериментов). Кроме того, дополнительно в резонаторе размещены два плунжера, которые путем механической перестройки изменяют погонную емкость и индуктивность колебательного контура, а значит, и частоту сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Радиолокационная станция обнаружения маловысотных наземных объектов Х-диапазона «Родник» [Электронный ресурс] / KB RADAR. – Режим доступа: <http://www.kbradar.by/products/radiolokatsiya/radiolokatsionnye-stantsii/519/>. – Дата доступа: 17.01.2018.
2. Моделирование в радиотехнике / А.И. Леонов [и др.] ; под ред. А.И. Леонова. – М. : Советское радио, 1979. – 264 с.
3. Радиоэлектронные системы: Основы построения и теория : справ. / под ред. Я.Д. Ширмана. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. : Радиотехника. 2007.
4. Проектирование радиопередающих устройств СВЧ / под ред. Г.М. Уткина. – М. : Сов. радио, 1979.
5. Павловский, А.В. Радиопередающие устройства : в 2 ч. / А.В. Павловский, И.В. Макаров, Д.А. Шаров. – Минск : Военная академия Респ. Беларусь, 2006.
6. Полупроводниковые приборы : справ. / под ред. Н.Н. Горюнова. – М. : Энергоатомиздат, 1987.

Поступила 02.03.2018

SMALL-SIZED TEST GENERATOR NOISE

V. CHERTKOV, A. TOLMACHEV

The research results which was obtained during the small-scale jamming generator developing that used for radar testing and various tactical situations in case intensive usage radioelectronic warfare devices by hostiles modeling. The analysis of the structural circuits of the avalanche-diode oscillator is presented. The advantages and disadvantages of the structures are indicated. The basic scheme for the execution of a small-sized test jamming generator is substantiated.

Keywords: jamming generator, radioelectronic warfare, noise, probing signal, avalanche-diode oscillator.

УДК 621.372.037.372;621.391.26

ПРИЛОЖЕНИЕ СИГНАЛЬНЫХ ГРАФОВ И МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КАНАЛОВ УТЕЧКИ ИНФОРМАЦИИ

*кан. техн. наук Д.С. РЯБЕНКО, С.В. ЛАВРОВ, Е.С. БОРОВКОВА
(Полоцкий государственный университет)*

Оценка напряженности магнитного поля является одной из важных задач для определения утечки информации. По результирующему вектору напряженности информационного магнитного поля определяют величину и направление сигнала, формируемого парциальными неориентированными излучателями. В работе использован матрично-топологический метод для определения направления и величины информационных сигналов, а следовательно, и напряженности магнитного поля.

Ключевые слова: сигнальные графы, матрица, информационный сигнал.

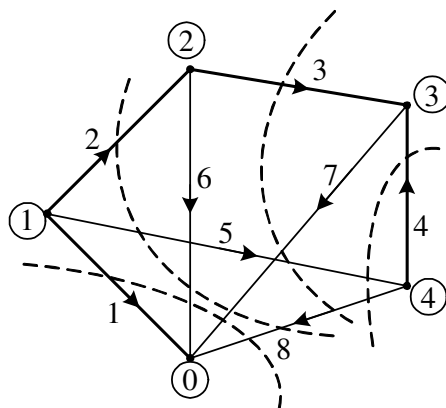
Высокая степень интеграции микроэлектроники, стремительное развитие технологических и информационных процессов обусловили новые принципиальные решения защиты информации от утечки. Физические и математические модели устанавливают рациональные методы исследования сложных информационных систем на всех стадиях их жизненного цикла и их элементов (блоки, печатные платы). Показатели защищенности оценивают в условиях активной и пассивной защиты каждого канала утечки информации [1].

Для получения достоверной информации нами использованы численные методы нахождения токов в различных цепях электронных приборов. При определении информационного сигнала в различных элементах электрической цепи используют матрично-топологический метод. Анализ электронных схем производят с помощью топологического описания цепи и математической модели, которая представляет собой систему уравнений, описывающих работу исследуемой схемы.

В основе топологического описания схем лежит понятие графа. Описание реальных объектов с помощью графов встречается весьма часто и применяется в самых разных областях знаний. Анализ теории графов указывает на необходимость представления графа в виде матрицы смежности и матрицы инцидентий.

Дуги графа, моделирующего электрическую цепь, интерпретируются как сопротивление или проводимость, а также как источники тока или напряжения. В вершинах графа происходит разветвление (слияние) токов [2]. Под графом G понимают пару (V, Γ) , где V – множество вершин, Γ – множество ребер [3].

Рассмотрена электрическая цепь, по которой построен граф, представленный на рисунке 1. Построение графа производится по эквивалентной схеме, которую получают из принципиальной электрической схемы. Для преобразования последней все нелинейные элементы, такие как диоды и транзисторы, заменяют их упрощенными эквивалентными схемами.



0–4 – узлы графа; --- – главные сечения графа;

1–8 – ребра графа (1–4 – ветви, 5–7 – хорды)

Рисунок 1. – Прохождение сигнала в электрической цепи

Любой граф, изображенный в геометрической форме в виде точек и соединяющих их дуг, может быть представлен в эквивалентной матричной форме [2]. Одной из матричных форм представления графа является матрица смежности. Порядок матрицы $n \times n$, где n – число вершин графа, элементы матрицы $a_{ij} = 1$, если дуга $\in \Gamma$, $a_{ij} = 0$, если дуга $\notin \Gamma$ [3]. Составим матрицу смежности представленного графа

$$A_C = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{matrix}. \quad (1)$$

Недостатком матрицы смежности является тот факт, что независимо от числа ребер объем занятой памяти составляет n^2 [4].

Другой матричной формой представления графа является матрица инцидентий. Размерность матрицы $n \times m$, где n – число вершин, m – число дуг графа. Каждой i -й строке матрицы инцидентий поставлена в соответствие вершина графа (v_i) и каждому j -му столбцу матрицы инцидентий – дуга графа (u_j). Элемент b_{ij} матрицы инцидентий равен -1 , если в вершину v_i заходит дуга u_j ; равен $+1$, если из вершины v_i исходит дуга u_j , и равен 0 , если дуга u_j и вершина v_i не являются инцидентными [5]. Тогда матрица инцидентий примет вид

$$A_{II} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Однако для анализа электронных схем переводить информацию, содержащуюся в графе, на алгоритмический язык проще и наглядней с помощью топологических матриц: матрицы главных сечений графа, матрицы главных контуров и структурной матрицы графа [5]. Сечением графа называется линия, делящая граф на две несвязанные части. Для получения главного сечения графа нужно линию сечения графа провести таким образом, чтобы она пересекала только одну ветвь при произвольном пересечении хорд. Построим матрицу главных сечений

$$A_{сеч} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Каждый элемент матрицы $a_{ij} = +1$, если j -е ребро пересекает i -е сечение в том же направлении, что и ветвь, определяющая это сечение, и $a_{ij} = -1$, если j -е ребро пересекает i -е сечение в направлении, противоположном направлению ветви, определяющей это сечение, $a_{ij} = 0$, если j -е ребро не пересекает i -е сечение [5].

Сформированная матрица состоит из двух подматриц

$$A_{сеч} = [E, F],$$

где E – единичная матрица главных сечений для ветвей, F – матрица главных сечений для хорд.

Матрицу главных сечений $A_{сеч}$ можно использовать для записи уравнений по первому закону Кирхгофа, тогда система будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

или

$$A_{\text{сеч}} \cdot \mathbf{I} = 0,$$

где $\mathbf{I}$ – вектор-столбец токов ребер, который состоит из двух подвекторов, один из которых вектор токов ветвей $\mathbf{I}_B$, а другой – вектор токов хорд $\mathbf{I}_X$:

$$\mathbf{I} = [i_1 \ i_2 \ i_3 \ i_4 \ i_5 \ i_6 \ i_7 \ i_8]^T = \begin{vmatrix} \mathbf{I}_B \\ \mathbf{I}_X \end{vmatrix}.$$

Тогда уравнение (4) преобразуется к виду

$$A_{\text{сеч}} \cdot \mathbf{I} = [E, F] \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{I}_B \\ \mathbf{I}_X \end{vmatrix} = E \cdot \mathbf{I}_B + F \cdot \mathbf{I}_X = F \cdot \mathbf{I}_X + \mathbf{I}_B$$

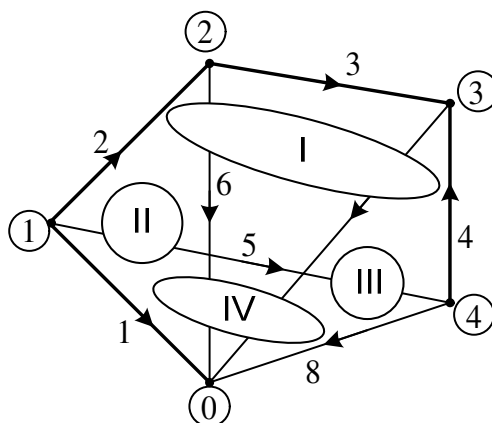
или

$$\mathbf{I}_B = -F \cdot \mathbf{I}_X. \quad (5)$$

С учетом (5) запишем зависимость

$$\begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Построим матрицу главных контуров, для этого нанесем на граф линии главных контуров, представленные на рисунке 2.



I–IV – главные контуры графа
Рисунок 2. – Граф с линиями главных контуров

$$A_{\text{конт}} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Каждый элемент матрицы $a_{ij} = +1$, если направление j -го ребра совпадает с направлением главного контура, $a_{ij} = -1$ – если направление j -го ребра противоположно направлению главного контура и $a_{ij} = 0$ – если j -е ребро не образует главного контура.

Сформированная матрица состоит из двух подматриц

$$A_{\text{конт}} = \begin{vmatrix} -F^T & E \end{vmatrix}.$$

Используя второй закон Кирхгофа, с учетом (7) система уравнений

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

или

$$A_{\text{конт}} \cdot U = 0,$$

где U – вектор-столбец напряжений, который состоит из двух подвекторов:

$$U = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} U_B \\ U_X \end{vmatrix}.$$

Тогда уравнение (8) преобразуется к виду

$$A_{\text{конт}} \cdot U = \begin{vmatrix} -F^T & E \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} U_B \\ U_X \end{vmatrix} = -F^T \cdot U_B + U_X$$

или

$$U_X = F^T \cdot U_B. \quad (9)$$

С учетом (9) запишем зависимость

$$\begin{vmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{vmatrix}.$$

Топологическим уравнением цепи называют матричное уравнение, объединяющее (5) и (9)

$$\begin{vmatrix} I_B \\ U_X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -F & 0 \\ 0 & F^T \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_X \\ U_B \end{vmatrix}.$$

Далее данное уравнение преобразуется к виду для независимых источников тока и напряжения. Зная величину и направление информационных сигналов, определяется вектор магнитной напряженно-

сти от каждого элемента электрической цепи, после чего находится результирующий вектор и его величина с помощью корреляционного метода.

Распределение магнитных информационных полей рассеивания с выделением результирующего вектора реализует алгоритмы для оценки защищенности информации в каналах утечки и их наводок на неинформативные цепи.

Авторы благодарят доктора технических наук, профессора В.К. Железняк за научную консультацию при выполнении исследовательской работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Железняк В.К. Защита информации от утечки по техническим каналам : учеб. пособие / В.К. Железняк. – СПб. : ГУАП, 2006. – 188 с.
2. Куликовский, Л.Ф. Теоретические основы информационных процессов : учеб. пособие для вузов по специальности «Автоматизация и механизация процессов обработки и выдачи информации» / Л.Ф. Куликовский, В.В. Мотов. – М. : Высш. шк., 1987. – 248 с.
3. Корни, Ш. Теория цепей. Анализ и синтез / Ш. Корни. – М. : Связь, 1973. – 308 с.
4. Липский, В. Комбинаторика для программистов : пер. с пол. / В. Липский. – М. : Мир, 1988. – 213 с.
5. Лосев, А.К. Теория линейных электрических цепей : учеб. для вузов / А.К. Лосев. – М. : Высш. шк., 1987. – 512 с.
6. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики : учеб. пособие для студентов высш. техн. учеб. заведений / Б.П. Демидович, П.А. Марон. – М. : Наука, 1970. – 664 с.
7. Марпл-мл., С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / С.Л. Марпл-мл. – М. : Мир, 1990. – 584 с.
8. Андерсон, Т. Введение в многомерный статистический анализ / Т. Андерсон. – М. : Физматгиз, 1963. – 500 с.

Поступила 20.03.2018

THE APPLICATION OF SIGNAL GRAPHS AND MATRIX ANALYSIS FOR MATHEMATICAL MODELING CHANNELS OF INFORMATION LEAKAGE

D. RYABENKO, S. LAVROV, Y. BARAUKOVA

Estimation of magnetic field intensity is one of the important tasks for determination of information leakage. The resulting vector of the information magnetic field intensity determines the magnitude and direction of the signal generated by partial undirected emitters. In this paper, a matrix-topological method is used to determine the direction and magnitude of information signals, and hence the magnetic field strength.

Keywords: *signal graphs, matrix, information signal.*

УДК 004.052.2

ВОЗДЕЙСТВИЕ ВЕТРОВОГО ДАВЛЕНИЯ НА ОЦЕНКУ СТАБИЛЬНОСТИ ТОЧКИ ПРИЕМА СИГНАЛОВ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

А.И. ЯРИЦА

(Полоцкий государственный университет)

Разработана блок-схема для оценки ветрового давления на точку приема сигналов. Проанализирована и выбрана оптимальная аппаратура для проведения эксперимента. Для математической обработки измерений использованы устойчивые робастные алгоритмы.

Ключевые слова: спутниковая система точного позиционирования, постоянно действующие пункты, робастная оценка, случайные воздействующие факторы.

Введение. Использование GPS-измерений в Республике Беларусь реализовано с помощью спутниковой системы точного позиционирования (ССТП). ССТП – критически важный объект информатизации, так как обеспечивает координатную основу всей страны. Точность определения, которую предоставляет данная спутниковая система, составляет 20 мм в плане и 30 мм по высоте в режиме обработки при времени наблюдения 1 ч. Такая точность удовлетворяет требованиям в строительстве, топографических съемках, планировании территории, а также в военных целях. Повышение точности ССТП позволит расширить спектр ее применения и значительно улучшить качество и оперативность выполняемых работ. Так, повышение точности до 5 мм в плане и до 10 мм по высоте позволит использовать GPS-измерения для строительства таких критически важных объектов страны, как магистральные трубопроводы, гидроэлектростанции, атомная электростанция, объектов железнодорожного и воздушного транспорта, а также качественно проводить монтаж и мониторинг взрывоопасных объектов.

На начало 2017 года, спутниковая система точного позиционирования представлена 98 постоянно действующими пунктами (ПДП), равномерно распределенными по всей территории страны, их располагают на крышах зданий. Существует целый ряд факторов, которые так или иначе влияют на горизонтальное и вертикальное положение пунктов: накопление вод на континентах, океанические приливные явления, влияние атмосферного давления. Наибольшее влияние среди этих факторов имеет атмосферное давление, которое вызывает деформацию земной коры, а следовательно, и смещение расположения GPS-станций, на величину 20 мм по вертикали и 3 мм по горизонтали [1]. Такие же результаты получены при выполнении исследовательских работ в Институте физики Земли (Россия) [2]. В работе [3] подробно рассмотрены основные случайные воздействующие факторы, влияющие не на подстилающую поверхность, а на саму конструкцию постоянно действующего пункта. К ним относятся: температурные перепады, вибрации, ветровое давление.

Основная часть. Исследование ветрового давления ведется в двух направлениях. Первое – принимая ветровое давление как случайное воздействие на ПДП, воздействие случайных факторов необходимо оценивать с помощью применения робастных алгоритмов математической обработки данных. Вторым направлением является разработка конструкции ПДП из устойчивых материалов к случайным воздействующим факторам [3].

Робастность предусматривает устойчивость системы к отклонению под влиянием воздействующих факторов. Особенности моделей робастной статистики состоят в том, что некоторые предположения принятой за основу идеальной модели в виде заданной функции распределения F_0 подвергаются сомнению. Для описания идеальной модели вместе с возможными отклонениями от нее в условиях реального эксперимента используют понятие «супермодель» множество допустимых функций распределения δ . «Супермодель» задают в виде некоторой окрестности идеальной модели F_0 , конкретизируемой выбранной метрикой $d(F_0, F_x)$ на множестве допустимых функций распределения δ , то есть «супермодель» задается в виде множества [4]

$$\delta R = \{FX : d(F_0, F_x) < \varepsilon\}, \varepsilon > 0. \quad (1)$$

Нами используется «супермодель» с засорением, имеющая вид

$$\delta_{\varepsilon, \tau}(\Phi) = \{F : F(x) = \Phi_{\varepsilon, \tau}(x), \quad (2)$$

для которой функция распределения

$$\Phi_{\varepsilon, \tau}(x) = (1 - \varepsilon)\Phi(x) + \varepsilon\Phi(x / \tau), \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \tau \geq 1. \quad (3)$$

В работе [5] исследовано и показано, что среднее значение ветрового давления на 5-этажное здание составляет более 28 кг/м^2 . Расчет проводился для постоянно действующего пункта спутниковой системы точного позиционирования, находящегося на крыше здания школы г.п. Оболь. Оценка воздействия ветрового давления на точку приема сигналов GPS ПДП определяется в зависимости от ее численного значения в мировой системе координат.

Поставлена задача – определить зависимость колебания точки в горизонтальной плоскости под влиянием ветрового давления. Для этого разработана блок-схема эксперимента (рисунок), для проведения одновременного измерения скорости ветра и расстояния от точки нахождения объекта до пункта.

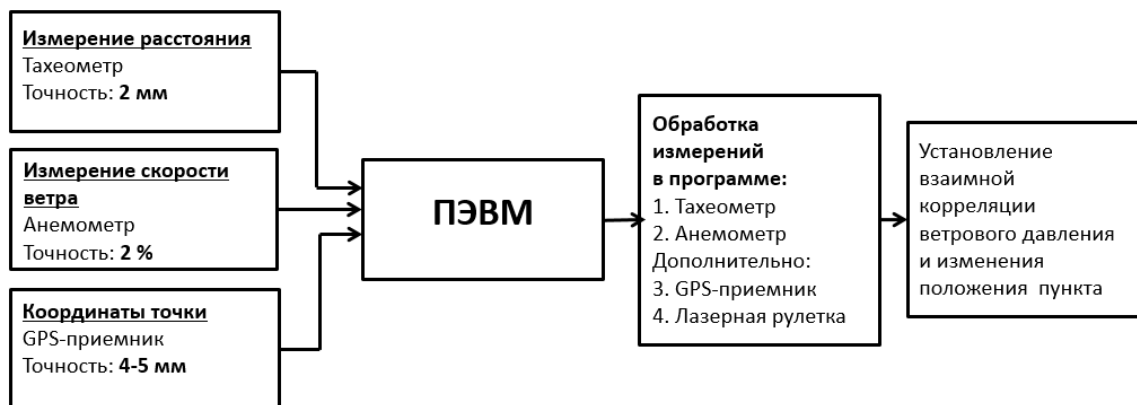


Рисунок. – Блок-схема эксперимента оценки влияния ветрового давления на ПДП

Прежде всего требуется решить вопрос с высокоточным измерением скорости ветра. В настоящее время развиваются два основных метода зондирования скорости ветра: доплеровский и корреляционный. Оба метода основаны на активном дистанционном зондировании атмосферы с использованием измерительной системы лазерных источников излучения, называемой лидаром (Lidar – Light Identification, Detection and Ranging). Методы лазерного зондирования обеспечивают получение профилей или полей различных параметров атмосферы с исключительно высоким временным и пространственным разрешением, обладая при этом рекордными концентрационными чувствительностями [6]. Однако лидарные измерения требуют сложной дорогостоящей аппаратуры и наиболее актуальны при составлении профилей скорости ветра на большие расстояния (1–5 км) и длительное время. В нашу задачу входит измерение мгновенной скорости ветра в конкретной точке, в конкретное время. Проведя изучение современной аппаратуры, для проведения эксперимента выбран высокоточный анемометр марки Мегеон 11007, характеристики которого представлены в таблице 1.

Таблица 1. – Технические характеристики анемометра Мегеон 11007

Диапазон измерений потоков воздуха	Разрешение измерений потоков воздуха	Диапазон измерений температуры	Подключение к компьютеру	Погрешность измерений температуры	Наличие дисплея
0,3–20 м/с	0,01 м/с	0–50 °С	USB	±0,5 °С	есть

План эксперимента. На крыше, где расположен пункт со спутниковым геодезическим приемником, устанавливается высокоточный прибор для измерения скорости ветра. Перпендикулярно стене, с установленным на ней пунктом, располагается тахеометр Trimble M3. С помощью этого высокоточного прибора проводится фиксация изменений положения пункта. Измерение происходит со скоростью 1,6 с. В тахеометре реализована возможность как линейных, так и угловых измерений. Это позволяет проводить эксперимент и наблюдать колебания точки приема сигналов GPS не зависимо от направления движения ветра. Технические характеристики прибора представлены в таблице 2.

Таблица 2. – Технические характеристики тахеометра Trimble M3

Точность линейных измерений на отражателе	Точность линейных измерений без отражателя	Дальность измерения на отражателе	Дальность измерения без отражателя	Угловая точность	Рабочая температура	Подключение к компьютеру
2 мм	3 мм	5000 м	500 м	1–5"	от –20 °С до +50 °С	USB

Два прибора синхронизируются по времени. Кроме того, для получения дополнительных измерений, используемых при обработке эксперимента, на самом пункте установлен спутниковый геодезический приемник Trimble R7 (таблица 3).

Таблица 3. – Технические характеристики спутникового приемника Trimble R7

Точность в режиме RTK, мм/км		Точность в режиме статика, мм/км		Частота записи данных	Рабочая температура
в плане	по высоте	в плане	по высоте		
$\pm 8 \text{ мм} + 0,5$	$\pm 15 \text{ мм} + 0,5$	$\pm 3 \text{ мм} + 0,5$	$\pm 15 \text{ мм} + 0,5$	1 Гц, 2 Гц, 5 Гц, 10 Гц, 20 Гц	от -40°C до $+65^{\circ}\text{C}$

Для контроля измерения расстояний будет использоваться лазерный дальномер Leica Disto D3, имеющий точность 1 мм и функцию непрерывного измерения. Несмотря на более высокую точность, данный прибор не будет использоваться как основной, так как не имеет возможности угловых измерений и жесткой фиксации.

Для обработки измерений подобраны сразу несколько программных комплексов. Один из них программный комплекс SCAD, содержащий в себе программу BeCT, предназначенную для выполнения расчетов, связанных с определением нагрузок и воздействий на строительные конструкции, таких как температура и ветер. При обработке измерений факторы, воздействующие на точку в вертикальной плоскости, будут учитываться с помощью программы, разработанной в Институте Физики Земли (Москва).

Вывод. Результатом исследования стала разработка блок-схемы и ее параметров. Составлен оптимальный высокоточный аппаратный и программный комплекс для проведения эксперимента оценки влияния ветрового давления. Ожидаются подходящие погодные условия для его проведения. Итогом эксперимента станет установление взаимной корреляции изменения положения точки приема сигналов GPS от ветрового давления в режиме реального времени. Правильно выбранный робастный алгоритм позволяет учесть данную зависимость при математической обработке данных эксперимента. На основе полученных и обработанных измерений будет дана оценка степени влияния ветра на пункты, находящиеся на поверхности крыши.

Автор благодарит научного руководителя доктора технических наук, профессора В.К. Железняк за оказанную помощь в проводимых исследованиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Petrov, L. Study of the atmospheric pressure loading signal in very long baseline interferometry observations / L. Petrov, J.-P. Boy // Journal of Geophysical Researches. – V.109, B03405. DOI:10.102982003JB002500.
2. Дробышев, М.Н. Совершенствование методических приемов оценки вертикального перемещения точек земной поверхности: автореф. ... дис. канд. техн. наук / М.Н. Дробышев. – М. : ИФЗ, 2016. – 26 с.
3. Железняк, В.К. Стабилизация возмущающих воздействий на прием сигналов искусственного спутника Земли / В.К. Железняк, А.И. Ярица // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 4 – с. 61–65.
4. Шуленин, В.П. Робастные методы математической статистики / В.П. Шуленин. – Томск : Изд-во НТЛ, 2016. – 260 с.
5. Железняк, В.К. Анализ случайных физических явлений, снижающих точность координат точки прием сигналов GPS / В.К. Железняк, А.И. Ярица // Современные средства связи : материалы XXI Междунар. науч.-техн. конф., 20–21 окт. 2016 г., Минск, Респ. Беларусь ; редкол. : А. О. Зеневич [и др.]. – Минск: Белорусская государственная академия связи, 2016. – 240–243 с.
6. Зуев, В.Е. Дистанционное оптическое зондирование атмосферы : моногр. / В.Е. Зуев, В.В. Зуев. – СПб. : Гидрометеоздат, 1992. – 231 с. – (Серия «Современные проблемы атмосферной оптики» ; т. 8).

Поступила 20.03.2018

EFFECT OF WIND PRESSURE ON STABILITY ESTIMATION OF THE APPROACH OF SIGNALS OF ARTIFICIAL SATELLITES OF THE EARTH

A. YARYTSA

The accuracy and efficiency of GPS measurements affects the quality and range of work performed. Wind action is one of the random factors that affect the accuracy of measurements. A flowchart for evaluating the wind pressure at the signal receiving point has been developed. Optimal equipment for the experiment was chosen. For mathematical processing of measurements, robust algorithms are used.

Keywords: satellite system of the exact positioning, permanent items, robust estimation, random influencing factors.

УДК 621.372.037.372;621.391.26

ПРИЛОЖЕНИЕ СИГНАЛЬНЫХ ГРАФОВ И МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КАНАЛОВ УТЕЧКИ ИНФОРМАЦИИ

канд. техн. наук Д.С. РЯБЕНКО, С.В. ЛАВРОВ
(Полоцкий государственный университет)

Методическая и вычислительная оптимизация новых решений направлена на устранение противоречий между схемными и конструктивными параметрами и их защищенностью. Главная проблемная научно-практическая задача направлена на исключение паразитных информационных связей, опираясь на минимизацию, высокую плотность компоновки бескорпусных активных элементов, применение больших и сверхбольших интегральных схем [1]. Технология монтажа многослойных печатных плат ограничивает доступ к измерению и контролю параметров и характеристик схем. Паразитные связи из-за взаимных наводок снижают быстродействие управлением и обменом информацией. Вторая проблема – защита радиоэлектронных средств различного назначения от радиопомех [2].

Ключевые слова: каналы утечки информации, матричный анализ, критерий защищенности.

Введение. Высокая степень интеграции микроэлектроники, стремительное развитие технологических и информационных процессов обусловили новые принципиальные решения защиты информации от утечки. Физические и математические модели устанавливают рациональные методы исследования сложных информационных систем на всех стадиях их жизненного цикла и их элементов (блоки, печатные платы). Показатели защищенности оценивают в условиях активной и пассивной защиты каждого канала утечки информации.

Точностные и временные параметры оценивают на соответствие критериев (показателей) защищенности каналов утечки информации [3, 4].

Проанализирована схемно-конструктивная оценка защищенности информации с использованием направленных графов и корреляционных функций электронных устройств. Проведено исследование сложных многоконтурных и многосвязных систем с использованием топологических свойств элементов матриц, отличающиеся значительным объемом обрабатываемой информации со сложными связями как между объектами, связывающими информационные системы, объектами информатизации, так и элементами более низкого уровня, т.е. структурными схемами или графами.

Структурные схемы, как и графы для многосвязных систем большой размерности, становятся чрезвычайно сложными для исследований.

Метод исследования. При исследовании причинно-следственных связей между значениями токов и напряжений используют теорию сигнальных графов, матричной алгебры, матричного преобразования, расчета их входных и выходных параметров, матричного преобразования h -параметров транзистора [5]. Качество и достоверность оценки сигналов при обработке в матричной форме весьма актуальна.

Сигнальные графы содержат ребра и вершины (узлы) исследований токов (напряжений) с определенным направлением (ориентированный граф). Ориентированный граф $G = (V, E)$, где V – множество вершин, E – множество ребер, анализируется с помощью матрицы смежности и матрицы инцидентности [6].

Специальные векторные и матричные структуры обеспечивают матричные операции, матрицы представляют емкий метод систематизации алгебраических и численных соотношений [7].

Матрица инцидентности A с n строками, соответствующим вершинам, и m столбцами, соответствующим ребрам. Для ориентированного графа столбец, соответствующий дуге $\langle x, y \rangle \in E$, содержит -1 в строке, соответствующей вершине x , 1 – в строке, соответствующей вершине y , и нули – во всех остальных строках. Петлю, т.е. дугу в виде $\langle x, x \rangle$, удобно представлять значением в строке x , например 2 [6, 7].

Матричное уравнение $Ax = 0$. Матрицу A представлена в виде суммы двух матриц [8]:

$$A = D + C, \quad (1)$$

где $A = \begin{bmatrix} n \\ a_{ij} \\ i, j = 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} n \\ a_{ii} \\ i = 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} n \\ a_{ij} \\ i \neq j \end{bmatrix}.$

Уравнение (1) в развернутой форме имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Из полученного выражения (2) следует, что матрица D состоит только из диагональных членов, матрица C – только из недиагональных. Матрица A получена из системы алгебраических уравнений и представлена линейным однородным уравнением в матричной форме (1). Развернутая форма уравнения (2) – это форма представления с относительно главным членом, слагаемым с одинаковыми цифрами в индексе $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

Элементы матрицы D являются собственными операторами системы, а элементы матрицы C – операторами связей [8].

Транспонированная матрица A получена заменой строк матрицы A столбцами матрицы A^T и ее столбцов – строками матрицы A [9]:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Разделяют все элементы матрицы (3) на величину определителя.

Определитель (детерминант) вырожденной квадратной $n \times n$ матрицы определяется выражением [7]

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a[1, j] A_{1j}, \quad (4)$$

где $a[1, j]$ – элемент из верхней строки матрицы A ;

A_{1j} – определитель $(n-1) \times (n-1)$ матрицы, образованной отбрасыванием первой строки и j -го столбца $n \times n$ матрицы A .

Квадратная $n \times n$ матрица вырожденная тогда и только тогда, когда $\det A = 0$. Если $\det A \neq 0$, то матрица A обратима. Определитель произведения двух квадратных $n \times n$ матриц A и B равен произведению определителей этих матриц $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Единичная матрица E , созданная из матрицы A и обратной ей матрицы A^{-1} , полученной из обращения матрицы A и умноженной как справа, так и слева на матрицу A [10]

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где A^{-1} – обратная неособенная квадратная матрица матрице A .

Неособенная матрица n -го порядка [10]

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

где $\det A = \Delta \neq 0$.

Для матрицы A присоединительная матрица $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения (миноры со знаками) соответствующих элементов a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

Разделив все элементы матрицы $\tilde{A}$ на величину определителя Δ матрицы A , имеем

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11}/\Delta & A_{21}/\Delta & \dots & A_{n1}/\Delta \\ A_{12}/\Delta & A_{22}/\Delta & \dots & A_{n2}/\Delta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n}/\Delta & A_{2n}/\Delta & \dots & A_{nn}/\Delta \end{bmatrix}.$$

Произведение AA^* позволяет получить единичную матрицу [10]:

$$AA^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}/\Delta & A_{21}/\Delta & \dots & A_{n1}/\Delta \\ A_{12}/\Delta & A_{22}/\Delta & \dots & A_{n2}/\Delta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n}/\Delta & A_{2n}/\Delta & \dots & A_{nn}/\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = E. \quad (5)$$

Из матрицы (2) получены две диагональные матрицы Д и С, по которым можно оценить уровень излучения (тока), а также уровень связей.

Квадратичная матрица $A = \|a_{ik}\|$ называется верхней треугольной (нижней треугольной), если равны нулю все элементы матрицы, расположенные под главной диагональю (над главной диагональю) [11].

Диагональная матрица является частным случаем, как верхней, так и нижней треугольной матрицы [11].

Определитель треугольной и диагональной матрицы является необоснованным только тогда, когда все ее диагональные элементы отличны от нуля [11].

На основании теоремы 1 [11], всякая матрица $A = \|a_{ik}\|_1^n$ ранга r , у которой первые r последовательных главных миноров отличны от нуля:

$$D_k = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r), \quad (6)$$

представима в виде произведения нижней треугольной матрицы В на верхнюю треугольную матрицу С

$$A = BC = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

При этом $b_{11}c_{11} = D_1$, $b_{22}c_{22} = \frac{D_2}{D_1}$, ..., $b_{rr}c_{rr} = \frac{D_r}{D_{r-1}}$.

На основании теоремы 2 [11], определено что всякая матрица $A = \|a_{ik}\|_1^n$ ранга r , удовлетворяющая условию (6), представима в виде произведения нижней треугольной матрицы F, диагональной D и верхней треугольной L:

$$A = FDL = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ f_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & & & \\ & \frac{D_2}{D_1} & & \\ & & \frac{D_r}{D_{r-1}} & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

где $f_{gk} = \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & g \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}}$, $l_{kg} = \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & g \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}}$ ($g = k+1, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, r$), а f_{gk} , l_{kg}

произвольны при $g = k+1, \dots, n$; $k = 1+r, \dots, n$.

С помощью метода исключения Гаусса, примененного к матрице $A = \|a_{ik}\|_1^n$ ранга r , для которой $D_k \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, r$), получают две матрицы: нижнюю треугольную матрицу W с диагональными элементами 1 и верхнюю треугольную матрицу G , у которой первые r диагональных элементов равны $D_1, \frac{D_2}{D_1}, \dots, \frac{D_r}{D_{r-1}}$, а последние $n-r$ строк заполнены нулями. G – гауссова форма матрицы A , W – преобразующая матрица.

Матрице A приписывают справа единичную матрицу E :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & a_{1n} & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & a_{nn} & 0 & . & 1 \end{vmatrix}.$$

Применяя к этой прямоугольной матрице все преобразования алгоритма Гаусса, получают прямоугольную матрицу, состоящую из двух.

Прежде чем обратить матрицу одним из методов, установим требования по ее норме. Под нормой матрицы $A = [a_{ij}]$, где $[a_{ij}]$ – модули матрицы A , устанавливают действительное число $|A|$, удовлетворяющее следующим условиям [10]:

- а) $|A| > 0$;
- б) $|\alpha A| = |\alpha| |A|$, (α – число);
- в) $|A + B| \leq |A| + |B|$;
- г) $|AB| \leq |A| \cdot |B|$,

где A и B – матрицы, для которых соответствующие операции имеют смысл.

Зная элементы матрицы A порядка n , определитель которой $\det|A| \neq 0$ (матрица необособленная), можно установить главные элементы.

Квадратную матрицу обращают в треугольную, если элементы, стоящие выше (ниже) главной диагонали, равны нулю [10]:

$$T = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{vmatrix},$$

где $t_{ij} = 0$ при $i > j$ для верхней треугольной матрицы.

$$T_1 = \begin{vmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{vmatrix},$$

где $t_{ij} = 0$ при $i > j$ для нижней треугольной матрицы.

Например, представить матрицу

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 14 \end{vmatrix}$$

в виде произведения двух треугольных матриц T_1 и T_2 .

$$A = T_1 T_2.$$

Будем искать T_1 и T_2 в виде

$$T_1 = \begin{vmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} \text{ и } T_2 = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

откуда, перемножив значения T_1 и T_2 , получим

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{11}r_{12} & t_{11}r_{13} \\ t_{21} & t_{21}r_{12} + t_{22} & t_{21}r_{13} + t_{22}r_{23} \\ t_{31} & t_{31}r_{12} + t_{32} & t_{31}r_{13} + t_{32}r_{23} + t_{33} \end{vmatrix}.$$

Перемножив правую часть и приравняв к левому значению, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} t_{11} &= 1; & t_{11}r_{12} &= -1; & t_{11}r_{13} &= 2; \\ t_{21} &= -1; & t_{21}r_{12} + t_{22} &= 5; & t_{21}r_{13} + t_{22}r_{23} &= 4; \\ t_{31} &= 2; & t_{31}r_{12} + t_{32} &= 4; & t_{31}r_{13} + t_{32}r_{23} + t_{33} &= 14. \end{aligned}$$

Решив систему, получим

$$\begin{aligned} t_{11} &= 1; & t_{21} &= -1; & t_{31} &= 2; \\ t_{22} &= 4; & t_{32} &= 6; & t_{33} &= 1; \\ r_{12} &= -1; & r_{13} &= 2; & r_{23} &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Полученные численные значения подставляем в треугольные матрицы T_1 и T_2 :

$$T_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \text{ и } T_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для всякой квадратной матрицы, для которой известны верхняя и нижняя обратные треугольные матрицы T_1 и T_2 , можно определить обратную на основании теоремы [10]

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

имеющую отличные от нуля главные диагональные миноры:

$$\Delta_1 = a_{11} \neq 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0; \dots; \Delta_n = |A| \neq 0,$$

и представить в виде произведения двух треугольных матриц различных структур (нижней и верхней), причем это разложение будет единственным, если заранее зафиксировать диагональные элементы одной из треугольных матриц.

В качестве примера рассмотрим матрицу

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

у которой верхняя и нижняя треугольная матрица будет иметь вид

$$T_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -10 & -50 \end{vmatrix}, \quad T_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для определения матрицы T_1^{-1} воспользуемся равенством $T_1 T_1^{-1} = E$. Тогда имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -10 & -50 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

В соответствии с этим равенством получим систему уравнений

$$\begin{cases} x_{11} = 1, & x_{22} + 2x_{32} = 0, \\ -x_{11} + x_{21} = 0, & x_{22} - 10x_{32} + 50x_{42} = 0, \\ 2x_{11} - x_{21} + 2x_{31} = 0, & 2x_{33} = 1, \\ x_{11} + x_{21} - 10x_{31} - 50x_{41} = 0 & -10x_{33} - 50x_{43} = 0, \\ x_{22} = 1; & -50x_{44} = 1. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$x_{11} = 1; x_{21} = 1; x_{31} = -\frac{1}{2}; x_{41} = \frac{7}{50}; x_{22} = 1; x_{32} = \frac{1}{2};$$

$$x_{42} = -\frac{2}{25}; x_{33} = \frac{1}{2}; x_{43} = -\frac{1}{10}; x_{44} = -\frac{1}{50}.$$

Следовательно,

$$T_1^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{7}{50} & -\frac{2}{25} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{50} \end{vmatrix}.$$

Для определения матрицы T_2^{-1} воспользуемся равенством $T_2 T_2^{-1} = E$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 1 & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & 1 & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x_{12} + 1 = 0, \\ x_{13} + x_{23} + 3 = 0, \\ x_{23} + 6 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{14} + x_{24} + 3x_{34} + 4 = 0, \\ x_{24} + 6x_{34} + 2 = 0, \\ x_{34} - 4,5 = 0. \end{cases}$$

Откуда $x_{12} = -1; x_{23} = -6; x_{13} = 3; x_{34} = 4,5; x_{24} = -29; x_{14} = 11,5$. Значит,

$$T_2^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 11,5 \\ 0 & 1 & -6 & -29 \\ 0 & 0 & 1 & 4,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Используя равенство $A^{-1} = T_2^{-1}T_1^{-1}$, находим

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 11,5 \\ 0 & 1 & -6 & -29 \\ 0 & 0 & 1 & 4,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{7}{50} & -\frac{2}{25} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{50} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{100} & -\frac{21}{50} & \frac{7}{20} & -\frac{23}{100} \\ \frac{6}{100} & \frac{8}{25} & \frac{1}{10} & \frac{29}{50} \\ \frac{13}{100} & \frac{7}{50} & \frac{1}{20} & \frac{9}{100} \\ \frac{7}{50} & -\frac{2}{25} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{50} \end{bmatrix}.$$

Заключение. Представление исходной матрицы, разложенной на диагональную, нижнюю и верхнюю треугольные матрицы, показывает сложность практической реализации даже такого преобразования. В дальнейшем исследование радиоэлектронной аппаратуры предлагается проводить разбиением ее электрической схемы на конструктивные законченные функциональные элементы, что позволит получить алгоритмы оптимизации, пригодные для автоматизации процесса обработки.

Исследования, представленные в статье, основаны на научной идее, предложенной доктором технических наук, профессором В.К. Железняком.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мигулин, И.Н. Интегральные микросхемы в радиоэлектронных устройствах / И.Н. Мигулин. – К. : Техника, 1985. – 208 с.
2. Тихонов, В.И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем : учеб. пособие для вузов / В.И. Тихонов, В.Н. Харисов. – М. : Радио и связь, 1991. – 608 с.
3. Железняк, В.К. Защита информации от утечки по техническим каналам : учеб. пособие / В.К. Железняк. – СПб. : ГУАП, 2006. – 188 с.
4. Кошечая, Л.А. Обеспечение единства испытаний. Концептуальные основы / Л.А. Кошечая. – К. : НАУ-друк, 2009. – 176 с.
5. Расчет транзисторных цепей / под ред. Р.Ф. Ши. – М. : Энергия, 1964. – 204 с.
6. Корни, Ш. Теория цепей. Анализ и синтез / Ш. Корни. – М. : Связь, 1973. – 308 с.
7. Марпл-мл., С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / С.Л. Марпл-мл. – М. : Мир, 1990. – 584 с.
8. Шатихин, Л.Г. Структурные матрицы и их применение для исследования систем / Л.Г. Шатихин. – М. : Машиностроение, 1974. – 248 с.
9. Липницкий, В.А. Высшая математика. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии : учеб. пособие для курсантов учреждений высшего образования / В.А. Липницкий. – Минск : Военная акад. Респ. Беларусь, 2015. – 229 с.
10. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики : учеб. пособие для студ. высш. техн. учеб. заведений / Б.П. Демидович, П.А. Марон. – М. : Наука, 1970. – 664 с.
11. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – Изд. 2-е, доп. – М. : Наука, 1966. – 576 с.
12. Авондо-Бодио, Дж. Применение в экономике теории графов / Дж. Авондо-Бодио ; пер. с англ. под общ. ред. А.А. Фридмана. – М. : Прогресс, 1966. – 160 с.

Поступила 02.03.2018

ANNEX OF SIGNAL GRAPHS AND MATRIX ANALYSIS FOR MATHEMATICAL MODELING OF INFORMATION LEAKS CHANNELS

D. RYABENKO, S. LAVROV

The methodical and computational optimization of new solutions is aimed at eliminating the contradictions between the circuit and design parameters and their security. The main scientific and practical problem is aimed at the elimination of parasitic information links, thanks to minimization, high density of the layout of open-frame active elements, the use of large and extra-large integrated circuits. The technology of mounting multi-layer printed circuit boards limits access to measurement and control of parameters and characteristics of circuits. Parasitic communications due to mutual targeting reduce the speed of control and information exchange. The second problem is the protection of radio electronic devices for various purposes from radio interference.

Keywords: information leakage channels, matrix analysis, security criterion.

УДК 621.396

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА ОТКЛИКА СЛОЖНОГО ЗОНДИРУЮЩЕГО СИГНАЛА ОТ НЕЛИНЕЙНОСТИ С АППРОКСИМАЦИЕЙ СТЕПЕННЫМ РЯДОМ

М.М. ИВАНОВ, В.М. ЧЕРТКОВ
(Полоцкий государственный университет)

Разработана программная модель в среде Matlab, позволяющая моделировать переизлученный сигнал от нелинейности с аппроксимацией степенным рядом. Синтезировано несколько видов сложных зондирующих сигналов, представленных в виде аддитивной смеси СШП сигнала и негармонического СВЧ-сигнала. Проведен спектральный анализ моделируемых переизлученных сигналов. На основании результатов анализа произведен выбор и обоснование зондирующего сигнала, при котором переизлученный сигнал имеет наибольшее значение мощности.

Ключевые слова: нелинейный радиолокатор, сверхширокополосный сигнал, нелинейный элемент.

Введение. Известно, что применение аддитивной смеси сверхширокополосных (СШП) и сверхвысокочастотных (СВЧ) сигналов в нелинейной радиолокации обуславливает возникновение эффекта их взаимной модуляции [1], способного влиять на чувствительность нелинейного радиолокатора (НРЛ) [2].

Целью работы является сравнительный анализ сложных зондирующих сигналов, представленных в виде аддитивной смеси СШП-сигнала и негармонического СВЧ-сигнала, путем моделирования отклика от элементов с нелинейной вольтамперной характеристикой (НЭ) для повышения чувствительности нелинейного радиолокатора (НРЛ). Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

- создания имитационной модели взаимодействия зондирующего сигнала с НЭ;
- проведения спектрального анализа переизлученных сигналов от НЭ;
- выбора и обоснования зондирующего сигнала, при котором переизлученный сигнал имеет наибольшее значение мощности.

Синтез программной модели. Моделирование проведено для двух случаев нелинейности, аппроксимированной степенным рядом:

- второго порядка, которая имитирует полупроводник радиоэлектронного элемента [3] и для нелинейности;
- третьего порядка, которая имитирует полупроводник, полученный в результате соединений металлов или их окислов [3].

Для анализа переизлученных сигналов от НЭ при зондировании СШП-сигналом совместно с СВЧ используется программная модель (ПМ), реализованная в среде Matlab. Программная модель выполняет следующие функции:

- генерирование зондирующего сигнала с заданными параметрами;
- имитация наличия шума в радиоканале;
- моделирование нелинейности с аппроксимацией степенным рядом;
- расчет переизлученного сигнала;
- спектральное представление зондирующего и переизлученного сигналов.

При моделировании рассмотрены следующие виды зондирующих сигналов:

- СШП-сигнал и мощный гармонический СВЧ-сигнал;
- СШП-сигнал и СВЧ-сигнал, частотно модулированный синусоидальным сигналом;
- СШП-сигнал и СВЧ-сигнал, частотно модулированный пилообразным;
- СШП-сигнал и СВЧ-сигнал, частотно модулированный последовательностью кода Баркера.

Структурная схема, поясняющая принцип работы ПМ, представлена на рисунке 1.

Зондирующий сигнал формируется с помощью Matlab модели и экспортируется в модель Simulink, где моделируется взаимодействие с нелинейностью. Затем результат моделирования экспортируется в Matlab модель для спектрального анализа. Экспорт и импорт данных осуществляется с помощью следующего программного кода:

```
wave.time = t; % экспорт времени в Simulink
wave.signals.values = zond'; %экспорт зондирующего сигнала в Simulink
wave.signals.dimensions =1;
%% ВЫЗОВ СИМУЛИНК МОДЕЛИ
model = 'intermod_sim';
load_system(model)
sim(model)
zondh=simout2.signals.values; % экспорт зондирующего сигнала
otr=simout.signals.values % экспорт переизлученного сигнала
```

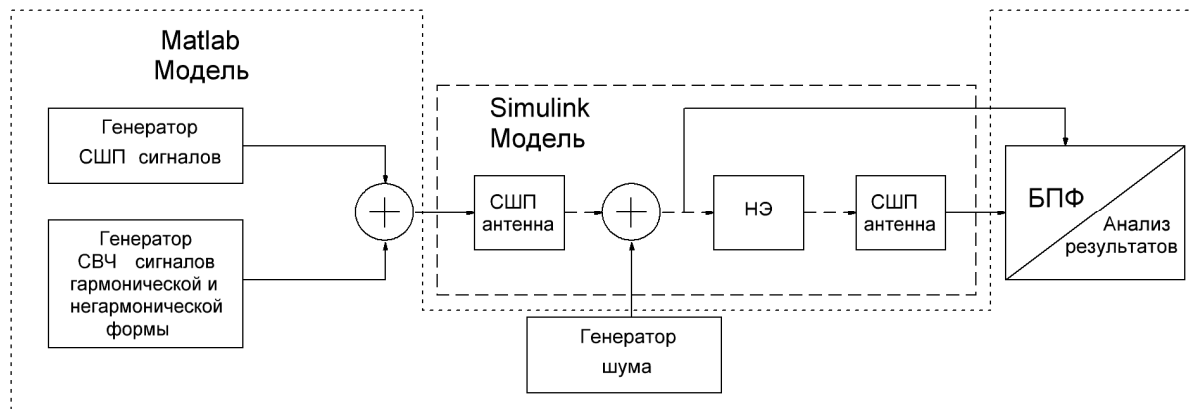


Рисунок 1. – Структурная схема ПМ

На рисунке 2 представлена структура модели Simulink.

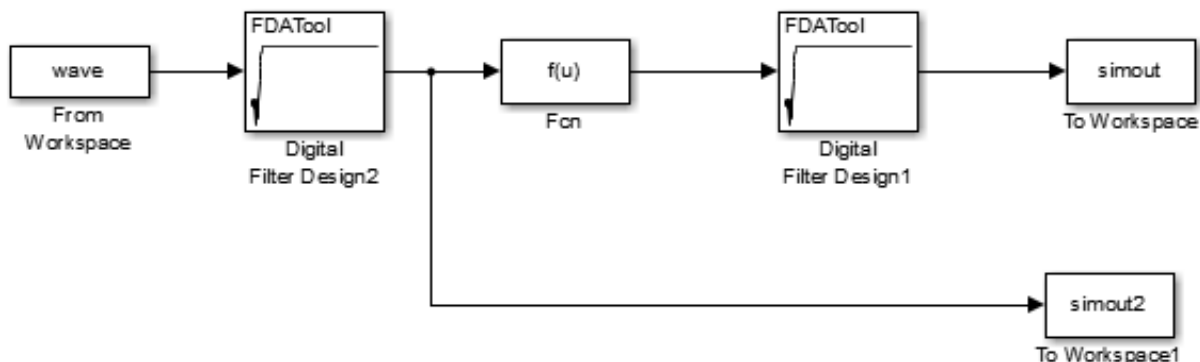


Рисунок 2. – Модель взаимодействия нелинейного элемента с зондируемым сигналом

Функциональное назначение блоков модели Simulink:

- блок «From workspace» импортирует из workspace отсчеты зондирующего сигнала;
- блоки «Digital Filter Design2» и «Digital Filter Design1» моделируют ограничение нижней частоты передающей и принимаемой антенн соответственно и представляют собой цифровые СВЧ-фильтры;
- блок «Fcn» моделирует нелинейность, аппроксимированную степенным рядом второго или третьего порядка;
- блок «To Workspace» экспортирует отсчеты в workspace переизлученного от НЭ сигнала и принятого на приемную антенну НРЛ;
- блок «To Workspace1» экспортирует отсчеты в workspace зондирующего сигнала с учетом ограничения его спектра на передающей антенне.

Считаем, что антенны, используемые на прием и передачу СШП-сигналов, одинаковы, нижняя частота полосы пропускания которых составляет 450 МГц.

СШП-сигнал имеет вид последовательности импульсов, форму которых описывает вторая производная функции Гаусса. Данный вид сигнала широко распространен в СШП-радиолокации [4]. Спектр СШП-сигнала находится в диапазоне от 0,5 до 1,5 ГГц, а уровень средней мощности составляет минус 60 дБм.

Последовательность таких импульсов частотой 100 МГц и максимальной мощностью – минус 45 дБм в Matlab модели описана с помощью кода

```
N=512; % количество моделируемых точек
Fs=10e+9; % частота дискретизации
fp=1/(1e-9); % ширина спектральной плотности СШП сигнала
t=0:1/Fs:(N-1)/Fs; %формирование временных отсчетов моделирования
yi=0;
for i=1:512
    y(i,:) = gausspuls(t-(i*100)/Fs,fp,1); % формирование последовательности
    yi=yi+y(i,1:512); % второй производной импульсов Гаусса
end
```

```
figure; % вывод на график СШП сигнала в частотной области
plot(f,fftshift(10*log10(1000/50*abs(fft(yi.*w')/length(yi)).^2)));xlabel('f,Hz');
ylabel('Power,dBm')
figure; % вывод на график во временной области СШП сигнала
plot(t,yi);xlabel('t,c'); ylabel('U,B')
```

Моделируемый СШП сигнал во временной области представлен на рисунке 3, а и в частотной – на рисунке 3, б.

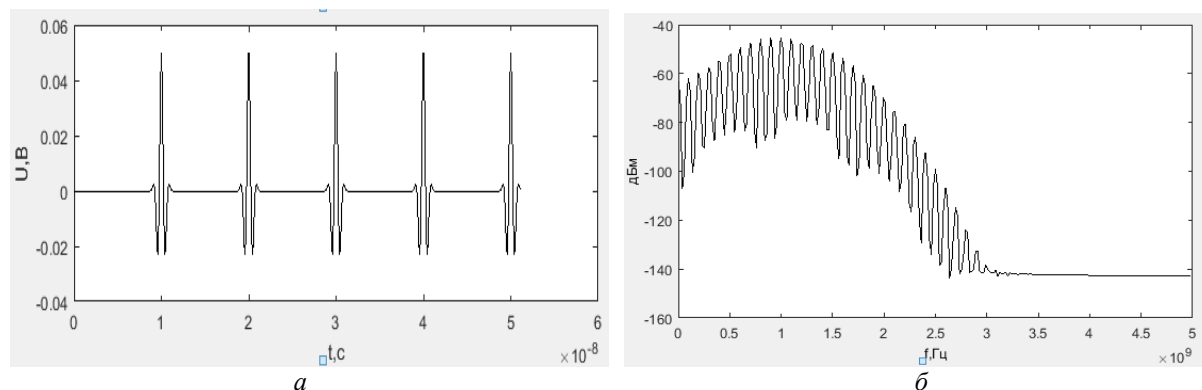


Рисунок 3. – Моделируемый СШП-сигнал во временной области (а), в частотной области (б)

Спектральный анализ и результаты моделирования.

Эксперимент 1. Зондирующий сигнал представляет собой аддитивную смесь СШП и мощного гармонического СВЧ-сигналов. Мощность гармонического сигнала задана на уровне минус 4,4 дБм, частота – 900 МГц, при этом средний уровень шума составляет минус 50 дБм. Листинг кода модели Matlab для моделирования гармонического сигнала выглядит следующим образом:

```
harmonic=0.5.*sin(2*pi*fn*t); % гармонический сигнал
Noise=0.02*randn(1,length(t)); % шум
figure; % гармонический сигнал во временной области
```

Рассмотрим результаты моделирования. Спектр зондирующего сигнала показан на рисунке 4.

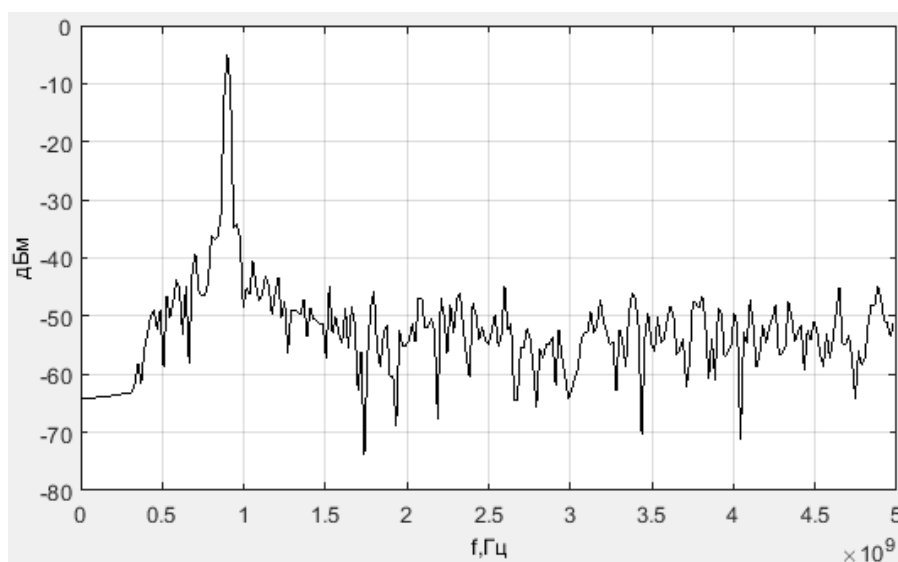


Рисунок 4. – Спектр зондирующего сигнала

В таком случае спектр переизлученного сигнала от нелинейности, аппроксимированной степенным рядом второго порядка, показан на рисунке 5, а, а от нелинейности аппроксимированной степенным рядом третьего порядка – на рисунке 5, б.

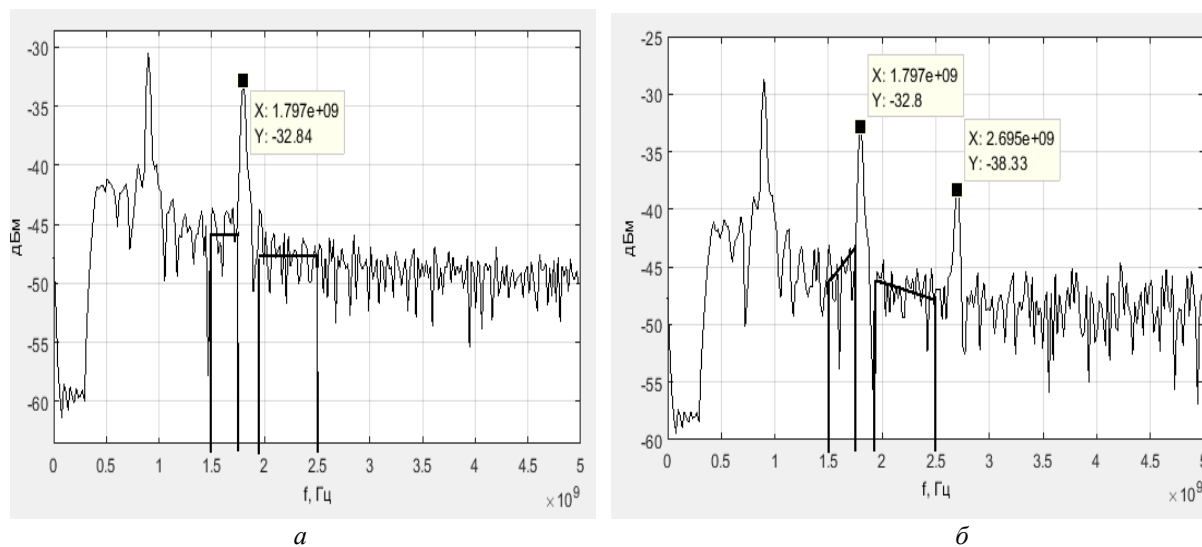


Рисунок 5. – Спектр переизлученного сигнала от нелинейности, аппроксимированной степенным рядом второго порядка (а) и третьего порядка (б)

В спектре переизлученного сигнала от нелинейности, аппроксимированной степенным рядом второго порядка, появилась удвоенная гармоника СВЧ-сигнала мощностью минус 33 дБм, в диапазоне от 1,5 до 1,7 ГГц виден подъем средней мощности до минус 44 дБм, а в диапазоне от 1,9 до 2,5 ГГц – до минус 47 дБм. Уровень шума составляет минус 50 дБм.

В спектре переизлученного сигнала от нелинейности, аппроксимированной степенным рядом третьего порядка, появились удвоенная и утроенная гармоники СВЧ-сигнала мощностью минус 33 дБм и минус 38 дБм соответственно. В диапазоне от 1,5 до 1,7 ГГц значение средней мощности увеличилось до минус 44 дБм, в диапазоне от 1,9 до 2,3 ГГц – до минус 45 дБм. Необходимо отметить, что и уровень шума вырос до минус 46 дБм.

Эксперимент 2. Зондирующий сигнал представляет собой аддитивную смесь СШП и частотно модулированного СВЧ сигнала. Индекс модуляции равен 10, модулирующий сигнал имеет вид синусоидального сигнала частотой 3кГц, Формирование данного зондирующего сигнала выполняется с помощью следующего программного кода:

```
tone=5.*sin(2*pi*3e3*t); %генерация тона
mod=pmmmod(tone, fn,Fs,10);% модуляция тоном
zondfm=mod+yi+Noise; %зондирующий сигнал
```

Рассмотрим результаты моделирования. Спектр зондирующего сигнала показан на рисунке 6.

Спектр переизлученного сигнала от нелинейности, аппроксимированной степенным рядом второго порядка, показан на рисунке 7, а и от нелинейности, аппроксимированной степенным рядом третьего порядка, – на рисунке 7, б.

В спектре переизлученного сигнала от нелинейности, аппроксимированной степенным рядом второго порядка, присутствует вторая гармоника СВЧ-сигнала мощностью минус 12 дБм, а также наблюдается повышение средней мощности в диапазонах от 1,5 до 1,7 ГГц до минус 45дБм и от 1,9 до 2,5 ГГц до минус 43 дБм, вызванное нелинейным преобразованием СШП-сигнала.

В спектре переизлученного сигнала от нелинейности, аппроксимированной степенным рядом третьего порядка, уровень шума увеличился до минус 44 дБм. Присутствуют вторая и третья гармоники СВЧ-сигнала мощностью минус 12 дБм и минус 18 дБм соответственно. Наблюдается повышение значения средней мощности в диапазонах от 1,5 до 1,7 ГГц до минус 43 дБм, в диапазоне от 1,9 до 2,5 ГГц – до минус 44 дБм.

Уровень мощности второй гармоники на 21 дБм выше уровня мощности второй гармоники при проведении эксперимента 1. Аналогичное превышение уровня наблюдается и для третьей гармоники. Значение средней мощности на частотах в диапазоне от 1,9 до 2,5 ГГц в эксперименте 2 выше на 2 дБм чем в эксперименте 1.

Эксперимент 3. В качестве зондирующего сигнала используется аддитивная смесь СШП и частотно модулированного СВЧ-сигнала сигналом пилообразной формы частотой 30 кГц. Индекс модуляции равен 10. Ниже представлен программный код моделирования данного сигнала:

```
chirp = 5.*sawtooth(2*pi*30e3*t); % формирование пилообразного сигнала
mod=pmmod(chirp, fn,Fs,10);      % ЧМ модуляция
zondlchm=mod+yi+Noise; % зондирующий сигнал
```

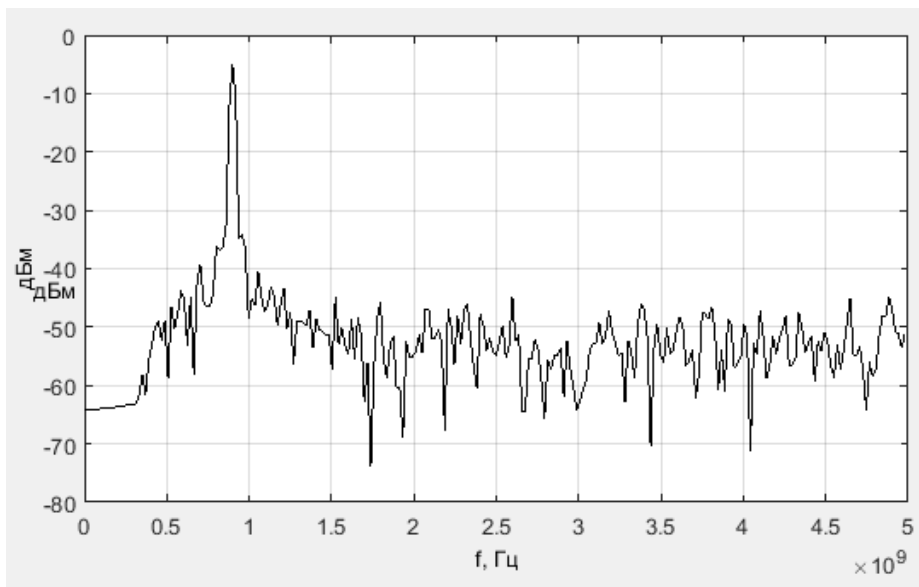


Рисунок 6. – Спектр зондирующего сигнала

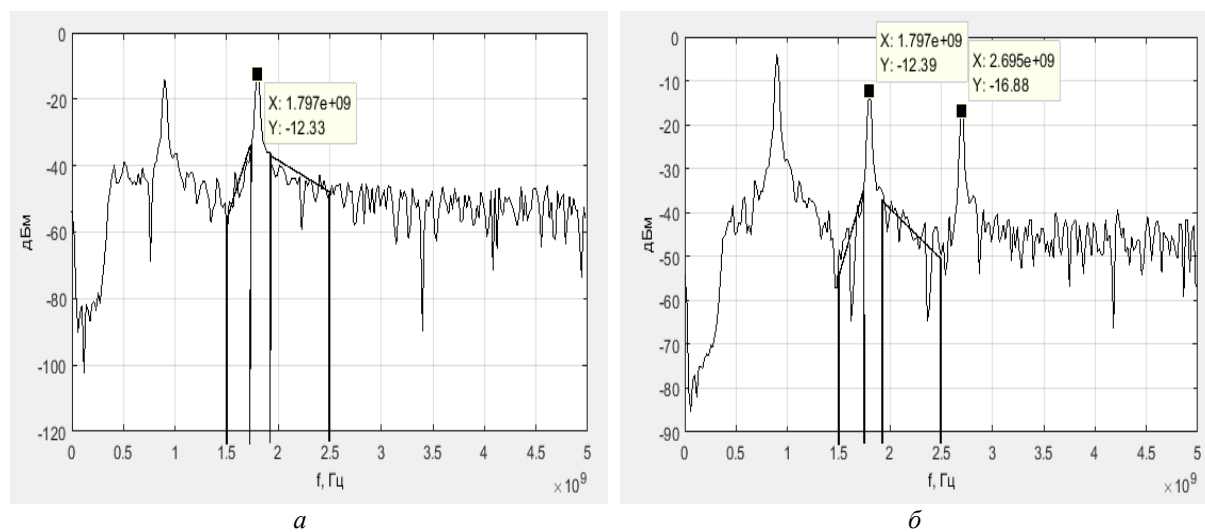


Рисунок 7. – Спектр переизлученного сигнала от нелинейности, аппроксимированной степенным рядом второго порядка (а) и третьего порядка (б)

Спектр зондирующего сигнала представлен на рисунке 8.

Спектр переизлученного сигнала от нелинейности, аппроксимированной степенным рядом второго порядка, показан на рисунке 9, а, а от нелинейности, аппроксимированной степенным рядом третьего порядка, – на рисунке 9, б.

В спектре переизлученного сигнала от нелинейности, аппроксимированной степенным рядом второго порядка, присутствует вторая гармоника СВЧ сигнала мощностью минус 12 дБм. В диапазоне от 1,5 до 1,7 ГГц повышения значения средней мощности не наблюдается, а в диапазоне от 1,9 до 2,5 ГГц средняя мощность увеличилась до минус 42 дБм.

В спектре переизлученного сигнала от нелинейности, аппроксимированной степенным рядом третьего порядка присутствуют вторая и третья гармоники СВЧ-сигнала мощностью минус 12 дБм и минус 18 дБм соответственно. Также наблюдается увеличение значения средней мощности в диапазоне от 1,9 до 2,5 ГГц до минус 41 дБм, а в диапазоне от 1,5 до 1,7 ГГц значение средней мощности не увеличилось.

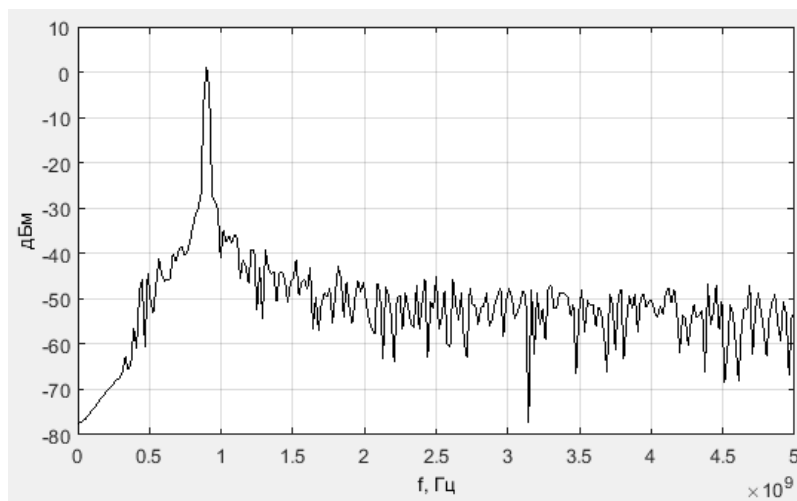


Рисунок 8. – Спектр зондирующего сигнала

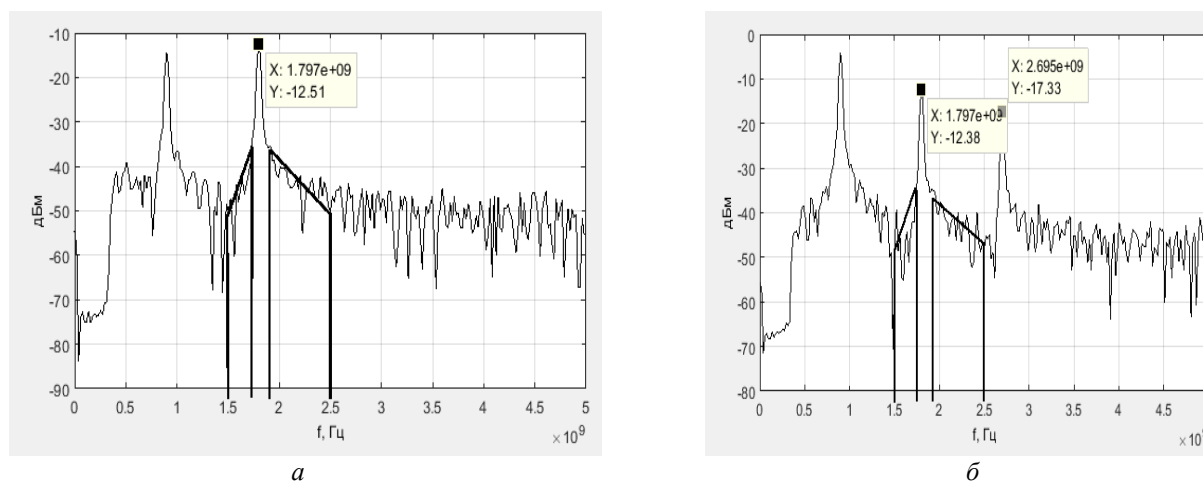


Рисунок 9. – Спектр переизлученного сигнала от нелинейности, аппроксимированной степенным рядом второго порядка (а) и третьего порядка (б)

Эксперимент 4. Зондирующий сигнал представляет собой аддитивную смесь СШП и частотно модулированного СВЧ-сигнала кодом Баркера длиной 13 символов. Индекс модуляции равен 10.

Ниже представлен программный код моделирования.

```
hBCode = comm.BarkerCode('SamplesPerFrame',13, 'Length', 13); %формирование
seq_barker=step(hBCode);%запись кода в переменную
seq_barker_t=[]; %пустой массив
for j=1:13
    for i=1:40
        seq_barker_t=[seq_barker_t,seq_barker(j)]; % формирование с таймсэмпами
    end
end
%figure; plot(seq_barker_t);
mod=pmmmod(0.01.*seq_barker_t(1:512), fn,Fs,10); %модуляция
zondbark=mod+yi+Noise; %зондирующий сигнал
```

Спектр полученного зондирующего сигнала показан на рисунке 10.

Спектр переизлученного сигнала от нелинейности, аппроксимированной степенным рядом второго порядка, показан на рисунке 11, а, а от нелинейности, аппроксимированной степенным рядом третьего порядка, – на рисунке 11, б.

В спектре переизлученного сигнала от нелинейности, аппроксимированной степенным рядом второго порядка, мощность второй гармоники составляет минус 12 дБм. Уровень средней мощности увеличился до минус 44 дБм и до минус 43 дБм в диапазонах от 1,5 до 1,7 ГГц и от 1,9 до 2,5 ГГц соответственно.

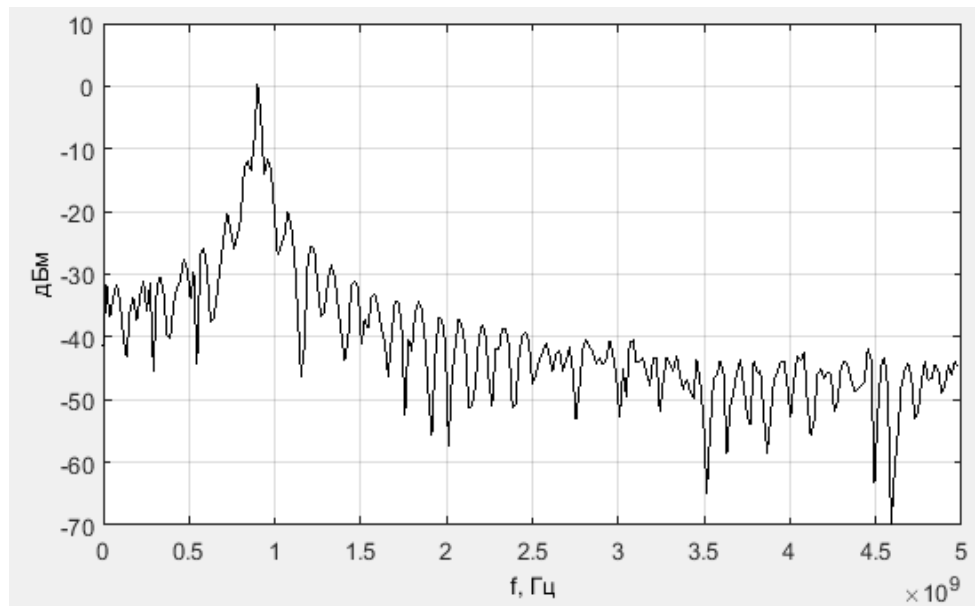


Рисунок 10. – Спектр зондирующего сигнала

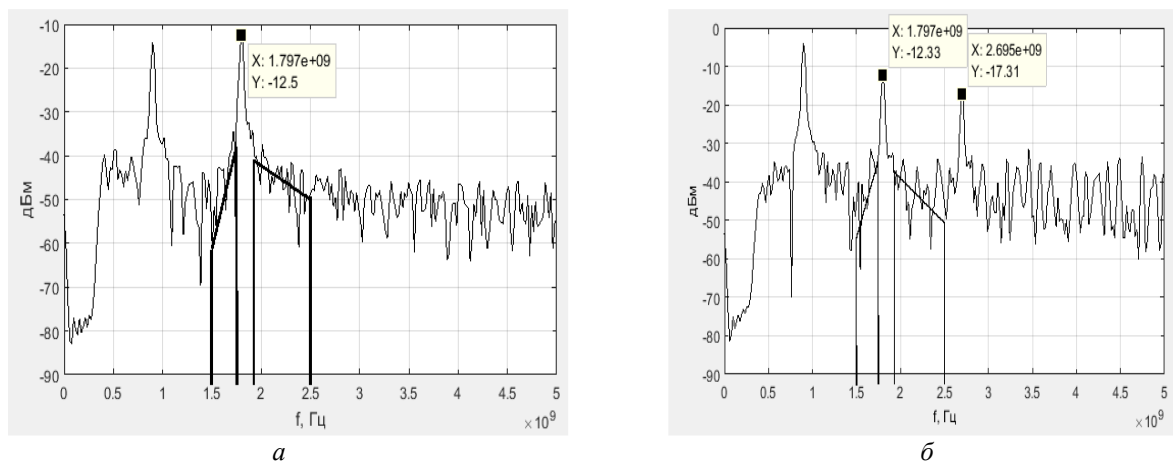


Рисунок 11. – Спектр переизлученного сигнала от квадратичной нелинейности (а) и кубической (б)

В спектре переизлученного сигнала от нелинейности, аппроксимированной степенным рядом третьего порядка, вторая гармоника СВЧ-сигнала имеет уровень мощности минус 12 дБм, третья – минус 20 дБм. Наблюдается повышение значения средней мощности в диапазонах от 1,5 до 1,7 ГГц и от 1,9 до 2,5 ГГц до минус 42дБм. Уровень шума составляет минус 42 дБм.

