

MIESIĘCZNIK
POŁOCKI.

Т о м I.
Р о к 1818.

«Вестник Полоцкого государственного университета» продолжает традиции первого в Беларуси литературно-научного журнала «Месячник Полоцкий».



ВЕСНИК ПОЛАЦКАГА ДЗЯРЖАУНАГА УНІВЕРСІТЭТА
Серыя С. Фундаментальныя навукі

У серыі С навукова-тэарэтычнага часопіса друкуюцца артыкулы, якія прайшлі рэцэнзаванне, змяшчаюць новыя навуковыя вынікі ў галіне інфарматыкі і матэматыкі, фізікі.

ВЕСТНИК ПОЛОЦКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия С. Фундаментальные науки

В серии С научно-теоретического журнала публикуются статьи, прошедшие рецензирование, содержащие новые научные результаты в области информатики и математики, физики.

HERALD OF POLOTSK STATE UNIVERSITY
Series C. Fundamental sciences

Series C includes reviewed articles which contain novelty in research and its results in computer science and mathematics, physics.

Журнал входит в Российский индекс научного цитирования.

Адрес редакции:

Полоцкий государственный университет, ул. Блохина, 29, г. Новополоцк, 211440, Беларусь
тел. + 375 (214) 53 34 58, e-mail: vestnik@psu.by

Отв. за выпуск В.А. Груздев, Д.О. Глухов, В.К. Железняк, А.А. Козлов.

Редактор О.П. Михайлова.

Подписано к печати 28.09.2018. Бумага офсетная 65 г/м². Формат 60×84¹/₈. Ризография.

Усл. печ. л. 11,62. Уч.-изд. л. 14,01. Тираж 100 экз. Заказ 1369.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 681.32

МОДЕЛИРОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ РАДАРА С СИНТЕЗИРОВАННОЙ АПЕРТУРОЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ДЛЯ ИХ ПЕРЕДАЧИ И ФОРМИРОВАНИЯ РАДИОЛОКАЦИОННОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

кан. техн. наук, доц. Р.П. БОГУШ, И.Ю. ЗАХАРОВА, В.М. ЧЕРТКОВ
(Полоцкий государственный университет);

кан. техн. наук Н.М. НАУМОВИЧ
(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники)

Выполнено моделирование алгоритмов обработки данных радиолокатора с синтезом апертуры космического аппарата, включая сжатие, пакетирование, синхронизацию и помехоустойчивое кодирование для передачи по каналу связи при воздействии шумов и их восстановление на приемной стороне с последующим формированием радиолокационного изображения. Синтезирована структурная схема модели, реализованная в пакете MatLab. В качестве входных сигналов использовались необработанные данные спутника ERS-1. Для сжатия применен модифицированный алгоритм на основе энтропийно-ограниченного блочного адаптивного квантования. Помехоустойчивое кодирование выполняется с помощью кодов Рида – Соломона. Представлены сфокусированные радиолокационные изображения по восстановленным данным радиолокатора с синтезом апертуры при моделировании различного уровня шумов.

Ключевые слова: дистанционное зондирование Земли, обработка и передача радиолокационных данных.

Введение. Обеспечение возможности обработки больших потоков данных в реальном времени и надежного их приема является одним из приоритетных требований к современной аппаратуре систем дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) на основе радаров с синтезированной апертурой (РСА), которые позволяют получать изображения практически в любых условиях съемки. Однако выполнение требований по повышению качества изображений таких систем приводит к тому, что объем данных, формируемый расположенной на борту аппаратурой, неуклонно увеличивается, что порождает проблему их хранения и передачи на приемный пункт на Земле в течение сеанса связи [1]. Успешное решение данной задачи может быть обеспечено применением наиболее эффективных методов обработки, что предопределяет необходимость моделирования алгоритмов и оценки полученных результатов.

1. Модель обработки данных. Для обеспечения быстродействия, надежности и достоверности передачи телеметрических и радиолокационных данных от космического аппарата к приемнику наземного пункта используется сжатие исходных данных, пакетирование и помехоустойчивое кодирование. В соответствии с рекомендациями консультативного комитета по космическим системам передачи данных (CCSDS) [2] синтезирована модель обработки данных РСА космического аппарата (рисунок 1), которая включает блок основных данных РСА и метаданных, кодер источника, блок перестановки данных, формирователь пакетов, помехоустойчивый кодер, блок формирования сигналов синхронизации, формирователь кадра, модулятор, блок генерации ошибок, демодулятор, блок выделения синхросигналов, помехоустойчивый декодер, блок восстановления пакета, блок перестановки данных, декодер источника, блок фокусировки данных.

Кодер источника предназначен для сокращения объема передаваемой информации и может использовать алгоритм на основе блочного адаптивного квантования или на основе энтропийно-ограниченного блочного квантования [3].

Для обеспечения надежности и достоверности передачи телеметрических и радиолокационных данных от космического аппарата к приемнику наземного пункта используется пакетная передача и помехоустойчивое кодирование. На основе рекомендаций консультативного комитета по космическим системам передачи данных пакет данных РСА космического базирования формируется на основе SPP (Sparse Packet Protocol [4]). При этом используется блок перестановки данных, т.к. в соответствии с SPP требуется перестановка отсчетов сигналов с соблюдением очередности: сначала синфазные части четных и нечетных отсчетов, затем квадратурные части четных и нечетных отсчетов. Формирователь пакетов создает пакет данных РСА.



Рисунок 1. – Модель обработки данных RCS космического аппарата для их передачи и формирования радиолокационного изображения

Современные методы помехоустойчивого кодирования, рекомендуемые CCSDS к использованию в телеметрических системах, обеспечивают уровень ошибок восстановления сигнала практически близкий к минимально достижимой границе Шеннона. Согласно рекомендациям комитета CCSDS, может применяться код Рида – Соломона (РС-код) или турбокод [2]. Для обеспечения возможности обнаружения кодовых слов в передаваемом потоке данных на приемной стороне и их правильного декодирования применяются сигналы синхронизации. Для модуляции битового потока закодированных данных, согласно рекомендации CCSDS, применяют четырехпозиционную фазовую модуляцию со сдвигом квадратур (OQPSK). Отличие данного вида модуляции от QPSK-модуляции заключается в сдвиге квадратурной составляющей на один бит, что приводит к одинаковой скорости передачи символов закодированного сообщения со входной последовательностью [5]. Для кодирования одним символом двух бит информации необходимо, чтобы сигнальное созвездие переходов состояло из четырех точек.

2. Результаты экспериментов. Представленная на рисунке 1 схема модели обработки данных RCS космического аппарата для их передачи и формирования радиолокационного изображения реализована в прикладном пакете MatLab. Для этого разработаны и используются следующие основные функции:

- importdata – загрузка данных;
- dec2bin_new32 – перевод из десятичной системы исчисления в двоичную дробных и отрицательных чисел;
- bin2dec_new32 – обратная функция;
- esbaq_enc – выполнение кодирования на основе энтропийно-ограниченного блочного адаптивного квантования;
- length – возвращение максимального размера массива;
- comm.OQPSKModulator и comm.OQPSKDemodulator – инициализация объектов OQPSK-модулятора и демодулятора соответственно;
- comm.RSEncoder и comm.RSDDecoder – инициализация объектов кодера и декодера Рида – Соломона соответственно;
- comm.AWGNChannel – инициализация объекта имитирующего физический канал передачи данных;
- step – обращение к инициализированным объектам;
- circshift – осуществление циклического сдвига;
- fwrite – запись данных в файл;

- pos_syn_search – поиск последовательности синхронизации;
- comm.ErrorRate – инициализация системного объекта подсчета символьных ошибок в указанных последовательностях;
- esbaq_enc – восстановление данных после энтропийно-ограниченного блочного адаптивного квантования;
- ref_r – формирование опорной функции по дальности;
- compr_r – сжатие данных по дальности;
- dop_centr_fr – определение центральной доплеровской частоты;
- chirp_az – расчет фазы переданного сигнала по азимуту и формирование опоры по азимуту;
- ref_az – формирование опорной функции по азимуту для каждого отсчета по дальности с использованием для этого функции chirp_az;
- r_migr – компенсация миграции дальности;
- compr_az – сжатие по азимуту;
- fwrite – запись информации в бинарные файлы;
- fft – вычисление дискретного преобразования Фурье;
- ifft – выполнение обратного преобразования Фурье.

В качестве входных отсчетов использовались 8-битные необработанные данные PCA ERS-1 [3]. Для упрощения доступа к данным и исключения переполнения буфера памяти из-за большого объема входных данных синфазные и квадратурные выборки представлены в виде таблиц, записанных в двоичные MAT-файлы. Дальнейшая обработка для каждого файла выполняется отдельно. Для сжатия радиолокационных данных в модели применен модифицированный алгоритм на основе энтропийно-ограниченного блочного адаптивного квантования [3].

Процедура пакетирования данных при моделировании выполняется в цикле, количество повторений которого соответствует количеству строк радиолокационного изображения [4]. Структура полного пакета в модели включает 1573 бита метаданных, а размер радиолокационных данных определяется длиной строки радиолокационного изображения. К основным метаданным, необходимым для фокусировки изображения, относятся длина волны радиолокатора, частота следования импульсов, частота дискретизации импульсов, длительность импульсов, длительность строба дальности, вектор скорости по трем координатам X , Y и Z , количество отсчетов по дальности, количество отсчетов по азимуту. Соответственно, пакет данных включает:

- основной заголовок пакета с 0 по 48 бит, который содержит номер версии пакета, тип пакета, флаг дополнительного заголовка, идентификатор обработки, категорию данных пакета, значение флага для группировки пакетов, счетчик пакетов, длину данных пакета;
- поле вспомогательных данных PCA с 49 по 1622 бит, включающее следующие параметры: длину волны радиолокатора, частоту следования импульсов, частоту дискретизации импульсов, длительность импульсов, длительность строба дальности, вектор скорости по трем координатам X , Y и Z , количество отсчетов по дальности, количество отсчетов по азимуту, количество байт, занимаемых префиксом, значения среднеквадратичного отклонения для мнимой и действительной части отраженного сигнала PCA;
- данные отсчетов отраженного сигнала записываются с 1623 по 34391 бит.

Для помехоустойчивого кодирования, согласно рекомендациям комитета CCSDS, применяется РС-код, т.к. при этом генерируется меньший объем выходного кода по сравнению со сверточным кодированием.

РС-коды представляют собой недвоичные циклические коды, символы которых являются собой элементы поля Галуа $GF(q)$, где $q = 2^m$ – это порядок поля, m – степень поля Галуа. Данные коды определены на всех m -битных символах при всех n и k , в случае если для них верно неравенство [5]

$$0 < k < n < 2^m - 1, \quad (1)$$

где k – количество информационных символов, которое подлежит операции кодирования;

n – общее число кодовых символов в кодируемом блоке.

В большинстве случаев справедливо следующее равенство:

$$(n, k) = (q - 1, q - 1 - 2 \cdot t), \quad (2)$$

где t – количество исправляемых ошибок.

Из выражения (2) следует, что

$$n - k = 2 \cdot t = r, \quad (3)$$

где r – число контрольных (проверочных) символов.

В соответствии с CCSDS параметры кода Рида – Соломона определяются как (255,223) при $m = 8$. Это означает, что число проверочных символов составляет $r = 32$ байта. Учитывая выражение (3), данный код может исправить любые 16 символов (байт). Таким образом, код может исправить 128 битовых ошибок, но распределенных не более чем в 16 байтах (символов).

В связи с тем, что длина кодового слова составляет 255 байт, а длина сформированного для передачи пакета в разы больше, поэтому необходимо кадрировать входные данные в соответствии с количеством информационных символов РС-кода.

Для обеспечения обнаружения кодовых слов в передаваемом потоке данных на приемной стороне и их правильного декодирования применяется маркер синхронизации при формировании кадра для передачи по физическому каналу. Маркер синхронизации для сверточного кода и кода Рида – Соломона является постоянным, имеет длину 4 байта, добавляется в начало каждого кодового слова и принимает значение 1ACFFC1D [6]. В результате кадр состоит из 259 байт.

Для модуляции битового потока закодированных данных применяется четырехпозиционная фазовая модуляция со сдвигом квадратур (OQPSK) [7]. Для моделирования воздействия шумов на передаваемый сигнал используется модель канала с «белым» шумом, мощность которого можно задавать отношением сигнал/шум (SNR – SignalNoise Ratio), относительно сигнала, на который происходит наложение шума. В цифровых системах связи используется отношение E_b/N_0 , где E_b – энергия одного бита информации, N_0 – спектральная плотность мощности белого шума в канале.

Задаваемое значение E_b/N_0 влияет на количество ошибок, вносимых в передаваемый кадр, путем разброса данных в окрестностях четырех позиций созвездия. Чем ниже значение E_b/N_0 , тем больше разброс точек и тем самым больше вероятность возникновения битовой ошибки в канале связи. Канал с «белым шумом» равномерно распределяет битовые ошибки относительно каждой точки созвездия, что может привести к одинаковому количеству байтовых ошибок и битовых, т.е. битовые ошибки могут равномерно распределиться по всей длине кодового слова, по одной в байте.

На приемной стороне для выделения маркеров синхронизации используется беспискавая синхронизация на основе установления схожести последовательности демодулированных битов с заданной последовательностью синхромаркера, при этом полученное максимальное значение характеризует тактовую задержку всей принимаемой последовательности. Далее находятся границы начала кодового слова, удаляется маркер синхронизации, что позволяет выделить 255 байтов закодированных помехоустойчивым РС-кодом данных. На данном этапе для оценки работы помехоустойчивого декодера РС-кода определяется количество битовых ошибок после процедуры демодуляции.

Для правильного восстановления пакета необходим сбор статистики ошибок, которые не смог исправить помехоустойчивый код, а также вычисление вероятности возникновения символьной и битовой ошибки в канале передачи данных с заданным коэффициентом E_b/N_0 .

На рисунке 2, а представлено созвездие сигнала на выходе OQPSK-модулятора реализованной модели, а на рисунке 2, б приведено созвездие принятого сигнала при моделировании шума в физическом канале с коэффициентом $E_b/N_0 = 9$ дБ.

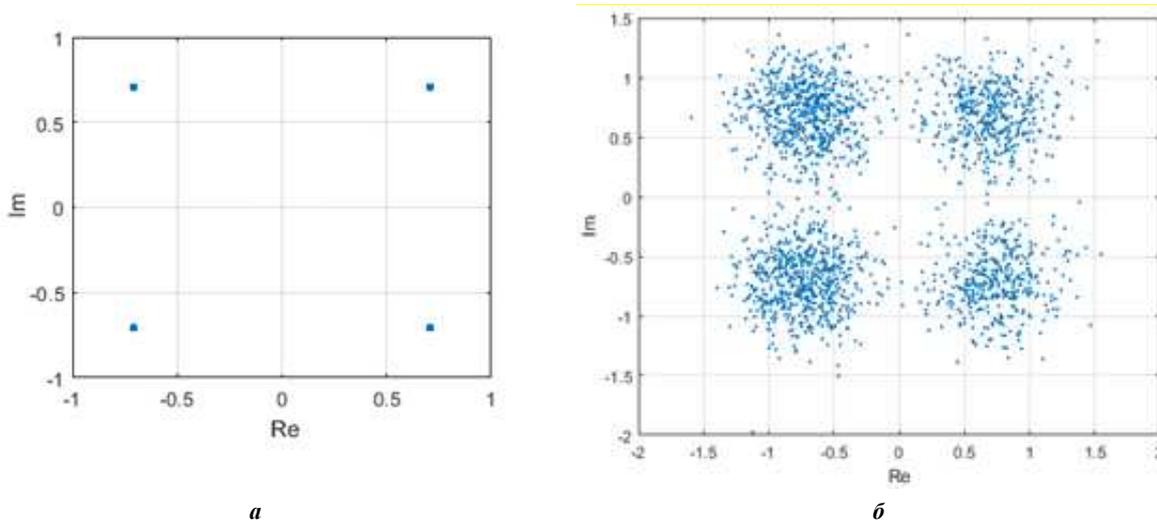


Рисунок 2. – Созвездия OQPSK-сигналов:
а – исходного сигнала; **б** – принятого сигнала при $E_b/N_0 = 9$ дБ

На рисунке 3 представлен график зависимости количества вносимых битовых ошибок в физическом канале связи от коэффициента E_b/N_0 при моделировании.

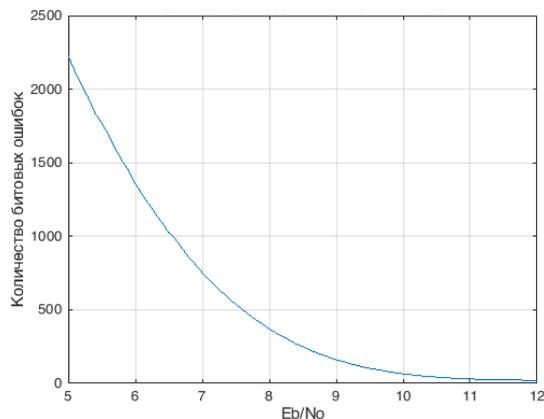


Рисунок 3. – Зависимость количества внесенных битовых ошибок от коэффициента E_b/N_0

В результате моделирования физического канала связи получена зависимость количества неисправленных символьных ошибок от коэффициента E_b/N_0 , которая представлена на рисунке 4.

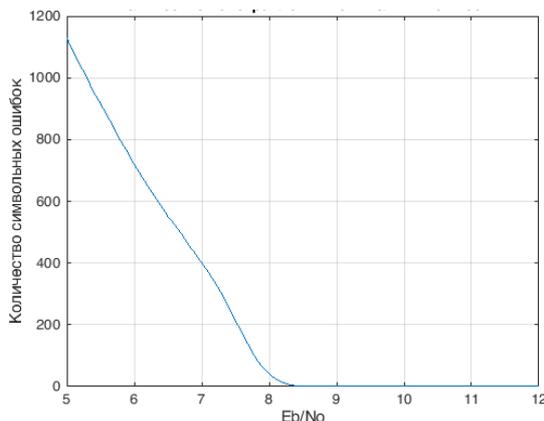


Рисунок 4. – Зависимость количества неисправленных символьных ошибок после помехоустойчивого декодирования от коэффициента E_b/N_0

Из рисунка 4 видно, что при приближении к величине $E_b/N_0 = 8,5$ дБ количество неисправленных символьных ошибок стремится к минимуму и для определения точной границы полного исправления ошибок требуется более детальный анализ. Для чего в таблице 1 представлены результаты моделирования для определения помехоустойчивости в интервале коэффициента E_b/N_0 от 8,5 дБ до 9,5 дБ с дискретностью 0,1.

Таблица 1. – Результаты исследования помехоустойчивости

E_b/N_0 , дБ	N_{BE}	P_{ESYM}	N_{error}
8,5	12,09	0,000179	0,039976
8,6	11,02	6,95E-05	0,015500
8,7	10,03	2,54E-05	0,005666
8,8	9,13	8,38E-06	0,001868
8,9	8,27	2,20E-06	0,000490
9	7,49	3,41E-07	0,000076
9,1	6,76	1,39E-07	0,000031
9,2	6,10	1,21E-07	0,000027
9,3	5,47	1,00E-12	0
9,4	4,92	1,00E-12	0
9,5	4,40	1,00E-12	0

Следует отметить, что был проведен 1 000 000 вычислительных экспериментов для каждого значения E_b/N_0 . Числовые значения количества внесенных битовых ошибок (N_{BE}) подсчитывались как среднее значение от суммы всех внесенных битовых ошибок на протяжении всех проведенных экспериментов. Учитывая, что в каждом эксперименте передается 2072 бита, то максимальное число ошибок составляет $2072 \cdot 10^6$. Кроме того, были определены вероятность возникновения символьной ошибки (P_{ESYM}) и количество неисправленных символьных ошибок (N_{error}), значения которых рассчитывались аналогично с учетом того, что в каждом проведенном эксперименте передавалось 223 символа.

Анализ таблицы 1 показывает, что для $E_b/N_0 = 9,3$ дБ при применении РС-кода (255,223) количество неисправленных символьных ошибок значительно уменьшается и практически равно нулю.

Для моделирования процедуры формирования изображения применяется метод на основе алгоритма быстрой свертки с компенсацией миграции дальности с использованием быстрого преобразования Фурье [8]. На рисунке 5 для данных из [9] представлены радиолокационные изображения, полученные на выходе разработанной модели, для различных значений коэффициента E_b/N_0 .