Заключение. Сравнительный анализ показал:

1. Использование аддитивной смеси СШП- и СВЧ-сигналов в качестве зондирующего для НРЛ имеет место классический нелинейных эффект возникновения второй гармоники СВЧ-сигнала для полупроводниковых НЭ, которые аппроксимируются степенным рядом второго порядка. Для НЭ, представляющих тип металлических контактных соединений, переизлученный от них сигнал содержит третью гармонику. Кроме того, наблюдается эффект взаимной модуляции СШП- и СВЧ-сигналов.

2. Применение частотной модуляции СВЧ составляющей аддитивной смеси сигнала приводит к увеличению мощности переизлученного сигнала для второй и третьей гармоник примерно на 21 дБм, для СШП части – на 1 – 4 дБм по отношению к эксперименту без модуляции СВЧ-сигнала.

3. Уровень мощности переизлученного сигнала от НЭ, аппроксимированного степенным рядом второго порядка, имеет наибольшее значение при частотной модуляции СВЧ-сигнала кодом Баркера (таблица 1). Для НЭ, аппроксимированного степенным рядом третьего порядка, наибольший уровень мощности достигает при модулировании СВЧ-сигнала пилообразным сигналом. При этом отмечено, что частотная модуляции СВЧ-сигнала приводит к повышению уровня шума на 10 дБм (таблица 2). Для обоих типов НЭ наименьший уровень мощности переизлученного сигнала наблюдается при использовании гармонического СВЧ-сигнала.

Таблица 1. – Результаты моделирования для нелинейностей, аппроксимированных полиномом второй степени

Вид зондирующего сигнала	Мощность переизлученного сигнала, дБм		
	второй гармоники	средняя на частотах 1,5 – 1,7 ГГц	средняя на частотах 1,9 – 2,5 ГГц
СШП + гармонический СВЧ	–33	–44	–47
СШП + частотно модулированный тональным сигналом СВЧ	–12	–45	–43
СШП + частотно модулированный пилообразным сигналом СВЧ	–12	–50	–42
СШП + частотно модулированный кодом Баркера СВЧ	–12	–44	–43

Таблица 2. – Результаты моделирования для нелинейностей, аппроксимированных полиномом третьей степени

Вид зондирующего сигнала	Мощность переизлученного сигнала, дБм				Уровень шума, дБм
	второй гармоники	средняя на частотах 1,5 – 1,7 ГГц	средняя на частотах 1,9 – 2,5 ГГц	третьей гармоники	
СШП + гармонический СВЧ	–33	–44	–45	–38	–50
СШП + частотно модулированный тональным сигналом СВЧ	–12	–43	–44	–18	–44
СШП + частотно модулированный пилообразным сигналом СВЧ	–12	–42	–41	–18	–42
СШП + частотно модулированный кодом Баркера СВЧ	–12	–42	–42	–20	–42

4. Полученные результаты моделирования показали, что в качестве зондирующего сигнала для НРЛ предпочтительней использовать аддитивную смесь СШП-сигнала и частотно модулированного СВЧ-сигнала, чем сумму СШП и гармонического СВЧ-сигналов.

Авторы благодарят научного руководителя доктора технических наук, профессора В.К. Железняк за оказанную помощь в проводимых исследованиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дистанционная сверхширокополосная томография нелинейных радиоэлектронных элементов / В.П. Якубов [и др.] // Журнал технической физики. – 2015. – Т. 85, Вып. 2. – С. 122–125.
2. Иванов, М.М. Повышение чувствительности нелинейного радиолокатора / М.М. Иванов, В.К. Железняк, В.М. Чертков // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 4. – С. 72–77.
3. Вернигоров, Н.С. Принцип обнаружения объектов нелинейным локатором / Н.С. Вернигоров // Защита информации. Конфидент. – 1998. – № 4. – С. 65–70.
4. Oppermann, I. UWB Theory and Applications / I. Oppermann, M. Hamalainen, J. Iinatti // John Wiley & Sons, Ltd. – 2005.

Поступила 02.03.2018

MODELING AND PROCESSING OF THE RESPONSE OF A COMPLEX SENSING SIGNAL FROM A APPROXIMATED DEGREE OF NONLINEARITY

M. IVANOU, V. CHERTKOV

A software model is developed in the Matlab environment, which makes it possible to model the re-emitted signal from an approximate power-law series of nonlinearity. Several types of complex sounding signals were synthesized, presented as an additive mixture of the UWB signal and a nonharmonic microwave signal. Spectral analysis of simulated re-emitted signals is carried out. Based on the analysis results, a probing signal was selected and justified, in which the re-emitted signal has the highest power value.

Keywords: nonlinear radar, ultra-wideband signal, nonlinear element.

УДК 621.391.82

ТЕСТОВЫЕ КАДРЫ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЗАЩИЩЕННОСТИ ЦВЕТНЫХ И ЧЕРНО-БЕЛЫХ ВИДЕОИЗОБРАЖЕНИЙ В ТЕХНИЧЕСКИХ КАНАЛАХ УТЕЧКИ ИНФОРМАЦИИ

д-р техн. наук, проф. В.К. ЖЕЛЕЗНЯК, Е.Р. АДАМОВСКИЙ
(Полоцкий государственный университет)

Предлагается метод оценки качества маскирования видеоизображений в технических каналах утечки информации в виде набора тестовых кадров с учетом критериев разборчивости мелкодетальной и крупноплановой информации, а также информации о цветах. Обосновываются решения, принятые при создании тестовых кадров и производится проверка их эффективности в качестве инструмента для оценки защищенности изображения в технических каналах утечки информации.

Ключевые слова: технические каналы утечки, защищенность видеосигнала, маскирование видеосигналов, тестовый видеокадр.

Введение. Видеодисплейные модули являются источником электромагнитного излучения, содержащего информационный сигнал, который может быть перехвачен и восстановлен. Источниками каналов утечки также могут быть накопители, принтеры, плоттеры, однако основным источником электромагнитного излучения является дисплей. Несмотря на то, что мониторы, созданные на базе электронно-лучевой трубки, повсеместно вытесняются жидкокристаллическими экранами, проблема не исчезает, и такие модули по-прежнему требуют разработки методов защиты. Излучаемый сигнал, соответствующий видеосигналу, выведенному на монитор, нуждается в маскировании, для того чтобы избежать его перехвата путем использования активного передатчика маскирующего сигнала. Передатчик может быть программно и аппаратно связан с источником информационного излучения для генерации синхронных адаптивных видеозащитных кадров.

Одной из проблем, связанных с защитой информации, являются способы качественной оценки произведенных действий, которые должны быть максимально универсальными и наиболее информативными в качестве инструментов разработчика и пользователя.

Различные способы и методы разрушения информации, содержащейся в видеоизображении, оказывают на него различное влияние, которое невозможно свести к строгой количественной оценке, поскольку графические объекты имеют множество параметров. Параметр отношения сигнал-шум не может служить объективной оценкой степени защищенности информации, а общая визуальная оценка отдельных изображений не способна обеспечить достаточную точность.

Формирование тестового видеокадра. Для оценки качества маскирования видеосигнала необходим эталон – тестовый кадр. Это сигнал, соответствующий одному видеокадру, содержащий графическую информацию, такую как различные линии, символы и фигуры различных размеров и цветов. Использование тестовых сигналов – важная составляющая систем обнаружения побочного излучения средств вычислительной техники [1], поскольку они обеспечивают воспроизводимость измерений – их качество, которые отражают близость друг к другу результатов измерений, выполняемых в различных условиях (в разное время, различными методами и средствами) [2].

Тестовые видеокадры созданы для различных целей: проверка мониторов на цветопередачу, битые пиксели, мерцание, резкость, яркость и контрастность, калибровка экрана и другие. Для оценки качества маскирования необходим специальный тестовый кадр, который в первую очередь будет учитывать именно необходимые для оценки параметры. В качестве таких параметров предлагаются различимость крупноплановых и мелкодетальных объектов, их цветопередача и различимость градиентных переходов.

Целесообразно рассматривать в первую очередь типы графической информации, которые наиболее широко используются в технике и научных исследованиях. Стандартный стиль ведения документации – это шрифт Times New Roman 9–14 размера черного цвета обычного написания и полужирный для заголовков. Для чертежей и технических текстов, согласно [3], используется шрифт, соответствующий шрифту ISOCPEUR в MS Word. Сами чертежи всегда содержат набор вертикальных и горизонтальных линий различной толщины в качестве элементов рамок, сносков, осей и обозначения самих элементов конструкции.

Мелкодетальная информация. В роли мелкодетальных объектов, как правило, используется текстовая и числовая информация в виде различных символов преимущественно русского и английского алфавита, а также знаки препинания. Линейные размеры элементов также определяются параметром физического разрешения видеодисплея, которое в современных мониторах превышает качество HD (1280×720 пикселей). Поэтому с учетом возможности масштабирования страницы в MS Word для повышения читаемости текста линейные размеры отдельных символов могут составлять 5–14 пикселей с наличием внутренней структуры, что и позволяет выделить их как мелкодетальную информацию.

Для оценки степени разрушения информации возможно также использование программ автоматического распознавания текста. Они способны дать более точный результат, но их эффективность быстро падает с увеличением амплитуды шума.

Крупноплановая информация. В роли крупноплановых объектов используются изображения, т.е. силуэты изображенных на них объектов с размером, значительно превосходящим размер единичного элемента, то есть пикселя. Такими объектами могут быть, например, контуры летательных аппаратов на фоне неба или кораблей на фоне воды. При наличии однородного заднего плана объект четко выделяется, что затрудняет его маскирование, поэтому именно такой случай необходимо учитывать при создании тестового кадра.

Наиболее оптимальным вариантом является совмещение крупноплановой и мелкодетальной информации в одном кадре, поскольку контур большого объекта в приближении может носить мелкодетальный характер. Примером является паттерн «шахматное поле», состоящий из черных чередующихся квадратов на белом фоне, в свою очередь состоящих из набора вертикальных, горизонтальных полос переменной толщины 1–4 пикселя, использованных в работе [5]. На реальных изображениях строго горизонтальные и вертикальные линии встречаются редко, чаще всего контуры объектов представлены сложными кривыми, которые в приближении могут быть рассмотрены как наклонные линии. Поэтому целесообразно внести в существующий паттерн соответствующие изменения (рисунок 3).

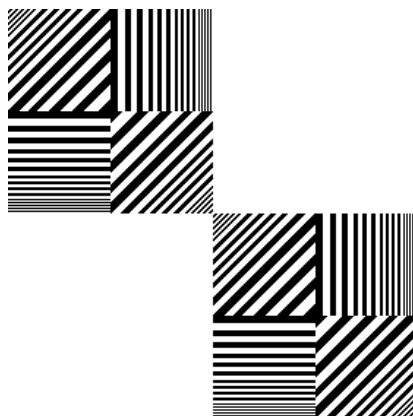


Рисунок 3. – Паттерн «шахматное поле» с диагональными линиями

Одна ячейка размером 140 на 140 пикселей содержит по 14 полос различных направлений. Этот тестовый кадр является упрощенным аналогом тестового кадра с текстовой информацией, но здесь в первую очередь проверяется эффективность маскирования прямых линий и в крупноплановой информации в целом.



Рисунок 4. – Тестовый кадр «шахматное поле», смешанный с белым шумом (ОСШ = -10 дБ)

При ОСШ = -10 дБ происходит разрушение полос всех типов толщиной 1–2 пикселя, но при этом крупноплановые квадраты остаются визуально различимыми. Разрушение крупноплановой структуры при наложении цветного белого шума происходит лишь при ОСШ = -20 дБ. Для различных маскирую-

ших воздействий данные параметры будут отличаться, что и позволит установить эффективность их маскирования.

Цветовая информация. Информация о цвете также является важным параметром. Зачастую изображение возможно точно идентифицировать только при условии наличия информации о цветах, например, установить тип окружения или принадлежность военной техники какой-либо стране по опознавательным знакам. Все современные мониторы работают с 3 цветовыми компонентами: красным (R), зеленым (G), синим (B). Их всевозможные сочетания дополнительно формируют цветовое пространство RGB.

С идентификацией цвета тесно связана различимость градиентов. Реальные изображения, как правило, содержат множество полутонов, сохранение информации о которых может снизить качество маскирования. Из-за плавности изменения уровней градиенты дают наибольший вклад в область средних частот видеосигнала.

В качестве основы для проверки можно взять цвета из палитры RGB, смешанные с градиентом белого и черного цвета (рисунок 5). Таким образом, получается новая цветовая карта. По оси x располагаются цвета, состоящие из всех возможных сочетаний трех основных цветовых компонент. По оси y изменяется насыщенность цвета от 0 (сверху и снизу изображения) до максимального значения (в центре изображения). При этом в верхней половине цвета смешиваются с черным цветом, а в нижней – с белым, которые являются крайними оттенками серого цвета.

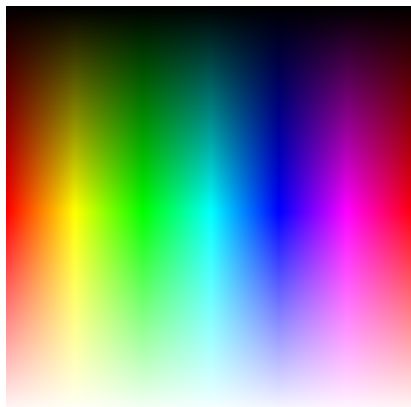


Рисунок 5. – Тестовый цветной кадр

На рисунке 6 представлен тестовый кадр с цветовой информацией, замаскированный цветным белым шумом с различными ОСШ.

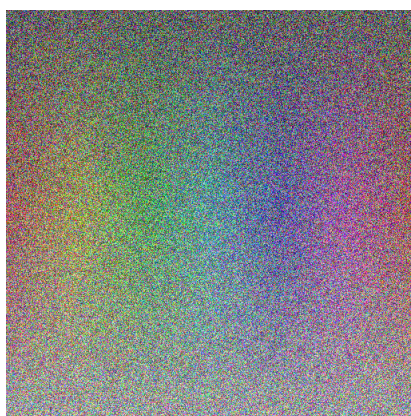
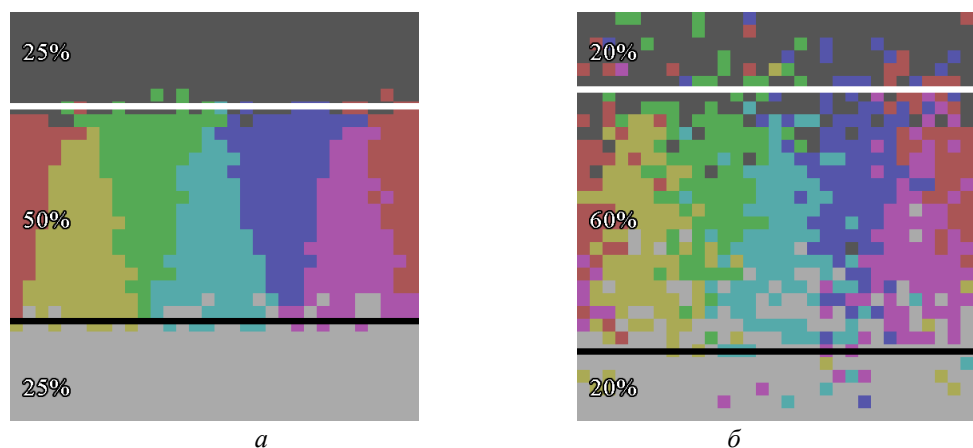


Рисунок 6. – Тестовый цветной кадр, смешанный с белым шумом (ОСШ = -10 дБ)

Из рисунка 6 видно, что при воздействии цветным белым шумом на цветовые и яркостные компоненты изображения в первую очередь разрушаются его участки, обладающие низкой насыщенностью. При этом в центре, где цвета в наименьшей степени смешаны с оттенками серого, информация о них сохраняется. Но при масштабировании изображения, что равнозначно уменьшению площади цветового компонента, становится сложнее определить исходный цвет.

Для различных методов разрушения информации степень разрушения слабонасыщенных цветовых участков будет различна, что позволит установить их эффективность.

Без дополнительных инструментов затруднительно точно определить степень разрушения информации, поскольку человеческая зрительная система неспособна в таком случае провести четкую границу. Для этого предлагается использовать связку инструментов «Пикселизация + Постеризация». Первый этап позволяет усреднять цвет на равных произвольных участках изображения, а второй этап уменьшает количество оттенков; на практике это приводит к тому, что слабонасыщенные участки становятся серыми. Процент серых областей точно показывает, насколько сильно воздействует маскирующий сигнал на тестовый кадр (рисунок 7).



a – ОСШ = –10 дБ; *б* – ОСШ = –20 дБ

Рисунок 7. – Обработанные тестовые цветные кадры, смешанные с белым шумом

Из рисунка 7 следует, что при наложении белого цветного шума при ОСШ до –10 дБ ненасыщенная область сохраняется в пределах 50%. При этом границы цветов выглядят относительно ровными. Это связано с тем, что инструмент «Постеризация» в данном случае делает серыми участки с насыщенностью меньше половины от максимального значения. С дальнейшим уменьшением ОСШ границы цветов становятся менее четкими, а ненасыщенная область уменьшается. При этом отдельные цветные участки в верхней и нижней границах изображения не будут соответствовать цветам, которые присутствовали в этой области в оригинальном изображении. Это вызвано тем, что в слабонасыщенных областях все сильнее сказывается влияние случайных цветовых компонент. В итоге оценка степени разрушения информации о цветах сведется к определению степени разрушения характерного цветового паттерна небольшого разрешения.

На реальных изображениях цвет сам по себе, без формы, которая ограничивает фигуру, может нести незначительное количество информации. Возможным компромиссом является сочетание двух тестовых кадров – градиентного поля и паттерна «шахматное поле» (рисунок 8).

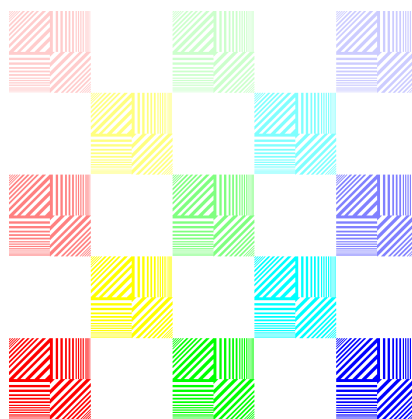


Рисунок 8. – Тестовый цветной кадр «шахматное поле»

Рисунок 8 представляет тестовый кадр «шахматное поле», где квадраты раскрашены в цвета из палитры RGB, при этом существует градация насыщенности, т.е. цвет объектов плавно смешивается с цветом фона по вертикальной шкале. Таким образом, в этом тестовом кадре сочетаются крупноплановые и мелкодетальные объекты, а также информация о цветах.

Рисунок 9 подтверждает, что объекты с низкой насыщенностью цвета разрушаются сильнее всего, причем это утверждение справедливо как для мелкодетальных, так и для крупноплановых объектов. Например, для ОСШ = -8 дБ мелкодетальная информация частично сохраняется лишь в квадратах базовых цветов наибольшей насыщенности, но крупноплановая информация разрушается лишь для самых слабонасыщенных квадратов, при этом синий и красный компоненты изменяются в меньшей степени, чем зеленый, что связано с особенностями человеческой зрительной системы.

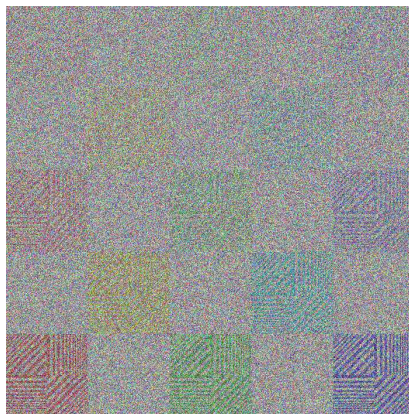


Рисунок 9. – Тестовый цветной кадр «шахматное поле», смешанный с белым шумом (ОСШ = -8 дБ)

Рисунок 10 показывает, что при ОСШ = -8 дБ в крупноплановая и цветовая информация не сохраняется лишь для самых слабонасыщенных участков.

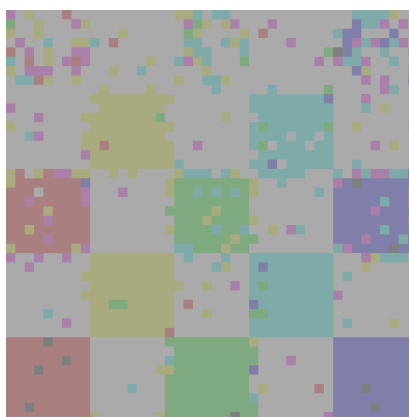


Рисунок 10. – Обработанный тестовый цветной кадр «шахматное поле», смешанный с белым шумом (ОСШ = -8 дБ)

Для оценки разрушения цветовой информации и также информации о крупномасштабных объектах применим тот же метод, что был описан с помощью рисунка 7 (рисунок 10).

Вывод. Для наиболее полной оценки качества маскирования изображения необходимо учитывать такие параметры, как степень разрушения мелкодетальной и крупномасштабной, а также цветовой информации. Предложены варианты тестовых кадров: набор текстовых символов различного размера и написания в качестве мелкодетальной информации и паттерн «шахматное поле», содержащий крупные формы в виде квадратов, состоящих из набора горизонтальных, вертикальных и диагональных линий различных цветов с различной степенью яркости.

В отличие от имеющихся средств оценки маскирования изображения, которые подразумевают работу в спектральной области [6], предложенные методы рассчитаны на графическое непосредствен-

ное представление информации и визуальный анализ. Преимуществами являются возможность точно установить степень разрушения информации за счет наличия в тестовых кадрах градаций параметров подвергаемых маскированию объектов и учет множества параметров, которыми обладает графическая информация.

Комплексный подход к проблеме оценки качества маскирования видеоинформации позволил найти различные решения в виде создания и обоснования использования тестовых кадров, позволяющих дать визуальную оценку степени защищенности изображения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исследование алгоритма обнаружения побочного электромагнитного излучения компьютеров : материал 4-й междунар. конф. и выставки «Цифровая обработка сигналов и ее применения», Москва, февр. 2002 г. – М., 2002. – С. 326 – 329.
2. Защита информации от утечки по техническим каналам : учеб. пособие / В. К. Железняк;. – СПб. : ГУАП, 2006. – 188 с.
3. Единая система конструкторской документации. Шрифты чертежные: ГОСТ 2.304-81 – 1982.
4. The Distant Origins of Sub-Pixel Font Rendering. – Mode of access: <https://www.grc.com/ctwho.html>. – Date of access: 11.03.2018.
5. Барков, А.В. Маскирование RGB-видеокадров синхронными адаптивным шумовым RGB-видеокадром / А.В. Барков, В.К. Железняк // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2013. – № 12. – С. 2–6.
6. Тупота, В.И. Применение многофункционального комплекса АРК-ДІТІ для оценивания защищенности информации от утечки по каналу ПЭМИН / В.И. Тупота, В.А. Козьмин, А.Б. Токарев // Специальная техника. – 2006. – № 1. – С. 38–46.

Поступила 02.03.2018

TEST STAFF FOR EVALUATING THE PROTECTION OF COLOR AND BLACK-WHITE VIDEO IMAGES IN TECHNICAL LEAKAGE CHANNELS

V. ZHELEZNYAK, E. ADAMOVSKIY

A method is proposed for assessing the quality of masking video images in technical channels of information leakage in the form of a set of test frames, taking into account the criteria for legibility of small-scale and large-scale information, as well as information on colors. The decisions made during the creation of test frames are substantiated and their effectiveness is checked as a tool for evaluating the image security of technical information leakage channels.

Keywords: *technical leak channels, video signal security, video masking, test video frame.*

УДК 621.866+004.7

ИЗБЫТОЧНЫЙ ВЕЙВЛЕТНЫЙ СЛОВАРЬ ДЛЯ РАЗРЕЖЕННОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ СИГНАЛОВ ВИБРАЦИИ

Ю.П. АСЛАМОВ, А.П. АСЛАМОВ, канд. тех. наук И.Г. ДАВЫДОВ, А.В. ЦУРКО
(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск)

Автоматические системы вибрационной диагностики позволяют решать задачу оценки технического состояния роторного оборудования без привлечения экспертов. Для повышения качества обработки нестационарных вибрационных сигналов автоматическими системами предложено проводить анализ вибрационных сигналов во временной области на основе разреженной декомпозиции. Рассмотрены вопросы построения избыточного словаря вейвлет-функций для диагностики подшипников качения и зубчатых передач. Приведены результаты тестирования алгоритма разреженной вейвлетной декомпозиции на модельных сигналах.

Ключевые слова: вибродиагностика, разреженная декомпозиция, базис, вейвлет-преобразование.

Введение. В настоящее время для оценки технического состояния роторного оборудования преимущественно используются методы спектрального анализа на основе преобразования Фурье. При этом каждому дефекту оборудования ставится в соответствие набор определенных частот в спектре или спектре огибающей вибрации. Заключение о наличии дефекта оборудования и степени его развития делается по результатам сравнения найденного набора частот с некоторым шаблоном [1–3]. Простота и универсальность указанного подхода, а также обширная база шаблонов дефектов, наработанная за время его практического применения, обусловили популярность спектральных методов в практике вибрационной диагностики промышленного оборудования.

Однако использование спектральных методов на основе преобразования Фурье как единственного и универсального инструмента вибрационной диагностики невозможно по ряду причин:

- 1) низкая эффективность диагностики оборудования с нестационарным режимом работы ввиду свойств преобразования Фурье;
- 2) качество обнаружения дефектов напрямую зависит от полноты и точности составления кинематической схемы оборудования. При этом параметры многих элементов оборудования в процессе эксплуатации могут изменяться, что негативно сказывается на точности диагностики;
- 3) требуется высокая точность определения скорости вращения вала.

С одной стороны, указанные недостатки могут быть частично устранены при помощи алгоритмов слежения за частотой, передискретизации сигнала, а также методов уточнения скорости вращения вала [4, 5].

С другой стороны, решением могут выступать методы обработки вибрационных сигналов в частотно-временной области. Вейвлет-преобразование позволяет анализировать особенности сигнала с использованием локализованных во времени и по частоте математических функций – вейвлетов. Однако с точки зрения вибрационной диагностики применение вейвлет-преобразования в основном ограничено построением скелетограммы сигнала для поиска диапазонов частот с высоким удельным энергетическим вкладом [6, 7].

Для вибрационной диагностики подшипников качения и зубчатых передач роторного оборудования с нестационарным режимом работы авторами статьи предложено анализировать форму вибрационных сигналов во временной области. С этой целью рассмотрены вопросы построения избыточного словаря вейвлет-функций для алгоритма разреженной декомпозиции. Представлены результаты экспериментов на модельных сигналах.

Основная часть. Обработка сигналов во временной области базируется на теории аппроксимации. Пусть $B = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ есть ортонормированный базис гильбертова пространства H , тогда любая функция $x \in H$ может быть разложена по этому базису

$$x = \sum_{m=0}^{+\infty} \langle x, g_m \rangle g_m,$$

где $\langle x, y \rangle$ – скалярное произведение.

В базисах Фурье и вейвлет-базисах для эффективного представления равномерно гладких сигналов может быть использована линейная аппроксимация. При этом вместо представления x всеми скалярными произведениями $\{\langle x, g_m \rangle\}_{m \in \mathbb{N}}$ используются только первые M .

Для эффективного представления сигналов с изолированными особенностями используется нелинейная аппроксимация. В этом случае сигнал $x \in \mathbb{H}$ аппроксимируется M векторами, адаптивно выбранными из ортонормированного базиса $\mathcal{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Пусть x_M есть проекция x на M векторов, индексы которых содержатся в I_M , тогда сигнал аппроксимации

$$x_M = \sum_{m \in I_M} \langle x, g_m \rangle g_m. \quad (1)$$

Погрешность аппроксимации есть сумма оставшихся коэффициентов

$$e_M = \|x - x_M\|^2 = \sum_{m \notin I_M} |\langle x, g_m \rangle|^2, \quad (2)$$

где $\|x\| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ – норма функции $x(t)$.

Чтобы минимизировать погрешность аппроксимации e_M , индексы в I_M должны соответствовать M векторам, имеющим скалярные произведения с наибольшей амплитудой $\langle x, g_m \rangle$. Эти векторы наилучшим образом коррелируют с x , поэтому они могут быть интерпретированы как наиболее характерные для x . Погрешность нелинейной аппроксимации обязательно меньше, чем погрешность линейной аппроксимации, которая выделяет M векторов аппроксимации независимо от x .

Во многих случаях для достижения лучших аппроксимаций ортогональностью базисных функций пренебрегают. При этом стандартной является практика формирования базиса $\mathcal{B}$ на основе анализируемого сигнала [8]. К преимуществам данного подхода можно отнести гибкость и высокую эффективность аппроксимации.

Вибрационный сигнал может быть эффективно представлен M векторами аппроксимации, выбранными на основе анализа его скейлограммы. Для построения скейлограммы предложено использовать вейвлет *Morlet*, имеющий минимальное частотно-временное разрешение [9]. Анализ скейлограммы подразумевает поиск выраженных областей с высоким энергетическим вкладом (поиск максимумов), результатом которого является набор собственных частот оборудования. Однако с точки зрения анализа формы вибрационных сигналов в окрестности найденных собственных частот использование одиночного базиса, построенного на основе одной базисной функции, не эффективно.

Комплексные сигналы, такие как аудиозаписи, вибрационные сигналы или изображения, часто содержат структуры, которые не могут быть хорошо представлены несколькими векторами некоторого одиночного базиса. Действительно, малые словари, такие как базисы, имеют ограниченные возможности разреженного представления сигналов. Крупные словари, включающие большое количество шаблонов, могут увеличить разреженность и, следовательно, повысить эффективность алгоритмов сжатия, шумоподавления и распознавания образов [8].

В частности, в работах [10, 11] для эффективного кодирования речевой информации использовалась итерационная процедура разложения сигнала по модели *gammatone*, на основе которой осуществлялся синтез избыточного словаря $\mathcal{D}$. Концепция итерационного разложения сигнала по избыточному словарю $\mathcal{D} = \{\phi_p\}_{p \in \Gamma}$ семейств вейвлет-функций легла в основу алгоритма разреженной вейвлетной декомпозиции [12].

Разреженная декомпозиция. Как известно, временной сигнал $x(t)$ может быть представлен в виде суперпозиции определенных базисных функций $\{\phi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Тогда выражение для полученной аппроксимации $x_M(t)$ может быть записано в виде

$$x_M(t) = \sum_m \sum_i c_{m,i} \phi_m(t - \tau_{m,i}), \quad (3)$$

где $c_{m,i}$ и $\tau_{m,i}$ – амплитудный коэффициент и временная позиция m -й базисной функции $\phi_m(t)$ соответственно. Каждой базисной функции ϕ_m также ставится в соответствие определенная частота заполнения f_m .

Более общий способ объяснения выражения (3) заключается в том, что базисные функции φ_m существуют во все моменты времени сигнала $x(t)$, а ненулевые коэффициенты определяют положение базисной функции. В этом случае модель (3) может быть записана в виде свертки

$$x_M(t) = \sum_m \int c_m(\tau) \varphi_m(t - \tau) d\tau,$$

где $c_m(\tau)$ – амплитудный коэффициент в момент времени τ для базисной функции φ_m .

Ошибка аппроксимации e_M определяется выражением (2).

Выражение (3) описывает декомпозицию сигнала $x(t)$ по базисным функциям $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, результатом которой является так называемое разреженное представление (*sparse representation*) сигнала $\mathbf{X}$. Под разреженным представлением сигнала будем понимать совокупность пар амплитудных и временных коэффициентов $\{c_{m,i}, \tau_{m,i}\}_{(m,i) \in \mathbb{N}^2}$ для каждой базисной функции φ_m , т.е. $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\varphi, c, \tau)$. В таком случае сигнал может быть представлен в виде пиков (*spikes*) на плоскости «амплитуда-время» для каждой базисной функции φ_m (рисунок 3, в).

Разреженное представление сигнала $\mathbf{X}$ является неудобным с точки зрения автоматической обработки, поэтому вводится понятие спектра базисных функций (БФ-спектр) $\mathbf{W}^{BF}$. БФ-спектр есть распределение энергии сигнала аппроксимации x_M по базисным функциям $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Коэффициенты БФ-спектра рассчитываются как

$$w_m^{BF} = \|x_m(t)\|^2, \quad (4)$$

где $x_m(t)$ – аппроксимация сигнала $x(t)$, соответствующая m -й базисной функции φ_m с набором коэффициентов $\{c_{m,i}, \tau_{m,i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ разреженного представления $\mathbf{X}$:

$$x_m(t) = \sum_i c_{m,i} \varphi_m(t - \tau_{m,i}). \quad (5)$$

Разреженная декомпозиция сигнала (3) есть итерационный процесс. Под одной итерацией декомпозиции понимается процедура вычитания из сигнала $x(t)$ одной базисной функции φ_m и расчета соответствующих ей параметров $\{c_{m,i}, \tau_{m,i}\}_{(m,i) \in \mathbb{N}^2}$.

Для остановки процесса декомпозиции может быть применено пороговое правило

$$\frac{\|x_M\|^2}{\|x\|^2} \leq \eta_E, \quad (6)$$

где η_E – энергетический порог.

Однако использование порогового правила (6) затруднительно по причине игнорирования им качества аппроксимации сигнала, т.е. возможны случаи достижения порога η_E при высоком значении ошибки аппроксимации e_M . Поэтому используется пороговое правило вида

$$1 - \frac{e_M}{\|x(t)\|^2} \leq \eta, \quad (7)$$

где η – заданный уровень аппроксимации, $0 < \eta < 1$.

Увеличение количества итераций разложения уменьшает ошибку аппроксимации e_M , но увеличивает вычислительную сложность алгоритма. В связи с чем эффективность аппроксимации сигнала $x(t)$ с заданной точностью η при помощи разреженной декомпозиции (3) обратно пропорциональна количеству итераций декомпозиции (3). Очевидно, что для повышения эффективности декомпозиции требуется увеличить количество нулевых коэффициентов $\mathbf{X}$, т.е. повысить разреженность представления сигнала. Это достигается выбором базисных функций $\{\phi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ на основе особенности анализируемого сигнала.

Базис разреженной вейвлетной декомпозиции. Выбор базисных функций ϕ_m разреженной декомпозиции не имеет жестких ограничений, кроме тех, что ϕ_m должна быть вещественной функцией с конечной энергией. Авторами статьи в качестве базисных функций предложено использовать вейвлеты, вследствие их хорошей локализации во времени и по частоте и автономности получаемых на их основе базисов.

Основными объектами вибрационной диагностики, дефектное состояние которых сопровождается ударными процессами, являются подшипники качения и зубчатые передачи. В работе [13] авторами были предложены вейвлет-функции, предназначенные для обнаружения ударных процессов в сигналах вибрации указанных элементов. Для диагностики подшипников качения предложено использовать вейвлет *MEXP*, а для зубчатых передач – вейвлеты *MORL* и *SINP* [13].

Представленные вейвлеты имеют эффективный, а не компактный носитель, ввиду наличия экспоненциального закона убывания в описывающих их математических выражениях. Под длиной эффективного носителя понимается интервал, на котором сосредоточена большая часть энергии вейвлета

$$\Delta T_{eff} = t_2 - t_1, \quad t_2 > t_1 \Rightarrow \frac{\int_{t_1}^{t_2} |\psi(t)|^2 dt}{\|\psi\|^2} = 1 - \varepsilon, \quad (8)$$

где $\varepsilon \leq 0,05$ – доля энергии вейвлета вне эффективного носителя.

Для вейвлетов *MEXP*, *MORL* и *SINP* длина эффективного носителя ΔT_{eff} есть функция циклической частоты ω_0 и коэффициента формы *FF*, т.е. $\Delta T_{eff} = \Delta T_{eff}(\omega_0, FF)$. Нормированная длина эффективного носителя $\overline{\Delta T_{eff}}(FF)$ рассчитывается как

$$\overline{\Delta T_{eff}}(FF) = \frac{\Delta T_{eff}(\omega_0, FF) \cdot \omega_0}{2\pi}. \quad (9)$$

Из выражения (9) следует, что посредством изменения коэффициента формы *FF* может быть получены вейвлеты одного типа $\mathcal{D}^\Psi = \{\psi(\omega_0, FF_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ с различными частотно-временным разрешением в пределах одной несущей циклической частоты ω_0 . Совокупность *MEXP*-, *MORL*- и *SINP*-семейств образует словарь базисных функций $\mathcal{D}$ разреженной декомпозиции.

Оценка формы сигнала во временной области на основе разреженной вейвлетной декомпозиции заключается в анализе распределения энергии сигнала по типам вейвлетов и их коэффициентам формы. С этой целью для получения стабильного разложения вводится набор правил формирования словаря базисных функций $\mathcal{D}$. Процесс формирования словаря $\mathcal{D}$ разреженной декомпозиции в пределах фиксированной циклической частоты ω_0 разбит на несколько этапов.

Шаг 1. Рассчитывается минимальная $\overline{\Delta T_{eff}.min}$ и максимальная $\overline{\Delta T_{eff}.max}$ нормированные длины эффективного носителя формируемого вейвлетного словаря $\mathcal{D}$.

Минимальная нормированная длина эффективного носителя $\overline{\Delta T_{eff}.min}$ вейвлетного словаря $\mathcal{D}$ определяется базисной функцией *MEXP* вследствие того, что ударные импульсы в подшипниках качения имеют малую длительность. Эмпирически установлено, что уменьшение коэффициента формы FF^{MEXP} вейвлета *MEXP* ниже определенного значения приводит к смещению центральной несущей частоты

вейвлета f_0 и, как следствие, смещению его Фурье-образа. Значительное отклонение f_0 от номинального значения может стать причиной некорректной обработки сигналов. Поэтому минимальное значение коэффициента формы FF_{min}^{MEXP} семейства *MEXP* выбрано выше $FF \geq 0,878$ для достижения относительного сдвига частоты f_0 на уровне $\Delta \tilde{f}_0 < 1\%$. К тому же минимальное количество осцилляций ударного процесса в подшипниках качения, начиная с которого может быть различим экспоненциальный закон убывания, составляет $\overline{\Delta T_{eff}} > 4$. По указанным причинам в качестве минимального значения коэффициента формы вейвлета *MEXP* выбрано $FF_{min}^{MEXP} = 1$, для которого $\overline{\Delta T_{eff.min}} = 4,35$ (осц.).

Максимальная нормированная длина эффективного носителя вейвлетов $\overline{\Delta T_{eff.max}}$ ограничивается потенциально возможным количеством зубьев на шестернях. В соответствии со справочными материалами [14] количество зубьев в диапазоне $z = [10, 100]$ покрывает 90–95% видов зубчатых передач. Так как коэффициент формы FF вейвлета *AMP* соответствует количеству зубьев шестерни с абразивным износом [8], то $FF_{max}^{AMP} \geq 100$. Максимальное значение коэффициента формы FF_{max}^{MORL} семейства вейвлетов *MORL* определяется как $FF_{max}^{MORL} = \arg\left(\overline{\Delta T_{eff.max}^{AMP}}\right)$, а максимальная нормированная длина эффективного носителя вейвлетов словаря должна быть не менее $\overline{\Delta T_{eff.max}} \geq 68,5$ (осц.).

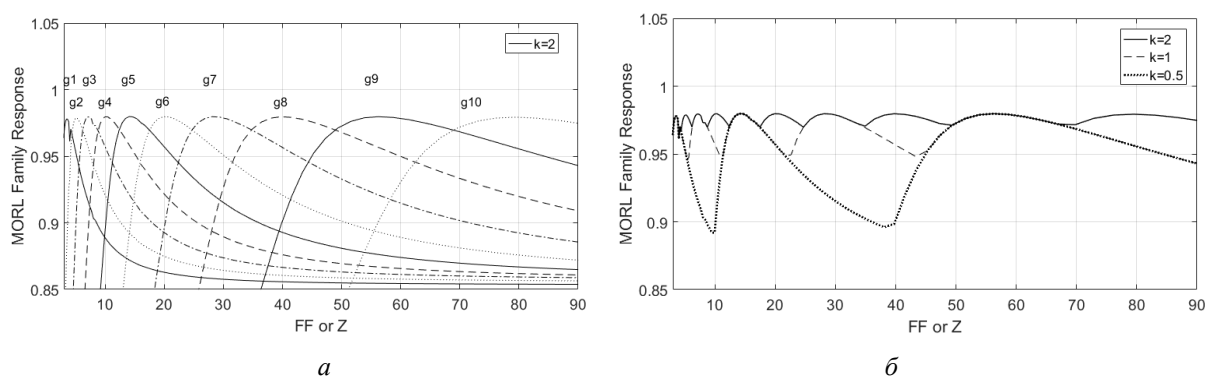
Шаг 2. Формируется решетка значений нормированных длин эффективного носителя $\{\overline{\Delta T_{eff,i}}\}_{i \in \mathbb{N}}$ по правилу

$$\overline{\Delta T_{eff,i}} = \overline{\Delta T_{eff.min}} \cdot 2^{\frac{i}{k}}, \quad (10)$$

где $\overline{\Delta T_{eff.min}}$ – минимальная нормированная длина эффективного носителя вейвлетов, равная для всех семейств, т.е. $\overline{\Delta T_{eff.min}} = \overline{\Delta T_{eff}^{MEXP}}(FF_{min}^{MEXP}) = \overline{\Delta T_{eff}^{MORL}}(FF_{min}^{MORL}) = \overline{\Delta T_{eff}^{SINP}}(FF_{min}^{SINP})$;

k – коэффициент перекрытия откликов вейвлетов одного семейства [8], $k \in \mathbb{N}$.

На рисунке 1 представлен пример отклика семейства вейвлетов *MORL* на амплитудно-модулированный сигнал с коэффициентом модуляции $m = 0,5$.



a* – отклик вейвлетов *MORL* в пределах семейства; *b* – результирующий отклик семейства *MORL
Рисунок 1. – Отклик семейства вейвлетов *MORL* на тестовый сигнал

Предложено использовать значение коэффициента перекрытия $k = 2$, которое обеспечивает неравномерность результирующего отклика семейств базисных функций для различных воздействий на уровне $\Delta resp_{dB}^{k=2} = -19,82$ дБ (1,01%) [7]. В то же время для $k = 1$ и $k = 0,5$ неравномерность отклика составляет $\Delta resp_{dB}^{k=1} = -14,80$ дБ (3,31%) и $\Delta resp_{dB}^{k=0,5} = -10,06$ дБ (9,86%) соответственно.

При выбранном значении $k = 2$ коэффициент корреляции Пирсона между i -м и $(i+1)$ -м вейвлетом одного семейства попарно равен $r(\psi_i, \psi_{i+1}) = r(\psi_{i+1}, \psi_{i+2}) = 0,9708$.

Шаг 3. Семейство вейвлетов $\mathcal{D}^\Psi$ формируется на основе решетки значений коэффициентов формы $\{FF_i^\Psi\}_{i \in \mathbb{N}}$, где $FF_i^\Psi = \arg(\overline{\Delta T_{eff}^\Psi}(FF_i))$ при $\overline{\Delta T_{eff}^\Psi}(FF_i) = \overline{\Delta T_{eff}}_i$. Все вейвлеты семейства $\mathcal{D}^\Psi = \{\psi(FF_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ нормируются $\overline{\psi}_i = \psi_i / \|\psi_i\|$. В результате составлен словарь $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}^{MEXP}, \mathcal{D}^{MORL}, \mathcal{D}^{SINP}\}$. Значения коэффициентов формы FF и нормированных длин эффективно-го носителя $\overline{\Delta T_{eff}}$ вейвлетов представлены в таблице.

Таблица. – Параметры вейвлетных семейств

Вейвлет	Параметры	Длина эффективного носителя $\overline{\Delta T_{eff, min}} \times m$									
		$\times 1$	$\times \sqrt{2}$	$\times 2$	$\times 2\sqrt{2}$	$\times 4$	$\times 4\sqrt{2}$	$\times 8$	$\times 8\sqrt{2}$	$\times 16$	$\times 16\sqrt{2}$
$MEXP$ ("m")	FF	1,02	1,56	2,28	3,32	4,80	6,87	9,78	14,01	20,07	–
	$\overline{\Delta T_{eff}}$	4,35	6,26	8,74	12,29	17,34	24,46	34,46	48,95	68,69	–
$MORL$ ("g")	FF	0,65	1,39	2,75	5,59	10,96	21,95	43,55	86,22	170,71	338,01
	$\overline{\Delta T_{eff}}$	4,16	6,12	8,82	12,22	17,20	24,66	34,72	48,78	68,28	96,8
$SINP$ ("s")	FF	1,01	1,47	2,11	3,01	4,27	6,07	8,60	12,18	17,26	24,46
	$\overline{\Delta T_{eff}}$	4,34	6,06	8,66	12,26	17,3	24,46	34,56	48,78	68,96	97,1
–	№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Декомпозицию сигналов (1) по избыточному вейвлетному словарю $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}^{MEXP}, \mathcal{D}^{MORL}, \mathcal{D}^{SINP}\}$ будем называть разреженной вейвлетной декомпозицией.

Результаты и их обсуждение. Для проверки свойств сформированного словаря $\mathcal{D}$ используются модельные сигналы. В силу ограниченного объема статьи представлены результаты тестирования только на сигналах, имитирующих абразивный износ шестерен зубчатой передачи и выраженный дефект подшипника качения.

Частота зацепления зубчатой передачи определяется выражением

$$f_Z = Z \cdot f_1,$$

где f_1 – частота вращения вала (шестерни);

Z – количество зубьев на шестерне [2, 3].

Тогда в соответствии с [15] для имитации сигналов зубчатых передач с дефектами используется тестовый сигнал вида

$$s(t, FF) = \sum_i \sum_j A_{i,j} \cdot \sin\left(2\pi f_i t \left(1 + \frac{n_{i,j}}{Z}\right)\right), \quad (12)$$

где f_i – i -я гармоника частоты зацепления, [Гц];

j – порядковый номер боковых составляющих;

$n_{i,j}$ – номер гармоник;

$A_{i,j}$ – амплитуда гармоник.

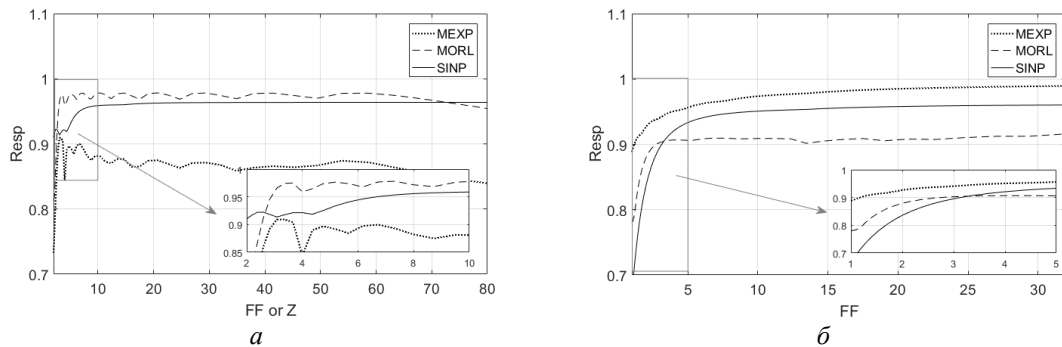
Для имитации абразивного износа шестерни используется сигнал (12) с одной гармоникой частоты зацепления f_z и одиночными боковыми валовыми составляющими $f_z \pm f_1$. Индекс амплитудной модуляции $m = 0,5$.

Для имитации сигналов дефектного подшипника качения используется периодическая последовательность экспоненциальных импульсов вида

$$s_0^{\text{EXP}}(t, \omega, FF) = \begin{cases} \sin(\omega t) \cdot \exp\left(-\frac{2\pi FF}{\omega} t\right), & 0 \leq t < \infty \\ 0, & -\infty < t < 0 \end{cases}. \quad (13)$$

Благодаря коэффициенту формы FF в выражении (13) регулируется скорость затухания ударных импульсов. Частота следования импульсов $F = 50$ Гц.

Тестирование базиса производится в терминах отклика $\text{resp}(\psi, FF)$ [13]. При этом сравниваются результирующие отклики семейств вейвлетов $\mathcal{D}^{\text{MEXP}}$, $\mathcal{D}^{\text{MORL}}$ и $\mathcal{D}^{\text{SINP}}$ на тестовые сигналы (12) и (13). Результаты сравнения представлены на рисунке 2.



а – амплитудно-модулированный сигнал; **б** – экспоненциальные ударные импульсы
Рисунок 2. – Результирующий отклик семейств вейвлетов

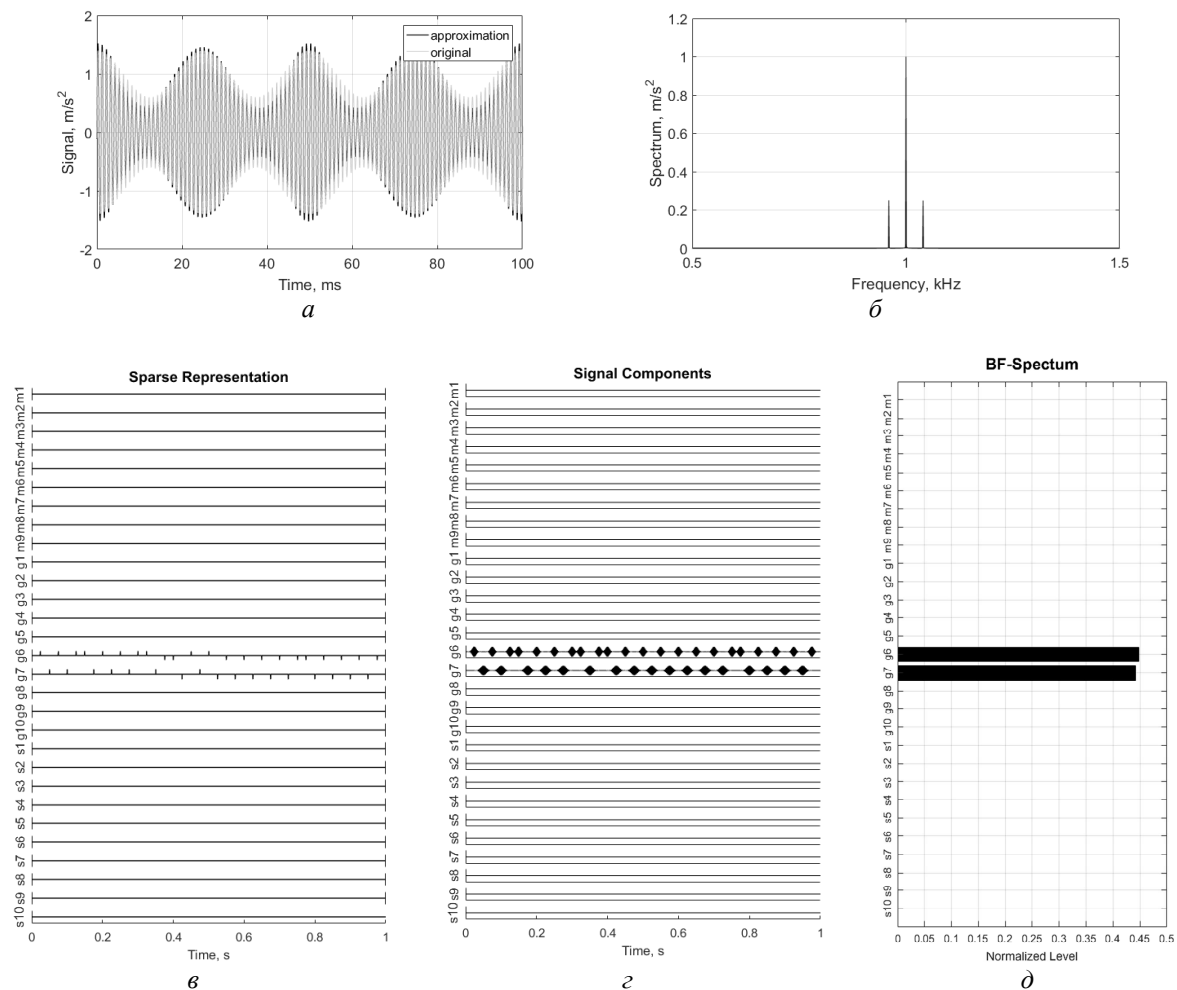
Как показано на рисунке 2, семейство вейвлетов MORL обладает в среднем на 1,1–1,6% большим откликом на амплитудно-модулированные сигналы, чем SINP , и на 10,2–13% большим откликом, чем семейство MEXP . В то же время семейство вейвлетов MEXP обладает в среднем на 2,4–2,9% большим откликом на экспоненциальные сигналы, чем семейство SINP , и на 7,9–8,4% большим, чем семейство MORL .

Для анализа формы вибрационных сигналов во временной области используется алгоритм разреженной декомпозиции с использованием сформированного словаря $\mathcal{D}$. В качестве тестового сигнала $x(t)$ выбран (12), энергия которого сосредоточена в узкой полосе частот в окрестности $f_z = 1$ кГц (рисунок 3, а, б). Сигнал имеет следующие параметры: коэффициент формы (количество зубьев шестерни Z) $FF = 25$, длительность сигнала $T = 1$ с, отношение сигнал/шум $SNR = 60$ дБ, индекс амплитудной модуляции $m = 0,5$. Указанный сигнал имитирует сильный абразивный износ шестерен зубчатой передачи.

На рисунке 3, в–д представлены результаты применения разреженной вейвлетной декомпозиции к указанному сигналу при заданном уровне аппроксимации $\eta = 0,95$.

Как продемонстрировано на рисунке 3, при заданном уровне аппроксимации η тестовый сигнал полностью восстановлен. Семейство вейвлетов $\mathcal{D}^{\text{MEXP}} = \{\psi_i^{\text{MEXP}}\}_{i \in \mathbb{N}}$ обозначено как “ m ”, семейство $\mathcal{D}^{\text{MORL}} = \{\psi_i^{\text{MORL}}\}_{i \in \mathbb{N}}$ обозначено как “ g ”, а семейство $\mathcal{D}^{\text{SINP}} = \{\psi_i^{\text{SINP}}\}_{i \in \mathbb{N}}$ – как “ s ”. Тогда, например, семейство MEXP может быть представлено в виде $\mathcal{D}^{\text{MEXP}} = \{m1, m2, \dots, m9\}$. Численные индексы в обозначениях базисных функций указывают на порядковый номер вейвлета в базисе (см. таблицу). Вейвлеты с равными индексами (например, $m3$ и $g3$) имеют одинаковую длину эффективного носителя, т.е. $\overline{\Delta T_{\text{eff}}^{m3}} = \overline{\Delta T_{\text{eff}}^{g3}}$ (см. таблицу). Нормированная длина эффективного носителя вейвлетов $\overline{\Delta T_{\text{eff}}^{\psi}}_i$ возрастает с ростом порядкового номера i .

Разреженное представление **X** (см. рисунок 3, **в**) тестового амплитудно-модулированного сигнала $x(t)$ состоит из 39 пиков с амплитудными и временными коэффициентами $(c_{m,i}, \tau_{m,i})_{(m,i) \in \mathbb{N}^2}$: 22 пика приходится на вейвлет g_6 и 17 пиков на вейвлет g_7 . Наличие отклика сразу на двух вейвлетах объясняется тем, что для заданного количества зубьев шестерни $Z = 25$ (шт.) результирующий отклик семейства *MORL* имеет минимум, заключенный между вейвлетами g_6 и g_7 (см. рисунок 1). В соответствии с рисунком 1, *а*, максимальный отклик вейвлета g_6 сосредоточен на $Z_{g_6} \approx 20$ (шт.), а вейвлета g_7 – на $Z_{g_7} \approx 28$ (шт.).



а – сигнал и его аппроксимация; **б** – спектр сигнала
в – разреженное представление сигнала; **г** – компоненты сигнала аппроксимации;
д – нормированный БФ-спектр
 Рисунок 3. – Разреженная вейвлетная декомпозиция амплитудно-модулированного сигнала

По виду БФ-спектра может быть сделан вывод о наличии выраженных амплитудных-модуляций, которые в большинстве случаев свойственны зубчатым передачам при абразивном износе шестерен, а также может быть оценено количество зубьев дефектной шестерни при отсутствии кинематической схемы оборудования.

Следует отметить, что другие дефекты зубчатых передач, такие как излом зубьев или повышенный зазор между шестернями, имеют иные шаблонные формы во временной области. Поэтому они могут быть обнаружены по концентрации энергии сигнала на других базисных функциях спектра. Например, при обработке вибрационного сигнала подшипника качения с дефектом колец или тел качения наибольшим откликом обладают вейвлеты *MEXP* (или *MORL* с низкими значениями коэффициента формы). О степени развития дефекта можно судить по разреженности БФ-спектра.

Заключение. В работе рассмотрены вопросы построения избыточного словаря вейвлетов для разреженной декомпозиции вибрационных сигналов. Словарь декомпозиции предложено формировать на базе семейств вейвлетов *MEXP*, *MORL* и *SINP*. В статье представлены результаты тестирования избыточного словаря на модельных сигналах, имитирующих дефекты зубчатых передач и подшипников качения. Предложен способ диагностики роторного оборудования на основе анализа спектра базисных функций разреженной вейвлетной декомпозиции. Дальнейшие исследования предлагается направить на разработку шаблонов дефектов подшипников качения и зубчатых передач с точки зрения спектра базисных функций, а также на анализ границ применимости предложенного способа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов, И.Л. Вибродиагностика энергетического оборудования : учеб. пособие по дисциплине «Диагностика в теплоэнергетике» / И.Л. Абрамов. – Кемерово, 2011. – 80 с.
2. Барков, А.В. Вибрационная диагностика машин и оборудования. Анализ вибрации : учеб. пособие / А.В. Барков, Н.А. Баркова. – СПб. : СПбГМТУ, 2004. – 156 с.
3. Костюков, В.Н. Основы виброакустической диагностики и мониторинга машин : учеб. пособие / В.Н. Костюков, А.П. Науменко. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2011. – 360 с. : ил.
4. Eltabach, M. Rotating machine speed estimation using vibration statistical approach / M. Eltabach, G. Govaert. – WCCM. – 2017 p.
5. Алгоритмы уточнения частоты вращения вала в задачах вибродиагностики роторного оборудования / Ю.П. Асламов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия В, Промышленность. Прикладные науки. – 2017. – № 11. – С. 51–58.
6. Акунин, М.В. Метод контроля состояния подшипников качения на основе сравнения вейвлет скейлограм : автореф. дис. ... канд. техн. наук / М.В. Акунин. – Казань, 2009.
7. Давыдов, И.Г. Диагностика качества подшипников качения с применением вейвлет-анализа / И.Г. Давыдов [и др.] // Доклады БГУИР. – 2005. – № 3 (11). – С. 48–52.
8. Mallat, S. A wavelet tour of signal processing. The sparse way / S. Mallat. – Academic Press, 2009.
9. Астафьева, Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения / Н.М. Астафьева // Успехи физических наук. – 1996. – № 11, Т. 166.
10. Smith, E. Efficient coding of time relative structure using spikes / E. Smith, M. Lewicki // Neural Computation. – 2005. – Vol. 17, no. 1. – P. 19–45.
11. Smith, E. Efficient auditory coding / E. Smith, M. Lewicki // Nature. – 2006. – Vol. 439, no. 7079. – P. 978–982.
12. Разреженная вейвлетная декомпозиция в задачах вибродиагностики роторного оборудования / Ю.П. Асламов [и др.] // Доклады БГУИР. – 2017. – №8. – С. 91–98.
13. Асламов Ю.П. Вейвлет-функции для диагностики зубчатых передач / Ю.П. Асламов, А.П. Асламов, И.Г. Давыдов, А.В. Цурко // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия В, Промышленность. Прикладные науки – 2018. – № 3. – С. 38–46.
14. Зубчатые передачи : справ. / Е.Г. Гинзбург [и др.]. – Л. : Машиностроение, 1980 – 416 с.
15. McFadden, P. A revised model for extraction of periodic waveforms by time domain averaging / P. McFadden // Mechanical Systems and Signal Processing. – 1987. – Vol. 1, no. 1. – P. 83–95.

Поступила 02.03.2018

SPARSE DECOMPOSITION OF VIBRATION SIGNALS BY WAVELET REDUNDANT DICTIONARY

Y.P. ASLAMOV, A.P. ASLAMOV, I.G. DAVYDOV, A.V. TSURKO

Automatic systems of vibration-based diagnostics allow to solve problems of estimation of a technical condition of rotary equipment without involvement of experts. The quality of vibration-based diagnostics of rotary equipment with non-stationary work conditions by automatic systems can be improved by estimation of waveform of vibration signals on the basis of sparse decomposition. The problems of construction of redundant dictionary for diagnosis of rolling bearings and gearings are reviewed in article. The paper also presents the results of sparse wavelet decomposition testing on model signals.

Keywords: vibration-based diagnostics, sparse decomposition, basis, wavelet transform.

УДК 621.396

**АНТЕННАЯ СИСТЕМА ДЛЯ МАЛОГАБАРИТНОГО ТЕСТОВОГО
ГЕНЕРАТОРА РАДИОПОМЕХ****А.В. ТОЛМАЧЕВ, В.М. ЧЕРТКОВ**
(Полоцкий государственный университет)

Рассмотрен порядок работы, проведенной в ходе решения вопроса выбора антенной системы для малогабаритного тестового генератора радиопомех. Описаны основные требования, предъявляемые к антенной системе. Представлены результаты модулирования антенны в программном обеспечении FEKO и результаты натурного эксперимента измерения параметров разработанной антенны.

Ключевые слова: зеркальная антенна, тестовый генератор радиопомех, диаграмма направленности, FEKO.

Введение. Малогабаритный тестовый генератор радиопомех (МТГР) применяется для испытаний работы радиолокационного оборудования и радиолокационных станций (РЛС) в условиях широкого применения противником средств радиоэлектронной борьбы с использованием различных тактических приемов. Таким образом, перед тем, как начать разработку МТГР необходимо провести анализ технических характеристик РЛС.

Как правило, абсолютное большинство РЛС обнаружения целей предназначена для решения следующего спектра задач:

- автоматического обнаружения, измерения первичных координат (азимут, дальность), радиальной скорости воздушных объектов (самолет, вертолет, крылатая ракета, воздушный шар);
- автоматического обнаружения и сопровождения трасс воздушных объектов при воздействии активных и пассивных помех и выдачи радиолокационной информации на систему дистанционного управления (СДУ);
- автоматического распознавания классов воздушных объектов (самолет, вертолет, крылатая ракета, воздушный шар, нераспознанная цель);
- определения азимута постановщиков активных шумовых помех (АШП).

Практически все типы РЛС обладают возможностью кругового поиска воздушных объектов независимо от типа конструкции их антенной системы.

При проведении испытаний генератор помех по азимуту можно расположить в любом направлении относительно РЛС. Однако, исходя из данных об угле места, приходим к выводу, что генератор радиопомех необходимо располагать либо на том же уровне, что и станция, либо под положительным углом, либо учитывать ослабление помехи при отрицательных углах. На основании этого можно сделать вывод, что диаграмма направленности антенны разрабатываемого генератора помех должна обладать достаточно узконаправленными свойствами, а также иметь возможность работы в достаточно широком спектре излучаемого сигнала.

В ходе проектирования малогабаритного тестового генератора радиопомех возник вопрос разработки антенной системы, которая должна была удовлетворять следующим требованиям:

1. Простота конструкции.
2. Возможность использования антенной системы в различных частотных диапазонах.
3. Формирование осесимметричной (игольчатой) диаграммы направленности – диаграммы с относительно узким основным лепестком, т. е. антенна должна обладать хорошими направленными свойствами, т. к., это необходимо для создания необходимого уровня мощности сигнала помехи на входе приемного устройства радиолокационной станции (а это, в свою очередь, возможно только при использовании помехи направленного типа).
4. Антенна должна обеспечивать невысокий уровень бокового излучения.
5. Высокий коэффициент использования поверхности (КИП) антенны.
6. Высокий коэффициент полезного действия (КПД) антенны.
7. Высокий коэффициент эффективности антенны.

Основная часть. Выбор источника излучаемого сигнала обусловил применение зеркальной антенны для эффективной работы в заданном диапазоне частот [2].

Зеркальными называют антенны, в которых требуемые направленные свойства обеспечиваются за счет отражения электромагнитной волны от металлического зеркала (рефлектора) определенного про-

филя. Источником электромагнитной волны, падающей на зеркало, является какая-либо слабонаправленная антенна, называемая облучателем [1]. В разрабатываемом генераторе помех в качестве облучателя используется прямоугольный волновод (его можно отнести к направленным апертурным антеннам со слабыми направленными свойствами), в котором располагается лавинно-пролетный диод.

Антенны, имеющие зеркала с центральной симметрией, формируют осесимметричные (игольчатые) амплитудные диаграммы направленности. Параболоцилиндрические и кругоцилиндрические антенны имеют веерные диаграммы направленности с существенно различной шириной главного лепестка в перпендикулярных плоскостях.

Целью данной работы является проектирование, создание, моделирование и испытание антенны – генератора помех направленного типа. Для создания необходимых направленных свойств целесообразно использовать антенну с игольчатой диаграммой направленности, т.е. использование параболических антенн [1].

Из всех типов зеркал наилучшими фокусирующими свойствами обладают параболические. Парабола является геометрическим местом точек, равноудаленных от некоторой прямой (директрисы) и точки (фокуса F), не совпадающей с этой прямой (показано на рисунке 1). Следовательно, с учетом обозначений на рисунке 1 для точки A , произвольно выбранной на параболе, выполняется уравнение $FA + AB = \text{const}$. Из этого равенства следует, что

$$FA + AB = 2F,$$

где F – фокусное расстояние, равное удалению вершины параболы от фокуса и от директрисы [1].

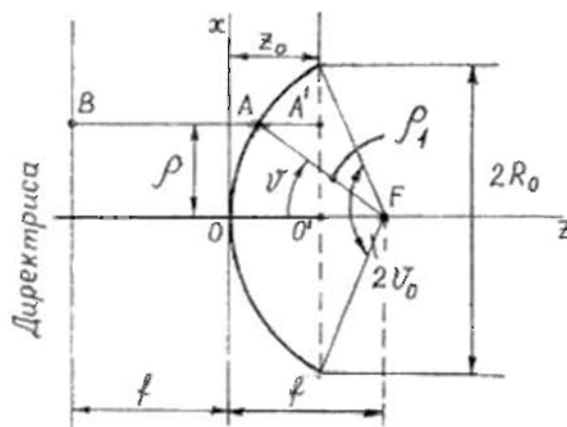


Рисунок 1. – Геометрия зеркальной параболической антенны

Из определения параболы следует ее основное свойство: сумма расстояний от фокуса F до любой точки A на параболе и от этой точки A до точки A' на раскрые зеркала есть величина постоянная ($FA + AA' = \text{const}$). Благодаря указанному свойству оптические пути от фокуса до точек раскрыва оказываются одинаковыми, вследствие чего сферическая волна, создаваемая точечным облучателем, помещенным в фокус, после отражения от параболоида вращения превращается в плоскую. Соответственно цилиндрическая волна, создаваемая линейным облучателем, преобразуется в плоскую параболическим цилиндром. В обоих случаях на излучающем раскрые параболических антенн поле является синфазным, чем достигается высокая направленность излучения [1].

Существенно, что равенство оптических путей в параболических зеркалах обеспечивается независимо от длины волны. Поэтому параболические зеркальные антенны обладают хорошими диапазонными свойствами, определяемыми фактически полосой пропускания облучателя и питающего его волновода.

На основании вышеизложенного была выбрана зеркальная антенна на параболоиде вращения. Параболоид вращения – это наиболее простая конструкция из всех параболических антенн с центральной симметрией, формирующая игольчатую диаграмму направленности.

Диаграмма направленности параболоида вращения. В системе координат, выбранной согласно рисунку 1, уравнение параболоида вращения имеет вид

$$x^2 = 2pz; \quad z \geq 0, \quad (1)$$

где $p = 2F$ – параметр параболы.

Линия Oz , проходящая через вершину параболоида и его фокус, называется оптической или фокальной осью. Угол $2\theta_0$, под которым из фокуса F видны края параболоида вращения, называется углом раскрытия зеркала. Круг радиусом R_0 образует апертуру (раскрыв) зеркала. Расстояние z_0 от вершины зеркала до раскрытия называют глубиной зеркала. Если $z_0 < F$, то *параболоид вращения* является мелким, или длиннофокусным, если же $z_0 > F$ – глубоким, или короткофокусным. Глубина зеркала, радиус раскрытия и фокусное расстояние связаны между собой:

$$F = \frac{R_0^2}{4z_0}. \quad (2)$$

Принято решение использовать поверхность зеркала с радиусом $R_0 = 12,5$ см. Подставив в формулу (2) $R_0 = 12,5$ см, а глубину $z_0 = 5$ см, получено фокусное расстояние $F = 7,8$ см.

Расчет поля излучения параболоида вращения опираясь на строгие аналитические методы технически сложен. Из приближенных методов в инженерной практике наибольшее распространение получил апертурный метод. Суть его сводится к приближенной оценке амплитудно-фазового распределения поля на раскрытии зеркала с последующим применением теоремы перемножения, где диаграмма направленности элемента излучения представляет диаграмму направленности источника Гюйгенса, а множитель системы определяется видом амплитудно-фазового распределения на раскрытии и формой излучающей апертуры. При этом расчет амплитудно-фазового распределения поля на раскрытии осуществляется с учетом следующих допущений:

- 1) токи и касательные составляющие поля на «неосвещенной» поверхности зеркала принимаются равными нулю;
- 2) не учитывается дифракция волн на кромке зеркала;
- 3) не учитывается теневой эффект облучателя, т. е. последний считается точечным;
- 4) внутренняя поверхность зеркала располагается в дальней зоне облучателя;
- 5) не учитывается влияние зеркала на характеристики облучателя [1].

Перечисленные допущения существенно упрощают расчет диаграммы направленности параболоида вращения при удовлетворительном для инженерной практики совпадении результатов расчета с экспериментом в области главного лепестка амплитудной диаграммы направленности (АДН).

При расчете АДН разрабатываемой антенны при помощи программы CADFEKO использован аналогичный метод, который учитывает все вышесказанные допущения.

Напомним, что с увеличением угла раскрытия зеркала ширина главного лепестка увеличивается, что объясняется увеличением спада амплитудного распределения к краям зеркала. Очевидно, что увеличение ширины АДН облучателя при заданном угле раскрытия зеркала вызовет обратный эффект.

Сделанные допущения позволяют существенно упростить задачу расчета АДН. В частности, согласно первым трем допущениями излучающую апертуру можно считать круглой с радиусом R_0 .

Обобщенным показателем качества любой антенны, учитывающим в совокупности ее направленные свойства и эффективность, как преобразователя энергии является коэффициент эффективности, равный

$$g_A = \xi_A \eta_A, \quad (3)$$

где ξ_A и η_A – КИП и КПД антенны соответственно [1].

Величины ξ_A и η_A зависят от угла раскрытия зеркала. Мощность, подводимая к зеркальной антенне, частично расходуется на нагрев элементов конструкции (тепловые потери), рассеяние на краях зеркала, облучателе и его деталях. Кроме этого, мощность, излучаемая облучателем, не полностью перехватывается и переизлучается зеркалом. Соответственно КПД зеркальной антенны можно представить в виде произведения

$$\eta_A = \eta_T \eta_D \eta_P, \quad (4)$$

где η_T , η_D , η_P – коэффициенты тепловых, дифракционных потерь и перехвата соответственно [1].