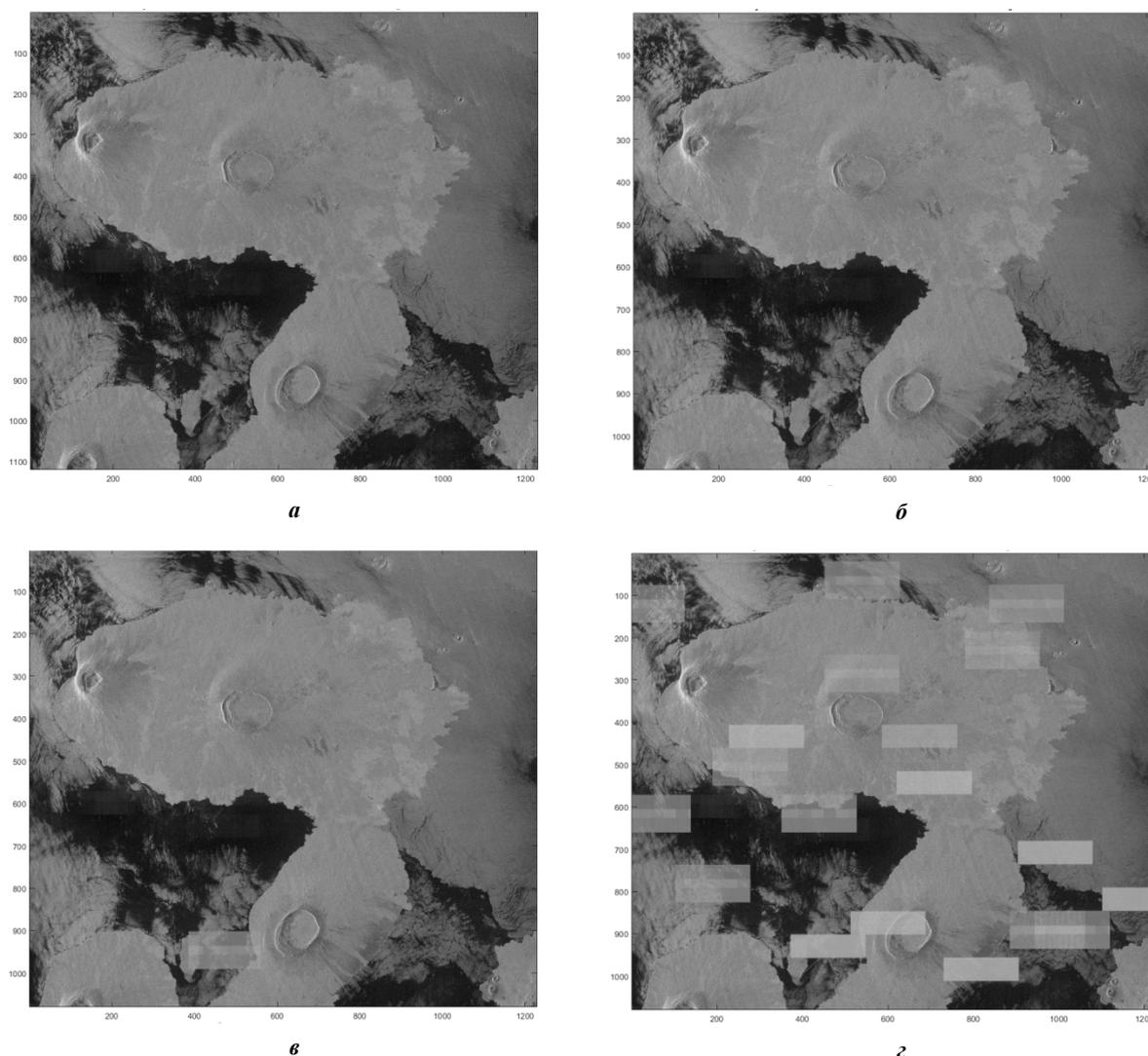


Рисунок 5. – Сфокусированные изображения:
а – для $E_b/N_0 = 10$ дБ; б – для $E_b/N_0 = 9,3$ дБ; в – для $E_b/N_0 = 9,0$ дБ; г – для $E_b/N_0 = 8,8$ дБ

Найденное значение коэффициента $E_b/N_0 = 9,3$ дБ подтверждается теоретическими расчетами, которые выполнялись с использованием программы «bertool» в Matlab при совместном применении OQPSK-модуляции и помехоустойчивого РС-кода (255,223).

Таким образом, представленные результаты свидетельствуют о том, что модель работает корректно, полученные данные достоверны и согласовываются с данными из [10].

Заключение. Синтезирована структурная схема модели обработки данных РСА космического аппарата для их передачи и восстановления, которая реализована в пакете MatLab. В качестве входных сигналов использованы необработанные данные спутника ERS-1. Для сжатия применен модифицированный алгоритм на основе энтропийно-ограниченного блочного адаптивного квантования. Пакетирование выполнено на основе SPP. Помехоустойчивое кодирование осуществлено на основе кодов Рида – Соломона с основными параметрами (255,223). Для обнаружения кодовых слов в передаваемом потоке данных на приемной стороне применен маркер синхронизации при создании кадра. Радиолокационное изображение формируется с помощью метода на основе алгоритма быстрой свертки с компенсацией миграции дальности, используя быстрое преобразование Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Радиолокационные системы землеобзора космического базирования // В.С. Верба [и др.]. – М. : Радиотехника, 2010. – 680 с.
2. CCSDS 130.3-G-0.2 : CCSDS Draft Green Book. – Iss. 0.2. – Sagamihara, Japan, 2004.
3. Богущ, Р.П. Моделирование сжатия радиолокационных данных дистанционного зондирования земли модифицированным алгоритмом ЕСВАQ с представлением восстановленной информации в формате CEOS / Р.П. Богущ, И.Ю. Захарова, Н.М. Наумович // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 9–16.
4. S1-IF-ASD-PL-0007 : Sentinel-I SAR Space Packet Protocol Data Unit. – Iss. 12. – 2014. – 85 p.
5. Егоров, С.И. Повышение эффективности исправления ошибок помехоустойчивыми кодами Рида – Соломона в цифровых телекоммуникационных каналах / С.И. Егоров, Г. Маркарян. – М. : Телекоммуникации, 2005. – 180 с.
6. CCSDS 231.0-B-1. Blue Book : TC Synchronization and Channel Coding. Recommendation for Space Data System Standards. – Iss. 1. – Washington, D.C., 2003.
7. Radio Frequency and Modulation Systems—Part 1: Earth Stations and Spacecraft. Recommendation for Space Data System Standards, CCSDS 401.0-B-17. Blue Book. Issue 17. Washington, D.C.: CCSDS, July 2006.
8. Моделирование алгоритма формирования радиолокационного изображения на основе представленных в формате CEOS необработанных данных дистанционного зондирования Земли / Р.П. Богущ [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 13–21.
9. Geohazard Supersites and Natural Laboratories. GEO - Group on Earth Observations. [Electronic resource]. – Mode of access: http://eo-virtual-archive4.esa.int/search/ER01_SAR_IM__0P/html/?name=Franche-Comte. – Date of access: 15.11.17.
10. CCSDS 421.0-G-1. Green Book : Report of the Proceedings of the RF and Modulation Subpanel Meeting at the Ames Research Center. – Iss. 1. – TIEN M. NGUYEN. – 1989.

Поступила 21.09.2018

SPACECRAFT SAR DATA PROCESSING ALGORITHMS MODELING FOR TRANSMITTING AND RADAR IMAGE FORMATION

R. BOHUSH, I. ZAHAROVA, V. CHERTKOV, N. NAUMOVICH

Big data real time processing and robust data transmitting are the major requirements to modern telemetry data transfer hardware. In this paper SAR data processing algorithms such as compression, data packet generation, synchronization and jam-free coding for noisy communication channel and data recovery on receiving side with following radio image focusing are modelled. Structure diagram was implemented in MatLab. Raw data ERS-1 was used as input data. Modified entropy-constrained block adaptive quantization algorithm was used for compression. Noise immunity coding based on Reid-Solomon codes. Radar images based on recovered SAR data with various noise levels are presented.

Keywords: remote sensing system, synthetic aperture radar, signal preprocessing.

УДК 004.02

ИЗВЛЕЧЕНИЕ ЗНАНИЙ ИЗ БАЗ ДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ НЕЙРО-НЕЧЕТКОЙ МОДЕЛИ

канд. техн. наук, доц. А.Ф. ОСЬКИН

(Полоцкий государственный университет);

Д.А. ОСЬКИН

(Белорусский государственный экономический университет)

Кратко рассматриваются технологии извлечения знаний и типы извлекаемых знаний. Предлагается метод извлечения знаний, представляемых в виде наборов ассоциативных правил «ЕСЛИ..., ТО...». Метод реализуется с помощью нейро-нечеткого моделирования предметной области. Описываются приемы построения нечеткой логической модели анализируемой предметной области и способы применения нейронных сетей для выделения нечетких правил. Рассмотрено программное обеспечение для построения нечеткой модели. Описывается алгоритм извлечения знаний из анализируемых баз данных.

Ключевые слова: базы данных, базы знаний, извлечение знаний, нейро-нечеткое моделирование.

Введение. Современный этап развития вычислительной техники и информационных технологий характеризуется повсеместным использованием баз данных (БД) оперативной информации. Органы государственной власти и управления, промышленные предприятия, организации систем образования и здравоохранения создают и ведут собственные БД на разных уровнях управления. Имеющиеся БД содержат огромные объемы скрытой аналитической информации, извлечение которой позволяет выявлять тенденции, находить новые решения, строить стратегию развития. Таким образом, разработка методов и алгоритмов извлечения знаний из БД является важной и актуальной задачей.

Существует множество определений понятия «извлечение знаний». Однако чаще всего используется определение, сформулированное одним из пионеров этой области знаний Г. Пиатецким-Шапиро [1].

Извлечение знаний из БД (knowledge discovery from databases) или добыча данных (data mining) – это процесс извлечения скрытой, ранее неизвестной и потенциально полезной информации (правил, ограничений, закономерностей) из сырых данных БД.

С помощью технологий data mining можно извлекать важные и полезные знания, зависимости, правила или другую высокоуровневую информацию из подходящих наборов данных в БД. Причем наиболее интересным и перспективным является использование больших БД в качестве источников для генерации и проверки знаний. Извлечение знаний именно из больших БД (big data) является сегодня ключевым направлением обработки данных.

Извлекаемые знания могут иметь различные представления. Традиционно выделяют следующие типы извлекаемых знаний.

Ассоциативные правила [2] – зависимости вида $A_1 \wedge \dots \wedge A_m \Rightarrow C_1 \wedge \dots \wedge C_n$, где A_i и C_j для всех $i \in \{1, \dots, m\}$ и $j \in \{1, \dots, n\}$ – набор значений атрибутов из важных множеств БД. Например, на большом множестве данных о покупках в продовольственном магазине может быть найдено такое правило: если покупатель покупает творог, он обычно также покупает и сметану.

Классификация данных [3] – разделение данных на подмножества на основании значений определенных атрибутов. Такой подход, например, может использоваться крупными торговыми компаниями для классификации своих покупателей по их предпочтениям и последующей рассылки им целевой рекламы и каталогов определенной тематики.

Кластеризация данных [4] – это разбиение данных на группы без предварительного задания классифицирующих атрибутов. Такое разбиение базируется на принципе максимальной близости объектов внутри класса и минимальной между классами. Например, кластерный анализ кредитных историй позволяет менеджерам банка выявить кластеры клиентов с различными уровнями риска невозврата кредита, и принять правильное решение при работе с ними.

В настоящей работе мы сосредоточимся на рассмотрении методов и алгоритмов нахождения ассоциативных правил. При этом нами будет использоваться нейро-нечеткая модель извлечения знаний.

Нейро-нечеткая модель предметной области.

Нейро-нечеткая модель предметной области основывается на математической дисциплине, получившей название «Нечеткая логика». Главная идея нечеткой логики заключается в том, что способ рассу-

дений, опирающийся на естественный язык человеческого общения, не может быть описан с помощью традиционных математических формул. Все, что связано с использованием естественного языка имеет многозначную интерпретацию, в то время как формальному подходу присуща строгая однозначность.

Математический аппарат нечеткой логики использует понятие «лингвистическая переменная», позволяющее перейти от четких высказываний к нечеткому описанию предметной области.

Создатель современной концепции нечеткой логики профессор Л. Заде писал: «В большинстве основных задач, решаемых человеком, не требуется высокая точность. Человеческий мозг использует допустимость такой неточности, кодируя информацию, достаточную для задачи, элементами нечетких множеств, которые лишь приближенно описывают исходные данные... Способность оперировать нечеткими множествами и вытекающая из нее способность оценивать информацию является одним из наиболее ценных качеств человеческого мозга, которое фундаментальным образом отличает человеческий разум от так называемого машинного разума, приписываемого существующим вычислительным машинам» [5].

Сущность концепции нечеткой логики, предложенной Л. Заде, сводится к трем основным положениям:

- 1) вместо числовых переменных используются нечеткие лингвистические переменные;
- 2) простые отношения между переменными определяются с помощью нечетких высказываний;
- 3) сложные отношения описываются нечеткими алгоритмами.

Общая схема нечеткой логической модели представлена на рисунке 1.

Фазификатор преобразует четкие значения входных переменных x в соответствующие лингвистические переменные $A(x)$. Машина нечеткого вывода на основании правил, хранящихся в нечеткой базе знаний, формирует выходную лингвистическую переменную C , которая после дефазификации преобразуется в четкую выходную переменную y . Таким образом, для построения модели необходимо решить следующие задачи:

1. Задать для всех входных переменных семейство функций принадлежности, с помощью которых выполняется переход от четких значений к лингвистическим переменным.
2. Сформировать нечеткую базу знаний.
3. Задать для выходной переменной функции принадлежности, чтобы выполнить обратный переход от лингвистической переменной к четкому значению.

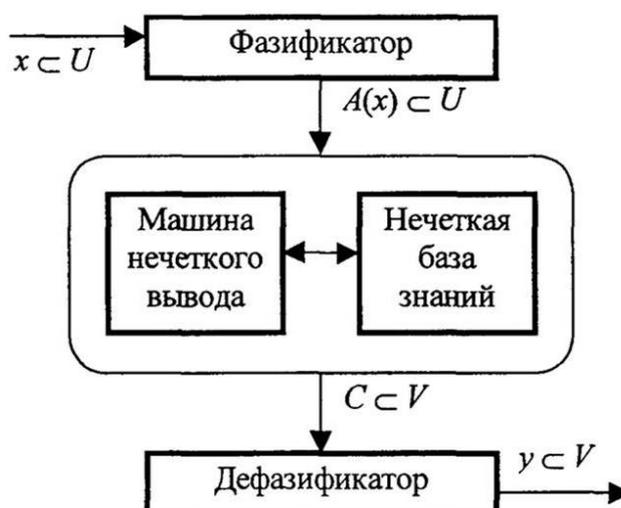


Рисунок 1. – Схема нечеткой логической модели

Нечеткая база знаний представляет собой набор ассоциативных правил вида «ЕСЛИ..., ТО...», извлечение которых из имеющихся БД и является целью нашей работы. Достижение этой цели становится возможным путем изменения точки зрения на построенную нечеткую логическую модель.

Если рассматривать модель как самоорганизующуюся нейронную сеть Кохонена, то посредством обучения сети можно выявить множество правил, образующих нечеткую базу знаний. При этом входные переменные интерпретируются как входы сети Кохонена, а выходным ячейкам сети соответствуют пред-

посылки нечетких правил. В зависимости от того, как далеко выходной нейрон u_i находится от нейрона-победителя для данного входного вектор x , определяется степень $\mu_i(x)$, с которой x удовлетворяет пред-посылке соответствующего правила.

Программное обеспечение для построения нейро-нечеткой модели.

Одним из самых популярных приложений для работы с нечеткой логикой является приложение fuzzyTECH [6, 7]. Оно состоит из 4-х модулей визуального редактора, в котором строится схема проектируемой модели, редактора переменных, служащего для задания лингвистических переменных, их термов и функций принадлежности, редактора правил, в котором создается и хранится база знаний системы и модуля анализа, выполняющего отладку и собственно моделирование. Последний модуль снабжен широким набором инструментальных средств для визуализации результатов моделирования, формирования отчетов и т.д.

На рисунке 2 представлен экран редактора переменных с заданными функциями принадлежности для некоторой лингвистической переменной *He*. Эта переменная состоит из трех термов {*low*, *medium*, *high*}, каждый из которых задается своей функцией принадлежности.

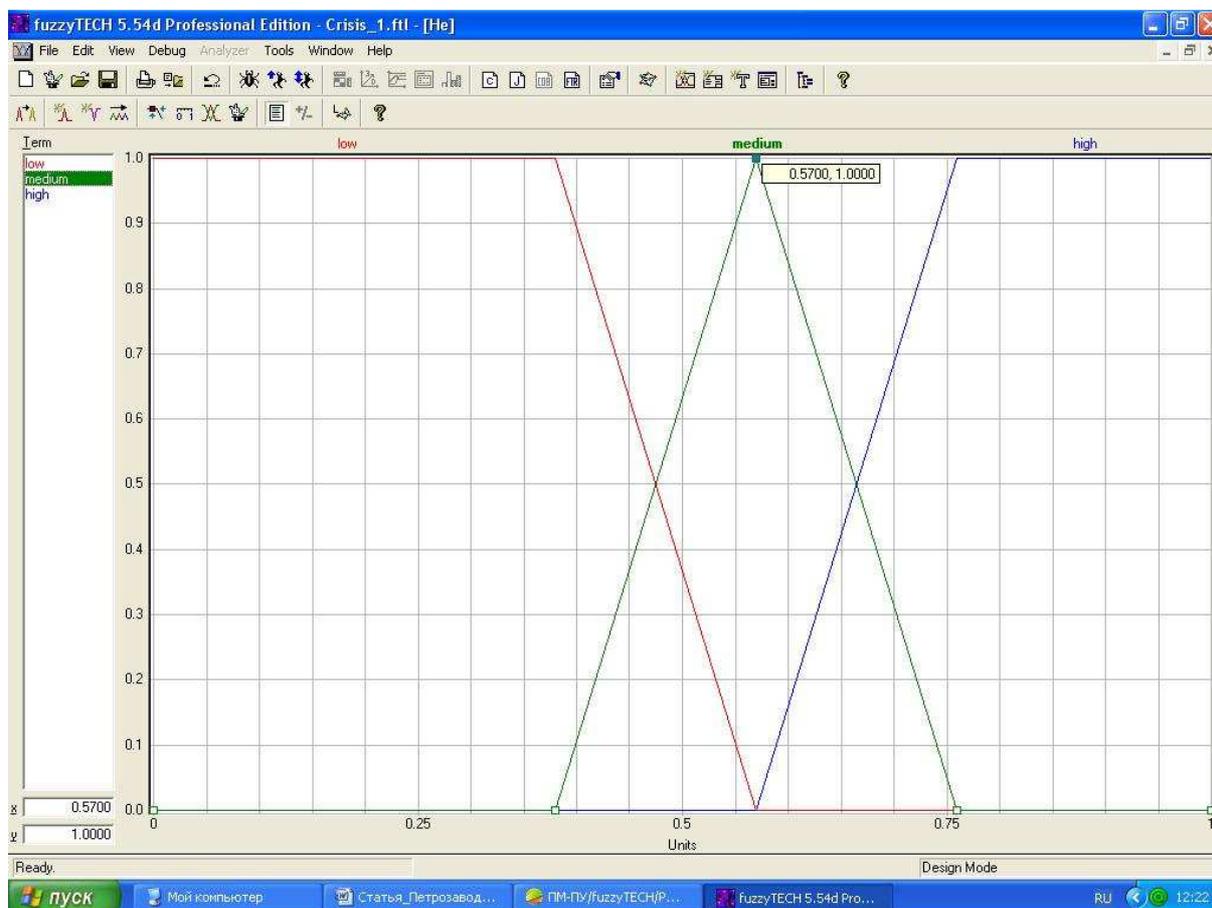


Рисунок 2. – Редактор переменных

Приложение fuzzyTECH снабжено надстройкой NeuroFuzzy, с помощью которого собственно и выполняется извлечение скрытых правил. Извлечение правил осуществляется путем обучения модели на данных из анализируемой БД с использованием нейросетевых технологий. В результате уточняются веса каждого из правил, входящих в базу знаний, и формируется ее окончательная редакция. Функции принадлежности выходной переменной задаются по аналогии со входными переменными. На рисунке 3 показан фрагмент базы знаний системы.

В данном примере на вход модели подается вектор, состоящий из трех компонент, лингвистических переменных: *He*, *Hp*, *Hd*, каждая из которых имеет три термина {*low*, *medium*, *high*}. Выходная переменная *C* имеет пять термов {*very low*, *low*, *medium*, *high*, *very high*}. Исходно в системе автоматически генерируется полный набор всех возможных сочетаний значений входных и выходной переменных. После этого выполняется обучение модели, результатом которого является уточнения веса каждого прави-

ла. Правила с нулевым весом исключаются из базы знаний, а наиболее значимые правила получают наибольшие веса. Таким образом формируется база знаний модели и выполняется извлечение знаний из анализируемой БД.

#	IF			THEN	
	He	Hp	Hd	DoS	C
1	low	low	low	0.00	very_low
2	low	low	low	0.00	low
3	low	low	low	0.00	medium
4	low	low	low	0.00	high
5	low	low	low	0.00	very_high
6	low	low	medium	0.00	very_low
7	low	low	medium	0.00	low
8	low	low	medium	0.00	medium
9	low	low	medium	0.00	high
10	low	low	medium	0.00	very_high
11	low	low	high	0.00	very_low
12	low	low	high	0.00	low
13	low	low	high	0.00	medium
14	low	low	high	0.00	high
15	low	low	high	0.00	very_high

Рисунок 3. – Фрагмент базы знаний системы

Алгоритм извлечения знаний из БД.

Перечислим теперь все шаги алгоритма извлечения знаний из БД.

1. Над сырыми данными, хранящимися в различных источниках, относящихся к анализируемой предметной области, выполняются процедуры извлечения, преобразования и очистки данных. После этого очищенные и преобразованные данные загружаются в хранилище данных. Хранилище данных – это БД специального вида, данные в которой подготовлены для дальнейшей обработки и анализа.
2. В зависимости от целей анализа выделяются входные и выходные переменные, определяются соответствующие им лингвистические переменные, задаются термы лингвистических переменных и их функции принадлежности.
3. На основе полученных лингвистических переменных строится нечеткая модель предметной области. Формируется исходная база знаний системы, представляющая собой набор правил для всех возможных сочетаний значений входных и выходных переменных.
4. Выполняется обучение модели на данных из построенного хранилища данных. В результате обучения уточняются веса каждого правила, входящего в базу знаний и формируется ее окончательная редакция.
5. Сформированная база знаний представляет собой конечный продукт анализа, позволяющий судить о скрытых, неявных и неочевидных закономерностях, имеющих место в анализируемой системе.

Выводы.

1. На современном этапе развития вычислительной техники и информационных технологий извлечение знаний из существующих БД является важной и актуальной задачей.
2. Нейро-нечеткая модель предметной области может быть эффективно использована для извлечения неявных, неочевидных и практически полезных знаний из БД.
3. Извлечение знаний производится путем построения нейро-нечеткой модели предметной области с последующим обучением ее на существующих наборах данных из обрабатываемой БД.

4. Результатом обучения является база знаний, представленная в виде ассоциативных правил вида «ЕСЛИ..., ТО...».

ЛИТЕРАТУРА

1. Piatetsky-Shapiro, G. Knowledge Discovery in Databases / G. Piatetsky-Shapiro, W.J. Frawley. – AAAI/MIT Press, 1991.
2. Wittern, I.H. Data Mining: practical machine learning tools and techniques / I.H. Wittern, E. Frank. – 2 ed. – Elsevier, 2016.
3. Aggarwal, C. Data classification: algorithms and applications / C. Aggarwal. – CRC Press, 2014.
4. Флах П. Машинное обучение. Наука и искусство построения алгоритмов, которые извлекают знания из данных / П. Флах. – М. : ДМК, 2017.
5. Kasko, B. Neural networks and Fuzzy Systems / B. Kasko. – NY. : Printice – Hall, 1992.
6. fuzzyTECH®INFORM GmbH. – Режим доступа <http://www.fuzzytech.com/> – Дата доступа: 13.06.2018.
7. Von Altrock, C. Fuzzy Logic and NeuroFuzzy Application Explained / C. Von Altrock. – Prentice – Hall, 1995.

Поступила 24.09.2018

EXTRACTING KNOWLEDGE FROM DATABASES THROUGH NEURO-FUZZY MODEL

A. OSKIN, D. OSKIN

Briefly discusses the technology of extraction of knowledge and types of extracted knowledge. A method is proposed for extracting knowledge represented as sets of association rules “IF ..., THEN ...”. The method is implemented using neural-fuzzy modeling of the subject area. We describe the techniques for constructing a fuzzy logical model of the analyzed domain and how to use neural networks to highlight fuzzy rules. Considered software for constructing a fuzzy model. An algorithm for extracting knowledge from the databases being analyzed is described.

Keywords: databases, knowledge bases, knowledge extraction, neuro-fuzzy modeling.

УДК 004.931:007.5

**РАЗРЕЖЕННАЯ ВЕЙВЛЕТНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИГНАЛОВ ВИБРАЦИИ
ДЛЯ ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ****Ю.П. АСЛАМОВ, А.П. АСЛАМОВ, канд. тех. наук И.Г. ДАВЫДОВ, А.В. ЦУРКО
(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники)**

Проанализировано пространство признаков алгоритма разреженной декомпозиции сигналов по избыточному вейвлетному словарю для задачи анализа формы вибрационных сигналов во временной области. Предложен алгоритм поэземплярного распознавания элементов оборудования на базе разреженной вейвлетной декомпозиции и машинного обучения. Изучены вопросы построения генератора обучающей выборки для задачи распознавания образов. Предложена методика поиска оптимальных параметров метода одноклассовой классификации One-Class SVM. Представлены результаты тестирования алгоритма распознавания элементов оборудования на наборах вибрационных данных, снятых с подшипников качения и зубчатых передач.

Ключевые слова: *вибродиагностика, разреженная декомпозиция, вейвлет, пространство признаков, распознавания образов, машинное обучение.*

Введение. Получившая в последнее время распространение концепция развития промышленности «Industry 4.0» подразумевает переход от *регламентного* обслуживания промышленного оборудования к обслуживанию *по состоянию*. Необходимым условием для осуществления подобного перехода является наличие полностью автоматических систем вибрационной диагностики, интегрированных с единой системой управления предприятием. Отличие автоматических систем от экспертно-ориентированных заключается в полном исключении человека (эксперта) из процесса принятия решений о техническом состоянии оборудования.

Достоверность работы автоматических систем во многом определяется методами выделения диагностических признаков, характеризующих состояние промышленного оборудования. Во многих случаях недостаточное, а иногда и избыточное количество диагностической информации, затрудняет принятие верного решения. Можно выделить два пути повышения достоверности работы автоматических систем вибрационной диагностики:

- 1) разработка вспомогательных методов, повышающих информативность, стабильность и достоверность экспертно-ориентированных пространств диагностических признаков;
- 2) разработка принципиально новых методов и подходов оценки технического состояния оборудования, оценка качественно новых признаков, создание инвариантных пространств признаков и пр.

Основой современной вибрационной диагностики являются методы спектрального анализа [1, 2]. С одной стороны, указанные методы позволяют с высокой достоверностью обнаруживать широкий перечень дефектов оборудования. С другой стороны, они имеют ряд особенностей, затрудняющих их использование в системах автоматической вибродиагностики:

- 1) сильная зависимость спектральных методов от наличия и состава кинематической схемы оборудования, которая должна содержать максимально полное и точное описание всех элементов;
- 2) достоверность диагностики напрямую связана с точностью определения скорости вращения ротора (рабочего колеса) оборудования;
- 3) параметры элементов оборудования (например, подшипников качения) могут изменяться в результате длительной эксплуатации или при смене режима оборудования [3], что уменьшает достоверность диагностической модели на базе спектральных методов;
- 4) низкая достоверность результатов диагностики промышленного оборудования, работающего в нестационарном режиме.

Частично устранить указанные недостатки можно при помощи набора вспомогательных методов: алгоритмов передискретизации сигнала и слежения за частотой [4], методов уточнения скорости вращения вала [5], алгоритмов статистической подстройки параметров элементов оборудования и т.д. Другим возможным путем повышения достоверности диагностики в этом случае является анализ вибрационных сигналов в частотно-временной и временной областях (анализ формы), свободных от указанных недостатков.

Ранее авторами статьи был предложен алгоритм разреженной декомпозиции сигналов [6] по вейвлетному словарю [7] для создания компактного описания формы сигналов вибрации во временной области. Данный алгоритм основывается на допущении, что вибрационные сигналы имеют ограниченный набор элементарных шаблонов формы, таких как асимметричные экспоненциальные [8] и симмет-

ричные гауссоподобные ударные импульсы, амплитудно-модулированные и синусоидальные колебания [9]. Тогда, если в качестве словаря [7] алгоритма декомпозиции [6] использовать набор базисных функций, созданных на базе выделенных шаблонов, то форма сигнала вибрации может быть охарактеризована распределением его энергии по используемым базисным функциям.

Более того, если предположить, что каждый тип элемента оборудования обладает набором собственных только ему шаблонов формы, то на основе компактного описания сигналов во временной области может быть построена система распознавания указанных элементов. Такого рода система будет актуальна в случаях вибрационной диагностики оборудования при полном либо частичном отсутствии его кинематической схемы.

Кроме того, следует отметить, что в процессе деградации технического состояния оборудования (при длительной эксплуатации) форма генерируемых им вибрационных сигналов может изменяться. Примером тому служит процесс появления ударных процессов в подшипниках качения и зубчатых передачах при зарождении дефектов. При этом в случае подшипника качения как резонансная частота возникших колебаний [10], так и их форма будут квазиинвариантны к скорости его вращения. Следовательно, для указанных элементов возникновение колебаний определенной формы может являться диагностическим признаком для оценки их технического состояния.

Предметом исследования настоящей работы является оценка возможности распознавания подшипников качения и зубчатых передач на основе анализа формы их вибрационных сигналов при помощи алгоритма разреженной вейвлетной декомпозиции.

Основная часть. Разреженная вейвлетная декомпозиция [6] представляет собой итерационную процедуру разложения сигнала $s(t)$ в окрестности некоторой частоты f_0 по набору базисных функций ψ_m словаря \mathcal{D} [7], в качестве которых используются семейства вейвлетов *MEXH*, *MEXP*, *MORL*, *SINP* [8, 9]. Каждое из представленных семейств предназначено для выделения временных шаблонов определенной формы. Так, семейство *MEXP* обладает максимальным откликом на экспоненциальные ударные воздействия; семейство *MORL* – на амплитудно-модулированные процессы; семейство *SINP* – на синусоидальные воздействия. Вейвлет *MEXH* используется для обнаружения коротких шумоподобных колебаний, не подходящих ни под один из выделенных шаблонов формы.

Результатом работы алгоритма разреженной вейвлетной декомпозиции является так называемое разреженное представление сигнала \mathbf{X} и спектр базисных функций \mathbf{W}^{BF} , или БФ-спектр.

Разреженное представление \mathbf{X} характеризует сигнал набором из четырех коэффициентов $\{f_0, \psi_m, c_m, \tau_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, где f_0 – центральная частота, ψ_m – тип базисной функции, c_m и τ_m – амплитудный коэффициент и временное положение базисной функции ψ_m соответственно.

В свою очередь, \mathbf{W}^{BF} есть распределение энергии сигнала по базисным функциям ψ_m словаря $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}^{\text{MEXH}}, \mathcal{D}^{\text{MEXP}}, \mathcal{D}^{\text{MORL}}, \mathcal{D}^{\text{SINP}}\}$ [7]. БФ-спектр является основой для создания пространства признаков разреженной вейвлетной декомпозиции для реализации алгоритмов машинного обучения. Ранее авторами уже была рассмотрена возможность различения сигналов вибрации, полученных от подшипников качения и зубчатых передач, на базе машинного обучения с учителем [11]. При этом были рассмотрены пространства информативных признаков, получаемые из БФ-спектра: *BFS*, *BFS-C-I*, *BFS-C-II*, *BFS-F*, *BFS-L-I*, *BFS-L-II* [11].

Основной целью алгоритмов распознавания является процесс отнесения исследуемого объекта к одному или нескольким из $k + 1$ взаимоисключающих классов. В настоящее время одним из наиболее эффективных средств решения задачи распознавания является метод одноклассовой классификации. Для идентификации подшипников качения или зубчатых передач по сигналам вибрации авторами предложено использовать алгоритм поэземплярного распознавания [12] на базе метода одноклассовой классификации *One-Class SVM (OCSVM)*.

Одноклассовая классификация. Опишем кратко стандартный метод одноклассовой классификации *OCSVM*. Пусть дана выборка из независимых одинаково распределенных элементов x_1, \dots, x_l из \mathbf{R}^n . Основная идея алгоритмов одноклассовой классификации состоит в том, чтобы отделить часть объектов выборки, которые считаются принадлежащими к «нормальному» классу, от остальных элементов выборки, которые в том или ином смысле рассматриваются как «аномальные».

Для оригинального алгоритма *OCSVM* [13] аномальными считаются те объекты из выборки, для которых соответствующие вектора описаний в пространстве признаков близки к началу координат.

Пусть дано некоторое отображение $\phi(\cdot)$, задающее вектор признаков объекта по его вектору описаний x , и нормальный вектор гиперплоскости w . Считается, что точка x принадлежит нормальному

классу, если выполняется неравенство $(w \cdot \varphi(x)) - \rho > 0$. Для нахождения нормального вектора гиперплоскости w и значения ρ решается оптимизационная задача [13]

$$\frac{1}{2} \|w\|_2^2 + \frac{1}{\nu l} \sum_{i=1}^l \xi_i - \rho \rightarrow \min_{w, \xi, \rho}, \quad (1)$$

$$s.t. (w \cdot \varphi(x_i)) \geq \rho - \xi_i, \quad \xi_i \geq 0$$

где ξ_i – расстояние от точки до гиперплоскости;

ν – коэффициент регуляризации, устанавливающий верхнюю границу выбросов, при которой обучающие образцы считаются аномалией.

Оптимизационная задача (1) выпукла, поэтому решения прямой и двойственной задач совпадают. Выпишем двойственную задачу:

$$-\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \alpha_i \alpha_j K(x_i, x_j) \rightarrow \max_{\alpha}$$

$$s.t. \sum_{i=1}^l \alpha_i = 1, \quad 0 \leq \alpha_i \leq \frac{1}{\nu l}.$$

В двойственной задаче скалярное произведение $(\varphi(x_i) \cdot \varphi(x_j))$ заменено на ядерную функцию $K(x_i, x_j)$. Таким образом, фактически для решения задачи одноклассовой классификации нет необходимости знать явный вид отображения $\varphi(x)$. При этом решение прямой задачи выражается через решение двойственной:

$$w = \sum_{i=1}^l \alpha_i \varphi(x_i).$$

Свойства задачи таковы, что условие $\alpha_i \neq 0$ фактически означает, что точка выборки x_i находится на границе критической области и для нее выполнено равенство $(w \cdot \varphi(x_i)) = \rho$, поэтому для любого x_k , такого что $\alpha_k \neq 0$, можно записать

$$\rho = (w \cdot \varphi(x_k)) = \sum_{i=1}^l \alpha_i K(x_i, x_k).$$

Таким образом, решающее правило имеет вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^l \alpha_i K(x_i, x_j) - \rho. \quad (2)$$

Если $f(x) > 0$, то считается, что точка x принадлежит нормальному классу. Величина $|f(x)|$ характеризует степень уверенности в соответствующем решении.

Метод одноклассовой классификации *OCSVM* минимизирует область пространства признаков «нормального класса» (1) при максимизации количества объектов обучающей выборки внутри нее. По этой причине *OCSVM* в сравнении с методом *2-class SVM* имеет в среднем меньшую вероятность правильного обнаружения и большую ошибку второго рода (вероятность пропуска), причем разница может исчисляться в разгах [14].

Качество сформированного правила принятия решения (2) полностью определяется вероятностями ошибочных решений, допускаемых при распознавании объектов. Ошибка распознавания возникает из-за пересечения классов в многомерном признаковом пространстве, когда объекты из обучающей выборки одного класса в результате проекции на гиперплоскость ошибочно относят к объектам другого класса. Снизить вероятность ошибочных решений распознавания возможно за счет настройки параметров классификатора в процессе обучения [12].

Применительно к задаче распознавания качество правила принятия решений $f(x)$ будет определяться вероятностями ложной тревоги и пропуска цели, а регулируемым параметром выступает ν , характеризующий долю объектов обучающей выборки, выходящих за пределы гиперсферы. Исходя из этого процесс оптимизации может быть представлен алгоритмом подбора параметра ν по критерию минимизации ошибки распознавания или максимизации вероятности правильного распознавания P . Структурная схема алгоритма оптимизации ν представлена на рисунке 1, а, а кривая зависимость $P(\nu)$ – на рисунке 1, б.

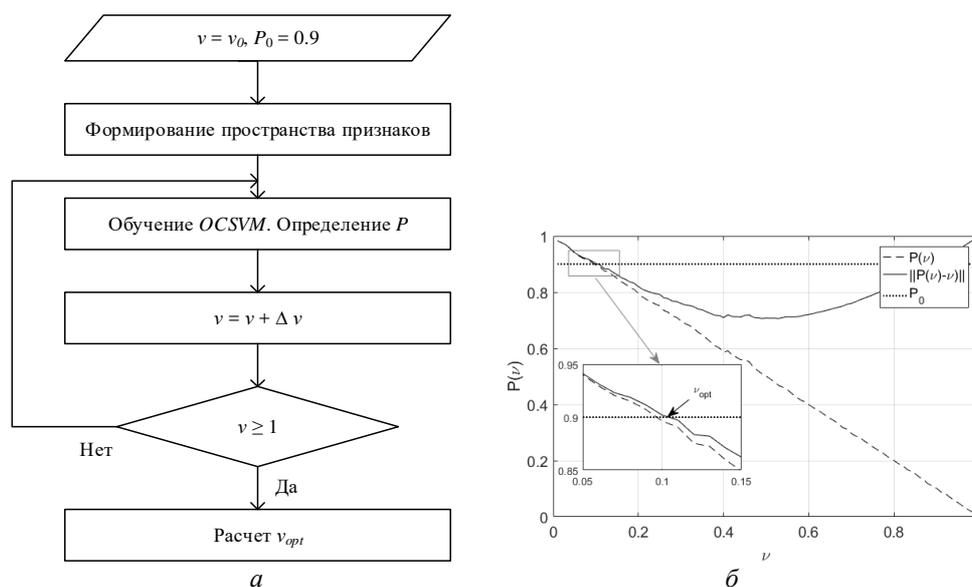


Рисунок 1. – Обучение классификатора OCSVM:
 а – блок-схема алгоритма оптимизации ν ; б – определение параметра ν_{opt}

Эмпирически было установлено, что оптимальное значение шага изменения $\nu \in (0,1]$ составляет $\Delta \nu = 0,01$. Во многих случаях значение $\nu \rightarrow 0$ является причиной увеличения вероятности ложной тревоги. По этой причине начальное значение ν составляет $\nu_0 = 0,01$, а оптимальное значение ν_{opt} выбирается по кривой $\|P(\nu) - \nu\|$ с использованием порога P_0 (см. рисунок 1, б).

Генератор обучающей выборки. Как отмечалось выше, основной целью алгоритмов распознавания является процесс отнесения исследуемого объекта к одному или нескольким из $k + 1$ взаимоисключающих классов. Одним из ключевых факторов, влияющих на качество работы алгоритмов распознавания, является процесс формирования обучающей выборки. Под «обучающей выборкой» понимается множество объектов, для которых априорно известно, к каким классам они относятся. Для задачи вибродиагностики под объектами понимаются вибрационные сигналы или наборы диагностических признаков.

В настоящее время не сформирован исчерпывающий набор вибрационных сигналов, способный описать все возможные конфигурации промышленного оборудования и учитывающий все возможные нюансы как оборудования, так и используемых при снятии данных измерительных систем. Поэтому реализация алгоритмов распознавания на базе инвариантных пространств признаков сталкивается со следующими проблемами:

- а) отсутствие или недостаточный объем обучающей выборки для достоверного обучения;
- б) обучающая выборка описывает не все возможные случаи или не содержит объекты всех классов;
- в) невозможность применения полученных результатов распознавания для иной конфигурации оборудования или иных начальных условий.

Ввиду использования пространства признаков разреженной вейвлетной декомпозиции для решения указанных проблем авторами предложено использовать *генератор обучающей выборки*. Возможность такого шага объясняется следующим: а) анализ формы сигнала проводится в узкой полосе частот Δf в окрестности f_0 , при этом $\Delta f \ll f_0$; б) анализ формы лишь косвенно зависит от скорости вращения вала и конфигурации оборудования; в) пространство признаков разреженной вейвлетной декомпозиции имеет невысокую размерность $dim = 3-30$, что эквивалентно количеству степеней свободы для его генерации; г) имеется ограниченное количество шаблонов формы для сигналов вибрации подшипников качения [8] и зубчатых передач [9]. По этой причине может быть сгенерирован как набор модельных узкополосных сигналов, содержащих требуемые шаблоны формы, так и непосредственно само пространство признаков разреженной вейвлетной декомпозиции для различных случаев.

На рисунке 2 приведена структурная схема разработанного авторами генератора обучающей выборки, на основе которого было сформировано $L_1 = 1407$ модельных сигналов для подшипника качения и $L_2=1324$ – для зубчатых передач.

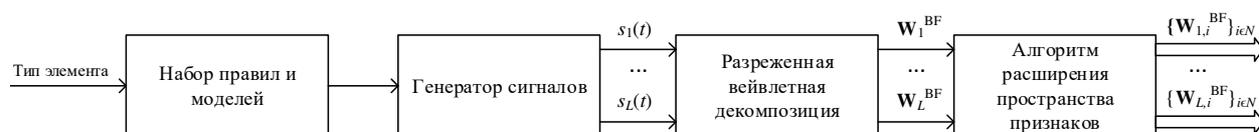


Рисунок 2. – Структурная схема генератора обучающей выборки

Генератор обучающей выборки не относится непосредственно к предмету исследования текущей статьи, поэтому детальное описание процесса его создания и тестирования опущено. Следует лишь отметить, что представленный на рисунке 2 блок расширения пространства признаков предназначен для формирования из оригинального БФ-спектра \mathbf{W}^{BF} набора вспомогательных пространств признаков $\{\mathbf{W}_i^{BF}\}_{i \in \mathbb{N}}$ с идентичной или меньшей размерностью. Необходимость такого шага обусловлена тем, что пространство признаков с меньшей размерностью требует меньшее количество сигналов для описания всех возможных объектов j -го класса.

Алгоритм поэкземплярного распознавания. Алгоритм поэкземплярного распознавания [12] подразумевает обучение на предварительном этапе N классификаторов $OCSVM$, каждый из которых предназначен для обнаружения объектов определенного класса. В результате классификации сформированного вектора признаков каждым из N классификаторов по правилу (2) вычисляет значение коэффициента принадлежности $K_i = \{0,1\}$ объекта к каждому из N классов. При этом при $f(x) \geq 0$ классификатор присваивает коэффициенту $K_i = 1$, в противном случае – $K_i = 0$. Решение о принадлежности объекта тому или иному классу делается на базе весовых коэффициентов значимости $k_{\text{знач},i}$, получаемых на этапе обучения классификаторов. При этом выбор делается в пользу того класса, для которого

$$K_i \cdot k_{\text{знач},i} = \max. \quad (3)$$

Однако первая разработанная авторами реализация алгоритма поэкземплярного распознавания элементов оборудования, при которой обучение $OCSVM$ (см. рисунок 1, а) проводилось только на сформированных генератором обучающей выборки векторах признаков оригинального БФ-спектра \mathbf{W}^{BF} с размерностью $dim = 30$, имела высокую вероятность пропуска $FNR = 0,9-0,95$. Такой результат в основном обусловлен недостатками генератора обучающей выборки, для нивелирования которых предложено следующее:

а) процедура обучения классификаторов (см. рисунок 1, а) проводится только на объектах «нормального класса», при этом оптимальное значение v_{opt} выбирается по критерию минимизации вероятности пропуска;

б) применяется процедура расширения пространства признаков (см. рисунок 2) для формирования подпространств $\{\mathbf{W}_i^{BF}\}_{i \in \mathbb{N}}$ с меньшей размерностью, чем \mathbf{W}^{BF} [11].