Проанализировав полученные значения коэффициентов, можно отметить, что для параболоида вращения тепловые и дифракционные потери невелики ($\eta_T \eta_D = 0,8 \dots 0,9$), а их величина незначительно зависит от геометрических параметров зеркала и облучателя. Коэффициент перехвата вычисляется по формуле

$$\eta_{\Pi} = \frac{P_{\Sigma 3}}{P_{\Sigma \text{ОБЛ}}}, \quad (5)$$

где $P_{\Sigma 3}$ – мощность, перехватываемая и излучаемая зеркалом;

$P_{\Sigma \text{ОБЛ}}$ – мощность излучения облучателя.

Коэффициент использования поверхности параболоида вращения, в отличие от КПД, при заданных форме и ширине амплитудной диаграммы направленности облучателя, монотонно уменьшается с ростом угла раскрыва зеркала [1]. Действительно, при малом угле раскрыва зеркала амплитудное распределение $E(\rho)$ поля на раскрыве оказывается практически равномерным ввиду того, что $F_{\text{ОБЛ}}(\vartheta) \approx 1$ при $\vartheta > \vartheta'_0$. С увеличением угла ϑ_0 амплитудное распределение поля $E(\rho)$ на раскрыве существенно спадает к его краям, что приводит к снижению коэффициента использования поверхности [1].

Изменение коэффициентов ξ_A и η_A обуславливают согласно равенству (3) экстремальный характер зависимости коэффициента эффективности. Оптимальное значение угла раскрыва $\vartheta_{0\text{opt}}$ зависит от формы и ширины главного лепестка АДН облучателя. Так, при сужении АДН облучателя величина $\vartheta_{0\text{opt}}$ уменьшается. В процессе расчета установлено, что для обеспечения максимального коэффициента эффективности уровень облучения краев зеркала должен составлять примерно минус 10 дБ относительно уровня облучения его середины. При этом ширину главного лепестка АДН параболоида вращения ориентировочно можно оценить как

$$2\theta_{0,5} = C_{0,5} \frac{\lambda}{2R_0}, \quad (6)$$

где $C_{0,5}$ – коэффициент, определяющий вид амплитудного распределения поля, для зеркальных антенн выбирают из диапазона от 65 до 75°.

Подставив в формулу (6) следующие значения $\lambda = 3$ см, а $R_0 = 12,5$ см, получим ширину главного лепестка $2\theta_{0,5} = 7,8^\circ$. Таким образом, используемая в малогабаритном передатчике радиопомех зеркальная антенна обеспечивает формирование относительно узкой диаграммы направленности [1].

Максимальный коэффициент направленного действия (КНД) антенны определяется по формуле

$$D_{\max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} S_{\Gamma} \xi_A, \quad (7)$$

где $\xi_A \leq 1$ – коэффициент использования поверхности, а S_{Γ} – геометрическая площадь апертуры (см²).

По теоретическим данным [1], КНД может составлять $10^4 \dots 10^6$, подставив значения, рассчитанные в ходе проектирования антенны, в формулу (7), получаем 686 (28,4 дБ).

Проведенные вычисления позволили сделать вывод, что зеркальная антенна наиболее полно удовлетворяет требованиям, предъявляемым к антенной системе:

1. Простота конструкции по сравнению с фазированной антенной решеткой или различными щелевыми антеннами.
2. Обеспечение работы на различных частотах в любой произвольный момент времени.
3. Ширина основного лепестка разрабатываемой зеркальной антенны $2\theta_{0,5} = 7,8^\circ$.

Проектируемая зеркальная антенна удовлетворяет всем вышеперечисленным требованиям. В дальнейшем именно ее используем в качестве антенной системы передатчика помех.

Моделирование антенны. В процессе разработки и проектирования передатчиков СВЧ-энергии всегда приходится сталкиваться со значительным объемом работ, существенную часть которых занимают расчеты конструкции излучающей системы, расчеты основных параметров формируемого поля, а также

вида и параметров диаграммы направленности антенны. В ходе проектирования и разработки основной антенны выбор был остановлен на зеркальной антенне в виде параболоида вращения. Для упрощения расчетов и уменьшения времени, затрачиваемого на них, была использована методика с применением компьютерных программ [3].

Главный инструмент – программа FEKO, которая нашла много сторонников, работающих в области проектирования СВЧ-устройств вместе с HFSS, CST, MWO и другими коммерческими программами.

Особое место среди задач, решаемых в ходе расчетов при проектировании радиоэлектронной аппаратуры, занимают задачи излучения и рассеяния электромагнитных волн. Их отличие от задач анализа печатных или волноводных схем состоит в необходимости определения поля в области больших электрических размеров (под электрическим размером понимается отношение геометрического размера антенны к длине волны в свободном пространстве). Дискретизация больших областей порождает задачи огромной размерности. Поэтому использование многих «стандартных» методов здесь заведомо неэффективно. В этом случае строгие методы электродинамики необходимо дополнить так называемыми асимптотическими методами: физической оптики, геометрической теории дифракции и т.д. Гибридные подходы, использующие физическую оптику и геометрическую теорию дифракции ГТД, реализованы в системе FEKO [3].

Главной особенностью программы FEKO, отличающей ее от других коммерческих программ проектирования СВЧ устройств и моделирования электромагнитного излучений, является удачное сочетание базового метода моментов с приближенными аналитическими методами: методом физической оптики и однородной теории дифракции. Такое сочетание позволяет преодолеть главный недостаток программ компьютерного моделирования высокочастотных структур: большие затраты ресурсов при моделировании объектов с размерами много большими длины волны. В результате появляется возможность решения таких задач, как рассеяние радиоволн на самолете или корабле и распространение радиоволн в городских условиях, с высокой точностью. Ключевой задачей можно считать решение проблемы облучения параболической антенны, которая описана методом геометрической оптики, рупорной антенной, представленной прямоугольным волноводом [3].

С помощью программы FEKO v.5.2 была смоделирована зеркальная антенна передатчика на частоте 10 ГГц. В ходе исследований получена модель зеркальной антенны, для которой рассчитаны параметры дальнего поля (обзор по углу θ осуществлен в секторе 60° , шаг по углу θ выбран $0,5^\circ$ для получения наилучшей точности в последующем анализе диаграммы направленности) и получена трехмерная диаграмма направленности антенны, представленная на рисунке 2.

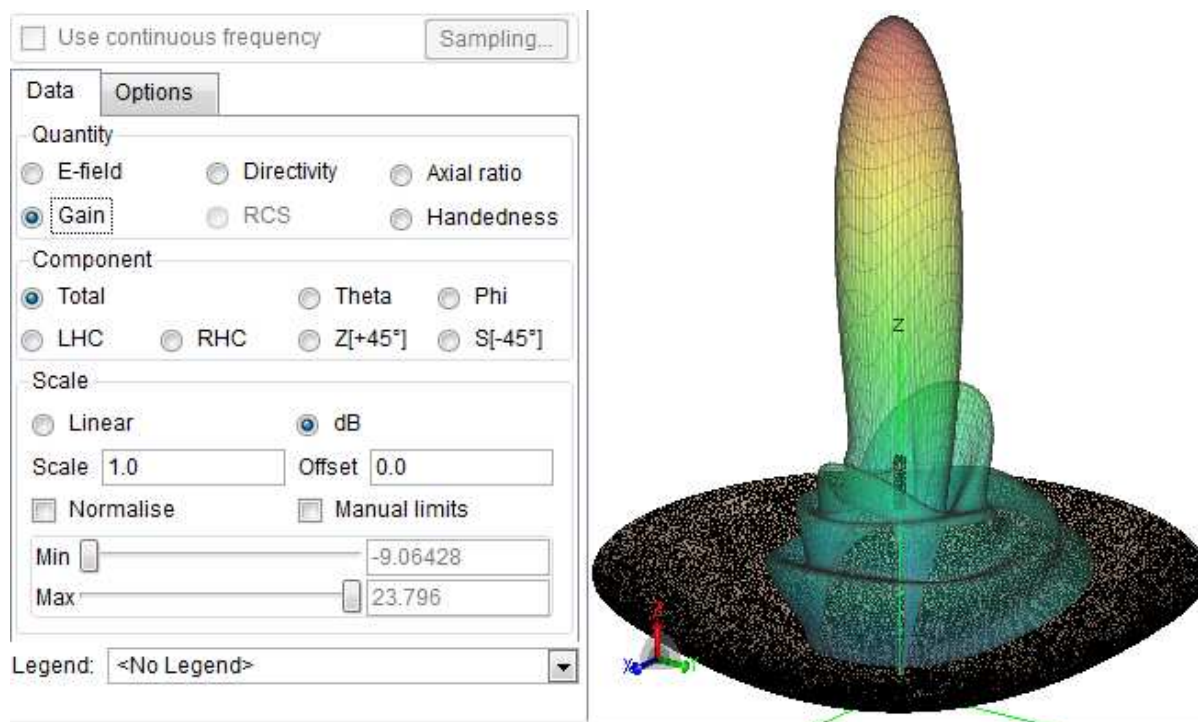


Рисунок 2. – Трехмерная диаграмма направленности антенны, полученной в программе FEKO

Анализ результатов моделирования. Рассчитанная диаграмма направленности имеет не совсем осесимметричный вид. Это объясняется тем, что при проектировании модели в программе FEKO к излучающему элементу подключался лишь один питающий порт к началу линии, поэтому возбуждение линии происходит от начала к концу. Это соответствует реальной ситуации, когда происходит формирование и прохождение домена через лавинно-пролетный диод, который излучает сигнал в реальном передатчике.

Основная мощность излучаемого поля передается в плоскости XZ , в связи с этим большее внимание сосредоточено на изучении характеристик поля именно в этой плоскости.

По результатам моделирования коэффициент направленного действия основного лепестка составляет 23,8 дБ. Опираясь на теоретические расчеты, был определен максимальный КНД антенны по формуле (7), где коэффициент ξ_A принят равным 1. Подставив эти значения, получаем $D_{\max} = 28,4$ дБ. Следовательно, теоретические расчеты и результаты моделирования в компьютерной программе FEKO оказались близки друг к другу, что говорит о правильном построении модели. Отличия в этих значениях объясняются более точным расчетом коэффициента использования поверхности антенны в модели, а также несимметричностью диаграммы направленности.

В горизонтальной плоскости получен лишь один лепесток. Его максимум соответствует максимальному значению КНД в данной плоскости 1,31 дБ. Однако излучающий элемент расположен в вертикальной плоскости, и значит поля в горизонтальной плоскости быть не должно. Наличие поля в этой плоскости объясняется явлением кроссполяризации. Это вызывает уменьшение коэффициента использования поверхности антенны. Уровень кроссполяризационной составляющей тем меньше, чем меньше отношение f/R_0 . В нашем случае это отношение составляет 0,625.

Боковые лепестки имеются они только в вертикальной плоскости. Интерес для нас представляют ближайшие лепестки, так как именно в основном лепестке и в них сосредотачивается до 98% мощности излучаемого сигнала. Рассмотрим ближайшие четыре лепестка. Уровни их мощностей составляют (слева направо): 5,3; 0,7; 2,42; 3,71 дБ.

Коэффициент усиления антенны определяется как произведение КНД и КПД. Коэффициент полезного действия антенны составляет 0,809814, соответственно коэффициент усиления – 22,9 дБ. Если сравнивать коэффициент усиления и КНД антенны, то можно отметить, что происходит ослабление мощности излучаемого сигнала на 0,9 дБ. Это ослабление объясняется потерями энергии в излучающем волноводе вследствие отражения от основной антенны, а также явлением кроссполяризации.

В результате моделирования АДН ширина основного лепестка по уровню 0,5 составляет $7^\circ 30'$. Расчетное значение ширины лепестка определяется по формуле (6) и имеет значение $7^\circ 48'$. Проведенные теоретические расчеты оказались весьма близки к данным, полученным при компьютерном моделировании. Различие можно объяснить тем, что с помощью программы FEKO получено более точное значение коэффициента, определяемого амплитудным распределением поля $C_{0,5}$ и несимметричностью диаграммы направленности.

Результаты натурного эксперимента. После сопоставления теоретических расчетов и результатов модулирования был реализован макетный образец разрабатываемой антенны. Натурный эксперимент проводился в условиях, где генератор радиопомех размещался на треноге, которая имела градусную шкалу в азимутальной плоскости. В качестве измерительной антенны использовалась детекторная секция с присоединенной к ней рупорной антенной, благодаря которой удалось оптимизировать направленные свойства приемной антенны в целом. На рисунках 3 и 5 приведены результаты натурного эксперимента в вертикальной и горизонтальных плоскостях соответственно. На рисунках 4 и 6 – результаты, полученные при помощи моделирования в программе FEKO в тех же плоскостях.

Как видно из рисунков 3 – 6, форма и вид диаграмм направленности, полученных в ходе моделирования и проведения натурного эксперимента, близки друг другу. В реальной диаграмме направленности антенны имеются такие же несимметричности, как и в промоделированной, которые объясняются появлением и прохождением доменов через пролетную область лавинно-пролетного диода (расширение АДН в области положительных углов). Ширина диаграммы направленности антенны в вертикальной плоскости составила $2\theta_{0,5} = 8^\circ 18'$, а в горизонтальной – $2\theta_{0,5} = 10^\circ 30'$. Полученные данные схожи с результатами эксперимента, что говорит о правильности произведенных расчетов. Различия полученных значений в ходе натурного эксперимента и модулирования объясняются тем, что реальная антенна имеет форму близкую к параболоиду, а не идеальный параболоид. Кроме того, следует отметить, что при моделировании не учитывается затекание токов на обратную сторону зеркала.

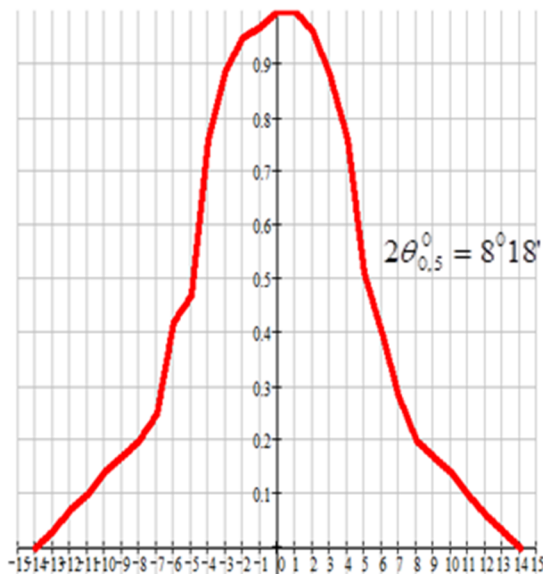


Рисунок 3. – Результаты натурного эксперимента (АДН антенны в вертикальной плоскости)

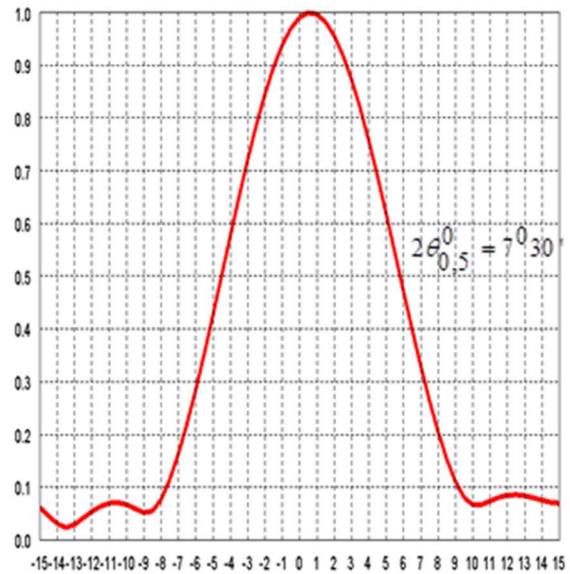


Рисунок 4. – Результат моделирования (АДН антенны в вертикальной плоскости)

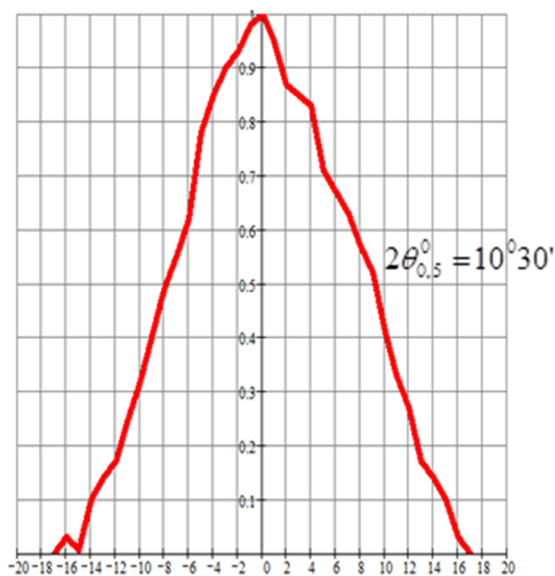


Рисунок 5. – Результаты натурного эксперимента (АДН антенны в горизонтальной плоскости)

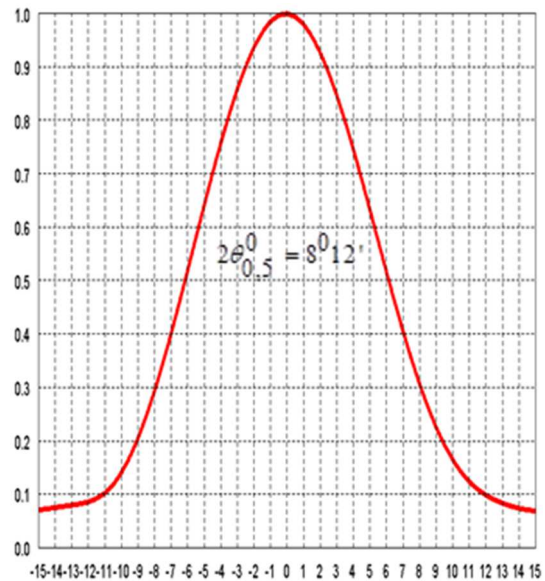


Рисунок 6. – Результат моделирования (АДН антенны в горизонтальной плоскости)

По полученным в результате натурного эксперимента данным был произведен расчет КНД антенны:

$$D_{\max} = 10 \lg \frac{36000}{2\theta_{0.5\text{верт}} 2\theta_{0.5\text{гор}}} = 26,2 \text{ дБ.}$$

Эти данные также близки к результатам теоретического расчета и моделирования.

Таким образом, используемая в данном передатчике антенная система позволяет получить характеристики, удовлетворяющие требованиям, предъявляемым к малогабаритному передатчику помех. Для сравнения в таблице приведены результаты, полученные при теоретическом расчете, моделировании и натурном эксперименте.

Таблица. – Результаты моделирования, расчета и эксперимента

Параметр	Теоретический расчет	Моделирование	Эксперимент
Ширина основного лепестка диаграммы направленности антенны $2\theta_{0,5}$	$2\theta_{0,5} = 7^\circ 48'$	$2\theta_{0,5} = 7^\circ 30'$	$2\theta_{0,5} = 8^\circ 18'$
Коэффициент направленного действия $D_{\max}$	28,4 дБ	23,8 дБ	26,2 дБ

Заключение. В качестве антенной системы была выбрана зеркальная антенна, которая наиболее полно удовлетворяла требованиям, предъявляемым к антенной системе МТПР. Выполнены теоретические расчеты и моделирование антенной системы с помощью компьютерной программы FEKO. Проведенный сравнительный анализ теоретического расчета и модулирования показал, что полученные данные почти идентичны. Натурным экспериментом подтверждены результаты модулирования и продемонстрировано их соответствие заданным требованиям при проектировании антенны для малогабаритного тестового генератора радиопомех.

При разработке антенны передатчика получена игольчатая диаграмма направленности с минимальной шириной главного лепестка, минимальным уровнем бокового излучения; при этом на раскрые зеркала формируется плоский фронт электромагнитной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марков, Л.Н. Антенные системы радиоэлектронной техники / Л.Н. Марков. – М. : Воениздат, 1993.
2. Полупроводниковые приборы. Справочник / под ред. Н.Н. Горюнова. – М. : Энергоатомиздат, 1987.
3. Банков, С.Е. Практикум проектирования СВЧ-структур с помощью FEKO / С.Е. Банков, А.А. Курушин. – М. : ЗАО «НПП «Родник», 2009.

Поступила 29.03.2018

ANTENNA SYSTEM FOR SMALL-SIZED TEST GENERATOR RADIO

A. TOLMACHEV, V. CHERTKOV

The article reflects the order of work on solving the issues of choosing an antenna system for a small-sized test jamming generator. The basic requirements for the antenna system are described. The results of antenna modulation in the FEKO software are presented. The results of a full-scale experiment on measuring the parameters of a developed antenna are described.

Keywords: mirror antenna, jamming generator, direction pattern, FEKO.

УДК 621.39

**МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ КАНАЛОВ СВЯЗИ
В СЕТЯХ БУДУЩЕГО С НЕОДНОРОДНЫМ ТРАФИКОМ**

**д-р техн. наук, проф. В.Б. ТОЛУБКО, д-р техн. наук, проф. Л.Н. БЕРКМАН,
д-р техн. наук, проф. Л.П. КРЮЧКОВА, канд. техн. наук, доц. О.Н. ТКАЧЕНКО**
(Государственный университет телекоммуникаций, Киев)

Проанализированы требования, которые предъявляются к пакетам различных типов. Определены временные задержки пакетов для восьми вариантов значений интенсивностей и длин пакетов при использовании каналов связи с различными пропускными способностями. Получено выражение для определения пропускной способности канала связи в зависимости от размера пакетов всех типов и доли речевых пакетов в общей нагрузке (k). Предлагается оценивать необходимую пропускную способность для всего диапазона изменения доли речевых пакетов k . Рассмотрены предельные случаи, когда $k \rightarrow 0$ и $k \rightarrow 1$. Получены выражения для нижней и верхней границы пропускной способности канала связи и оценка эффекта использования пропускной способности канала. Проведены расчеты пропускной способности канала связи при различных значениях параметров нагрузки и ограничений на задержку пакетов.

Ключевые слова: пакет, трафик, сеть, конвергентность, мультисервисность, неоднородный, время, задержка, пропускная способность.

Введение. Эффективность функционирования телекоммуникационной сети в значительной степени определяется временными задержками при передаче данных между пользователями сети. Минимизация задержек в сетях с однородным трафиком обеспечивается на этапе проектирования с использованием математических моделей массового обслуживания с однородным потоком заявок [1]. В настоящее время все большее распространение получают конвергентные мультисервисные сети, характерной чертой которых является неоднородность трафика [2, 3].

Неоднородность трафика заключается в передаче по конвергентной сети пакетов нескольких типов (видео, аудио, речевых, текстовых пакетов и т.д.), к которым предъявляются различные требования [3]. Эти требования формулируются в виде ограничений на время доставки пакетов различных типов. В основном, это средние ограничения τ_i^* , которые влияют на среднее время $\overline{\tau}_i$ задержки пакетов в конвергентной сети при условии

$$\overline{\tau}_i < \tau_i^* \quad (i = \overline{1, n}),$$

где n – количество типов пакетов в сети.

Исследование и анализ среднего времени задержки пакетов предлагается выполнять с использованием математических моделей массового обслуживания с неоднородным потоком заявок, что позволит оценить эффект влияния пропускной способности канала связи на показатели качества при передаче пакетов различных типов. При этом актуальной становится задача выбора параметров пакетов, критичных к задержкам в конвергентной сети [4].

Решение этой задачи позволит выполнить анализ свойств систем передачи данных и сформулировать рекомендации для проектирования конвергентных сетей, в частности, оценить задержку и необходимую пропускную способность каналов связи.

Основная часть. Для оценки эффективности передачи трафика в конвергентной сети как базовую модель канала связи целесообразно использовать систему массового обслуживания с неоднородным потоком пакетов n типов, поступающих в канал связи с интенсивностями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Обозначим:

V – пропускная способность канала связи;

L_i – средняя длина пакета i -го типа.

Для случая когда пакеты одного класса имеют одинаковую длину, а потоки пакетов являются самими простыми, средняя задержка пакета i -го типа при использовании метода управления трафиком на основе относительных приоритетов определяется выражением (1):

$$\tau_i = \left(\frac{\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot L_j^2 \right)}{\left(V - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \cdot L_i \right) \cdot \left(V - \sum_{j=1}^i \lambda_j \cdot L_i \right)} \right) + \frac{L_i}{V}, \quad (i = \overline{1, n}). \quad (1)$$

В таблице 1 представлены результаты расчета временных задержек пакетов для восьми вариантов значений интенсивностей и длин пакетов при использовании каналов связи с различными пропускными способностями.

Таблица 1 – Результаты расчета временных задержек пакетов

$\lambda_i, \text{с}^{-1}$	$L_i, \text{бит}$	$V_k, \text{кбит/с}$	
		128	192
		$\tau_i, \text{с}$	
2	$1.2 \cdot 10^4$	0.16	0.087
5	$8 \cdot 10^3$	0.129	0.067
10	$4 \cdot 10^3$	0.099	0.047
20	800	0.074	0.03
2	800	0.26	0.11
5	$4 \cdot 10^3$	0.285	0.126
10	$8 \cdot 10^3$	0.315	0.146
20	$1.2 \cdot 10^4$	0.346	0.167

Анализ результатов, представленных в таблице 1, и графических данных, представленных на рисунке 1 позволяет сформулировать следующие выводы:

1. Для обеспечения минимальной задержки передачи пакетов при пропускной способности канала 128 кбит/с целесообразно использовать длинные пакеты с малой интенсивностью или короткие пакеты, но с большей интенсивностью.

2. При поступлении пакетов большей интенсивности и длины создаются практически недопустимые задержки, превышающие установленное для речевых пакетов ограничение в 150 мс при пропускной способности канала 128 кбит/с.

3. При увеличении пропускной способности канала связи в 1,5 раза (с 128 до 192 кбит/с) задержки для пакетов всех типов и вариантов уменьшаются более чем в два раза и не превышают установленные для речевых пакетов ограничения – 150 мс.

Одной из важных задач на этапе проектирования конвергентных сетей является определение требований к пропускной способности каналов связи. Очевидно, что эти требования существенно зависят от нагрузки, создаваемой пакетами данных, и ограничений, накладываемых на величину задержки пакетов, к которым относятся, например, речевые.

Рассмотрим случай, когда ограничения заданы на среднее время задержки речевых пакетов в виде

$$\overline{\tau_i} < \tau_i^*.$$

Положим, что размеры пакетов всех типов одинаковые ($L_i = L = 64$ байт для всех), а доля речевых пакетов в общей нагрузке составляет k ($0 \leq k \leq 1$), то есть

$$\lambda_1 = k \cdot \Lambda.$$

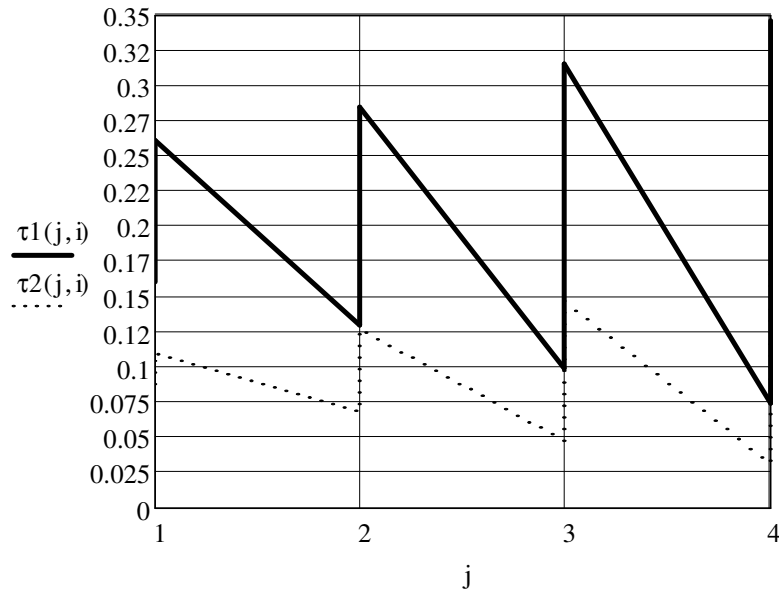


Рисунок 1. – Зависимость временных задержек пакетов от изменения интенсивностей и длин пакетов при использовании каналов связи с различными пропускными способностями (τ₁ при V_k = 128 кбит/с, τ₂ при V_k = 192 кбит/с)

Тогда, решая неравенство $\overline{\tau_i} < \tau_i^*$ с учетом (1), получим, что пропускная способность канала связи должна выбираться из условия

$$V > \frac{L}{2} \left(\frac{1}{\tau_1^*} + k \cdot \Lambda + \left(\left(k \cdot \Lambda - \frac{1}{\tau_1^*} \right)^2 + \frac{4 \cdot \Lambda}{\tau_1^*} \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (2)$$

Выражение в правой части неравенства (2) представляет собой нижнюю границу пропускной способности V_k канала связи, которую необходимо иметь для передачи k речевых пакетов с заданным высоким показателем качества. В процессе проектирования конвергентных сетей обычно достаточно сложно задать k речевых пакетов в общей нагрузке. В то же время эта доля в течение суток может изменяться в значительных пределах. В связи с этим предлагается оценивать необходимую пропускную способность для всего диапазона изменения k. Для этого рассмотрим предельные случаи, когда k → 0 и k → 1.

Тогда из условия (2) получим нижнюю (3) и верхнюю (4) границы пропускной способности канала связи и эффект использования пропускной способности канала (5):

$$V_{\min} = \frac{L}{2} \left(\frac{1}{\tau_1^*} + \left(\frac{1}{\tau_1^{2*}} + \frac{4 \cdot \Lambda}{\tau_1^*} \right)^{\frac{1}{2}} \right), \quad (3)$$

$$V_{\max} = L \left(\frac{1}{\tau_1^*} + \Lambda \right), \quad (4)$$

$$\Delta = (V_{\max} - V_k) / V_k \quad (5)$$

В таблице 2 представлены результаты расчета пропускной способности канала связи при различных значениях параметров нагрузки и ограничений на задержку пакетов. Для качественной передачи речевого трафика допустимая задержка составляет 150 мс.

Таблица 2 – Результаты расчета пропускной способности канала связи

Задержка ограничения, τ_1^* , мс	Интенсивность, c^{-1}	Доля речевых пакетов, k	Пропускная способность, кбит/с			Эффект, %
			V_k	V_{kmin}	V_{kmax}	δ
150	10	0.09	$6.371 \cdot 10^3$	$5.939 \cdot 10^3$	$8.533 \cdot 10^3$	33.95
	20	0.29	$9.108 \cdot 10^3$	$7.656 \cdot 10^3$	$1.365 \cdot 10^4$	49.91
	30	0.49	$1.3 \cdot 10^4$	$8.978 \cdot 10^3$	$1.877 \cdot 10^4$	44.443
	40	0.69	$1.87 \cdot 10^4$	$1.009 \cdot 10^4$	$2.389 \cdot 10^4$	27.75
	50	0.89	$2.656 \cdot 10^4$	$1.108 \cdot 10^4$	$2.901 \cdot 10^4$	9.24
300	10	0.09	$4.105 \cdot 10^3$	$3.846 \cdot 10^3$	$6.827 \cdot 10^3$	66.314
	20	0.29	$6.566 \cdot 10^3$	$5.06 \cdot 10^3$	$1.195 \cdot 10^4$	81.947
	30	0.49	$1.051 \cdot 10^4$	$5.995 \cdot 10^3$	$1.707 \cdot 10^4$	62.452
	40	0.69	$1.649 \cdot 10^4$	$6.784 \cdot 10^3$	$2.219 \cdot 10^4$	34.507
	50	0.89	$2.469 \cdot 10^4$	$7.48 \cdot 10^3$	$2.731 \cdot 10^4$	10.619

Анализ полученных результатов показывает, что снижение требований к пропускной способности каналов связи позволяет:

- уменьшить допустимую задержку в несколько раз при минимальном увеличении пропускной способности канала;
- при увеличении нагрузки (интенсивности Λ) и оптимальном выборе типа пакета увеличивается эффект использования пропускной способности каналов связи;
- с уменьшением доли k речевых пакетов в общей нагрузке эффект использования пропускной способности каналов связи увеличивается.

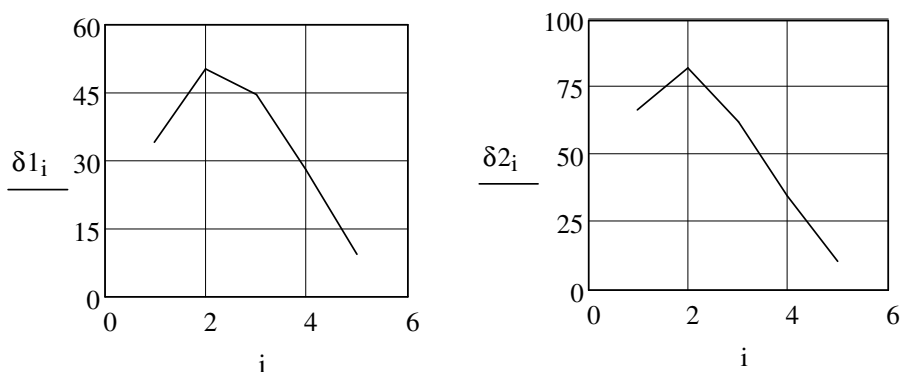


Рисунок 2. – Зависимость эффекта (%) использования пропускной способности каналов связи от коэффициента (k) при ограничениях на задержку пакетов 150 мс (δ_1) и 300 мс (δ_2).

Заключение. Предлагаемая модель исследования каналов связи мультисервисной сети позволяет определить пропускную способность канала и оценить эффект, который достигается за счет оптимального выбора интенсивности и типа пакета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Толубко, В.Б. Методи оптимізації / В.Б. Толубко, Л.Н. Беркман. – Київ : ДУТ, 2016. – 442 с.
2. Сети следующего поколения / А.В. Росляков [и др.]. – М. : Эко-Трендз, 2008. – 424 с.
3. Стеклов, В.К. Оптимізація та моделювання пристроїв і систем зв'язку / В.К. Стеклов, Л.Н. Беркман, Є.В. Кільчицький. – Київ : Техніка, 2004. – 482 с.
4. Стеклов, В.К. Телекоммуникационные сети / В.К. Стеклов, Л.Н. Беркман. – Київ : Киевский институт связи Украинской государственной академии связи им. А.С. Попова, 2000. – 395 с.
5. Характеристики нагрузки интеллектуальной сети / А.Е. Кучерявый [и др.] // Электросвязь. – 2000. – № 11. – С. 7–9.
6. Интеллектуальные сети связи. / Б.Я. Лихтциндер [и др.]. – М. : Эко-Трендз, 2000. – 205 с.
7. Морозов, В.К. Основы теории информационных сетей / В.К. Морозов, А.В. Долганов. – М. : Высшая школа, 1987. – 271 с.
8. Клейнрок, Л. Вычислительные системы с очередями / Л. Клейнрок. – М. : Мир, 1979. – 282 с.

Поступила 26.03.2018

RESEARCH METHODOLOGY COMMUNICATION CHANNELS IN FUTURE NETWORKS WITH HETEROGENEOUS TRAFFIC

V.B. TOLUBKO, L.N. BERKMAN, L.P. KRYUCHKOVA, O.N. TKACHENKO

The requirements for various types of packages are analyzed. The time delays of packets for eight variants of values of intensities and lengths of packets are determined at use of communication channels with various throughputs. An expression is obtained for determining the capacity of the communication channel, depending on the size of all packets and the proportion of voice packets in the total load (k). It is proposed to estimate the necessary throughput for the entire range of the change in the share of speech packets k . Limit cases are considered when $k \rightarrow 0$ and $k \rightarrow 1$. Expressions were obtained for the lower and upper bounds of the capacity of the communication channel and the effect of using the channel capacity. Calculations of the capacity of the communication channel for various values of load parameters and restrictions on the delay of packets.

Keywords: packet, traffic, network, convergence, multi-service, heterogeneous, time, delay, bandwidth.

УДК 621.865

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ OLP ПРОМЫШЛЕННЫХ РОБОТОВ-МАНИПУЛЯТОРОВ

Л.А. ЛОБОРЕВА

(Могилевский государственный университет продовольствия)

Приведен обзор известных САПР и систем автономного программирования промышленных роботов, которые позволяют создавать 3D-модели, проводить предварительное тестирование путем имитационного моделирования в виртуальной среде, оптимизировать траектории и алгоритмы управления промышленными роботами.

Ключевые слова: робот-манипулятор, САПР, offline-программирование, язык программирования.

Введение. При разработке робототехнических комплексов требуется специализированное программное обеспечение для 3D- и динамического имитационного моделирования процессов. Создание траектории движения робота методами offline-программирования (OLP) состоит из нескольких этапов. На первом – создаются точные CAD-модели (CAD – Computer Aided Design – система автоматизированного проектирования) всех узлов роботизированной ячейки: деталей, технологической среды, робота, инструмента, оснастки и т.д. На втором этапе роботизированная технологическая ячейка моделируется в виртуальной 3D-среде. На следующем этапе рассчитываются опорные точки траектории движения робота-манипулятора для его перемещения к детали и выполнения технологических операций. Траектории должны удовлетворять ряду требований: отсутствие столкновений, оптимальность по количеству и качеству движений, обеспечение качества позиционирования, минимизация операций по времени, обеспечение должной скорости приводов робота, обеспечение точности следования необходимой траектории при контурном управлении (например, вдоль линии сварного шва с учетом его глубины и углов расположения рабочего инструмента) и т.п. После расчета и проверки траектории ее нужно перевести на язык управляющего контроллера конкретной модели робота для реализации в условиях производства.

1. САПР для создания геометрических моделей при OLP. САПР (система автоматизации проектных работ, система автоматизированного проектирования) – программный пакет, предназначенный для проектирования (разработки) объектов производства, а также оформления конструкторской и/или технологической документации. Чем точнее исходные данные об элементах роботизированной ячейки и рабочей среды, тем точнее планируется траектория робота. На практике достаточно сложно рассчитать все 3D-модели с большой точностью и учесть все особенности реальных объектов (рисунк).

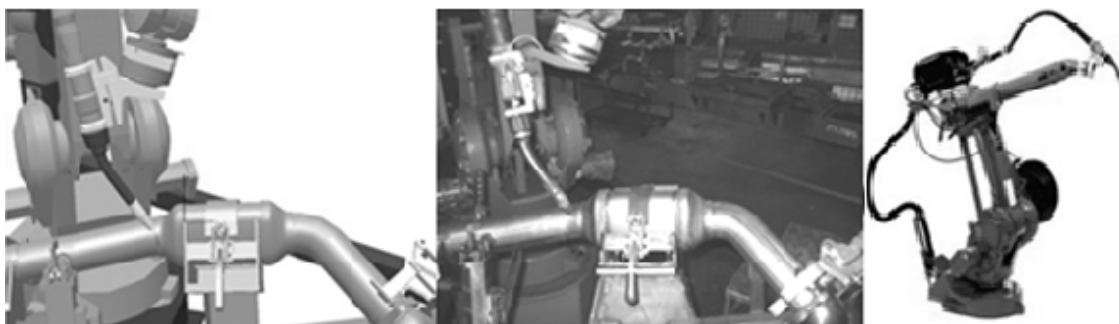


Рисунок. – Виртуальная модель и ее реальные прототипы

Особенно проблематично учитывать при моделировании расположение навесного оборудования, проводов, шлангов водо- и газоснабжения, смонтированных на роботе и изменяющих свое положение при перемещении его звеньев. Некоторые CAD-модели, служащие основой для OLP, могут создаваться на стадии разработки производственных изделий и продукции в САПР.

Компоненты многофункциональных САПР имеют три специализации: CAD, CAM, CAE. Модули CAD (Computer Aided Design) предназначены для выполнения графических работ, CAM (Computer Aided Manufacturing) – для решения задач технологической подготовки производства, CAE (Computer Aided Engineering) – для инженерных расчетов, анализа и проверки проектных решений.

В настоящее время для создания 2D- и 3D-моделей используется более 60 программных пакетов САПР разного уровня. Наиболее распространены системы для создания базовых графических модулей CAD с дополнительными приложениями. В таблице приведен перечень наиболее популярных программ-

ных продуктов с функциями создания CAD- или CAM-моделей (система контроля и автоматического управления). Разработчики указаны с учетом слияния и объединения компаний [1–11].

Таблица. – Наиболее используемые программные продукты и их разработчики

Программный продукт	Разработчик	Программный продукт	Разработчик
Alphacam	Vero Software (HEXAGON)	NCGCAM	NCG CAM Solutions
ArtCAM	Delcam (Autodesk)	NX	Siemens PLM Software
Autodesk Mechanical Desktop	Delcam (Autodesk)	PartMaker	Delcam (Autodesk)
BobCAD-CAM	BobCAD-CAM	PEPS	Vero Software (HEXAGON)
CAM-TOOL	C&G SystemsInc.	PowerMILL	Delcam (Autodesk)
CAMWorks	Geometric Technologies	SharpCam	SharpCamLtd.
CATIA	DassaultSystemes	SolidCAM/InventorCAM	SolidCAM
CimatronE	CimatronGroup	Space-E	NTT DATA ENGINEERING SYS
Creo (Pro-E)	PTC	SprutCAM	«Спрут-Технология»
DUCT	Delcam (Autodesk)	SurfCAM	Vero Software (HEXAGON)
Edgecam	Vero Software (HEXAGON)	Tebis	Tebis Technischelnf. AG
ESPIRIT	DP Technology	Tehtran	NIP-Informatica
Featurecam	Delcam (Autodesk)	T-FLEX CAD	Топ-Системы
GeMMa 3D	NTC Gemma	TopSolid	Missler Software
GibbsCAM	CimatronGroup	Unigraphics	EDS
GO2cam	GO2cam International	VISI	Vero Software (HEXAGON)
I-DEAS	SDRC	VisualCAD/CAM	MecSoftCorporation
Inventor HSM/HSMWorks	HSMWorks (Autodesk)	WorkNC	Vero Software (HEXAGON)
HiperMILL	OPEN MIND	ZW3D	ZWSOFT
Mastercam	CNC Software	КОМПАС	АСКОН

Приведем примеры функциональных возможностей некоторых САПР.

Крупнейшим в мире поставщиком программного обеспечения для автоматизированного проектирования является компания Autodesk Inc, которая с 1982 года разрабатывает программные продукты, позволяющие создавать цифровые модели. Технологии Autodesk используются для визуализации, моделирования и анализа поведения разрабатываемых конструкций на ранних стадиях проектирования и позволяют увидеть, а также испытать модель в виртуальной среде [12].

MicroStation – это профессиональная, высокопроизводительная система для 2D/3D-автоматизированного проектирования и выполнения работ, связанных с черчением, конструированием, визуализацией, анализом, управлением базами данных и моделированием.

Система **CATIA** (Computer Aided Three-dimensional Interactive Application) – одна из самых распространенных САПР высокого уровня. Это комплексная CAD/CAM/CAE система, включающая инструменты 3D-моделирования, подсистемы программной имитации сложных технологических процессов, развитые средства анализа и единую базу данных текстовой и графической информации [4].

SolidWorks – система для автоматизированного проектирования, инженерного анализа и подготовки производства изделий разной сложности и назначения.

Существуют и специализированные приложения, например, SprutCAM предназначена для разработки управляющих программ (УП) оборудования с ЧПУ, являющегося предшественниками роботов.

СПРУТ (Система проектирования универсальных технологий) – интегрированная метаинструментальная языковая среда для создания сквозных САПР по принципу RAD-технологии (RAPID APPLICATION DEVELOPMENT TOOLS).

T-FLEX CAD – первая в мире САПР с геометрической параметризацией, построена на базе ядра Parasolid фирмы Unigraphics Solutions и содержит средства 3D-проектирования, модули конечно-элементного и динамического анализа. Имеет специализированные приложения T-FLEX ЧПУ 2D и 3D (система подготовки программ для станков с ЧПУ) и T-FLEX NC Tracer (система имитации процесса обработки детали на станке с ЧПУ по готовой управляющей программе [5]

САПР верхнего уровня **Pro/ENGINEER** – это CAD/CAM/CAE система, которая охватывает все сферы проектирования, технологической подготовки производства и изготовления изделия. Наличие прямого доступа в систему поддержки жизненного цикла изделия Windchill PDMLink позволяет относить Pro/ENGINEER к PLM-системам (PLM – Plant Lifecycle Management – управление жизненным циклом промышленного объекта) [8].

КОМПАС – САПР, которая имеет возможности оформления проектной и конструкторской документации согласно стандартам серии ЕСКД и СПДС. Версия КОМПАС-3D предназначена для трехмерного проектирования [9].

Отметим программные продукты для комплексной автоматизации конструкторского проектирования и технологической подготовки производства, разрабатываемые компанией «Интермех» (Беларусь). Программы для автоматизированного конструкторско-технологического проектирования используются от разработки конструкторской документации (Cadmech) с последующим автоматизированным выпуском текстовых конструкторских документов СП, ВС, ВП, ПЭ (AVS) до ведения сетевого иерархического архива предприятия с возможностью ведения проектов и документооборота предприятия (Search). Система проектирования трехмерных параметрических деталей и сборок (Cadmech Desktop) позволяет решать задачи 3D-конструкторского проектирования. Приложение **CADMECH SW** предназначено для создания моделей деталей и сборочных единиц, оформления чертежей в среде SOLIDWORKS, выпуска текстовых конструкторских документов (спецификации любых форм, ведомости спецификаций и т.д.).

Многие САПР позволяют сохранить модель в файле с таким расширением, который доступен в других системах проектирования, например, ACIS, IGES, Parasolid, STEP, STL, VRML, однако при переносе модели в другой пакет часть функций может быть потеряна. Большинство создаваемых в описанных САПР моделей могут импортироваться в системы автономного программирования роботов.

Некоторые производители роботов размещают на официальных сайтах их CAD-модели. Например, фирма ABB предлагает CAD-модели своих роботов в следующих форматах: Validation, DXF/DWG 2D, SAT, SW, STEP, PARASOLID, VDA, VRML, IGES, IGRIP, STL, VRML, ROBCAD, RobotStudio, IGRIP, и CAD-модели позиционеров в форматах: ACIS, IGES, PARASOLID, SAT, SOLIDWORKS, STEP [11].

2. Системы автономного программирования роботов. Системы аналитического программирования роботов делятся на два типа. Первый состоит из автономных систем, ориентированных на узкий класс роботов. К таким относятся VAL (Unimation), Sigla (Olivetti), AML (IBM), MCL (McDonnell Douglas), ACRAMITIC (Cincinnati Milacron) и др. Системы второго типа входят в состав универсальных или специализированных робототехнических САПР/КАТПП в виде самостоятельных модулей. Наиболее известными системами автономного программирования, используемыми при тестировании алгоритмов управления промышленных роботов, являются пакеты Tecnomatix ROBCAD, RobotStudio, CimStation, IGRIP, Robotworks, ROBOMAX, FAMOS robotic. Рассмотрим их возможности подробнее.

Tecnomatix (разработчик Siemens PLM Software) – это комплексный пакет для построения схемы производственного процесса, проектирования, моделирования, проверки и производства, основанный на принципах PLM производственной платформы Teamcenter. Tecnomatix 9 имеет функцию автоматической генерации траекторий роботов. В программное обеспечение Tecnomatix ROBCAD (другое название eM-Workplace) входит набор программ для проектирования, имитации и автономного программирования производственных роботизированных систем. Он состоит из различных специализированных модулей, включая ROBCAD/Line, ROBCAD Spot, ROBCAD/Paint, ROBCAD/Drill, ROBCAD/Arc, ROBCAD/Fixture, ROBCAD/Man, ROBCAD/Laser и ROBCAD/Onsite. В пакет можно импортировать данные из основных промышленных САПР (CATIA, NX, Pro/Engineer), а также транслировать данные из нейтральных форматов (IGES, DXF, VDAFS, SET, SLT, STEP, JT). ROBCAD позволяет моделировать и синхронизировать работу роботов и вспомогательного оборудования, имеет инструменты для разработки траектории движения и ее оптимизации, подготовки УП робота [2].

Программный интерфейс для разработки дополнительных приложений обеспечивает доступ к функциям и алгоритмам ядра, включая геометрию, кинематику, планирование траекторий движения и графику. В дополнение к имеющейся библиотеке промышленных роботов ROBCAD позволяет создавать новые модели манипуляторов и оборудования, задавать их кинематику. При 3D-симуляции динамически осуществляется проверка столкновений для предотвращения повреждения элементов оборудования, оснастки, деталей. Механизм RRS (realistic robot simulation), основанный на использовании оригинального программного обеспечения контроллера робота, позволяет оценивать время и траекторию движения с достаточно высокой точностью.

ROBCAD содержит модуль OLP, который позволяет моделировать движение манипуляторов и загружать проверенную программу в контроллер робота. Доступны интерфейсы большинства промышленных роботов ведущих производителей. После настройки всех параметров модуль OLP генерирует УП для загрузки в контроллер. Созданная программа учитывает реальные условия эксплуатации робота (скорости и ускорения движения робота, блокировки при входе в зоны возможного столкновения с другими роботами, окружающим оборудованием и т.д.). Модуль также позволяет импортировать программы из контроллера робота для их оптимизации и повторного использования.

Модуль Calibration пакета ROBCAD предназначен для точного сопоставления положения элементов модели и реальной ячейки. После процесса калибровки программа автоматически корректируется, и робот будет достигать заданных точек без ручной корректировки их реального положения. Продукт работает и с другими средствами калибровки, в том числе Dynalog и Krypton.

Операции закладки деталей, присадки, ручной сварки, механического крепежа механизмов выполняет человек. Модуль Human служит для моделирования, анализа и оптимизации ручных операций.

Приложение Tecnomatix Human Performance позволяет помещать в виртуальную среду биомеханически точные цифровые манекены человека обоих полов и разных габаритов и анализировать их поведение. Ручные операции могут моделироваться одновременно с работой роботов и механизмов. Использование технологии цифрового манекена позволяет проверить обзорность, зоны доступности предметов, удобство их расположения, оценить вероятность травмирования людей. В ROBCAD доступно создание HTML-отчетов о ячейках и последовательности операций (SOP). Отчет включает изображения и данные, полученные из ячеек, детальные отчеты по роботам, инструменту, механизмам, моделям человека, сварным точкам, а также анимации в виде VRML. Такие функции недоступны другим пакетам.

Tecnomatix Process Simulate – программный продукт для моделирования и проверки технологических процессов в трехмерной графической среде. Результатом моделирования является «цифровой двойник» производства (Digital Twin), который используется для проверки и оптимизации техпроцесса, генерации УП роботов, виртуальной пуско-наладки автоматизированных линий, обеспечения эргономических требований. Базовый функционал пакета обеспечивает создание траекторий перемещения, анализ кинематики оборудования, проверку на столкновения с деталями, оснасткой и другим оборудованием, расчет времени цикла, выбор применяемого инструмента и др. Проверенные траектории движения могут экспортироваться в виде программного кода на языке контроллера робота. Для симуляции ручных операций применяется модуль Process Simulate Human, который использует технологию и цифровой манекен Jack.

RobotExpert – программный продукт в составе Tecnomatix, выполняющий трехмерную симуляцию отдельных промышленных роботов или небольших роботизированных комплексов, проводящий оптимизацию траекторий и генерацию УП для роботов. RobotExpert построен на ядре Process Simulate, имеет общий с ним пользовательский интерфейс и аналогичную поддержку форматов данных и контроллеров роботов. В отличие от Process Simulate, предназначен исключительно для работы на файловой системе, без использования PLM-системы управления данными [13].

Для расширения функциональных возможностей имеется открытый программный интерфейс, который позволяет разрабатывать собственные подключаемые модули. Основной функционал пакета совпадает с Process Simulate и включает:

- симуляцию работы по циклограмме;
- анализ статических и динамических столкновений;
- симуляцию кинематики оборудования;
- поддержку технологических процессов на основе траектории;
- анализ достижимости в рабочей зоне робота;
- расчет времени цикла работы (поддерживается технология RRS);
- поддержку различных типов контроллеров промышленных роботов;
- генерацию УП на основе симуляции;
- средства твердотельного моделирования;
- импорт геометрических моделей из основных форматов САПР.

Основные ограничения по сравнению с Process Simulate таковы:

- отсутствуют функции поддержки дискретных процессов (точечной контактной сварки, сверления, клепки);
- не поддерживается управление симуляцией на основе сигналов оборудования;
- отсутствуют дополнительные модули: поддержки манекена человека, виртуальной пуско-наладки и др.

Результат симуляции – проверенные траектории движения – можно экспортировать в виде программного кода на языке контроллера робота.

Аналогами RobotExpert являются программные средства симуляции от изготовителей промышленных роботов: RobotStudio компании ABB, KUKA.Sim Pro от фирмы KUKA, RoboGuide компании Fanuc.

RobotStudio – пакет для моделирования и оптимизации роботизированных ячеек, который позволяет импортировать данные в основных CAD-форматах (IGES, STEP, VRML, VDAFS, ACIS и CATIA). Используя CAD-модель обрабатываемой детали, можно автоматически сгенерировать положение робота, перемещающегося по заданной кривой. Редактор программ (ProgramMaker) генерирует программы для роботов, а также обеспечивает возможность разработки и отладки программ в режиме offline.

В RobotStudio при симуляции программы выбранные объекты автоматически проверяются на столкновения, в результате чего выводится цветовая диаграмма, которая используется для интерактивного изменения параметров и определения необходимого поворота вокруг оси инструмента в каждой конкретной точке по всей траектории движения инструмента.

RobotStudio может обнаруживать сингулярности движений робота и выдавать предупреждение для их предотвращения. Инструмент для отслеживания имитационного моделирования (Simulation Monitor) обеспечивает визуальный контроль оптимизации движений робота. Красными линиями указываются цели, которые можно оптимизировать для получения наиболее эффективной траектории движения манипулятора. Для уменьшения продолжительности рабочего цикла можно оптимизировать скорости и ускорения рабочей точки инструмента (TCP) или отдельных осей.

Для адаптации и расширения функциональности RobotStudio пользователь может создавать макросы на языке VBA.

Написанная для робота программа может без промежуточных трансляций загружаться в систему, благодаря технологии VirtualRobot компании ABB. Ее основой является ABB VirtualController – точная копия программного обеспечения, управляющего роботизированными системами на производстве.

Программа MasterCAM (разработчик CNC Software), дополненная приложением Robotmaster, позволяет осуществлять offline-программирование промышленных роботов известных производителей (KUKA, ABB, Fanuc, Motoman и др.). В системе Robotmaster (создатель приложения jabez technologies) траектория инструмента создается сначала в среде Mastercam по правилам программирования обработки на станках с ЧПУ, после этого она пересчитывается в движения сочленений робота с учетом его кинематики. При симуляции доступна проверка и оптимизация программы. С помощью постпроцессора создаются готовые УП для указанных выше роботов. В программе можно одновременно управлять 11 осями, что недоступно в других пакетах [14].

Получить исходные данные можно из файла CAD-программы в нейтральном формате или с помощью трансляторов данных для файлов IGES, Parasolid, SAT (ACIS solids), AutoCAD (DXF, DWG, и Inventor TM файлы), SolidWorks, Solid Edge, STEP, EPS, CADL, STL, VDA, и ASCII, CATIA, Pro/E.

Встроенные библиотеки конфигураций роботов обеспечивают:

- выбор производителя роботов;
- выбор и назначение операционных параметров: навесного оборудования на манипуляторе, данных о рабочей плоскости и инструментах на навесном оборудовании, параметров для выполнения рабочих и вспомогательных движений, принципа отслеживания положения основной оси инструмента;
- выбор параметров устройств, обеспечивающих дополнительные линейные перемещения и повороты (максимально допустимое количество: три управляемые линейные направляющие и 2-осевой поворотный стол, однако в современных позиционерах осей может быть больше).

Специальные средства Robotmaster позволяют подкорректировать и оптимизировать движение манипулятора, используя возможность поворота инструмента вокруг своей оси. Данный подход позволяет избежать столкновений и следующих критических ситуаций:

- соударение рабочих частей робота и навесного оборудования (между собой, с обрабатываемой деталью, с другими элементами роботизированной ячейки);
- сингулярность (неоднозначность), при которой взаимное положение суставов робота таково, что существует множество решений для обеспечения дальнейшего перемещения;
- поворот сустава на предельно допустимую величину, что исключает дальнейшее движение;
- наличие участков вне зоны досягаемости манипулятора;
- наличие участков траектории, на которых для обеспечения постоянства скорости линейного движения инструмента скорость вращения суставов достигает предельно допустимых значений [15, 16].

В среде Robotmaster создается полномасштабная модель роботизированной ячейки, которая используется для симуляции движения и отладки параметров. При симуляции траектория инструмента отображается пошагово или непрерывно. Доступно ручное управление всеми осями робота. Имеется возможность включать или выключать отображение составных элементов оборудования в ячейке при просмотре.

В Robotmaster встроен постпроцессор, который обеспечивает выпуск УП для конкретного робота. Перед генерацией УП траектория автоматически проверяется на столкновения. Если объем программы превышает максимально допустимый, то она автоматически разбивается на подпрограммы.

Robotmaster может использоваться для специализированных задач, например, получения траекторий для дуговой сварки. Траектории сварки автоматически создаются по CAD-модели с указанием минимального количества параметров для выполнения требуемого шва и правильного положения сварочной головки. Имеются возможности управления наклоном и поворотом сварочной головки для оптимального ведения процесса сварки, автоматического включения или выключения сварочной головки. Управление ориентацией инструмента позволяет оптимизировать УП, изменив вращение суставов манипулятора.

Программное обеспечение Deneb Robotics производит программы виртуального проектирования, виртуального прототипирования и имитации производственных участков и заводов. Возможные виды имитации включают визуализацию, обнаружение столкновений и оценку длительности производствен-

ного цикла. Компанией выпускаются следующие программные продукты: ENVISION (для виртуального проектирования и прототипирования), IGRIP (для проектирования роботов и планирования движения) и ERGO (для имитации и анализа эргономики и человеческого фактора) [17].

Компания SILMA производит серию модулей виртуальной инженерии: SoftAssembly обеспечивает имитацию последовательности сборки, запись оптимальной траектории и визуализацию, выявление столкновений в процессе симуляции; SoftMachine служит для имитации обработки на станке с ЧПУ; CimStation Robotics – для имитации роботизированного производственного участка [19].

Пакет CimStation Robotics (CSR) имеет средства для моделирования различных промышленных робототехнических комплексов (РТК). Он содержит подсистему калибровки, позволяющую скорректировать технологическую программу в соответствии с геометрическими размерами реального комплекса. Имеется также возможность выбрать робота из библиотеки, смоделировать его движения, обнаружить столкновения и сформировать его полную динамическую модель. Для создания пользовательских приложений предусмотрен специальный язык SIL. Имеется также возможность подключать модули, написанные на языке C. Технологическая программа робота создается на языке, совместимом с Karel. Доступны следующие функции: передача данных в форматах IGES/ ACIS; постпроцессирование робота; возможность RRS; обеспечение прямого интерфейса САПР (CATIA / Pro-E и др.); экспорт / импорт ячеек в RobCad; экспорт / импорт ячеек в Delmia [20].

Процесс имитационного моделирования РТК при помощи пакета CimStation основан на анализе вариантов, предлагаемых пользователем. Он имеет более развитые, чем RobCAD средства динамического моделирования манипуляторов, но практически не учитывает технологические особенности реальных производственных процессов. Аналогичными недостатками обладают и пакеты IGRIP, Workspace, GRASP и ROSI.

FAMOS robotic® (Carat Robotic GmbH) – система offline-программирования, которая предназначена для разработки робототехнических систем, установок и технологических процессов. Действует она на базе симулятора EASY-ROB™ Robotics. Пакет позволяет программировать и генерировать траектории движения робота на обрабатываемой детали, оценить доступность рабочего пространства, провести проверку на столкновение с периферийным оборудованием (причем может оценивать зазоры и расстояния до объектов), оценить время технологического процесса. В системе доступна симуляция роботов основных типов. Возможна работа с основными типами CAD-форматов: Step, VDAFS, IGES ACIS SAT и Parasolid XT, файлы ProENGINEER и Wildfire могут использоваться без потерь, доступны фильтры для импорта данных из CATIA V4 и V5, UNIGRAPHICS и др. Пакет работает с трехмерными моделями посредством Drag'n Drop, интегрированным Granite-Kernel от PTC. Сгенерированную траекторию движения робота на обрабатываемой детали можно изменить, используя сдвиг, поворот, зеркальное отображение и т.д. Основные параметры процессов устанавливаются функцией «ЭДИТОР». При работе можно управлять ИО-сигналами и подпрограммами. Для создания УП используются постпроцессоры роботов ABB, b + m, Fanuc, KUKA, STÄUBLI и MOTOMAN [21].

PowerMILL Robot (Autodesk) является специализированной расширенной версией САМ-системы PowerMILL, которая дает возможность комбинировать в одной УП принципы ручного и автоматизированного программирования. Пользователь, задавая последовательность промежуточных положений, может показать в виртуальной среде необходимый принцип перемещения звеньев робота в процессе обработки, а САМ-система автоматически подстроит движения робота под выполнение управляющей программы для конкретной операции обработки. Такой подход востребован, если применяется нестандартная крепежная оснастка или имеются другие геометрические ограничения, которые не удастся полностью учесть на этапе разработки УП. Библиотеки конфигураций роботов такие же, как у Robotmaster, дополнительно имеется функция выбора параметров смены инструмента.

В системе PowerMILL Robot УП проверяется на столкновения. При программировании промышленного робота может оказаться, что ось его кисти ориентирована коллинеарно одной из осей кинематических звеньев. Такая функциональная сингулярность кисти характерна тем, что данное положение кисти робота в пространстве может быть реализовано при помощи широкого диапазона углов поворота его промежуточных звеньев. Возникновение сингулярности кисти робота сопровождается резкими поворотами промежуточных звеньев, что может привести к столкновениям и ухудшить качество обработки. В PowerMILL Robot 2015 реализовано автоматическое предотвращение сингулярности кисти как наиболее часто встречающегося вида сингулярности.

В PowerMILL Robot могут импортироваться управляющие программы, разработанные в других САМ-системах. Импортированные УП используются для компьютерной 3D-визуализации и могут постпроцессироваться под другой тип робота. В PowerMILL Robot имеется непосредственная поддержка на уровне G-кода (команд перемещения) промышленных роботов KUKA, ABB, Fanuc, Yaskawa Motoman, Stäubli, Hyundai, Comau, Kawasaki Robot, Nachi и Universal Robots, что позволяет не использовать программное обеспечение сторонних разработчиков для генерации УП контроллера.

PowerMILL Robot имеет доступ ко всем многоосевым стратегиям обработки, реализованных в PowerMILL. В отличие от пятиосных станков с ЧПУ, промышленные роботы обладают шестью или более степенями свободы. При работе с линейными направляющими и позиционерами, имеющими от одной до пяти осей, задача эффективного синхронного управления всеми осями усложняется. В процессе разработки УП пользователь сначала задает для конкретной детали последовательность обработки, применяя многоосевые стратегии. Затем УП передается в специальный модуль, позволяющий задавать принцип перемещения кинематических звеньев робота с учетом избыточности степеней свободы с точки зрения пятиосевой обработки.

Комплекс цифрового производства DELMIA (Dassault Systemes) предназначен для моделирования отдельных роботов и роботизированных ячеек, станков ЧПУ, измерительных устройств, потоков движения изделий в цехе. При моделировании роботизированных ячеек проводится анализ рабочих зон и проверка на столкновения. Доступна функция генерации программы управления для реального контроллера робота. Модель робота выбирается из библиотеки или создается виртуальная кинематическая модель по аналогии с твердотельным моделированием в пакете CATIA. Модуль IGRIP имеет набор инструментов для конкретных операций, например, выбор траектории при дуговой сварке. Если к движению робота предъявляются особые требования, то имеется возможность расширить стандартные функции, создав собственные макросы и подпрограммы. Предусмотрена возможность коррекции времени рабочего цикла. Имеются также инструменты генерации и контроля синхронных действий нескольких роботов. IGRIP имеет набор инструментов динамического анализа, изменения параметров ПИД-регуляторов, что позволяет провести анализ сил, ускорений и нагрузок звеньев робота [23].

MELFA-Works – расширение к пакету трехмерного CAD-программирования SolidWorks – позволяет моделировать запрограммированные последовательности операций в виртуальной среде, проводить проверку на столкновения между частями системы и оптимизировать перемещения. Траектории перемещений позволяет сохранять в файлах с расширением AVI.

Robotworks – система моделирования движения и программирования роботов, которая также функционирует в SolidWorks. Robotworks 6.5 поддерживает параметрические файлы с расширениями *.RB4 или *.RB6, которые используются для твердотельного проектирования роботизированной ячейки и имитации движений робота в 3D-среде. Robotworks позволяет перемещать инструмент, обнаруживать столкновения, отображать фактические общие значения и ограничения, предоставляет рамки для инструментов и пользовательские (базовые) фреймы, работает с большинством импортируемых CAD-поверхностей, считывает координаты выбранной точки XYZ и переводит их на робота, записывает внешние события и инструкции (ввод/ вывод, скорость и т. д.) для каждой точки, записывает собственные файлы для роботов FANUC, ABB, Kawasaki, Motoman, KUKA и STÄUBLI, создает точечные файлы в общей форме для большинства других роботов [24]. Исследование траектории проводится путем изменения углов в сочленениях манипулятора.

В системе автономного программирования ROBOMAX также имитируется движение манипулятора путем импорта исходных данных для роботизированной ячейки и экспорта из нее координат полученной траектории. Система ROBOMAX дополнена программными модулями на языках AutoLisp и C++ и содержит базу данных с файлами описания промышленных роботов. ROBOMAX в отличие от Robotworks имеет встроенный язык программирования SRCL (Siemens Robot Control Language), который позволяет создать технологическую программу для робота на основании импортированных данных о координатах точек рассчитанной траектории.

Отдельные производители создают специализированные программные пакеты для моделирования и программирования своих роботов. Например, программное обеспечение Fanuc RoboGuide предназначено для моделирования, симуляции и оценки работы и времени цикла робототехнических комплексов на базе роботов фирмы Fanuc, написания УП модели робота [25].

ArcWeld PowerPac (AWPP) – дополнение к RobotStudio, которое разработано специально для генерирования программ робота при электродуговой сварке. Приложение содержит набор готовых шаблонов, которые могут быть модифицированы пользователем. VirtualArc прогнозирует и настраивает параметры сварки в режиме offline. Прогнозы из симуляций используются как входные параметры для прогнозирования качества и профиля сварки, дефектов шва.

Пакет программ ROBO-PLAN предназначен для программирования сварочных роботов QIROX® на основе модели САПР для задач сварки. Генерация и адаптация макета системы проводится с помощью модуля ROBO-MOD, объединяющего импортируемые файлы CAD в форматах ACIS, CATIA, PROE, STEP и кинематические модели роботов. Функция MASTER-SLAVE позволяет синхронизировать движение двух роботов. В программе доступно сглаживание сварочных параметров путем плавного изменения до 8 сварочных параметров на отрезке шва заданной длины [22].

Задачи моделирования и оптимизации, которые решают описанные программные пакеты, имеют локальный характер и не исчерпывают всех проблем, возникающих при проектировании.

3. Языковые средства робототехнических систем. После компьютерного моделирования и определения оптимальной траектории движения робота ее нужно перевести на язык контроллера реального робота для выполнения технологической программы. Описанные системы автономного программирования имеют функции постпроцессирования и создания УП для роботов на разных языках. Но практически все крупные производители робототехники разрабатывают собственные языки программирования и средства вспомогательного программного обеспечения, что осложняет перенос программы, написанной для одного робота, в контроллер робота другого производителя. Если контроллер робота связан с программируемым логическим контроллером, обеспечивающим взаимодействие робота и периферийного оборудования, то программе потребуется корректировка. Большинство промышленных роботов имеет комплексную программную оболочку, в которую при необходимости интегрируются дополнительные модули расширений, например, модули коммуникаций с внешними сенсорными устройствами: системами видеонаблюдения, замера прилагаемой нагрузки, вращающего момента и т.п. Это позволяет робототехнической системе реагировать на изменение внешних условий. Однако при имитационном моделировании в большинстве систем автономного программирования функции связи с внешними устройствами не отражаются, следовательно, программу робота приходится дорабатывать.

Программное обеспечение робототехнических систем состоит из языков разных уровней:

- языки общения человека-оператора с роботом через интеллектуальный интерфейс;
- проблемно-ориентированные языки для описания выполняемых технологических операций в координатах рабочей зоны робота (языки Autopass, LM-GED, Robex и др.);
- роботоориентированные языки для описания движений самого робота (языки MHI, WAVE, MINI, AL, VAL, AML, HELP, PAL, TEACH и др.);
- языки элементарных движений (SIGLA, EMILY, RCL, RPL, ANORAD);
- языки управления отдельными приводами.

Системы управления роботами в составе РТК, работают совместно с другими техническими системами, поэтому к указанным выше добавляются унифицированные промежуточные языки, предназначенные для связывания технологических систем и комплексов, использующих различные языковые средства [26–30].

Заключение. По сравнению с программированием в режиме обучения offline-программирование позволяет исключить или минимизировать время остановок робототехнического комплекса для перепрограммирования. С помощью систем автономного программирования и моделирования решаются следующие задачи: оптимизации компоновки оборудования, выбора роботов и инструмента, анализа достижимости роботами расчетных точек, проверки заданного времени цикла, оптимизации траекторий движения робота, перераспределения операций между роботами, анализа статических столкновений роботов с элементами РТК, анализа динамических столкновений в ячейке РТК, калибровки моделей ячеек РТК в соответствии с реальными отклонениями при изготовлении и монтаже оборудования, создания УП для контроллера робота.

Проведенный обзор показал, что виртуальное моделирование и программирование связано с рядом неразрешенных проблем, таких как:

- неполное или неточное моделирование составляющих робота или роботизированной ячейки, что в реальности может приводить к столкновениям и сбоям в работе. Например, CAD-модели не отображают проводки электро-, газоснабжения и в процессе моделирования нужно предугадать, куда они будут перемещаться при движении робота;
- сложность оптимизации траекторий движения по совокупности критериев и с учетом расположения и ориентации рабочего инструмента;
- отсутствие некоторых моделей роботов и позиционеров в базах существующих программных пакетов. Ориентация деталей позиционерами не всегда точно отображается, т.к. отсутствует возможность задавать все скорости движения звеньев позиционера и робота-манипулятора, а управление, как правило, ограничено 6 осями;
- сложность оценки одновременной работы человека, роботов, позиционеров;
- сложность создания и отладки программы для управляющего контроллера робота и общего контроллера для робота и позиционера при синхронном и асинхронном управлении;
- сложности переноса программы из системы автономного программирования в контроллер реальных роботов, связанные с разнообразием языков программирования и с отсутствием симуляции совместной работы робота и внешних систем и датчиков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пакет **AutoCAD** [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.autodesk.ru>.
2. Tecnomatix Программное обеспечение [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.tecnomatix.com>.

3. Программное обеспечение [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.bentleysoft.ru>.
4. CATIA [Электронный ресурс]. – Режим доступа: (<http://www.catia.ru>).
5. T-flex [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.tfex.ru>.
6. Pro-technologies [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.pro-technologies.ru>.
7. IRONCAD [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.ironcad.com>.
8. Solidworks [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.solidworks.ru>.
9. КОМПАС [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://kompas.ru>.
10. Обзор различных систем CAD/CAM/CAE/GIS [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.cad.dp.ua/obzors/cads.php>.
11. Промышленные роботы ABB [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://new.abb.com/products/robotics/industrial-robots/irb-1600/irb-1600-cad>.
12. Autodesk Robotics [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://manufacturing.autodesk.com/solutions/robotics/index.asp>.
13. RobotExpert [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/wiki/RobotExpert>.
14. Программное обеспечение Mastercam [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mastercam-russia.ru/robotmaster_doc_128.html.
15. Robotmaster 6.5: новый релиз ведущей системы программирования роботов на платформе Mastercam 2017 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.cadcamcae.lv/N106/80-84.pdf>.
16. Robotmaster 6.3: новый релиз ведущей системы офлайн-программирования роботов на платформе Mastercam [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mastercam-russia.ru/articles/Robotmaster_V6.3.pdf.
17. Программное обеспечение Deneb Robotics, Inc. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.deneb.com>.
18. Программное обеспечение DELCAM [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.delcam.com.
19. Программное обеспечение SILMA [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.silma.com>.
20. Cimsation [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.acel.co.uk/cimsation-robotics/>.
21. Famos-robotic [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.easy-rob.com/en/product/offline-programming/famos-robotic.html>.
22. Программное обеспечение Robosoft [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.smart2tech.ru/robosoft/robo-plan>.
23. DELMIA [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.delmia.ru>.
24. Robotworks [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.robotworks-eu.com/products/RBWabout.htm>.
25. FANUC [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.fanuc.eu/uk/en/robots/accessories/roboguide.
26. Программное обеспечение роботов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.mitsubishi-automation.ru/products/robots-software>.
27. Постпроцессоры [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://postprocessor.su>.
28. Козырев, Ю.Г. Промышленные роботы: основные типы и технические характеристики : учеб. пособие / Ю.Г. Козырев. – М. : КНОРУС, 2015. – 560 с.
29. Юревич, Е.И. Управление роботами и робототехническими системами / Е.И. Юревич. – СПб., 2000. – 170 с.
30. Зенкевич, С.Л. Управление роботами. Основы управления манипуляционными роботами : учеб. пособие для вузов / С.Л. Зенкевич, А.С. Ющенко. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 400 с.

Поступила 16.10.2017

SOFTWARE OF OLP FOR INDUSTRIAL ROBOTS-MANIPULATORS

L. LOBOREVA

The article gives an overview of the well-known CAD systems and autonomous programming systems for industrial robots that allow creating 3D models, pre-testing by simulation in a virtual environment, optimizing trajectories and algorithms for controlling industrial robots.