При таком подходе для распознавания каждого из N классов формируется M классификаторов $OCSVM$, каждый из которых обучен на одном из сформированных пространств признаков. Процедуру расчета коэффициентов принадлежности $K_i = \{0,1\}$ набором из M классификаторов назовем *голосовани-*

ем. Тогда решение о принадлежности объекта к тому или иному классу может приниматься по подсчету количества голосов как без взвешивания:

$$\sum_{j=1}^M K_{i,j} = \max, \tag{4}$$

так и со взвешиванием:

$$\sum_{j=1}^M K_{i,j} \cdot k_{\text{знач.}i,j} = \max, \tag{5}$$

где $k_{\text{знач.}i,j} = \log_{16} \left(\dim(\mathbf{W}_{i,j}^{BF}) \right)$ – весовой коэффициент значимости, зависящий от размерности используемого пространства признаков.

Для повышения достоверности распознавания элементов был разработан алгоритм принятия решений на базе правил (4) и (5). В спорных ситуациях элемент оборудования определяется как «неизвестный». Структурная схема алгоритма поэлементного распознавания элементов оборудования представлена на рисунке 3, на котором алгоритм разреженной декомпозиции сигнала по вейвлетному базису обозначен как *SWD*.

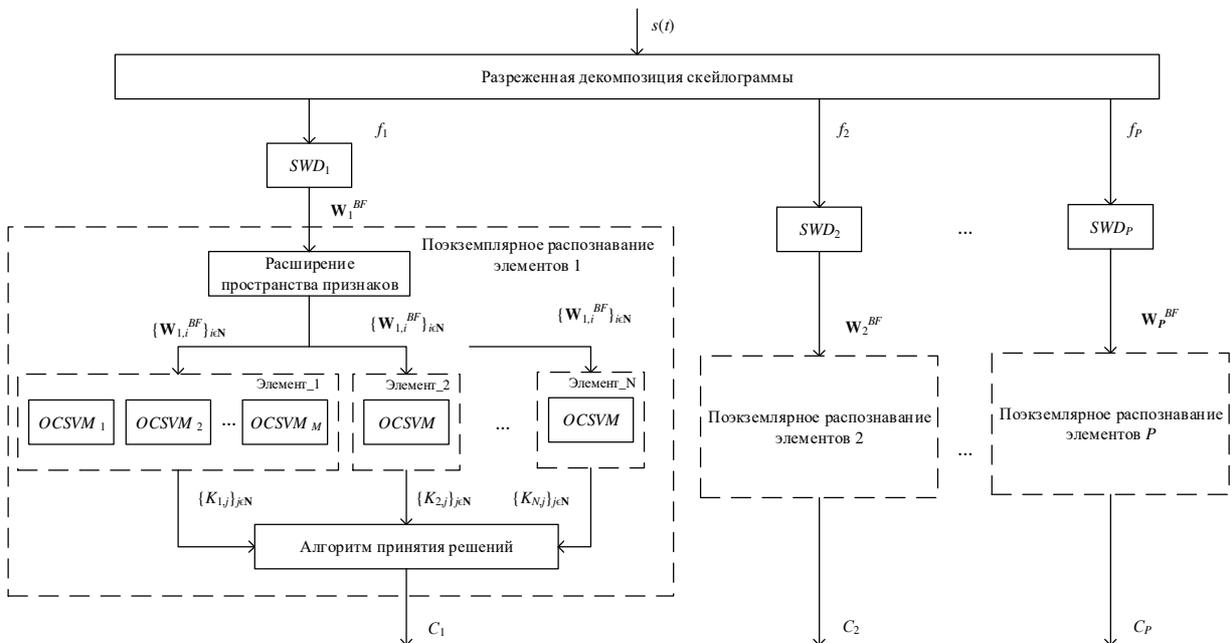


Рисунок 3. – Структурная схема алгоритма поэлементного распознавания

Как представлено на рисунке 3, алгоритм разреженной декомпозиции скейлограммы выделяет набор частот оборудования f_1-f_p , в окрестности которых сосредоточена значительная часть энергии. Для каждой выделенной частоты применяется алгоритм разреженной вейвлетной декомпозиции сигналов и оценивается эффективность декомпозиции ξ [7, 11]. Распознавание элементов схемы проводится только для тех частот, эффективность декомпозиции сигнала в окрестности которых превышает пороговое значение $\xi_0 = 50\%$. Распознавание элементов схемы для каждой частоты f_i проводится независимо.

Методика эксперимента. Целью эксперимента является оценка качества работы предложенного алгоритма поэлементного распознавания подшипников качения и зубчатых передач на базе пространства признаков разреженной вейвлетной декомпозиции и генератора обучающей выборки.

Для проведения экспериментов были использованы наборы данных «High Speed Gearbox Dataset» (<http://data-acoustics.com/measurements/gear-faults/>) и «High Speed Bearing Dataset» (<http://data->

acoustics.com/measurements/bearing-faults/), которые содержат сигналы вибрации, снятые с коробки передач ветрогенератора в нормальном состоянии и при наличии дефектов шестерен.

Кроме того, было сформировано два набора данных «*Bearing 6213 OR Dataset*» и «*Bearing 6213 Norm/OR Dataset*», снятых с подшипника качения 6213 при различных скоростях вращения вала (от 600 до 900 об/мин) в нормальном состоянии и при наличии дефекта наружного кольца. Чувствительность используемого при этом датчика вибрации *B&R* составляла $s = 100$ мВ/г, частота дискретизации сигналов $F_s = 96$ кГц.

Обработка данных проводилась в среде *MATLAB*. В качестве классификатора выбрана реализация *OCSVM* на базе *libSVM* (<https://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/libsvm>). Оценка качества классификации проводилась в терминах [15]:

- 1) чувствительность *TPR* (*true positive rate* или *recall*)

$$recall = TPR = \frac{TP}{P} = \frac{TP}{TP + FN}, \quad (6)$$

где *TP* (*true positive*) – количество истинно-положительных решений (верно идентифицированных образцов);

P – количество положительных (идентифицированных) образцов;

FN (*false negative*) – количество ложноотрицательных решений (ложно отклоненных образцов);

- 2) точность *PPV* (*positive predictive value* или *precision*)

$$precision = PPV = \frac{TP}{TP + FP}, \quad (7)$$

где *FP* (*false positive*) – количество истинно отрицательных решений (верно отклоненных образцов).

Результаты и их обсуждение. Для оценки качества работы алгоритма поэкземплярного распознавания элементов оборудования были проведены эксперименты на наборах вибрационных сигналов. Для каждого набора данных было выделено несколько резонансных частот f_i – f_p , в пределах которых проводилось распознавание. При этом искомым элементом (истинно верный) для каждой частоты f_i задавался экспертным путем посредством анализа спектральных признаков в ее окрестности.

В таблице 1 представлены результаты распознавания подшипника качения одиночными классификаторами *OCSVM* на базе различных пространств признаков для набора данных «*Bearing 6213 OR Dataset*».

Таблица 1. – Результаты распознавания подшипника качения для набора данных «*Bearing 6213 OR Dataset*»

Пространство признаков	Частота, Гц							
	$f_1 = 600$		$f_2 = 1100$		$f_3 = 3050$		$f_4 = 5200$	
	<i>TPR</i>	<i>PPV</i>	<i>TPR</i>	<i>PPV</i>	<i>TPR</i>	<i>PPV</i>	<i>TPR</i>	<i>PPV</i>
<i>BFS</i>	0,079	1	0,219	1	0,072	1	0,040	1
<i>BFS-C-I</i>	0,158	1	0,610	1	0,247	1	0,182	1
<i>BFS-C-II</i>	0,099	1	0,276	1	0,083	1	0,040	1
<i>BFS-F</i>	0,436	0,917	0,741	1	0,701	1	0,717	1
<i>BFS-wn</i>	0,079	1	0,219	1	0,052	1	0,040	1
<i>BFS-wn-C-I</i>	0,168	1	0,591	1	0,165	1	0,182	1
<i>BFS-wn-C-II</i>	0,109	1	0,276	1	0,052	1	0,040	1
<i>BFS-wn-F</i>	0,396	1	0,687	1	0,588	1	0,667	1
<i>BFS-wn-cl</i>	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>BFS-wn-cl-C-I</i>	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>BFS-wn-cl-C-II</i>	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>BFS-wn-cl-F</i>	0,465	0,940	0,105	1	0,381	1	0,879	1
<i>BFS-wn-C-I-cl</i>	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>BFS-wn-C-II-cl</i>	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>BFS-wn-F-cl</i>	0,765	1	0,824	1	0,443	1	0,626	1
Итоговый результат	0,921	0,960	1	1	0,897	1	0,950	1

Распознавание проводилось для четырех выделенных частот f_1 – f_4 , эффективность декомпозиции сигнала в окрестности которых превышала пороговое значение. Для классификаторов на базе каждого пространства признаков были рассчитаны параметры чувствительности *TPR* и точности *PPV*. Графа

«Итоговый результат» содержит оценку качества работы алгоритма поэкземплярного распознавания набором представленных классификаторов. Серым цветом выделены лучшие параметры в пределах каждой анализируемой частоты f_i .

В соответствии с результатами, представленными в таблице 1, можно сделать вывод, что совместное использование набора независимых классификаторов позволяет в значительной мере повысить чувствительность (TPR) и точность (PPV) распознавания элементов, в сравнении с работой одиночного классификатора (на базе одного пространства признаков). Так, например, для частоты f_3 чувствительность распознавания элемента отдельными классификаторами варьируется в диапазоне $TPR = [0; 0,701]$, в то время как результирующее значение составляет $TPR = 0,897$.

Авторами детально не рассматривается каждый тип пространства признаков, представленный в таблице 1, так как это не входит в предмет исследования данной статьи. Следует лишь отметить, что наибольшей чувствительностью обладают классификаторы $OCSVM$ на базе пространства признаков $BFS-F$ и его модификаций, описывающих распределение энергии сигнала по семействам базисных функций $MEXH$, $MEXP$, $MORL$ и $SINP$ [7]. Пространство $BFS-F$ носит интегральный характер, его размерность ($dim = 3-4$) значительно ниже размерности оригинального БФ-спектра ($dim = 30$) [11]. По этой причине классификаторы на базе $BFS-F$ имеют в среднем меньшую точность распознавания, чем классификаторы на базе других типов пространств (таблица 1), но большую чувствительность.

На рисунках 4 и 5 представлены результаты распознавания элементов оборудования для сигналов вибрации из наборов «High Speed Bearing Dataset» и «Bearing 6213 OR Dataset» в окрестности частот $f_4 = 3800$ Гц и $f_2 = 1100$ Гц соответственно. При этом верным (искомым) элементом для набора данных «High Speed Bearing Dataset» является зубчатая передача, а для «Bearing 6213 OR Dataset» – подшипник качения. На рисунках 4 и 5 имеются следующие обозначения: В – подшипник качения, G – зубчатая передача; 0 – неопознанный элемент; + – результат со средней достоверностью, ++ – результат с высокой достоверностью.

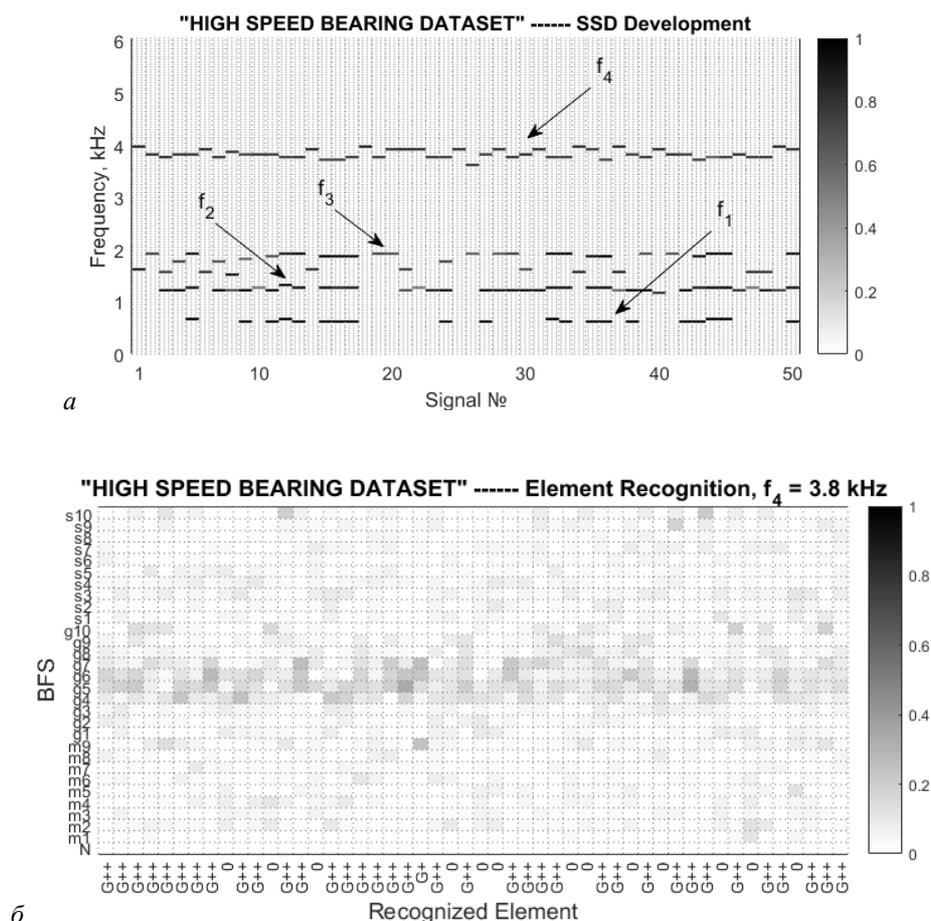


Рисунок 4. – Распознавание элементов схемы для набора данных «High Speed Bearing Dataset»: а – разреженная декомпозиция скейлограммы; б – распознавание элемента для частоты f_4

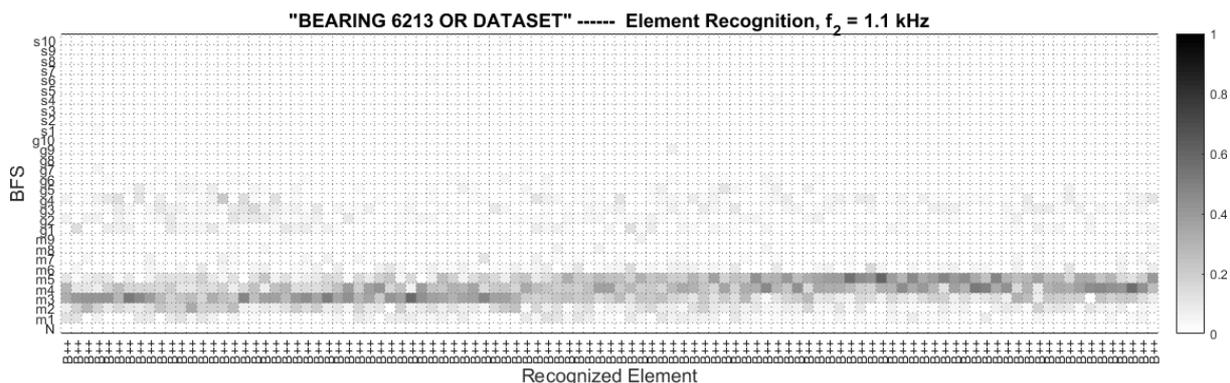


Рисунок 5. – Распознавание элементов схемы для набора данных «*Bearing 6213 OR Dataset*»

В таблице 2 приведены итоговые результаты распознавания элементов оборудования для всех используемых наборов данных. В графе «Набор данных / Параметры» рядом с названием каждого набора данных в круглых скобках обозначен тип искомого элемента: (G) – зубчатая передача, (B) – подшипник качения. В каждом наборе данных было выделено по четыре значимые частоты f_1 – f_4 .

Таблица 2. – Итоговые результаты распознавания элементов по наборам данных

Набор данных / Параметры	Частота							
	f_1		f_2		f_3		f_4	
	<i>TPR</i>	<i>PPV</i>	<i>TPR</i>	<i>PPV</i>	<i>TPR</i>	<i>PPV</i>	<i>TPR</i>	<i>PPV</i>
<i>High Speed Gearbox Dataset</i> (G)	0,589	0,786	0,923	1	0,706	0,733	0,804	0,945
<i>High Speed Bearing Dataset</i> (G)	1	1	0,951	1	0,782	0,932	0,742	1
<i>Bearing 6213 OR Dataset</i> (B)	0,921	0,960	1	1	0,897	1	0,950	1
<i>Bearing 6213 Norm/OR Dataset</i> (B)	0,821	0,92	1	1	0,865	1	0,756	0,982

В соответствии с результатами проведенных экспериментов для различных наборов данных можно сделать вывод, что алгоритм поэкземплярного распознавания элементов оборудования на основе набора одноклассовых классификаторов способен распознавать элементы оборудования с достаточно высокой достоверностью.

Наименьшая чувствительность метода ($TPR = 0,589$) была зафиксирована для вибрационных сигналов набора данных «*High Speed Gearbox Dataset*» в окрестности частоты f_1 . Причиной такого результата является недостаточно полная сгенерированная обучающая выборка для распознавания зубчатых передач, при формировании которой не были учтены модели ударных процессов шестерен при изломе зубьев. За исключением указанного случая, чувствительность разработанного метода распознавания элементов оборудования лежит в диапазоне $TPR = [0,706, 1]$ при точности распознавания $PPV = [0,733, 1]$.

Следует отметить, что чувствительность и точность распознавания бездефектного подшипника качения в среднем ниже, чем дефектного, что нашло свое отражение в более низких показателях TPR и PPV для набора данных «*Bearing 6213 Norm/OR Dataset*» по сравнению с «*Bearing 6213 OR Dataset*» (таблица 2). Причиной тому служит либо полное отсутствие ударных процессов в сигнале бездефектного подшипника, либо их незначительный энергетический вклад в общую энергетику сигнала, что не позволяет с высокой достоверностью определить сигнал как «подшипниковый».

Средние значения параметров TPR и PPV для всех используемых в процессе тестирования алгоритма сигналов ($N = 1115$ шт.) составили $TPR = 0,882$ и $PPV = 0,972$.

Заключение. В работе рассмотрено пространство информативных признаков алгоритма разреженной вейвлетной декомпозиции для решения задачи анализа формы сигналов вибрации. Предложен алгоритм поэкземплярного распознавания элементов оборудования на базе разреженной вейвлетной декомпозиции. Освещены вопросы обучения и оптимизации параметров метода одноклассовой классификации *One-Class SVM*. Кратко описан принцип построения генератора обучающей выборки для задачи машинного обучения.

Проведена апробация алгоритма поэкземплярного распознавания элементов схемы на вибрационных сигналах, снятых с подшипников качения и зубчатых передач. Средние значения параметров чувствительности TPR и точности PPV распознавания составили $TPR = 0,882$ и $PPV = 0,972$ соответственно.

Таким образом, предложенный в статье метод распознавания элементов оборудования на базе разреженной вейвлетной декомпозиции сигналов вибрации может применяться в практике вибрационной диагностики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов, И.Л. Вибродиагностика энергетического оборудования : учебное пособие по дисциплине «Диагностика в теплоэнергетике» / И.Л. Абрамов. – Кемерово, 2011. – 80 с.
2. Барков, А.В. Вибрационная диагностика машин и оборудования. Анализ вибрации: учеб. пособие / А.В. Барков, Н.А. Баркова. – СПб. : СПбГМТУ, 2004. – 156 с.
3. Pennacchi P. An experimental based assessment of the deviation of the bearing characteristic frequencies / P. Pennacchi [et al.] // CMMNO. – 2013. – (papers).
4. Eltabach, M. Rotating machine speed estimation using vibration statistical approach / M. Eltabach, G. Govaert // WCCM. – 2017. – (papers).
5. Алгоритмы уточнения частоты вращения вала в задачах вибродиагностики роторного оборудования / Ю.П. Асламов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия В, Промышленность. Прикладные науки. – 2017. – № 11. – С. 51–58.
6. Разреженная вейвлетная декомпозиция в задачах вибродиагностики роторного оборудования / Ю.П. Асламов [и др.] // Доклады БГУИР. – 2017. – № 8. – С. 91–98.
7. Асламов, Ю.П. Избыточный вейвлетный словарь для разреженной декомпозиции сигналов вибрации / Ю.П. Асламов, И.Г. Давыдов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 86–94.
8. Асламов, Ю.П. Вейвлет-функция для диагностики подшипников качения / Ю.П. Асламов, И.Г. Давыдов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия В, Промышленность. Прикладные науки. – 2018. – № 11. – С. 14–22.
9. Вейвлет-функции для диагностики зубчатых передач / Ю.П. Асламов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия В, Промышленность. Прикладные науки. – 2018. – № 3. – С. 38–46.
10. Эффективность использования скалограммы для оценки технического состояния роторного оборудования / Ю.П. Асламов [и др.] // Доклады БГУИР. – 2018. – № 2. – С. 12–17.
11. Асламов, Ю.П. Пространство признаков разреженной вейвлетной декомпозиции вибрационных сигналов для задач машинного обучения / Ю.П. Асламов, И.Г. Давыдов // Вестник ГГТУ им. Сухого. – 2018. – № 3. – С. 49–56.
12. Субботенко, А.В. Алгоритм поэкземплярного распознавания на основе метода опорных векторов / А.В. Субботенко // Информация и космос. – 2014. – № 2. – С. 47–53.
13. Burnaev, E. One-Class SVM with Privileged Information and Its Application to Malware Detection [Электронный ресурс] / E. Burnaev, D. Smolyakov // ArXiv, Los Alamos. – Режим доступа: <https://arxiv.org/pdf/1609.08039.pdf>.
14. Arcolano, N. One-class support vector machines: Methods and applications / N. Arcolano, D. Ruboy. // Harvard University, Final Project Presentation. – 2008. – P. 32
15. Powers, D. From Precision, Recall and F-Factor to ROC, Informedness, Markedness & Correlation / D. Powers // Journal of Machine Learning Technologies. – 2011. – № 2(1). – P. 37–63.