Keywords: robot manipulator, CAD, Offline-programming, programming language.

НАУЧНАЯ ШКОЛА В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ И ПРАКТИКИ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ, БЕЗОПАСНОСТИ ИНФОРМАЦИИ ПОЛОЦКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Руководитель научной школы Железняк Владимир Кириллович – крупный ученый в области научного направления информатики – технической защиты информации, ныне заведующий кафедрой радиоэлектроники, доктор технических наук, профессор.

В марте 2008 года приказом ректора УО «Полоцкий государственный университет» № 384 от 26.03.2008 была создана межкафедральная «Научно-исследовательская опытно-экспериментальная лаборатория технической защиты информации», с целью проведения исследований, разработки, внедрения в практику результатов и подготовки научных кадров. Научным руководителем лаборатории назначен доктор технических наук, профессор В.К. Железняк.

За 10 лет научной деятельности под руководством Владимира Кирилловича сформулированы новые направления развития автоматизированного контроля и оценки мер защиты информации в условиях случайных непреднамеренных воздействий на сигнал и активных маскирующих помех для речевых, видео- и сигналов передачи данных с научным обоснованием критериев достаточности принятых мер, исключающих утечку информации.

Учениками научной школы являются ученые-разработчики:

Р.П. Богущ	канд. техн. наук, доцент
К.Я. Раханов	канд. техн. наук, доцент кафедры вычислительных систем и сетей
А.В. Барков	канд. техн. наук
В.С. Рябенко	канд. техн. наук, доцент кафедры радиоэлектроники
И.Б. Бураченко	канд. техн. наук, доцент кафедры технологий программирования
В.М. Чертков	магистр техн. наук

В работе научной школы активно принимают участие преподаватели и студенты кафедр университета: радиоэлектроники, вычислительных систем и сетей, электронных устройств, технологий программирования, геодезии и геоинформационных систем.

За это время на базе научной школы успешно защитили кандидатские диссертации – 4 человека, магистерские – 10 человек.

По итогам конкурса «Лучший инновационный проект и лучшая научно-техническая разработка года», прошедшего на XXII Международной выставке-конгрессе «Высокие технологии. Инновации. Инвестиции» в Санкт-Петербурге (Россия), в номинации «Лучший инновационный проект в области средств обеспечения безопасности, средств оповещения и коммуникаций, средств спасения, телефонов, навигаторов, трекеров, транспондеров, противопожарной безопасности, безопасности на транспорте» совместная разработка «Мобильная локально-измерительная система двойного назначения оценки защищенности каналов утечки речевой информации» молодых ученых научной школы К.Я. Раханова, А.В. Баркова, В.С. Рябенко, И.Б. Бураченко под руководством В.К. Железняка была отмечена «Дипломом I степени» с вручением «Золотой медали».



За время деятельности научной школы учеными-разработчиками опубликовано 75 статей в научно-технических журналах и 95 статей – в материалах международных научно-технических конференций, получено 18 патентов на изобретения по тематике научной школы, издано 2 учебных пособия.

Руководителем научной школы В.К. Железняком получено специальное разрешение (лицензия) № 01019/320, выданное Оперативно-аналитическим центром Президента Республики Беларусь на право осуществления деятельности по технической и (или) криптографической защите информации.

Результаты проводимых исследований опубликованы в следующих специализированных изданиях, журналах:

- Вестник Полоцкого государственного университета;
- Научно-практический журнал «Безопасность информационных технологий»;
- Научно-практический журнал «Электроника инфо»;
- Вестник Военной академии Республики Беларусь;
- Вестник связи;
- Известия Национальной Академии Наук Беларуси;
- Безопасность информационных технологий. Специальный выпуск: Комплексная защита информации XVII и др.

Ученые-разработчики научной школы принимали участие в международных выставках:

- Ганноверская международная промышленная ярмарка HANNOVER MESSE 2014, Ганновер, Германия, 23-27 апреля 2014 г.;
- Международная выставка «Российско-Китайское ЭКСПО», Харбин, Китай, 30 июня – 4 июля 2014 г.;
- XXII Международная специализированная выставка по телекоммуникациям, информационным и банковским технологиям «ТИБО-2015», Минск, 22–25 апреля 2015 г.;
- 7-я Международная специализированная выставка «Человек и безопасность», Минск, Беларусь, 11–13 ноября 2015 г. и др.

Научная школа поддерживает тесное сотрудничество с такими научными и производственными организациями, как:

- Научно-технический центр КГБ Республики Беларусь;
- Государственный пограничный комитет Республики Беларусь;
- Институт технической защиты информации;
- Научно-исследовательский институт Министерства образования Республики Беларусь;
- Институт технической физики;
- Белорусский государственный университет;
- Белорусская государственная академия связи и др.

Поддерживаются научные связи и с вузами России и Украины.

Сегодня сотрудники научной школы на базе научно-исследовательской опытно-экспериментальной лаборатории технической защиты информации активно продолжают вести исследования по передовым направлениям в таких областях, как:

- видео- и речевая информации;
- контроль защищенности информации;
- аттестация объектов на соответствие требований безопасности защиты информации.

ФИЗИКА

УДК 537.533;621.384

РАЗРАБОТКА КОНЦЕПЦИИ И ОПЫТНЫХ ОБРАЗЦОВ ПЛАЗМЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ ЭЛЕКТРОНОВ ДЛЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЦЕЛЕЙ

канд. техн. наук, доц. Д.А. АНТОНОВИЧ, д-р техн. наук, проф. В.А. ГРУЗДЕВ
(Полоцкий государственный университет)

Предложены основные результаты работы научного коллектива в области плазменной эмиссионной электроники Полоцкого государственного университета. Научные интересы в области корпускулярно-лучевых технологий включают широкий круг вопросов – от теоретических исследований особенностей формирования электронных пучков в плазменных структурах до создания отечественных электронно-лучевых энергокомплексов для реализации существующих и разработки новых электронно-лучевых технологий и внедрения полученных научных результатов в существующие производства в машино- и приборостроении. Показаны отличия электронно-оптических систем по типу используемого разряда, конструкции и области применения. Рассмотрены ключевые области теории плазменного эмиттера, которые были дополнены за счет теоретической и экспериментальной работы, выполненной в Полоцком государственном университете. Отмечены основные направления работы и наиболее значимые результаты, а также их место в общей теории и практике применения электронно-оптических систем с плазменным источником электронов.

Ключевые слова: Плазменный источник электронов, электронно-оптические системы, плазменный эмиттер, разряд в скрещенных $E \times H$ полях, системы электропитания плазменных источников электронов.

Введение.

Юбилейный для Полоцкого государственного университета (ПГУ) 2018 год оказался вдвойне юбилейным для группы сотрудников университета, присоединившихся к исследованиям международного масштаба в области создания эффективной технологической электронно-лучевой аппаратуры, альтернативной разработанной к тому времени (1993 год) аппаратуре на основе термоэмиссионных систем.

Настоятельная необходимость исследований в этой области была обусловлена двумя основными факторами. Во-первых, к этому времени уже начался переход от исследования возможностей электронно-лучевых технологий к широкому их внедрению в промышленность, где существенные требования предъявляются уже к технико-экономическим показателям, таким как производительность и долговечность электронно-лучевой аппаратуры. Во-вторых, вследствие специфических условий реализации электронно-лучевых технологий, в частности, давления газа не выше 10^{-3} мм. рт. ст. и интенсивного испарения материала при электронно-лучевом воздействии, существенно ограничивали возможности достижения требуемых технико-экономических показателей электронно-лучевой аппаратуры на основе термоэмиссионных систем.

В качестве альтернативных электронно-оптическим системам (ЭОС) с термокатадами рассматривались ЭОС с плазменными образованиями. По совокупности физических процессов и принципов формирования электронного пучка ЭОС на основе плазменных образований в процессе их исследований разделились на три принципиально различающихся типа. В двух из них для формирования электронного пучка использовался высоковольтный тлеющий разряд (ВТР) с большим прикатодным или прианодным падением потенциала (до нескольких десятков киловольт), где осуществляется основное ускорение пучка электронов. Особенностью ЭОС с ВТР является существенная связь по давлению газа между пространством формирования электронного пучка (область ВТР) и пространством взаимодействия электронного пучка с обрабатываемым изделием (технологическая камера), что накладывает определенные ограничения на возможности применения ЭОС с ВТР.

Физическая модель ЭОС с использованием плазменных образований третьего типа существенно отличается от модели ЭОС с ВТР. В них пространства формирования электронного пучка и его технологического применения существенно разделены, что значительно снижает их взаимное влияние на параметры электронного пучка. В отличие от ЭОС с ВТР, где электронный пучок обеспечивается в основном ионно-электронной эмиссией с ненакаляемого катода ВТР, в ЭОС третьего типа электронный пучок обеспечивается в основном плазменными электронами низковольтного (несколько сотен вольт) разряда, возбуждаемого обычно в небольшом объеме, отделенном от промежутка ускорения и первичного фор-

мирования пучка эмиссионным каналом (отверстием в одном из электродов разрядной камеры), диаметр и длина которого составляют величину порядка 10^{-3} м. Такой эмиссионный канал обеспечивает значительный перепад давления плазмообразующего газа между разрядной камерой низковольтного разряда и промежутком ускорения электронов (примерно на порядок величины) при напуске плазмообразующего газа в разрядную камеру. Кроме этого, вследствие проникновения в эмиссионный канал с одной стороны плазмы низковольтного разряда, а с другой – электрического поля ускоряющего электрода, в эмиссионном канале обычно формируется граница плазмы, на которой напряженность электрического поля равна нулю. Такая граница обеспечивает свободный выход плазменных электронов в область ускоряющего поля (промежуток ускорения) и в то же время оказывает существенное влияние на конфигурацию эквипотенциальных поверхностей ускоряющего поля вблизи плазменной границы, что в значительной степени определяет электронно-оптические параметры формируемого пучка.

Кратко изложенная физическая модель процессов в электродной структуре с плазменным образованием третьего типа для формирования электронных пучков сложилась на основе исследований, выполненных к началу 90-х годов в Томском университете систем управления и радиоэлектроники и в Институте сильноточной электроники СО РАН (Россия, Томск). Она стала общепризнанной; привела к созданию ряда опытных образцов, получивших название ЭОС с плазменным эмиттером или плазменных источников электронов (ПИЭЛ) и доказавших их высокую перспективность для реализации электронно-лучевых технологий; оказалась наиболее эффективной для дальнейшего развития теории ПИЭЛ и создания новых, перспективных для развития электронно-лучевых технологий, конструкций ПИЭЛ.

Одной из разновидностей ПИЭЛ, востребованных развивающимися электронно-лучевыми технологиями, являются ПИЭЛ, формирующие пучки большого сечения (ПБС). В них для формирования эмиттирующей плазменной поверхности с площадью, обычно равной площади требуемого сечения ПБС (десятки и сотни квадратных сантиметров), используются мультиканальные сеточные или перфорированные отверстиями электроды. При этом процессы в эмиссионных каналах ПИЭЛ с ПБС с небольшими особенностями подобны процессам, изложенным выше для ПИЭЛ, с одним эмиссионным каналом.

В 1993 году к исследованиям, связанным с дальнейшим развитием теоретических основ ПИЭЛ и разработкой опытных образцов для технологических целей, к указанным выше организациям в России присоединилась исследовательская группа Полоцкого государственного университета. *На основе которой была создана ведущая школа в области плазменной эмиссионной электроники*

При этом удалось достичь высокого уровня сотрудничества исследовательских групп: от выполнения совместных научно-исследовательских работ до обмена результатами собственных разработок и их взаимооценки. Результаты, достигнутые сотрудниками ПГУ, кратко изложены ниже.

Развитие теоретического аспекта концепции ПИЭЛ.

Общепринято, что плотность эмиссионного тока в ЭОС с плазменным эмиттером (ПИЭЛ) пропорциональна концентрации электронов в плазме. Поэтому одним из параметров генератора плазмы в ПИЭЛ является энергетическая эффективность, которая пропорциональна отношению концентрации электронов в плазме к энергии, затраченной на ее формирование. Ранее было показано, что высокую энергетическую эффективность обеспечивают различные модификации тлеющего разряда в скрещенных $E \times H$ полях с осцилляцией электронов, поступающих в разрядную структуру с катодов в результате вторичной ионно-электронной эмиссии и набирающих энергию в катодных падениях потенциала. Считалось, что эти электроны вносят основной вклад в ионизацию используемого в ПИЭЛ плазмообразующего газа. Однако исследования в ПГУ показали, что при достижении (с увеличением тока разряда) определенной концентрации плазменных электронов энергия электронов ионно-электронной эмиссии с катодов может эффективно передаваться плазменным электронам вследствие повышения их кулоновского взаимодействия. В результате ионизация газа высокоэнергетичной частью плазменных электронов может в два-три раза превышать, в условиях ПИЭЛ, интенсивность ионизации газа электронами с катодов генератора плазмы.

Установлена возможность реализации в ПИЭЛ третьего (дополнительного) механизма энерговклада в ионизационный процесс, проявляющийся в значительной мере в случае ограничения подвижности плазменных электронов в направлении эмиссионного канала магнитным полем (замагниченностью электронов плазмы) и при отборе (эмиссии) электронов из плазмы через эмиссионный канал. Причиной этого дополнительного энерговклада является возникновение в упомянутых условиях электрического поля с напряженностью порядка 1-2 В/см во всем объеме плазмы. Это поле повышает среднестатистическую энергию плазменных электронов, а также долю электронов, способных ионизовать газ.

Направление вектора напряженности электрического поля, возникающего в плазме, таково, что в плазме возникает дрейф плазменных электронов к эмиссионному каналу в дополнение к их диффузионному движению, реализуемому в случае эквипотенциальной плазмы. Этот фактор может при опреде-

ленных условиях существенно повысить эффективность извлечения электронов (α) из плазмы газового разряда в ПИЭЛ, которую принято характеризовать отношением тока пучка (эмиссии) к току разряда, формирующего плазму.

Значительный объем исследований понадобился для оптимизации условий формирования и функционирования эмитирующей границы (поверхности) плазмы в эмиссионном канале. Упомянутая исходная для дальнейшего совершенствования модель ПИЭЛ включала эмиссионный канал в одном из катодных электродов генератора плазмы, т.е. канал имел катодный потенциал его стенок. Особенности функционирования такого канала были исследованы ранее в достаточном объеме. Однако особенности функционирования двух других, как предполагалось принципиально отличающихся типов канала, не были изучены в достаточной степени: канал с потенциалом стенок, равным потенциалу анодных электродов генератора плазмы, а также канал в изолированном от систем электропитания ПИЭЛ электроде, помещенном в плазму. Потенциал стенок канала в изолированном электроде устанавливается автоматически таким, чтобы выполнялось условие равенства поступающих на него электронного и ионного токов из плазмы. Такой потенциал принято называть «плавающим» потенциалом. Основные результаты исследования эмиссионных каналов и влияние их на параметры ПИЭЛ кратко можно сформулировать следующим образом: при регулировании ускоряющего электроны пучка напряжения в ПИЭЛ эмиссионный канал с катодным потенциалом стенок обеспечивает наибольшую стабильность тока электронного пучка; канал с анодным потенциалом стенок обеспечивает наибольшую стабильность геометрических параметров пучка; канал с «плавающим» потенциалом стенок при совместном использовании с каналом с анодным потенциалом стенок в некоторых ПИЭЛ позволяет повысить эффективность извлечения электронов (α) из плазмы и повысить стабильность тока пучка.

Таким образом, в процессе экспериментального исследования физическая модель ПИЭЛ существенно дополнялась и усложнялась. Подвижность эмитирующей границы плазмы и изменение ее формы при регулировании ускоряющего напряжения, влияние на эти же факторы и ток пучка интенсивности ионизационных процессов в ускоряющем промежутке, возмущение эмитирующей плазмы отбором из нее электронов, а также ряд других факторов существенно усложнили экспериментальную оптимизацию ПИЭЛ в соответствии с требованиями к параметрам формируемого электронного пучка. В связи с этим возникла необходимость создания автоматизированной системы численного моделирования формирования электронного пучка конкретно для ПИЭЛ на базе обновленной физической модели. Такая система была успешно создана в ПГУ. В дополнение к ней была разработана автоматизированная система экспериментального измерения параметров формируемых ПИЭЛ электронных пучков распределения плотности тока в различных сечениях пучка. Указанный инструментарий позволил также обнаружить и раскрыть физическую сущность ранее неизвестных, но проявляющихся при определенных условиях в ПИЭЛ эффектов.

Обнаружена экспериментально и адекватно отражена численным моделированием возможность реализации в ПИЭЛ с ПБС двух отличающихся режимов работы расширителя плазмы: пассивного расширения плазмы, инжектируемой в расширитель; и режим «активного» расширителя, при котором основное влияние на параметры плазмы (эмитирующей) оказывают ионизационные процессы в самом расширителе. Режим «активного» расширителя возникает при определенном сочетании в нем давления газа и концентрации инжектируемой плазмы.

Часто при использовании ПИЭЛ с ПБС ускоряющим электроны пучка электродом является поверхность изделия, обрабатываемая электронным пучком. В этом случае при определенном сочетании давления в технологической камере и плотности тока в пучке возникает вторичная (пучковая) плазма у поверхности изделия. С повышением ускоряющего напряжения и тока пучка вторичная плазма расширяется в сторону «сетчатого» электрода, формирующего поверхность эмитирующей плазмы, а также является источником обратного ионного потока. Это существенно ослабляет электрическую прочность ускоряющего промежутка и дестабилизирует ток пучка. На основе численного моделирования разработан и впервые предложен способ двухсеточной стабилизации тока пучка в условиях работы ПИЭЛ с ПБС.

Численное моделирование формирования электронных пучков для электронно-лучевой сварки в ПИЭЛ с одиночным эмиссионным каналом показало, что при повышенном давлении в канале вблизи эмитирующей плазменной границы может возникать вторичная (пучковая) плазма, отделенная от эмитирующей плазмы электрическим слоем с разностью потенциалов порядка 100–200 В. Критическое давление газа, при котором возникают вторичная плазма и электрический слой, попадает в рабочий для ПИЭЛ диапазон давлений. Диапазон ускоряющего напряжения, при котором возникает такая структура электрического слоя, соответствует значениям, когда ускоряющее поле уже существенно проникает в эмиссионный канал, но напряженность поля еще не очень высока (порядка 10–15% рабочих значений напряженности для использованных в численном моделировании размеров ЭОС ПИЭЛ).

Численное моделирование также показало, что вторичная плазма не стационарна, а вследствие ионизационных процессов на ее границе, обращенной к границе эмитирующей плазмы, смещается вместе с электрическим слоем и границей эмитирующей плазмы вглубь эмиссионного канала, куда ускоряющее поле проникает слабо. В результате падение напряжения на электрическом слое уменьшается, интенсивность ионизации газа в нем также снижается, вторичная плазма разрушается, а граница эмитирующей плазмы возвращается в исходное состояние. Периодическое повторение этих процессов обеспечивает режим автоколебаний эмиссии электронов (при стационарных потенциалах электродов ПИЭЛ) с частотой около 1 МГц и глубиной модуляции 75–80%. С увеличением напряженности ускоряющего электрического поля устанавливается режим стационарной эмиссии.

Экспериментальное исследование формирования электронного пучка в ПИЭЛ с геометрией электродов и в условиях, подобных использованному для численного моделирования, подтвердили возможность практической реализации рассмотренных режимов эмиссии и в достаточной степени совпадающие в обоих случаях значения частоты и глубины модуляции эмиссионного тока в автоколебательном режиме.

Опытно-конструкторские разработки.

Разработан электронно-лучевой энергокомплекс для электронно-лучевой сварки с мощностью пучка до 10 кВт и диаметром пучка порядка 1–2 мм. В состав энергокомплекса вошли два опытных образца электронной пушки на основе различных ЭОС с плазменным эмиттером и оригинальная система их электропитания, обеспечивающая необходимое регулирование и стабилизацию тока пучка. Опытный образец энергокомплекса более двух лет эксплуатировался в лаборатории электронно-лучевой сварки Минского тракторного завода для сварки шестерен. Результаты эксплуатации практически в производственных условиях подтвердили возможность получения высококачественных непрерывных и прерывистых сварных соединений, достижения высокой долговечности (наработки на отказ), в десятки раз превышающей этот параметр применявшихся ранее термоэмиссионных электронных пушек, и повышения производительности электронно-лучевой установки.

Для электронно-лучевой термической обработки внутренних цилиндрических металлических поверхностей (заковки и оплавления микронеровностей), в частности, цилиндров двигателей внутреннего сгорания, разработан опытный образец электронной пушки, формирующей одновременно два электронных пучка. Электронные пучки с диаметром порядка 2–3 мм и плотностью мощности до 10^4 Вт/см² распространяются в диаметрально противоположных направлениях. Для реализации технологии электронно-лучевого воздействия опытный образец электронной пушки может погружаться в цилиндры с внутренним диаметром более 50 мм. При этом движение зоны воздействия пучков на обрабатываемую поверхность можно обеспечивать соответствующими движениями цилиндра или электронной пушки.

На международной выставке-ярмарке в Санкт-Петербурге (Россия) HI-TECH 2011 в рамках конкурса на лучший инновационный проект и лучшую научно-техническую разработку года эти опытные образцы были отмечены «Золотой медалью».

Разработаны опытные конструкции электронных и ионных источников, формирующих пучки большого сечения (от 30 до 100 мм диаметром). В Республиканском конкурсе этим образцам присуждена третья премия в номинации «Лучшая полезная модель» постановлением Президиума Республиканского Совета ВОИР 17.06.2002 г.

Упомянутые опытные образцы защищены авторскими свидетельствами на изобретения и патентами Республики Беларусь.

Основные выполненные научно-исследовательские работы.

За годы работы научным коллективом по данной тематике исследований было выполнено свыше 15 госбюджетных и хозяйственных работ. К основным можно отнести следующие:

1. Государственная программа фундаментальных и опытно-исследовательских работ «Плазмодинамика 02» (№ гос. регистрации 2002801) «Теоретические и экспериментальные исследования эффективности переключения электронного тока в плазменных источниках электронов с замагниченной эмитирующей плазмой» (2003 – 2005 гг.).

2. Государственная программа прикладных научных исследований «Материалы в технике», задание 1.36.2 (№ гос. регистрации 20072125) «Разработка процессов и технологических основ получения изделий из отходов тугоплавких металлов электронно-лучевым переплавом» (2007 – 2010 гг.).

3. Государственная программа научных исследований «Конвергенция», задание 2.4.03 (№ гос. регистрации 20111981) «Разработка принципов формирования электронных пучков с помощью плазменных образований» (2011 – 2013 гг.).

4. Государственная программа научных исследований «Функциональные и машиностроительные материалы, наноматериалы» подпрограмма «Материалы в технике», задание 4.3.03 (№ гос. регистрации 20111413) «Исследование и разработка технологических параметров получения модифицированных

поверхностных структур с целью упрочнения и повышения износостойкости инструмента и деталей машин» (2011 – 2013 гг.).

5. Совместный проект УО «ПГУ» и РУП «МТЗ», г. Минск (договор № 24396 от 01.11.04) «Разработка и изготовление опытного образца электронно-лучевой пушки с плазменным источником электронов» (2004 – 2008 гг.).

6. Проект по заданию инновационного фонда Министерства образования Республики Беларусь (договор № 05-54 от 17.04.10, № гос. регистрации 20102193) «Разработать опытный образец отечественного электронно-лучевого энергокомплекса на базе пушки с плазменным эмиттером» (2010 – 2012 гг.).

7. Совместный проект УО «ПГУ» и Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (г. Новосибирск, Россия, договор № Ф10Р-219 от 01.05.10, № гос. регистрации 20101999) в рамках гранта БРФФИ и РФФИ «Вычислительные технологии решения задач анализа и синтеза электронно-оптических систем» (2010 – 2012 гг.).

8. Совместный проект УО «ПГУ» и ЗАО «Институт плазмохимических технологий», (г. Новосибирск, Россия, договор № 13155 от 10.04.2013) «Численное моделирование электронно-оптической системы электростатического формирования пучка и расчёт на его основе оптимальной геометрии электронно-оптической системы с целью повышения токопрохождения в пушке с плазменным эмиттером» (2013 г.).

9. Государственная программа научных исследований «Физическое материаловедение, новые материалы и технологии» подпрограмма «Плазменные и пучковые технологии» (2016 – 2018 гг. № гос. регистрации 20160829 от 08.04.16).

10. Государственная программа научных исследований «Физическое материаловедение, новые материалы и технологии» подпрограмма «Материалы в технике» (2016 – 2018 гг. № гос. регистрации 20160830 от 08.04.16).

Публикационная, выставочная деятельность.

За годы работы членами научного коллектива опубликовано свыше 100 научных и научно-методических публикаций среди которых 4 монографии; около 40 зарубежных научных статей; 4 патента на полезную модель и 1 патент на изобретение.

Разработки коллектива регулярно демонстрируются на международных выставках. Среди наиболее значимых можно выделить следующие:

- II, III, IV Международный Крейнделевский семинар по плазменной эмиссионной электронике, 2006, 2009, 2012, 2015, Улан-Уде, Россия;
- II, III, IV, V, VI International Conference on Plasma Physics and Plasma Technology, 2001, 2003, 2006, 2009, 2012, 2015, Minsk, Belarus;
- VII, IX, X, XI, XII International Conference on Electron Beam Technologies, 2003, 2009, 2012, 2014, 2016, Varna, Bulgaria;
- Ганноверская международная промышленная ярмарка «HANNOVER MESSE», Ганновер, Германия, 2014, 2016;
- 18-я Международная промышленная выставка «Белпромэнерго», Минск, 2014;
- Международная выставка «Энергетика. Экология. Энергосбережение. Электро-2014», Минск, 2014;
- Вьетнамская международная торговая ярмарка «VIETNAM EXPO 2014», Хошимин, Вьетнам, 2014;
- Национальная выставка Республики Беларусь в Новосибирске, Россия, 2014;
- Белорусский промышленный форум, Минск, 2015, 2016, 2017;
- Вьетнамская международная торговая ярмарка «Вьетнам ЭКСПО-2016», Ханой, Вьетнам, 2016;
- Международная многопрофильная выставка «FACIM-2017», Мапуту, Мозамбик, 2017;
- Восточный экономический форум, Владивосток, Россия, 2017.

Заключение.

По результатам выполненных научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ в области плазменной эмиссионной электроники сотрудниками ПГУ выполнены и защищены четыре кандидатские диссертации: Д.А. Антоновичем, Ю.П. Голубевым, В.Г. Залесским и О.Н. Петрович. Направление этой научной школы успешно развивается и уже нашло отражение в докторской диссертации В.Г. Залесского (2015). Большой вклад в работу научного коллектива внесли и сотрудники кафедры, в частности И.С. Русецкий и Д.Г. Руголь.

УДК 537.5;621.3.032.26

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА КВАЗИСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ В УСТРОЙСТВАХ ПЛАЗМЕННОЙ ЭМИССИОННОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ

канд. техн. наук, доц. О.Н. ПЕТРОВИЧ, И.С. РУСЕЦКИЙ
(Полоцкий государственный университет)

На основе метода декомпозиции расчетной области предложена технология построения квазиструктурированных сеток для разработки численных методов расчета электронно- и ионно-оптических систем. Представлены алгоритмы моделирования электромагнитных полей с наложением и без наложения расчетных областей для программной реализации с применением параллельных и последовательных вычислительных схем.

Ключевые слова: квазиструктурированные сетки, численное моделирование, методы расчета электронно-оптических систем, методы расчета ионно-оптических систем.

Введение. Компьютерное моделирование процессов формирования пучков заряженных частиц в устройствах плазменной эмиссионной электроники можно рассматривать как совокупность вычислительных задач по расчету электрического и магнитного полей, движения заряженных частиц, объемных зарядов частиц, положения и формы плазменной поверхности. При этом положение и форма плазменного эмиттера оказывают существенное влияние на характеристики пучка [1]. В связи с чем возникает необходимость проводить моделирование положения и формы плазменной поверхности, а также потока заряженных частиц с большей точностью. Точность решения указанных численных задач определяется результатами расчета электрического и магнитного полей.

Для описания стационарных полей используются уравнения Пуассона для скалярного φ и векторного $\vec{A}$ потенциалов [2] с граничными условиями Дирихле:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A}, \quad (2)$$

где ϵ_0 – электрическая постоянная; μ_0 – магнитная постоянная; ρ – объемная плотность заряда; $\vec{j}$ – плотность тока; $\vec{E}$ – напряженность электрического поля; $\vec{B}$ – магнитная индукция.

В области, свободной от токов, для описания магнитного поля можно использовать скалярный магнитный потенциал, который удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi_m = 0, \quad \vec{B} = -\nabla \varphi_m. \quad (3)$$

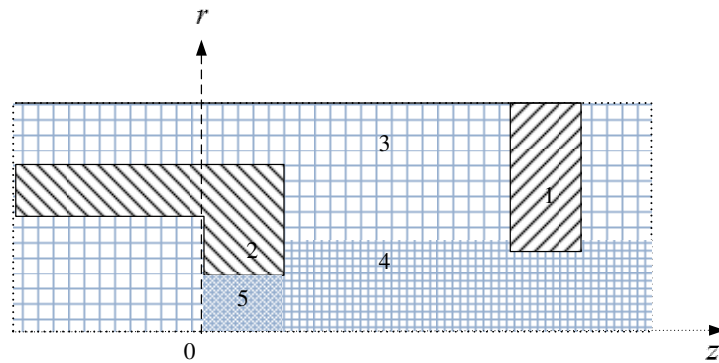
В пакете ELIS [3] численное решение уравнений (1)–(2) по расчету электрического поля, создаваемого системой электродов и объемным зарядом потока частиц, и собственного магнитного поля пучка проводилось методом конечных разностей на квадратной сетке с граничными условиями Дирихле [4].

В данной работе предложена технология построения квазиструктурированных сеток при разработке и программной реализации численных методов расчета электромагнитных полей, основанных на параллельных и последовательных вычислительных схемах.

Технология построения квазиструктурированных сеток для решения двумерных и трехмерных задач по расчету электромагнитных полей. С целью усовершенствования алгоритма расчета процессов в устройствах плазменной эмиссионной электроники применим метод декомпозиции расчетной области.

Для полей с аксиальной симметрией разобьем прямоугольную расчетную область в плоскости rz цилиндрической системы координат (рисунок 1) на три подобласти: внешнюю по отношению к пучку заряженных частиц, обозначенную цифрой 3, внутреннюю – 4 и приэмиттерную – 5. Покроем расчетную область равномерной квадратной макросеткой с шагом H . По результатам расчета электронно- или ионно-оптической системы на макросетке выделим внутреннюю и приэмиттерную области. Во внутренней области построим более мелкую внутреннюю квадратную сетку с шагом $h_v = H/n_v$, в приэмиттерной области еще более густую квадратную сетку с шагом $h_e = H/n_e$, где n_v и n_e – заданные целые числа. Совокупность макросетки и подсеток образует квазиструктурированную сетку.

Численное моделирование полей будем проводить на квазиструктурированной сетке, расчет движения частиц пучка (траектории, объемный заряд) – на подсетке внутренней области, положение и форму плазменной поверхности будем находить, применяя подсетку приэмиттерной области.



1 – ускоряющий электрод, 2 – фокусирующий электрод
Рисунок 1. – Квазиструктурированная сетка в расчетной области

В сеточной расчетной области дискретная аппроксимация частных производных в уравнениях (1)–(3) приводит к системе алгебраических уравнений для скалярного и векторного потенциалов поля $u = \{\varphi, \vec{A}, \varphi_m\}$:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4} \left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + \frac{2j+1}{2j} u_{i,j+1} + \frac{2j-1}{2j} u_{i,j-1} + h^2 f_{i,j} \right), \quad (4)$$

$$u_{i,0} = \frac{1}{6} (u_{i+1,0} + u_{i-1,0} + 4u_{i,1} + h^2 f_{i,0}), \quad (5)$$

где i, j – номера узлов; функция $f = \left\{ -\frac{\rho}{\epsilon_0}, -\mu_0 \vec{j}, 0 \right\}$; сеточный шаг принимает одно из значений

$h = \{H, h_v, h_e\}$ в зависимости от того, в какой подобласти расположен узел.

Для решения трехмерных задач электронной и ионной оптики построим пространственные квазиструктурированные сетки, применяя метод декомпозиции расчетной области. В декартовой системе координат $\{x, y, z\}$ зададим расчетную область в форме параллелепипеда, в которой построим квазиструктурированную сетку, состоящую из макросетки и двух подсеток, ячейки которых геометрически подобны расчетной области. В цилиндрической системе координат сформируем расчетную область в форме цилиндра, а ячейки макросетки и подсеток образованы координатными линиями трех подобластей.

Решение системы алгебраических уравнений для скалярного и векторного потенциалов поля (4)–(5) находим методом итераций на квазиструктурированной сетке с наложением расчетных областей для построения последовательной вычислительной схемы или без наложения расчетных областей для проведения параллельных вычислений.

Алгоритмы численного моделирования электромагнитных полей на квазиструктурированных сетках

Алгоритм расчета электромагнитного поля на квазиструктурированной сетке с наложением расчетных областей. Для поля с аксиальной симметрией построим в расчетной области квазиструктурируемую сетку, состоящую из макросетки и вложенных подсеток в подобласти распространения электронного пучка и приэммиттерной подобласти. Уравнения Пуассона (1)–(2) для самосогласованного электронного поля и собственного магнитного поля пучка, уравнение Лапласа (3) для внешнего магнитного поля, созданного постоянными магнитами или обмотками с токами, находящимися за пределами расчетной области, представим системой алгебраических уравнений (4)–(5).

На первом этапе решение системы (4)–(5) находится на макросетке, заполняющей всю расчетную область. На следующем шаге проводится расчет потенциалов поля u на внутренней подсетке с учетом значений u в общих узлах макросетки и подсетки. Затем вычисляются значения потенциалов в приэммиттерной области в дополнительных узлах сетки, вложенной в предыдущую. Таким образом, при расчете полей во внутренней и приэммиттерной подобласти, используются значения потенциалов, полученные в узлах более крупных сеток на предыдущих этапах. При этом на границах подобластей применяются формулы Лагранжа для интерполяции значений потенциалов в узлах, расположенных между узлами более крупных сеток:

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{16} (-u_{i-1} + 9u_i + 9u_{i+1} - u_{i+2}), \quad (6)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}(3u_i + 6u_{i+1} - u_{i+2}), \quad (7)$$

$$u_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}(3u_i + 6u_{i-1} - u_{i-2}). \quad (8)$$

Изложенный алгоритм расчета электромагнитного поля предназначен для реализации посредством последовательной вычислительной схемы, для повышения сходимости которой используется метод прогонок переменных направлений.

Алгоритм расчета электромагнитного поля на квазиструктурированной сетке без наложения расчетных областей. Алгоритм расчета электромагнитного поля, основанный на методе декомпозиции расчетной области, был модифицирован с целью распараллеливания вычислений в подобластях. В этом случае, внешняя (3), внутренняя (4) и призматическая (5) подобласти (рисунок 1) сопрягаются без наложения.

Решение вычислительной задачи (4)–(5) проводится в каждой подобласти независимо друг от друга с применением внутреннего итерационного процесса. На границе подобластей полученные решения сшиваются с учетом равенства нормальных производных потенциалов на границе. Для этого строится внешний итерационный процесс, с помощью которого находится решение уравнения Пуанкаре – Стеклова

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)^+ - \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)^- = 0, \quad (9)$$

где $\vec{n}$ – нормаль к границе подобластей, $\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)^+$ и $\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)^-$ – нормальные производные потенциала справа и слева от границы, которые аппроксимируются трехточечными или четырехточечными схемами через значения потенциала в разных подобластях:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)^+ = \frac{-3u_i + 4u_{i+1} - u_{i+2}}{2h^+} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)^- = \frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 3u_i}{2h^-}, \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)^+ = \frac{-11u_i + 18u_{i+1} - 9u_{i+2} + 2u_{i+3}}{6h^+} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)^- = \frac{-2u_{i-3} + 9u_{i-2} - 18u_{i-1} + 11u_i}{6h^-}. \quad (11)$$

Такой подход создает возможность для автономной аппроксимации уравнения Пуассона в различных подобластях и параллельного нахождения сеточных решений. Для сшивки сеточных решений, полученных в неперекрывающихся подобластях на квазиструктурированной сетке, находятся значения потенциалов полей на границе подобластей:

$$u_i = \frac{1}{6}(4u_{i-1} + 4u_{i+1} - u_{i+2} - u_{i-2}), \quad (12)$$

$$u_i = \frac{1}{22}(18u_{i+1} - 9u_{i+2} + 2u_{i+3} + 2u_{i-3} - 9u_{i-2} + 18u_{i-1}). \quad (13)$$

На границах сеток для интерполяции значений потенциалов применяются формулы Лагранжа (6)–(8).

На рисунке 2 приведены результаты численных расчетов электрического поля в осесимметричной электронно-оптической системе на квазиструктурированной сетке без наложения расчетных областей.

Технологии численных решений двумерных задач по расчету электрического и магнитного полей получили дальнейшее развитие при разработке алгоритмов моделирования трехмерных плоских и цилиндрических задач. 3D-алгоритмы построены на конечноразностной аппроксимации уравнений для скалярных потенциалов электрического и магнитного полей в трехмерной постановке в цилиндрической и декартовой системах координат:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f. \quad (15)$$

На рисунке 3 представлены результаты расчета электрического поля в электронно-оптической системе, формирующей ленточный пучок.

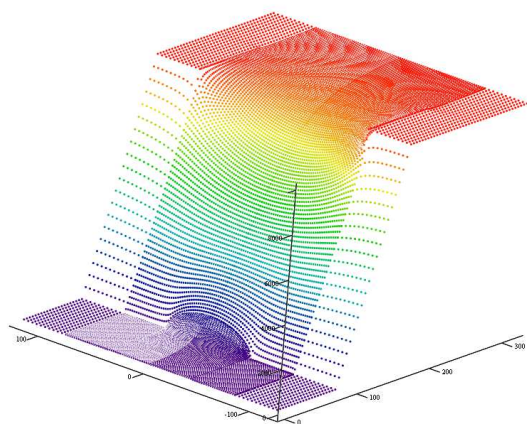


Рисунок 2. – Распределение скалярного потенциала электрического поля на квазиструктурированной сетке без наложения расчетных областей

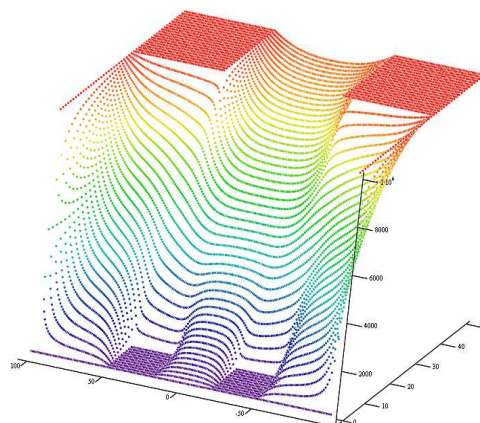


Рисунок 3. – Распределение скалярного потенциала электрического поля в электронно-оптической системе, формирующей ленточный пучок

Закключение. Предложена технология проведения численных расчетов устройств плазменной эмиссионной электроники, основанная на методе декомпозиции расчетной области, которая позволяет решать задачу по расчету электрического и магнитного полей на квазиструктурированной сетке, что повышает точность расчета характеристик пучка заряженных частиц.

Приводятся алгоритмы построения квазиструктурированных сеток для решения двумерных осесимметричных и трехмерных плоских и цилиндрических задач по расчету электромагнитных полей. Разработаны методы численного моделирования электромагнитных полей с наложением и без наложения расчетных областей, основанные на параллельных и последовательных вычислительных схемах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф17-122).

ЛИТЕРАТУРА

1. Петрович, О.Н. Моделирование влияния параметров электродной структуры и эмитирующей плазмы на характеристики формируемого острогофокусированного электронного пучка / О.Н. Петрович, А.Ф. Стекольников // Прикладная физика. – 2004. – № 1. – С. 65–72.
2. Ландау, Л.Д. Краткий курс теоретической физики. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1969. – Кн. 1 : Механика. Электродинамика. – 271 с.
3. Петрович, О.Н. Программный комплекс ELIS для моделирования ЭОС ПИЭЛ / О.Н. Петрович, В.А. Груздев // Прикладная физика. – 2012. – № 2. – С. 79–85.
4. Петрович, О.Н. Моделирование электронно-оптических систем с плазменным эмиттером : дис. ... канд. техн. наук : 05.13.18 / О.Н. Петрович ; Полоцкий государственный университет, 2012. – 199 л.

Поступила 30.03.2018

NUMERICAL METHODS OF CALCULATION OF ELECTROMAGNETIC FIELDS ON QUASI-STRUCTURED GRIDS IN DEVICES OF PLASMA EMISSION ELECTRONICS

O. PETROVICH, I. RUSETSKI

On the basis of the decomposition method of the computational domain a technology for constructing quasi-structured grids is proposed. This technology is used for developing of numerical methods for calculating electron- and ion-optical systems. The algorithms for modeling electromagnetic fields with overlapping and without overlapping computational domains, which are applied for software with using parallel and sequential computational schemes, are offered.

Keywords: quasi-structured grids, numerical simulation, methods for calculating electron-optical systems, methods for calculating ion-optical systems.

УДК 544.58:661.12

ОБРАЩЕНИЕ С ВОДНЫМИ РАДИОАКТИВНЫМИ ОТХОДАМИ ПРИ ПРОИЗВОДСТВЕ РАДИОФАРМПРЕПАРАТОВ НА ОСНОВЕ ^{18}F **В.О. КРОТ, О.В. ТУГАЙ***(Белорусский государственный университет, Минск);**канд. физ.-мат. наук Д.И. БРИНКЕВИЧ, канд. хим. наук, доц. С.Д. БРИНКЕВИЧ,**канд. мед. наук, Г.В. ЧИЖ**(Республиканский научно-практический центр онкологии и медицинской радиологии**им. Н.Н. Александрова, Минск);**канд. физ.-мат. наук, доц. С.А. ВАБИЩЕВИЧ**(Полоцкий государственный университет)*

Исследовано накопление долгоживущих радионуклидов в обогащенной ^{18}O воде при производстве радиофармпрепаратов на основе ^{18}F с использованием циклотрона IBA Cyclone 18/9 НС. Рассмотрены различные механизмы попадания долгоживущих радионуклидов в регенерированную воду. Разработана технология очистки регенерированной воды с использованием метода дистилляции при атмосферном давлении, обеспечивающая эффективное удаление γ -излучающих радионуклидов. Установлено, что удельная активность β -излучающего радионуклида ^3H и степень обогащения по ^{18}O после дистилляции не снижаются. Показано, что дистиллят регенерированной ^{18}O не пригоден для повторного использования при производстве радиофармпрепаратов на основе ^{18}F . Полученные результаты имеют важное значение для оптимизации методов обращения с радиоактивными отходами при производстве радиофармпрепаратов на основе ^{18}F с использованием циклотрона IBA Cyclone 18/9 НС и, как следствие, минимизации дозовых нагрузок персонала.

Ключевые слова: радиофармпрепараты, радионуклиды, циклотрон, обогащенная ^{18}O вода, протонное облучение.

Метод позитронно-эмиссионной томографии (ПЭТ) основан на использовании биологически активных веществ или их аналогов, меченных короткоживущими позитрон-излучающими радионуклидами, которые после внутривенного введения пациенту позволяют получать прижизненную информацию о биохимических процессах, в том числе патофизиологических. Применение короткоживущего радионуклида ^{18}F с периодом полураспада 109,8 мин позволяет значительно снизить дозовую нагрузку на пациента, поскольку к окончанию исследования основная доля радиоактивной метки уже распадается. Особенность аннигиляции позитрона – одновременное испускание 2-х γ -квантов со строго детерминированной энергией 511 кэВ под углом $180 \pm 0,2^\circ$ – позволяет с использованием специального кольцевого детектора позитронно-эмиссионного томографа регистрировать вплоть до единичных актов радиоактивного β^+ -распада нуклидов, что и обеспечивает высокую чувствительность метода [1, 2].

Изотоп ^{18}F производится при облучении протонами обогащенной ^{18}O (97 и более %) воды по реакции $^{18}\text{O}(p,n)^{18}\text{F}$. Протонный пучок и вторичные нейтроны активируют не только воду, но и атомы металлической мишени. Индуцируемые облучением радионуклиды способны попадать в облучаемую воду и с ней вымываются в зону синтеза. Одной из важнейших задач при получении радиофармпрепаратов (РФП) на основе ^{18}F является очистка от долгоживущих радионуклидов (ДРН), поскольку их наличие в готовой лекарственной форме приводит к дополнительной дозовой нагрузке на пациентов после исследования методом ПЭТ. При производстве меченых соединений интенсивное поступление ДРН в радиохимический модуль может вызывать значительное снижение эффективности синтеза. Эти радионуклиды в значительной мере определяют дозовую нагрузку на радиохимический персонал при подготовке горячих камер к производству, поскольку ДРН имеют периоды полураспада ≥ 20 ч, что сопоставимо или больше интервала между синтезами [3–5].

Целью настоящей работы являлась разработка научно обоснованных правил работы с водными радиоактивными отходами от производства радиофармпрепаратов на основе ^{18}F с использованием циклотрона IBA Cyclone 18/9 НС.

Материалы и методы измерений. Нарботку радионуклида ^{18}F осуществляли на ускорителе Cyclone 18/9 НС (IBA, Бельгия) при облучении протонами с энергий 18 МэВ воды, обогащенной по ^{18}O до 98% (Центр молекулярных исследований, Россия). Использовали ниобиевую мишень объемом 3,2 мл с входным окном из сплава Navar, толщиной 25 мкм. Синтез меченых ^{18}F радиофармпрепаратов выполняли на микрореакторном модуле синтеза Synthra RN Plus (Synthra GmbH, Германия) и кассетном –

Synthera (IBA, Бельгия). Прошедшую через ионообменный картридж QMA Light и облученную $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ собирали во флаконы для регенерации и удаляли из горячей камеры синтеза не ранее, чем через сутки после производства радиодиагностического лекарственного средства. Для обеспечения радиационной защиты персонала фасовку радиофармпрепаратов осуществляли в горячих камерах производства Comeseg (Италия) с эффективностью защиты по всем направлениям не менее 75 мм свинцового эквивалента. Транспортировку флакона объемом 15 мл осуществляли в контейнерах CF18 PB Comeseg с толщиной защитного слоя свинца 40 мм.

Очистку регенерированной $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ производили с использованием метода дистилляции при атмосферном давлении. Скорость дистилляции – 1 капля/с. Средний разовый объем очищаемой воды – 700 мл. Средний объем кубовых остатков – 20 мл. Средние объемы I и II фракции – 50 и 630 мл соответственно. Использованное при дистилляции стеклянное оборудование после всех циклов очистки было обработано 1 М соляной кислотой. Кубовые остатки дистиллируемой $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ и кислотные растворы дезактивации подвергались цементации, с предварительной коррекцией pH жидких радиоактивных отходов 2 М водным раствором гидроксида натрия.

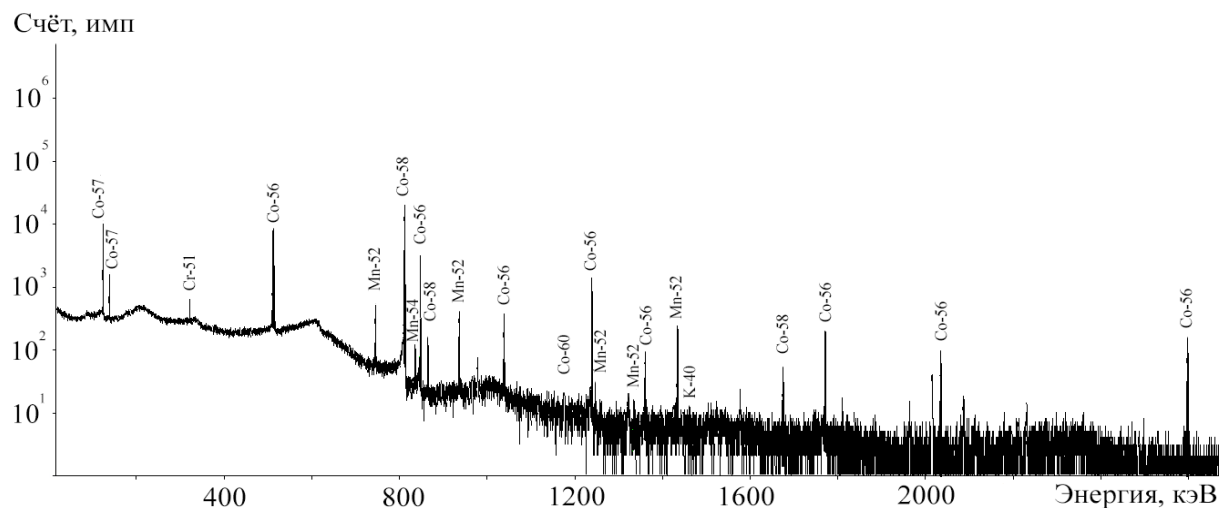
Мощность дозы γ -излучения на рабочих местах персонала контролировали дозиметром ДКС-АТ1121 (Атомтех, Беларусь). Идентификацию нуклидов и определение их активности выполняли с использованием γ -спектрометра на особо чистом германии (детекторная система GEM40-83/DSPEC jr 2.0; энергетический диапазон 14,5 – 2911,4 кэВ; разрешение 0,182 кэВ/канал). Измерения активности образцов проводили на калибраторе активности Isomed 2010 (MED Nuklear – Medizintechnik Dresden Gmb, Германия). Из-за высокой активности картриджа измерения проводили не менее чем через сутки после синтеза.

β -спектрометрический анализ проводился с использованием автоматического жидкостного сцинтилляционного спектрометра с TDCR регистрацией HIDEEX 300 SL. Его энергетический диапазон составляет 0–2 МэВ по β -частицам, интервал – 0,182 кэВ/канал, эффективность > 26% (для трития), > 95% (для ^{14}C). Средний фон для β -частиц – 9 импульс/мин. Использован жидкий сцинтиллятор на основе толуола. Объем пробы – 0,5 мл; жидкого сцинтиллятора – 10 мл. Время измерения – 1000 с.

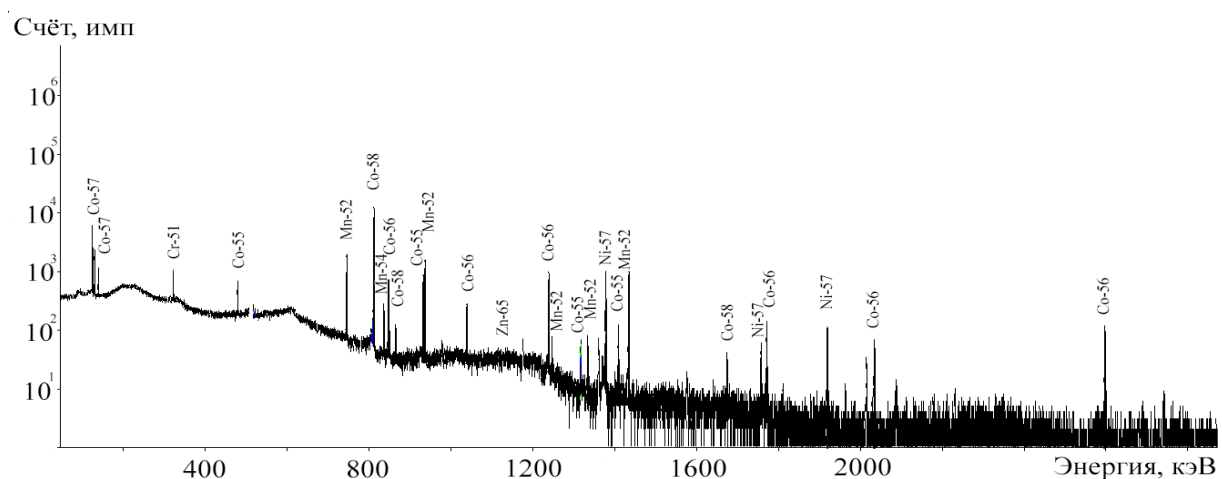
Экспериментальные результаты и их обсуждение. На рисунке 1 представлены γ -спектры регенерированной воды, измеренные через 20 дней (а) и 2 суток (б) после синтеза радиофармпрепарата. Доминирующими радионуклидами в регенерированной облученной $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ являются ^{55}Co , ^{56}Co , ^{57}Co , ^{58}Co , ^{57}Ni , ^{52}Mn , ^{54}Mn и ^{51}Cr . Данные хорошо коррелируют с результатами работ [3, 6–8], полученными для мишеней с входным окном из сплава Navar. Следует отметить, что в исходных пробах были обнаружены также следовые количества ^{95}Tc , ^{96}Tc , ^{95}Nb , ^{182}Re , ^{183}Re , ^{184}Re . Однако активности данных радионуклидов недостаточно для их количественной оценки. Радионуклиды ^{55}Co и ^{57}Ni исчезают из воды быстрее других, их периоды полураспада составляют 17,5 и 35,6 ч соответственно. В спектрах, измеренных через 20 дней после синтеза, ^{55}Co и ^{57}Ni не наблюдается. Остальные из вышеперечисленных радионуклидов являются долгоживущими, периоды полураспада $t_{1/2}$ варьируются в пределах от 27 до 312 сут [9].

Установлено, что от синтеза к синтезу может изменяться не только соотношение активностей долгоживущих радионуклидов, но и их радионуклидный состав. Типовые кривые спада активности долгоживущих радионуклидов в регенерированной воде приведены на рисунке 2. Описать зависимости активности исследованных образцов одной, двумя или тремя экспонентами не представляется возможным, что указывает на присутствие на картриджах QMA и в регенерированной воде большого количества радионуклидов с периодами полураспада от нескольких дней до нескольких месяцев. На активность долгоживущих радионуклидов в регенерированной воде могут влиять различные факторы. Нами было установлено, что ключевое значение имеет величина накопленной мишенью дозы (мкА·ч), которая зависит от плотности протонного пучка на мишени и продолжительности ее облучения. При сопоставлении кривых 1 и 2 (рис. 2) отчетливо видно, что с увеличением накопленной дозы возрастает активность долгоживущих радионуклидов, генерируемых в процессе производства радиофармпрепарата. Следует также отметить, что количество произведенных долгоживущих радионуклидов возрастает в 3–4 раза по сравнению с предыдущим синтезом при разрыве устройства перезарядки иона – стриппера – в процессе облучения мишени протонами, что, вероятно, обусловлено нарушением фокусировки пучка заряженных частиц.

Основным механизмом накопления долгоживущих примесных радионуклидов в облучаемой воде может быть выщелачивание продуктов активации из тела и окна мишени в условиях облучения воды под давлением 25–30 атм. Облучаемая вода находится в ниобиевой мишени, которая для ввода протонного пучка имеет тонкое окно из сплава Navar, содержащего кобальт (42%), хром (19,5%), железо (18,1%), никель (13,7%), вольфрам (2,7%), молибден (2,2%), марганец (1,6%) и углерод (0,2%). В работе [10] при измерении γ -спектров компонентов мишени, облученной на циклотроне IBA Cyclone 18/9 в течение 2-месячного производственного цикла, в фольге из сплава Navar были выявлены радиоизотопы ^{51}Cr , ^{52}Mn , ^{54}Mn , ^{56}Co , ^{57}Co , ^{58}Co . Поэтому в нашем случае можно с большой долей вероятности утверждать, что указанные радионуклиды попадают в облученную воду, потом на картридж QMA и далее в реактор вследствие выщелачивания водой окна мишени из сплава Navar.



а



б

Рисунок 1. – γ -спектры долгоживущих радионуклидов в регенерированной воде, измеренные через 20 дней (а) и 2 суток (б) после синтеза радиофармпрепарата

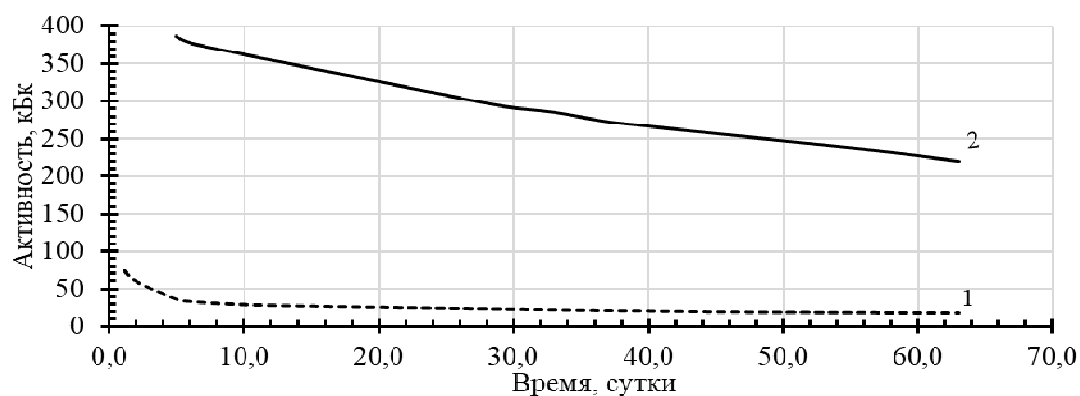


Рисунок 2. – Кривые спада активности регенерированной воды при облучении мишени циклотрона с накопленной дозой 100 (1) и 2500 (2) мкА×ч

Результатом активации тела мишени являются радионуклиды ниобия, доля которых возрастает с ростом накопленной мишенью дозы. Наиболее активный из них – ^{92m}Nb , по данным [11], образуется в результате фотоядерной реакции из стабильного изотопа ^{93}Nb . Возникающие в результате активации

тела мишени радионуклиды (^{92m}Nb , ^{95m}Nb) имеют периоды полураспада от 80 ч до 10 сут, поэтому при увеличении накопленной дозы интенсивно возрастает доля долгоживущих радионуклидов, распадающихся в первые недели после синтеза. Причинами более интенсивной активации тела мишени с ростом дозы могут быть изменения в геометрии пучка протонов в мишени, например, вследствие деформации устройства перезарядки иона – стриппера и, в меньшей степени, окна из сплава Navar.

Анализ наших экспериментальных данных и публикаций [3, 6–8, 12] по долгоживущим радионуклидам в облученной $[\text{}^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ позволяет утверждать, что ее радиоизотопный состав во многом определяется условиями облучения (длительность и периодичность облучения, энергия протонов и т.д.), элементарным составом тела и, в наибольшей степени, окна мишени, а также примесным составом обогащенной воды. Причем варьируются не только активности, но и элементный состав долгоживущих радионуклидов. Общим для всех экспериментальных исследований является наличие в облученной $[\text{}^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ радиоизотопов хрома (^{51}Cr), кобальта (^{56}Co , ^{57}Co , ^{58}Co) и марганца (^{52}Mn , ^{54}Mn). Другие нуклиды наблюдались эпизодически. Так, в работе [6] при облучении протонами с энергией 9,6 МэВ (ионный ток – 25 мкА, длительность – 60 мин) серебросодержащей мишени с Navar окном, кроме отмеченных выше, наблюдались радиоизотопы ^{55}Fe , ^{55}Co , ^{59}Ni , ^{95}Tc , ^{96}Tc и ^{109}Cd с активностями от 4 до 900 Бк. В работе [12] при облучении титановой мишени наблюдались также радиоизотопы ванадия и бериллия. В [10] при облучении протонами с энергией 17,5 МэВ на циклотроне Cyclon-30 обнаружены ^{55}Co , ^{48}V , ^{95}Tc и ^{96}Tc . Детальный анализ экспериментальных результатов различных авторов осложняется тем обстоятельством, что сопоставление условий эксперимента не всегда возможно: в большинстве работ не приводится детальное описание условий облучения, элементного состава тела и окна мишени, не обсуждаются возможные механизмы попадания радионуклидов в облученную воду. Это указывает на необходимость проведения дальнейших экспериментальных исследований в конкретных производственных условиях ПЭТ-центра на базе РНПЦ ОМР им. Н.Н. Александрова (Минск, Беларусь) для снижения активности долгоживущих радионуклидов и минимизации количества радиоактивных отходов.

Нами установлено, что подавляющая часть (свыше 90%) радионуклида ^{51}Cr из облученной воды $[\text{}^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$, переданной с циклотрона, осаждается на картридже QMA Light (табл. 1). Радионуклиды кобальта и марганца в основном попадают во флакон для регенерированной воды (65–70%), а картридж QMA Light захватывает только около 30% указанных радионуклидов (см. табл. 1).

Таблица 1. – Распределение ДРН из облученной на циклотроне воды $[\text{}^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ между картриджем QMA Light и регенерированной водой

Радионуклид	^{51}Cr	^{54}Mn	^{56}Co	^{55}Co	^{57}Co	^{58}Co	^{57}Ni
Доля ДРН, осажденных на QMA Light, %	90-95	29-34	21-35	33	24-36	22-30	7,5
Доля ДРН, оставшихся в регенерированной воде, %	5-10	66-71	65-79	67	64-76	70-78	92,5

Примечание. Активности радионуклидов приведены в таблице на момент окончания синтеза.

Данные в таблице 1 для относительно короткоживущих радионуклидов ^{55}Co и ^{57}Ni указаны для одного исследования, выполненного через 2 сут после синтеза. Остальные измерения проводили через 7–10 суток (до 12 периодов полураспада указанных радионуклидов) после синтеза и в γ -спектрах ^{55}Co и ^{57}Ni не были идентифицированы. Несмотря на это, приведенные в таблице 2 результаты для радионуклидов ^{57}Ni и ^{55}Co можно считать достоверными, поскольку цифра по ^{55}Co хорошо коррелирует с данными по другим изотопам кобальта. В связи с чем можно достоверно утверждать, что радионуклид ^{57}Ni практически полностью (свыше 90%) удаляется с регенерированной водой.

Таблица 2. – Удельные активности (в Бк/мл) γ -излучающих радионуклидов в облученной воде для модуля Synthra RN Plus до и после дистилляции

Образец	Удельные активности радионуклидов, Бк/мл						
Изотоп	^{65}Zn	^{51}Cr	^{54}Mn	^{56}Co	^{57}Co	^{58}Co	Суммарная удельная активность
Исходный образец	3,0	9,7	30,4	81,8	228,1	348,8	701,9
П фракция	–	–	0,166	0,235	0,492	0,783	1,68

В научной литературе имеется недостаточно сведений по осаждению долгоживущих радионуклидов хрома, марганца и кобальта на QMA Light картридже при производстве $[\text{}^{18}\text{F}]\text{ФДГ}$. Причем результа-

ты разных авторов серьезно отличаются, что обусловлено особенностями используемых технологий [3, 13, 14]. Наши экспериментальные результаты в основном совпадают с данными [3], полученными при использовании анионообменного картриджа Chromafix HCO₃. Авторы работы [3] отмечали, что 78–85% радионуклидов кобальта и марганца остается в регенерированной воде. В наших исследованиях доля удаленных с регенерированной водой изотопов ⁵⁴Mn, ⁵⁶Co, ⁵⁷Co, ⁵⁸Co была несколько ниже – от 65 до 79%.

Экспериментальные данные, полученные нами для изотопа ⁵¹Cr, сильно отличаются от данных работы [3], однако близки к результатам [13]. Так, если в [3] с регенерированной водой удалялось около 30–35% ⁵¹Cr, то, согласно [13] и нашим данным, в регенерированной воде остается менее 10% указанного радионуклида. В работе [3] отмечается, что распределение ⁵¹Cr сильно изменчиво от образца к образцу и не совпадает по характеру распределения с другими радионуклидами, что, вероятнее всего, определяется процессами комплексообразования ионов хрома. Действительно, при прохождении облученной воды через картридж QMA Light (в HCO₃⁻ форме) ионы хрома в зависимости от щелочности среды могут существовать в двух степенях окисления (предпочтительно +3, нежели +2), а также в различных анионных и катионных аквакомплексах Cr(OH)_x(H₂O)_y^{z±}, где x + y = 6.

Для снижения объема радиоактивных отходов накопленная за год работы регенерированная вода подвергалась дистилляционной очистке. Активности радионуклидов до и после очистки регенерированной [¹⁸O]H₂O, собранной с различных модулей синтеза, представлены в таблицах 2 и 3. Отметим, что в I фракции долгоживущих технологических радионуклидов не наблюдалось. Суммарная активность всех долгоживущих технологических радионуклидов во II фракции варьировалась в пределах 16–73 Бк. Согласно полученным экспериментальным данным, радионуклиды ⁶⁵Zn и ⁵¹Cr полностью остаются в кубовом остатке. Изотопы кобальта и марганца присутствуют во II фракции, однако их активность снижается по сравнению с исходным образцом в 400–1200 раз (в зависимости от элемента и его начальной активности).

Таблица 3. – Удельные активности (в Бк/мл) γ-излучающих радионуклидов в облученной воде для модуля Synthera до и после дистилляции

Образец	Удельные активности радионуклидов, Бк/мл						
Изотоп	⁶⁵ Zn	⁵¹ Cr	⁵⁴ Mn	⁵⁶ Co	⁵⁷ Co	⁵⁸ Co	Суммарная удельная активность
Исходный образец	9,8	93,9	70,7	495,6	628,8	2381,1	3680,0
II фракция	–	–	0,157	0,547	0,730	1,97	7,23

Следует отметить, что в исходных пробах были обнаружены также следовые количества ⁹⁵Tc, ⁹⁶Tc, ⁹⁵Nb, ¹⁸²Re, ¹⁸³Re, ¹⁸⁴Re. Активности данных радионуклидов недостаточно для их количественной оценки. Однако присутствие изотопов рения, технеция и ниобия также и во II фракциях дистиллята свидетельствует о низкой эффективности использованной методики очистки по отношению к данным радионуклидам.

Анализ полученных данных, а именно, сравнение количеств исследуемых γ-излучающих радиоизотопов во II фракции при различных их активностях в исходных пробах, позволяет сделать вывод о том, что радиоактивные загрязнения в процессе дистилляции практически полностью остаются в кубовом остатке. Остаточные активности нуклидов во II фракции вероятно связаны с явлением капельного уноса растворителя во время кипения, когда вместе с мельчайшими каплями воды в паровую фазу выносятся и радионуклиды.

Анализ радионуклидов с использованием метода β-спектрометрии показал присутствие в образцах [¹⁸O]H₂O трития, в то время как других β-излучающих радионуклидов (испускающих частицы в области энергий ¹⁴C, ⁹⁰Sr и ⁹⁰Y) обнаружено не было. Удельные активности трития составляли: в воде из модуля Synthera RN Plus – 131 кБк/г; а для модуля Synthera – 215 кБк/г. Эти значения хорошо согласуются с данными, представленными в работах [3, 6, 13], в которых удельные активности трития в облученной воде варьировались от 110 до 240 кБк/г. В β-спектрах регенерированной воды (до дистилляционной очистки) наблюдается смещение максимума пика ³H по сравнению с эталоном в сторону низких энергий (рис. 3). При этом более сильному сдвигу подверглось левое крыло пика. Данный факт можно объяснить как образованием Оже-электронов при β-распаде нуклидов, так и наличием в регенерированной воде примесных количеств растворителей, в частности ацетонитрила и этанола, которые могут служить шифтерами в системе, снижая энергию фотонов, испускаемых возбужденными частицами сцинтиллятора.

После дистилляции регенерированной воды содержание трития не снижается: активности ³H в исходном образце, II и I фракциях практически идентичны (табл. 4). Таким образом, полученные экспериментальные данные указывают на невозможность использования применявшейся в эксперименте дистилляционной установки для удаления ³H из регенерированной воды и исключают возможность использования дистиллята для повторного облучения для наработки ¹⁹F.

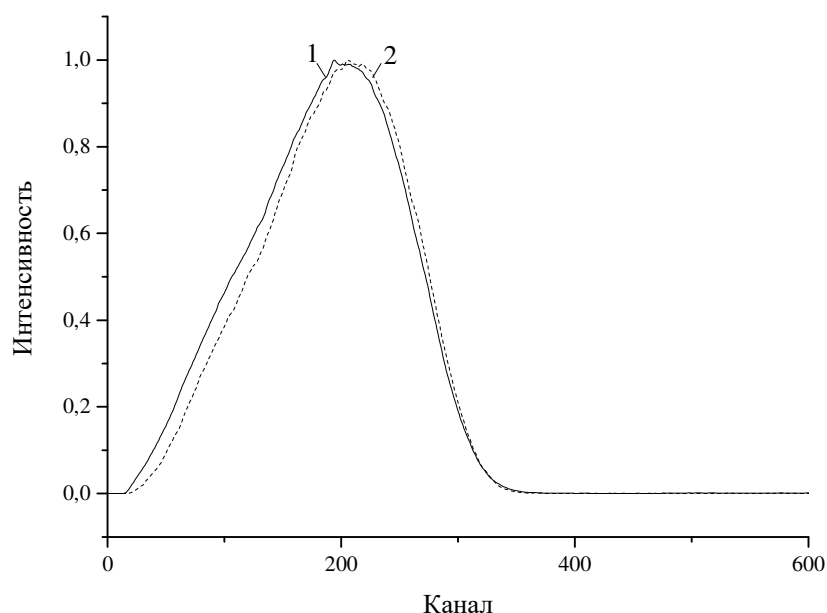


Рисунок 3. – β -спектр регенерированной воды (1) и стандарта ^3H (2)

Таблица 4. – Данные анализа на присутствие β -излучающих радионуклидов

Образец	Масса пробы, г	Активность, Бк	Удельная активность, Бк/г	Скорость счета	Скорость счета/г
Synthra RN (исх)	0,54374	71314	131155	21717	39940
Synthra RN (I фр)	0,52285	67073	128283	21110	40375
Synthra RN (II фр)	0,53342	73820	138390	22277	41762
Synthera (исх)	0,62400	134146	214978	28372	45467
Synthera (II фр)	0,52727	102441	194286	25897	49116

Тритий образуется при облучении обогащенной по ^{18}O воды по ядерной реакции $^{18}\text{O}(\text{p},\text{t})^{16}\text{O}$ (сечение реакции – 0,017 барн для протонов с энергией 18 МэВ). Также возможно попадание трития из облученного Navar входного окна мишени, в которой он образуется из хрома по реакции $^{50}\text{Cr}(\text{p},\text{t})^{48}\text{V}$. Однако этот механизм менее значимый, поскольку содержание хрома в сплаве Navar составляет около 20%, а ^{50}Cr в естественной смеси не превышает 9%.

Закключение. Исследовано накопление долгоживущих радионуклидов в обогащенной ^{18}O воде с целью разработки научно обоснованной концепции работы с водными радиоактивными отходами от производства радиофармпрепаратов на основе ^{18}F с использованием циклотрона IBA Cyclone 18/9. Рассмотрены различные механизмы попадания долгоживущих радионуклидов в регенерированную воду. Проведена очистка регенерированной воды с использованием метода дистилляции при атмосферном давлении. Показано, что имеет место эффективная очистка регенерированной воды от γ -излучающих радионуклидов. Удельная активность β -излучающего радионуклида ^3H после дистилляции не снижается. Установлено, что дистиллят регенерированной $^{18}\text{O}[\text{H}_2\text{O}]$ не пригоден для повторного использования при производстве радиофармпрепаратов на основе ^{18}F .

ЛИТЕРАТУРА

1. Peller, P. PET-CT and PET-MRI in Oncology: A Practical Guide (Medical Radiology / Diagnostic Imaging) / P. Peller, R. Subramaniam, A. Guermazi // Springer Science & Business Media. – 2012. – P. 470.
2. Recommendation on the use of ^{18}F -FDG PET in oncology / J.W. Fletcher [et al.] // J. Nuclear Medicine. – 2008. – Vol. 49, № 3. – P. 480–508.
3. Radionuclide impurities in proton-irradiated $^{18}\text{O}[\text{H}_2\text{O}]$ for the production of ^{18}F : Activities and distribution in the ^{18}F -FDG synthesis process / L. Bowden [et al.] // Applied Radiation and Isotopes. – 2009. – Vol. 67, № 2. – P. 248–255.
4. Berridge, M.S. Designs and use of silver ^{18}O water targets for ^{18}F fluoride production / M.S. Berridge, R. Kjellstrom // Applied Radiation and Isotopes. – 1999. – Vol. 50, № 4. – P. 699–705.

5. Позитронно-эмиссионная томография. Ч. 1 : Характеристика метода. Получение радиофармпрепаратов / С.Д. Бринкевич [и др.] // Медико-биологические проблемы жизнедеятельности. – 2013. – № 2(10) – С. 129–137.
6. Radioactive byproducts in [^{18}O] H_2O used to produce ^{18}F for [^{18}F]FDG synthesis/ Ito Shigeki [et al.] // Applied Radiation and Isotopes. – 2006. – Vol. 64, № 3. – P. 298–305.
7. Assessment of radionuclidic impurities in 2-[^{18}F]fluoro-2-deoxy-D-glucose ([^{18}F]FDG) routine production / M. Marengo [et al.] // Applied Radiation and Isotopes. – 2008 – Vol. 66, № 3. – P. 295–302.
8. Radionuclidic purity test in ^{18}F radiopharmaceuticals production process / T. Dziel [et al.] // Applied Radiation and Isotopes. – 2016. – Vol. 109, № 2. – P. 242–246.
9. Примесные радионуклиды в производстве радиофармпрепаратов на основе ^{18}F / С.А. Добровольский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 64–72.
10. Guarino, P. Gamma-ray spectrometric characterization of waste activated target components in a PET cyclotron / P. Guarino [et al.] // Cyclotrons and Their Applications – 2007 : Eighteenth International Conference, Giardini Naxos, 01–05. 10. 2007. Italy. – Giardini Naxos, 2007. – P. 295–297.
11. Using a clinical linac to determine the energy levels of $^{92\text{m}}\text{Nb}$ via the photonuclear reaction / M. Aygun [et al.] // Applied Radiation and Isotopes. – 2016. – Vol. 115, № 1. – P. 97–99.
12. Gillies, J.M. Analysis of metal radioisotope impurities generated in [^{18}O] H_2O during the cyclotron production of fluorine-18 / J.M. Gillies, N. Najim, J. Zweit // Applied Radiation and Isotopes. – 2006. – Vol. 64, № 4. – P. 431–434.
13. Al Rayyes, A.H. Enriched water- H_2^{18}O purification to be used in routine ^{18}F FDG production / A.H. Al Rayyes // Nukleonika. – 2010. – Vol. 55, № 3. – P. 401–405.
14. Schueller, M.J. Separating long-lived metal ions from ^{18}F during H_2^{18}O recovery / M.J. Schueller, D.L. Alexoff, D.J. Schlyer // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B. – 2007. – Vol. 261. – P. 795–799.

Поступила 19.03.2018

MANAGEMENT OF AQUEOUS RADIOACTIVE WASTES IN THE PRODUCTION OF ^{18}F -LABELED RADIOPHARMACEUTICALS

V.O. KROT, O.V. TUGAY, D.I. BRINKEVICH,
S.D. BRINKEVICH, G.V. CHIZH, S.A. VABISHCHEVICH

In the present work, the accumulation of long-lived radionuclides in ^{18}O -enriched water at the production of ^{18}F -labeled radiopharmaceuticals using IBA Cyclone 18/9 cyclotron was studied. Various mechanisms of long-lived radionuclides accumulation in regenerated water are considered. The technology for the purification of regenerated water by distillation at atmospheric pressure was developed, which manifests effective elimination of γ -emitting radionuclides. It was shown, that after distillation the specific activity of β -emitting radionuclide ^3H , as well as degree of ^{18}O -enrichment are not reduced. Distillate of the regenerated ^{18}O [H_2O] is not acceptable for reuse in the production of ^{18}F -labeled radiopharmaceuticals. The results obtained are of vital importance for the optimization of radioactive waste management procedures in production of [^{18}F] radiopharmaceuticals using IBA Cyclone 18/9 HC cyclotron and, consequently, for minimization of radiation exposure of personnel.

Keywords: radiopharmaceuticals, radionuclides, cyclotron, ^{18}O enriched water, proton irradiation.

УДК 621.671:004.4

ОПТИМАЛЬНОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

канд. техн. наук, доц. В.Е. ПИТОЛИН
(Полоцкий государственный университет)

Изложены результаты теоретических исследований оптимального режима работы центробежного насоса, а также представлены данные сравнительных стендовых испытаний традиционного метода регулирования гидравлических систем с использованием дроссельного клапана и метода частотного регулирования. Показано, что частотный метод регулирования с точки зрения затрат энергии на перекачку жидкости при одинаковой стоимости реализации на 30–70% экономичнее традиционного и существенно надежнее в эксплуатации, т.к. не имеет подвижных частей и уплотнений. Разработан алгоритм управления центробежным насосом с использованием частотного метода регулирования за счет поддержания наиболее оптимального режима его работы на любых подачах.

Ключевые слова: гидравлическая система, центробежный насос, оптимальный режим, частотное регулирование, дросселирование.

Центробежные насосы (ЦН) являются наиболее распространенными агрегатами, используемыми как в промышленности, так и в жилых зданиях и сооружениях для перекачки различных жидкостей. Поэтому повышение энергоэффективности их использования может дать существенный эффект.

Обычно центробежный насос имеет максимум КПД на режиме, близком к расчетному. А на расчетном режиме (режиме осесимметричного истечения потока по периметру рабочего колеса) он имеет и хорошо выраженный минимум вибрации и шума [1–3].

Для снижения шума и вибрации центробежных насосов на режимах, отличающихся от расчетного, разработчики насосов обычно увеличивают кольцевой зазор δ до 15–30%:

$$\delta = \frac{R_3 - R_2}{R_2} \cdot 100\%, \quad (1)$$

где R_2 – наружный радиус рабочего колеса центробежного насоса;

R_3 – радиус кольцевого зазора (расстояние от оси вращения до языка спирального отвода).

Это дает определенный эффект, но приводит к существенному снижению его КПД, так как при этом возрастают потери энергии на рециркуляцию жидкости в кольцевом зазоре.

По этой причине КПД современных центробежных насосов с асинхронными электродвигателями обычно не превышают 40–50% [3, 4].

Основным технико-экономическим параметром для оценки режима работы центробежного насоса в любой циркуляционной системе является удельный расход электрической энергии на перекачку объема жидкости в заданное время.

Если подача насоса находится в районе максимума КПД, удельный расход электрической энергии существенно не изменяется, уменьшаясь при увеличении подачи. Но при этом установлено, что, если эксплуатация насоса в системе выполняется на подачах ниже некоторой критической величины, удельный расход электрической энергии резко возрастает.

Применяемые в промышленности регуляторы частоты вращения центробежных насосов, используемые вместо дроссельных клапанов, не имеют алгоритма обеспечения максимум КПД на частотах меньше номинальной, а также не поддерживают режим ограничения расхода на подачах меньше критической величины. Также не определен и алгоритм управления частотой вращения насоса при изменении гидравлического сопротивления системы, в которой работает насос.

Для лучшего понимания сущности проблемы необходимо тщательно рассмотреть структуру течений в спиральном отводе центробежного насоса на его энергетические характеристики при различных подачах.

Спиральный отвод является важнейшим конструктивным элементом ЦН. Его геометрические параметры существенно влияют на режим работы насоса.

В настоящее время ЦН обычно проектируются со спиральными отводами, построенными с соблюдением закона постоянства момента скорости [4]:

$$V_u \cdot r = \text{const}, \quad (2)$$

где V_u – окружная составляющая скорости потока в отводе ЦН на произвольном радиусе r .

Поэтому площади поперечных сечений спирального отвода выбираются таким образом, чтобы обеспечить осевую симметрию потока за рабочим колесом на расчетном режиме работы ЦН:

$$V_{R_2}^P(\phi) = \frac{Q^P}{2 \cdot \pi \cdot R_2^P \cdot b_2^P} = \text{const}, \quad (3)$$

где индекс «р» обозначает расчетный режим или расчетный геометрический параметр, например, Q^P – расчетный расход (подача) рабочей среды через насос;

b_2 – ширина межлопастных каналов в районе выхода из рабочего колеса.

На нерасчетных режимах статическое давление на выходе из отдельного вращающегося канала периодически изменяется в зависимости от углового расположения канала относительно спирального отвода. Такое изменение давления, наложенное спиральным отводом, работающим в режиме конфузора ($Q > Q^P$) или диффузора ($Q < Q^P$), а также гидродинамическим следом обтекания языка спирального отвода ($Q \approx Q^P$) приводит к периодическому изменению относительной скорости ядра потока в каналах рабочего колеса. Это и является причиной периодического (на лопастной частоте) изменения величины и направления суммарной радиальной силы, действующей на рабочее колесо со стороны потока перекачиваемой среды, а ее реакции – на стенку насоса.

В работах [1, 2, 5] более подробно представлена кинематическая схема расчета амплитуд и фаз вибрации корпуса ЦН под действием динамических составляющих поперечных сил F_R , приложенных к рабочему колесу, на различных режимах его эксплуатации, а также изложен порядок расчета этих сил. На основании этих работ можно вывести расчетную формулу для оценки величины подачи насоса (в м³/с), обеспечивающую наилучшую осевую симметрию потока на выходе из рабочего колеса по его геометрическим характеристикам:

$$Q^P = \frac{R_2^2 \cdot \omega}{\frac{1}{\mu \cdot b_3 \cdot \ln \frac{R_c(2\pi)}{R_3 + 2r_{\text{яз}}}} + \frac{1}{2\pi \cdot b_2 \cdot \text{tg } \beta_{2\text{л}}}}, \quad (4)$$

где $r_{\text{яз}}$ – радиус скругления входной кромки языка спирального отвода;

b_2 – ширина межлопастных каналов в районе выхода из рабочего колеса;

b_3 – средняя ширина (или эквивалентная ширина) спирального отвода;

$\beta_{2\text{л}}$ – угол установки лопастей рабочего колеса на выходе;

ω – частота вращения рабочего колеса (рад/с);

μ – отношение реального напора насоса к теоретическому;

$R_c(2\pi)$ – расстояние от центра вращения до стенки спирального отвода перед языком отвода в районе входа в диффузор (для спиральных отводов с поперечным сечением, близким к прямоугольному, величина $R_c(2\pi)$ принимается равной эквивалентному значению для спирального отвода прямоугольного сечения шириной b_3 , а для сечений, близких к круглому – эквивалентному значению для спирального отвода квадратного сечения).

Приведенная формула справедлива для большинства одноступенчатых центробежных насосов. Подача ЦН, рассчитанная по этой формуле, не является подачей с максимальным КПД (кроме гидравлических потерь для ЦН характерны и другие потери энергии [3, 4]), но находится достаточно близко к ней и характеризуется минимумом вибрации и шума [1].

Из выполненного анализа структуры течений можно сделать следующий вывод: режиму работы спирального отвода центробежного насоса, характеризующемуся наилучшей осью симметрии потока на выходе из рабочего колеса, будет соответствовать режим равенства статических давлений до и после языка спирального отвода [3]. Знак и величина разности статических давлений в этих сечениях будет характеризовать величину и направление отклонения режима работы насоса от оптимального на любой частоте вращения. Назовем этот параметр $\Delta P_{\text{ст}}$.

Распределение статических давлений в спиральном отводе на различных режимах эксплуатации центробежных насосов можно видеть, например, в работах [3, 6]

Как показывает практика использования данного параметра, для оценки режима работы центробежных насосов оптимальными точками снятия статических давлений в отводе являются точки, расположенные на радиусе R_2 и 30° до и после сечения спирального отвода.

Исследуем полученные результаты на практике.

В качестве объекта исследования выбран центробежный насос НЦ 6,3/7,1. Рабочее колесо центробежного насоса этого типа имеет уменьшенный диаметр и осевой зазор $\delta = 27\%$. Остальные параметры проточной части насоса следующие:

$$R_2 = 0,079 \text{ м};$$

$$R_3 = 0,1 \text{ м};$$

$$r_{\text{яз}} = 0,001 \text{ м};$$

$$b_2 = 0,008 \text{ м};$$

$$b_3 = 0,02 \text{ м};$$

$$\beta_{2\text{л}} = 20^\circ;$$

$$n = 1380 \text{ об/мин} \rightarrow \omega = 2\pi n/60 = 144,5 \text{ рад/с};$$

$$\mu = 0,7;$$

$$R_c(2\pi) = 0,125 \text{ м}.$$

В результате расчета по формуле (4) получим значение расхода, характеризующегося максимальной осевой симметрией – $Q^p = 7,68 \text{ м}^3/\text{ч}$, что несколько больше величины, указанной в марке насоса. Это говорит о том, что формула (4) дает достаточно точную оценку оптимального режима работы ЦН.

Схема и внешний вид стенда представлены на рисунке 1.

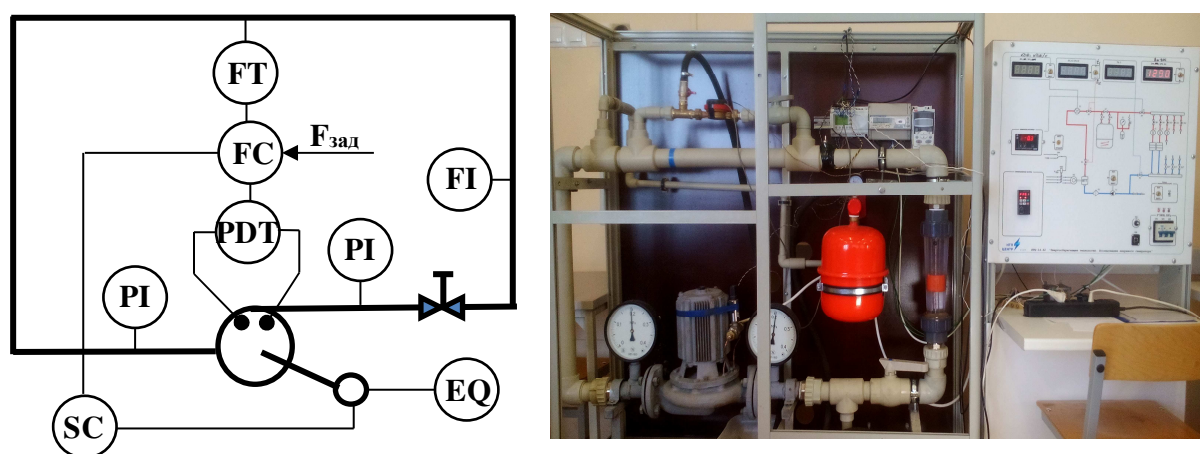


Рисунок 1. – Схема и внешний вид циркуляционного стенда

Результаты испытаний центробежного насоса на номинальной частоте вращения при изменении расхода в системе традиционным методом дросселирования на напорной линии представлены в таблице.

Таблица. – Результаты испытаний ЦН при различных методах изменения расхода

Подача насоса, $\text{м}^3/\text{ч}$	Регулирование расхода методом дросселирования потока жидкости				Регулирование расхода методом изменения частоты вращения		
	Напор насоса, кПа	Потребляемая мощность, Вт	КПД, %	Параметр $\Delta P_{\text{ст}}$, кПа	Напор насоса, кПа	Потребляемая мощность, Вт	Параметр $\Delta P_{\text{ст}}$, кПа
1	83	245	9	4,1	4	62	-0,3
2	80	268	17	3,45	5	79	-0,3
3	78	280	23	2,85	6	93	-0,3
4	76	290	29	2,15	8	111	-0,3
5	74	310	33	1,6	12	127	-0,3
6	69	325	35	0,9	18	157	-0,3
7	65	345	37	0,45	22	193	-0,3
8	61	358	38	-0,01	30	248	-0,3
9	55	370	37	-0,2	36	301	-0,3
10	50	395	35	-0,28	44	372	-0,3
10,5	46	400	34	-0,3	46	400	-0,3

Можно видеть, что вычисленный по формуле (4) оптимальный расход соответствует действительному, наблюдаемому при испытаниях. Этому расходу отвечает значение перепада статических давлений в спиральном отводе $\Delta P_{ст} = 0$. Уменьшение расхода вызывает увеличение этого параметра до 4 кПа, а увеличение – уменьшение перепада $\Delta P_{ст}$. Оптимальному с точки зрения симметрии потока в отводе примерно соответствует и значение максимума КПД.

На рисунке 2 представлены расходно-напорные характеристики режима работы насоса при традиционном способе регулирования.

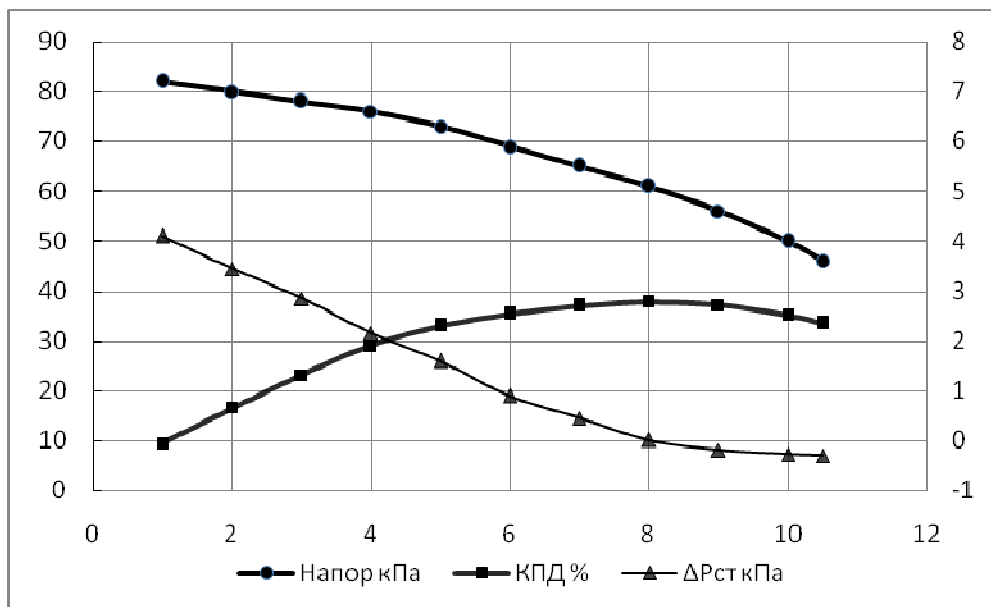


Рисунок 2. – Графики характеристик $H = f(Q)$, $\eta = f(Q)$ и $\Delta P_{ст} = f(Q)$ ЦН при дросселировании

Регулирование расхода жидкости в системе производилось частотным методом при гидравлическом сопротивлении системы с полным открытием дроссельного клапана. По этой причине параметры различных способов регулирования на максимальном расходе совпадают.

Дальнейшее уменьшение расхода в системе частотным методом при постоянном гидравлическом сопротивлении показывает существенное снижение электрической мощности, потребляемой приводом ЦН для перекачки жидкости.

Здесь следует отметить, что потребляемая электрическая мощность измерялась до частотного преобразователя и, следовательно, учитывает не только мощность приводного электродвигателя ЦН, но и мощность, потребляемую самим частотным преобразователем.

Можно видеть (см. таблицу), что потребление электроэнергии насосом при дросселировании практически не зависит от подачи, в то время как при регулировании частотным преобразователем электропотребление снижается пропорционально уменьшению расхода перекачиваемой жидкости.

На рисунке 3 представлены сравнительные результаты расхода электрической энергии на перекачку жидкости при регулировании расхода различными методами: традиционным с использованием дроссельного клапана и регулированием частоты вращения привода ЦН. На основании представленных графиков можно сделать заключение, что при использовании частотного метода регулирования подачи ЦН можно получить экономию электроэнергии на 40–70% по сравнению с традиционным методом регулирования дроссельным клапаном.

Кроме этого можно видеть, что подача ЦН, характеризующаяся параметром $\Delta P_{ст} = 2$ кПа, соответствует некоторому граничному значению расхода $Q = 4$ м³/ч, ниже которого расход электроэнергии на перекачку жидкости начинает резко возрастать, чего не наблюдается при регулировании частотным методом.

Параметр $\Delta P_{ст}$ можно использовать для оценки и ограничения подачи через насос при совмещенном методе регулирования (когда требуется изменять расход на отдельных участках циркуляционной системы за счет изменения гидравлического сопротивления), не допуская перерасхода электроэнергии.



Рисунок 3. – Графики характеристик ЦН $W_{чр}/Q = f(Q)$ и $W_{др}/Q = f(Q)$

Схема алгоритма такого регулирования режима работы ЦН приведена на рисунке 4.

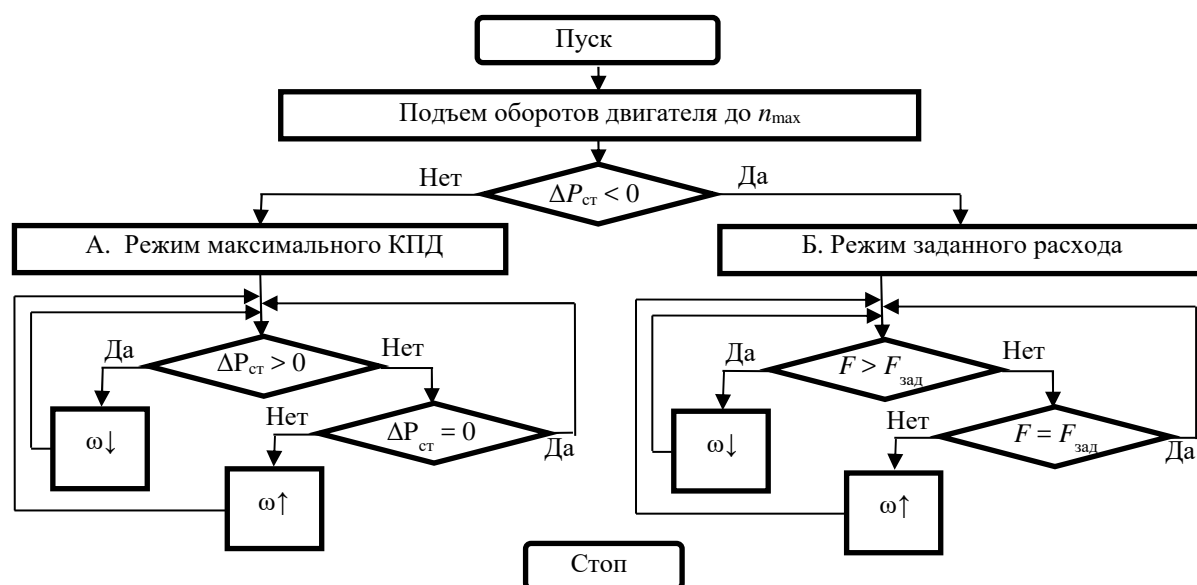


Рисунок 4. – Алгоритм частотного регулирования режима работы ЦН по параметру $\Delta P_{ст}$

Регулятор работает следующим образом.

Сразу после включения насос набирает максимальные обороты с целью оценки гидравлического сопротивления системы по параметру $\Delta P_{ст} = 0$.

Если гидравлическое сопротивление системы мало, следовательно, $\Delta P_{ст} < 0$ и насос находится в зоне малых удельных расходов энергии на перекачку жидкости (см. рисунок 2), то ЦН переключается в режим работы от датчика расхода и будет постоянно работать с параметром $\Delta P_{ст} < 0$ (см. таблицу).

В противном случае остается в режиме обеспечения предельного расхода по электропотреблению.

В режиме датчика (правая часть алгоритма) частота вращения насоса будет определяться требуемым расходом в системе (т.е. вместо дроссельного клапана, изменяющего характеристики системы, будет использоваться изменение характеристики самого насоса, что обеспечивает максимум экономии энергоресурсов).

В режиме ограничения потребления электроэнергии (левая часть алгоритма) регулятор не допустит эксплуатации насоса с большими удельными расходами на подачу и будет снижать частоту враще-

ния насоса вплоть до полной остановки с последующим сообщением оператору о нарушении режима эксплуатации.

Предельное значение параметра $\Delta P_{\text{ст}}$ можно задавать из опыта эксплуатации того или иного насоса. В приведенном на рисунке 4 алгоритме управления предельным значением является $\Delta P_{\text{ст}} = 0$, что соответствует режиму максимальной осевой симметрии истечения жидкости из рабочего колеса. Режим подачи насоса $\Delta P_{\text{ст}} = 0$ соответствует минимуму вибрации насоса на лопастной частоте и максимуму гидравлического КПД насоса вне зависимости от частоты вращения вала, что подтверждается результатами стендовых испытаний.

Разработка и применение современных систем регулирования режима работы насосов с использованием привода с изменяющейся частотой вращения позволит не только обеспечить реальную экономию электроэнергии на действующих насосах, но и стимулирует проектировщиков отказаться от заведомо неэффективных решений (завышенного радиального зазора, устранения языка радиального отвода, обреза рабочего колеса и т.д.).

Заключение. Разработан аналитический метод расчета подачи ЦН, соответствующий максимальной осевой симметрии потока жидкости на выходе из рабочего колеса. Выполнено сравнение полученных результатов с опытными данными, подтверждающими результаты расчетов.

Определен основной технологический параметр обеспечения оптимального режима работы ЦН – перепад статических давлений до и после языка спирального отвода.

Разработан алгоритм эффективного регулирования режима работы гидросистемы с использованием частотного привода ЦН, позволяющий обеспечивать максимальную экономию электроэнергии, затрачиваемой на перекачку жидкости.

Выполненные стендовые испытания алгоритма подтвердили его эффективность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Питолин, В.Е. Построение математической модели процесса возбуждения динамических составляющих поперечных сил в рабочем колесе центробежного насоса / В.Е. Питолин // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2011. – № 4. – С. 52–58.
2. Питолин, В.Е. Теоретическое исследование сил гидродинамического происхождения, вызывающих вибрацию центробежных насосов / В.Е. Питолин // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия Ф, Прикладные науки. – 2012. – № 16. – С. 85–92.
3. Ломакин А.А. Центробежные и осевые насосы / А.А. Ломакин. – М. ; Л. : Машиностроение, 1966. – 264 с.
4. Gulich, J.F. Centrifugal Pumps / J.F. Gulich. – Springer Heidelberg Dordrecht-London-New York, 2010. – 966с.
5. Питолин, В.Е. Построение компьютерной модели центробежного насоса для расчета вибрации его корпуса под действием динамических составляющих поперечной силы / В.Е. Питолин // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия Ф, Строительство. Прикладные науки. – 2009. – № 12. – С. 95–101.
6. Степанов, Л.И. Центробежные и осевые насосы. Теория, конструирование и применение : пер. с англ. / Л.И. Степанов. – М. : ГНТИ «Машиностроительной литературы», 1960. – 461 с.

Поступила 07.03.2018

OPTIMAL REGULATION OF HYDRAULIC SYSTEMS

V. PITOLIN

The results of theoretical studies of the a centrifugal pump optimal operating mode are presented, as well as data of comparative bench tests of the traditional method for regulating hydraulic systems using a throttle valve and the frequency control method.

It is shown that the frequency method of regulation from the point of view of energy consumption for pumping liquid at the same cost of realization is 30-70% more economical than the traditional one and significantly more reliable in operation, has no moving parts and seals.

An algorithm for controlling a centrifugal pump is developed using the frequency control method by maintaining the most optimal operating mode for any feed.

Keywords: *hydraulic systems, centrifugal pump, optimal operating, frequency control method, throttling.*

УДК 621.371:550.837.6

**ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ
НАД УГЛЕВОДОРОДАМИ В РЕЖИМЕ РАДИОИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ**

*канд. техн. наук, доц. В.Ф. ЯНУШКЕВИЧ
(Полоцкий государственный университет)*

Проведен анализ дисперсионных характеристик диэлектрической проницаемости в режиме взаимодействия радиоимпульсных сигналов с анизотропными средами над углеводородными залежами. Используется вертикальная поляризация электромагнитных волн. Рассмотрен широкий диапазон используемых частот. Исследовано влияние диэлектрической проницаемости, концентрации частиц на распространение радиоимпульсных сигналов. Даны рекомендации по использованию оптимальных характеристик зондирующих сигналов. Полученные результаты способствуют определению анизотропных сред по измерению отличий сигналов двухканальной схемы на основе полученных величин отраженных сигналов. Возможность перестройки устройства дополняет функциональные возможности для поиска углеводородных залежей. На основе приведенных исследований могут быть разработаны методы георазведки углеводородов.

Ключевые слова: электромагнитная волна, анизотропная среда, углеводородные залежи.

Введение. Усовершенствование существующих электромагнитных методов (ЭММ) георазведки и разработка новых методов поиска, идентификации месторождений нефти и газа (углеводородов) представляют актуальную задачу в настоящее время. Постановка задач поиска и идентификации углеводородных залежей (УВЗ) требует решения вопросов аналитического описания параметров среды над углеводородами. Это предполагает исследование дисперсии тензоров диэлектрической проницаемости среды над УВЗ, решение задач взаимодействия электромагнитных волн ЭМВ и УВЗ, находящейся на фоне гетерогенной и полифазной среды, разработку и экспериментальное исследование ЭММ и устройств для повышения уровня достоверности разведки, поиска и оконтуривания месторождений нефти и газа [1–3].

Результаты анализа взаимодействия ЭМВ с УВЗ и его экспериментального исследования представлены во многих работах. В работе [4] были предложены и апробированы в эксперименте методы томографии и голографии (определения формы) подповерхностных диэлектрических объектов, основанные на двумерном сканировании вдоль поверхности среды приемно-передающей системой, представляющей собой жестко связанные передатчик и приемник.

В работе [5] показано, что система уравнений классической электродинамики при анализе распространения плоской гармонической электромагнитной волны в устройствах радиоэлектроники с однородной анизотропной проводящей рабочей средой должна быть «полной», возможность исключения из рассмотрения дивергентных уравнений является частным случаем и в каждой конкретной ситуации должна быть обоснована. Особенности расчета элементов тензора для частного случая – использования силициена – показывают, что для каждого конкретного применения вида анизотропной среды возможны свои оригинальные решения [6].

Способ поиска УВЗ [7] позволяет обнаруживать месторождения нефти и газа по измерениям величины напряженности электрического поля отраженных радиоимпульсных сигналов на глубинах до 200 м. Учет помеховой обстановки позволит повысить достоверность методов поиска [8]. Исследование процессов распространения ЭМВ, связанных с различными резонансными эффектами, может быть применено для поиска и идентификации УВЗ [9].

По мнению авторов статей [10–13], предложенные методы позволяют расширить возможности ЭММ георазведки. После проведенных исследований [14–16] даны рекомендации по применению импульсных методов обнаружения УВЗ.

Целью настоящей работы является исследование дисперсионных характеристик анизотропной среды над углеводородами в режиме радиоимпульсных сигналов.

Диагностика анизотропной среды над УВЗ по воздействию зондирующего радиоимпульсного сигнала на исследуемый геопрофиль состоит из определения реакции среды над углеводородами на комбинационные составляющие тензора диэлектрической проницаемости для ЭМВ с правой и левой круговой поляризациями. Интерпретация результатов проводится с помощью средств вычислительной техники, позволяющих пересчитывать характеристики отраженных сигналов в значения диэлектрической проницаемости среды.

Объекты и методы исследования. Рассмотрим процесс взаимодействия ЭМВ с УВЗ в режиме импульсного сигнала вида

$$U(f) = \frac{U \cdot \tau_u}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0) \cdot \tau_u}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0) \cdot \tau_u}{2}} + \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0) \cdot \tau_u}{2}}{\frac{(\omega + \omega_0) \cdot \tau_u}{2}}, \quad (1)$$

где $\frac{U \cdot \tau_u}{2} = 1$ – амплитуда радиоимпульса;

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ – частота радиоимпульса;

ω_0 – несущая частота радиоимпульса;

τ_u – длительность радиоимпульса.

Процесс взаимодействия ЭМВ с локальным включением на трассе распространения радиоволн можно представить в виде режима наклонного падения плоской волны с вертикальной поляризацией в среде с параметрами $\epsilon_0, \mu_0, \delta_0$ на безграничную поверхность с анизотропным импедансом. Данная ЭМВ возбуждается с помощью переносного передатчика, перемещаемого вдоль исследуемого профиля.

Компоненты тензора диэлектрической проницаемости для такого режима взаимодействия имеют следующий вид [9]:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \epsilon_r \cdot F \left(1 + \frac{n\Omega_1}{w}\right) + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{F \cdot w_{ni}^2}{w} \cdot \frac{(w + n\Omega_1) \cdot [w_{Ti}^2 - (w + n\Omega_1)^2 - v_i^2]}{[v_i^2 + w_{Ti}^2 - (w + n\Omega_1)^2]^2 + 4(w + n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} - \right. \\ &\quad \left. - jF \left[\frac{w_{ni}^2}{w} \cdot v_i \cdot \frac{(w + n\Omega_1)^2 + v_i^2 + w_{Ti}^2}{[v_i^2 + w_{Ti}^2 - (w + n\Omega_1)^2]^2 + 4(w + n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} + \frac{\delta_r F}{w\epsilon_0} \right] \right\}, \\ \dot{\epsilon}_2 &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{w_{ni}^2}{w} \cdot F \cdot w_{Ti} \cdot \frac{v_i^2 + w_{Ti}^2 - (w + n\Omega_1)^2}{[v_i^2 + w_{Ti}^2 - (w + n\Omega_1)^2]^2 + 4(w + n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} - \right. \\ &\quad \left. - 2j \frac{w_{ni}^2}{w} \cdot F \cdot w_{Ti} \cdot v_i \cdot \frac{w + n\Omega_1}{[v_i^2 + w_{Ti}^2 - (w + n\Omega_1)^2]^2 + 4(w + n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} \right\}, \\ \dot{\epsilon}_3 &= \sum_{i=1}^2 \left\{ F \left(1 + \frac{n\Omega_1}{w}\right) \cdot \left[\epsilon_r - \frac{w_{ni}^2}{w} \cdot \frac{1}{(w + n\Omega_1)^2 + v_i^2} \right] - j \left[\frac{w_{ni}^2}{w} \cdot F \cdot v_i \cdot \frac{1}{(w + n\Omega_1)^2 + v_i^2} + \frac{\delta_2 F}{w\epsilon_0} \right] \right\}. \end{aligned} \right. \quad (2)$$

$$\text{Здесь } F = \frac{\tau}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi \cdot n \cdot F_1 \cdot \tau)}{\pi \cdot n \cdot F_1 \cdot \tau},$$

T, F_1 – период, частота импульса;

n – номер гармоники;

Ω_1 – круговая частота импульса, $\Omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot F_1$;

ϵ_r, δ_r – диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость среды;

ϵ_0 – диэлектрическая постоянная;

w_{ni} – плазменная частота;

v_i – частота столкновения частиц;

ω_{Ti} – гиротропная частота, $\omega_{Ti} = \frac{q_e \mu_0 H_0}{m}$;

q_e, m – заряд электрона, масса электрона;
 H_0 – напряженность магнитного поля Земли,
 μ_0 – магнитная постоянная;
 $i = 1$ для электронов, $i = 2$ для ионов.

Представляет интерес анализ частотных характеристик комбинационных составляющих:

$$\dot{\epsilon}_R(\omega) = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 = \text{Re} \epsilon_R + j \text{Im} \epsilon_R \quad (4)$$

$$\dot{\epsilon}_L(\omega) = \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2 = \text{Re} \epsilon_L + j \text{Im} \epsilon_L$$

Результаты и их обсуждение. Был проведен анализ дисперсионных характеристик по формуле (4) для импульсного взаимодействия ЭМВ со средой над УВЗ. На рисунке 1 представлены результаты расчетов в зависимости от диэлектрической проницаемости наполнителя и частоты сигнала для вещественной составляющей ЭМВ с правой поляризацией. Расчет компонентов тензоров диэлектрической проницаемости осуществлен на основании экспериментально полученных параметров среды над залежами углеводородов [2]:

- удельной электрической проводимости $\delta_r = 10^{-5}$ См/м;
- концентрации частиц $N_c = N_n = (10^{15} - 10^{20}) \text{ м}^{-3}$;
- частоты столкновения частиц $\nu = 2 \cdot \pi \cdot 10^9$ рад / с.

Значение n выбрано равным 5. Диэлектрическая проницаемость среды исследовалась в диапазоне от 1 до 30. Установлено, что с ростом частоты суммарная компонента уменьшается. Как видно из приведенного графика, при изменении диэлектрической проницаемости среды над УВЗ происходит существенное изменение комбинационной компоненты тензора диэлектрической проницаемости, что может быть использовано для определения характеристик сред над УВЗ.

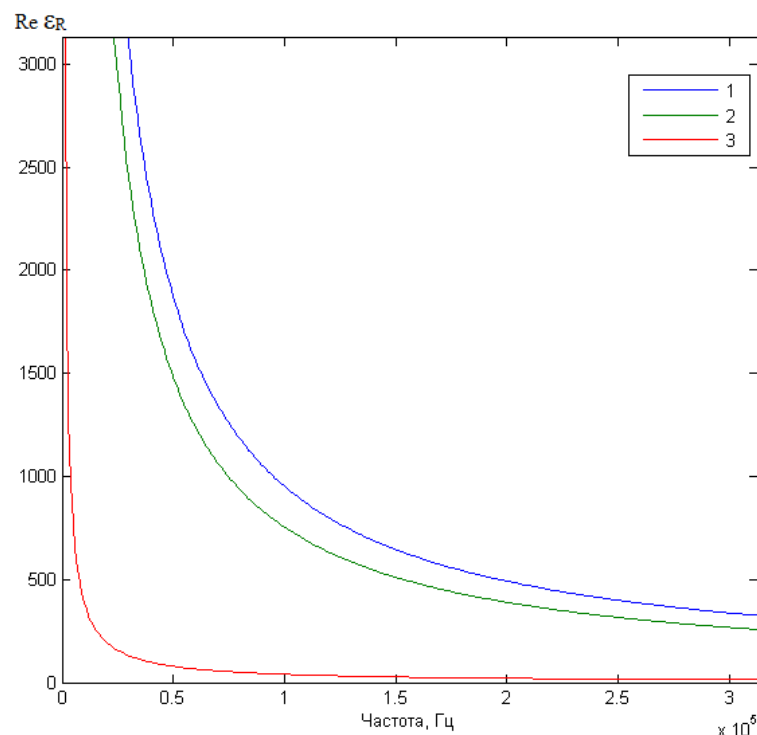


Рисунок 1. – Зависимости $\text{Re} \epsilon_R = \Psi(f)$:
1 – для $\epsilon_r = 25$; 2 – для $\epsilon_r = 20$; 3 – для $\epsilon_r = 2$

На рисунке 2 представлены зависимости вещественной части диэлектрической проницаемости среды над УВЗ для электромагнитных волн с левой поляризацией. Установлено, что с ростом частоты разностная компонента уменьшается. Из приведенного графика, при изменении диэлектрической проницаемости среды на УВЗ происходит не такое существенное изменение комбинационной компоненты тензора диэлектрической проницаемости, как для предыдущего случая (см. рис. 1).

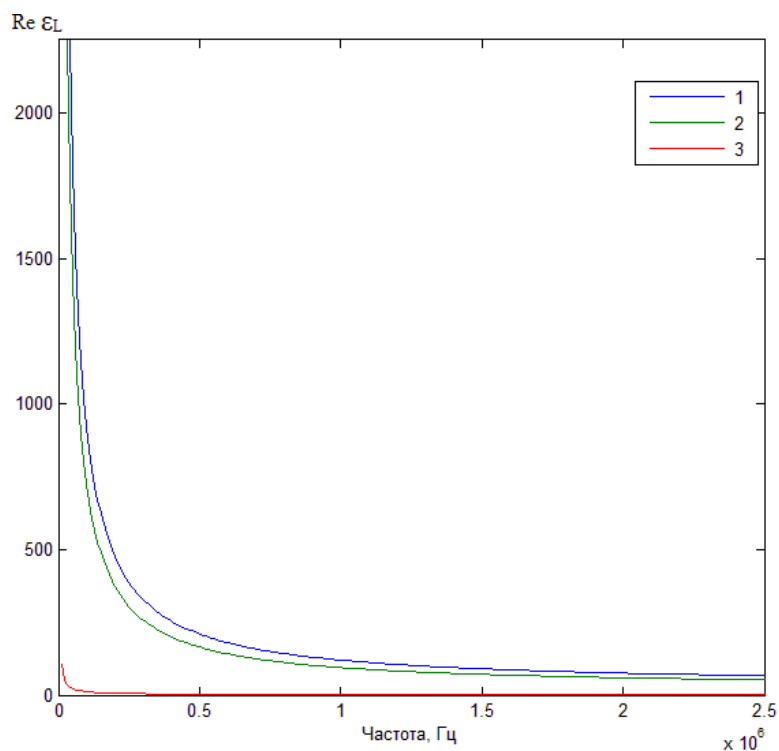


Рисунок 2. – Зависимости $\text{Re } \epsilon_L = \Psi(f)$:
1 – для $\epsilon_r = 25$; 2 – для $\epsilon_r = 20$; 3 – для $\epsilon_r = 2$

На рисунках 3, 4 представлены результаты расчетов в зависимости от диэлектрической проницаемости наполнителя и частоты сигнала для вещественной составляющей ЭМВ с правой и левой поляризациями при понижении концентрации частиц до минимальной из указанного выше интервала значений.

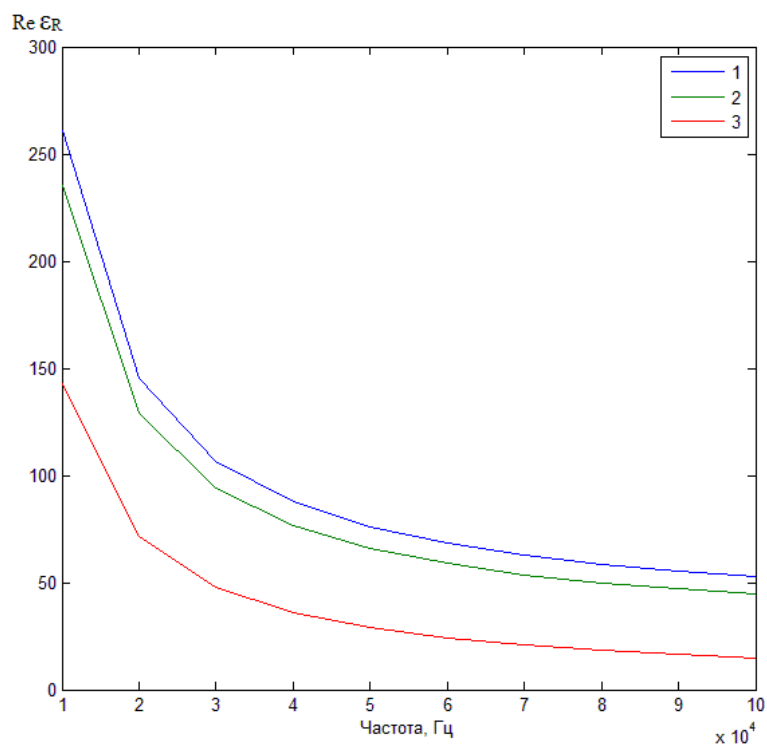
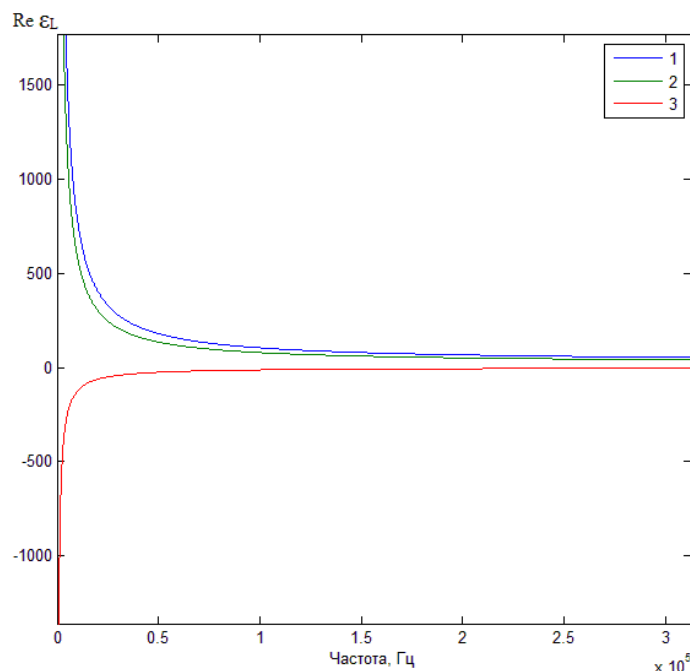


Рисунок 3. – Зависимости $\text{Re } \epsilon_R = \Psi(f)$:
1 – для $\epsilon_r = 25$; 2 – для $\epsilon_r = 20$; 3 – для $\epsilon_r = 2$



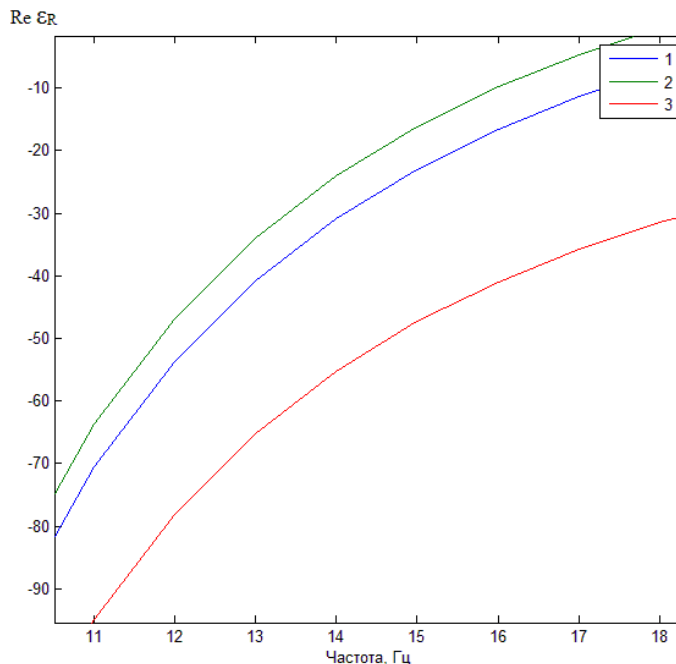
**Рисунок 4. – Зависимости $\text{Re } \epsilon_L = \Psi(f)$:
1 – для $\epsilon_r = 25$; 2 – для $\epsilon_r = 20$; 3 – для $\epsilon_r = 2$**

Закономерности изменения дисперсионных характеристик сохраняются за исключением численных значений. Характерной особенностью поведения компоненты ЭМВ с левой поляризацией является наличие отрицательного участка при низких значениях диэлектрической проницаемости наполнителя среды. Реальные свойства среды над углеводородами сложнее приведенных усредненных значений характеристик анизотропной среды над залежью. Горные породы пронизаны водно-солевыми растворами, которые закрывают углеводороды. Залесь поляризуется за счет высоких температур и пластового давления. Восстановительные процессы в промежуточной области между УВЗ и окружающей средой обусловлены переходом ряда химических элементов в низковалентное состояние и избытком свободных электронов. Тем не менее закономерности, приведенные в статье, могут быть применены на практике с учетом поправочных коэффициентов.

Дисперсионные характеристики показывают поведение диэлектрической проницаемости наполнителя среды над углеводородами в частотной области зондирующих сигналов для ЭМВ с правой и левой круговыми поляризациями. Отличие условий распространения этих волн, что особенно проявляется для анизотропных сред, приводит к повышению информативности методов поиска УВЗ. Дифференциация земной поверхности, вызванная наличием дисперсных сред, проявляется в появлении электромагнитной аномалии. Выделение таких эффектов по сравнению с однородными средами может быть использовано для определения границ залежей. Качественные и количественные проявления этих отличий различаются в зависимости от глубины залегания и состава пород над УВЗ. Перестройка системы поиска по частоте может дополнить исследования уточняющими данными, подтверждающими эффективность предлагаемого метода. На основании полученных результатов могут разрабатываться методы радиокомплексирования для поиска УВЗ.

Данные графики могут быть применены на этапе идентификации УВЗ, который включает в себя вывод тензора среды над УВЗ в режиме радиоимпульсных сигналов, анализ комбинационных составляющих компонентов диэлектрической проницаемости среды над углеводородами для ЭМВ с правой и левой круговыми поляризациями, идентификации среды над залежами по характеру и величине суммарной и разностной компонент диэлектрической проницаемости анизотропного слоя. Новизна исследований, приведенных в данной статье, заключается в том, что полученные результаты способствуют определению анизотропных сред по измерению отличий сигналов двухканальной схемы на основе полученных величин отраженных сигналов. Это позволит повысить производительность геологоразведочных работ.

На рисунке 5 представлены результаты расчетов в зависимости от диэлектрической проницаемости наполнителя и частоты следования импульсов для вещественной составляющей ЭМВ с правой поляризацией.



**Рисунок 5. – Зависимости $\text{Re } \epsilon_R = \Psi(F_i)$:
1 – для $\epsilon_r = 25$; 2 – для $\epsilon_r = 20$; 3 – для $\epsilon_r = 2$**

Результаты расчетов свидетельствуют о сильном влиянии частоты следования импульсов на дисперсионные характеристики среды над УВЗ.

Заключение. Проведен анализ взаимодействия анизотропного слоя плазмopodobного типа с ЭМВ в режиме радиоимпульсных сигналов. Результаты исследования могут быть применены в поисковой геофизике. При этом следует отметить:

- дисперсионные характеристики в режиме радиоимпульсных сигналов для среды над залежью определены в широком диапазоне частот зондируемых сигналов, диэлектрических проницаемостей и концентраций сред;

- по сравнению с существующими аналогами данный способ обнаружения УВЗ основывается на определении дисперсионных характеристик диэлектрической проницаемости среды для правой и левой поляризаций ЭМВ в режиме радиоимпульсных сигналов, построении двухканальной измерительной системы, позволяющей повысить точность определения границ углеводородов;

- при изменении диэлектрической проницаемости среды над УВЗ происходит существенное изменение комбинационной компоненты тензора диэлектрической проницаемости, что может быть использовано для определения характеристик сред над УВЗ.

Применение данного метода поиска позволит повысить производительность геологоразведочных работ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гололобов, Д.В. Радиотехнические системы поиска и идентификации углеводородных залежей в режиме двухчастотного взаимодействия / Д.В. Гололобов, В.Ф. Янушкевич // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз. тэхн. – 2002. – № 1. – С. 49–54.
2. Moskvichew, V.N. Interaction of electromagnetic waves (EMW) with anisotropic inclusion in communication line / V.N. Moskvichew // 9-th Microw. Conf. NICON-91, Rydzyna, May 20–22, 1991. – Rydzyna, 1991. – Vol. 1. – P. 240–244.
3. Гололобов, Д.В. Поверхностный импеданс среды над углеводородными залежами в режиме частотно-модулированных сигналов / Д.В. Гололобов, С.В. Калинин, В.Ф. Янушкевич // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз. тэхн. – 2010. – № 4. – С. 98 – 101.
4. Gaikovich, K.P. Inverse problem of near-field scattering in multilayer media / K.P. Gaikovich, P.K. Gaikovich // Inverse Problems. – 2010. – Vol. 26, № 12. – P. 125013.

5. Макаров, А.М. Об особенностях волновых процессов в устройствах радиоэлектроники с анизотропной рабочей средой / А.М. Макаров, Л.А. Лунёва, К.А. Макаров // Наука и образование. – 2016. – № 11. – С. 88–98.
6. Александров, Ю.М. Расчет элементов тензора комплексной диэлектрической проницаемости для анизотропных материалов / Ю.М. Александров, В.В. Яцышен // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2015. – Т. 18, № 1. – С. 23–27.
7. Иванова, К.И. Способ геоэлектроразведки углеводородной залежи с использованием радиоимпульсных сигналов / К.И. Иванова, В.Ф. Янушкевич // Фундаментальные и прикладные исследования в современном мире : материалы XV Междунар. науч.-техн. конф., СПб., 4 окт. 2016 г. / Информационный издательский учебно-научный центр «Стратегия будущего». – СПб., 2016. – Т. 1. – С. 107–111.
8. Янушкевич, В. Ф. Экранирование радиоэлектронных устройств и систем. Новые принципы проектирования антенн : учеб. пособие для аспирантов / В. Ф. Янушкевич, М. Е. Капралов, К. И. Кременя. – Вильнюс : Циклонас, 2016. – 156 с.
9. Янушкевич, В.Ф. Электромагнитные методы поиска и идентификации углеводородных залежей / В.Ф. Янушкевич. – Новополюцк, ПГУ, 2017. – 232 с.
10. Электродинамические параметры подводных источников в поле поверхностной электромагнитной волны / Д.В. Гололобов [и др.] // 35 Всерос. межвуз. науч.-техн. конф. : тез. докл. – Владивосток, 1992. – Т. 1, Ч. 1. – С. 59–62.
11. Гололобов, Д.В. Поиск месторождений углеводородов радиоволновым методом / Д.В. Гололобов, В.Ф. Янушкевич // Приборы. Справочный журнал. – 1999. – № 10. – С. 25–27.
12. Янушкевич, В.Ф. Моделирование двухчастотного взаимодействия электромагнитных волн с углеводородной залежью / В.Ф. Янушкевич // Приборы. Справочный журнал. – 1999. – № 10. – С. 27–29.
13. Гололобов, Д.В. Фазовые методы идентификации углеводородных залежей / Д.В. Гололобов, А.О. Рак, В.Ф. Янушкевич // Инженерный вестник. – 2001. – № 1 (20). – С. 16–18.
14. Янушкевич, В.Ф. Приборы для обнаружения углеводородных залежей на основе применения импульсных сигналов / В.Ф. Янушкевич // Приборы. – 2017. – № 8 (206). – С. 12–18.
15. Янушкевич, В.Ф. Поверхностный импеданс анизотропной среды над углеводородными залежами в режиме радиоимпульсных сигналов [Электронный ресурс] / В.Ф. Янушкевич // Журнал радиоэлектроники. – 2017. – № 10. – Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/oct17/2/text.pdf>.
16. Янушкевич, В.Ф. Взаимодействие радиоимпульсных сигналов с анизотропной средой над углеводородными залежами / В.Ф. Янушкевич // Труды МАИ. – 2017. – № 96. – С. 1–16.

Поступила 26.02.2018

DISPERSION CHARACTERISTICS OF ANISOTROPIC ENVIRONMENT OVER HYDROCARBONS IN THE REGIME OF RADIO-PULSE SIGNALS

V. YANUSHKEVICH

The analysis of dispersion characteristics of dielectric permittivity in the interaction mode of radio impulse signals with anisotropic media over hydrocarbon deposits is carried out in the article. Vertical polarization of electromagnetic waves is used. A wide range of frequencies is considered. The effect of the permittivity, the concentration of particles on the propagation of radio impulse signals, has been studied. Recommendations are given on the use of optimal characteristics of probing signals. The obtained results contribute to the determination of anisotropic media by measuring the difference between the signals of a two-channel circuit based on the obtained values of the reflected signals. The application of this search method will improve the productivity of geological exploration. The ability to rebuild the device complements the functionality to search hydrocarbon deposits. Based on the above studies, methods of geological exploration of hydrocarbons can be developed. The results of the research can be used in search geophysics.

Keywords: *electromagnetic wave, anisotropic medium, hydrocarbon deposits.*

УДК 621.3.087.351

ПОВЫШЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ПРОЖЕКТОРНЫХ, ИЛЛЮМИНАЦИОННЫХ И ИНЫХ ОСВЕТИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ**П.П. РЕДЬКО, О.А. КИЗИНА, И.С. РУСЕЦКИЙ**
(Полоцкий государственный университет)

Рассмотрены неисправности, возникающие при эксплуатации прожекторных, иллюминационных и других устройств, а также основные вопросы, связанные с повышением надежности осветительных приборов, в основе которых лежат простые физические принципы.

Освещены факторы, негативно воздействующие на продолжительность работы, связанные с условиями эксплуатации. Предложены доступные способы повышения надежности и долговечности прожекторных и прочих осветительных устройств, дополняющие и корректирующие стереотипные направления, а также приведены некоторые конкретные схемотехнические решения для их практической реализации. Важным аспектом является ориентация предложенных способов на серийно выпускаемую отечественную элементную базу и общеизвестные законы физики и электротехники. Применение предложенных конструктивных решений в реальных условиях позволит повысить срок службы и надежность функционирования галогенных прожекторов как наиболее распространенных на сегодняшний день осветительных устройств без значительного увеличения затрат на их обслуживание и эксплуатацию.

Ключевые слова: осветительные устройства, надежность, светодиодная излучающая матрица, галогенные лампы, соединительные клеммы, ограничительный элемент, перепады напряжения в питающей сети.

Введение. Опыт эксплуатации современных светотехнических устройств показывает, что некоторые их разновидности обладают недостаточно высокой надежностью и долговечностью. В настоящее время продление срока их службы в виде разовых ремонтов выполняется, как правило, путем блочной замены, что не всегда оправданно, поскольку требует наличия резерва блоков, а это при широкой номенклатуре используемых изделий затруднительно. Ошибочное определение неисправного блока при этом может привести к дополнительным повреждениям и удорожанию ремонта. В то же время сами ремонты при частых отказах изделий приближают их полный выход из строя. Дополнительные трудности создают необходимость осуществления специальной экологически безопасной утилизации выбракованных изделий, что не всегда соблюдается.

Вместе с тем в ряде случаев самопроизвольное прекращение освещения не только нежелательно, но и опасно, например, освещение операционных, помещений во время проведения мероприятий, связанных с большим скоплением людей, ночное освещение городских улиц, особенно в районах расположения пешеходных переходов и т.д.

Целью данной статьи является разработка эффективных способов повышения надежности и увеличения срока службы светотехнических устройств на примере галогенных прожекторов, в основу которых положены основные физические процессы, протекающие в нити накала.

Ниже представлены простые и эффективные схемотехнические решения, дополняющие стереотипные направления, но выгодно отличающиеся от них вследствие ориентации на отечественную, серийно выпускаемую элементную базу, что ведет к повышению срока службы осветительных устройств.

Постановка задачи. К снижению надежности и долговечности осветительных и других радиоэлектронных устройств приводят, как правило, следующие факторы:

- чрезмерная схемотехническая усложненность, применение в составе устройств отдельных редко используемых элементов, не выпускаемых отечественной радиоэлектронной промышленностью, приводящие к увеличению издержек и продолжительности ремонта, вплоть до его невозможности в исключительных ситуациях, что сокращает срок службы изделия;
- отсутствие в комплектности изделий необходимой эксплуатационной документации, технических описаний и т.п., наличие в приборе элементов без маркировки и каких-либо опознавательных знаков;
- приведение изготовителем на выпускаемые устройства предельно допустимых технических данных и условий эксплуатации в качестве номинальных, провоцирующее перегрузки, превышения температуры и влажности, тем самым влекущее сокращение срока службы;
- характерное для современной аппаратуры чрезмерное снижение массогабаритных показателей, зачастую не обоснованное и в ряде случаев приводящее к критическому снижению показателя ремонтно-пригодности изделий;

– обслуживание светотехнических устройств неподготовленными или низкоквалифицированными специалистами, снижающее срок службы изделий и качество их ремонта, а также сроки между ремонтами [1].

В силу перечисленного выше, некоторый процент светотехнического оборудования традиционно-му ремонту и продолжению срока службы не подлежит.

Известные традиционные пути повышения надежности и долговечности осветительных и других электрорадиотехнических устройств включают повышение надежности элементной базы, монтажа, технологии изготовления печатных плат, а также надежности схмотехнических разработок.

Схмотехнические решения, представленные ниже, полностью учитывают указанные ограничения и позволяют достичь повышения надежности и долговечности прожекторных устройств, не внося значительных усложнений в их конструкцию и не повышая существенно стоимость их изготовления и эксплуатации.

Достигнутые результаты и их обсуждение. Установлено, что одна из наиболее частых неисправностей прожекторных, иллюминационных и иных светотехнических устройств – перегорание галогенных ламп, а также оплавление их соединительных звеньев и клемм. Это связано с перепадами напряжения питающей сети, использованием малогабаритных прожекторных устройств в закрытых отапливаемых помещениях с ограниченным движением воздушных масс, повышенной температурой окружающей среды, что ведет к перегреву нити накала и ее перегоранию. Питание ламп от одной сети с электро-сварочным, режущим и иным мощным электрооборудованием сопровождается скачкообразным изменением питающего напряжения, что также отрицательно сказывается на их долговечности. В итоге ремонт заключается в замене перегоревшей лампы.

У прожекторных устройств со светодиодными матричными излучателями, например, «Feron» LL-275 (50 Вт) и аналогичных, существенные перепады питающего напряжения также приводят к частому выходу из строя светоизлучающего элемента. Кроме этого, у этого типа осветителей уязвимым звеном является источник питания.

Для галогенных прожекторов возможным вариантом повышения надежности и долговечности представляется использование в цепи питающего напряжения совместно с пусковым блоком ограничительного элемента (рис. 1).

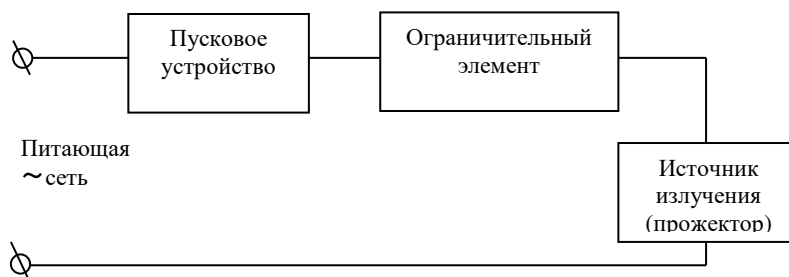


Рисунок 1. – Схема прожектора галогенного типа с ограничительным звеном

Эти элементы включаются последовательно в любом порядке относительно питающей сети. Известно, что сопротивление металла имеет прямую зависимость от температуры. Исходя из этого пусковое устройство необходимо для плавного нарастания питающего напряжения на время разогрева нити накала в лампе. Ограничительный элемент снижает перегрузку излучателя (лампы) при завышенных перепадах напряжения, не оказывая существенного влияния на интенсивность светового потока.

Для питающего напряжения ~ 220 В представляется целесообразным выбрать занижение напряжения на ~ 10 В (4,5 %). Для мощности прожектора 500 Вт и потребляемого тока 2,27 А рассеиваемая мощность ограничительного элемента составляет 22,7 Вт (стандартный номинал 25 Вт) при его сопротивлении 4,4 Ом. В этом случае можно использовать резистор заводского изготовления, например, типа ПЗВ-25 с ближайшим стандартным значением номинального сопротивления или изготовленный самостоятельно из высокоомного провода. Для указанного резистивного сопротивления 4,4 Ом при токе 2,27 А может быть использован высокоомный провод с удельным сопротивлением $\rho = 0,01176 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{мм}$ диаметром $d = 0,35 \text{ мм}$ и длиной $l = 36 \text{ мм}$ [2, 6]. Теоретический расчет сопротивления осуществляется по формуле $R = \rho \frac{l}{S}$, где ρ – удельное сопротивление материала проводника, Ом·м; l – длина проводника, м;

S – площадь поперечного сечения проводника, мм².

Монтируют резистор-ограничитель на внешней стороне прожектора одножильным изолированным проводником, приняв меры по изоляции токоведущих элементов.

При оплавлении слаботочных соединительных клемм рекомендуется заменить их соединителями из керамики, используемыми в лампах дневного освещения, для подключения люстр, например типа Б310 или термостойких пластмасс.

В критических ситуациях перепад питающего напряжения может вызвать оплавление клемм самого пускового устройства. При систематическом оплавлении пускового устройства замедленного включения можно заменить его более мощным аналогом или использовать согласованное включение двух таких устройств.

В прожекторах со светодиодной излучающей матрицей для защиты излучателя от перепадов питающего напряжения может быть использован диодный ограничитель, включенный последовательно между блоком питания и осветительным устройством как показано на рисунке 1. Включение диода при этом прямое. Для прожекторов типа «Feron» LL-275 (50 Вт), «Назар» (50 Вт) и их аналогов может быть использован диод КД202А, Б с применением охлаждающего радиатора.

В тех же целях можно использовать и стабилизаторы тока с включением их на выходе блока питания. Величина занижения питающего напряжения в данном случае определяется экспериментально при номинальном значении напряжения питающей сети.

Другой значимой проблемой прожекторных и прочих осветительных устройств часто является неисправность питающего устройства. При неисправностях блока питания и невозможности его заменить, может быть реализована альтернативная емкостно-преобразовательная схема (рис. 2)

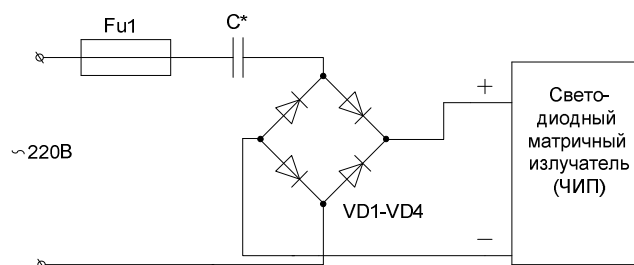


Рисунок 2. – Емкостно-преобразовательная схема питания прожекторов класса «Feron» и аналогичных

При напряжении питания 220 В конденсатор C^* должен быть неполярным, рассчитанным на максимальное рабочее напряжение не менее 320 В [1, 2], например типа К73-17. Емкость рассчитывают относительно питающего напряжения, потребляемого номинального тока и напряжения излучателя. Например, при питающем напряжении 220В и напряжении на осветительном устройстве 25 В при потребляемом им токе 0,1А, емкость C^* составит 1,6 мкФ [3]. При этом потерями на диодном выпрямителе в расчетах можно пренебречь.

Конкретные марки диодов для выпрямителя подбираются специалистом самостоятельно на основании предъявляемых к устройству конструктивных, электробезопасных, эксплуатационных и прочих требований. Для приведенных значений токов и напряжений можно использовать диодные выпрямители КЦ402, КЦ405 с разновидностями Г (А, Б, В, И, Ж).

Допустимый ток предохранителя $Fu1$ при токе прожектора 0,1 А должен превышать номинальный (не менее чем на 30%) и составлять величину, например, 0,16 А. Конкретное значение определяется специалистом экспериментально.

Дополнительным преимуществом предложенной емкостной схемы ограничения питающего напряжения является снижение энергопотребления осветительным устройством в 10–20 раз, что обуславливает примерно такое же снижение массогабаритных показателей. Существенно снижается себестоимость даже с учетом затрат на изготовление и монтаж схемной реализации, повышается ремонтно-пригодность осветительного устройства. Кроме того, представленное техническое решение является простым и использует отечественную элементную базу.

Для прожекторов со светодиодными излучателями без внутренней реконструкции возможно применение в качестве ограничителей питающего напряжения схемных стабилизаторов напряжения.

Кроме указанных путей повышения надежности прожекторов галогенного типа возможны также применение принудительного охлаждения, а также работа с открытым или полукрытым кожухом во избежание перегрева электрорадиоэлементов.

В сувенирных иллюминационных осветительных устройствах наиболее частым дефектом является хаотическое мигание или неработоспособность осветительной газоразрядной U-образной лампы, управляемой электронной схемой поджига.

При невозможности замены лампы предлагается организация подсветки устройства путем использования маломощных ламп накаливания типа CM-220-15, применяемых в качестве подсветки холодильников, швейных машинок, а также ламп типа «Feron» с напряжением питания 220 В и потребляемой мощностью 6...8 Вт и т.п., включенных по емкостной схеме (рис. 3).

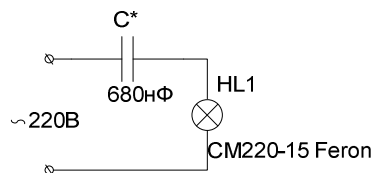


Рисунок 3. – Емкостная схема понижения напряжения питания газоразрядных ламп

Лампу монтируют путем пайки одножильными медными изолированными проводами или с патроном под соответствующий цоколь вместо существующего устройства подсветки, предварительно снизив световую энергию и энергию теплового излучения до значений, обеспечивающих отсутствие перегрева и оплавления осветительной декоративной пленки устройства при достаточной величине освещенности. Этот процесс выполняют, используя резистивный гасящий элемент или регулятор напряжения, при котором определяется номинальное напряжение осветителя, например, 90 В. При мощности 15 Вт и напряжении питания 220 В ток, потребляемый лампой, составит 0,068 А. Соответствующее ему сопротивление – 3235 Ом. При напряжении осветителя 90 В ток лампы снизится до 0,028 А. Сопротивление емкостного элемента составит 4643 Ом.

Из выражения, определяющего сопротивление емкостного элемента, легко определить необходимую для этого емкость. В данном случае она составит 0,68 мкФ или 680 нФ. При этом следует использовать неполярные конденсаторы типа К73-17 и аналогичные им с учетом номинального рабочего напряжения.

С целью защиты от перепадов напряжения в питающей сети для снижения напряжения в 2 раза возможно и применение обратно включенного диода, рассчитанного на допустимое обратное напряжение не менее 250 В и выдерживающего ток нагрузки [3]. Данное конструкторское решение поясняется на рисунке 4.

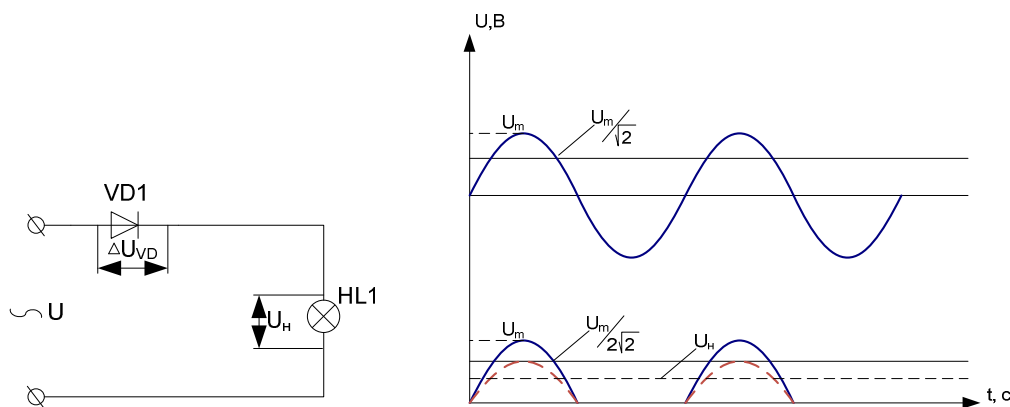


Рисунок 4. – Схема уменьшения переменного напряжения в 2 раза с использованием обратно включенного диода

Причиной понижения U_m является снижение напряжения нагрузки $U_n = U - \Delta U_{VD}$ за счет потерь на диоде, которое составляет 0,25...3,0 В. ΔU_{VD} определяются по справочным данным на соответствующий тип прибора или экспериментально. При условии, что питающее напряжение $U \gg \Delta U_{VD}$, принимая во внимание колебания питающего напряжения и разброс параметров осветителей, в ряде случаев потери можно не учитывать.

Методика емкостного гашения переменного напряжения изложена также в [4].

Аналогичное двукратное понижение напряжения в соответствии со схемой, изображенной на рисунке 3, можно реализовать с помощью диода, включив его как показано на рисунке 5. При этом возможно получить двухуровневый режим работы: при включении выключателя SA1 обеспечивается дежурный (половинный) режим освещения, а при включении SA2 – рабочий (полный).

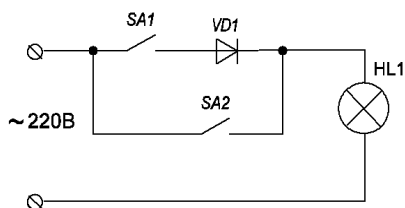


Рисунок 5. – Двухвыключательное управление питающим напряжением

Допустимый ток диода составляет величину не менее $I_{\text{ном}}/2$. Для HL1 (потребляемой мощностью 100 Вт и током $I = P / (2 U) = 100 / (2 \cdot 220) = 0,22$ А) может быть использован малогабаритный диод типа Д226Б (и/или В) без дополнительного охлаждения. Малогабаритные диоды КД209А, Б, В обеспечат коммутируемую мощность до 250 Вт включительно.

В современных условиях к осветительным устройствам также предъявляются требования по снижению энергопотребления. Этого можно достичь двумя способами – использованием в устройствах современных энергосберегающих светоизлучающих элементов и эксплуатацией уже установленных прожекторов в энергоэффективном режиме. Последний может быть реализован в том числе за счет использования представленных в статье конструкторских решений. Этот способ представляется предпочтительным. Энергосберегающие лампы содержат ртуть и другие токсичные металлы и требуют проведения специальных мероприятий по утилизации, что не всегда соблюдается на практике и увеличивает затраты на эксплуатацию. В то же время внедрение энергосберегающего режима практически не требует дополнительных расходов, помимо разовых затрат на изготовление и монтаж ограничительных схем.

Для ламп дневного освещения с электронной схемой управления, используемых в неблагоприятных условиях, например, в теплицах с повышенной влажностью и т.п., и требующих периодического ремонта, рекомендуется применение блока питания по традиционной схеме, изображенной на рисунке 6.

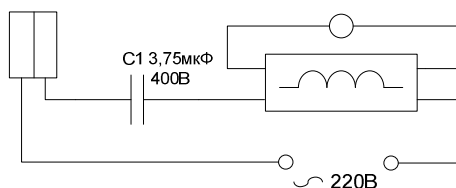


Рисунок 6. – Схема питания ламп дневного света

В переносных лампах с сенсорным управлением яркостью свечения и невозможностью восстановления рекомендуется использование надежных тиристорных или симисторных схем ручного регулирования, реализованных в соответствии с рисунком 7.

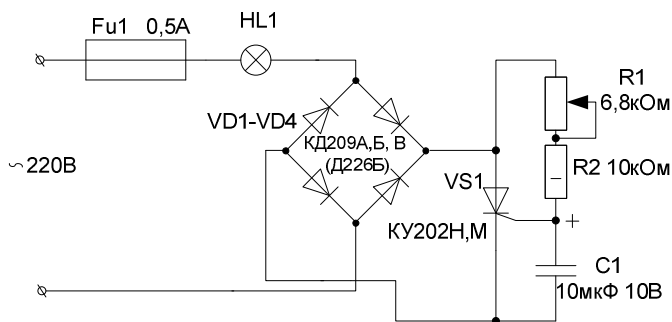


Рисунок 7. – Схема тиристорного регулирования яркостью освещения

Конденсатор, в целях продолжительности работы, предпочтительнее использовать оксидный или неполярный. Конструктивно регулятор может быть выполнен в виде отдельного блока с соответствующими разъемами или встроенным, вместо сенсорного блока управления.

Заключение. Реализация рассмотренных путей повышения надежности и долговечности осветительных и электротехнических устройств позволит снизить сложность, ресурс- и материалоемкость их технической эксплуатации, уменьшить финансовые издержки на техническое обслуживание, улучшить

экологическую обстановку вследствие количественного снижения объемов утилизируемых устройств. Также это позволит повысить срок службы осветительных устройств и надежность их функционирования.

Ориентация на отечественную элементную базу в представленных схемотехнических решениях также способствует снижению финансовых затрат на их внедрение.