Поступила 15.08.2018

**SPARSE WAVELET DECOMPOSITION OF VIBRATION SIGNALS
FOR PATTERN RECOGNITION PROBLEM**

Y. ASLAMOV, A. ASLAMOV, I. DAVYDOV, A. TSURKO

The paper presents the features space of the algorithm for a sparse decomposition of signals by the redundant wavelet dictionary to analyze the waveform of vibration signals. An algorithm for recognition of elements of rotary equipment on the basis of sparse wavelet decomposition and machine learning is proposed. The questions of constructing the generator of the training dataset for pattern recognition problem are considered. A method for estimating the optimal parameters of the One-Class SVM is proposed. The results of testing the recognition algorithm on the datasets of vibration signals of rolling bearings and gears are presented.

Keywords: vibration-based diagnostics, sparse decomposition, wavelet, feature space, pattern recognition, machine learning.

УДК 621.865

ВИДЫ СОТРУДНИЧЕСТВА РОБОТОВ В РОБОТОТЕХНИЧЕСКОМ КОМПЛЕКСЕ

Л.А. ЛОБОРЕВА, И.Э. ИЛЮШИН

(Могилевский государственный университет продовольствия)

Приведена классификация сотрудничества роботов-манипуляторов. Описаны подходы к разработке программного обеспечения. Рассмотрены функции для реализации сотрудничества роботов и стратегии планирования траекторий роботов при совместной работе. Эффективность предложенной методики подтверждается результатами моделирования.

Ключевые слова: офф-лайн программирование (OLP), робот-манипулятор, симуляция.

Введение. В современных исследованиях большое внимание уделяется управлению мультиагентными системами [1–5]. Простейшей мультиагентной системой в промышленности является робототехнический комплекс (РТК) с несколькими роботами и (или) позиционером, однако особенности работы такой системы в литературе рассматриваются редко. Технология с несколькими роботами позволяет сократить время производственного цикла, а системы становятся более компактными и гибкими. Робототехнический комплекс с несколькими роботами и одним контроллером идеально подходит для обработки симметричных заготовок, выполнения нескольких круговых сварных швов с регулировкой температуры, потока газа и металла. При этом повышается эффективность и улучшается качество.

Зачастую для программирования роботов применяют OLP. Созданные программы могут быть протестированы в виртуальной среде, откорректированы и загружены в контроллер робота. Это позволяет сократить время наладки по сравнению с ручным обучением, обыграть производственные сценарии, оценить время цикла, при необходимости изменить компоновку и избежать столкновений в реальной роботизированной ячейке.

Целью исследования в данной работе является проблема совместного управления несколькими роботами и позиционером.

1. Инструкции для организации сотрудничества роботов. Роботы и позиционеры в РТК могут действовать независимо или в координированном режиме. В режиме частичной координации роботы в РТК работают с одним стационарным объектом и координируются в определенных точках рабочего цикла. При этом частично синхронизируется порядок выполнения операций, но не координируются перемещения. Например, пара роботов проводит сварку детали с двух сторон в различных зонах. Позиционер ориентирует сварную конструкцию для работы с ее верхней частью. Роботы выполняют сварные швы, а позиционер ожидает завершения технологической операции. Далее позиционер поворачивает сварную конструкцию для выполнения сварных швов на ее нижней стороне. Операции обработки проводятся на неподвижной детали. При этом синхронизация необходима для сообщения информации: позиционеру – о допуске на передвижение сварной конструкции, роботам – о продолжении работы.

В полном скоординированном перемещении ряд роботов работает над одним движущимся объектом, при этом синхронизируются действия и перемещения. Например, подающий робот непрерывно перемещает по дуге сварную конструкцию, а два пятна точечной сварки выполняются другим роботом, двигающимся синхронно с первым. Такое движение выполняется командами на перемещение до промежуточной позиции и до конца дуги синхронно с командами перемещения в программе сварочного робота.

Некоторые промышленные блоки управления и контроллеры ориентированы на работу нескольких роботов: ABB Robotics имеет функцию MultiMove, KUKA Roboter GmbH – функцию RoboTeam, Yaskawa Motoman Robotics – функцию Independent/Coordinated (независимую/скоординированную). Указанные функции позволяют запрограммировать совместные задачи для нескольких роботов и устройств позиционирования. При организации сотрудничества роботов наиболее полезны следующие инструкции и команды:

- 1) MultiMove для роботов ABB на языке RAPID:
 - WaitSyncTask – синхронизация нескольких программных задач в специальной точке программы;
 - SyncMoveOn и SyncMoveOff – запуск и завершение режима синхронизации соответственно (команды перемещения в разных программных задачах выполняются одновременно, пока не будет выполнена команда SyncMoveOff). Перед инструкциями SyncMoveOn и SyncMoveOff необходимо запрограммировать точки останова;

- SyncMoveUndo – отключение синхронизированных движений;
- MoveExtJ (Move External Joints) – перемещение одного или несколько механических блоков без TCP (используется для перемещения дополнительных осей без робота);
- 2) RoboTeam для роботов KUKA на языке KUKA-Control-Panel (KCP):
 - PROGSYNC – одновременный запуск непрерывных движений взаимодействующих роботов. Независимо от того, какие действия они выполняли раньше, синхронизация программы заставляет одновременно начать движение всех задействованных роботов в точке синхронизации t_s . Затем контроллеры возобновляют выполнение своих программ;
 - ENTERSPACE – быстрое приближение робота к рабочему пространству для его ввода в общую зону. Другие роботы приостанавливаются;
 - EXITSPACE – приказ роботу, находящемуся в рабочей области, покинуть ее и позволить работать в этом рабочем пространстве другим устройствам или роботам. Им в определенной последовательности дается разрешение на вход;
 - GEOLINK – объединение ведомого (подчиненного) робота с базовой системой координат ведущего робота. При движении ведущего робота (или устройства) ведомый следует за этими движениями. Геометрическая связь может быть отменена путем выбора базовой ссылки, которая не связана с ведущим устройством или роботом (например, NULLFRAME);
 - SYNC – синхронизация отдельных блоков движения взаимодействующих контроллеров (MotionSync). Движения нескольких роботов можно синхронизировать так, чтобы каждому роботу требовалось одинаковое количество времени для выполнения этих движений. Команда SYNC является дополнительным компонентом, который может быть вызван и добавлен в блок движения LIN или CIRC;
 - SyncCmd () – синхронизация программ и движений;
 - RemoteCmd() – отправка команды другим контроллерам. Выполнение команды на локальном контроллере прерывается на время выполнения на пульте дистанционного управления;
 - LK() – «связанная кинематика» использует геометрическую связь отдельных кинематических систем (роботов). Движения внешних роботов адаптируются к движениям местного робота;
- 3) функция Independent/Coordinated роботов YASKAWA Motoman на языке INFORM:
 - SMOVL, SMOVC – перемещение ведомого манипулятора в позицию обучения с линейной и с круговой интерполяцией соответственно, при согласовании с ведущим роботом; SIMOV – с указанными приращениями линейной интерполяции при координации с ведущим;
 - SREFP – указание опорной точки отсчета для поворота во избежание столкновения во время скоординированного перемещения. Эта инструкция – контрольная точка для ведомого манипулятора;
 - + MOVJ – перемещение ведущего манипулятора в позицию обучения с совместной интерполяцией, + MOVL – с линейной интерполяцией. Эти инструкции размещаются после согласованной инструкции перемещения, индивидуальной интерполяции и являются скоординированными инструкциями перемещения к ведущему манипулятору;
 - PSTART – запуск задания;
 - PWAIT – ожидание завершения подзадачи;
 - TSYNC – синхронизация различных задач.

Если указанные инструкции роботом или его контроллером не поддерживаются, то они должны быть запрограммированы дополнительно. Причем необходимо учесть, какое количество контроллеров в РТК будет задействовано. Очевидно, что имеется необходимость разработки определенных подходов при управлении мультиагентной системой в зависимости от типа выполняемых движений.

2. Виды сотрудничества роботов и планирование траекторий. В роботизированных системах планирование траекторий обычно выполняется в декартовом пространстве или в пространстве конфигураций робота. Простейшая задача планирования траектории одиночного робота состоит в идентификации двух позиций робота для движения по линии и трех – для движения по дуге окружности в базовой системе координат робота. Для автоматического поиска и планирования сложной траектории движения предлагается использовать нейросетевой алгоритм поиска траекторий роботов-манипуляторов в рабочей среде с препятствиями, основанный на детерминистической дискретизации конфигурационного пространства [6]. Данный метод обеспечивает свойство «полноты» решения, учитывает сложную форму препятствий, характерную для сборочно-сварочных роботизированных комплексов, и ограничения, накладываемые на углы расположения технологического инструмента. Использование упрощенной функции активации нейронной сети позволяет уменьшить время расчета состояний сети и увеличить ее быстродействие.

При планировании траекторий движения нескольких взаимодействующих роботов возникают сложности, которые вызваны наличием множества систем координат для каждого робота (базовой, ин-

струмента (ТСП), суставов), а описание траектории для сварочного робота задается относительно системы координат обрабатываемой детали, которая представляет собой движущуюся динамическую структуру (рисунок 1).

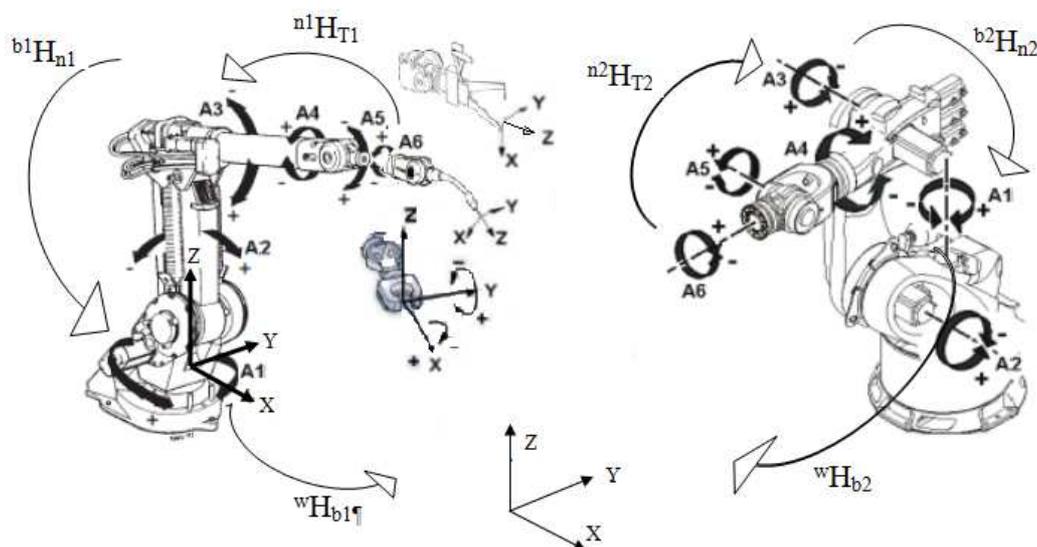


Рисунок 1. – Схема системы роботов (IRB 1410, KR 500), расположения осей и систем координат

Описание траектории для сварочного робота в базовой или абсолютной мировой системе координат создает проблемы, вызванные ограниченными возможностями обычного контроллера робота. Одновременный запуск (остановка) движений и их синхронизация должны выполняться между различными контроллерами роботов, что также проблематично.

При планировании траекторий для системы с несколькими роботами необходимо либо признать роботов независимыми в работе, либо идентифицировать одного робота как ведущего, а других – как ведомых, определить два декартовых положения для элементарного движения по линии и трех декартовых положений для движения по дуге окружности в основной базовой системе координат для ведущего робота.

В работе [7] выделено 3 вида совместного взаимодействия нескольких роботов и позиционера: параллельное сотрудничество, синхронное сотрудничество и совместное синхронное сотрудничество.

2.1. Параллельное сотрудничество. Независимо от того, какие движения роботы выполняли ранее, время запуска одновременного движения задается принудительно для всех роботов и позиционера в точке синхронизации t_0 . При таком сотрудничестве нет ограничений на позиции или ориентации роботов. Ориентация технологического инструмента ограничена типом выполняемой операции, например, ориентация сварочного инструмента по отношению к детали и плоскости сварного шва. При параллельной работе не требуется определять стратегию совместного планирования пути, т.к. не существует ограничений для движения каждого робота, вызванного наличием в зоне другого робота. Траектории движений параллельно работающих роботов не пересекаются.

2.2. Связанное синхронное сотрудничество. Время запуска одновременного движения задается принудительно для всех роботов в точке синхронизации t_0 . Все роботы синхронизируются и выполняют одинаковые движения по линии или окружности, а между инструментом, конечными эффекторами ведущего и ведомого устройств не существует относительного движения. Ведомый робот следует за движениями ведущего робота, поэтому не требуется разработка отдельных команд для движения ведомого робота. Такая форма сотрудничества используется при распределении нагрузки между роботами при перемещении груза или детали. Например, два робота перемещают груз, который выходит за пределы полезной нагрузки каждого робота. Для перемещения эффекторы робота должны схватить объект в двух указанных точках. При этом нет относительных движений между конечными эффекторами и объектом. При синхронном взаимодействии нет и относительного движения между конечными эффекторами ведущего и ведомого роботов после начала их движения, значит относительное положение или ориентация между захватами ведущего и ведомого будет постоянна в течение всего периода сотрудничества.

Пусть однородная матрица ${}^{mb}P_m(t) \in R^{4 \times 4}$ определяет позицию или ориентацию ведущего робота (mb – master base) в базовой системе координат (в терминах RobotStudio – базовый фрейм), а ${}^{sb}P_s(t) \in R^{4 \times 4}$ – положение или ориентацию ведомого (подчиненного) робота (sb – slave base) в подчиненном базовом

фрейме в момент времени t . Тогда координаты инструмента (рабочего органа, схвата, клещей и пр.) ведомого робота в базовой системе координат ведущего ${}^{mb}P_s(t) \in R^{4 \times 4}$

$${}^{mb}P_s(t) = {}^{mb}H_{sb}(t) \cdot {}^{sb}P_s(t), \quad (1)$$

где ${}^{mb}H_{sb}(t) \in R^{4 \times 4}$ – матрица преобразования подчиненного базового фрейма к базовому фрейму ведущего робота.

Рассматриваемые роботы-манипуляторы не мобильны, поэтому их базы не меняются в процессе сотрудничества, а значит, матрица преобразования ${}^{mb}H_{sb}$ будет постоянной и однородной. Пусть t_0 – время одновременного запуска для ${}^{mb}P_m(t)$ и ${}^{sb}P_s(t)$. Если ${}^mH_s(t) \in R^{4 \times 4}$ – матрица преобразования от системы координат инструмента ведомого к инструменту ведущего в его базовой системе координат в момент времени t_0 , то

$${}^{mb}P_m(0) = {}^mH_s \cdot {}^{mb}P_s(0). \quad (2)$$

Подставляя уравнение (1) в выражение (2) в момент времени $t = t_0$, получим

$${}^{mb}P_m(0) = {}^mH_s \cdot {}^{mb}H_{sb} \cdot {}^{sb}P_s(0), \quad (3)$$

$${}^mH_s = {}^{mb}P_m(0) \cdot ({}^{sb}P_s(0))^{-1} \cdot {}^{sb}H_{mb}. \quad (4)$$

При связанном синхронном взаимодействии mH_s будет постоянной в течение всего периода синхронного взаимодействия, из этого следует

$$\begin{aligned} {}^{mb}P_m(t) &= {}^mH_s \cdot {}^{mb}P_s(t) = {}^mH_s \cdot {}^{mb}H_{sb} \cdot {}^{sb}P_s(t) = {}^{mb}P_m(0) \cdot ({}^{sb}P_s(0))^{-1} \cdot {}^{sb}H_{mb} \cdot {}^{mb}H_{sb} \cdot {}^{sb}P_s(t) = \\ &= {}^{mb}P_m(0) \cdot ({}^{sb}P_s(0))^{-1} \cdot {}^{sb}P_s(t), \end{aligned} \quad (5)$$

тогда

$${}^{sb}P_s(t) = {}^{sb}P_s(0) \cdot ({}^{mb}P_m(0))^{-1} \cdot {}^{mb}P_m(t). \quad (6)$$

Уравнение (6) выражает голономные ограничения положения и ориентации между ведущим и ведомыми роботами во время их совместного взаимодействия. Из уравнения (6) следует, что траектория ведомого робота ${}^{sb}P_s(t)$ в базовой системе координат может быть однозначно определена через траекторию ведущего ${}^{mb}P_m(t)$ и относительное положение ${}^{mb}P_m(0)$ в начальный момент времени связанного сотрудничества [8]. Таким образом можно планировать совместные траектории движения при связанном синхронном сотрудничестве роботов. При этом не нужно собирать дополнительную информацию для ведомых устройств. Для формирования элементарных перемещений определяются две декартовы позиции для движения по линии и три декартовых положения для движения по дуге окружности в подчиненной базовой системе координат ведомых роботов. Затем планируются номинальные траектории в конфигурационном пространстве для каждого робота, включая совместные движения между ведущим и ведомым.

2.3. Комбинированное синхронное сотрудничество. Для всех роботов в период синхронизации Δ_t принудительно задается одинаковое время движения. Ведущий робот выполняет основное линейное или дуговое перемещение, а ведомые выполняют различные виды движения относительно системы инструмента ведущего. Движение ведомых накладывается на основное движение ведущего робота.

Подчиненный робот следует основным движениям ведущего робота, но также выполняет собственные наборы движений. Такой тип сотрудничества двух роботов распространен при сварке: ведомый робот обрабатывает заготовку (выполняет сварной шов), а ведущий робот (или позиционер) транспортирует, ориентирует заготовку, поворачивает ее с одной стороны на другую. Относительное положение и ориентация между заготовкой и инструментом робота сохраняются при движении заготовки.

Если ведущий робот (или позиционер) удерживает заготовку, а в это время ведомое устройство – инструмент обработки, то траектория движения ведущего робота определена заранее, а траектория подчиненного устройства не может быть указана напрямую и определяется требованиями обработки детали при совместном комбинированном движении. Как правило, требования по обработке деталей задаются в системе координат детали. Предполагается, что относительное движение не допускается, когда ведущий робот удерживает заготовку. В таком случае требования к обработке можно задать или преобразовать к ТСП ведущего робота, т.к. существует постоянная матрица преобразования между фреймом детали и фреймом инструмента ведущего робота. При совместном сотрудничестве необходимо сохранить определенные временные ограничения согласно требованиям, предъявляемым к обработке детали.

Пусть ${}^{mb}P_m(t)$ – траектория движения ведущего робота в его базовом фрейме, ${}^{me}P_s(t)$ – требуемая обработка в ТСР ведущего робота, которая также является траекторией движения подчиненного робота в ТСР ведущего робота. Траектория ведомого робота ${}^{me}P_s(t)$ должна быть преобразована из системы координат инструмента ведущего в базовую систему координат подчиненного робота. При однородном преобразовании получим

$${}^{sb}P_s(t) = {}^{sb}H_{mb} \cdot {}^{mb}H_{me}(t) \cdot {}^{me}P_s(t), \quad (7)$$

где ${}^{sb}H_{mb}$ – матрица преобразования из базовой системы координат ведущего в базовый фрейм подчиненного робота;

${}^{mb}H_{me}(t)$ – матрица преобразования от фрейма инструмента ведущего робота в его базовый фрейм.

${}^{mb}H_{me}(t)$ является обратной матрицей для ${}^{me}H_{mb}(t)$ позиции или ориентации инструмента робота в его базовой системе координат.

$${}^{mb}H_{me}(t) = ({}^{me}H_{mb}(t))^{-1} = ({}^{mb}P_m(t))^{-1}. \quad (8)$$

Подставив уравнение (8) в формулу (7), получим

$${}^{sb}P_s(t) = {}^{sb}H_{mb} \cdot ({}^{mb}P_m(t))^{-1} \cdot {}^{me}P_s(t). \quad (9)$$

Уравнение (9) выражает голономные ограничения положения и ориентации между ведущим и подчиненными роботами во время их совместного движения. Следовательно, траектория ведомого робота ${}^{sb}P_s(t)$ может быть однозначно определена через траекторию ведущего ${}^{mb}P_m(t)$ с учетом требований обработки ${}^{me}P_s(t)$. Уравнение (9) позволяет планировать совместные траектории движения при комбинированном синхронном сотрудничестве роботов и позиционера.

3. Базовый состав программы управления несколькими устройствами. Рассмотренные виды сотрудничества можно реализовать с помощью вышеописанных инструкций либо с помощью дополнительно разработанных модулей.

Программа управления при сотрудничестве роботов и позиционера содержит модули, которые обеспечивают:

- 1) анализ рабочего пространства, определение пересечения рабочих зон роботов и позиционера;
- 2) определение зоны для совместной работы;
- 3) формирование траекторий роботов до сотрудничества;
- 4) подведение роботов к точкам пространства, при достижении которых вызывается режим синхронизации;
- 5) присвоение роботам или позиционеру приоритета «ведущий» («master») или «ведомый» («slave»);
- 6) переход в режим синхронизации;
- 7) корректировка траекторий ведомых согласно типу сотрудничества;
- 8) согласование скоростей ведущего и ведомых;
- 9) выход из синхронизированного режима при работе вне совместной зоны, перевод в независимый режим.

Указанный подход к управлению исследован путем имитационного моделирования в среде RobotStudio (рисунок 2).