Из рассмотренных способов предупреждения неисправностей галогенных прожекторов наиболее рациональным представляется включение в питающую цепь ограничительного устройства (диодного ограничителя) между пусковым устройством и прожектором во избежание его выхода из строя вследствие перепада питающего напряжения.

Кроме того, представляется целесообразным заменять слаботочные соединительные клеммы прожекторов на соединители из термостойких пластмасс или керамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Челноков, А.А. Основы экологии : учеб. пособие / А.А. Челноков, Л.Ф. Ющенко, И.Н. Жмыхов ; под ред. А.А. Челнокова. – Минск : Высш. шк., 2012. – 543 с.
2. Справочник по электротехнике / под ред. А.А. Иванова. – Киев : Вища школа, 1972.
3. Справочник по полупроводниковым диодам, транзисторам и интегральным схемам / под общ. ред. Н.Н. Горюнова. – Изд. 4-е, перераб. и доп. – М. : Энергия, 1976.
4. Завистовский, С.Э. Зарядно-питающие устройства на основе емкостных элементов / С.Э. Завистовский, П.П. Редько // Вестник Полоцкого государственного университета. – 2013. – № 12. – С. 106–111.
5. Завистовский, С.Э. Питание электрорадиотелекоммутерной техники от автомобильных аккумуляторов / С.Э. Завистовский, П.П. Редько // Вестник Полоцкого государственного университета. – 2014. – № 12. – С. 63–68.
6. Макаренко, Г.М. Курс общей физики / Г.М. Макаренко. – Минск : Дизайн ПРО, 2003. – 64 с.

Поступила 19.03.2018

INCREASING THE RELIABILITY AND LONG-TERM PERFORMANCE OF ILLUMINATED, ILLUMINATION AND OTHER LIGHTING DEVICES

P. REDKO, O. KIZINA, I. RUSETSKI

The main malfunctions, that arise when searchlight, illuminating and other lighting devices are operating, are considered in this article, influencing factors, negatively affecting their performance characteristics are illuminated here too. The available ways to increase the reliability and longevity of floodlight and other lighting devices, supplementing and correcting stereotyped directions are suggested and also some specific circuit-based solutions for their practical implementation are presented here. An orientation of the proposed methods to the mass-produced domestic element base and the generally known laws of physics and electrical engineering is an important aspect of these solutions. The application of the proposed design solutions in real conditions allows to increase the service life and reliability of the halogen floodlights as the most common lighting devices to date without significant increasing of their maintenance and operation costs.

Keywords: lighting devices, reliability, LED emitting matrix, halogen lamps, connecting terminals, limiting element, voltage drops in the supply network.

УДК 541.183

**МОДИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТИ ПЛЕНОК ПОЛИЭТИЛЕНТЕРЕФТАЛАТА
ПРИ ИМПЛАНТАЦИИ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧНЫМИ ИОНАМИ ИНЕРТНЫХ ГАЗОВ
С УДЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ 1 МЭВ/НУКЛОН**

**В.И. ГОЛОВЧУК, канд. физ.-мат. наук Д.И. БРИНКЕВИЧ,
д-р физ.-мат. наук, проф. М.Г. ЛУКАШЕВИЧ, д-р физ.-мат. наук, проф. В.Б. ОДЖАЕВ,
канд. физ.-мат. наук, доц. В.С. ПРОСОЛОВИЧ
(Белорусский государственный университет, Минск);
канд. физ.-мат. наук А.А. ХАРЧЕНКО
(Филиал БНТУ «Борисовский государственный политехнический колледж»);
канд. физ.-мат. наук, доц. С.А. ВАБИЩЕВИЧ, Н.В. ВАБИЩЕВИЧ
(Полоцкий государственный университет)**

Представлены результаты исследования модификации поверхности пленок полиэтилентерефталата в процессе ионной имплантации ионами Ag и Xe с удельной энергией ~1 МэВ/нуклон в диапазоне доз от $5 \cdot 10^8$ до $1 \cdot 10^{17}$ см⁻². Экспериментально показано, что в процессе имплантации ионами инертных газов с удельной энергией ~1 МэВ/нуклон происходит модификация морфологии поверхности пленок полиэтилентерефталата, выражающаяся в формировании неравномерно распределенных по поверхности конусообразных структур. С увеличением дозы размеры структур (высота и диаметр в основании) увеличиваются, а концентрация их на единицу поверхности снижается. Наблюдаемые при имплантации изменения морфологии поверхности пленок полиэтилентерефталата обусловлены релаксацией напряжений, образовавшихся в процессе изготовления полимерной пленки, и радиационно-химическими процессами в приповерхностном слое полиэтилентерефталата.

Ключевые слова: полиэтилентерефталат, высокоэнергетичная ионная имплантация, атомно-силовая микроскопия, модификация поверхности.

Введение. Трековые мембраны (ТМ) – пористые полимерные пленки с микронными или нанопорами – предназначены для прецизионного фильтрования микро- и наночастиц, включая бактерии и кровяные тельца. Они нашли широкое применение в медицине, в процессах фильтрации воздуха и жидкостей, фармацевтических препаратов и биологических сред, а также в качестве шаблонов для получения наноструктур [1, 2]. Существенное преимущество ТМ как фильтров – одинаковый размер пор, который можно варьировать в широких пределах, изменяя время травления, тип травителя и т.д. [3].

Основным материалом ТМ является полиэтилентерефталат (ПЭТФ). Трековые мембраны на основе ПЭТФ могут использоваться в качестве оптических фильтров для мягкой рентгеновской и жесткой ультрафиолетовой областей спектра с высоким уровнем блокировки ультрафиолетового и видимого фонового излучения. Мембраны на основе ПЭТФ достаточно прочны и термостойки, что позволяет использовать их в бортовой аппаратуре рентгеновских телескопов в условиях открытого космоса на околоземной орбите [4]. Для изготовления ПЭТФ-мембран широко используется облучение ионами благородных газов с удельной энергией в несколько МэВ/нуклон [2, 4].

Полиэтилентерефталат также широко применяется в качестве пленочной основы носителей информации и электроизоляции в конденсаторах.

Целью настоящей работы являлось исследование влияния высокоэнергетичной имплантации инертных газов (Xe, Ar) на рельеф поверхности пленок полиэтилентерефталата.

Методика эксперимента. Пленки ПЭТФ толщиной 40 ± 2 мкм имплантировались ионами Ag и Xe с удельной энергией ~1 МэВ/нуклон и дозами (Ф) от $5 \cdot 10^8$ до $1 \cdot 10^{17}$ см⁻² при комнатной температуре на импульсном циклотроне ИЦ-9. Проецированный пробег (R_p) ионов составлял ~ 20 мкм. Плотность ионного тока варьировалась в интервале от 0,3 до 2,5 мкА/см². Морфология поверхности полимерной пленки исследовалась методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) при комнатной температуре в полуконтактном резонансном режиме на частоте 145 кГц на установке Solver P-47. Использовались кантилеверы серии NSG 01 с радиусом закругления 10 нм. Выбранная для характеристики поверхности величина шероховатости поверхности (R_a) (далее, шероховатость) определялась как среднее арифметическое значение высоты микронеоднородностей, измеренное от средней плоскости профиля, определенной методом наименьших квадратов, в пределах заданной плоскости с областью сканирования 20×20 мкм и проведенными не менее пяти раз измерениями на одном образце.

Экспериментальные результаты и их обсуждение. Рельеф исходной неимплантированной поверхности пленки достаточно гладкий (рисунок 1), средняя шероховатость R_a не превышает 2 нм. На

рисунках 2 и 3 приведены типичные АСМ 3D-изображения поверхностей пленок ПЭТФ, имплантированных ионами инертных газов с удельной энергией 1 МэВ/нуклон. В имплантированных дозой от $5 \cdot 10^8$ до $5 \cdot 10^{15}$ см⁻² образцах АСМ-изображения как имплантированной, так и неимплантированной (обратной) поверхностей ПЭТФ пленки существенно не отличались. На них наблюдались хаотично расположенные конусообразные структуры высотой до 70 нм и диаметром в основании до 100–200 нм (см. рисунок 2). Шероховатость при этом изменяется незначительно. С увеличением дозы размеры структур (высота и диаметр в основании) увеличиваются, а концентрация их на единицу поверхности снижается, что видно из рисунка 2, б и рисунков 3, а и б. Так, если при $\Phi = 5 \cdot 10^8$ см⁻² плотность конусообразных структур составляла ~ 10 мкм⁻², высота – менее 10 нм, а диаметр в основании ~ 50 нм (см. рисунок 2, а), то при $\Phi = 1 \cdot 10^{17}$ см⁻² плотность снижалась до $(5\text{--}10) \cdot 10^{-2}$ мкм⁻² при среднем диаметре в основании около 400 нм (рисунок 3, б). Однако в отличие от имплантации ионами с энергией 30–100 кэВ [5] перекрытия указанных структур и образования на поверхности сплошной лабиринтоподобной структуры не наблюдалось.

На имплантированной поверхности помимо конусообразных структур наблюдалось формирование волнистой поверхности с периодом ~ 1 мкм и высотой около 20–30 нм (см. рисунок 1, в). Формирование «волн» при имплантации может быть связано с частичной ориентацией и кристаллизацией полимерной пленки в процессе изготовления. С другой стороны, при облучении полимеров имеет место высокая локальная неоднородность процессов радиационно-индуцированной деструкции и сшивания полимеров [6]. Радиационные эффекты наиболее интенсивно проявляются в аморфных областях [6], что при облучении частично ориентированных полимеров может приводить к формированию «волн» на поверхности.

Конусообразные структуры наблюдались ранее не только при ионной имплантации, но и при других видах высокоэнергетического воздействия, например, при γ -облучении полимеров [7]. Кроме того, они могут формироваться за пределами области высокоэнергетического воздействия. Так, в работе [8] при облучении пленок ПЭТФ толщиной 3,8 мкм вакуумно-ультрафиолетовым излучением в спектральном диапазоне 115–135 нм наблюдалось формирование подобных конусообразных структур на обратной (необлучаемой) стороне пленки. В настоящей работе также наблюдалась радиационная модификация поверхности далеко за областью пробега ионов – на обратной (неимплантированной) стороне пленки ПЭТФ на расстоянии ~ 20 мкм от области пробега ионов.

Объяснить формирование конусообразных структур можно принимая во внимание особенности молекулярной структуры и специфику радиационного воздействия на полимеры. При высокоэнергетическом воздействии происходит процесс ионизации, заключающийся в удалении электрона с определенной молекулярной орбитали и формировании так называемой «дырки». В макромолекулах следует учитывать возможность образования делокализованных ионизированных состояний с эффективным размером, существенно превышающим размер элементарного звена, и возможность быстрой (недиффузионной) миграции «дырки» по цепочке макромолекул на значительные в молекулярном масштабе расстояния. Такое же рассмотрение применимо и к возбужденным состояниям. Первичные физические процессы (ионизация или возбуждение) и следующие за ними химические изменения (разрыв связи, деструкция) могут быть разделены существенным расстоянием вследствие эффективной миграции «дырок» и переноса возбуждения [9]. Формирование «конусов» вне пределов зоны высокоэнергетического воздействия обусловлено переносом возбуждения и/или миграции «дырки».

В полимерах возможны различные механизмы передачи энергии: в виде упругих волн (колебаний атомов) или посредством передачи энергии возбуждения молекул по электронной подсистеме. При этом наличие длинных цепочек и периодичность структуры полимеров способствует передаче энергии из области проецированного пробега ионов на сравнительно большие расстояния. Прямое воздействие ионов на полимер, а также нейтрализация разноименно заряженных ионов и рекомбинация свободных радикалов в треке иона приводят к образованию молекул в возбужденном состоянии. Перенос энергии возбуждения возможен на значительные расстояния вглубь полимера. Оценки показывают, что средний «пробег» электронного возбуждения по алифатической цепочке составляет более 100 связей С–С [10]. Однако, данные расстояния существенно меньше, чем толщина исследуемых пленок (40–50 мкм). Поэтому корректно объяснить радиационно-стимулированные процессы на обратной стороне пленки передачей энергии возбуждения электронной подсистемы молекул не представляется возможным. Вероятнее всего, энергия из области пробега ионов на обратную сторону пленки передается с помощью упругих волн, которые могут распространяться по цепочке молекул либо по границам раздела фаз.

Следует учитывать микрофазную неоднородность (микрогетерогенность) макроструктуры полимера [9]. При этом возможен перенос электрона или «дырки» через границу раздела фаз, что может привести к локализации радиационных повреждений в определенных микрообластях системы или вблизи раздела фаз [9]. Конусообразные структуры на поверхности полимера могут, на наш взгляд, являться проявлением такой локализации радиационно-индуцированной модификации полимеров, приводящей к локальному хаотичному вспучиванию поверхности материала. Косвенным подтверждением этого предположения может служить скопление конусообразных структур вблизи дефектов поверхности, наблюдавшееся в [7].

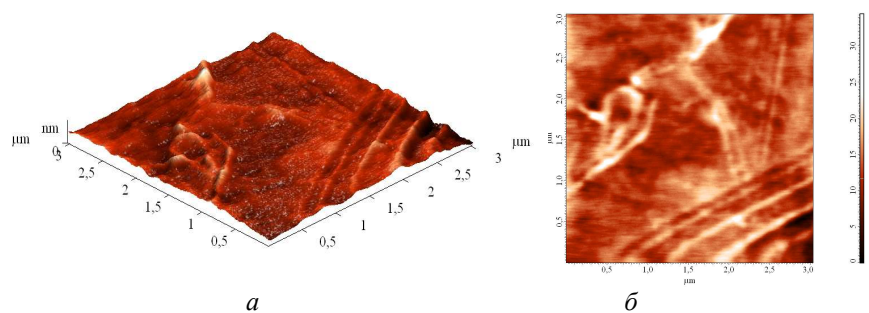


Рисунок 1. – Характерные АСМ-изображения исходного ПЭТФ в режимах топографии (а) и фазового контраста (б)

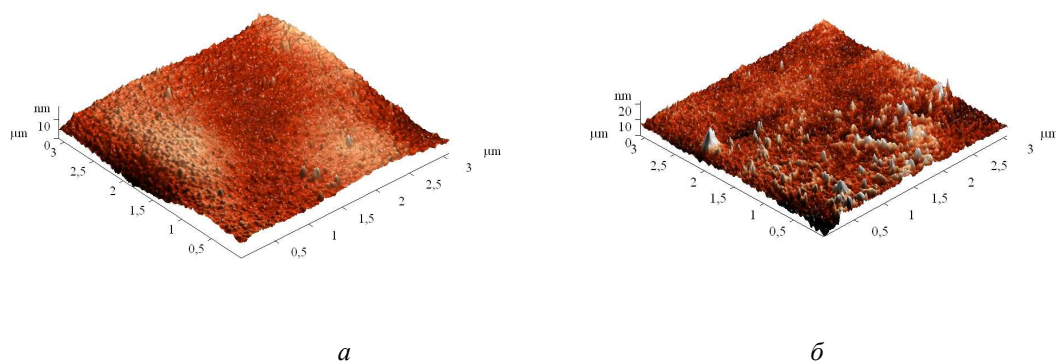


Рисунок 2. – Атомно-силовая микроскопия 3D-изображения поверхностей пленок ПЭТФ, имплантированных ионами Хе с удельной энергией 1 МэВ/нуклон. Доза, см⁻²: а – $5 \cdot 10^8$; б – $1 \cdot 10^{12}$

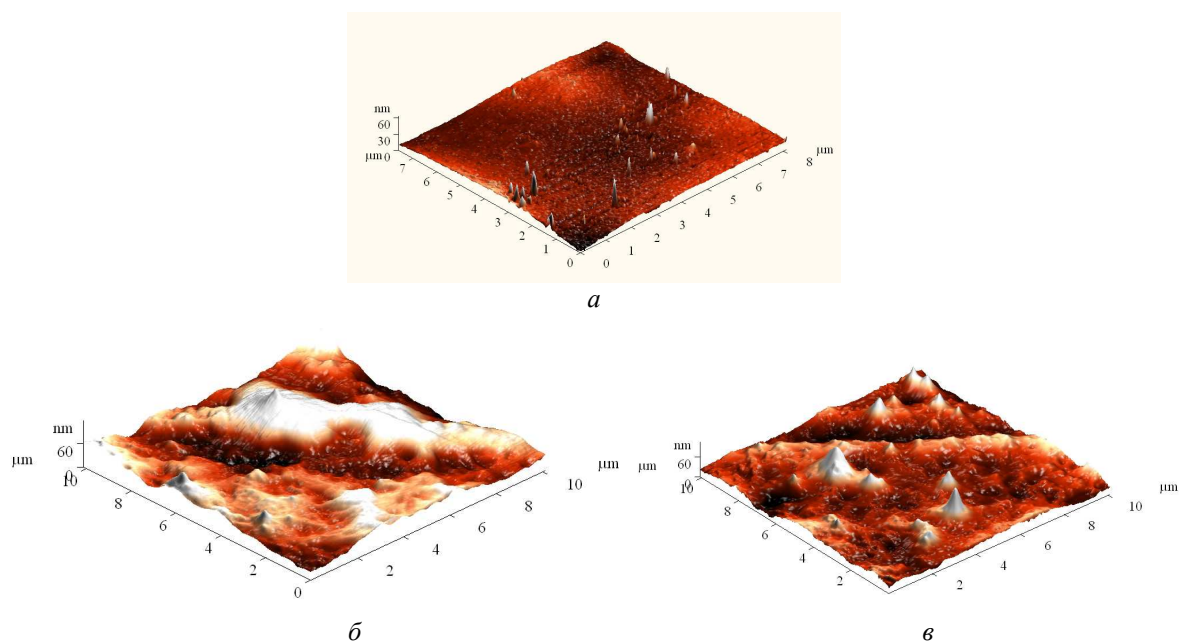


Рисунок 3 – Атомно-силовая микроскопия 3D-изображения поверхностей пленок ПЭТФ, имплантированных ионами Аг с удельной энергией 1 МэВ/нуклон. Доза, см⁻²: а – $1 \cdot 10^{14}$; б – $5 \cdot 10^{16}$; в – $1 \cdot 10^{17}$

Возможен также и другой подход к объяснению возникновения конусообразных структур на поверхности облученных полимеров, который дополняет изложенное выше и позволяет оценить размер конусообразных структур. Этот подход предполагает наличие локальных упругих напряжений сжатия в полимере, например, у границы раздела микрофаз либо вблизи крупных структурных дефектов.

Плотность упругой энергии в сжатом материале [11]

$$\omega = \frac{p^2}{2E},$$

где p – напряжение;
 E – модуль упругости.

При релаксации напряжений сжатия может происходить формирование конуса. Будем считать упругие напряжения сферическими с радиусом r , то при образовании конуса освобождается упругая энергия равная

$$-\Delta W_{\text{упр}} \approx \omega r^3 = \frac{p^2 r^3}{2E}.$$

Требуемая работа по созданию новой поверхности площадью $\sim l^2$ составляет

$$\Delta W_{\text{нов}} \approx \sigma l^2,$$

где σ – поверхностная энергия;
 l – радиус конуса в основании.

Изменение энергии системы $\Delta W = \Delta W_{\text{нов}} + \Delta W_{\text{упр}} \approx \sigma l^2 - \frac{p^2 r^3}{2E}$. Предполагая полную релаксацию $\Delta W = 0$, можно оценить размеры формирующихся конусов в основании

$$l \approx \frac{pr^{3/2}}{\sqrt{2E\sigma}}. \quad (1)$$

Таким образом, размеры формирующихся конусов прямо пропорциональны величине напряжений сжатия и размерам напряженной области в степени 3/2.

Согласно формуле (1), нами была проведена оценка величины напряжений сжатия p , необходимой для формирования экспериментально наблюдавшихся конусообразных структур. Для расчета этих напряжений использовались значения модуля упругости E и поверхностной энергии σ для пленок ПЭТФ из [12]. Оказалось, что для формирования экспериментально наблюдавшихся конусообразных структур с диаметром в основании ~ 200 мкм достаточны упругие напряжения в пределах 0,1–1 МПа. Отметим, что такие значения напряжений характерны для пленок, полученных методом экструзии [13].

Высокоэнергетическое облучение выступает в данном случае в качестве лишь «спускового крючка» для высвобождения энергии, запасенной в деформированных областях полимера. Поэтому такие процессы могут протекать далеко за пределами области высокоэнергетического воздействия.

Такой подход способен с высокой степенью достоверности описать формирование конусообразных структур за пределами области высокоэнергетического воздействия. В области имплантации картина усложняется. Вследствие высокой локальной неоднородности процессов радиационно-индуцированной модификации полимеров в процессе их облучения возможна как релаксация существующих, так и формирование новых полей упругих напряжений, что должно приводить к трансформации конусообразных структур в процессе облучения.

Заключение. Таким образом, экспериментально показано, что в процессе имплантации ионами инертных газов с удельной энергией ~ 1 МэВ/нуклон происходит модификация морфологии поверхности пленок полиэтилентерефталата, выражающаяся в формировании неравномерно распределенных по поверхности конусообразных структур. С увеличением дозы размеры структур – высота и диаметр в основании – увеличиваются, а концентрация их на единицу поверхности снижается. Наблюдаемые при имплантации изменения морфологии поверхности ПЭТФ обусловлены релаксацией напряжений, образовавшихся в процессе изготовления полимерной пленки, и радиационно-химическими процессами в приповерхностном слое полиэтилентерефталата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мембраны и нанотехнологии // В.В.Волков [и др.] / Российские нанотехнологии. – 2008. – Т. 3, № 11-12. – С. 67–99.

2. Кирш, Ю.Э. Полимерные мембраны как химические гетерогенные каналы наноструктуры / Ю.Э. Кирш, С.Ф. Тимашев // Крит. технологии. Мембраны. – 1999. – № 1. – С. 15–46.
3. Особенности разрушения трековых мембран и композитов полимер-металл на их основе методом шаблонного синтеза / В.Н. Гумирова [и др.] // Физика твердого тела. – 2015. – Т. 57, № 2. – С. 328–331.
4. Дифракционные фильтры на основе полиимидных и полиэтиленнафталатных трековых мембран / А.В. Митрофанов [и др.] // Журнал технической физики. – 2006. – Т. 76, № 9. – С. 121–127.
5. Радиационная модификация поверхности полимеров / А.А. Харченко [и др.] // Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед. – 2015. – № 4. – С. 60–65.
6. Грасси, Н. Деструкция и стабилизация полимеров / Н. Грасси, Дж. Скотт. – М.: Мир, 1988. – 246 с.
7. Модификация приповерхностной области пленки полиимида имплантацией ионов бора / А.А. Харченко [и др.] // Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед. – 2015. – № 1. – С. 94–99.
8. Исследование поверхности пленок из полиэтилентерефталата, модифицированных вакуумно-ультрафиолетовым облучением на воздухе / А.В. Митрофанов [и др.] // Поверхность. – 2009. – № 7. – С. 30–38.
9. Экспериментальные методы химии высоких энергий / под общ. ред. М.Я. Мельникова. – М.: МГУ, 2009. – С. 169–178.
10. Светочувствительные полимерные материалы / под ред. А.В. Ельцова. – Л.: Химия, 1985. – 296 с.
11. Щукин, Е.Д. Влияние активной среды на механическую устойчивость и повреждаемость поверхности твердого тела / Е.Д. Щукин // Вестник МГУ. Сер. 2. Химия. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 50–72.
12. Энциклопедия полимеров. – М.: Сов. Энциклопедия, 1977. – Т. 3. – 575 с.
13. Расчетно-экспериментальное исследование формирования структуры термоэлектрического материала на основе твердых растворов халькогенидов висмута и сурьмы, полученных методом горячей экструзии / М.Г. Лаврентьев [и др.] // Термоэлектричество. – 2012. – № 4. – С. 36–42.

Поступила 16.03.2018

**MODIFICATION OF THE POLYETHYLENE TEREPHTHALATE FILMS
SURFACE IN IMPLANTATION BY HIGH-ENERGY IONS OF INERT
GASES WITH SPECIFIC ENERGY 1 MeV/ NUCLEON**

**V.I. GOLOVCHUK, D.I. BRINKEVICH, M.G. LUKASHEVICH,
V.B. ODZHAEV, V.S. PROSOLOVICH, A.A. KHARCHENKO,
S.A. VABISHCHEVICH, N.V. VABISHCHEVICH**

The results of a study of the modification of the surface of polyethylene terephthalate films during ion implantation with Ar and Xe ions 108-with specific energy ~ 1 MeV/nucleon in the dose range (F) from $5 \cdot 10^8$ to $1 \cdot 10^{17}$ cm⁻² are presented. It has been experimentally shown that during the implantation with ions of inert gases with a specific energy of ~ 1 MeV/ nucleon, the morphology of the surface of polyethylene terephthalate films is modified, which is manifested in the formation of nonuniformly distributed cone-shaped structures over the surface. As the dose increases, the dimensions of the structures - the height and diameter at the base - increase, and their concentration per unit surface decreases. Changes in the morphology of the polyethylene terephthalate films surface observed during implantation are due to relaxation of stresses formed during the manufacture of the polymer film and radiation-chemical processes in the near-surface layer of polyethylene terephthalate.

Keywords: polyethylene terephthalate, high-energy ion implantation, atomic force microscopy, surface modification.

УДК 539.21

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В НАНОЗЕРНЕ, ОБУСЛОВЛЕННОГО НАНОДВОЙНИКОВАНИЕМ

Т.В. ДРОБЫШЕВСКАЯ, канд. физ.-мат. наук **О.М. ОСТРИКОВ**
(Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого)

Разработана методика расчета полей смещений и напряжений в нанозерне при наличии в нем нанодвойника. Изучено напряженное состояние в нанозерне, имеющем форму правильного многоугольника и содержащем нанодвойник. Определены точки концентрации напряжений в зерне наноматериала. Проанализирована зависимость напряжений от параметров двойника.

Ключевые слова: наноматериалы, нанозерно, зернограничные дислокации, двойникующие дислокации, нанодвойникование.

Введение. Наноматериалы – ультрамелкозернистые поликристаллические материалы [1]. Широкое использование наноструктурных металлов и сплавов в качестве конструкционных и функциональных материалов в настоящее время сдерживается из-за их особенных свойств. Так, наряду с высокой прочностью и твердостью наноструктурные металлы обладают очень низкой пластичностью, что создает существенные препятствия для их применения в конструкциях деталей машин [2]. Повышение пластичности наноструктурных материалов может быть достигнуто за счет искусственного нанодвойникования. Благодаря чему наноматериалы (металлы) приобретают высокие показатели механических свойств, позволяющие существенно расширить их область применения [1]. При этом проанализировать приобретаемые в результате нанодвойникования структуры и свойства нанометаллов можно путем изучения напряженно-деформированного состояния зерна наноматериала (металла), содержащего нанодвойники.

Цель данной работы – изучение напряженно-деформированного состояния в зерне наноструктурного материала, обусловленного нанодвойникованием.

Рассмотрим представленное на рисунке 1 единичное зерно наноматериала. Данное наноразмерное зерно имеет вид n -угольника и содержит в своем объеме единичный нанодвойник. В рассматриваемом случае границы зерна смоделированы в виде стенки полных дислокаций, а границы двойника в виде цепочки частичных дислокаций. Зернограничные и двойникующие дислокации в рамках изучаемой задачи в пределах каждой отдельной границы параллельны оси OZ (рисунок 2).

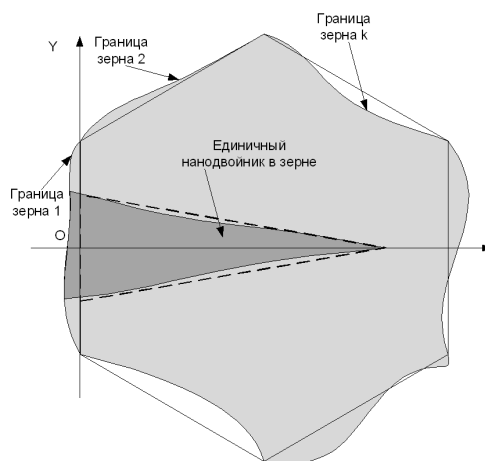


Рисунок 1. – Схематическое изображение единичного зерна наноматериала, содержащего единичный нанодвойник

В рамках проводимого исследования примем, что рассматриваемое нанозерно расположено на некотором расстоянии от поверхности материала. Кроме того, при расчете напряженно-деформированного состояния зерна не будем учитывать никакие напряжения кроме напряжений, обусловленных зернограничными и двойникующими дислокациями [3].

В соответствии с поставленной задачей и принятыми условиями, с учетом методик, описанных в [4, 5], смещения и напряжения, создаваемые двойниковыми и зерненными границами определяем путем суммирования

смещений и напряжений, создаваемых отдельными дислокациями $\left(u_i^{(m)} \right)_{tw}$, $\left(\sigma_{ij}^{(m)} \right)_{tw}$, $\left(u_l^{(k)} \right)_b$, $\left(\sigma_{lw}^{(k)} \right)_b$:

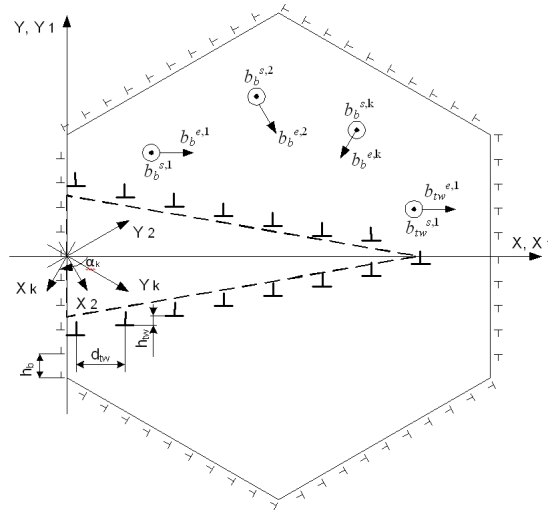


Рисунок 2. – Взаимное расположение зернограницных и двойнивающих дислокаций и их компонент вектора Бюргерса

$$u_i = (u_i)_{tw}(x, y) + (u_i)_b(x, y), \quad (1)$$

$$(u_i)_{tw}(x, y) = \sum_{r=0}^{N_{tw}} (u_i^{(1)})_{tw}(x - rd_{tw}, y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw}) + \sum_{r=0}^{N_{tw}} (u_i^{(2)})_{tw}(x - rd_{tw}, y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw}), \quad (2)$$

$$(u_i)_b(x, y) = \sum_{k=1}^n \sum_l T_{il} \sum_{r=0}^{N_b-1} (u_l^{(k)})_b(x'_k, y'_k - rh_b); \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})_{tw}(x, y) + (\sigma_{ij})_b(x, y), \quad (4)$$

$$(\sigma_{ij})_{tw}(x, y) = \sum_{r=0}^{N_{tw}} (\sigma_{ij}^{(1)})_{tw}(x - rd_{tw}, y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw}) + \sum_{r=0}^{N_{tw}-1} (\sigma_{ij}^{(2)})_{tw}(x - rd_{tw}, y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw}), \quad (5)$$

$$(\sigma_{ij})_b(x, y) = \sum_{k=1}^n \sum_{l,w} T_{il} T_{jw} \sum_{r=0}^{N_b-1} (\sigma_{lw}^{(k)})_b(x'_k, y'_k - rh_b); \quad (6)$$

где i и j – индексы, принимающие значения x, y или z ; l и w – индексы, принимающие значения x'_k, y'_k или z'_k ; k – номер зеренной границы; m – номер двойниковой границы; $(u_i)_{tw}(x, y), (\sigma_{ij})_{tw}(x, y)$ – смещения и напряжения, создаваемые двойнивающими дислокациями; $(u_i)_b(x, y), (\sigma_{ij})_b(x, y)$ – смещения и напряжения, создаваемые зернограницными дислокациями; N_{tw}, N_b – количество двойнивающих и зернограницных дислокаций, расположенных на отдельной границе (двойника либо зерна); d_{tw}, h_{tw}, h_b – параметры, характеризующие взаимное расположение дислокаций (см. рисунок 2); системы координат XYZ и $X'_k Y'_k Z'$ (см. рисунок 2) – системы координат, используемые в расчетах; T_{il}, T_{jw} – элементы матрицы преобразования [6].

В данном случае рассматриваем поворот правосторонней системы координат XYZ вокруг оси Z по часовой стрелке на угол α_k (см. рисунок 2). При этом матрица преобразования принимает вид [6]

$$T = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_k) & \sin(\alpha_k) & 0 \\ -\sin(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В соответствии с представленными на рисунке 2 системами координат и ориентировками векторов Бюргерса, а также с [3, 6], дальнейшие расчеты проводим следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (u_x)_{tw}(x, y) &= \sum_{r=0}^{N_{tw}} \frac{b_{tw}^e}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw}}{x - rd_{tw}} + \frac{(y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw})(x - rd_{tw})}{2(1-\nu)((y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw})^2 + (x - rd_{tw})^2)} \right] + \\
 &+ \sum_{r=0}^{N_{tw}-1} \frac{b_{tw}^e}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw}}{x - rd_{tw}} + \frac{(y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw})(x - rd_{tw})}{2(1-\nu)((y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw})^2 + (x - rd_{tw})^2)} \right]; \\
 (u_y)_{tw}(x, y) &= - \sum_{r=0}^{N_{tw}} \frac{b_{tw}^e}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{2\pi} \ln((y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw})^2 + (x - rd_{tw})^2) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(x - rd_{tw})^2 - (y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw})^2}{4(1-\nu)((y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw})^2 + (x - rd_{tw})^2)} \right] - \\
 &- \sum_{r=0}^{N_{tw}-1} \frac{b_{tw}^e}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{2\pi} \ln((y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw})^2 + (x - rd_{tw})^2) + \frac{(x - rd_{tw})^2 - (y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw})^2}{4(1-\nu)((y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw})^2 + (x - rd_{tw})^2)} \right]; \\
 (u_z)_{tw}(x, y) &= \sum_{r=0}^{N_{tw}} \frac{b_{tw}^s}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw}}{x - rd_{tw}} + \sum_{r=0}^{N_{tw}-1} \frac{b_{tw}^s}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw}}{x - rd_{tw}}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (u_x)_b(x, y) &= \sum_{k=1}^n \cos(\alpha_k) \sum_{r=0}^{N_b-1} \frac{b_b^e}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{y'_k - rh_b}{x'_k} + \frac{(y'_k - rh_b)x'_k}{2(1-\nu)((y'_k - rh_b)^2 + x_k'^2)} \right] + \\
 &+ \sum_{k=1}^n \sin(\alpha_k) \sum_{r=0}^{N_b-1} \frac{b_b^e}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{2\pi} \ln((y'_k - rh_b)^2 + x_k'^2) + \frac{x_k'^2 - (y'_k - rh_b)^2}{4(1-\nu)((y'_k - rh_b)^2 + x_k'^2)} \right]; \\
 (u_y)_b(x, y) &= \sum_{k=1}^n (-\sin(\alpha_k)) \sum_{r=0}^{N_b-1} \frac{b_b^e}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{y'_k - rh_b}{x'_k} + \frac{(y'_k - rh_b)x'_k}{2(1-\nu)((y'_k - rh_b)^2 + x_k'^2)} \right] + \\
 &+ \sum_{k=1}^n \cos(\alpha_k) \sum_{r=0}^{N_b-1} \frac{b_b^e}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{2\pi} \ln((y'_k - rh_b)^2 + x_k'^2) + \frac{x_k'^2 - (y'_k - rh_b)^2}{4(1-\nu)((y'_k - rh_b)^2 + x_k'^2)} \right]; \\
 (u_z)_b(x, y) &= \sum_{k=1}^n \sum_{r=0}^{N_b-1} \frac{b_b^s}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y'_k - rh_b}{x'_k}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$(\sigma_{xx})_{tw} = - \sum_{r=0}^{N_{tw}} \frac{\mu b_{tw}^e}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw})[3(x - rd_{tw})^2 + (y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw})^2]}{[(x - rd_{tw})^2 + (y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw})^2]^2} -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{r=0}^{N_{tw}-1} \frac{\mu b_{tw}^e}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw}) \left[3(x - rd_{tw})^2 + (y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw})^2 \right]}{\left[(x - rd_{tw})^2 + (y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw})^2 \right]^2}; \\
(\sigma_{yy})_{tw} &= \sum_{r=0}^{N_{tw}} \frac{\mu b_{tw}^e}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw}) \left[(x - rd_{tw})^2 - (y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw})^2 \right]}{\left[(x - rd_{tw})^2 + (y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw})^2 \right]^2} + \\
& + \sum_{r=0}^{N_{tw}-1} \frac{\mu b_{tw}^e}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw}) \left[(x - rd_{tw})^2 - (y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw})^2 \right]}{\left[(x - rd_{tw})^2 + (y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw})^2 \right]^2}; \\
(\sigma_{zz})_{tw} &= - \sum_{r=0}^{N_{tw}} \frac{\mu b_{tw}^e \nu}{\pi(1-\nu)} \frac{y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw}}{(x - rd_{tw})^2 + (y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw})^2} - \sum_{r=0}^{N_{tw}-1} \frac{\mu b_{tw}^e \nu}{\pi(1-\nu)} \frac{y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw}}{(x - rd_{tw})^2 + (y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw})^2}; \\
(\sigma_{xy})_{tw} &= \sum_{r=0}^{N_{tw}} \frac{\mu b_{tw}^e}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x - rd_{tw}) \left[(x - rd_{tw})^2 - (y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw})^2 \right]}{\left[(x - rd_{tw})^2 + (y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw})^2 \right]^2} + \\
& + \sum_{r=0}^{N_{tw}-1} \frac{\mu b_{tw}^e}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x - rd_{tw}) \left[(x - rd_{tw})^2 - (y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw})^2 \right]}{\left[(x - rd_{tw})^2 + (y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw})^2 \right]^2}; \\
(\sigma_{zx})_{tw} &= - \sum_{r=0}^{N_{tw}} \frac{\mu b_{tw}^s}{2\pi} \frac{y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw}}{(x - rd_{tw})^2 + (y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw})^2} - \sum_{r=0}^{N_{tw}-1} \frac{\mu b_{tw}^s}{2\pi} \frac{y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw}}{(x - rd_{tw})^2 + (y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw})^2}; \\
(\sigma_{zy})_{tw} &= \sum_{r=0}^{N_{tw}} \frac{\mu b_{tw}^s}{2\pi} \frac{x - rd_{tw}}{(x - rd_{tw})^2 + (y + N_{tw}h_{tw} - rh_{tw})^2} + \sum_{r=0}^{N_{tw}-1} \frac{\mu b_{tw}^s}{2\pi} \frac{x - rd_{tw}}{(x - rd_{tw})^2 + (y - N_{tw}h_{tw} + rh_{tw})^2}. \quad (10) \\
(\sigma_{xx})_b &= - \sum_{k=1}^n \cos^2(\alpha_k) \sum_{r=0}^{N_b-1} \frac{\mu b_b^e}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y'_k - rh_b) \left[3x_k'^2 + (y'_k - rh_b)^2 \right]}{\left[x_k'^2 + (y'_k - rh_b)^2 \right]^2} + \\
& + \sum_{k=1}^n \sin^2(\alpha_k) \sum_{r=0}^{N_b-1} \frac{\mu b_b^e}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y'_k - rh_b) \left[x_k'^2 - (y'_k - rh_b)^2 \right]}{\left[x_k'^2 + (y'_k - rh_b)^2 \right]^2} + \sum_{k=1}^n \sin(2\alpha_k) \sum_{r=0}^{N_b-1} \frac{\mu b_b^e}{2\pi(1-\nu)} \frac{x'_k \left[x_k'^2 - (y'_k - rh_b)^2 \right]}{\left[x_k'^2 + (y'_k - rh_b)^2 \right]^2}; \\
(\sigma_{yy})_b &= - \sum_{k=1}^n \sin^2(\alpha_k) \sum_{r=0}^{N_b-1} \frac{\mu b_b^e}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y'_k - rh_b) \left[3x_k'^2 + (y'_k - rh_b)^2 \right]}{\left[x_k'^2 + (y'_k - rh_b)^2 \right]^2} + \\
& + \sum_{k=1}^n \cos^2(\alpha_k) \sum_{r=0}^{N_b-1} \frac{\mu b_b^e}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y'_k - rh_b) \left[x_k'^2 - (y'_k - rh_b)^2 \right]}{\left[x_k'^2 + (y'_k - rh_b)^2 \right]^2} - \sum_{k=1}^n \sin(2\alpha_k) \sum_{r=0}^{N_b-1} \frac{\mu b_b^e}{2\pi(1-\nu)} \frac{x'_k \left[x_k'^2 - (y'_k - rh_b)^2 \right]}{\left[x_k'^2 + (y'_k - rh_b)^2 \right]^2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sigma_{zz})_b &= -\sum_{k=1}^n \sum_{r=0}^{N_b-1} \frac{\mu b_b^e v}{\pi(1-v)} \frac{y_k' - rh_b}{x_k'^2 + (y_k' - rh_b)^2}; \\
(\sigma_{xy})_b &= \sum_{k=1}^n \cos(\alpha_k) \sin(\alpha_k) \frac{\mu b_b^e}{2\pi(1-v)} \frac{(y_k' - rh_b) \left[3x_k'^2 + (y_k' - rh_b)^2 \right]}{\left[x_k'^2 + (y_k' - rh_b)^2 \right]^2} + \\
&+ \sum_{k=1}^n \cos(\alpha_k) \sin(\alpha_k) \sum_{r=0}^{N_b-1} \frac{\mu b_b^e}{2\pi(1-v)} \frac{(y_k' - rh_b) \left[x_k'^2 - (y_k' - rh_b)^2 \right]}{\left[x_k'^2 + (y_k' - rh_b)^2 \right]^2} + \sum_{k=1}^n \cos(2\alpha_k) \sum_{r=0}^{N_b-1} \frac{\mu b_b^e}{2\pi(1-v)} \frac{x_k' \left[x_k'^2 - (y_k' - rh_b)^2 \right]}{\left[x_k'^2 + (y_k' - rh_b)^2 \right]^2}; \\
(\sigma_{zx})_b &= -\sum_{k=1}^n \cos(\alpha_k) \sum_{r=0}^{N_b-1} \frac{\mu b_b^e}{2\pi} \frac{(y_k' - rh_b)}{\left[x_k'^2 + (y_k' - rh_b)^2 \right]} + \sum_{k=1}^n \sin(\alpha_k) \sum_{r=0}^{N_b-1} \frac{\mu b_b^e}{2\pi} \frac{x_k'}{\left[x_k'^2 + (y_k' - rh_b)^2 \right]}; \\
(\sigma_{zy})_b &= \sum_{k=1}^n \sin(\alpha_k) \sum_{r=0}^{N_b-1} \frac{\mu b_b^e}{2\pi} \frac{(y_k' - rh_b)}{\left[x_k'^2 + (y_k' - rh_b)^2 \right]} + \sum_{k=1}^n \cos(\alpha_k) \sum_{r=0}^{N_b-1} \frac{\mu b_b^e}{2\pi} \frac{x_k'}{\left[x_k'^2 + (y_k' - rh_b)^2 \right]}. \quad (11)
\end{aligned}$$

Здесь v – коэффициент Пуассона; μ – модуль сдвига; b_{tw}^e – модуль краевой составляющей вектора Бюргера двойнивающей дислокации; b_{tw}^s – модуль винтовой составляющей вектора Бюргера двойнивающей дислокации; b_b^e – модуль вектора Бюргера полной краевой дислокации; b_b^s – модуль вектора Бюргера полной винтовой дислокации.

Границы двойника и зерна принимаем прямолинейными, а дислокации на рассматриваемых границах равноудаленными друг от друга. Тогда координаты в системах $X_k'Y_k'Z$ и координаты границ зерен в данных системах координат определяем в соответствии с выражением (4):

$$x_k' = x \cdot \cos(\alpha_k) - y \cdot \sin(\alpha_k), \quad (12)$$

$$y_k' = x \cdot \sin(\alpha_k) + y \cdot \cos(\alpha_k). \quad (13)$$

Результаты расчетов и их обсуждение. В качестве базового варианта для исследования было принято шестиугольное наноразмерное зерно, содержащее в своем теле единичный нанодвойник, материал – железо (Fe). Для расчетов принимались следующие параметры: $b_b^e = b_b^s = 0,248$ нм; $b_{tw}^e = b_{tw}^s = 0,124$ нм [7]; $\mu = 81$ ГПа [6]; $v = 0,29$ [7]. Базовые параметры зерна и двойника: $N_{tw} = 35$, $h_{tw} = 2b_{tw}^e = 0,248$ нм; $d_{tw} = 1,736$ нм; $N_b = 32$, $h_b = 1,736$ нм.

Анализ напряженного состояния был проведен на базе анализа гидростатических σ_h (рисунок 3, а), нормальных σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , комбинированных касательных напряжений τ (рисунок 3, б), а также касательных напряжений σ_{xy} (рисунок 3, в), σ_{xz} и σ_{yz} . Дополнительные расчеты проводили в соответствии с [7]:

$$\sigma_h = \sum_i \sigma_{ii} / 3, \quad (14)$$

$$\tau = \sqrt{\sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2}. \quad (15)$$

В рассматриваемом случае гидростатические (σ_h) и сдвиговые (σ_{xy}, τ) локализованы на границах элементов системы двойник – зерно. Максимальные гидростатические σ_h и сдвиговые σ_{xy} напряжения наблюдаются у устья двойника, а максимальные комбинированные касательные напряжения τ – в вершинах зерна.

Концентрация гидростатических напряжений σ_h внутри зерна несколько выше нежели за его пределами. В анализируемом поле напряжений имеют место как сжимающие, так и растягивающие напряжения. Однако выявить четкую характеристику знакопеременности напряжений не представляется возможным (см. рисунок 3, а).

Локализация нормальных напряжений σ_{xx} внутри зерна значительно выше, нежели за его пределами. При этом выше оси OX преобладают сжимающие напряжения, а ниже – растягивающие. На участках максимальной концентрации (зеренные и двойниковые границы) напряжения σ_{xx} носят сжимающий характер. При этом максимальные значения σ_{xx} отмечены у устья двойника.

Нормальные напряжения σ_{yy} локализованы на зеренных и двойниковых границах и имеют относительно равномерное распределение внутри зерна и за его пределами. В пределах зерна имеют место как растягивающие (в I и III четвертях относительно осей, проходящих через вершину двойника), так и сжимающие напряжения (соответственно во II и IV четвертях). За пределами зерна преобладают отрицательные значения σ_{yy} . Напряжения на границах двойника и зерна носят сжимающий характер и имеют максимальные значения на границе зерна, к которой прилегает устье двойника.

Концентрация нормальных напряжений σ_{zz} внутри зерна и за его пределами отличается несущественно. При этом выше оси OX напряжения отрицательны, а ниже данной оси – положительны. На границах же зерна и двойника напряжения σ_{zz} , аналогично напряжениям σ_{xx} , σ_{yy} , являются сжимающими, а максимальные значения σ_{zz} соответствуют устью двойника. При этом максимальные напряжения σ_{zz} на порядок ниже максимальных значений σ_{xx} , σ_{yy} .

Комбинированные касательные напряжения τ можно охарактеризовать высокой концентрацией напряжений на зеренных и двойниковых границах, а также в узловых точках. Концентрация напряжений τ за пределами зерна выше концентрации внутри него. При этом максимальные численные значения τ имеют место в вершинах зерна (см. рисунок 3, б).

Распределение напряжений σ_{xz} характеризуется максимальными значениями, соответствующими устью двойника. Преобладающими являются сжимающие напряжения σ_{xz} , они расположены на границах двойника и зерна (места наибольшей локализации σ_{xz}), а также выше оси OX . Ниже оси OX имеют место растягивающие напряжения (кроме границ).

Как было отмечено выше сдвиговые напряжения σ_{yz} имеют максимальную концентрацию на границах двойника и зерна, при этом напряжения носят сжимающий характер. Концентрация данной компоненты тензора напряжений внутри зерна превышает концентрацию за его пределами. При удалении от границ зерна концентрация напряжений σ_{yz} существенно снижается, также снижаются и численные значения напряжений. Максимальные значения σ_{yz} отмечены на границе зерна, к которой прилегает устье двойника.

Сдвиговые напряжения σ_{xy} знакопеременны относительно оси, проходящей параллельно оси OY через середину двойника. Слева от данной оси напряжения σ_{xy} отрицательны, а справа – положительны. В местах локализации σ_{xy} (зеренные и двойниковые границы) преобладают сжимающие напряжения, максимальные их значения можно отметить на границе, к которой прилегает устье двойника (см. рисунок 3, в).

В рамках данного исследования также были проведены расчеты полей напряжений для пятиугольного и семиугольного зерен. Результаты свидетельствуют о том, что форма зерна не существенно влияет на характер распределения полей напряжений. В случае пятиугольного и семиугольного зерна аналогично варианту с шестиугольным зерном основные элементы рассматриваемой системы (зеренные и двойниковые границы), являются не только концентраторами напряжений, но соответственно и местом локализации напряжений.

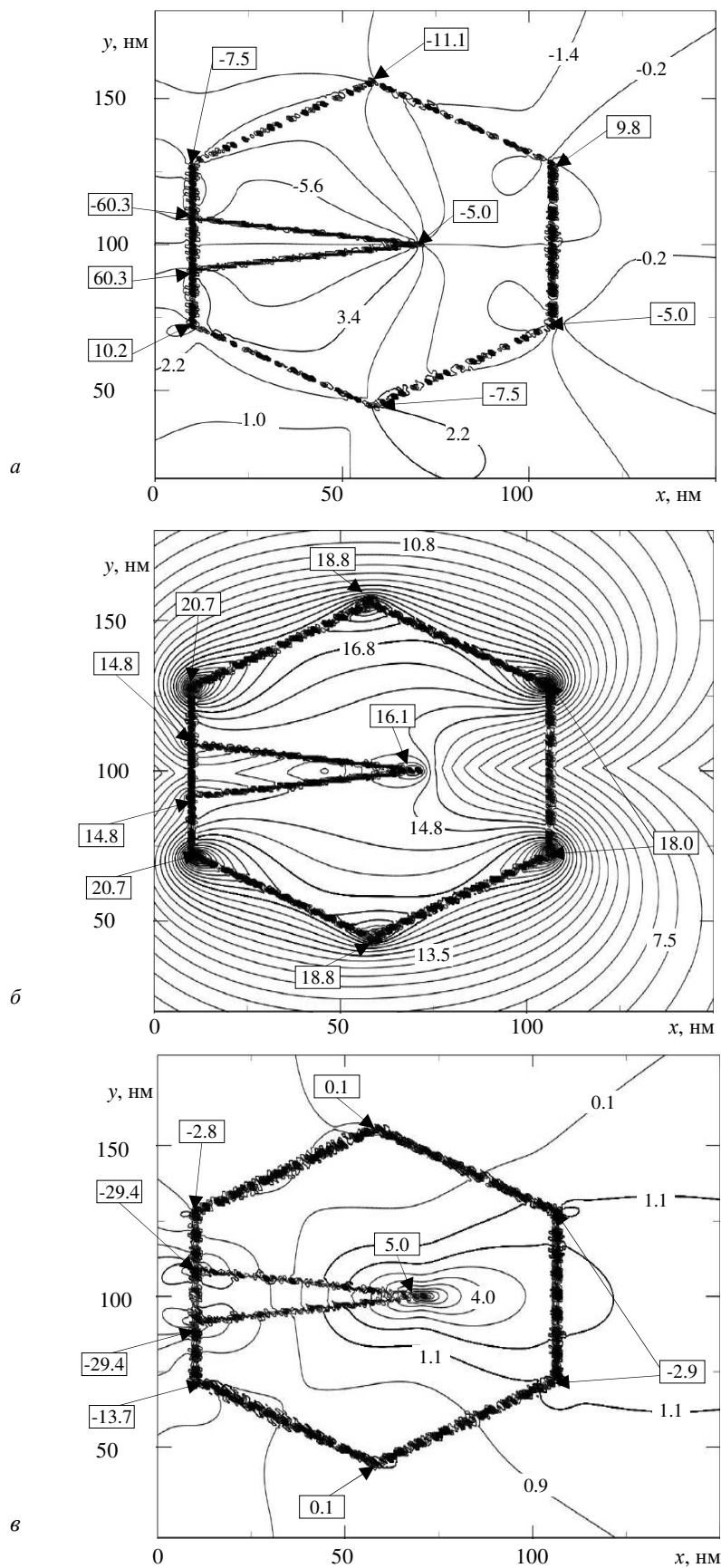


Рисунок 3. – Распределение напряжений в шестиугольном зерне нанокристалла, обусловленных наличием единичного клиновидного нанодвойника

Кроме того, было рассчитано влияние параметров двойника на напряженное состояние в зерне наноматериала. В качестве варьируемых параметров приняты количество дислокаций на границах двойника (N_{tw}) и расстояние между двойническими дислокациями, измеренное вдоль оси OX (d_{tw}).

Так, при увеличении количества двойнических дислокаций ($N_{tw} = 2, 7, 15, 25, 35, 45$) увеличивается концентрация гидростатических напряжений σ_h в пределах зерна, а за его пределами концентрация не изменяется. В отношении гидростатического напряжения σ_h на основных элементах системы можно отметить, что количество двойнических дислокаций N_{tw} оказывает влияние на σ_h только на границе зерна, к которой прилегает устье двойника. При этом характер распределения напряжений на данной границе не изменяется. Имеет место лишь незначительное изменение численных значений σ_h при изменении N_{tw} . На остальных границах зерна количество двойнических дислокаций N_{tw} не оказывает влияние на гидростатическое давление. Следует также отметить отсутствие зависимости напряжений σ_h от количества двойнических дислокаций N_{tw} , измеренное вдоль оси OX .

Анализируя распределение гидростатических напряжений σ_h вдоль границ двойника, можно отметить следующее. Характер распределения анализируемых напряжений не зависит от N_{tw} , лишь размерные характеристики распределения обусловлены длиной двойника и соответственно N_{tw} .

В отношении комбинированных касательных напряжений τ и сдвиговых напряжений σ_{xy} можно отметить, что количество двойнических дислокаций N_{tw} не оказывает существенного влияния на характер распределения полей напряжений. При этом численные значения анализируемых компонент тензора напряжений (σ_{xy} и τ) имеют тенденцию к увеличению при увеличении N_{tw} .

По результатам исследования влияния расстояния между двойническими дислокациями, измеренного вдоль оси OX ($d_{tw} = 0,248; 0,744; 1,240; 1,736; 1,984; 2,232$ нм), можно отметить, что на анализируемые характеристики напряженного состояния (σ_h , τ , σ_{xy}) параметр d_{tw} не оказывает существенного влияния.

Таким образом, изучено напряженно-деформированное состояние в зерне наноструктурного материала, обусловленного нанодвойникованием. Разработана методика расчета полей смещений и напряжений в нанозерне, имеющем форму многоугольника и содержащем в своем теле единичный нанодвойник. Выявлены места концентрации напряжений в нанозерне. Проведен анализ зависимости распределения полей напряжений от параметров нанодвойника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овидько, И.А. Влияние миграции двойниковых границ на трещиностойкость нанодвойникованных металлов / И.А. Овидько, А.Г. Шейнерман // Materials Physics and Mechanics. – 2014. – № 21. – С. 248–258.
2. Объемные наноструктурные металлы и сплавы с уникальными механическими свойствами для перспективных применений / Р.З. Валиев [и др.] // Вестник УГАТУ. – 2006. – № 3. – С. 23–34.
3. Дробышевская, Т.В. Задача о расчете напряженно-деформированного состояния, обусловленного единичным некогерентным двойником в пяти-, шести- и семиградном зерне поликристалла с гексагональной структурой / Т.В. Дробышевская, О.М. Остриков // Физ. мезомех. – 2015. – Т. 18. – № 2. – С. 79–88.
4. Остриков, О.М. Механика двойникования твердых тел : моногр. / О.М. Остриков. – Гомель : ГГТУ им. П.О. Сухого, 2008. – 301 с.
5. Остриков, О.М. Поле упругих деформаций и смещений в системе «Клиновидный нанодвойник – цепочка полных дислокаций» / О.М. Остриков // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2011. – №4 (47).
6. Хирт, Дж. Теория дислокаций / Дж. Хирт, И. Лоте. – М. : Атомиздат, 1972. – 600 с.
7. Миркин, Л.И. Физические основы прочности и пластичности (Введение в теорию дислокаций) / Л.И. Миркин. – М. : Изд-во МГУ, 1968. – 538 с.

Поступила 13.10.2017

THE CALCULATION OF THE STRESS-STRAIN STATE IN NANOZINE DUE TO NEODOLIMAYA

T. DROBYSHEVSKAYA, O. OSTRIKOV

The developed method of calculation of fields of displacements and stresses in nanozine in the presence of nanovoice. The stress state in a nanosecond having the shape of a regular polygon and containing a nanodvoir is studied. The stress concentration points in the grain of nanomaterial are determined. The dependence of stresses on the parameters of the double is analyzed.

Keywords: nanomaterials, nanozero, grain boundary dislocations, double dislocations, nanodvoynikovanie.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.6: 517.958

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПАРАМЕТР АППРОКСИМАЦИИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ

канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет);
Н.К. ВОЛОСОВА

(Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана)

Предложен алгоритм решения начально-краевой задачи для неоднородного волнового уравнения на отрезке с двойной точностью, основанный на выборе оптимального параметра, обеспечивающего бесконечный алгебраический порядок аппроксимации однородному уравнению. Для решения системы линейных уравнений с симметрической пятидиагональной матрицей с краевым условием Дирихле доказаны достаточные условия корректности формул прогонки вперед более слабые, чем условия диагонального преобладания ее элементов. Применение алгоритма укрупнения ячеек сетки и использование метода производящих функций дает двойную точность относительной погрешности решения даже на грубой сетке с числом узлов несколько сотен.

Ключевые слова: метод производящих функций, инициализация задачи, слабые достаточные условия корректности формул прогонки симметричной пятидиагональной матрицы.

Введение. Задачи с численным решением волнового уравнения встречаются во многих физико-технических приложениях, большой класс краевых задач математической физики также сводится к неоднородному волновому уравнению на отрезке, на прямоугольнике, в параллелепипеде [1–5]. В последнее время в численных методах появилось направление ускоренных расчетов [2], которое достигается либо за счет увеличения порядка аппроксимации разностных схем [2–4], либо удачным выбором геометрии узлов сетки. Авторы работы [6, с. 23] в лучших традициях московской математической школы аналитически решили задачу о бегущей волне кручения на отрезке железнодорожного полотна, используя уравнение гиперболического типа с неоднородной правой частью и с учетом слагаемых, описывающих затухание механических волн.

Напомним, что порядком аппроксимации дифференциального оператора разностным оператором [4, с. 102] называется максимальное положительное число p , если существуют положительные числа $\rho, C > 0$, не зависящие от шага сетки h такие, что норма невязки (разности дифференциального и разностного оператора) не превышает $\|(Lu)_h - L_h u_h\| \leq Ch^p$.

В данной работе решается одномерное неоднородное уравнение с ускорением расчета путем увеличения порядка аппроксимации и выбора оптимального параметра аппроксимации разностной схемы. Найденная параметризация обеспечивает однородному разностному уравнению бесконечный алгебраический порядок аппроксимации, а для неоднородной начально-краевой задачи позволяет выразить невязку уравнений только через частные производные от известной правой части волнового уравнения. Более того, применение производящих функций как функций временного шага заменяет вычисление бесконечного ряда слагаемых для невязки в разностных уравнениях на конечное число арифметических вычислений с двойной точностью в неоднородной начально-краевой задаче.

Нами построен алгоритм инициализации задачи, т.е. аппроксимация второго временного слоя решения по начальным данным задачи. Алгоритм сводится к прогонке либо трехдиагональной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), либо к прогонке сначала трехдиагональной, а затем пятидиагональной СЛАУ. Найденны также достаточные условия корректности формул прогонки, более слабые, чем диагональное преобладание элементов матрицы. Алгоритм инициализации дает приближение второго слоя решения по начальным условиям с относительной погрешностью не хуже чем 10^{-10} при числе узлов 500. Инженерный американский продукт ANSYS Fluent завершает решение задач с относительной точностью 10^{-3} , и с более грубой точностью на процессе инициализации задачи, т.е. с точностью $10^{-1} - 10^{-2}$. Благодаря применению спектрально устойчивых разностных схем относительная погрешность начальных данных уменьшается от значения $10^{-8} - 10^{-10}$ до величины 10^{-15} . В работе нами построен алгоритм укрупнения ячеек сетки (масштабирования) с коэффициентом масштабирования $l > 1$, позволяющий сократить число вычислений в сотни раз (l^2 раз). Неоднородная начально-краевая задача при числе узлов 300 на редкой координатно-временной сетке решается с помощью указанных

здесь методов с двойной точностью 10^{-15} (т.е. первые 15 десятичных знаков аналитического и численного решения на последнем временном слое во всех координатных узлах совпадают).

Некоторые двумерные и трехмерные колебания в приложениях часто сводятся к одномерным колебаниям [5, с. 181], например, в прямоугольном кристалле колебания атомных параллельных плоскостей порождают одномерные звуковые волны, поэтому решаемая нами численно задача полезна и в многомерных случаях.

Постановка задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу для неоднородного волнового уравнения на отрезке $[a, b]$.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad a^2 > 0, \quad (x, t) \in (a, b) \times (0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [a, b], \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [a, b], \\ u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad x \in [a, b], \end{cases} \quad (1)$$

где $u(x, t)$ – точное аналитическое решение задачи (1); $f(x, t)$ – функции внешнего источника, $\varphi(x)$ – начальное смещение и $\psi(x)$ – начальная скорость точек струны с закрепленными концами на отрезке $\forall (x, t) \in [a, b] \times [0, T]$.

Аналитической задаче (1) сопоставим разностную задачу на равномерной сетке, используя пяти-точечный шаблон – крест:

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} + u_m^{n-1} - 2u_m^n}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n}{h^2} + f(x_m, t_n), \\ x_m = a + mh, \quad t_n = n\tau, \quad [m, n] \in [1, M-1] \times [1, N-1], \\ u(mh, 0) = \varphi(mh), \quad m \in [0, M], \\ u(mh, \tau) = \varphi_1(mh), \quad m \in [0, M], \quad \varphi_1(x) = F(\varphi(x), \psi(x)), \\ u(0, n\tau) = u(N, n\tau) = 0, \quad n \in [0, N]. \end{cases} \quad (2)$$

где $h = \frac{b-a}{N}$, $\tau = \frac{T}{M}$ – временной и координатный шаги сетки; a^2 – квадрат фазовой скорости волны.

Задание начальных условий $\varphi(x), \psi(x)$ в линейной аналитической задаче (1) эквивалентно заданию значений двух начальных временных слоев решения $u(mh, 0) = \varphi(mh) = u_m^0$, $u(mh, \tau) = \varphi_1(mh) = u_m^1$, $m \in [0, M]$ в разностной задаче (2), поскольку их запрашивает узловое значение u_m^2 в первой рекуррентной формуле системы (2). Зависимость второго временного слоя $\varphi_1(x) = F(\varphi(x), \psi(x))$ в системе уравнений (2) как функции начальных условий определяется с помощью предварительного численного алгоритма инициализации задачи методом прогонки.

Обозначим параметр $z = \frac{a^2 \tau^2}{h^2}$ и перепишем разностное уравнение (2) в эквивалентном виде

$$u_m^{n+1} + u_m^{n-1} - 2u_m^n = z(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n) + f(x_m, t_n)\tau^2 = z(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n) + f_{m,n}\tau^2. \quad (3)$$

Потребуем, чтобы разностное уравнение (3) аппроксимировало первое уравнение системы (1) с максимальным алгебраическим порядком, далее разложим узловые значения $u_m^{n+1}, u_m^{n-1}, u_{m-1}^n, u_{m+1}^n$ в ряд Тейлора в центральном узле $(m, n) \leftrightarrow (x_m, t_n)$ с вектором шага соответственно (h, τ) :

$$u_m^{n+1} + u_m^{n-1} - 2u_m^n = -2u_m^n + 2u_m^n + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(s)!} \frac{\partial^s u_m^n}{\partial t^s} \tau^s + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s)!} \frac{\partial^s u_m^n}{\partial t^s} \tau^s \stackrel{(s=2k)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k} =$$

$$= \tau^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k}.$$

Меняя в последней формуле буквенные обозначения индексов и переменных ($m \leftrightarrow n$), ($x \leftrightarrow t$) ($h \leftrightarrow \tau$), получим

$$z \left(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n \right) + f_{m,n} \tau^2 = z \left(h^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} h^{2k} \right) + f_{m,n} \tau^2.$$

Приравняв правые части последних двух выражений, используя тождество $\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + f_{m,n}$, имеем $\tau^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k} = \tau^2 a^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + f_{m,n} \tau^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k} =$

$$= \frac{a^2 \tau^2}{h^2} \left(h^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} h^{2k} \right) + f_{m,n} \tau^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k} = z \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} h^{2k}. \quad (4)$$

Невязка первого уравнения системы (2) равна невязке уравнения (4), т.е. разности левой и правой частей уравнения (4):

$$R(u_m^n) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \left(\frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k} - z \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} h^{2k} \right). \quad (5)$$

Замечание 1. Если параметр $z = \frac{a^2 \tau^2}{h^2} = 1$ и волновое уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ однородное, то из его записи для произвольного узла сетки $\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2}$ следует тождество

$\frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} = a^{2k} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}}$, тогда в формуле (5) преобразуем выражение в скобках $\frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k} - z \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} h^{2k} = h^{2k} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} \left(\frac{\tau^{2k} a^{2k}}{h^{2k}} - z \right) = h^{2k} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} (z^k - z) = 0$. Другими словами, для параметра $z = 1$ однородное одномерное волновое уравнение имеет бесконечный порядок аппроксимации! В этом случае разностная схема (3) с $f_{m,n} \equiv 0, z = 1$ точна для многочленов произвольной степени. Равномерная норма погрешности аппроксимации первого уравнения задачи (1) первым уравнением разностной задачи (2) не зависит от шага сетки h (аппроксимация происходит с двойной точностью даже для крупного шага сетки).

Для упрощения формулы (5) докажем первое утверждение.

Утверждение 1. Для неоднородного одномерного волнового уравнения $\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + f_{m,n}$ справедлива формула

$$\frac{\partial^{2p} u_m^n}{\partial t^{2p}} = a^{2p} \frac{\partial^{2p} u_m^n}{\partial x^{2p}} + \sum_{l=0}^{p-1} a^{2l} \frac{\partial^{2(p-l)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(p-l-1)}}, \quad p \geq 2. \quad (6)$$

Доказательство проведем по индукции. Для базы индукции, если $p = 2$, имеем

$$\frac{\partial^4 u_m^n}{\partial t^4} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(a^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + f_{m,n} \right) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(a^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + f_{m,n} \right) + \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2} = a^4 \frac{\partial^4 u_m^n}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2},$$

что верно. Следовательно, получаем формулу (6), если $p = 2$.

Пусть справедлива также формула $\frac{\partial^{2(p-1)} u_m^n}{\partial t^{2(p-1)}} = a^{2(p-1)} \frac{\partial^{2(p-1)} u_m^n}{\partial x^{2(p-1)}} + \sum_{l=0}^{p-2} a^{2l} \frac{\partial^{2(p-2)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(p-l-2)}}$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2p} u_m^n}{\partial t^{2p}} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(a^{2(p-1)} \frac{\partial^{2(p-1)} u_m^n}{\partial x^{2(p-1)}} + \sum_{l=0}^{p-2} a^{2l} \frac{\partial^{2(p-2)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(p-l-2)}} \right) = a^{2(p-1)} \frac{\partial^{2(p-1)} \partial^2 u_m^n}{\partial x^{2(p-1)} \partial t^2} + \sum_{l=0}^{p-2} a^{2l} \frac{\partial^{2(p-1)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(p-l-1)}} = \\ &= a^{2(p-1)} \frac{\partial^{2(p-1)}}{\partial x^{2(p-1)}} \left(a^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + f_{m,n} \right) + \sum_{l=0}^{p-2} a^{2l} \frac{\partial^{2(p-1)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(p-l-1)}} = a^{2p} \frac{\partial^{2p} u_m^n}{\partial x^{2p}} + a^{2(p-1)} \frac{\partial^{2(p-1)} f_{m,n}}{\partial x^{2(p-1)}} + \\ &\quad + \sum_{l=0}^{p-2} a^{2l} \frac{\partial^{2(p-1)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(p-l-1)}} = a^{2p} \frac{\partial^{2p} u_m^n}{\partial x^{2p}} + \sum_{l=0}^{p-1} a^{2l} \frac{\partial^{2(p-1)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(p-l-1)}}, \end{aligned}$$

т.е. формула (6) (**утверждение 1**) доказана для произвольного целого $p \geq 2$.

Используя формулу (6), преобразуем невязку разностного уравнения (3), подставив ее в формулу (5):

$$\begin{aligned} R(u_m^n) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \left(\frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial t^{2k}} \tau^{2k} - z \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} h^{2k} \right) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \left(\tau^{2k} \left(a^{2k} \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} + \sum_{l=0}^{k-1} a^{2l} \frac{\partial^{2(k-1)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(k-l-1)}} \right) - z \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} h^{2k} \right) = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \left(h^{2k} \left(\frac{\tau^{2k} a^{2k}}{h^{2k}} - z \right) \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} + \tau^{2k} \sum_{l=0}^{k-1} a^{2l} \frac{\partial^{2(k-1)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(k-l-1)}} \right) = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \left(h^{2k} (z^k - z) \frac{\partial^{2k} u_m^n}{\partial x^{2k}} + \tau^{2k} \sum_{l=0}^{k-1} a^{2l} \frac{\partial^{2(k-1)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(k-l-1)}} \right) \stackrel{(z=1)}{=} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \left(\tau^{2k} \sum_{l=0}^{k-1} a^{2l} \frac{\partial^{2(k-1)} f_{m,n}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(k-l-1)}} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Выпишем несколько первых слагаемых для невязки $R(u_m^n)$ из формулы (7):

$$\begin{aligned} R(u_m^n) &= \frac{2\tau^4}{4!} \left(a^2 \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2} \right) + \frac{2\tau^6}{6!} \left(a^4 \frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial t^4} \right) + \\ &\quad + \frac{2\tau^8}{8!} \left(a^6 \frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial x^6} + a^4 \frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial x^4 \partial t^2} + a^2 \frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^4} + \frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial t^6} \right) + \\ &\quad + \frac{2\tau^{10}}{10!} \left(a^8 \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^8} + a^6 \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^6 \partial t^2} + a^4 \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^4 \partial t^4} + a^2 \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^6} + \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial t^8} \right) + \\ &\quad + \frac{2\tau^{12}}{12!} \left(a^{10} \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^{10}} + a^8 \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^8 \partial t^2} + a^6 \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^6 \partial t^4} + a^4 \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^4 \partial t^6} + a^2 \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^8} + \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial t^{10}} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Определение 1. Одномерное уравнение в частных производных

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, a^2 > 0 \quad (9)$$

по аналогии с волновым уравнением $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, a^2 > 0$ назовем волновым уравнением комплексного аргумента. Рассмотрим свойства решений (9).

Утверждение 2 (свойства волнового уравнения комплексного аргумента).

1) Уравнения $xi + at = \overline{C_1} = \text{const}$, $xi - at = \overline{C_2} = \text{const}$ являются уравнениями характеристик для (9). Действительно,

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow \left(a \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(a \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial t} \right) f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \\ a \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{a} = \frac{dt}{i} \\ \frac{dx}{a} = \frac{dt}{-i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xi - at = C_1 \Leftrightarrow x + iat = -iC_1 = \overline{C_1} \\ xi + at = C_2 \Leftrightarrow x - iat = -iC_2 = \overline{C_2} \end{cases}$$

2) Решением волнового уравнения комплексного аргумента является линейная комбинация произвольных дважды дифференцируемых функций на комплексных характеристиках

$$f(x, t) = C_1 u(x + iat) + C_2 v(x - iat), u(\omega), v(\omega) \in C^2(Z). \quad (10)$$

Действительно,

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \left(C_1 u''(x + iat) + C_2 v''(x - iat) \right) + (iat)^2 C_1 u''(x + iat) + (-iat)^2 C_2 v''(x - iat) = 0.$$

3) Пусть функция $f(x \pm iat) = f_1(x, t) + if_2(x, t)$ комплексного аргумента $(x \pm iat)$ — решение уравнения (9), тогда функции действительного аргумента $f_1(x, t), f_2(x, t)$, т.е. действительная и мнимая части $f(x \pm iat)$, также являются решениями уравнения (9). Действительно, имеем

$$a^2 \frac{\partial^2 f(x \pm iat)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x \pm iat)}{\partial t^2} = 0 = a^2 \frac{\partial^2 (f_1(x, t) + if_2(x, t))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (f_1(x, t) + if_2(x, t))}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$a^2 \frac{\partial^2 (f_1(x, t) + if_2(x, t))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (f_1(x, t) + if_2(x, t))}{\partial t^2} = 0 + i \cdot 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \frac{\partial^2 f_1(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1(x, t)}{\partial t^2} = 0 \\ a^2 \frac{\partial^2 f_2(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2(x, t)}{\partial t^2} = 0. \end{cases}$$

Таким образом, показано, что функции $f_1(x, t), f_2(x, t)$ — решения уравнения (9). Последняя система уравнений следует из определения равенства двух комплексных чисел. **Утверждение 2** доказано.

Приведем примеры из класса решений волнового уравнения комплексного аргумента, используя **утверждение 2**.

Пример 1. $f_1(x, t) = \text{Re}(x + iat)^2 = x^2 - a^2 t^2$. Действительно,

$$a^2 \frac{\partial^2 (x^2 - a^2 t^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (x^2 - a^2 t^2)}{\partial t^2} = 2a^2 - 2a^2 = 0.$$

Пример 2. $f_2(x, t) = \text{Im}(x + iat)^4 = 4x^3 at - 4xa^3 t^3$. Действительно,

$$a^2 \frac{\partial^2 (4x^3 at - 4xa^3 t^3)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (4x^3 at - 4xa^3 t^3)}{\partial t^2} = 24a^3 xt - 24a^3 xt = 0.$$

Пример 3. $f_3(x, t) = \text{Im}(\exp(x + iat)) = \exp(x) \sin(at)$. Действительно,

$$a^2 \frac{\partial^2 (\exp(x) \sin(at))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\exp(x) \sin(at))}{\partial t^2} = (a^2 - a^2) \exp(x) \sin(at) = 0.$$

Замечание 2. Если правая часть $f(x, t)$ неоднородного волнового уравнения действительного аргумента задачи (1) удовлетворяет однородному волновому уравнению мнимого аргумента, то порядок невязки разностной схемы задачи (2) увеличивается со второго порядка до четвертого. Более того, невязку в этом случае удастся выразить через частные производные по одной независимой переменной t . Нужно учесть, что невязка уравнения (3) на 2 порядка больше невязки уравнения (2). Действительно, из формулы (8) получим

$$\begin{aligned} R(u_m^n) &= \frac{2\tau^6}{6!} \left(\frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial t^4} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(a^2 \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2} \right) \right) + \\ &+ \frac{2\tau^8}{8!} \left(\frac{\partial^4}{\partial t^4} \left(a^2 \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2} \right) + a^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(a^2 \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2} \right) \right) + \\ &+ \frac{2\tau^{10}}{10!} \left(\frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial t^8} + a^2 \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial t^4} \left(a^2 \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2} \right) + a^6 \frac{\partial^6}{\partial x^6} \left(a^2 \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2} \right) \right) + \dots = \\ &= \frac{2\tau^6}{6!} \frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial t^4} + \frac{2\tau^{10}}{10!} \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial t^8} + \dots = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau^{4k+2}}{(4k+2)!} \frac{\partial^{4k} f_{m,n}}{\partial t^{4k}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Кроме аппроксимации важен вопрос об устойчивости разностного уравнения (3), так как неустойчивая схема накапливает ошибку округления по геометрической прогрессии, что ведет к неограниченному численному решению. В то время как устойчивая схема суммирует ошибки округления по арифметической прогрессии и норма невязки пропорциональна количеству элементарных операций. Проверим разностное уравнение (3) на спектральную устойчивость. Учтем, что численное решение $\tilde{u}_m^n(x, t)$ удовлетворяет также уравнению (3), как и проекция аналитического решения на узлы сетки $(u(x, t))_m^n = u_m^n$, $\epsilon_m^n = \tilde{u}_m^n - u_m^n$, $\tilde{u}_m^{n+1} + \tilde{u}_m^{n-1} - 2\tilde{u}_m^n = z(\tilde{u}_m^{n+1} + \tilde{u}_m^{n-1} - 2\tilde{u}_m^n) + f_{m,n}\tau^2$. Вычитая из последнего выражения уравнение (3) получим однородное уравнение относительно невязок в каждом внутреннем узле сетки (m, n) :

$$\epsilon_m^{n+1} + \epsilon_m^{n-1} - 2\epsilon_m^n = z(\epsilon_m^{n+1} + \epsilon_m^{n-1} - 2\epsilon_m^n).$$

Подставляя в последнее уравнение ошибку округления вида $\epsilon_m^n = \lambda^n(\phi)e^{im\phi}$, получим спектральное уравнение

$$\lambda + 1/\lambda - 2 = z(e^{i\phi} + e^{-i\phi} - 2) = -4z \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\left(1 - 2z \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)\lambda + 1 = 0. \quad (12)$$

Как следует из определения спектральной устойчивости [4, с. 125], $\left|u_m^n\right|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \Leftrightarrow |\lambda(\phi)| \leq 1 \quad \forall \phi \in [0, 2\pi]$.

Используя коэффициенты квадратного уравнения (12), получим $|\lambda_1||\lambda_2| = \left|\frac{c}{a}\right| = 1/1 = 1$.

Если корни действительные, то при $|\lambda_1| < 1 \Rightarrow |\lambda_2| > 1$. Тогда возможен единственный результат

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1 \quad \forall \phi \in [0, 2\pi], \text{ что заведомо невозможно, т.к. } \lambda_{1,2} = \left(1 - 2z \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right) \pm \sqrt{\left(1 - 2z \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^2 - 1}$$

зависит от ϕ . Следовательно, имеем пару комплексно сопряженных корней:

$$\lambda_{1,2} = \left(1 - 2z \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \pm i \sqrt{1 - \left(1 - 2z \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2},$$

$$|\lambda_{1,2}|^2 = \left(1 - 2z \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 + 1 - \left(1 - 2z \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 = 1, \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi].$$

Выясним условия, при которых дискриминант отрицательный.

$$\left(1 - 2z \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - 4z \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2}\right) + 4z^2 \sin^4 \left(\frac{\varphi}{2}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 4 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2}\right) z(z-1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow z \in (0, 1], z \neq 0, \forall \varphi \in [0, 2\pi]$, то есть с параметром $z = 1$ разностное уравнение (3) является спектрально устойчивым.

Тестовый пример 1

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin(x) \sin(t), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(x), u_t(x, 0) = \sin(2x), & x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Сведем исходную задачу к трем простым:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t),$$

где $u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)$ – решения первой (а), второй (б) и третьей (с) задач соответственно:

$$a) \begin{cases} u_{1tt} = u_{1xx} + \sin(x) \sin(t), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u_1(x, 0) = 0, u_{1t}(x, 0) = 0, & x \in [0, \pi] \\ u_1(0, t) = u_1(\pi, t) = 0, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} u_{2tt} = u_{2xx}, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u_2(x, 0) = \sin(x), u_{2t}(x, 0) = 0, & x \in [0, \pi] \\ u_2(0, t) = u_2(\pi, t) = 0, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} u_{3tt} = u_{3xx}, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u_3(x, 0) = 0, u_{3t}(x, 0) = \sin(2x), & x \in [0, \pi] \\ u_3(0, t) = u_3(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Выбираем решение задачи (а) в виде $u_1(x, t) = f_1(t) \sin(x)$, удовлетворяющее граничным условиям $u_1(0, t) = u_1(\pi, t) = 0$, подставляя в первое уравнение системы, получим

$$\begin{cases} f_1'' + f_1 = \sin t \\ f_1(0) = f_1'(0) = 0 \end{cases}$$

общее решение однородного уравнения (с индексом оо) есть $f_{1oo}(t) = A \sin t + B \cos t$. Частное решение неоднородного уравнения (с индексом ч) ищем в виде

$$f_{1ч}(t) = (a + bt) \cos t, f_{1ч}' = b \cos t - (a + bt) \sin t, f_{1ч}'' = -2b \sin t - (a + bt) \cos t,$$

подставляем значения $f_{1ч}(t), f_{1ч}''$ в первое уравнение системы:

$$-2b \sin t = \sin t \Leftrightarrow b = -1/2, a = 0, f_1(t) = f_{100}(t) + f_{1u}(t) = A \sin t + B \cos(t) - \frac{t \cos t}{2}, f_1(0) = f_1'(0) = 0$$

$$B = 0, A - 1/2 = 0, f_1(t) = \frac{(\sin t - t \cos t)}{2}, u_1(x, t) = f_1(t) \sin(x) = \frac{(\sin t - t \cos t) \sin(x)}{2}$$

Решение задачи (b) ищем в виде $u_2(x, t) = f_2(t) \sin(x)$, которое подставим в уравнения системы (b)

$$\begin{cases} f_2'' + f_2 = 0 \\ f_2(0) = 1, f_2'(0) = 0 \end{cases}$$

$$f_2(t) = A_1 \sin t + B_1 \cos t, f_2(0) = 1 \Leftrightarrow B_1 = 1, f_2'(0) = 0 \Leftrightarrow A_1 = 0$$

Получим $u_2(x, t) = f_2(t) \sin x = \cos t \sin x$.

Решение задачи (c) ищем в виде $u_3(x, t) = f_3(t) \sin(2x)$, которое подставим в уравнения системы (c)

$$\begin{cases} f_3'' + 4f_3 = 0 \\ f_3(0) = 0, f_3'(0) = 1 \end{cases}$$

$$f_3(t) = A_2 \sin(2t) + B_2 \cos(2t), f_3(0) = 0 \Leftrightarrow B_2 = 0, f_3'(0) = 1 \Leftrightarrow 2A_2 = 1$$

$$u_3(x, t) = f_3(t) \sin(2x) = \frac{\sin(2t) \sin(2x)}{2}.$$

Решение исходного примера есть

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) = \frac{(\sin(t) - t \cos(t)) \sin(x)}{2} + \cos(t) \sin(x) + \frac{\sin(2t) \sin(2x)}{2}.$$

Инициализация задачи. Инициализацией задачи назовем определение второго временного слоя решения по начальным данным задачи, т.е. определения функции $\varphi_1(x)$ в задаче (2)

$$u(mh, \tau) = \varphi_1(mh), \quad m \in [0, M], \quad \varphi_1(x) = F\left(\varphi(x) \equiv u(x, 0), \psi(x) \equiv \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}\right).$$

Аппроксимируем первую производную решения в начальный момент времени $\psi(x)$. Рассмотрим два случая инициализации разностной задачи (2):

- 1) в задаче (2) первое уравнение однородное $\varphi(x) \neq 0, \psi(x) \neq 0$;
- 2) в задаче (2) первое уравнение неоднородное $\varphi(x) = 0, \psi(x) = 0$.

В этих двух случаях инициализация задачи существенно отличается.

Построим квадратурную формулу для функции $\psi(x)$, связывающую узловые значения функции в одном узле в трех временных слоях, с момента времени $t = 0$ точную для многочленов максимальной степени

$$u_\tau(0) = \frac{1}{\tau} (C_0 u(0) + C_1 u(\tau) + C_2 u(2\tau)), \quad u(t) \equiv 1: u_\tau(0) = 0 = \frac{1}{\tau} (C_0 + C_1 + C_2)$$

$$u(t) \equiv t: u_\tau(0) = 1 = \frac{1}{\tau} (0C_0 + \tau C_1 + 2\tau C_2), \quad u(t) \equiv t^2: u_\tau(0) = 0 = \frac{1}{\tau} (0^2 C_0 + \tau^2 C_1 + (2\tau)^2 C_2).$$

Решаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} C_0 + C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + C_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_0 = -3/2 \\ C_1 = 2 \\ C_2 = -1/2 \end{cases} \quad u_\tau(0) = \frac{1}{\tau} \left(-\frac{3}{2} u^0 + 2u^1 - \frac{1}{2} u^2 \right), \text{ откуда}$$

$$u(2\tau) \equiv u^2 = -3u^0 + 4u^1 - 2\tau u_\tau. \quad (13)$$

Формула (13) имеет третий алгебраический порядок погрешности, т.е. погрешность имеет вид $O(\tau^3)$. Получим аналогичную формулу, связывающую четыре временных слоя:

$$u_\tau(0) = \frac{1}{\tau} (C_0 u(0) + C_1 u(\tau) + C_2 u(2\tau) + C_3 u(3\tau)), \quad u(t) \equiv 1: u_\tau(0) = 0 = \frac{1}{\tau} (C_0 + C_1 + C_2 + C_3)$$

$$u(t) = t : u_\tau(0) = 1 = \frac{1}{\tau} (C_0 0 + \tau C_1 + 2\tau C_2 + 3\tau C_3), \quad u(t) = t^2 : u_\tau(0) = 0 = \frac{1}{\tau} (0^2 C_0 + \tau^2 C_1 + (2\tau)^2 C_2 + (3\tau)^2 C_3)$$

$$u(t) = t^3 : u_\tau(0) = 0 = \frac{1}{\tau} (0^3 C_0 + \tau^3 C_1 + (2\tau)^3 C_2 + (3\tau)^3 C_3).$$

Решаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} C_0 + C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 1 \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 0 \\ C_1 + 8C_2 + 27C_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_0 = -11/6 \\ C_1 = 3 \\ C_2 = -3/2 \\ C_3 = 1/3 \end{cases} \quad u_\tau(0) = \frac{1}{\tau} \left(-\frac{11}{6} u^0 + 3u^1 - \frac{3}{2} u^2 + \frac{1}{3} u^3 \right),$$

откуда

$$u(3\tau) \equiv u^3 = \frac{11}{2} u^0 - 9u^1 + \frac{9}{2} u^2 + 3\tau u_\tau. \quad (14)$$

Формула (14) имеет четвертый порядок погрешности, т.е. погрешность имеет вид $O(\tau^4)$.

В первой задаче инициализации с использованием формул (3), (13) $f_{m,n} \equiv 0$ для трех временных слоев имеем:

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} + u_m^{n-1} - 2u_m^n &= z(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n) + f_{m,n} \tau^2 \Leftrightarrow u_m^2 = -u_m^0 + 2(1-z)u_m^1 + z(u_{m+1}^1 + u_{m-1}^1) = \\ &= -3u_m^0 + 4u_m^1 - 2\tau u_\tau \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow zu_{m-1}^1 - 2(1+z)u_m^1 + zu_{m+1}^1 = -2u_m^0 - 2\tau u_\tau, \quad m = \overline{1, M-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Система линейных уравнений (15) представляет трехдиагональную матрицу с коэффициентами

$$A_m = z, \quad C_m = 2(1+z), \quad B_m = z, \quad F_m = -2u_m^0 - 2\tau u_\tau$$

относительно неизвестных $u_{m-1}^1, u_m^1, u_{m+1}^1$.

Решить систему уравнений (15) можно методом прогонки, например, с помощью формул [3, с. 44], [7, с. 68], прогонки вперед

$$\lambda_m = \frac{B_m}{C_m - A_m \lambda_{m-1}}, \quad v_m = \frac{A_m v_{m-1} - F_m}{C_m - A_m \lambda_{m-1}}, \quad m = \overline{1, M-1}, \quad \lambda_0 = 0, \quad v_0 = u_0^1$$

и формул прогонки назад

$$u_m^1 = \lambda_m u_{m+1}^1 + v_m, \quad m = \overline{M-1, 1}. \quad (16)$$

Условие корректности формул прогонки (условие абсолютного диагонального преобладания) выполнено, так как $|C_m| \geq |A_m| + |B_m| > 0 \Leftrightarrow 2(1+z) > 2z > 0$ [3, с. 35]. Поскольку формула (13) точна для всех многочленов второй степени, т.е. имеет погрешность $O(\tau^3)$ с третьим алгебраическим порядком, то и погрешность решения системы уравнений (16) также $O(\tau^3)$, т.е. формулу (15) можно считать начальным этапом инициализации задачи. Используя формулы (3), (14) $f_{m,n} \equiv 0$, построим второй этап инициализации задачи (2)

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} + u_m^{n-1} - 2u_m^n &= z(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n) + f_{m,n} \tau^2 \Leftrightarrow u_m^3 = -u_m^1 + 2(1-z)u_m^2 + z(u_{m+1}^2 + u_{m-1}^2) = \\ &= \frac{11}{2} u_m^0 - 9u_m^1 + \frac{9}{2} u_m^2 + 3\tau u_{m\tau}^0 \Leftrightarrow 8u_m^1 + \left(-\frac{5}{2} - 2z \right) u_m^2 + z(u_{m+1}^2 + u_{m-1}^2) = \frac{11}{2} u_m^0 + 3\tau u_{m\tau}^0 = \\ &= 8u_m^1 + \left(-\frac{5}{2} - 2z \right) \left(-u_m^0 + 2(1-z)u_m^1 + z(u_{m+1}^1 + u_{m-1}^1) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +z\left(-u_{m+1}^0+2(1-z)u_{m+1}^1+z\left(u_{m+2}^1+u_m^1\right)-u_{m-1}^0+2(1-z)u_{m-1}^1+z\left(u_m^1+u_{m-2}^1\right)\right) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow z^2 u_{m-2}^1+(2 z(1-z)-z\left(\frac{5}{2}+2 z\right)) u_{m-1}^1+u_m^1\left(8-\left(\frac{5}{2}+2 z\right) 2(1-z)+2 z^2\right)+(2 z(1-z)-z\left(\frac{5}{2}+2 z\right)) u_{m+1}^1+z^2 u_{m+2}^1= \\
& =\left(\frac{11-5}{2}-2 z\right) u_m^0+3 \tau u_{m \tau}^0+z u_{m-1}^0+z u_{m+1}^0 \Leftrightarrow z^2 u_{m-2}^1-\left(\frac{1}{2} z+4 z^2\right) u_{m-1}^1+u_m^1\left(3+z+6 z^2\right)-\left(\frac{1}{2} z+4 z^2\right) u_{m+1}^1+z^2 u_{m+2}^1= \\
& \Leftrightarrow z^2 u_{m-2}^1-\left(\frac{1}{2} z+4 z^2\right) u_{m-1}^1+u_m^1\left(3+z+6 z^2\right)-\left(\frac{1}{2} z+4 z^2\right) u_{m+1}^1+z^2 u_{m+2}^1=(3-2 z) u_m^0+z u_{m-1}^0+z u_{m+1}^0+3 \tau u_{m \tau}^0 . \quad (17)
\end{aligned}$$

Для оптимального параметра $z=1$ формула (17) перейдет в формулу

$$u_{m-2}^1-\frac{9}{2} u_{m-1}^1+10 u_m^1-\frac{9}{2} u_{m+1}^1+u_{m+2}^1=u_m^0+u_{m-1}^0+u_{m+1}^0+3 \tau u_{m \tau}^0 . \quad (18)$$

Отметим, что трехдиагональная матрица (15) и пятидиагональная матрица (18) систем линейных уравнений в данном случае используются для аппроксимации второго временного слоя, а не для решения основной задачи, как в работах [7, 8].

Линейная система уравнений (19) имеет пятидиагональную матрицу прогонки относительно неизвестных $u_{m-2}^1, u_{m-1}^1, u_m^1, u_{m+1}^1, u_{m+2}^1$, обозначим ее коэффициенты

$$A_{m1}=1, A_{m2}=-\frac{9}{2}, C_m=-10, B_{m1}=-\frac{9}{2}, B_{m2}=1, F_m=u_{m-1}^0+u_m^0+u_{m+1}^0+3 \tau u_{m \tau}^0 .$$

Для решения системы уравнений (18) используем формулы прогонки [7, с. 70], формулы прогонки вперед:

$$\begin{aligned}
\lambda_{1 m} & =\frac{B_{1 m}+A_{2 m} \lambda_{2 m-1}+A_{1 m} \lambda_{1 m-2} \lambda_{2 m-1}}{C_m-A_{1 m} \lambda_{1 m-2} \lambda_{1 m-1}-A_{1 m} \lambda_{2 m-2}-A_{2 m} \lambda_{1 m-1}}, \quad \lambda_{2 m}=\frac{B_{2 m}}{C_m-A_{1 m} \lambda_{1 m-2} \lambda_{1 m-1}-A_{1 m} \lambda_{2 m-2}-A_{2 m} \lambda_{1 m-1}} \quad (19a) \\
v_m & =\frac{A_{1 m} \lambda_{1 m-2} v_{m-1}+A_{1 m} v_{m-2}+A_{2 m} v_{m-1}-F_m}{C_m-A_{1 m} \lambda_{1 m-2} \lambda_{1 m-1}-A_{1 m} \lambda_{2 m-2}-A_{2 m} \lambda_{1 m-1}}, \quad m=\overline{2, M-2} .
\end{aligned}$$

и формулы прогонки назад

$$u_m^1=\lambda_{1 m} u_{m+1}^1+\lambda_{2 m} u_{m+2}^1+v_m, \quad m=\overline{M-2, 2} \quad (19б)$$

$$u_0^1=\lambda_{10} u_1^1+\lambda_{20} u_2^1+v_0, \quad u_1^1=\lambda_{11} u_2^1+\lambda_{21} u_3^1+v_1, \quad u_{M-2}^1=\lambda_{1 M-2} u_{M-1}^1+\lambda_{2 M-2} u_M^1+v_{M-2} .$$

Из последней формулы видно, что u_0^1, u_1^1 принимают фиксированные значения (краевое условие Дирихле – крайние значения $u_0^1, u_1^1, u_{M-1}^1, u_M^1$ заданы) при любых соседних узловых значениях, если положить $v_0=u_0^1, \lambda_{10}=\lambda_{20}=0, v_1=u_1^1, \lambda_{11}=\lambda_{21}=0$.

Коэффициенты последней системы уравнений не имеют даже нестрогого (абсолютного) диагонального преобладания, так как $|C_m|=10<|A_{m1}|+|A_{m2}|+|B_{m1}|+|B_{m2}|=2\left(1+\frac{9}{2}\right)=11$. Однако недиагональные элементы матрицы $A_{m1}, A_{m2}, B_{m1}, B_{m2}$ являются знакопеременными и удовлетворяют требованию условного диагонального преобладания:

$$|C_m|=10 \geq|A_{m1}+A_{m2}+B_{m1}+B_{m2}|=2\left|1-\frac{9}{2}\right|=7 .$$

Определение 2. Говорят, что квадратная матрица коэффициентов $a_{i, j}$ имеет условное диагональное преобладание, если для любой ее строки

$$\left|a_{i, i}\right| \geq\left|\sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i, j}\right|, \quad i=\overline{1, n} .$$

Оказывается, что для корректности формул прогонки вперед (19a) при решении системы уравнений (18) достаточно выполнить условие более слабое, чем абсолютное диагональное преобладание эле-

ментов матрицы $|a_{i,i}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| \Leftrightarrow |C_m| > 2(|A_{2m}| + |A_{1m}|) \Leftrightarrow |-10| > 2(|-9/2| + 1) = 11$, но более сильное,

чем условие диагонального преобладания элементов матрицы (для коэффициентов левой части уравне-

ния (18)) $|a_{i,i}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| \Leftrightarrow |C_m| \geq 2(|A_{2m}| - |A_{1m}|) \Leftrightarrow |-10| \geq 2(|-9/2| - 1) = 7$, а именно

$$|-10| = |C_m| \geq 2|A_{2m}| + |A_{1m}| = 2|-9/2| + 1 = 10.$$

Утверждение 3. Пусть квадратная пятидиагональная матрица коэффициентов линейной системы уравнений

$$A_{1m}u_{m-2}^1 + A_{2m}u_{m-1}^1 - C_mu_m^1 + B_{1m}u_{m+1}^1 + B_{2m}u_{m+2}^1 = F_m, \quad m = \overline{2, M-2}$$

является:

1) симметрической: $A_{1m} = B_{2m}$, $A_{2m} = B_{1m}$, со знакопередающимися недиагональными коэффициентами для определенности

$$A_{1m} > 0, A_{2m} < 0, C_m < 0;$$

2) удовлетворяет условию (условию подчинения коэффициентов):

$$|C_m| \geq 2|A_{2m}| + |A_{1m}| \Leftrightarrow C_m \leq -2|A_{2m}| - |A_{1m}|, |A_{2m}| \geq 2|A_{1m}|.$$

Тогда в краевой задаче Дирихле $v_0 = u_0^1$, $\lambda_{10} = \lambda_{20} = 0$, $v_1 = u_1^1$, $\lambda_{11} = \lambda_{21} = 0$:

1) $0 \leq \lambda_{1m} \leq 1$, $-1/2 \leq \lambda_{2m} \leq 0$, $m = \overline{0, n-2}$;

2) формулы прогонки вперед (19a) для коэффициентов $\lambda_{1m}, \lambda_{2m}, v_m$ корректны.

Доказательство утверждения 3 проведем по индукции:

1) для базы индукции $m = 2$ имеем:

$$\lambda_{12} = \frac{B_{12} + A_{22}\lambda_{21} + A_{12}\lambda_{10}\lambda_{21}}{C_2 - A_{12}\lambda_{10}\lambda_{11} - A_{12}\lambda_{20} - A_{22}\lambda_{11}} = \frac{A_{22}}{C_2} > 0, \left| \frac{A_{22}}{C_2} \right| \leq \frac{|A_{22}|}{2|A_{22}| + |A_{12}|} \leq \frac{|A_{22}|}{2|A_{22}|} < 1,$$

$$\lambda_{22} = \frac{B_{22}}{C_2 - A_{12}\lambda_{10}\lambda_{11} - A_{12}\lambda_{20} - A_{22}\lambda_{11}} = \frac{A_{12}}{C_2} < 0, \left| \frac{A_{12}}{C_2} \right| \leq \frac{|A_{12}|}{2|A_{22}| + |A_{12}|} < \frac{|A_{12}|}{5|A_{12}|} \leq \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$$

$$\text{sign}(\lambda_{12}) = \text{sign}\left(\frac{A_{22}}{C_2}\right) = 1, \text{sign}(\lambda_{22}) = \text{sign}\left(\frac{A_{12}}{C_2}\right) = -1.$$

База индукции проверена. Пусть верно

$$|\lambda_{1k}| < 1, |\lambda_{2k}| < \frac{1}{2}, \text{sign}(\lambda_{1k}) = \text{sign}\left(\frac{A_{2k}}{C_k}\right) = 1, \text{sign}(\lambda_{2k}) = \text{sign}\left(\frac{A_{1k}}{C_k}\right) = -1, \quad \forall k = \overline{2, m-1}.$$

Тогда

$$|\lambda_{1m}| = \frac{|B_{1m} + A_{2m}\lambda_{2m-1} + A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1}|}{|C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1}|} = \frac{|A_{2m} + A_{2m}\lambda_{2m-1} + A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1}|}{|C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1}|}$$

$$-1/2 \leq \lambda_{2m-1} \leq 0, 1/2 \leq \lambda_{2m-1} + 1 \leq 1, 0 \leq \lambda_{1m-1} < 1, -|A_{2m}| \leq A_{2m}(1 + \lambda_{2m-1}) \leq -|A_{2m}|/2,$$

$$-|A_{1m}|/2 \leq A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1} \leq 0, -|A_{2m}| - |A_{1m}|/2 \leq A_{2m}(1 + \lambda_{2m-1}) + A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1} \leq -|A_{2m}|/2 < 0,$$

$$-|A_{1m}| \leq -A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} \leq 0, 0 \leq -A_{1m}\lambda_{2m-2} \leq |A_{1m}|/2, 0 \leq -A_{2m}\lambda_{1m-1} \leq |A_{2m}|,$$

$$C_m - |A_{1m}| \leq C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1} \leq C_m + |A_{1m}|/2 + |A_{2m}| < 0,$$

$$\frac{|A_{2m}|/2}{|C_m| + |A_{1m}|/2} \leq |\lambda_{1m}| = \frac{|A_{2m}(1 + \lambda_{2m-1}) + A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1}|}{|C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1}|} \leq \frac{|A_{2m}| + |A_{1m}|/2}{|C_m| - |A_{1m}|/2 - |A_{2m}|} \leq \frac{|A_{2m}| + |A_{1m}|/2}{|A_{2m}| + |A_{1m}|/2} = 1,$$

$$|\lambda_{2m}| = \frac{|B_{2m}|}{|C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2n-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1}|} \leq \frac{|A_{1m}|}{|A_{2m}| + |A_{1m}|/2} \leq \frac{|A_{1m}|}{5/2|A_{1m}|} = \frac{2}{5} < \frac{1}{2}.$$

Из предыдущих оценок следует, что знаменатель и числители формул заключены в пределах

$$C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2n-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1} \leq C_m + |A_{1m}|/2 + |A_{2m}| \leq -|A_{2m}| - |A_{1m}|/2 < 0,$$

$$A_{2m}(1 + \lambda_{2m-1}) + A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1} \leq -|A_{2m}|/2 < 0, B_{2m} = A_{1m} > 0.$$

Тогда с учетом предыдущих неравенств получим, что $0 \leq \lambda_{1m} \leq 1, -1/2 \leq \lambda_{2m} \leq 0$;

2) ввиду доказанной первой части **утверждения 3** имеем

$$0 \leq \lambda_{1m} \leq 1, -1/2 \leq \lambda_{2m} \leq 0, m = \overline{0, n-2}$$

$$C_m - |A_{1m}|/2 \leq C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2n-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1} \leq C_m + |A_{1m}|/2 + |A_{2m}| \leq -|A_{2m}| - |A_{1m}|/2 < 0.$$

Поэтому знаменатель во всех трех формулах прогонки (20) $\lambda_{1m}, \lambda_{2m}, v_m$ строго меньше нуля, т.е. в ноль не обращается, а формулы прогонки корректны. **Утверждение 3** доказано.

Замечание 3. В работе [4] показано, что достаточными условиями корректности формул прогонки симметричной пятидиагональной матрицы является полуторное абсолютное диагональное преобладание ее элементов. В данном случае **утверждение 3** указывает достаточные условия корректности прогонки той же матрицы, но более слабые, чем даже абсолютное диагональное преобладание ее элементов.

Рассмотрим равномерную норму погрешности процесса инициализации, т.е. разности численного решения u_m^{-1} , полученного по формулам (13), (15), (16), и точного решения первой части тестового примера 1 (для однородного уравнения) $u_m^1 = \cos \tau \sin(hm) + \frac{\sin(2\tau)\sin(2hm)}{2}, m = \overline{0, M}, \Delta_m = \tilde{u}_m^1 - u_m^1$.

Норма Чебышева определяется формулой $\Delta = \max_{m=1, M} |\Delta_m| = \max_{m=1, M} |\tilde{u}_m^1 - u_m^1|$, программа возвращает норму погрешности норма $C = 5.174140550234796E-006$ при $M = 200$ и норма $C = 6.465012549750071E-007$ при $M = 400$, тогда $\frac{\Delta(200)}{\Delta(400)} = \frac{5.174140550234796E-006}{6.465012549750071E-007} = 8.003 \approx 2^3$ алгебраический порядок погрешности алгоритма (13), (15), (16) равен $p = 3$, т.е. подтверждает приближение формулы (13) $O(\tau^3)$.

Последовательный алгоритм инициализации сначала на первом этапе по формулам (13), (15), (16), а затем по формулам (14), (18), (19) с помощью программы дает значение равномерной нормы норма $C = 8.299974534053955E-008$ при $M = 200$ и норма $C = 5.173976233563415E-009$ при $M = 400$, тогда $\frac{\Delta(200)}{\Delta(400)} = \frac{8.299974534053955E-008}{5.173976233563415E-009} = 16.04 \approx 2^4$. То есть алгебраический порядок погрешности алгоритма (13), (15), (16) и (14), (18), (19) равен четырем ($p = 4$), что подтверждает формулу (14), а именно $O(\tau^4)$.

Построим явную разностную схему для решения однородного уравнения, учитывая (3) для параметра $z = 1$

$$u_m^{n+1} = 2u_m^n + z(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n) - u_m^{n-1} = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1}, n = \overline{2, N}, m = \overline{1, M-1}. \quad (20)$$

Отметим, что формула (20) имеет бесконечный порядок аппроксимации, т.е. не вносит дополнительной погрешности аппроксимации дифференциального уравнения разностным уравнением.

Программа с учетом алгоритма инициализации по формулам (13), (15), (16), а затем по формулам (14), (18), (19) явной формуле (20) для первой части задачи (однородного уравнения) тестового примера 1

$$\begin{cases} u_{1t} = u_{1xx}, x \in (0, \pi), t > 0 \\ u_1(x, 0) = \sin(x), u_{1t}(x, 0) = \sin(2x), x \in [0, \pi] \\ u_1(0, t) = u_1(\pi, t) = 0, t \geq 0 \end{cases}$$

с точным решением $u_1(x, 0) = \cos t \sin x + \frac{\sin(2t)\sin(2x)}{2}$, $x \in [0, \pi]$, $t = 3\pi \approx 9.42477796$ возвращает равномерную норму относительной погрешности 7.214666558239686E-016 при $M = 50$ и норму 5.275261571720079E-015 при $M = 100$, $t = 9.42477796076938$.

Это означает что, во-первых, норма погрешности по формуле (20) не зависит от шага сетки при $z = 1$, во-вторых, с увеличением вычислений при меньшем шаге накапливается только большая абсолютная погрешность. В программе предусмотрен масштабный параметр $l = 10$ (в приведенном примере). Данный параметр позволяет экономить время счета в $l^2 = 100$ раз, а, главное, число арифметических операций в $l^2 = 100$, т.е. уменьшить абсолютную погрешность, пропорциональную числу арифметических операций.

Сначала инициализация проводится с шагом τ по времени по формулам (13), (15), (16), а затем по формулам (14), (18), (19), далее по явной формуле (20) с минимальными шагами сетки (h, τ) решается волновое уравнение $u_{lm}^{n+1} = u_{lm+1}^n + u_{lm-1}^n - u_{lm}^{n-1}$, $n = \overline{2, l}$, $m = \overline{1, M-1}$ во временном промежутке $[0, l \cdot \tau]$, $n \in \overline{0, l}$. Среди решения в слое $u_1(mh, l \cdot \tau)$, $m = \overline{0, M}$ и среди начального слоя $u_1(mh, 0)$, $m = \overline{0, M}$ выбираются узлы более редкой сетки $x_{m1} = h \cdot l \cdot m1$, $m1 = \overline{0, M/l}$, $t_{n1} = \tau \cdot l \cdot n1$, $n1 = \overline{0, 1}$, и решение на той же сетке $u_1(m1 \cdot h \cdot l, 0)$, $u_1(m1 \cdot h \cdot l, l \cdot \tau)$, $m1 = \overline{0, M/l}$.

Далее используется формула (20) с крупным вектором шага $(l \cdot h, l \cdot \tau)$, $1 = z = \tau^2 a^2 / h^2 \Leftrightarrow \tau = h / a$

$$u_{lm1}^{n1+1} = u_{lm1+1}^{n1} + u_{lm1-1}^{n1} - u_{lm1}^{n1-1}, n1 = \overline{2, N/l}, m1 = \overline{1, M/l-1}. \quad (21)$$

Рассмотрим вторую задачу инициализации с использованием условий на трех временных слоях

$$\varphi(x) = 0, x \in [a, b], u_t(x, 0) = \psi(x, 0) = 0, f(x, t) \neq 0,$$

$$\begin{cases} u_{2tt} = u_{2xx} + \sin(x)\sin(t), x \in (0, \pi), t > 0 \\ u_2(x, 0) = 0, u_{2t}(x, 0) = 0, x \in [0, \pi] \\ u_2(0, t) = u_2(\pi, t) = 0, t \geq 0, \end{cases} \quad u_2(x, t) = \frac{(\sin t - t \cos t) \sin(x)}{2}.$$

Формула (13) перейдет в $u(2\tau) \equiv u^2 = -3u^0 + 4u^1 - 2\tau u_\tau = 4u^1$, с учетом (3) получим

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} &= -u_m^{n-1} + 2(1-z)u_m^n + z(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n) + f_{m,n}\tau^2, u_m^2 = -u_m^0 + 2(1-z)u_m^1 + z(u_{m+1}^1 + u_{m-1}^1) + f_{m,1}\tau^2 = 4u_m^1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow zu_{m-1}^1 - 2(1+z)u_m^1 + zu_{m+1}^1 = -f_{m,1}\tau^2 + u_m^0 = -f_{m,1}\tau^2. \end{aligned} \quad (22)$$

В трехдиагональной матрице системы уравнений (22) коэффициенты

$$A_m = z, C_m = 2(1+z), B_m = z, F_m = u_m^0 - f_{m,1}\tau^2$$

обеспечивают условие корректной прогонки вперед $|C_m| \geq |A_m| + |B_m| > 0 \Leftrightarrow 2(1+z) > 2z > 0$ [3, с. 45].

Программа с использованием метода прогонки для алгоритма инициализации (23) относительно точного решения $u_2(x, \tau) = \frac{(\sin \tau - \tau \cdot \cos(\tau)) \sin(x)}{2}$ дает равномерную норму погрешности

норма $C = 1.291625408111898E-006$ при $M = 200$ и норма $C = 1.614815612291833E-007$ при $M = 400$, откуда $\frac{\Delta(200)}{\Delta(400)} = \frac{1.291625408111898E-006}{1.614815612291833E-007} = 7.9986 \approx 2^3$ алгебраический порядок погрешности $p = 3$.

Рассмотрим вторую задачу инициализации на четырех временных слоях, с учетом формул (14), (3) получим

$$u(3\tau) \equiv u^3 = \frac{11}{2}u^0 - 9u^1 + \frac{9}{2}u^2 + 3\tau u_\tau = -9u^1 + \frac{9}{2}u^2,$$

откуда

$$u_m^{n+1} = -u_m^{n-1} + 2(1-z)u_m^n + z(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n) + f_{m,n}\tau^2 \Leftrightarrow u_m^3 = -u_m^1 + 2(1-z)u_m^2 + z(u_{m+1}^2 + u_{m-1}^2) + f_{m,2}\tau^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= -9u_m^1 + \frac{9}{2}u_m^2 \Leftrightarrow 8u_m^1 - \left(\frac{5}{2} + 2z\right)u_m^2 + z(u_{m+1}^2 + u_{m-1}^2) = -f_{m,2}\tau^2 \Leftrightarrow \\
&8u_m^1 - \left(\frac{5}{2} + 2z\right)\left(-u_m^0 + 2(1-z)u_m^1 + z(u_{m+1}^1 + u_{m-1}^1) + f_{m,1}\tau^2\right) + \\
&+ z\left(-u_{m+1}^0 + 2(1-z)u_{m+1}^1 + z(u_{m+2}^1 + u_m^1) + f_{m+1,1}\tau^2 - u_{m-1}^0 + 2(1-z)u_{m-1}^1 + z(u_m^1 + u_{m-2}^1) + f_{m-1,1}\tau^2\right) = -f_{m,2}\tau^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow z^2u_{m-2}^1 - \left(\frac{1}{2}z + 4z^2\right)u_{m-1}^1 + u_m^1(3+z+6z^2) - \left(\frac{1}{2}z + 4z^2\right)u_{m+1}^1 + z^2u_{m+2}^1 = \\
&= -\left(f_{m,2} - \left(\frac{5}{2} + 2z\right)f_{m,1} + z(f_{m-1,1} + f_{m+1,1})\right)\tau^2. \quad (23)
\end{aligned}$$

Для параметра $z = 1$ уравнение (23) переходит в уравнение (24)

$$u_{m-2}^1 - \frac{9}{2}u_{m-1}^1 + 10u_m^1 - \frac{9}{2}u_{m+1}^1 + u_{m+2}^1 = -\left(f_{m,2} - \frac{9}{2}f_{m,1} + f_{m-1,1} + f_{m+1,1}\right)\tau^2. \quad (24)$$

Отметим, что коэффициенты пятидиагональной матрицы системы уравнений (24) $A_{m1}, A_{m2}, C_m, B_{m1}, B_{m2}$:

$$A_{m1} = 1, A_{m2} = -\frac{9}{2}, C_m = -10, B_{m1} = -\frac{9}{2}, B_{m2} = 1, F_m = -\left(f_{m,2} - \frac{9}{2}f_{m,1} + f_{m-1,1} + f_{m+1,1}\right)\tau^2$$

совпадают с коэффициентами матрицы системы (18) за исключением F_m . Однако корректность формул прогонки для пятидиагональной матрицы (18), которая определяется только коэффициентами $A_{m1}, A_{m2}, C_m, B_{m1}, B_{m2}$, доказана с помощью **утверждения 3**, следовательно, корректность формул прогонки для системы уравнений (24) также доказана.

Программа с использованием формул (16), (22), а затем (19), (24) в двухэтапном алгоритме инициализации относительно точного решения $u_2(x, \tau) = \frac{(\sin \tau - \tau \cdot \cos(\tau)) \sin(x)}{2}$ возвращает равномерную норму погрешности $\text{norma } C = 2.028797013322345\text{E-}008$ при $M = 200$, а $\text{norma } C = 1.268260177248376\text{E-}009$ при $M = 400$, откуда $\frac{\Delta(200)}{\Delta(400)} = \frac{2.028797013322345\text{E-}008}{1.268260177248376\text{E-}009} = 15.997 \approx 2^4 = 16$, т.е. алгебраический порядок погрешности для указанного алгоритма инициализации методом прогонки равен четырем ($p = 4$).

Наконец, нужно написать основную рекуррентную разностную формулу для решения неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями. Для параметра $z = 1$ преобразуем формулу (3)

$$u_m^{n+1} = -u_m^{n-1} + 2(1-z)u_m^n + z(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n) + f_{m,n}\tau^2 = -u_m^{n-1} + u_{m+1}^n + u_{m-1}^n + f_{m,n}\tau^2 + R(u_m^n). \quad (25)$$

В формуле (25) невязку аппроксимации неоднородного волнового уравнения (1) разностным уравнением (2) запишем согласно формуле (8) для $z = 1$ $n = \overline{2, N}, m = \overline{1, M-1}$

$$\begin{aligned}
u_m^{n+1} &= u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + f_{m,n}\tau^2 + \frac{2\tau^4}{4!} \left(a^2 \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial t^2} \right) + \frac{2\tau^6}{6!} \left(a^4 \frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial t^4} \right) + \\
&+ \frac{2\tau^8}{8!} \left(a^6 \frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial x^6} + a^4 \frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial x^4 \partial t^2} + a^2 \frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^4} + \frac{\partial^6 f_{m,n}}{\partial t^6} \right) + \\
&+ \frac{2\tau^{10}}{10!} \left(a^8 \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^8} + a^6 \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^6 \partial t^2} + a^4 \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^4 \partial t^4} + a^2 \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^6} + \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial t^8} \right) + \\
&+ \frac{2\tau^{12}}{12!} \left(a^{10} \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^{10}} + a^8 \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^8 \partial t^2} + a^6 \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^6 \partial t^4} + a^4 \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^4 \partial t^6} + a^2 \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial x^2 \partial t^8} + \frac{\partial^{10} f_{m,n}}{\partial t^{10}} \right) + \dots
\end{aligned} \quad (26)$$

Для примера 1 $f(x, t) = \sin(x)\sin(t)$, $a = 1$ согласно формуле (26) получим явную разностную схему

$$u_m^{n+1} = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + 2f_{m,n} \left(\frac{\tau^2}{2!} - \frac{2\tau^4}{4!} + \frac{3\tau^6}{6!} - \frac{4\tau^8}{8!} + \frac{5\tau^{10}}{10!} - \frac{6\tau^{12}}{12!} + \dots \right).$$

Поскольку $1 - \cos(\tau) = \frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^4}{4!} + \frac{\tau^6}{6!} - \dots \Leftrightarrow \frac{\tau}{2} \frac{d}{d\tau} (1 - \cos(\tau)) = \frac{\tau^2}{2!} - \frac{2\tau^4}{4!} + \frac{3\tau^6}{6!} - \frac{4\tau^8}{8!} + \frac{5\tau^{10}}{10!} - \frac{6\tau^{12}}{12!} + \dots$, то

$$u_m^{n+1} = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + \tau \sin(\tau) f_{m,n} = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + \tau \sin(\tau) \sin(mh) \sin(n\tau), \quad (27)$$

$n = \overline{1, N}$, $m = \overline{1, M-1}$.

В формуле (27) для бесконечного функционального ряда получена *производящая функция* $\tau \sin(\tau) f_{m,n}$.

Аналогично алгоритму (21) можно провести укрупнение шага в неоднородном уравнении. Сначала инициализация проводится с шагом τ по времени по формулам (16), (22), а затем по формулам (19), (24), далее по явной формуле (26) с минимальными шагами сетки (h, τ) решается волновое уравнение

$u_{2m}^{n+1} = u_{2m+1}^n + u_{2m-1}^n - u_{2m}^{n-1} + \tau \sin(\tau) \sin(mh) \sin(n\tau)$, $n = \overline{2, 2l}$, $m = \overline{1, M-1}$ во временном промежутке $[0, l \cdot \tau]$, $n \in \overline{0, l}$. Среди решения в слое $u_2(mh, l \cdot \tau)$, $m = \overline{0, M}$ и среди начального слоя $u_2(mh, 0) \equiv 0$, $m = \overline{0, M}$ выбираются узлы более редкой сетки $x_{m1} = h \cdot l \cdot m1$, $m1 = \overline{0, M/l}$, $t_{n1} = \tau \cdot l \cdot n1$, $n1 = \overline{0, 1}$ и решение на ней $u_2(m1 \cdot h \cdot l, 0) \equiv 0$, $u_2(m1 \cdot h \cdot l, l \cdot \tau)$, $m1 = \overline{0, M/l}$.

Далее используется формула (27) с крупным шагом $(l \cdot h, l \cdot \tau)$, $1 = z = \tau^2 a^2 / h^2 \Leftrightarrow \tau = h / a$

$$u_{2m1}^{n1+1} = u_{2m1+1}^{n1} + u_{2m1-1}^{n1} - u_{2m1}^{n1-1} + \tau \cdot l \cdot \sin(\tau \cdot l) \sin(m1 \cdot h \cdot l) \sin(n1 \cdot \tau \cdot l), \quad n1 = \overline{2, N/l}, \quad m1 = \overline{1, M/l-1}. \quad (28)$$

Программа с учетом алгоритма укрупнения шага для тестового примера 1

$$\begin{cases} u_{2tt} = u_{2xx} + \sin(x)\sin(t), & x \in (0, \pi), t > 0, \\ u_2(x, 0) = 0, u_{2t}(x, 0) = 0, & x \in [0, \pi], \\ u_2(0, t) = u_2(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad u_2(x, t) = \frac{(\sin t - t \cos t) \sin(x)}{2}$$

с точным решением $u_2(x, t) = \frac{(\sin t - t \cos t) \sin(x)}{2}$, $x \in [0, \pi]$, $t = 3\pi \approx 9.42477796$ возвращает равномерную норму относительной погрешности $\text{norma } C = 3.769546289141946\text{E-}015$ при $M = 100, l = 10$, $t = 9.42477796076938$.

Для суммы решений $u(x, t) = \frac{(\sin t - t \cos t) \sin(x)}{2} + \cos t \sin x + \frac{\sin(2t) \sin(2x)}{2}$ программа возвращает равномерную норму относительной погрешности $\text{norma } C = 7.578604648156152\text{E-}016$. Следовательно, мы можем сказать, что приведенные нами алгоритмы численного решения волнового неоднородного уравнения на отрезке имеют двойную точность относительной погрешности 10^{-16} .

Таблица 1.

x	exact	numerical
0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
0.314159265358979	1.14719128466915	1.14719128466915
0.628318530717959	2.18208749344321	2.18208749344321
0.942477796076938	3.00338577486150	3.00338577486150
1.25663706143592	3.53069173081718	3.53069173081718
1.57079632679490	3.71238898038469	3.71238898038469
1.88495559215388	3.53069173081718	3.53069173081718
2.19911485751286	3.00338577486150	3.00338577486150
2.51327412287183	2.18208749344321	2.18208749344321
2.82743338823081	1.14719128466915	1.14719128466915
3.14159265358979	4.546215133239269E-016	0.000000000000000E+000

В таблице используются следующие обозначения: x – координата узла; exact, numerical – точное и численное решения для примера 1.

Тестовый пример 2.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin(x)t, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(x), u_t(x, 0) = \sin(2x), & x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Можно проверить, что решением последней задачи является функция

$$u(x, t) = \cos t \sin x + \frac{\sin(2t) \sin(2x)}{2} + \sin x(t - \sin t).$$

Применяя формулу (27) для неоднородной части $f(x, t) = \sin(x)t$, $a = 1$, получим

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} &= u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + 2f_{m,n} \left(\frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^4}{4!} + \frac{\tau^6}{6!} - \frac{\tau^8}{8!} + \frac{\tau^{10}}{10!} - \frac{\tau^{12}}{12!} + \dots \right) = \\ &= u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + 2(1 - \cos(\tau)) f_{m,n} = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + 2(1 - \cos(\tau)) \sin(mh)(n\tau), \quad m = \overline{1, M-1}, n = \overline{1, N-1}. \end{aligned}$$

В данном случае мы получили другую *производящую функцию* $2(1 - \cos(\tau)) f_{m,n}$. Повторяя вычислительные алгоритмы для примера 1, получим, что программа при $M = 100$, $l = 10$, $t = 9.42477796076938$ для примера 2 возвращает для суммы решений $u(x, t) = \cos t \sin x + \frac{\sin(2t) \sin(2x)}{2} + \sin x(t - \sin t)$ равномерную норму относительной погрешности $\text{погрм} C = 3.005569483512412\text{E-}015$.

Относительная погрешность определяется как дробь, числитель которой есть равномерная норма абсолютной погрешности на последнем временном слое, а знаменатель равен среднему арифметическому по всем узлам от модуля точного решения. Прямое использование ряда в виде формулы $u_m^{n+1} = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + 2f_{m,n} \left(\frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^4}{4!} + \frac{\tau^6}{6!} - \frac{\tau^8}{8!} + \frac{\tau^{10}}{10!} - \frac{\tau^{12}}{12!} + \dots \right)$ дает значение относительной погрешности $\text{погрм} C = 2.337665153842987\text{E-}015$, т.е. не хуже, чем с помощью производящей функции. Очевидно, применение производящих функции экономнее для решения волнового уравнения в двухмерном и трехмерном случаях.

Таблица 2. (для примера 2)

x	exact	numerical
0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
0.314159265358979	2.60339956371325	2.60339956371325
0.628318530717959	4.95196023917890	4.95196023917890
0.942477796076938	6.81578854409794	6.81578854409794
1.25663706143592	8.01243997792951	8.01243997792951
1.57079632679490	8.42477796076938	8.42477796076938
1.88495559215388	8.01243997792951	8.01243997792951
2.19911485751286	6.81578854409794	6.81578854409794
2.51327412287183	4.95196023917890	4.95196023917889
2.82743338823081	2.60339956371325	2.60339956371325
3.14159265358979	1.031703662030091E-015	0.000000000000000E+000

Тестовый пример 3.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin(x) \operatorname{ch}(t), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(x), u_t(x, 0) = \sin(2x), & x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Точным решением последнего примера является функция

$$u(x, t) = \cos(t) \sin(x) + \frac{\sin(2t) \sin(2x)}{2} + \frac{\sin(x)(\operatorname{ch}(t) - \cos(t))}{2},$$

отметим, что неоднородная часть уравнения $f(x, t) = \sin(x) \operatorname{ch}(t)$, $a = 1$ удовлетворяет однородному волновому уравнению (9) комплексного аргумента $a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, a^2 > 0$. В этом случае согласно формуле (11) запишем невязку

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} &= u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + f_{m,n} \tau^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau^{4k+2}}{(4k+2)!} \frac{\partial^{4k} f_{m,n}}{\partial t^{4k}} = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + f_{m,n} \tau^2 + \\ &+ \frac{2\tau^6}{6!} \frac{\partial^4 f_{m,n}}{\partial t^4} + \frac{2\tau^{10}}{10!} \frac{\partial^8 f_{m,n}}{\partial t^8} + \frac{2\tau^{14}}{14!} \frac{\partial^{12} f_{m,n}}{\partial t^{12}} + \dots = u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + 2f_{m,n} \left(\frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^6}{6!} + \frac{\tau^{10}}{10!} + \frac{\tau^{14}}{14!} + \dots \right) = \\ &= u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - u_m^{n-1} + f_{m,n} (\operatorname{ch}(\tau) - \cos(\tau)), \text{ так как } \operatorname{ch}(\tau) - \cos(\tau) = \frac{1}{2} (e^\tau + e^{-\tau}) - \cos(\tau) = \\ &= \frac{1}{2} (e^\tau + e^{-\tau}) - \cos(\tau) = \frac{2}{2} \left(1 + \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^4}{4!} + \dots + \frac{\tau^{2k}}{(2k)!} + \dots \right) - \left(1 - \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^4}{4!} + \dots + (-1)^k \frac{\tau^{2k}}{(2k)!} \right) = \\ &= \tau^2 + 2 \left(\frac{\tau^6}{6!} + \frac{\tau^{10}}{10!} + \frac{\tau^{14}}{14!} + \dots + \frac{\tau^{2+4k}}{(2+4k)!} + \dots \right). \end{aligned}$$

Для точного решения $u(x, t) = \cos t \sin x + \frac{\sin(2t) \sin(2x)}{2} + s \frac{\sin(x)(\operatorname{ch}(t) - \cos(t))}{2}$ программа в примере 3 для $M = 100, l = 10, t = 9.42477796076938$ возвращает норму относительной погрешности норма $C = 2.557857845110683\text{E-}015$. Производящая функция равна $f_{m,n} (\operatorname{ch}(\tau) - \cos(\tau))$.

Таблица 3. (для примера 3)

x	exact	numerical
0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
0.314159265358979	957.152937976024	957.152937976022
0.628318530717959	1820.61307750630	1820.61307750629
0.942477796076938	2505.85892405305	2505.85892405305
1.25663706143592	2945.81383976773	2945.81383976773
1.57079632679490	3097.41197215405	3097.41197215405
1.88495559215388	2945.81383976773	2945.81383976773
2.19911485751286	2505.85892405305	2505.85892405305
2.51327412287183	1820.61307750630	1820.61307750630
2.82743338823081	957.152937976024	957.152937976023
3.14159265358979	3.793110381505353E-013	0.000000000000000E+000

Программа для решения волнового уравнения на отрезке написана на языке Fortran. В ней используются условия из первого примера. Помимо численного решения, если известно аналитическое решение, с помощью программы можно вычислить норму Чебышева для невязки как на этапе инициализации, так и на последнем временном слое решения. Норма относительной погрешности невязки выводится по отдельности для частных подзадач с неоднородными волновым уравнением и начальными условиями, а также относительной погрешности для общей задачи. Если аналитическое решение не известно, то в первом столбце таблицы выводятся координаты узлов сетки, в третьем столбце – численное решение. Вычисление норм в этом случае не определено.

```
program wave
integer(8), parameter::n=100,n1=10,ll=n/n1,m=3;integer(8)::i,j,k
real(8):: num(0:n+1,0:m*n+1),num0(0:n+1,0:m*n+1)
```

```

real(8)::par(0:n+1),sum,s,tay2,f00(0:n+1)
real(8)::res1(0:n+1),l(0:n+1),f0(0:n+1),aa33(0:n+1), res2(0:n+1)
real(8):: aa(0:n+1),bb(0:n+1),cc(0:n+1),ff(0:n+1),ccc(0:n+1),otv(0:n+1),otv0(0:n+1)
real(8)::eps(0:n+1),nu(0:n+1),eps0(0:n+1),f11(0:n+1),f22(0:n+1)
real(8)::a1(0:n+1), a2(0:n+1), b1(0:n+1), b2(0:n+1),aa11(0:n+1),cc11(0:n+1),bb11(0:n+1)
real(8)::eps00(0:n+1),otv00(0:n+1), l1(0:n+1),l2(0:n+1),res3(0:n+1)
real(8):: aa1(0:n+1),bb1(0:n+1),aa2(0:n+1),bb2(0:n+1),aa3(0:n+1),bb3(0:n+1)
real(8)::max1,max2,max3,max4,max44,epss(0:n+1);real(8)::max5,ch,t,yy,max55,mm,tay1,c1
real(8)::u1,u0,f1,f2,fan,z,vel,x,y,a,b,c,d,pi,h1,tay,tt,x1,x2,x3,x4,hh,fy
!ch(t)=(dexp(t)+dexp(-t))/2d0;
fy(x,tay)=dsin(x)*dsin(tay);u1(x)=dsin(x)
fan(x,t)=dsin(x)*dcos(t)+dsin(2d0*x)*dsin(2d0*t)/2d0;f1(x,tay)=-2d0*u0(x)-2d0*tay*u1(x)
f2(x,t)=dsin(x)*(dsin(t)-t*dcos(t))/2d0;pi =2d0*dasin(1d0);a=0d0;b=pi;
z=1d0;vel=1d0;max1=-100d0;max2=-100d0;max4=-100d0;max44=-100d0
max5=-100d0;max55=-1000d0;mm=-100d0;h1=(b-a)/dfloat(n);tay=dsqrt(z)*h1/vel
do k=0,n;x=a+h1*dfloat(k);x2=x+h1;x1=x-h1;x4=x+2d0*h1;x3=x-2d0*h1
aa(k)=1d0;bb(k)=1d0;cc(k)=4d0;f0(k)=f1(x,tay);ff(k)= 3d0*u1(x)*tay+u0(x1)+u0(x2)+u0(x)
a1(k)=1d0;a2(k)=-4.5d0;b2(k)=1d0;b1(k)=-4.5d0;ccc(k)=-10d0;aa1(k)=1d0
bb3(k)=1d0;f11(k)=-fy(x,tay)*tay*tay;aa11(k)=z;bb11(k)=z;cc11(k)=2d0+2d0*z
f22(k)=-((fy(x1,tay)+fy(x2,tay))+fy(x,2d0*tay)-4.5d0*fy(x,tay))*tay*tay
enddo;nu(0)=0d0;nu(n)=0d0;l(0)=0d0;l(n)=0d0;res1(0)=nu(0);res1(n)=nu(n)
do k=1,n-1;x=a+h1*dfloat(k);f0(k)=f1(x,tay);nu(k)=(aa(k)*nu(k-1)-f0(k))/(cc(k)-aa(k)*l(k-1))
l(k)= bb(k)/(cc(k)-aa(k)*l(k-1));enddo;do k=n-1,1,-1;res1(k)= l(k)*res1(k+1)+nu(k);enddo
do j=0,n;x=a+h1*dfloat(j);par(j)=fan(x,tay);eps(j)= par(j)-res1(j)
if( eps(j)<=0d0 )then;eps(j)=-eps(j);else;endif;enddo;do j=0,n
if( eps(j)>=max1 )then;max1= eps(j);endif;enddo;print*, "norma C1=",max1
do k=0,n;res2(k)= res1(k);enddo
l1(0)=0d0;l1(1)=0d0;l2(0)=0d0;l2(1)=0d0;l1(n)=0d0;l2(n)=0d0;l1(n-1)=0d0
l2(n-1)=0d0;nu(n-1)=res2(n-1);nu(n)=res2(n);nu(1)=res2(1);nu(0)=res2(0);do j=2,n-2,1
l1(j)=(a1(j)*l1(j-2)*l2(j-1)+a2(j)*l2(j-1)+b1(j))/(ccc(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a2(j)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2))
l2(j)=b2(j)/(ccc(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2)-a2(j)*l1(j-1))
nu(j)=(a1(j)*l1(j-2)*nu(j-1)+a2(j)*nu(j-1)+a1(j)*nu(j-2)-ff(j))/(ccc(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2)-
a2(j)*l1(j-1)); enddo
do j=n-2,0,-1;res2(j)=l1(j)*res2(j+1)+l2(j)*res2(j+2)+nu(j);enddo;do j=0,n
x=a+h1*dfloat(j);par(j)=fan(x,tay);eps(j)= par(j)-res2(j);if( eps(j)<=0d0 )then
eps(j)=-eps(j);else;endif;enddo;do j=0,n;if( eps(j)>=max1 )then;max1= eps(j);endif;enddo
do j=2,n-2;if(eps(j)>=max2)then;max2=eps(j);endif;if(mod(j,n1)==0)then;endif;enddo
print*, "norma C2=",max2;do i=0,n;if(mod(i,n1)==0)then;endif;enddo
do j=0,n1;x=a+h1*dfloat(j);num0(0,j)=0d0;num0(n,j)=0d0;num0(j,0)=u0(x);num0(j,1)=res2(j)
enddo;do j=1,n1-1;do i=1,n-1
num0(i,j+1)=num0(i+1,j)+num0(i-1,j)-num0(i,j-1);enddo;enddo;tay1=tay*dfloat(n1)
hh=h1*dfloat(n1);t=dfloat(n*m)*tay;num0(0,1)=0d0;num0(1,1)=0d0;num0(0,0)=0d0;num0(1,0)=0d0
do i=0,11;x=a+hh*dfloat(i);num0(i,1)=num0(i,n1);num0(i,0)=u0(x)
num0(0,i)=0d0;num0(1,i)=0d0;otv(i)=fan(x,t);enddo
do j=0,11*m;num0(0,j)=0d0;num0(11,j)=0d0;enddo
do j=1,11*m-1;do i=1,11-1;num0(i,j+1)=num0(i+1,j)+num0(i-1,j)-num0(i,j-1);enddo;enddo
do i=0,11;eps0(i)=num0(i,11*m)-otv(i);if(eps0(i)<0d0)then;eps0(i)=-eps0(i);endif
if(eps0(i)>max44)then;max44=eps0(i);endif
s=s+abs(otv(i));enddo;print*, "norma C404=",max44,max44*dfloat(11)/s
nu(0)=0d0;nu(n)=0d0;l(0)=0d0;l(n)=0d0;res1(0)= nu(0);res1(n)= nu(n)
do k=1,n-1;x=a+h1*dfloat(k);nu(k)=(aa11(k)*nu(k-1)-f11(k))/(cc11(k)-aa11(k)*l(k-1))
l(k)= bb11(k)/(cc11(k)-aa11(k)*l(k-1));enddo;do k=n-1,1,-1;res1(k)= l(k)*res1(k+1)+nu(k);enddo
do j=0,n;x=a+h1*dfloat(j);par(j)=f2(x,tay);eps(j)= par(j)-res1(j)
if( eps(j)<=0d0 )then;eps(j)=-eps(j);else;endif;enddo;do j=0,n
if( eps(j)>=max4 )then;max4= eps(j);endif;enddo;print*, "norma C101=",max4;do k=0,n
res2(k)= res1(k);enddo;l1(0)=0d0;l1(1)=0d0;l2(0)=0d0;l2(1)=0d0
l1(n)=0d0;l2(n)=0d0;l1(n-1)=0d0;l2(n-1)=0d0;nu(n-1)=res2(n-1)
nu(n)=res2(n);nu(1)=res2(1);nu(0)=res2(0);do j=2,n-2,1
l1(j)=(a1(j)*l1(j-2)*l2(j-1)+a2(j)*l2(j-1)+b1(j))/(ccc(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a2(j)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2))
l2(j)=b2(j)/(ccc(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2)-a2(j)*l1(j-1))

```

```

nu(j)=(a1(j)*l1(j-2)*nu(j-1)+a2(j)*nu(j-1)+a1(j)*nu(j-2)-f22(j))/(ccc(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2)-
a2(j)*l1(j-1))
enddo ;do j=n-2,0,-1;res2(j)=l1(j)*res2(j+1)+l2(j)*res2(j+2)+nu(j);enddo
do j=0,n;x=a+h1*dfloat(j);par(j)=f2(x,tay);eps(j)= par(j)-res2(j);if(mod(j,n1)==0)then;endif
if( eps(j)<=0d0 )then;eps(j)=-eps(j);else;endif;enddo;do j=0,n
if( eps(j)>=max5 )then;max5= eps(j);endif;enddo;do j=0,n;if(eps(j)>=max5)then;max5=eps(j);endif;enddo
print*,"norma C202=",max5;do j=0,n;x=a+h1*dfloat(j);num(j,0)=0d0;num(j,1)=res2(j);enddo
do j=1,n1-1;do i=1,n-1;x=a+h1*dfloat(i);y=tay*dfloat(j)
num(i,j+1)=num(i+1,j)+num(i-1,j)-num(i,j-1)+fy(x,t)*tay*dsin(tay);enddo;enddo
do i=0,n;res3(i)=num(i,n1);enddo;t=tay*dfloat(n*m);print*,"t=",t
do i=0,ll;x=a+hh*dfloat(i);num(i,1)=res3(i*n1);num(i,0)=0d0;otv(i)=f2(x,t);enddo
do j=0,ll*m;num(0,j)=0d0;num(ll,j)=0d0;enddo;do j=1,ll*m-1;do i=1,ll-1
x=a+hh*dfloat(i);t=tay1*dfloat(j)
num(i,j+1)=num(i+1,j)+num(i-1,j)-num(i,j-1)+fy(x,t)*tay1*dsin(tay1);enddo;enddo;s=0d0
do i=0,ll;eps(i)=num(i,ll*m)-otv(i);if(eps(i)<=0d0)then;eps(i)=-eps(i);endif
if(eps(i)>=max55)then; max55=eps(i);endif;if(otv(i)>=maax)then;maax=otv(i);endif;enddo
print*,"norma C505=",max55,max55*dfloat(ll)/maax;t=tay1*dfloat(m*ll);s=0d0
do i=0,ll;otv00(i)=num(i,ll*m)+num(0,ll*m);x=a+hh*dfloat(i);res3(i)=f2(x,t)+fan(x,t)
epss(i)=otv00(i)-res3(i);if(epss(i)<0d0)then;epss(i)=-epss(i);endif
s=s+res3(i);if(epss(i)>mm)then;mm=epss(i);endif;print*,"x,res3(i),otv00(i)
enddo;print*,"eps=(norma C)/abs(m)_=",mm*dfloat(ll)/s,"abs(m)_=",s/dfloat(ll);end program wave

```

В работе получены результаты:

1. Показано, что явная разностная схема задачи (2) аппроксимирует одномерное однородное волновое уравнение на отрезке задачи (1) с оптимальным параметром сетки $z = 1$ с бесконечным алгебраическим порядком аппроксимации, при этом явная разностная схема спектрально устойчива.
2. Для неоднородного волнового уравнения с параметром $z = 1$ невязка разностной схемы может быть учтена и явно выражена только через двойную сумму от частных производных правой части неоднородного уравнения (7).
3. Введено понятие волнового уравнения комплексного аргумента и рассмотрены свойства его решения. Если правая часть неоднородного волнового уравнения является решением однородного волнового уравнения комплексного аргумента, то невязка упрощается от суммы по двум индексам до суммы по одному индексу (11), что качественно уменьшает число вычислений.
4. Построен алгоритм инициализации задачи, то есть аппроксимация второго временного слоя решения по известным начальным данным (начальным смещению и скорости точек отрезка).
5. Инициализация сводится к решению СЛАУ с симметричной трехдиагональной матрицей с погрешностью аппроксимации $O(\tau^3)$, затем к симметричной пятидиагональной матрице с погрешностью аппроксимации $O(\tau^4)$. Найдены ослабленные достаточные условия корректности формул прогонки для пятидиагональной матрицы (условия более слабые, чем диагональное преобладание элементов матрицы).
6. Предложен алгоритм масштабирования узловой решетки по числу узлов в l^2 раз, что сокращает число вычислений в сотни раз при сохранении вычислений с двойной точностью (15-16 первых десятичных знаков результата).
7. Программа тестировалась тремя построенными аналитическими примерами. Показано, что в примерах бесконечный функциональный ряд в разностной схеме относительно временного шага τ можно заменить производящей функцией от τ , что качественно снижает время вычислений и увеличивает их точность. С помощью программы показано, что построенный алгоритм дает решение 3 примеров с двойной точностью. В самом общем случае с помощью формулы (26) в виде двойного ряда можно достичь 14-го порядка погрешности (приближение $O(\tau^{14})$), причем формула (26) имеет ту же относительную погрешность решения, как и с применением производящей функции, т.е. с двойной точностью.
8. Полученные результаты можно применить, например, при анализе физических систем, рассмотренных в работе [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Пикулин, В.П. Практический курс по уравнениям математической физики : учеб. пособие / В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. – М. : Наука, 1995. – 224 с.

2. Методы ускорения газодинамических расчетов на неконструированных сетках / К.Н. Волков [и др.]. – М. : Физматлит, 2013. – 536 с.
3. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики : учеб. пособие / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М. : Изд-во ЛКИ, 2014. – 480 с.
4. Бахвалов, Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях : учеб. пособие / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 240 с. : ил.
5. Киттель, Ч. Введение в физику твердого тела : учеб. руководство : пер. с англ. / Ч. Киттель. – 4 изд. – М. : Наука, 1978. – 792 с.
6. Вакуленко, С.П. К методу оценки состояния железнодорожного полотна / С.П. Вакуленко, К.А. Волосов, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2016. – Т. 14, № 3 (64). – С. 20–35.
7. Пастухов, Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.
8. Пастухов, Д.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.
9. Пастухов, Д.Ф. Классификация профилей температуры в плюс-минус односантиметровом слое от поверхности раздела геотермального озера / Д.Ф. Пастухов // Вестник Московского университета. Серия 3, Физика. Астрономия. – 1995. – Т. 36, № 6. – С. 84–89.

Поступила 28.02.2018

OPTIMUM PARAMETER TO APROXIMATIONS RAZNOSTNOY SCHEMES OF THE WAVE EQUATION ON LENGTH

D. PASTUKHOV, Y. PASTUKHOV, N. VOLOSOVA

The Offered algorithm of the decision initial- marginal problem for lumpy wave equation on length with double accuracy. The Algorithm is founded on choice of the optimum parameter, providing endless algebraic order to approximations to uniform equation. For decision of the system of the linear equations with five diagonal matrixes with marginal condition Dirihle is proved sufficient conditions to correctness molded racing on-ward more weak, than condition of the diagonal prevalence her(its) element. Using the algorithm of the integration cell nets and use the method producing function gives double accuracy to relative inaccuracy of the decision even rough net with number of the nodes equal 300.

Keywords: *method producing function, initializing the problem, weak sufficient conditions to correctness molded racing symmetrical five diagonal matrixes.*

УДК 517.983

ДВУМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ С МОДИФИЦИРОВАННОЙ Н-ФУНКЦИЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

канд. физ.-мат. наук, доц. **О.В. СКОРОМНИК**
(Полоцкий государственный университет)

Рассмотрен двумерный аналог модифицированного Н-преобразования с Н-функцией в ядре в пространстве интегрируемых функций в области $R_{++}^2 = R_+^1 \times R_+^1$. Даны условия ограниченности, описание образа изучаемого оператора преобразования, а также устанавливается формула его обращения. Полученные результаты обобщают полученные ранее для соответствующего одномерного модифицированного Н-преобразования.

Ключевые слова: одномерное и двумерное интегральные модифицированные Н-преобразования, преобразование Меллина, Н-функция, пространство интегрируемых функций.

1. Введение. Рассматривается интегральное преобразование

$$\left(H_{\sigma, \kappa}^1 f \right)(x) = x^\sigma \int_0^x H_{p, q}^{m, n} \left[\frac{x}{t} \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1, p} \\ (b_j, \beta_j)_{1, q} \end{matrix} \right. \right] t^\kappa f(t) \frac{dt}{t} \quad (x > 0), \quad (1.1)$$

где $x = (x_1, x_2) \in R^2$; $t = (t_1, t_2) \in R^2$ – векторы;

$x \cdot t = \sum_{k=1}^2 x_k t_k$ – их скалярное произведение, в частности $x \cdot 1 = \sum_{k=1}^2 x_k$ для $1 = (1, 1)$; $x > t$ означает

$x_1 > t_1, x_2 > t_2$ и аналогично для знаков $\geq, <, \leq$; $\int_0^x := \int_0^{x_1} \int_0^{x_2}$;

$m = (m_1, m_2) \in Z_+^2 \cup 0$ и $m_1 = m_2$; $n = (n_1, n_2) \in Z_+^2 \cup 0$ и $n_1 = n_2$; $p = (p_1, p_2) \in Z_+^2 \cup 0$ и $p_1 = p_2$; $q = (q_1, q_2) \in Z_+^2 \cup 0$ и $q_1 = q_2$; $(0 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p)$;

$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in C^2$; $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2) \in C^2$;

$a_i = (a_{i_1}, a_{i_2})$, $1 \leq i \leq p$, $a_{i_1}, a_{i_2} \in C$ ($1 \leq i_1 \leq p_1, 1 \leq i_2 \leq p_2$); $b_j = (b_{j_1}, b_{j_2})$, $1 \leq j \leq q$, $b_{j_1}, b_{j_2} \in C$ ($1 \leq j_1 \leq q_1, 1 \leq j_2 \leq q_2$);

$\alpha_i = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2})$, $1 \leq i \leq p$, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2} \in R_+^1$ ($1 \leq i_1 \leq p_1, 1 \leq i_2 \leq p_2$); $\beta_j = (\beta_{j_1}, \beta_{j_2})$, $1 \leq j \leq q$, $\beta_{j_1}, \beta_{j_2} \in R_+^1$ ($1 \leq j_1 \leq q_1, 1 \leq j_2 \leq q_2$);

$k = (k_1, k_2) \in N = N \times N$ ($k_1 \in N, k_2 \in N$) – индекс с $k! = k_1! k_2!$ и $|k| = k_1 + k_2$; $D^k = \frac{\partial^{|k|}}{(\partial x_1)^{k_1} (\partial x_2)^{k_2}}$;

$dt = dt_1 \cdot dt_2$; $t^K = t^{K_1} \cdot t^{K_2}$; $f(t) = (t_1, t_2)$;

$H_{p, q}^{m, n} \left[\frac{x}{t} \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1, p} \\ (b_j, \beta_j)_{1, q} \end{matrix} \right. \right]$ – функция следующего вида:

$$H_{p, q}^{m, n} \left[\frac{x}{t} \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1, p} \\ (b_j, \beta_j)_{1, q} \end{matrix} \right. \right] = \prod_{k=1}^2 H_{p_k, q_k}^{m_k, n_k} \left[\frac{x_k}{t_k} \left| \begin{matrix} (a_{i_k}, \alpha_{i_k})_{1, p_k} \\ (b_{j_k}, \beta_{j_k})_{1, q_k} \end{matrix} \right. \right] = H_{p_1, q_1}^{m_1, n_1} \left[\frac{x_1}{t_1} \left| \begin{matrix} (a_{i_1}, \alpha_{i_1})_{1, p_1} \\ (b_{j_1}, \beta_{j_1})_{1, q_1} \end{matrix} \right. \right] \cdot H_{p_2, q_2}^{m_2, n_2} \left[\frac{x_2}{t_2} \left| \begin{matrix} (a_{i_2}, \alpha_{i_2})_{1, p_2} \\ (b_{j_2}, \beta_{j_2})_{1, q_2} \end{matrix} \right. \right], \quad (1.2)$$

представляющая собой произведение Н-функций $H_{p, q}^{m, n} [z]$.