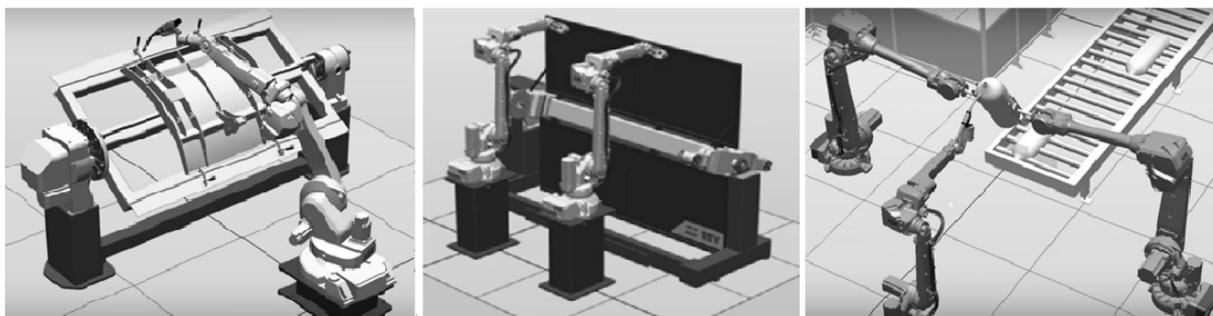


Рисунок 2. – Примеры роботизированных ячеек

При моделировании определялись места возможного столкновения, корректировались точки траекторий и скорости движения звеньев роботов. Рассматривалось сотрудничество некоторых распространенных роботов, их параметры Денавита – Хартенберга приведены в таблице.

Таблица. – Параметры Денавита – Хартенберга

ABB IRB 140				KUKA KR 500			
α , градус	a , м	d , м	Θ , градус	α , градус	a , м	d , м	Θ , градус
0	0	0,352	Θ_1	90	0,5	-1,045	Θ_1
-90	0,07	0	Θ_2 -90	0	1,3	0	Θ_2
0	0,36	0	Θ_3	-90	0,055	0	Θ_3
-90	0	0,38	Θ_4	90	0	-1,025	Θ_4
90	0	0	Θ_5	-90	0	0	Θ_5
-90	0	0	Θ_6	180	0	-0,29	Θ_6
ABB IRB 1410				Motoman HP20			
α , градус	a , м	d , м	Θ , градус	α , градус	a , м	d , м	Θ , градус
90	0	0,475	Θ_1	-90	0,15	0	Θ_1
0	0,15	0	Θ_2	0	0,76	0	Θ_2
90	0,60	0	Θ_3	-90	0,14	0	Θ_3
-90	0,12	0,72	Θ_4	90	0	0,795	Θ_4
90	0	0	Θ_5	90	0	0	Θ_5
0	0	0,085	Θ_6	0	0	-0,105	Θ_6

В представлении Денавита – Хартенберга формируется однородная матрица преобразования размерности 4×4 , описывающая положение системы координат каждого звена относительно системы координат предыдущего звена. Значит можно последовательно преобразовать координаты рабочего инструмента, схвата манипулятора из системы отсчета, связанной с последним звеном, в базовую систему отсчета, являющейся инерциальной системой координат для динамической системы.

Каждая система координат имеет три оси: ось z_{i-1} направлена вдоль оси i -го сочленения; оси x_i , y_i и z_{i-1} располагаются перпендикулярно, образуя правую декартову систему координат. Четыре параметра каждого звена робота полностью описывают вращательное или поступательное движение и определяются параметрами:

Θ_i – присоединенный угол, на который надо повернуть ось x_{i-1} вокруг оси z_{i-1} , чтобы она стала сонаправлена с осью x_i (знак определяется в соответствии с правилом правой руки);

d_i – расстояние между пересечением оси z_{i-1} с осью x_i и началом $(i - 1)$ -й системы координат, отсчитываемое вдоль оси z_{i-1} ;

a_i – линейное смещение – расстояние от пересечения осей z_{i-1} и x_i до начала i -й системы координат, отсчитанного по оси x_i , т.е. наименьшее расстояние от оси z_{i-1} до z_i ;

α_i – угловое смещение – угол, на который надо повернуть ось z_{i-1} вокруг оси x_i , чтобы она стала сонаправленной с осью z_i (знак определяется в соответствии с правилом правой руки).

Для вращательных сочленений параметры d_i , a_i и α_i являются характеристиками сочленения, постоянными для данного типа робота. Присоединенный угол Θ_i является переменной величиной, изменяющейся при движении (вращении) i -го звена относительно $(i - 1)$ -го.

Заключение. Использование нескольких роботов и позиционера в роботизированной ячейке позволяет уменьшить время выполнения сложных технологических операций и улучшить производительность технологических линий, сделать их более гибкими и компактными. Описанные стратегии планирования совместного сотрудничества и методы управления системами при сотрудничестве роботов могут стать дополнением стандартного программного обеспечения OLP. Методы OLP позволяют уменьшить время простоев РТК, затрачиваемое на перепрограммирование роботов. При создании программ управления необходимо учитывать, что один контроллер управляет роботом и позиционером или роботы и позиционеры имеют свои контроллеры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каляев, И.А. Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов / И.А. Каляев, А.Р. Гайдук, С.Г. Капустян. – М. : ФИЗМАЛИТ, 2009. – 280 с.
2. Efficient multi-robot motion planning for unlabeled discs in simple polygons / A. Adler [et al.] // IEEE Trans. Autom. Sci. Eng. – 2015. – № 12. – P. 1309–1317.

3. Imeson, F. Multi-robot task planning and sequencing using the SAT-TSP language / F. Imeson, S.L. Smith // In Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom. – 2015. – P. 5397–5402.
4. Solovey, K. Finding a needle in an exponential haystack: Discrete RRT for exploration of implicit roadmaps in multi-robot motion planning / K. Solovey, O. Salzman, D. Halperin // International Journal Robotics Res. – 2016. – № 35. – P. 501–513.
5. Wagner, G. Subdimensional expansion for multirobot path planning / G. Wagner, H. Choset // Artif. Intell. – 2015. – № 219. – P. 1–24.
6. Лоборева, Л.А. Поиск траекторий сборочно-сварочных роботов-манипуляторов в рабочей среде с препятствиями / Л.А. Лоборева, М.М. Кожевников // Вестник Полоцкого государственного университета. – 2017. – № 11. – С. 43–50.
7. Gan, Y.H. Cooperative Path Planning and Constraints Analysis for Master-Slave Industrial Robots / Y.H. Gan, X.Z. Dai, J. Li // International Journal of Advanced Robotic Systems. – 2012. – Vol. 9, 88. – P. 1–13.
8. Gan, Y. Off-Line Programming Techniques for Multirobot Cooperation System / Y.H. Gan, X.Z. Dai, J. Li // International Journal of Advanced Robotic Systems. – 2013. – Vol. 10. – P. 282–299.
9. Mohammed Almagd Forward and Inverse Kinematic Analysis and Validation of the ABB IRB 140 Industrial Robot // International journal of electronics, mechanical and mechatronics engineering. – 2017. – Vol. 7, № 2. – P. 1383–1401.
10. Бредин, К. Работа в команде / К. Бредин // АББ Ревю. – 2005. – № 1. – С. 26–29.

Поступила 19.09.2018

TYPES OF COOPERATION ROBOTS IN ROBOTIC COMPLEX

L. LOBOREVA, I. ILIUSHIN

The article gives an categorizes the cooperation of robotic manipulators. Approaches to software development are described. The functions for realization of cooperation of robots and strategies for planning robot trajectories in collaboration are considered. The effectiveness of the proposed approach is confirmed by the results of modeling.

Keywords: *Off-Line Programming (OLP), robot manipulator, Simulation.*

ФИЗИКА

УДК 621.7:621.8:621.9:536.75

ПРОЦЕССЫ САМООРГАНИЗАЦИИ СТРУКТУРООБРАЗОВАНИЯ ПРИ ИНТЕНСИВНОЙ ОБРАБОТКЕ МАТЕРИАЛОВ

акад., д-р техн. наук А.И. ГОРДИЕНКО

(Физико-технический институт НАН Беларуси, Минск);

д-р техн. наук, проф. М.Л. ХЕЙФЕЦ

(Президиум НАН Беларуси, Минск);

Т.А. АЛЕКСЕЕВА

(Полоцкий государственный университет);

*д-р техн. наук, проф. С.А. КЛИМЕНКО, канд техн. наук М.Ю. КОПЕЙКИНА
(Институт сверхтвердых материалов им. В.Н. Бакуля НАН Украины, Киев)*

Проведен анализ самоорганизации структур при интенсивных технологических воздействиях путем выделения параметров порядка при обработке материалов с определением устойчивости режимов состояния термодинамической системы. Предложены пути интенсификации процессов структурообразования при обработке материалов и стабилизации формируемых структур, реализующие сочетание управляющих параметров давления и термических воздействий.

Введение. Для обеспечения эксплуатационных свойств металлов и сплавов необходимо, чтобы в результате термических, деформационных или других интенсивных воздействий в них произошли необратимые изменения, обусловленные фазовыми переходами. Если материал после интенсивных воздействий находится в структурно неравновесном состоянии, то обработка тоже необходима, хотя фазовые превращения в нем не происходят [1].

Изменения строения и свойств структур металлов и сплавов во времени определяются температурой, давлением и другими интенсивными факторами их образования [2]. Происходящие при обработке процессы описываются теорией термической обработки металлов, отражающей кинетику превращений при различных температурах и влияющие на ее ход факторы [3]. Всестороннее давление до настоящего времени активно не применялось для управления структурообразованием в материалах [4]. Сдерживают применение обработки давлением для формирования структур в металлах и сплавах технологические сложности управления процессом и недостаточная ясность, насколько эффективно может быть использовано давление для получения особых свойств материалов [5].

Цель работы – на основании комплексного синергетического подхода к фазовым переходам и структурообразованию при термомеханических воздействиях сформировать теоретические и технологические основы образования структур и фаз в металлах и сплавах.

Синергетическая концепция состояния термодинамической системы. Для определения доминирующих процессов структурообразования при интенсивных воздействиях, целесообразно применить синергетическую концепцию, использующую понятие моды непрерывной случайной величины контролируемого параметра [6].

Под модой понимают такое значение параметра, при котором плотность его распределения имеет максимум. Согласно синергетической концепции устойчивые моды подстраиваются под доминирующие неустойчивые моды и в результате могут быть исключены. Это приводит к резкому сокращению числа контролируемых параметров – степеней свободы термодинамической системы. Оставшиеся неустойчивые моды могут служить в качестве параметров порядка, определяющих процессы структурообразования [7].

Получившиеся в результате такого сокращения параметров уравнения состояния термодинамических систем группируются в несколько универсальных классов вида [6, 7]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} U = G(U, \nabla U) + D \nabla^2 U + F(\tau),$$

где U – контролируемый параметр;

τ – текущее время;

G – нелинейная функция U и возможно градиента U ;

D – коэффициент, описывающий диффузию, когда его значение действительно, или описывающий распространение волн, при мнимом значении;

F – флуктуирующие силы, обусловленные взаимодействием с внешней средой и диссипацией внутри системы.

Уравнения такого вида схожи с уравнениями, описывающими фазовые переходы первого и второго рода. В соответствии с синергетической концепцией фазовые переходы происходят в результате самоорганизации, процесс которой описывается тремя степенями свободы, отвечающими параметру порядка (Π), сопряженному (C) ему полю и управляющему (Y) параметру [7].

Использовать единственную степень свободы – параметр порядка, возможно для описания только квазистатического фазового превращения. В системах, значительно удаленных от состояния термодинамического равновесия, каждая из указанных степеней свободы приобретает самостоятельное значение. В них процессы самоорганизации складываются в результате конкуренции положительной обратной связи параметра порядка с управляющим параметром и отрицательной обратной связи с сопряженным полем. В результате, кроме процесса релаксации к равновесному состоянию в течение времени τ^P при участии двух степеней свободы может реализовываться автоколебательный режим, а при участии трех – возможен переход в хаотическое состояние [6, 7].

Таким образом, состояние термодинамических систем при интенсивной обработке и эксплуатации характеризуется несколькими режимами [8, 9]:

1) **запоминания** – который определяется «замороженным» беспорядком при переходе из неупорядоченного состояния и реализуется, когда время релаксации параметра порядка окажется намного меньше остальных времен ($\tau_{\Pi}^P \ll \tau_Y^P$ и $\tau_{\Pi}^P \ll \tau_C^P$);

2) **релаксационный** – реализуется, когда время релаксации параметра порядка намного превосходит времена релаксации остальных степеней свободы ($\tau_{\Pi}^P \gg \tau_Y^P$ и $\tau_{\Pi}^P \gg \tau_C^P$);

3) **автоколебательный** – который требует соизмеримости характерных времен изменения параметра порядка и управляющего параметра или сопряженного поля ($\tau_{\Pi}^P \gtrsim \tau_Y^P$ или $\tau_{\Pi}^P \gtrsim \tau_C^P$);

4) **стохастический** – характеризуется странным аттрактором и возможен при соизмеримости времен всех трех степеней свободы ($\tau_Y^P \gtrsim \tau_{\Pi}^P \gtrsim \tau_C^P$).

Доминирующие процессы структурообразования определяются интенсивностью во времени переноса энергии и вещества в неравновесных термодинамических системах. Стабильность формирования структур обеспечивается управлением устойчивостью процессов интенсивной обработки и эксплуатации путем применения положительных и отрицательных обратных связей [9, 10].

Термомеханические воздействия в процессах резания материалов. Фазовые превращения, используемые при термической обработке, обусловлены изменением температуры, однако варьируя другим термодинамическим фактором – давлением, можно получать структурные превращения, которые не проявляются при неизменном давлении [1, 4].

Виды обработки материалов резанием и давлением можно, согласно синергетической концепции структурообразования, разделить на четыре основные группы операций, связанные с режимами поведения термодинамической системы [9, 11].

Режимы обработки давлением также определяются временами τ^P : параметра порядка (Π) при *релаксации (снятии напряжений)*, сопряженного (C) с ним параметра *структурообразования* и управляющего (Y) механической обработкой параметра – *давления*. Две степени свободы определяют циклическое упрочнение, а три – стохастический наклеп и разрушение.

В результате выделяются процессы обработки металлов давлением, соответствующие различным участкам обобщенной кривой «деформация – напряжение» [11]:

1) **удар** – локальное или всестороннее *давление* для формирования *напряженного состояния* и образования *деформационных структур* или разрушения;

2) **релаксация напряжений** – отсутствие *давления* после предварительного нагружения, сопровождающееся снятием внутренних напряжений и формированием более *равновесных структур*;

3) **наклеп циклический** – создание упрочняющих *деформационных структур* путем циклического формирования *напряженного состояния* в результате приложения и снятия *нагрузки*;

4) **наклеп стохастический** – создание упрочняющих *деформационных структур* путем аperiодического формирования *напряженного состояния* в результате стохастического *нагружения*.

Процессы обработки резанием и давлением связаны с режимами равновесия термодинамической системы [9]. Результаты исследований механической обработки материалов показали, что возможны два режима равновесных состояний: неустойчивый узел (НУ) и неустойчивое седло (НС) [8, 9]. При режиме НУ динамические параметры рабочей зоны технологической системы удаляются от положения равнове-

сия. Система совершает аperiodические самовозбуждающиеся движения, которые переходят в устойчивые автоколебания предельного цикла. В режиме НС при малых отклонениях динамические параметры системы удаляются от положения равновесия и приближаются в заданных направлениях к стабильным состояниям (рисунок 1).

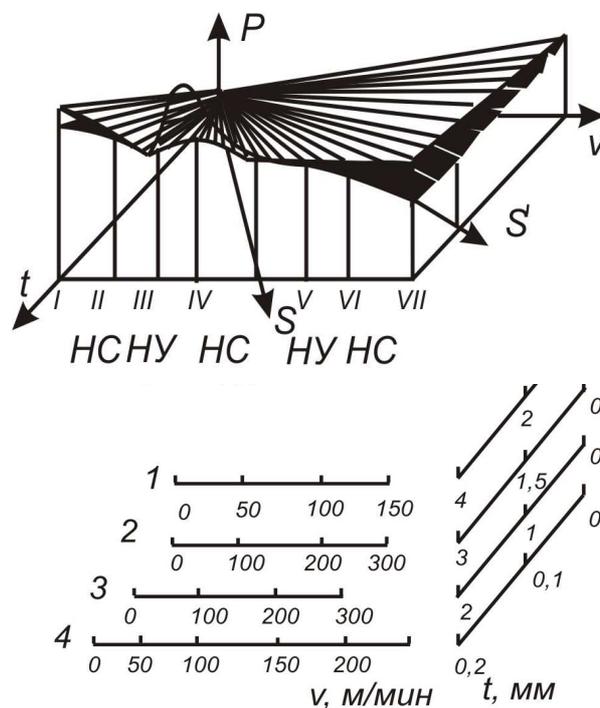


Рисунок 1. – Зависимости усилий деформирования P на различных стадиях (I–VI) структурообразования в поверхностном слое от скорости v (м/мин) и глубины t (мм) воздействия для: 1 – титановых и жаропрочных сплавов; 2 – конструкционных сталей; 3 – хромоникелевых сталей; 4 – хромоникелевых покрытий

Проведенный анализ образования структур поверхностного слоя в процессах механической обработки (рисунки 2 и 3), при исследовании влияния устойчивости динамических характеристик на формирование параметров качества, показал возможность использования режимов НУ при черновой обработке и позволил рекомендовать режимы НС для чистовой обработки поверхности [8, 9].

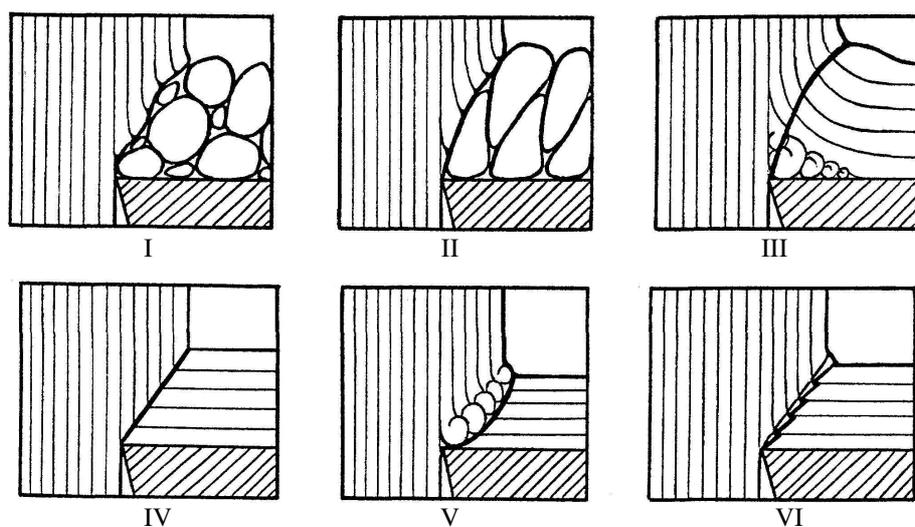


Рисунок 2. – Схемы стадий структурообразования в процессах формирования поверхности: I – хрупкое разрушение материала опережающей трещиной; II – компактирование частиц разрушения; III – вихревое образование застойных структур; IV – пластическое течение материала; V – волновое образование складок; VI – расслоение материала адиабатическими сдвигами

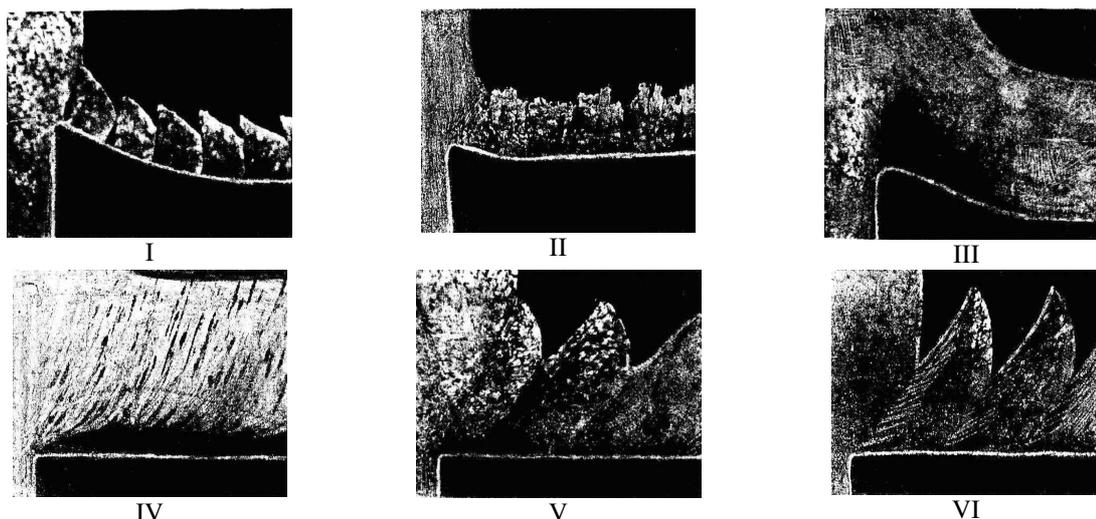


Рисунок 3. – Стружкообразование в процессах лезвийной обработки:
I – элементной стружки; II – суставчатой стружки; III – при наростообразовании;
IV – сливной стружки; V и VI – ступенчатой стружки

В процессе обработки на малой скорости при образовании опережающей хрупкой трещины скольжения (рисунки 2, I; 3, I) состояние зоны формообразования определяется давлением на технологическую среду в направлении главного движения v сжимающим напряжением σ_z , пропорциональным объемной вязкости ζ . Если σ_z превышает критическое значение, то происходит разрушение берегов трещины, а образующиеся частицы раскалываются на более мелкие [13].

В том случае, когда частицы разрушения не имеют возможности вращаться (рисунки 2, II; 3, II), они повышают составляющую трения скольжения τ_{yz} между берегами трещины и компактируются скоплениями или элементами формирующейся суставчатой стружки при резании. Такая структура описывается соотношением (τ_{yz}/σ_z) , в котором τ_{yz} определяется в направлении геометрической суммы векторов главного движения и перемещений компактирующихся скоплений [13].

В процессе наростообразования (рисунки 2, III и 3, III) формирование вихревых диссипативных структур [14] характеризуется соотношением (σ_{yz}/σ_z) , в котором σ_{yz} – ротационная, а σ_z – трансляционная составляющие напряженного состояния термомодеформационного процесса. При этом ротационная составляющая $\sigma_{yz} = \sigma_y \cdot \sigma_z$ определяется в направлении вектора момента формообразования поверхности [11].