Настоящая работа посвящена изучению преобразования (1.1) в весовых пространствах $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$, $\bar{v} = (v_1, v_2) \in R^2$ ($v_1 = v_2$), $\bar{2} = (2, 2)$, интегрируемых функций $f(x) = f(x_1, x_2)$ на R_+^2 , для которых $\|f\|_{\bar{v}, \bar{2}} < \infty$, где

$$\|f\|_{\bar{v}, \bar{2}} = \left\{ \int_{R_+^1} x_2^{v_2 \cdot 2 - 1} \left[\int_{R_+^1} x_1^{v_1 \cdot 2 - 1} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 \right] dx_2 \right\}^{1/2} < \infty.$$

Даются условия ограниченности оператора преобразования (1.1), описание образа этого оператора, а также устанавливается формула его обращения.

Полученные результаты обобщают установленные ранее для соответствующего одномерного модифицированного Н-преобразования [1, гл. 5].

2. Предварительные сведения. Для целых неотрицательных m, n, p, q ($0 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p$), комплексных $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ и положительных α_i, β_j ($1 \leq i \leq p, 1 \leq n \leq q$) значений H -функция $H_{p,q}^{m,n}[z]$ определяется интегралом Меллина – Барнса:

$$H_{p,q}^{m,n}[z] \equiv H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) z^{-s} ds, \quad z \neq 0, \quad (2.1)$$

где

$$\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) \equiv \mathcal{H}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + \beta_j s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)}{\prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i + \alpha_i s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - \beta_j s)}. \quad (2.2)$$

Здесь L – специально выбранный бесконечный контур, а пустые произведения, если таковые имеются, считаются равными единице. Более подробно с теорией H -функции (2.1) можно ознакомиться в [1, гл. 1–2].

H -преобразованием называют интегральное преобразование [1]

$$(Hf)(x) = \int_0^\infty H_{p,q}^{m,n} \left[xt \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] f(t) dt, \quad (2.3)$$

содержащее H -функцию (2.1) в ядре.

Нам потребуется модифицированное H -преобразование вида

$$(H_{\sigma,\kappa}^1 f)(x) = x^\sigma \int_0^\infty H_{p,q}^{m,n} \left[\frac{x}{t} \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] t^\kappa f(t) \frac{dt}{t} \quad (x > 0) \quad (2.4)$$

с H -функцией (2.1) $H_{p,q}^{m,n}[z]$ в ядре.

Преобразование (2.4) является модификацией H -преобразования, обобщающего многие интегральные преобразования: преобразования с G -функцией Мейера, преобразования Лапласа и Ханкеля, преобразования с гипергеометрической функцией Гаусса, преобразования с другими функциями гипергеометрического и бесселева типа. Обзор результатов и библиография работ по этой тематике даны в [1, гл. 6–8].

Введем пространство $\mathfrak{L}_{v,r}$ измеримых по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначных функций f на $R_+ = (0, \infty)$, для которых $\|f\|_{v,r} < \infty$, где

$$\|f\|_{v,r} = \left(\int_0^\infty \left| t^v f(t) \right|^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (1 \leq r < \infty, v \in \mathbb{R}), \quad (2.5)$$

заметим, что

$$\|f\|_{\mathfrak{L}_{v,r}} = \|f\|_{L_r(R_+, t^{vr-1})}, \quad (1 \leq r < \infty, v \in \mathbb{R}).$$

Для функции $f \in \mathfrak{L}_{v,r}$ ($1 \leq r \leq 2$) преобразование Меллина $\mathfrak{M}f$ определяется равенством [2, 3]

$$(\mathfrak{M}f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^\tau) e^{s\tau} d\tau \quad (s = v + it; \quad v, t \in \mathbb{R}). \quad (2.6)$$

Если $f \in \mathcal{L}_{v,r} \cap \mathcal{L}_{v,1}$, $\operatorname{Re}(s) = v$, то (2.6) совпадает с обычным преобразованием Меллина:

$$(\mathfrak{M}f)(s) = f^*(s) = \int_0^{+\infty} f(t)t^{s-1} dt. \quad (2.7)$$

Двумерное преобразование Меллина функции $f(x) = f(x_1, x_2)$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, определяется формулой [3, формула 1.4.42]

$$(\mathfrak{M}f)(s) = f^*(s) = \int_{R_{++}^2} f(t)t^{s-1} dt, \quad (2.8)$$

где $R_{++}^2 = \{t = (t_1, t_2) \in R^2 : t_j > 0 \ (j=1,2)\}$, $s = (s_1, s_2)$, $s_j \in C \ (j=1,2)$.

Формула преобразования Меллина от $H_{\sigma,\kappa}^1$ -преобразования (2.4) для «достаточно хороших» функций f имеет вид [1, (5.1.14)]

$$(\mathfrak{M} H_{\sigma,\kappa}^1 f)(s) = \mathcal{H}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s + \sigma \right] (\mathfrak{M}f)(s + \sigma + \kappa), \quad (2.9)$$

где $\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s)$ дается выражением (2.2).

Для формулировки утверждений, представляющих $\mathcal{L}_{v,2}$ -теорию и формулы обращения модифицированного Н-преобразования (2.4), нам понадобятся перенос следующие постоянные, определяемые через параметры H -функции (2.1) [1, (3.4.1), (3.4.2), (1.1.7), (1.1.8), (1.1.10)]:

$$\alpha = \begin{cases} -\min_{1 \leq j \leq m} \left[\frac{\operatorname{Re}(b_j)}{\beta_j} \right], & m > 0; \\ -\infty, & m = 0; \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} \min_{1 \leq i \leq n} \left[\frac{1 - \operatorname{Re}(a_i)}{\alpha_i} \right], & n > 0; \\ \infty, & n = 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

$$a^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=n+1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^m \beta_j - \sum_{j=m+1}^q \beta_j, \quad \Delta = \sum_{j=1}^q \beta_j - \sum_{i=1}^p \alpha_i, \quad (2.11)$$

$$\mu = \sum_{j=1}^q b_j - \sum_{i=1}^p a_i + \frac{p-q}{2}, \quad (2.12)$$

$$\alpha_0 = \begin{cases} 1 + \max_{m+1 \leq j \leq q} \left[\frac{\operatorname{Re}(b_j) - 1}{\beta_j} \right], & q > m; \\ -\infty, & q = m; \end{cases} \quad \beta_0 = \begin{cases} 1 + \min_{n+1 \leq i \leq p} \left[\frac{\operatorname{Re}(a_i)}{\alpha_i} \right], & p > n; \\ \infty, & p = n. \end{cases} \quad (2.13)$$

Исключительным множеством $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ функции $\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s)$, определенной в (2.2), называется множество вещественных чисел v , таких, что $\alpha < 1 - v < \beta$ и $\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s)$ имеет нули на прямой $\operatorname{Re}(s) = 1 - v$.

Обозначим через $[X, Y]$ множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y .

Следующее утверждение представляет $\mathcal{L}_{v,2}$ -теорию модифицированного Н-преобразования (2.4).

Утверждение 2.1 [1, теорема 5.37] *Допустим, что*

$$\alpha < v - \operatorname{Re}(\kappa) < \beta, \quad a^* = 0, \Delta[v - \operatorname{Re}(\kappa)] + \operatorname{Re}(\mu) \leq 0. \quad (2.14)$$

Верны следующие утверждения

а) Существует инъективное преобразование $H_{\sigma,\kappa}^1 \in [\mathcal{L}_{v,2}, \mathcal{L}_{v-\operatorname{Re}(\kappa+\sigma),2}]$, такое, что равенство (2.9) выполняется для $f \in \mathcal{L}_{v,2}$ и $\operatorname{Re}(s) = v - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma)$.

Если $a^* = 0$, $\Delta[v - \operatorname{Re}(\kappa)] + \operatorname{Re}(\mu) = 0$ и $1 - v + \operatorname{Re}(\kappa) \notin \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$, то $H_{\sigma, \kappa}^1$ биективно отображает $\mathcal{L}_{v, 2}$ на $\mathcal{L}_{v - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma), 2}$.

b) Преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ не зависит от v в том смысле что, если v и $\tilde{v}$ удовлетворяют условию (2.14) и если преобразования $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ и $\tilde{H}_{\sigma, \kappa}^1 f$ определены в пространствах $\mathcal{L}_{v, 2}$ и $\mathcal{L}_{\tilde{v}, 2}$ равенством (2.9), то $H_{\sigma, \kappa}^1 f = \tilde{H}_{\sigma, \kappa}^1 f$ для $f \in \mathcal{L}_{\tilde{v}, 2} \cap \mathcal{L}_{v, 2}$.

c) Если $a^* = 0$, $\Delta[v - \operatorname{Re}(\kappa)] + \operatorname{Re}(\mu) < 0$, то для $f \in \mathcal{L}_{v, 2}$ $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ дается формулой (2.4).

d) Пусть $\lambda \in C$, $h > 0$ и $f \in \mathcal{L}_{v, 2}$. Если $\operatorname{Re}(\lambda) > (v - \operatorname{Re}(\kappa))h - 1$, то $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ представимо в виде

$$(H_{\sigma, \kappa}^1 f)(x) = hx^{\sigma+1-(\lambda+1)/h} \frac{d}{dx} x^{(\lambda+1)/h} \int_0^\infty H_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[\frac{x}{t} \middle| \begin{matrix} (-\lambda, h), (a_i, \alpha_i)_{1, p} \\ (b_j, \beta_j)_{1, q}, (-\lambda-1, h) \end{matrix} \right] t^{\kappa-1} f(t) dt, \quad (2.15)$$

а при $\operatorname{Re}(\lambda) < (v - \operatorname{Re}(\kappa))h - 1$ дается формулой

$$(H_{\sigma, \kappa}^1 f)(x) = -hx^{\sigma+1-(\lambda+1)/h} \frac{d}{dx} x^{(\lambda+1)/h} \int_0^\infty H_{p+1, q+1}^{m+1, n} \left[\frac{x}{t} \middle| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1, p}, (-\lambda, h) \\ (-\lambda-1, h), (b_j, \beta_j)_{1, q} \end{matrix} \right] t^{\kappa-1} f(t) dt. \quad (2.16)$$

e) Если $f \in \mathcal{L}_{v, 2}$ и $g \in \mathcal{L}_{1-v+\operatorname{Re}(\kappa+\sigma), 2}$, то имеет место формула:

$$\int_0^\infty f(x) (H_{\sigma, \kappa}^1 g)(x) dx = \int_0^\infty (H_{\sigma, \kappa}^2 f)(x) g(x) dx, \quad (2.17)$$

где

$$(H_{\sigma, \kappa}^2 f)(x) = x^\sigma \int_0^\infty H_{p, q}^{m, n} \left[\frac{t}{x} \middle| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1, p} \\ (b_j, \beta_j)_{1, q} \end{matrix} \right] t^\kappa f(t) \frac{dt}{x}. \quad (2.18)$$

Формулы обращения $H_{\sigma, \kappa}^1$ -преобразования даются равенствами [1, формулы (5.5.23) и (5.5.24)]:

$$f(x) = -hx^{(\lambda+1)/h-\kappa} \frac{d}{dx} x^{-(\lambda+1)/h} \times \\ \times \int_0^\infty H_{p+1, q+1}^{q-m, p-n+1} \left[\frac{t}{x} \middle| \begin{matrix} (-\lambda, h), (1-a_i-\alpha_i, \alpha_i)_{n+1, p}, (1-a_i-\alpha_i, \alpha_i)_{1, n} \\ (1-b_j-\beta_j, \beta_j)_{m+1, q}, (1-b_j-\beta_j, \beta_j)_{1, m}, (-\lambda-1, h) \end{matrix} \right] t^{-\sigma} (H_{\sigma, \kappa}^1 f)(t) dt \quad (2.19)$$

или

$$f(x) = hx^{(\lambda+1)/h-1} \frac{d}{dx} x^{-(\lambda+1)/h} \times \\ \times \int_0^\infty H_{p+1, q+1}^{q-m+1, p-n} \left[\frac{t}{x} \middle| \begin{matrix} (1-a_i-\alpha_i, \alpha_i)_{n+1, p}, (1-a_i-\alpha_i, \alpha_i)_{1, n}, (-\lambda, h) \\ (-\lambda-1, h), (1-b_j-\beta_j, \beta_j)_{m+1, q}, (1-b_j-\beta_j, \beta_j)_{1, m} \end{matrix} \right] t^{-\sigma} (H_{\sigma, \kappa}^1 f)(t) dt. \quad (2.20)$$

Условия справедливости этих формул дает следующее утверждение.

Утверждение 2.2 [1, теорема 5.47] Пусть

$$a^* = 0, \quad \alpha < v - \operatorname{Re}(\kappa) < \beta, \quad \alpha_0 < 1 - v + \operatorname{Re}(\kappa) < \beta_0, \quad \text{и пусть } \lambda \in C, \quad h > 0.$$

Если $\Delta[v - \operatorname{Re}(\kappa)] + \operatorname{Re}(\mu) = 0$ и $f \in \mathcal{L}_{v, 2}$, то формулы обращения (2.19) и (2.20) справедливы соответственно при $\operatorname{Re}(\lambda) > (1 - v + \operatorname{Re}(\kappa))h - 1$ и $\operatorname{Re}(\lambda) < (1 - v + \operatorname{Re}(\kappa))h - 1$.

3. $\mathcal{L}_{\nu,2}$ -теория модифицированного $H_{\sigma,\kappa}^1$ -преобразования. Введем двумерный аналог функции (2.2):

$$\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(\mathbf{s}) \equiv \mathcal{H}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| \mathbf{s} \right] = \prod_{k=1}^2 \mathcal{H}_{p_k, q_k}^{m_k, n_k} \left[\begin{matrix} (a_{i_k}, \alpha_{i_k})_{1, p_k} \\ (b_{j_k}, \beta_{j_k})_{1, q_k} \end{matrix} \middle| s_k \right]. \quad (3.1)$$

Исключительным множеством $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ функции $\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(\mathbf{s})$ назовем множество векторов $\bar{\nu} = (\nu_1, \nu_2) \in R^2$ ($\nu_1 = \nu_2$), таких, что $\alpha_1 < 1 - \nu_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < 1 - \nu_2 < \beta_2$, и функции $\mathcal{H}_{p_1, q_1}^{m_1, n_1}(s_1)$, $\mathcal{H}_{p_2, q_2}^{m_2, n_2}(s_2)$ имеют нули на прямых $\text{Re}(s_1) = 1 - \nu_1$, $\text{Re}(s_2) = 1 - \nu_2$ соответственно.

Применяем двумерное преобразование Меллина (2.8) к $H_{\sigma,\kappa}^1$ -преобразованию (1.1) и учитывая (2.9), получаем следующую формулу для «достаточно хороших» функций f :

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M}_{H_{\sigma,\kappa}^1} f)(\mathbf{s}) &= \int_{R_{++}^2} t^{\sigma+s-1} d\mathbf{t} \int_0^t H_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} t \\ \tau \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j)_{1,q} \end{matrix} \right] \tau^{\kappa} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = \\ &= \mathcal{H}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| \mathbf{s} + \boldsymbol{\sigma} \right] (\mathfrak{M}f)(\mathbf{s} + \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\kappa}), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(\mathbf{s})$ определяется формулой (3.1).

Для формулировки утверждений, представляющих $\mathcal{L}_{\bar{\nu},2}$ -теорию и формулы обращения модифицированного $H_{\sigma,\kappa}^1$ -преобразования (1.1), нам понадобятся следующие двумерные аналоги постоянных (2.10) – (2.12):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{cases} -\min_{1 \leq j_1 \leq m_1} \left[\frac{\text{Re}(b_{j_1})}{\beta_{j_1}} \right], & m_1 > 0, \\ -\infty, & m_1 = 0; \end{cases} & \beta_1 &= \begin{cases} \min_{1 \leq i_1 \leq n_1} \left[\frac{1 - \text{Re}(a_{i_1})}{\alpha_{i_1}} \right], & n_1 > 0, \\ \infty, & n_1 = 0, \end{cases} \\ \alpha_2 &= \begin{cases} -\min_{1 \leq j_2 \leq m_2} \left[\frac{\text{Re}(b_{j_2})}{\beta_{j_2}} \right], & m_2 > 0, \\ -\infty, & m_2 = 0; \end{cases} & \beta_2 &= \begin{cases} \min_{1 \leq i_2 \leq n_2} \left[\frac{1 - \text{Re}(a_{i_2})}{\alpha_{i_2}} \right], & n_2 > 0, \\ \infty, & n_2 = 0, \end{cases} \\ a_1^* &= \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i^1 - \sum_{i=m_1+1}^{p_1} \alpha_i^1 + \sum_{j=1}^{m_1} \beta_j^1 - \sum_{j=m_1+1}^{q_1} \beta_j^1, & a_2^* &= \sum_{i=1}^{n_2} \alpha_i^2 - \sum_{i=n_2+1}^{p_2} \alpha_i^2 + \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j^2 - \sum_{j=m_2+1}^{q_2} \beta_j^2, \\ \Delta_1 &= \sum_{j=1}^{q_1} \beta_{j_1} - \sum_{i=1}^{p_1} \alpha_{i_1}, & \Delta_2 &= \sum_{j=1}^{q_2} \beta_{j_2} - \sum_{i=1}^{p_2} \alpha_{i_2}, \\ \mu_1 &= \sum_{j=1}^{q_1} b_{j_1} - \sum_{i=1}^{p_1} a_{i_1} + \frac{p_1 - q_1}{2}, & \mu_2 &= \sum_{j=1}^{q_2} b_{j_2} - \sum_{i=1}^{p_2} a_{i_2} + \frac{p_2 - q_2}{2}, \\ \alpha_0^1 &= \begin{cases} 1 + \max_{m_1+1 \leq j_1 \leq q_1} \left[\frac{\text{Re}(b_{j_1}) - 1}{\beta_{j_1}} \right], & q_1 > m_1; \\ -\infty, & q_1 = m_1; \end{cases} & \alpha_0^2 &= \begin{cases} 1 + \max_{m_2+1 \leq j_2 \leq q_2} \left[\frac{\text{Re}(b_{j_2}) - 1}{\beta_{j_2}} \right], & q_2 > m_2; \\ -\infty, & q_2 = m_2; \end{cases} \\ \beta_0^1 &= \begin{cases} 1 + \min_{n_1+1 \leq i_1 \leq p_1} \left[\frac{\text{Re}(a_{i_1})}{\alpha_{i_1}} \right], & p_1 > n_1; \\ \infty, & p_1 = n_1; \end{cases} & \beta_0^2 &= \begin{cases} 1 + \min_{n_2+1 \leq i_2 \leq p_2} \left[\frac{\text{Re}(a_{i_2})}{\alpha_{i_2}} \right], & p_2 > n_2; \\ \infty, & p_2 = n_2; \end{cases} \end{aligned}$$

Теорема 3.1. Допустим, что

$$\alpha_1 < v_1 - \operatorname{Re}(\kappa_1) < \beta_1, \quad \alpha_2 < v_2 - \operatorname{Re}(\kappa_2) < \beta_2, \quad (3.3)$$

$$a_1^* = 0, a_2^* = 0, \quad \Delta_1[v_1 - \operatorname{Re}(\kappa_1)] + \operatorname{Re}(\mu_1) \leq 0, \quad \Delta_2[v_2 - \operatorname{Re}(\kappa_2)] + \operatorname{Re}(\mu_2) \leq 0.$$

Верны следующие утверждения

а) Существует инъективное преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 \in [\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}, \mathcal{L}_{\bar{v} - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma), \bar{2}}]$, такое, что равенство (3.2) выполняется для $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \bar{v} - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma)$.

Если $a_1^* = 0, a_2^* = 0, \Delta_1[v_1 - \operatorname{Re}(\kappa_1)] + \operatorname{Re}(\mu_1) = 0, \Delta_2[v_2 - \operatorname{Re}(\kappa_2)] + \operatorname{Re}(\mu_2) = 0$ и $1 - \bar{v} + \operatorname{Re}(\kappa) \notin \mathcal{E}_{\bar{v}, \bar{2}}$, то $H_{\sigma, \kappa}^1$ биективно отображает $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ на $\mathcal{L}_{\bar{v} - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma), \bar{2}}$.

б) Преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ не зависит от $\bar{v}$ в том смысле, что если $\bar{v}$ и $\bar{v}$ удовлетворяют (3.3) и если преобразования $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ и $\tilde{H}_{\sigma, \kappa}^1 f$ определены в пространствах $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ и $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ равенством (3.2), то $H_{\sigma, \kappa}^1 f = \tilde{H}_{\sigma, \kappa}^1 f$ для $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}} \cap \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$.

в) Если $a_1^* = 0, a_2^* = 0, \Delta_1[v_1 - \operatorname{Re}(\kappa_1)] + \operatorname{Re}(\mu_1) < 0, \Delta_2[v_2 - \operatorname{Re}(\kappa_2)] + \operatorname{Re}(\mu_2) < 0$, то для $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ дается формулой (1.1).

д) Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_1) \in C^2, \bar{h} = (h_1, h_2) > 0$ и $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$. Если $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{v} - \operatorname{Re}(\kappa))\bar{h} - 1$, то $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ представимо в виде

$$(H_{\sigma, \kappa}^1 f)(x) = \bar{h} x^{\sigma+1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{dx} x^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \int_0^x H_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[\frac{x}{t} \left| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i)_{1, p} \\ (\mathbf{b}_j, \mathbf{\beta}_j)_{1, q}, (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}) \end{matrix} \right. \right] t^{\kappa-1} f(t) dt, \quad (3.4)$$

а при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{v} - \operatorname{Re}(\kappa))\bar{h} - 1$ дается формулой

$$(H_{\sigma, \kappa}^1 f)(x) = -\bar{h} x^{\sigma+1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{dx} x^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \int_0^x H_{p+1, q+1}^{m+1, n} \left[\frac{x}{t} \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i)_{1, p}, (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}), (\mathbf{b}_j, \mathbf{\beta}_j)_{1, q} \end{matrix} \right. \right] t^{\kappa-1} f(t) dt. \quad (3.5)$$

е) Если $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ и $g \in \mathcal{L}_{1-\bar{v}+\operatorname{Re}(\kappa+\sigma), \bar{2}}$, то имеет место формула

$$\int_0^x f(x) (H_{\sigma, \kappa}^1 g)(x) dx = \int_0^x (H_{\sigma, \kappa}^2 f)(x) g(x) dx, \quad (3.6)$$

где

$$(H_{\sigma, \kappa}^2 f)(x) = x^{\sigma} \int_0^x H_{p, q}^{m, n} \left[\frac{t}{x} \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i)_{1, p} \\ (\mathbf{b}_j, \mathbf{\beta}_j)_{1, q} \end{matrix} \right. \right] t^{\kappa} f(t) \frac{dt}{x}. \quad (3.7)$$

Доказательство проводится аналогично доказательству утверждения 2.1 с учетом (1.2), представления (3.2), из существования всех приведенных операторов в указанных классах функций.

Получены формулы обращения $H_{\sigma, \kappa}^1$ -преобразования:

$$f(x) = -\bar{h} x^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-\kappa} \frac{d}{dx} x^{-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \\ \times \int_0^x H_{p+1, q+1}^{q-m, p-n+1} \left[\frac{t}{x} \left| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (1-\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i)_{n+1, p}, (1-\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i)_{1, n} \\ (1-\mathbf{b}_j-\mathbf{\beta}_j, \mathbf{\beta}_j)_{m+1, q}, (1-\mathbf{b}_j-\mathbf{\beta}_j, \mathbf{\beta}_j)_{1, m}, (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}) \end{matrix} \right. \right] t^{-\sigma} (H_{\sigma, \kappa}^1 f)(t) dt \quad (3.8)$$

или

$$f(x) = \bar{h} x^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1} \frac{d}{dx} x^{-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \\ \times \int_0^x H_{p+1, q+1}^{q-m+1, p-n} \left[\frac{t}{x} \left| \begin{matrix} (1-\mathbf{a}_i - \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i)_{n+1, p}, (1-\mathbf{a}_i - \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i)_{1, n}, (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}), (1-\mathbf{b}_j - \boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_j)_{m+1, q}, (1-\mathbf{b}_j - \boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_j)_{1, m} \end{matrix} \right. \right] t^{-\sigma} (H_{\sigma, \kappa}^1 f)(t) dt. \quad (3.9)$$

Условия справедливости этих формул дает следующее утверждение.

Теорема 3.2. Пусть

$$a_1^* = 0, a_2^* = 0, a^* = 0, \alpha_1 < v_1 - \operatorname{Re}(\kappa_1) < \beta_1, \alpha_2 < v_2 - \operatorname{Re}(\kappa_2) < \beta_2,$$

$$\alpha_0^1 < 1 - v_1 + \operatorname{Re}(\kappa_1) < \beta_0^1, \alpha_0^2 < 1 - v_2 + \operatorname{Re}(\kappa_2) < \beta_0^2, \text{ и пусть } \bar{\lambda} \in C^2, \bar{h} > 0.$$

Если $\Delta_1[v_1 - \operatorname{Re}(\kappa_1)] + \operatorname{Re}(\mu_1) = 0$, $\Delta_2[v_2 - \operatorname{Re}(\kappa_2)] + \operatorname{Re}(\mu_2) = 0$ и $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$, то формулы обращения (3.8) и (3.9) справедливы соответственно при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (1 - \bar{v} + \operatorname{Re}(\kappa))\bar{h} - 1$ и $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (1 - \bar{v} + \operatorname{Re}(\kappa))\bar{h} - 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kilbas, A.A. H-Transforms. Theory and Applications / A.A. Kilbas, M.H. Saigo. – London : Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
2. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.
3. Kilbas, A.A. Theory and applications of fractional differential equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. – Amsterdam : Elsevier, 2006. – 523 p.

Поступила 20.03.2018

TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL TRANSFORM WITH THE H-FUNCTION IN THE KERNEL IN THE SPACE OF SUMMABLE FUNCTIONS

O. SKOROMNIK

Two-dimensional analog of modified H- transform involving H- function in the kernel is studied on the space of summable functions on a domain $R_{++}^2 = R_+^1 \times R_+^1$. Mapping properties such as the boundedness, the range of the considered transform are given, and the inversion formula is established. The results generalize the well know findings for corresponding one-dimensional integral transform.

Keywords: one-dimensional and two-dimensional integral modified H-transforms, Mellin transform, H-function, space of integrable functions.

УДК 514

ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, СОХРАНЯЮЩИЕ ВАРИАЦИОННУЮ ЗАДАЧУ СО СТАРШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет)

Введенное в работе определение компоненты импульса вдоль струи и сохранение компоненты импульса ранга n вдоль струи порядка $n - 1$ на экстремальных уравнения Эйлера – Лагранжа для групп преобразований, сохраняющих вариационную задачу, является прямым и естественным обобщением определения компоненты импульса первого ранга вдоль векторного поля (струи нулевого порядка), связанного с однопараметрической группой преобразований, сохраняющих функцию Лагранжа, зависящую от производных нулевого и первого порядков. Для экстремалей уравнения Эйлера – Лагранжа доказано свойство сохранения компоненты импульса ранга n вдоль струи порядка $n - 1$, связанной с группой преобразований, сохраняющей вариационную задачу со старшими производными:

$$D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x)) p_{k,n}^i \right) = 0,$$

где $S: \mathcal{R} \times X_m \rightarrow X_m$, $S_\tau: X_m \rightarrow X_m, \forall \tau \in \mathcal{R}$ – однопараметрическая группа преобразований, сохраняющая функцию $L: T^n X_m \rightarrow \mathcal{R}$

$$\frac{d}{d\tau} L(S_\tau(x), D_\tau S_\tau(x), D_\tau^2 S_\tau(x), \dots, D_\tau^{(n)} S_\tau(x))|_{\tau=0} = 0, \quad \forall x \in X_m,$$

$j_x^{n-1} X^i(x) = (X^i(x), D_\tau^1 X^i(x), D_\tau^2 X^i(x), \dots, D_\tau^{n-1} X^i(x))$ – струя порядка $n - 1$, связанная с группой

преобразований $S_\tau: X_m \rightarrow X_m$, $X^i(x) = \frac{dS_\tau^i(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$, $i = 1, m$.

Ключевые слова: уравнение Эйлера – Лагранжа, уравнение Эйлера – Пуассона, гладкие многообразия, расслоенное пространство скоростей, импульс системы, тензор энергии, тензор обобщенного импульса, невырожденная функция, струя векторного поля.

Введение. Классифицировать алгебраические уравнения по их группам симметрии предложил Э. Галуа; Ф. Клейн – взять идею симметрии в качестве единого принципа при построении различных геометрий. Выйдя за пределы геометрии и развиваясь, эта идея показала, что принцип симметрии служит той единственной основой, которая может объединить все разрозненные части огромного здания современной математики. Феликс Клейн развил свою концепцию в физике и механике. Его программа как задача поиска различных форм симметрии выходит за рамки не только геометрии, но и всей математики в целом, превращается в проблему поиска единого принципа для всего естествознания. В 1872 г. Ф. Клейн представил сенату и философскому факультету Эрлангенского университета и свое «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», получившее название «Эрлангенской программы». Феликс Клейн рассматривает иерархию многообразий – пространств любого числа измерений и соответственных геометрий, положив в основу их определения понятия инварианта, введенное в математику за двадцать лет до этого. В элементарной геометрии преобразованиями, то есть переходами от одних переносных к другим, служат прежде всего движения, переносы и вращения геометрических фигур, когда сами фигуры (расстояния между образующими их точками) не меняются. Пространство, в котором происходят подобные переносы, называется метрическим. Инвариант пространства – расстояние, определенное, например, теоремой Пифагора в прямоугольной системе координат. Есть более сложные геометрии, где инвариантами служат иные выражения: в проективной геометрии инварианты – уже не расстояния между точками, не величина и форма геометрической фигуры, а только форма, то есть соотношения между расстояниями, например, треугольник, при проективном преобразовании может стать меньше, но остается подобным себе. Содержание истории натурфилософии – преобразование самых общих понятий, самые радикальные изменения, охватывающие основные представления о мире и методы его познания.

Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных), а также одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления, и в макромире, с его классическими представлениями.

Законы сохранения имеют важное значение не только в механике, но и в физике вообще. Научное и методологическое значение законов сохранения определяет их исключительная общность и универсальность. Благодаря той особой роли, которую играют законы сохранения в физике, они являются важнейшим элементом современной научной картины мира.

Дифференциально-геометрическое рассмотрение импульса и энергии в физической и математической постановке изложено в литературе [1–10, 12–16]. Свойства тензора энергии-импульса при простейших линейных преобразованиях координат и времени объясняет законы сохранения импульса в макроскопической системе. Но тензор энергии-импульса в дифференциальной форме является инвариантным относительно произвольного невырожденного преобразования координат, что приводит к локальным законам сохранения энергии-импульса, например, в физике элементарных частиц. Функция Лагранжа определяет некоторую вариационную задачу, например, минимизацию интеграла действия в механической системе и динамику этой системы (уравнения Эйлера – Лагранжа) [6]. Если интегрант (подынтегральная функция в простейшей вариационной задаче) вырожден относительно переменных времени либо координат, то это вырождение приводит соответственно к закону сохранения энергии, либо импульса относительно данной координаты [7]. Представленная работа является продолжением работ [9, 10, 13, 16].

Основные определения и математические объекты.

Пусть X_m – гладкое многообразие размерности m , $T^n X_m$ – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m .

$L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ – невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$ [9].

Теорема 1 [11]. Пусть $\bar{x}^i = S^i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ $S: (x) \rightarrow (\bar{x})$ – невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m$, $p \geq \max(s, l)$ $i = \overline{1, m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(l)i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(s)j}} = \begin{cases} C_l^s \cdot D_t^{l-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right), & C_l^s = \frac{l!}{s!(l-s)!}, \quad l! = \prod_{k=1}^l k, \quad l \geq s, \\ 0, & l < s. \end{cases} \quad (1)$$

Определение 1. Система функций $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$,

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, x, \dots, x^{(2 \min(n,p)-k)}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial \bar{x}^{(l+k)i}} \right), \quad k = \overline{0, n}, \quad i = \overline{1, m} \text{ называется обобщенным импульсом ранга } n \text{ для функции } L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R} \text{ в локальных координатах } (x) \text{ базы } X_m \text{ расслоения } T^p X_m, \text{ где } L(x, x, \dots, x^{(p)}) \text{ – локальная запись функции } L \text{ при выборе локальных координат } (x) \text{ в базе } X_m \text{ расслоения } T^p X_m.$$

Функция $p_{k,n}^i$ называется k -й компонентой обобщенного импульса P_n ранга n по i -й координате или импульсами порядка k (k -импульсами) по i -й координате обобщенного импульса P_n ранга n .

Функция $p_{k,n}^i(x, x, \dots, x^{(2 \min(n,p)-k)})$ называется k -й компонентой обобщенного импульса P_n ранга n по i -й координате или импульсами порядка k (k -импульсами) по i -й координате обобщенного импульса P_n ранга n .

Замечание 1. Обобщенный импульс ранг n определен для функций $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$.

Из определения обобщенного импульса ранга $p_k^i(n) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial \bar{x}^{(l+k)i}} \right)$ следует, что при $k > p, l \geq 0 \Rightarrow l+k > p \Rightarrow \frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial \bar{x}^{(l+k)i}} \equiv 0$ и все $p_k^i(n) \equiv 0$ (тривиальные импульсы), то есть для нетриви-

альных импульсов $k \leq p$. Поскольку при $k \leq n$, $k \leq p \Rightarrow k \leq \min(n, p)$, то в **определении 2** можно считать, что $k = \overline{0, \min(n, p)}$, $i = \overline{1, m}$.

Максимальный порядок производной по t в $p_k^i(n)$ равен $l + k + l = 2 \cdot l + k$.

При $l + k > p \Rightarrow \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \equiv 0$ и коэффициент при производной $\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}}$ равен 0, значит, при определении максимального порядка производной по t можно считать $l + k \leq p$, кроме того, справедливы оценки между индексами обобщенного импульса

$$l \leq n - k \Leftrightarrow l + k \leq n \Rightarrow l + k \leq \min(n, p) \Rightarrow l \leq \min(n, p) - k \Rightarrow 2 \cdot l + k \leq 2 \cdot (\min(n, p) - k) + k = \\ = 2 \cdot \min(n, p) - 2 \cdot k + k = 2 \cdot \min(n, p) - k.$$

Хотя более грубая оценка порядка старшей производной по t в $p_k^i(n)$ дает

$$l \leq n - k \Leftrightarrow l + k \leq n \Rightarrow 2 \cdot l + k \leq 2 \cdot (n - k) + k = 2 \cdot n - 2 \cdot k + k = 2 \cdot n - k.$$

При $p > n$, $l + k \leq n - k + k = n$ максимальный порядок производной по t в $L(x, \dots, x)$ больше максимального порядка производной по t переменной, по которой производится частное дифференцирование в $p_k^i(n) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)$, в общем случае отлично от нуля.

При $p < n$, поскольку $l + k \leq n - k + k = n$, следует, что $l + k > p$, $\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \equiv 0$ и часть членов

в сумме $\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)$ будет тождественно равна 0.

Пограничным является случай $p = n$, именно этот случай будет рассмотрен в дальнейшем без ограничения общности рассмотрения.

При $p = n$ в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$ получаем импульсы в преобразовании Остроградского:

$$p_{0,n}^i = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) = \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^i} - D_t \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^i} \right) + \dots + (-1)^n D_t^n \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i}} \right) -$$

это нуль-импульс (функционал в уравнении Эйлера – Пуассона), импульс 0-го порядка.

Теорема 2 [9] (дифференциальная связь импульсов k -го и $(k-1)$ -го порядков).

Пусть $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ – невырожденная функция Лагранжа, $L(x, \dots, x)$, $p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})$, $p_{k-1,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})$ – локальная запись функции L и импульсов k -го и $(k-1)$ -го порядков при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$. Тогда

$$D_t p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x}) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})}{\partial x^{(k-1)i}} - p_{k-1,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x}), \quad (2)$$

где $p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})}{\partial x^{(l+k)i}} \right)$ – импульс k -го порядка;

$$p_{k-1,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x}) = \sum_{l=0}^{n-(k-1)} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})}{\partial x^{(l+k-1)i}} \right) - \text{импульс } (k-1)\text{-го порядка.}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3 (о связи импульсов k -го порядка рангов n и $n+1$). Пусть $L: T^P X_m \rightarrow \mathfrak{X}$, $L(x, \dot{x}, \dots, \overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции $L: T^P X_m \rightarrow \mathfrak{X}$ при выборе локальных координат в базе расслоения X_m , учитывая определение обобщенного импульса:

$$p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \right), \quad k = \overline{0, n}, \quad i = \overline{1, m} \text{ – импульс } k\text{-го порядка ранга } n,$$

$$p_{k,n+1}^i = \sum_{l=0}^{n+1-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \right) \text{ – импульс } k\text{-го порядка ранга } n+1.$$

Тогда справедливо следующее соотношение:

$$p_{k,n+1}^i = p_{k,n}^i + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}} \right). \quad (3)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} p_{k,n+1}^i &= \sum_{l=0}^{n+1-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \right) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \right) + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1-k+k)i}{x}} \right) = \\ &= p_{k,n}^i + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}} \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Рассмотрим преобразование из новой координатной системы в старую $x = (x^1, x^2, \dots, x^m)$, $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^m)$. Пусть $x^i = S^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^m)$ $S: (\bar{x}) \rightarrow (x)$ – невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^P X_m$, $i, k = \overline{1, m}$, $S^{-1}: (x) \rightarrow (\bar{x})$ – обратное отображение, тогда

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^k} = \delta_k^i, \quad \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^j} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} = \delta_k^i, \quad \delta_i^k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \text{ – символ Кронекера.} \quad (4)$$

Доказательство. $x^i = x^i(\bar{x}^1(x), \bar{x}^2(x), \dots, \bar{x}^m(x))$. По теореме о сложной функции

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \delta_k^i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^k}.$$

$$\text{Аналогично доказывается равенство } \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^k} = \delta_k^i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^j} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}$$

Теорема доказана.

Определение 2. Однопараметрическая группа преобразований $S: \mathfrak{X} \times X_m \rightarrow X_m$, $S_\tau: X_m \rightarrow X_m$, $\forall \tau \in \mathfrak{X}$ сохраняет лагранжиан $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{X}$, если выполняется равенство

$$\frac{d}{d\tau} L(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x), \dots, D_t^{(n)} S_\tau(x))|_{\tau=0} = 0, \quad \forall x \in X_m.$$

$D_t^k S_\tau(x)|_{\tau=0} : X_m \rightarrow T^k X_m$ – оператор k -кратного полного дифференцирования по переменной t . С каждой однопараметрической группой преобразований можно связать однопараметрическое семейство векторных полей $X^i(x, \tau) = \frac{dS_\tau^i(x)}{d\tau}$, $\forall \tau \in \mathfrak{R}$, $X^i(x) = \frac{dS_\tau^i(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$, $i = \overline{1, m}$ (струй 0-го порядка) и однопараметрическое семейство струй порядка $n-1$

$$j_x^{n-1} X^i(x, \tau) = (X^i(x, \tau), D_t^1 X^i(x, \tau), D_t^2 X^i(x, \tau), \dots, D_t^{n-1} X^i(x, \tau)),$$

которые будем называть связанными (индуцированными) с группой преобразований $S_\tau : X_m \rightarrow X_m$.

Векторное поле $X^i(x) = \frac{dS_\tau^i(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$ и струю порядка $n-1$

$$j_x^{n-1} X^i(x, \tau) = (X^i(x, \tau), D_t^1 X^i(x, \tau), D_t^2 X^i(x, \tau), \dots, D_t^{n-1} X^i(x, \tau))$$

также будем называть связанными (индуцированными) с группой преобразований $S_\tau : X_m \rightarrow X_m$.

Математическая постановка задачи.

Пусть $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ – гладкая функция, заданная в расслоенном пространстве скоростей $T^n X_m$ многообразия X_m $L(x, \dots, \dot{x})$, $p_i^k(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})$ – локальная запись функции L и импульсов k -го порядка при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$. $p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, \dot{x})}{\partial x^{(l+k)i}} \right)$, $k = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$.

И пусть $S : \mathfrak{R} \times X_m \rightarrow X_m$, $S_\tau : X_m \rightarrow X_m$, $\forall \tau \in \mathfrak{R}$ – однопараметрическая группа преобразований, сохраняющая функцию $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$

$$\frac{d}{d\tau} L(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x), \dots, D_t^{(n)} S_\tau(x))|_{\tau=0} = 0, \quad \forall x \in X_m.$$

Задача данной работы – установить закон сохранения компоненты импульса $p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, \dot{x})}{\partial x^{(l+k)i}} \right)$, $k = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$ (импульсы k -го порядка ранга n) вдоль струи

$j_x^{n-1} X^i(x) = (X^i(x), D_t^1 X^i(x), D_t^2 X^i(x), \dots, D_t^{n-1} X^i(x))$, связанной с группой преобразований

$S_\tau : X_m \rightarrow X_m$, $X^i(x) = \frac{dS_\tau^i(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$, $i = \overline{1, m}$, на экстремальных уравнения Эйлера – Пуассона

$p_{0,n}^i = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})}{\partial x^{(0+l)i}} \right) = 0$, то есть показать, что

$$D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) p_{k,n}^i \right) = 0$$

при следующих условиях:

$$p_{0,n}^i = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, \ddot{x})}{\partial x^{(0+l)i}} \right) = 0,$$

$$\frac{d}{d\tau} L(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x), \dots, D_t^{(n)} S_\tau(x))|_{\tau=0} = 0, \quad \forall x \in X_m.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $S: \mathfrak{R} \times X_m \rightarrow X_m$, $S_\tau: X_m \rightarrow X_m$, $\forall \tau \in \mathfrak{R}$ – однопараметрическая группа преобразований $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ – гладкая функция в расслоенном пространстве скоростей $T^n X_m$ на гладком

многообразии X_m $p_{0,n}^i = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(0+l)i}} \right)$ – импульс 0-го порядка (функционал в уравнении Эйлера – Пуассона) $X^i(x, \tau) = \frac{dS_\tau^i(x)}{d\tau}$, тогда

$$\frac{dL(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x), \dots, D_t^{(n)} S_\tau(x))}{d\tau} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x, \tau)). \quad (5)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{dL(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x), \dots, D_t^{(n)} S_\tau(x))}{d\tau} &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^i} \frac{dS_\tau^i(x)}{d\tau} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial \dot{x}^i} \frac{d(D_t^1 S_\tau^i(x))}{d\tau} + \\ &+ \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial \ddot{x}^i} \frac{d(D_t^2 S_\tau^i(x))}{d\tau} + \dots + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i}} \frac{d(D_t^n S_\tau^i(x))}{d\tau} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} \frac{d(D_t^k S_\tau^i(x))}{d\tau} = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k \left(\frac{dS_\tau^i(x)}{d\tau} \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x, \tau)). \end{aligned}$$

В частности, при $n = 1$

$$\begin{aligned} \frac{dL(S_\tau(x), D_t S_\tau(x))}{d\tau} &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial L(x, x)}{\partial x^i} X^i(x, \tau) + \frac{\partial L(x, x)}{\partial \dot{x}^i} D_t (X^i(x, \tau)) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial L(x, x)}{\partial x^i} X^i(x, \tau) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, x)}{\partial \dot{x}^i} D_t (X^i(x, \tau)) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^i} X^i(x, \tau) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial X^i(x, \tau)}{\partial x^k} \dot{x}^k \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Пусть $S: \mathfrak{R} \times X_m \rightarrow X_m$, $S_\tau: X_m \rightarrow X_m$, $\forall \tau \in \mathfrak{R}$ – группа преобразований в X_m , $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ – гладкая вещественнозначная функция в расслоении скоростей $T^n X_m$.

$p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, x) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)$, $i = \overline{1, m}$ – импульсы k -го порядка ранга n

$X^i(x, \tau) = \frac{dS^i_\tau(x)}{d\tau}$ – однопараметрическое семейство векторных полей, индуцированное группой $S_\tau : X_m \rightarrow X_m$. Тогда имеет место следующее равенство:

$$D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) p_{k,n}^i \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x, \tau)) - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) p_{0,n}^i. \quad (6)$$

Доказательство. По теореме 2 имеем

$$\begin{aligned} D_t p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)}) &= \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(k-1)i}} - p_{k-1,n}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k+1)}). \\ D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) p_{k,n}^i \right) &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t (D_t^{k-1} (X^i(x, \tau))) p_{k,n}^i + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) D_t p_{k,n}^i = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^k (X^i(x, \tau)) p_{k,n}^i + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(k-1)i}} - p_{k-1,n}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k+1)}) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^k (X^i(x, \tau)) p_{k,n}^i + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(k-1)i}} \right) - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) p_{k-1,n}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k+1)}). \quad (7) \end{aligned}$$

Введем новую переменную $k1$ и свяжем со старой переменной k :

$k1 = k - 1 \Rightarrow k = k1 + 1, 1 \leq k \leq n \Rightarrow 0 \leq k1 \leq n - 1$, затем подставим $k1$ в формулу (7):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^k (X^i(x, \tau)) p_{k,n}^i + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(k-1)i}} \right) - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) p_{k-1,n}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k+1)}) &= \\ = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^k (X^i(x, \tau)) p_{k,n}^i + \sum_{i=1}^m \sum_{k1=0}^{n-1} D_t^{k1} (X^i(x, \tau)) \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(k1)i}} \right) - \sum_{i=1}^m \sum_{k1=0}^{n-1} D_t^{k1} (X^i(x, \tau)) p_{k1,n}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k1)}) &= \\ = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} D_t^k (X^i(x, \tau)) (p_{k,n}^i - p_{k,n}^i) - \sum_{i=1}^m D_t^0 X^i(x, \tau) p_{0,n}^i + \sum_{i=1}^m D_t^n X^i(x, \tau) p_{n,n}^i + \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n-1} D_t^k (X^i(x, \tau)) \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(k)i}} \right) &= \\ = - \sum_{i=1}^m D_t^0 X^i(x, \tau) p_{0,n}^i + \sum_{i=1}^m D_t^n X^i(x, \tau) \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n-1} D_t^k (X^i(x, \tau)) \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(k)i}} \right) &= \\ = - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) p_{0,n}^i + \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n D_t^k (X^i(x, \tau)) \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(k)i}} \right). \end{aligned}$$

Этот результат может быть получен и по-другому. Проведем доказательство индукцией по n . При $n = 1$ в формуле (6) получим импульс k -го порядка ранга n :

$$D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n=1} D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) p_{k,n}^i \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n=1} \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x, \tau)) - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) p_{0,n=1}^i. \quad (8)$$

Преобразуем левую часть формулы (8):

$$\begin{aligned} D_t(\sum_{i=1}^m D_t^{1-1}(X^i(x, \tau))p_{1,1}^i) &= D_t(\sum_{i=1}^m D_t^0(X^i(x, \tau))p_{1,1}^i) = D_t(\sum_{i=1}^m X^i(x, \tau)p_{1,1}^i) = \\ &= \sum_{i=1}^m D_t(X^i(x, \tau))p_{1,1}^i + \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau)D_t(p_{1,1}^i) = \\ &= \sum_{i=1}^m D_t(X^i(x, \tau))\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} + \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau)D_t(\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i}) = D_t(\sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} X^i(x, \tau)). \end{aligned} \quad (9)$$

Преобразуем правую часть (8):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial L(x, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x, \tau)) - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau)p_{0,n=1}^i &= \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} D_t^0(X^i(x, \tau)) + \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} D_t^1(X^i(x, \tau)) - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau)p_{0,n=1}^i = \\ &= \sum_{i=1}^m (\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} X^i(x, \tau)) + \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} D_t^1(X^i(x, \tau)) - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau)(\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} - D_t(\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i})) = \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} X^i(x, \tau) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} D_t^1(X^i(x, \tau)) - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} + \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) D_t(\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i}) = \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} D_t^1(X^i(x, \tau)) + \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) D_t(\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i}) = D_t(\sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} X^i(x, \tau)). \end{aligned} \quad (10)$$

Формулы (9), (10) совпадают, база индукции при $n = 1$ проверена.

При $n = 2$ в формуле (6) получим

$$\begin{aligned} p_{k,n}^i &= \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x, \dots, \overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}), \quad k = \overline{0, n}, \quad i = \overline{1, m} - \text{импульс } k\text{-го порядка ранга } n; \\ p_{1,2}^i &= \sum_{l=0}^{2-1} (-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x, \dots, \overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(l+1)i}{x}}) = (-1)^0 D_t^0(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \overset{(0+1)i}{x}}) + (-1)^1 D_t^1(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \overset{(1+1)i}{x}}) = \\ &= \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \overset{(1)i}{x}} = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^i} - D_t^1(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^i}); \\ p_{2,2}^i &= \sum_{l=0}^{2-2} (-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x, \dots, \overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(0+2)i}{x}}) = (-1)^0 D_t^0(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \overset{(0+2)i}{x}}) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \ddot{x}^i}; \\ p_{0,2}^i &= \sum_{l=0}^{2-0} (-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x, \dots, \overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(l+0)i}{x}}) = (-1)^0 D_t^0(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \overset{(0+0)i}{x}}) + (-1)^1 D_t^1(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \overset{(0+1)i}{x}}) + (-1)^2 D_t^2(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \overset{(0+2)i}{x}}) = \\ &= \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \ddot{x}^i} - D_t(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \dot{x}^i}) + D_t^2(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial \ddot{x}^i}). \end{aligned}$$

По формуле (6) проверим выполнение равенства

$$D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) p_{k,n}^i \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x, \tau)) - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) p_{0,n}^i$$

При $n = 2$ уравнение (6) примет следующий вид:

$$D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n=2} D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) p_{k,n}^i \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n=2} \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x, \tau)) - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) p_{0,n=2}^i.$$

Преобразуем левую часть последнего выражения:

$$\begin{aligned} D_t \left(\sum_{i=1}^m D_t^{1-1} (X^i(x, \tau)) p_{1,2}^i + D_t^{2-1} (X^i(x, \tau)) p_{2,2}^i \right) &= D_t \left(\sum_{i=1}^m D_t^0 (X^i(x, \tau)) p_{1,2}^i + D_t (X^i(x, \tau)) p_{2,2}^i \right) = \\ &= D_t \left(\sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) p_{1,2}^i + D_t (X^i(x, \tau)) p_{2,2}^i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m D_t (X^i(x, \tau)) p_{1,2}^i + X^i(x, \tau) D_t (p_{1,2}^i) + D_t^2 (X^i(x, \tau)) p_{2,2}^i + D_t (X^i(x, \tau)) D_t (p_{2,2}^i) = \\ &= \sum_{i=1}^m D_t (X^i(x, \tau)) p_{1,2}^i + \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) D_t (p_{1,2}^i) + \sum_{i=1}^m D_t^2 (X^i(x, \tau)) p_{2,2}^i + \sum_{i=1}^m D_t (X^i(x, \tau)) D_t (p_{2,2}^i). \end{aligned}$$

По **теореме 2** имеем $D_t p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)}) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} - p_{k-1,n}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k+1)})$.

$$D_t p_{1,2}^i(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^{(1-1)i}} - p_{1-1,2}^i(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^i} - p_{1-1,2}^i(x, \dot{x}, \ddot{x}, x, x) \stackrel{(3)}{=} \stackrel{(4)}{=} \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^i} - p_{0,2}^i(x, \dots, x),$$

$$D_t p_{2,2}^i(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^{(2-1)i}} - p_{2-1,2}^i(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^i} - p_{2-1,2}^i(x, \dot{x}, \ddot{x}, x, x) \stackrel{(3)}{=} \stackrel{(4)}{=} \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^i} - p_{1,2}^i(x, \dots, x) \stackrel{(3)}{=}.$$

На основании чего последний результат можно переписать так:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m D_t (X^i(x, \tau)) p_{1,2}^i + \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) D_t (p_{1,2}^i) + \sum_{i=1}^m D_t^2 (X^i(x, \tau)) p_{2,2}^i + \sum_{i=1}^m D_t (X^i(x, \tau)) D_t (p_{2,2}^i) = \\ &= \sum_{i=1}^m D_t (X^i(x, \tau)) p_{1,2}^i + X^i(x, \tau) \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^i} - p_{0,2}^i(x, \dots, x) \right) \stackrel{(4)}{=} + D_t^2 (X^i(x, \tau)) p_{2,2}^i + D_t (X^i(x, \tau)) \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^i} - p_{1,2}^i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m D_t (X^i(x, \tau)) p_{1,2}^i + X^i(x, \tau) \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^i} - p_{0,2}^i(x, \dots, x) \right) \stackrel{(4)}{=} + D_t^2 (X^i(x, \tau)) p_{2,2}^i + D_t (X^i(x, \tau)) \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^i} - p_{1,2}^i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^i} - p_{0,2}^i(x, \dots, x) \right) \stackrel{(4)}{=} + D_t^2 (X^i(x, \tau)) p_{2,2}^i + D_t (X^i(x, \tau)) \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x^i} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x} - p_{0,2}^i(x, \dots, x) \right) + D_t^2(X^i(x, \tau)) \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x} + D_t(X^i(x, \tau)) \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x} \right) = \\
 &= \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x} + D_t(X^i(x, \tau)) \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x} \right) + D_t^2(X^i(x, \tau)) \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x} - X^i(x, \tau) p_{0,2}^i(x, \dots, x) \right) = \\
 &= \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x} + D_t(X^i(x, \tau)) \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x} \right) + D_t^2(X^i(x, \tau)) \frac{\partial L(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x} - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) p_{0,2}^i(x, \dots, x) \right) = \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^2 \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k(X^i(x, \tau)) - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) p_{0,n}^i.
 \end{aligned}$$

Утверждение теоремы проверено для $n = 2$.

Пусть утверждение теоремы справедливо для произвольного натурального числа n :

$$D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1}(X^i(x, \tau)) p_{k,n}^i \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k(X^i(x, \tau)) - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) p_{0,n}^i$$

Докажем, что оно верно для $n + 1$, тогда запишем:

$$D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n+1} D_t^{k-1}(X^i(x, \tau)) p_{k,n+1}^i \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k(X^i(x, \tau)) - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) p_{0,n+1}^i. \quad (11)$$

По **теореме 3** (формула 3) имеем $p_{k,n+1}^i = p_{k,n}^i + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right)$,

$$p_{k,n+1}^i = \sum_{l=0}^{n+1-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) \Rightarrow p_{n+1,n+1}^i = \sum_{l=0}^{n+1-(n+1)} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+n+1)i}} \right) = \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}}.$$

Проведем преобразования левой части формулы (11):

$$\begin{aligned}
 D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n+1} D_t^{k-1}(X^i(x, \tau)) p_{k,n+1}^i \right) &= D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1}(X^i(x, \tau)) p_{k,n+1}^i + \sum_{i=1}^m D_t^{n+1-1}(X^i(x, \tau)) p_{n+1,n+1}^i \right) = \\
 &= D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1}(X^i(x, \tau)) p_{k,n+1}^i \right) + D_t \left(\sum_{i=1}^m (D_t^n(X^i(x, \tau)) p_{n+1,n+1}^i) \right) = \\
 &= D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1}(X^i(x, \tau)) p_{k,n+1}^i \right) + \sum_{i=1}^m D_t^n(X^i(x, \tau)) p_{n+1,n+1}^i = \\
 &= D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1}(X^i(x, \tau)) p_{k,n+1}^i \right) + \sum_{i=1}^m D_t(D_t^n(X^i(x, \tau)) p_{n+1,n+1}^i).
 \end{aligned} \quad (12)$$

Подставим $p_{k,n+1}^i = p_{k,n}^i + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}})$ при $p = n+1$ в первую сумму в формуле (12):

$$\begin{aligned} & D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) p_{k,n+1}^i \right) + \sum_{i=1}^m D_t (D_t^n (X^i(x, \tau)) p_{n+1,n+1}^i) = \\ & = D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) (p_{k,n}^i + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}})) \right) + \sum_{i=1}^m D_t (D_t^n (X^i(x, \tau)) p_{n+1,n+1}^i) = \\ & = D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) p_{k,n}^i \right) + D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}}) \right) + \sum_{i=1}^m D_t (D_t^n (X^i(x, \tau)) p_{n+1,n+1}^i) = \\ & = D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) p_{k,n}^i \right) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}}) + \sum_{i=1}^m D_t (D_t^n (X^i(x, \tau)) \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}}). \quad (13) \end{aligned}$$

По предположению индукции первое слагаемое в сумме (13) равно

$$D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) p_{k,n}^i \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x, \tau)) - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) p_{0,n}^i. \quad (14)$$

По формуле (3) имеем

$$p_{0,n+1}^i = p_{0,n}^i + (-1)^{n+1-0} D_t^{n+1-0} (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}}) = p_{0,n}^i + (-1)^{n+1} D_t^{n+1} (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}}). \quad (15)$$

Преобразуем второе слагаемое в сумме (13):

$$\begin{aligned} & D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}}) \right) = \\ & = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t (D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}})) + \\ & + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) (-1)^{n+1-k} D_t (D_t^{n+1-k} (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}})) = \\ & = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^k (X^i(x, \tau)) (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}}) + \\ & + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) (-1)^{n+1-k} D_t^{n+2-k} (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}}). \quad (16) \end{aligned}$$

Введем новую переменную и преобразуем второе слагаемое последней суммы (16), которую перепишем в следующем виде:

$$k1 = k-1 \Rightarrow k = k1+1, 1 \leq k \leq n \Rightarrow 0 \leq k1 \leq n-1, n+1-k = n-k1, n+2-k = n+1-k1$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^k (X^i(x, \tau)) (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}}) + \sum_{i=1}^m \sum_{k1=0}^{n-1} D_t^{k1} (X^i(x, \tau)) (-1)^{n-k1} D_t^{n+1-k1} (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^k (X^i(x, \tau)) (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n-1} D_t^k (X^i(x, \tau)) (-1)^{n-k} D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) = \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} D_t^k (X^i(x, \tau)) (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} D_t^k (X^i(x, \tau)) (-1)^{n-k} D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^m D_t^n (X^i(x, \tau)) (-1)^{n+1-n} D_t^{n+1-n} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) + \sum_{i=1}^m D_t^0 (X^i(x, \tau)) (-1)^{n-0} D_t^{n+1-0} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) = \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} ((-1)^{n-k} D_t^k (X^i(x, \tau)) D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) (-1)^1 + 1) + \sum_{i=1}^m D_t^n (X^i(x, \tau)) (-1)^1 D_t^{n+1-n} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^m D_t^0 (X^i(x, \tau)) (-1)^{n-0} D_t^{n+1-0} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) = \\
 &= (-1) \sum_{i=1}^m D_t^n (X^i(x, \tau)) D_t^1 \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) + \sum_{i=1}^m D_t^0 (X^i(x, \tau)) (-1)^n D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) = \\
 &= (-1) \sum_{i=1}^m D_t^n (X^i(x, \tau)) D_t^1 \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) + \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) (-1)^n D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right). \quad (17)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим последнее слагаемое в сумме (13):

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m D_t (D_t^n (X^i(x, \tau)) \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}}) &= \sum_{i=1}^m (D_t (D_t^n (X^i(x, \tau)) \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}}) + D_t^n (X^i(x, \tau)) D_t \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right)) = \\
 &= \sum_{i=1}^m (D_t^{n+1} (X^i(x, \tau)) \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} + D_t^n (X^i(x, \tau)) D_t \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right)) = \\
 &= \sum_{i=1}^m D_t^{n+1} (X^i(x, \tau)) \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} + \sum_{i=1}^m D_t^n (X^i(x, \tau)) D_t \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right). \quad (18)
 \end{aligned}$$

Преобразуем левую часть доказываемого тождества (11), равную сумме (13) и состоящую из трех слагаемых, равных соответственно правым частям формул (14), (17), (18):

$$\begin{aligned}
 D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) p_{k,n}^i \right) &+ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) + \sum_{i=1}^m D_t (D_t^n (X^i(x, \tau)) \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}}) = \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x, \tau)) - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) p_{0,n}^i + (-1) \sum_{i=1}^m D_t^n (X^i(x, \tau)) D_t^1 \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) + \\
 &+ \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) (-1)^n D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) + \sum_{i=1}^m D_t^{n+1} (X^i(x, \tau)) \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} + \sum_{i=1}^m D_t^n (X^i(x, \tau)) D_t \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x, \tau)) - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) p_{0,n}^i + \\
&+ \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) (-1)^n D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) + \sum_{i=1}^m D_t^{n+1} (X^i(x, \tau)) \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}}.
\end{aligned} \quad (19)$$

Учитывая выражение (15), объединим первое и последнее слагаемое в сумме (19), получим, что левая часть (11) равна

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x, \tau)) - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) p_{0,n}^i + \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) (-1)^n D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) = \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x, \tau)) - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) p_{0,n}^i - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) (-1)^{n+1} D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) = \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x, \tau)) - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) (p_{0,n}^i + (-1)^{n+1} D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right)).
\end{aligned} \quad (20)$$

Преобразуем выражение (20), учитывая формулу (15):

$$\begin{aligned}
p_{0,n+1}^i &= p_{0,n}^i + (-1)^{n+1-0} D_t^{n+1-0} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) = p_{0,n}^i + (-1)^{n+1} D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) = \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x, \tau)) - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) (p_{0,n}^i + (-1)^{n+1} D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right)) = \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x, \tau)) - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) p_{0,n+1}^i.
\end{aligned} \quad (21)$$

Полученный результат (21) представляет правую часть доказываемого равенства (11).

Теорема доказана.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 7. Пусть $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ – гладкая функция, заданная в расслоенном пространстве скоростей $T^n X_m$. $L(x, \dots, x)$, $p_i^k(x, x, \dots, x)$ – локальная запись функции L и импульсов k -го порядка при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$. $p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)$, $k = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$. И пусть $S: \mathfrak{R} \times X_m \rightarrow X_m$, $S_\tau: X_m \rightarrow X_m, \forall \tau \in \mathfrak{R}$ – однопараметрическая группа преобразований, сохраняющая функцию $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$

$$\frac{d}{d\tau} L(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x), \dots, D_t^{(n)} S_\tau(x))|_{\tau=0} = 0, \quad \forall x \in X_m,$$

$j_x^{n-1} X^i(x) = (X^i(x), D_t^1 X^i(x), D_t^2 X^i(x), \dots, D_t^{n-1} X^i(x))$ – струя порядка $n-1$, связанная с группой преобразований $S_\tau: X_m \rightarrow X_m$, $X^i(x) = \frac{dS_\tau^i(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$, $i = \overline{1, m}$ – векторное поле.

Тогда на экстремальных уравнения Эйлера – Пуассона $p_{0,n}^i = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(0+l)i}} \right) = 0$ справедлив закон сохранения компоненты обобщенного импульса вдоль струи:

$$D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x)) p_{k,n}^i \right) = 0.$$

Доказательство. По формуле (6) теоремы 6 при любых $x \in X_m, \tau \in \mathfrak{R}$ выполнено соотношение :

$$D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) p_{k,n}^i \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x, \tau)) - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) p_{0,n}^i. \quad (22)$$

В частности, при $\tau = 0$

$$\begin{aligned} D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x, \tau)) \Big|_{\tau=0} p_{k,n}^i \right) &= D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x)) p_{k,n}^i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x, \tau)) \Big|_{\tau=0} - \sum_{i=1}^m X^i(x, \tau) \Big|_{\tau=0} p_{0,n}^i = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x)) - \sum_{i=1}^m X^i(x) p_{0,n}^i. \end{aligned} \quad (23)$$

По условию теоремы 7 $S_\tau : X_m \rightarrow X_m, \forall \tau \in \mathfrak{R}$ – однопараметрическая группа преобразований сохраняет функцию Лагранжа $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$

$$\frac{d}{d\tau} L(S_\tau(x), D_\tau S_\tau(x), D_\tau^2 S_\tau(x), \dots, D_\tau^{(n)} S_\tau(x)) \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \forall x \in X_m. \quad (24)$$

По формуле (5) теоремы 5 имеет место равенство

$$\frac{d}{d\tau} L(S_\tau(x), D_\tau S_\tau(x), D_\tau^2 S_\tau(x), \dots, D_\tau^{(n)} S_\tau(x)) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x, \tau)), \quad (25)$$

которое выполняется при любом τ , в частности, при $\tau = 0$. Учитывая равенства (24), (25) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} L(S_\tau(x), D_\tau S_\tau(x), D_\tau^2 S_\tau(x), \dots, D_\tau^{(n)} S_\tau(x)) \Big|_{\tau=0} &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x, \tau)) \Big|_{\tau=0} = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x)) = 0, \end{aligned}$$

поскольку

$$D_t^k (X^i(x, \tau)) \Big|_{\tau=0} = D_t^k (X^i(x, 0)) = D_t^k (X^i(x)). \quad (26)$$

Следовательно, $\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x)) = 0$. Поскольку $x : \mathfrak{R} \rightarrow X_m$ – экстремаль уравнения

Эйлера – Пуассона, то

$$p_{0,n}^i = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(0+l)i}} \right) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(0+l)i}} \right) = 0. \quad (27)$$

Таким образом, $\sum_{i=1}^m X^i(x) p_{0,n}^i = \sum_{i=1}^m X^i(x) \cdot 0 = 0$. Подставляя формулы (26), (27) в равенство (23) получим основной результат работы:

$$D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x)) p_{k,n}^i \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} D_t^k (X^i(x)) - \sum_{i=1}^m X^i(x) p_{0,n}^i = 0 - 0 = 0. \quad (28)$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Введенное в работе определение компоненты импульса вдоль струи и сохранение компоненты импульса ранга n вдоль струи порядка $n - 1$ на экстремальных уравнения Эйлера – Пуассона для групп преобразований, сохраняющих вариационную задачу, является прямым и естественным обобщением определения компоненты импульса первого порядка вдоль векторного поля (струи нулевого порядка), связанного с однопараметрической группой преобразований, сохраняющих функцию Лагранжа, зависящую от производных нулевого и первого порядков [1, с. 297]. В частности, на экстремальных уравнения Эйлера – Лагранжа справедлив закон сохранения компоненты импульса первого порядка первого ранга вдоль векторного поля, индуцированного группой, сохраняющей вариационную задачу первого порядка:

$$D_t \left(\sum_{i=1}^m X^i p_{1,1}^i \right) = D_t \left(\sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^{(1)i}} \right) = D_t \left(\sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} \right) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин, В. А. Современная геометрия. Методы и приложения / В. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. – М. : УРСС, 1994.
2. Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов, А. В. Дифференциальная геометрия / А. В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
5. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 7-е изд., испр. – М. : Наука, 1988. – Т. 2: Теория поля. – 512 с.
6. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 7-е изд., испр. – М. : Наука, 1988. – Т. 1: Механика. – 214 с.
7. Галеев, Э. М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. – М. : Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.
8. Дирак, П. Лекции по квантовой механике / П. Дирак. – М. : Мир, 1968.
9. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / С. Г. Ехилевский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.
10. Закон преобразования обобщенного импульса / С. Г. Ехилевский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.
11. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л. Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии» ; ВИНТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.
12. Трофимов, В. В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко. – М. : Факториал, 1995.
13. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов, С. В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 117–123.
14. Об эффективном поиске безусловного экстремума гладких функционалов в конечномерных задачах / С. В. Голубева [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 4. – С. 119.

15. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу // Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – №4. – С. 27–36.
16. Тензор обобщенной энергии // Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 78–100.

Поступила 20.03.2018

GROUPS OF TRANSFORMATION CONSERVING VARIATIONAL PROBLEM WITH SENIOR DERIVATIVES

Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV

The definition of the momentum component is introduced along the jet and the conservation of components of momentum of rank n along the jet of order $n - 1$ on the extremals of the Euler-Lagrange equation for groups of transformations preserving the variational problem is a direct and natural generalization of the determination of the momentum vector field (zero-order jet) connected with a one-parameter group of transformations preserving Lagrangian function that depends on the derivatives of zero and first orders. For the extremes of the Euler – Lagrange equation, the property of preserving the momentum component of rank $n - 1$, connected with the transformation group preserving the variational problem with higher derivatives:

$$D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n D_t^{k-1} (X^i(x)) p_{k,n}^i \right) = 0,$$

$S : \mathfrak{R} \times X_m \rightarrow X_m$ $S_\tau : X_m \rightarrow X_m, \forall \tau \in \mathfrak{R}$ – is a one-parameter group of transformations that preserves the function $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$

$$\frac{d}{d\tau} L(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x), \dots, D_t^{(n)} S_\tau(x))|_{\tau=0} = 0, \quad \forall x \in X_m,$$

$j_x^{n-1} X^i(x) = (X^i(x), D_t^1 X^i(x), D_t^2 X^i(x), \dots, D_t^{n-1} X^i(x))$ – a jet of order $n-1$ connected, with the transformation group $S_\tau : X_m \rightarrow X_m$, $X^i(x) = \frac{dS_\tau^i(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$, $i = \overline{1, m}$.

Keywords: the Euler – Lagrange equation, the Euler – Poisson equation, smooth manifolds, fibered velocity space, system momentum, energy tensor, generalized-momentum tensor, nondegenerate function, jet of a vector field.

СОДЕРЖАНИЕ

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Бураченко И.Б., Железняк В.К., Филиппович А.Г. Обнаружение измерительных сигналов в маскирующих шумах высокого уровня	2
Бобович Н.М. Моделирование структуры критически важных объектов информатизации в задачах количественного анализа живучести	10
Рыбальский О.В., Соловьев В.И., Журавель В.В. Системы инструментария экспертизы аудио- и видеозаписи в Украине	15
Чертков В.М., Железняк В.К. Алгоритм определения меры схожести идентификационных образов закладных устройств	20
Кушнеров А.В., Липницкий В.А., Королёва М.Н. Обобщенные коды Боуза – Чоудхури – Хоквингема и их параметры	28
Сидоренко А.В., Шишко М.С. Шифрование изображений на основе хаотической динамики с элементами генетического алгоритма	34
Ярица А.И. Оценка воздействия на точность определения координат точки приема сигналов спутниковой системы точного позиционирования при динамических ветровых нагрузках	38
Рябенко Д.С., Лавров С.В. Многомерное векторное представление моментных величин сигнала с их корреляционно-матричной обработкой для оценки защищенности речевой информации	45
Чертков В.М., Толмачев А.В. Малогабаритный тестовый генератор помех	50
Рябенко Д.С., Лавров С.В., Боровкова Е.С. Приложение матрично-топологического метода для определения каналов утечки информации	56
Ярица А.И. Воздействие ветрового давления на оценку стабильности точки приема сигналов искусственных спутников Земли	61
Рябенко Д.С., Лавров С.В. Приложение сигнальных графов и матричного анализа для математического моделирования каналов утечки информации	64
Иванов М.М., Чертков В.М. Моделирование и обработка отклика сложного зондирующего сигнала от нелинейности с аппроксимацией степенным рядом	71
Железняк В.К., Адамовский Е.Р. Тестовые кадры для оценки защищенности цветных и черно-белых видеоизображений в технических каналах утечки информации	79
Асламов Ю.П., Асламов А.П., Давыдов И.Г., Цурко А.В. Избыточный вейвлетный словарь для разреженной декомпозиции сигналов вибрации	86
Толмачев А.В., Чертков В.М. Антенная система для малогабаритного тестового генератора радиопомех	95
Толубко В.Б., Беркман Л.Н., Крючкова Л.П., Ткаченко О.Н. Методика исследования каналов связи в сетях будущего с неоднородным трафиком	103
Лоборева Л.А. Программное обеспечение OLP промышленных роботов-манипуляторов	108
Научная школа в области теории и практики защиты информации, безопасности информации Полоцкого государственного университета	117

ФИЗИКА

Антонович Д.А., Груздев А.В. Разработка концепции и опытных образцов плазменных источников электронов для технологических целей	119
Петрович О.Н., Русецкий И.С. Численные методы расчета электромагнитных полей на квазиструктурированных сетках в устройствах плазменной эмиссионной электроники	124
Крот В.О., Тугай О.В., Бринкевич Д.И., Бринкевич С.Д., Чиж Г.В., Вабищевич С.А. Обращение с водными радиоактивными отходами при производстве радиофармпрепаратов на основе ^{18}F	128
Питолин В.Е. Оптимальное регулирование гидравлических систем	135
Янушкевич В.Ф. Дисперсионные характеристики анизотропной среды над углеводородами в режиме радиоимпульсных сигналов	141
Редько П.П., Кизина О.А., Русецкий И.С. Повышение надежности и долговечности прожекторных, иллюминационных и иных осветительных устройств	148
Головчук В.И., Бринкевич Д.И., Лукашевич М.Г., Оджаев В.Б., Просолович В.С., Харченко А.А., Вабищевич С.А., Вабищевич Н.В. Модификация поверхности пленок полиэтилентерефталата при имплантации высокоэнергетичными ионами инертных газов с удельной энергией 1 МэВ/нуклон	154
Дробышевская Т.В., Остриков О.М. Расчет напряженно-деформированного состояния в нанозерне, обусловленного нанодвойникованием	159

МАТЕМАТИКА

Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К. Оптимальный параметр аппроксимации разностной схемы волнового уравнения на отрезке	167
Скоромник О.В. Двумерное интегральное преобразование с модифицированной Н-функцией в пространстве суммируемых функций	187
Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Группы преобразований, сохраняющие вариационную задачу со старшими производными	194