Пластическое течение поверхностных слоев обрабатываемого материала или формирование сливной стружки в процессе резания (рисунки 2, IV; 3, IV) описывается составляющей сдвига τ_{yz} , характеризующей напряженное состояние вблизи условной плоскости сдвига [15].

Образование вихреподобных уплотненных структур, следующих за условной плоскостью сдвига (рисунки 2, V; 3, V), вновь определяется соотношением (σ_{yz}/σ_z) ротационной и трансляционной составляющих термомодеформационного процесса [11].

При циклических адиабатических сдвигах или формировании ступенчатой стружки в процессе резания (рисунки 2, VI; 3, VI) напряженное состояние описывается аналогично суставчатому стружкообразованию (τ_{yz}/σ_z) составляющими термопластического сдвига τ_{yz} и сжатия σ_z [16].

Образование жидкой фазы между контактирующими поверхностями характеризуется течением расплава материала с динамической вязкостью η , пропорциональной касательным напряжениям τ_{yz} между условными слоями жидкости [17].

Таким образом, кинетика процессов формирования эксплуатационных свойств изделий характеризуется циклическостью состояний структур поверхностного слоя. Учет циклических особенностей и свойств среды в процессах стружкообразования и формирования структур поверхностного слоя позволяет рациональным образом выбрать инструменты для проектируемых методов обработки.

При интенсификации процесса резания с предварительным плазменным нагревом меняются механизмы стружкообразования (см. рисунки 2 и 3).

В процессе резания хрупких высокопрочных материалов, таких как хромоникелевое покрытие после плазменной наплавки порошком ПГ-СР4, элементная стружка (см. рисунок 3, I) переходит в суставчатую (см. рисунок 3, II). При резании упругих и прочных сталей, таких как пружинная сталь 65Г, исчезают наросты (см. рисунок 3, III) и формируется сливная стружка (см. рисунок 3, IV).

В процессе резания вязких жаропрочных сплавов, таких как ЖС6К, изменяются условия циклического стружкообразования (см. рисунок 3 и 3, VI).

Изменения процессов стружкообразования сопровождаются сменой механизмов и снижением интенсивности изнашивания инструментов.

В результате изменения условий взаимодействия на контактных поверхностях инструмента происходит смена механизма его изнашивания – от абразивно-механического до окислительного и эвтектического. Это имеет отношение к инструментам с рабочей частью, оснащенной различными материалами: твердыми сплавами, минералокерамикой, поликристаллическими сверхтвердыми материалами на основе кубического нитрида бора (ПКНБ).

В качестве примера на рисунке 4 представлены контактные участки резцов, оснащенных сменными многогранными неперетачиваемыми пластинами из ПКНБ (формо-размеры пластин по ISO 1832-2014 SNMN 060300, RNMN 070300, торговая марка ПКНБ «Борсинит», производство ИСМ им. В.Н. Бакуля НАН Украины), после чистового точения образцов с покрытием из ПГ-СР4, стали 65Г и сплава ЖС6К.

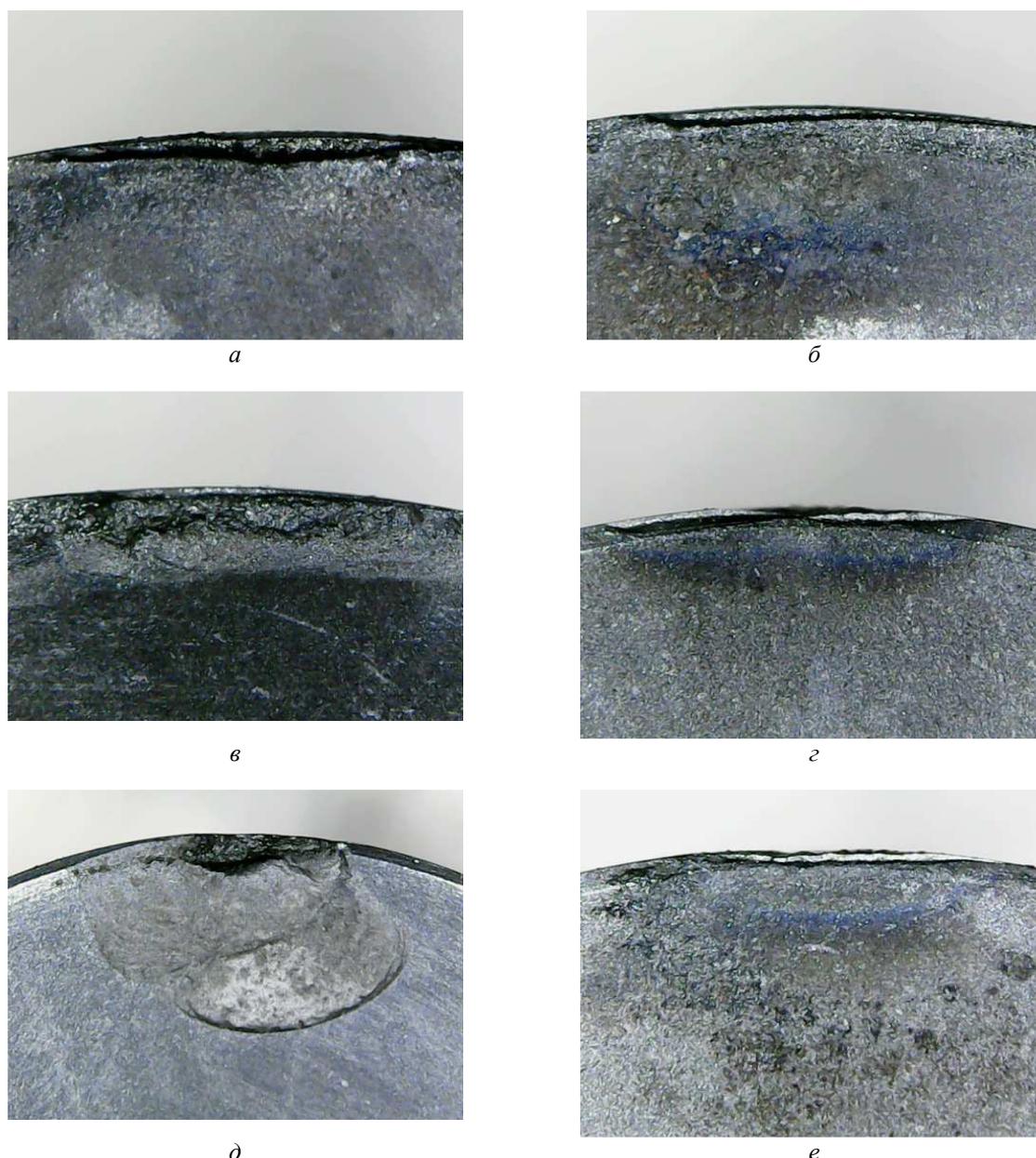


Рисунок 4. – Контактные участки инструментов после обработки покрытия из ПГ-СР4 (а, б), стали 65Г (в, z), сплава ЖС6К (д, е) без предварительного нагрева (а, в, д – $v = 90$ м/мин) и с плазменным нагревом (б, z, е – $v = 150$ м/мин): $S = 0,2$ мм/об; $t = 0,5$ мм

Необходимо отметить, что помимо снижения интенсивности изнашивания применение предварительного нагрева срезаемого слоя позволяет повысить производительность процесса обработки за счет увеличения скорости резания.

Заключение. Таким образом, с позиций единого формализма, основанного на комплексном синергетическом подходе, представлены фазовые переходы и структурообразование в металлах и сплавах при термомеханических воздействиях.

Установлено, что времена релаксации параметров порядка для процессов охлаждения материалов и релаксации напряжений, сопряженных им процессов структурообразования, управляющих параметров нагрева и давления, определяют режимы поведения термодинамической системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Научные основы материаловедения / Б.Н. Арзамасов. – М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994. – 366 с.
2. Бочвар, А.А. Основы термической обработки сплавов / А.А. Бочвар. – М. ; Л. : Metallurgizdat, 1940. – 298 с.
3. Штейнберг, С.С. Термическая обработка стали / С.С. Штейнберг. – Свердловск ; М. : Metallurgizdat, 1945. – 154 с.
4. Гуляев, А.П. Термическая обработка стали / А.П. Гуляев. – М. : Mashgiz, 1960. – 495 с.
5. Лысак, Л.И. Физические основы термической обработки стали / Л.И. Лысак, Б.И. Николин. – Киев : Техника, 1975. – 303 с.
6. Хакен, Г. Синергетика / Г. Хакен. – М. : Мир, 1980. – 404 с.
7. Олемской, А.И. Теория пространственно-временной эволюции неравновесной термодинамической системы / А.И. Олемской, И.В. Коплык // Успехи физических наук. – 1995. – Т. 165, № 10. – С. 1105–1144.
8. Анализ свойств отношений технологических решений при проектировании комбинированных методов обработки материалов / П.И. Ящерицын [и др.] // Докл. НАН Беларуси. – 2001. – Т. 45, № 4. – С. 106–109.
9. Технологическое и эксплуатационное наследование показателей качества в жизненном цикле изделий машиностроения / П.И. Ящерицын [и др.] // Докл. НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 2. – С. 111–116.
10. Использование критериев подобия при проектировании комбинированных физико-химических методов обработки материалов / А.И. Гордиенко [и др.] // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 4. – С. 107–110.
11. Хейфец, М.Л. Проектирование процессов комбинированной обработки / М.Л. Хейфец. – М. : Машиностроение, 2005. – 272 с.
12. Технологические и эксплуатационные методы обеспечения качества машин / под общ. ред. П.А. Витязя. – Минск : Беларус. навука, 2010. – 109 с.
13. Алексеев, Н.М. О самоподобии процессов трения и изнашивания на различных масштабных уровнях / Н.М. Алексеев // Трение и износ. – 1992. – Т. 13, № 1. – С. 161–171.
14. Лихачев, В.А. Введение в теорию дисклинаций / В.А. Лихачев, Ю.Р. Хайров. – Л. : ЛГУ, 1975. – 183 с.
15. Силин, С.С. Метод подобия при резании металлов / С.С. Силин. – М. : Машиностроение, 1979. – 152 с.
16. Талантов, Н.В. Физические основы процесса резания и износа инструмента / Н.В. Талантов. – Волгоград : ВолгПИ, 1988. – 129 с.
17. Клименко, С.А. Режущий инструмент из ПСТМ на основе нитрида бора / С.А. Клименко, Ю.А. Муковоз, Л.Г. Полонский. – Киев : Знання, 1994. – 36 с.

Поступила 27.09.2018

SELF-ORGANIZATION OF STRUCTURE FORMATION PROCESSES AT INTENSIVE TREATMENT AND EXPLOITATION OF MATERIALS

A. GORDIENKO, M. KHEIFETZ, T. ALEKSEEVA,
S. KLYMENKO, M. KOPIEIKINA

The analysis of the self-organization of structures under intensive technological influences was carried out by selecting order parameters for processing materials with determining the stability of the state regimes of the thermodynamic system. The ways of intensifying the processes of structure formation during the processing of materials and the stabilization of the structures being formed that implement the combination of control parameters of pressure and thermal effects are proposed.

Keywords: technological influences, thermodynamic system, processes of structure formation, thermal effects.

УДК 541.183

**АТОМНО-СИЛОВАЯ МИКРОСКОПИЯ ПЛЕНОК ПОЗИТИВНОГО
ДИАЗОХИНОННОВОЛАЧНОГО ФОТОРЕЗИСТА, ИМПЛАНТИРОВАННОГО ИОНАМИ БОРА**

*канд. физ.-мат. наук, доц. С.А. ВАБИЩЕВИЧ,
канд. тех. наук, доц. А.В. ВАСЮКОВ, Н.В. ВАБИЩЕВИЧ,
(Полоцкий государственный университет);
канд. физ.-мат. наук Д.И. БРИНКЕВИЧ, канд. физ.-мат. наук, доц. В.С. ПРОСОЛОВИЧ
(Белорусский государственный университет, Минск)*

Методом атомно-силовой микроскопии исследована модификация поверхности позитивного фоторезиста ФП9120, имплантированного ионами B^+ с энергией 100 кэВ в интервале доз $5 \cdot 10^{14} - 1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$. Обнаружено формирование при низких дозах имплантации ионов пирамидальных структур высотой до 19 нм и размерами в основании до 4–20 нм, хаотично расположенных на поверхности фоторезистивных пленок. Увеличение дозы имплантации свыше $1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$ приводит к сглаживанию пирамидальных структур. Их высота снижается до 2–5 нм, а размеры в основании увеличиваются до 5–100 нм. Формирование указанных структур обусловлено релаксацией локальных упругих напряжений сжатия в полимерной пленке.

Ключевые слова: *фоторезист, ионная имплантация, модификация поверхности, атомно-силовая микроскопия.*

Введение. Ионная имплантация широко применяется в полупроводниковой электронике с целью загонки строго дозированного количества примесных атомов, которое используется в качестве источника для последующей диффузионной разгонки при формировании локальных легированных карманов. В качестве масок в процессах субмикронной и нанолитографии важную роль играют диазохинонноволачные (ДХН) резисты [1]. Взаимодействие ДХН-резистов с электронами, дальним ультрафиолетом, рентгеновским и видимым излучением исследовано достаточно подробно [1]. В последние годы активно исследуются прочностные свойства структур полимер-кремний [2–4]. Однако влияние ионной имплантации на свойства указанных резистов изучено недостаточно [5, 6], хотя протекающие в них процессы радиационного дефектообразования могут оказывать существенное влияние на качество создаваемых приборов. Согласно литературным данным [7] интенсивное воздействие высокоэнергетических ионов на фоторезистивные полимерные пленки приводит к появлению принципиально новых свойств у облученного приповерхностного слоя полимерной пленки. В свете вышесказанного особый интерес представляют исследования изменения морфологии поверхности диазохинонноволачных фоторезистов в процессе имплантации ионами бора.

Методика эксперимента. Пленки позитивного фоторезиста ФП9120, представляющего собой композит из светочувствительного О-нафтохинондиазида и фенолформальдегидной смолы, толщиной 1,0 мкм, наносились на поверхность пластин (диаметром 100 мм) монокристаллического кремния марки КДБ-10 (111) методом центрифугирования. Скорость вращения составляла $\nu = 8300$ об/мин. Толщина пленок фоторезиста контролировалась с помощью микроинтерферометра МИИ-4 по 5 фиксированным точкам, расположенным на двух взаимно перпендикулярных диаметрах на каждой пластине.

Имплантация ионами B^+ с энергией $E = 100$ кэВ в интервале доз $5 \cdot 10^{14} - 1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ при плотности ионного тока $j = 4$ мкА/см² проводилась в остаточном вакууме не хуже 10^{-5} мм рт. ст. на ионно-лучевом ускорителе «Везувий-6».

Морфология поверхности модифицированной имплантацией фоторезистивной пленки исследовалась методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) при комнатной температуре в полуконтактном резонансном режиме на частоте 330 кГц на приборе NT-207 (производство ОДО «Микротестмашины», г. Гомель.). Использовались кантилеверы серии N38/Al BS с радиусом закругления менее 10 нм. Одновременно измерялась среднеарифметическая шероховатость (R_a) поверхности.

Экспериментальные результаты и их обсуждение. Типичные трехмерные АСМ-изображения имплантированной поверхности фоторезиста показаны на рисунке 1. В таблице представлена средняя арифметическая шероховатость R_a исходного и облученного фоторезиста. Кроме того, представлены результаты измерения параметра S (средний шаг местных выступов профиля – расстояние между буграми). Площадь сканирования составляла 1×1 мкм².

Рельеф исходной неимплантированной поверхности достаточно однородный, средняя шероховатость $R_a = 0,52$ нм. Поверхность имеет волнообразный вид, высота «волн» – 1,6–2,0 нм (рисунок 1, а). В месте касания иглы кантилевера АСМ с фоторезистом наблюдается бугорок (рисунок 2, а), что свиде-

тельствует о том, что после контакта с иглой фоторезист поднимается вместе с ней. Это обусловлено хорошей адгезией материала иглы и фоторезиста. Оцененное по массе «бугорка» усилие отрыва фоторезиста от иглы кантилевера составляло $\sim 1 \text{ Н/м}^2$.

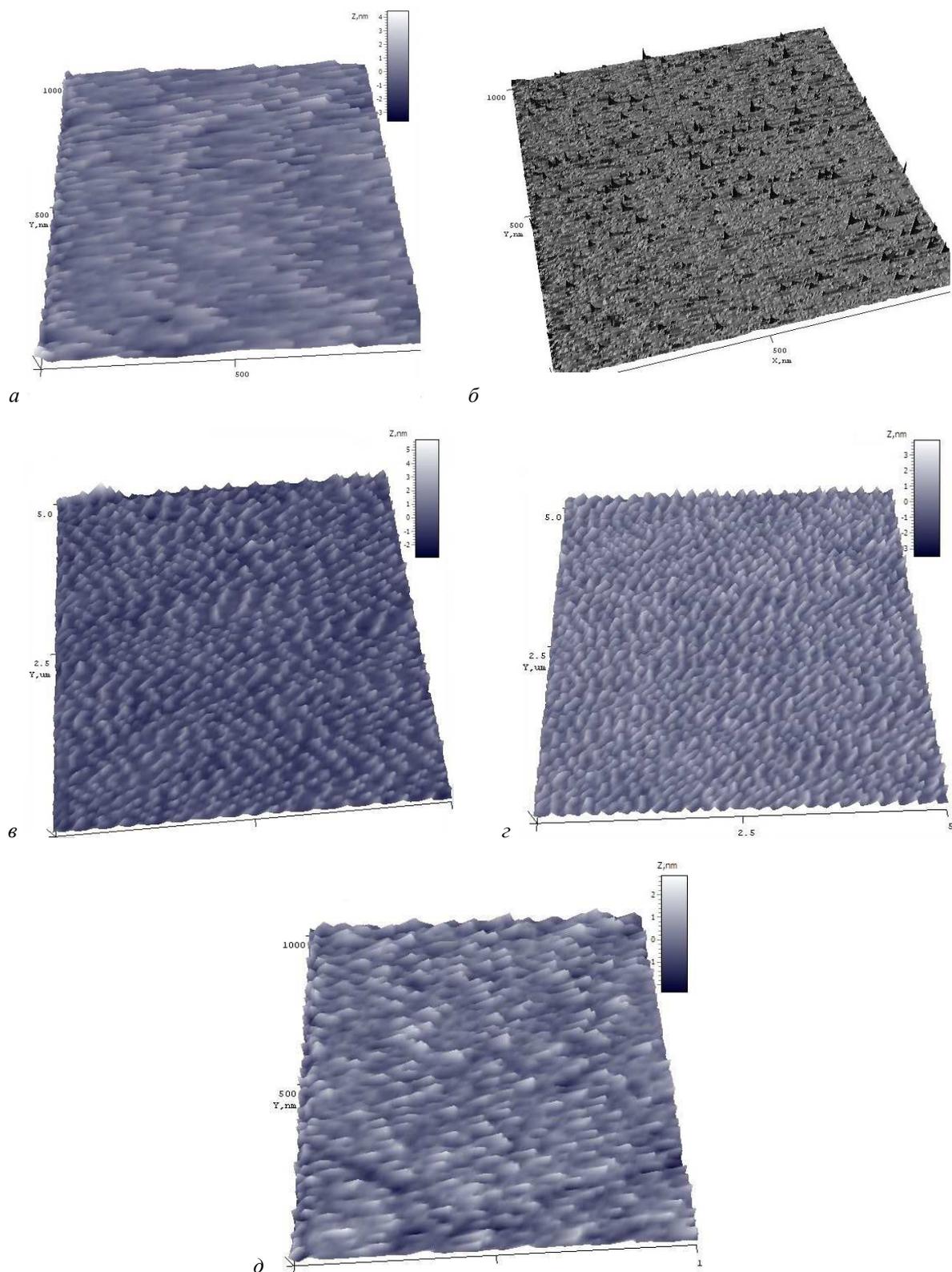


Рисунок 1. – 3D АСМ-топографии имплантированных фоторезистивных пленок.
Доза имплантации, см^{-2} : а – исходный, б – $5 \cdot 10^{14}$; в – $1 \cdot 10^{15}$; г – $5 \cdot 10^{15}$; д – $1 \cdot 10^{16}$

Таблица. – Средняя арифметическая шероховатость R_a и средний шаг местных выступов профиля S_i исходного и имплантированного ионами B^+ фоторезиста

Образец	Доза имплантации, $см^{-2}$	S_i , нм	R_a , нм
исходный	0	46	0,52
№ 1	$5 \cdot 10^{14}$	28	1,81
№ 2	$1 \cdot 10^{15}$	83	0,76
№ 4	$1 \cdot 10^{16}$	43	0,69

Имплантация дозой $5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$ приводит к появлению на облучаемой поверхности фоторезистивной пленки выступов пирамидальной формы высотой до 19 нм и размерами в основании $\sim (4-20)$ нм. Они распределены по поверхности очень хаотично (см. рисунок 1, б). Плотность таких образований достигает $40-80 \text{ мкм}^{-2}$. Среднеарифметическая шероховатость при этом возрастает до 1,8 нм (см. таблицу). В имплантированных образцах отмечается резкое снижение адгезии иглы и фоторезиста – в месте контакта иглы с поверхностью фоторезиста наблюдается впадина (рисунок 2, б).

Дальнейшее увеличение дозы имплантации свыше $1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$ приводит к сглаживанию выступов пирамидальной формы. Их высота снижается до 2–5 нм и увеличиваются размеры в основании до 50–100 нм. Среднеарифметическая шероховатость при этом снижается до значений близких к величине R_a в исходных пленках.

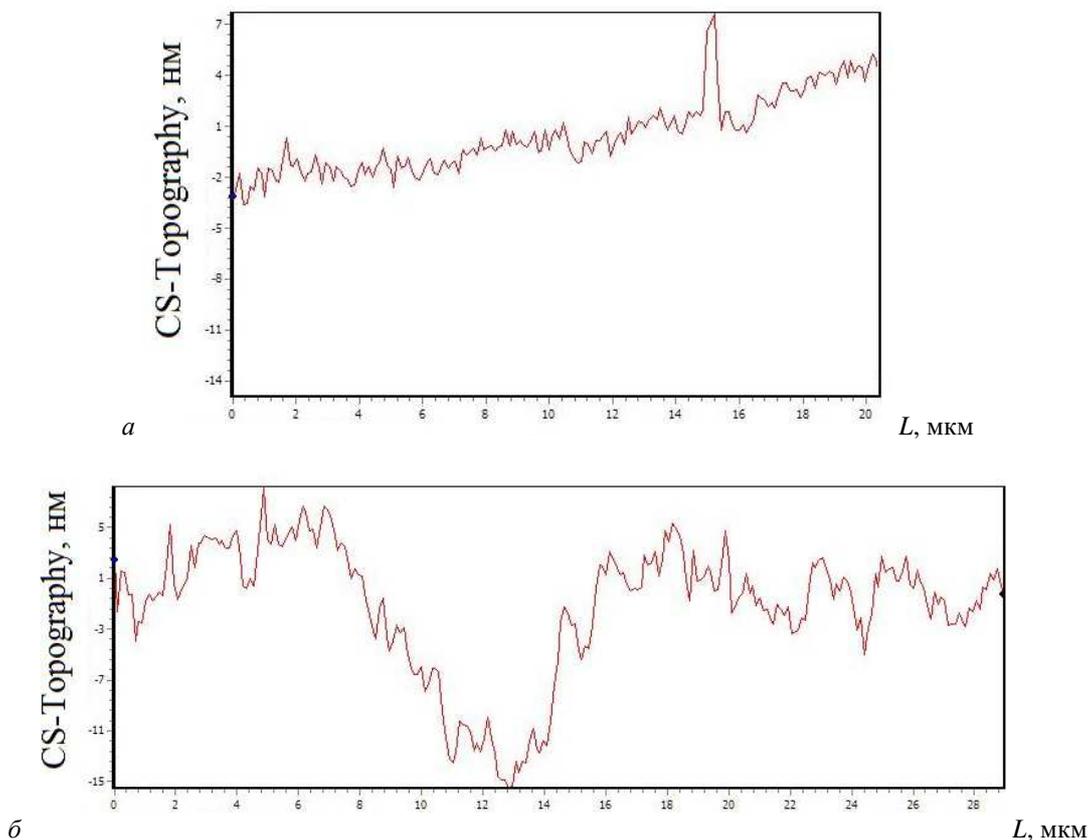


Рисунок 2. – АСМ-профиль в месте касания иглы с фоторезистом: а – исходный; б – имплантированный ионами B^+ дозой $5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$

Объяснить формирование конусообразных структур можно, принимая во внимание особенности молекулярной структуры и специфику радиационного воздействия на полимеры. При высокоэнергетичном воздействии происходит процесс ионизации, заключающийся в удалении электрона с определенной молекулярной орбитали и формировании так называемой дырки. В макромолекулах следует учитывать возможность образования делокализованных ионизированных состояний с эффективным размером, существенно превышающим размер элементарного звена, и возможность быстрой (недиффузионной) миграции дырки по цепи макромолекулы на значительные в молекулярном масштабе рас-

стояния. Такое же рассмотрение применимо и к возбужденным состояниям. Первичные физические процессы (ионизация или возбуждение) и следующие за ними химические изменения (разрыв связи, деструкция) могут быть разделены существенным расстоянием вследствие эффективной миграции дырок и переноса возбуждения [8].

С другой стороны, следует учитывать микрофазную неоднородность (микрогетерогенность) макроструктуры полимера [8, 9]. При этом возможен перенос электрона или дырки через границу раздела фаз, что может привести к локализации радиационных повреждений в определенных микрообластях системы или вблизи раздела фаз [8]. Пирамидальные структуры на поверхности полимера могут, на наш взгляд, являться проявлением такой локализации радиационно-индуцированной модификации полимеров, приводящей к локальному хаотичному вспучиванию поверхности полимера.

В работе [10] проведено математическое моделирование возникновения структур на поверхности полимеров в результате релаксации локальных упругих напряжений сжатия в полимере, например, у границы раздела микрофаз, либо вблизи крупных структурных дефектов. Такие локальные упругие напряжения могут возникать не только при высокоэнергетичном воздействии, но и в процессе формирования полимерной пленки. Ростовые локальные упругие напряжения могут релаксировать при внешнем воздействии с модификацией поверхности полимерной пленки – формированием на ней впадин (пирамидальных структур в нашем случае) при релаксации напряжений сжатия или впадин в случае напряжений растяжения. Оба варианта наблюдались в настоящей работе. С учетом перехода упругой энергии в работу по созданию новой поверхности в работе [6] показано, что если считать упругие напряжения сферическими с радиусом r , то размеры впадин (пирамид) в основании l можно оценить как

$$l = p \left(\frac{r^3}{2E\sigma} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

где p – напряжение;
 E – модуль упругости;
 σ – поверхностная энергия.

Таким образом, размеры формирующихся «пирамид» прямо пропорциональны величине напряжений сжатия и размерам напряженной области в степени $3/2$.

Согласно формуле (1) была проведена оценка величины напряжений сжатия p , необходимой для формирования экспериментально наблюдавшихся пирамидальных структур. Для расчета этих напряжений использовались значения модуля упругости E и поверхностной энергии σ для фоторезистивных новолачных пленок из [11]. Оказалось, что для формирования экспериментально наблюдавшихся конусообразных структур с диаметром в основании ~ 20 нм достаточны упругие напряжения в пределах 0,01–0,1 МПа. Отметим, что такие значения напряжений характерны для пленок, диазохинонноволачного фоторезиста на кремнии [6].

При больших дозах имплантации картина усложняется. Вследствие высокой локальной неоднородности процессов радиационно-индуцированной модификации полимеров в процессе их облучения возможна не только релаксация существующих, но и формирование новых полей упругих напряжений, что должно приводить к трансформации конусообразных структур в процессе облучения. Кроме того, в процессе имплантации возможно распыление сформировавшихся ранее конусообразных структур. Эти обстоятельства могут приводить к трансформации конусообразных структур и снижению среднеарифметической шероховатости R_a поверхности фоторезиста, наблюдавшейся в диапазоне флюенсов $(1-5) \cdot 10^{16}$ см⁻².

Заключение. Таким образом, методом атомно-силовой микроскопии на поверхности пленок позитивного фоторезиста ФП9120, имплантированного ионами В⁺ с энергией 100 кэВ и дозой $5 \cdot 10^{14}$ см⁻², обнаружено формирование хаотично расположенных пирамидальных структур высотой до 19 нм и размерами в основании до 4–20 нм. Увеличение дозы имплантации свыше $1 \cdot 10^{15}$ см⁻² приводит к сглаживанию пирамидальных структур. Их высота снижается до 2–5 нм, а размеры в основании увеличиваются до 50–100 нм. Формирование указанных структур обусловлено релаксацией локальных упругих напряжений сжатия в полимерной пленке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моро, У. Микролитография. Принципы, методы, материалы : в 2 ч. / У. Моро. – М. : Мир, 1990. – Ч. 2. – 632 с.
2. Микроиндентирование структур фотополимер – кремний / Н.В. Вабищевич [и др.] // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2011. – № 4. – С. 77–83.

3. Склерометрический метод измерения микротвердости пленок фоторезиста на кремнии / Д.И. Бринкевич [и др.] // Приборы и методы измерений. – 2016. – Т. 7, № 1. – С. 77–84.
4. О применимости методов индентирования и склерометрии для измерения прочностных характеристик полимерных пленок на кремнии / Д.И. Бринкевич [и др.] // Материалы и структуры современной электроники : сб. науч. тр. VII Междунар. науч. конф., Минск, 12–13 окт. 2016 г. / редкол.: В.Б. Оджаяев (отв. ред.) [и др.]. – Минск : БГУ, 2016. – (Вузовская наука, пром-сть, междунар. сотрудничество). – С. 22–24.
5. Влияние ионной имплантации на адгезию пленок позитивного диазохинонноволачного фоторезиста к монокристаллическому кремнию / В.С. Просолович [и др.] // Взаимодействие излучений с твердым телом : материалы 12 междунар. конф., Минск, 23–25, сент. 2017. – Минск : Издат. центр БГУ, 2017. – С. 409–411.
6. Modification of the positive photoresist surface by ion implantation / D.I. Brinkevich [et al.] // Russian Microelectronics. – 2015. – V. 44, № 6. – P. 399–403.
7. Спектры отражения гамма-облученных пленок диазохинонноволачного фоторезиста / С.А. Вабищевич [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. Физика. – 2017. – № 4. – С. 35–39.
8. Экспериментальные методы химии высоких энергий / под общ. ред. М.Я. Мельникова. – М. : МГУ, 2009. – С. 169–178.
9. Светочувствительные полимерные материалы / под ред. А.В. Ельцова. – Л. : Химия, 1985. – 296 с.
10. Радиационная модификация поверхности полимеров / А.А. Харченко [и др.] // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2015. – № 4. – С. 60–65.
11. Аскадский, А.А. Компьютерное материаловедение полимеров / А.А. Аскадский, В.И. Кондрашенко. – М. : Научный мир, 1999. – Т. 1 : Атомно-молекулярный уровень. – 544 с.

Поступила 24.09.2018

ATOMIC-POWER MICROSCOPY OF FILMS OF POSITIVE DIAZOKHINONNOVOLACHNY PHOTORESIST IMPLANTED BY BORON IONS

S. VABISHCHEVICH, A. VASUKOV, N. VABISHCHEVICH,
D. BRINKEVICH, V. PROSOLOVICH

Using atomic-force microscopy, we studied the modification of the surface of a positive photoresist of FP9120 implanted with B⁺ ions with energy of 100 keV in the dose range of 5·10¹⁴–1·10¹⁶ cm⁻². It was found that, at low doses of implantation of ions, pyramidal structures with heights of up to 19 nm and dimensions at the base of up to 4–20 nm randomly located on the surface of photoresist films were found. Increasing the implantation dose over 1·10¹⁵ cm⁻² leads to smoothing of the pyramidal structures. Their height decreases to 2–5 nm, and the dimensions at the base increase to 50–100 nm. The formation of these structures is due to the relaxation of local elastic compressive stresses in the polymer film.

Keywords: photoresist, ion implantation, surface modification, atomic force microscopy.

УДК 621.371:550.837.6

**ВЛИЯНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ ЧАСТИЦ СРЕДЫ НАД УГЛЕВОДОРОДАМИ
НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ****канд. техн. наук, доц. В.Ф. ЯНУШКЕВИЧ, С.В. КАЛИНЦЕВ**
(Полоцкий государственный университет)

Проанализировано взаимодействие электромагнитных волн в режиме радиоимпульсных сигналов со средой над углеводородными залежами. Выведен тензор диэлектрической проницаемости анизотропной среды над залежью в режиме радиоимпульсных сигналов на основе квазигидродинамического подхода с использованием многочастичных электронно-ионных токов. Проведен анализ комбинационных составляющих компонентов диэлектрической проницаемости среды над углеводородами для электромагнитных волн с правой и левой круговыми поляризациями в зависимости от концентрации частиц среды. Показано, что результаты исследований могут быть использованы для идентификации среды над залежами по характеру и величине суммарной и разностной компонент диэлектрической проницаемости анизотропного слоя.

Ключевые слова: радиоимпульсный сигнал, анизотропная среда, углеводородная залежь, методы электромагнитной разведки.

Введение. Актуальность рассматриваемых в настоящей работе задач заключается в усовершенствовании существующих электромагнитных методов георазведки и разработке новых методов поиска, идентификации месторождений нефти и газа (углеводородов), являющихся стратегическим видом полезных ископаемых. Методы поиска углеводородных залежей (УВЗ) основаны на анализе электрофизических и электрохимических процессов в анизотропных средах (АС) над залежами углеводородов и оптимизации частотных, поляризационных, амплитудных, модуляционных и других параметров зондирующих сигналов с учетом специфических характеристик УВЗ.

Аналогия исследуемой среды над залежью нефти и газа с плазмopodobным образованием позволяет использовать для изучения взаимодействия электромагнитных волн (ЭМВ) с УВЗ существующие решения при изучении плазмы и плазмopodobных сред. Установлено, что наиболее оптимальным для исследования сред над УВЗ является квазигидродинамический подход с использованием многочастичных электронно-ионных токов и феноменологически заданных частот столкновений, ввиду отсутствия необходимости учета точных пространственно-временных перемещений частиц [1].

Результаты анализа взаимодействия ЭМВ с УВЗ и его экспериментального исследования представлены во многих работах. В статье [2] выведен тензор диэлектрической проницаемости анизотропной среды над залежью в режиме гармонических сигналов. Обнаружение углеводородов осуществляется с помощью радиоволновых измерительных комплексов [3], по изменению поверхностного импеданса среды над залежами [4], на основе измерения сопротивлений в исследуемых точках геопрофиля с помощью поверхностных электродов [5].

Точность определения границ УВЗ может быть повышена за счет применения двухчастотных сигналов [6] на основе исследования сложных ионных соединений полупроводникового характера, образующихся над углеводородами [7], применением методов электрорезонансного зондирования [8]. Для реализации новых методов георазведки представляет интерес анализ процесса взаимодействия радиоимпульсных ЭМВ с АС, образующимися над залежами и скоплениями углеводородов. В работе [9] проведено исследование поверхностного импеданса среды над УВЗ с учетом влияния всех ниже расположенных слоев на верхний слой.

Основой многих методов георазведки углеводородов могут стать результаты исследования затухания радиоимпульсных сигналов в среде над залежью [10]. Способ поиска УВЗ [11] позволяет обнаруживать месторождения нефти и газа по измерениям величины напряженности электрического поля отраженных радиоимпульсных сигналов на глубинах до 200 м. Целью настоящей работы является качественное повышение уровня достоверности поиска и идентификации УВЗ обоснованием выбора характеристик ЭМВ при использовании радиоимпульсных сигналов, позволяющих измерять величины напряженности электрического поля отраженных сигналов на глубинах до 500 м.

В данной работе исследуется этап, который включает в себя вывод тензора среды над УВЗ в режиме радиоимпульсных сигналов, анализ комбинационных составляющих компонентов диэлектрической проницаемости среды над углеводородами для ЭМВ с правой и левой круговыми поляризациями, идентификации среды над залежами по характеру и величине суммарной и разностной компонент диэлектрической проницаемости анизотропного слоя с учетом концентрации частиц среды.

Диагностика АС над углеводородами по воздействию зондирующего радиоимпульсного сигнала на исследуемый геопрофиль состоит из этапов, которые базируются на результатах исследований комби-

национных составляющих тензора диэлектрической проницаемости для ЭМВ с правой и левой круговой поляризациями. Новизна исследований, приведенных в данной статье, заключается в том, что полученные результаты способствуют определению анизотропных сред по измерению отличий сигналов двухканальной схемы на основе полученных величин отраженных сигналов. Это позволит повысить производительность геологоразведочных работ УВЗ.

Взаимодействие анизотропных сред с углеводородными залежами в режиме радиоимпульсных сигналов. Качественное повышение уровня достоверности поиска и идентификации углеводородов достигается применением оптимальных режимов зондирования ЭМВ при взаимодействии импульсных сигналов со средой над УВЗ.

Рассмотрим процесс взаимодействия ЭМВ с УВЗ в режиме импульсного сигнала вида

$$S(f) = \frac{U \cdot \tau_u}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0) \cdot \tau_u}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0) \cdot \tau_u}{2}} + \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0) \cdot \tau_u}{2}}{\frac{(\omega + \omega_0) \cdot \tau_u}{2}}, \quad (1)$$

где $\frac{U \cdot \tau_u}{2} = 1$ – амплитуда;

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ – частота;

ω_0 – несущая частота;

τ_u – длительность радиоимпульса.

Процесс взаимодействия ЭМВ с локальным включением на трассе распространения радиоволн можно представить в виде режима наклонного падения плоской волны с вертикальной поляризацией в среде с параметрами $\epsilon_0, \mu_0, \delta_0$ на безграничную поверхность с анизотропным импедансом. Данная ЭМВ возбуждается с помощью переносного передатчика, перемещаемого вдоль исследуемого профиля.

Методика исследований заключается в облучении исследуемого профиля электромагнитной волной на фиксированной частоте, приеме отраженного сигнала. Измеряют напряженность электрического поля отраженного сигнала в точках измерения исследуемого профиля и по аномальным значениям напряженности электрического поля отраженного сигнала определяют границу углеводородной залежи.

Представляет интерес анализ частотных характеристик комбинационных составляющих:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_R(\omega) &= \dot{\mathcal{E}}_1 + \dot{\mathcal{E}}_2 = \text{Re} \mathcal{E}_R + j \text{Im} \mathcal{E}_R, \\ \dot{\mathcal{E}}_L(\omega) &= \dot{\mathcal{E}}_1 - \dot{\mathcal{E}}_2 = \text{Re} \mathcal{E}_L + j \text{Im} \mathcal{E}_L. \end{aligned} \quad (2)$$

В выражениях (2) присутствуют элементы матрицы

$$\dot{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{E}}_1 - j\dot{\mathcal{E}}_2 & 0 \\ j\dot{\mathcal{E}}_2 & \dot{\mathcal{E}}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\mathcal{E}}_3 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Информация о свойствах АС заложена в компонентах тензора (3) $\dot{\mathcal{E}}_1, \dot{\mathcal{E}}_2, \dot{\mathcal{E}}_3$, подлежащих исследованию в различных режимах взаимодействия среды с ЭМВ.

Выведем тензор диэлектрической проницаемости АС над УВЗ в режиме радиоимпульсных сигналов. В рамках квазигидродинамического приближения уравнение движения электрона имеет вид

$$m \frac{d\dot{\vartheta}}{dt} + v m \dot{\vartheta} = q \vec{E} + q \mu_0 \left[\dot{\vartheta}, \dot{H}_0 \right], \quad (4)$$

где $m, q, \dot{\vartheta}$ – масса, заряд и скорость движения частиц;

v – частота столкновений электрона с тяжелыми частицами;

μ_0 – магнитная проницаемость вакуума;

\vec{E} – напряженность электрического поля ЭМВ;

\dot{H}_0 – напряженность магнитного поля Земли.

Заряд электрона равен элементарному заряду $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Найдем плотность полного тока в немагнитной анизотропной среде (μ_r – магнитная проницаемость исследуемой среды не отличается от μ_0)

$$\dot{\delta}_{\Sigma} = \dot{\delta}_{CM} + \dot{\delta}_{ПП} = j \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \dot{E} + \sum q_i \cdot N_i \cdot \dot{\vartheta}_i, \quad (5)$$

которая определяется токами в диэлектрическом наполнителе среды с проницаемостью ϵ_r ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф·м⁻¹ – диэлектрическая проницаемость вакуума) и включает ток проводимости $\delta_{ПП}$ с известной концентрацией электронов N_e .

Решение уравнений (4), (5) позволяет определить компоненты тензора диэлектрической проницаемости среды над УВЗ

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_1 = \epsilon_r \cdot F \left(1 + \frac{n\Omega_1}{w}\right) + \sum_{i=1}^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{F \cdot w_{ni}^2}{w} \cdot \frac{(w+n\Omega_1) \cdot [w_{\Gamma i}^2 - (w+n\Omega_1)^2 - v_i^2]}{[v_i^2 + w_{\Gamma i}^2 - (w+n\Omega_1)^2]^2 + 4(w+n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} - \\ - jF \left[\frac{w_{ni}^2}{w} \cdot v_i \cdot \frac{(w+n\Omega_1)^2 + v_i^2 + w_{\Gamma i}^2}{[v_i^2 + w_{\Gamma i}^2 - (w+n\Omega_1)^2]^2 + 4(w+n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} + \frac{\delta_r F}{w\epsilon_0} \right] \end{array} \right\}, \\ \dot{\epsilon}_2 = \sum_{i=1}^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{w_{ni}^2}{w} \cdot F \cdot w_{\Gamma i} \cdot \frac{v_i^2 + w_{\Gamma i}^2 - (w+n\Omega_1)^2}{[v_i^2 + w_{\Gamma i}^2 - (w+n\Omega_1)^2]^2 + 4(w+n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} - \\ - 2j \frac{w_{ni}^2}{w} \cdot F \cdot w_{\Gamma i} \cdot v_i \cdot \frac{w+n\Omega_1}{[v_i^2 + w_{\Gamma i}^2 - (w+n\Omega_1)^2]^2 + 4(w+n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} \end{array} \right\}, \\ \dot{\epsilon}_3 = \sum_{i=1}^2 \left\{ F \left(1 + \frac{n\Omega_1}{w}\right) \cdot \left[\epsilon_r - \frac{w_{ni}^2}{w} \cdot \frac{1}{(w+n\Omega_1)^2 + v_i^2} \right] - j \left[\frac{w_{ni}^2}{w} \cdot F \cdot v_i \cdot \frac{1}{(w+n\Omega_1)^2 + v_i^2} + \frac{\delta_2 F}{w\epsilon_0} \right] \right\}. \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\text{Здесь } F = \frac{\tau}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi \cdot n \cdot F_1 \cdot \tau)}{\pi \cdot n \cdot F_1 \cdot \tau},$$

T, F_1 – период, частота импульса;

n – номер гармоники;

Ω_1 – круговая частота импульса, $\Omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot F_1$;

ϵ_r, δ_r – диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость среды;

ϵ_0 – диэлектрическая постоянная;

w_{ni} – плазменная частота; $i = 1$ – для электронов, $i = 2$ – для ионов;

v_i – частота столкновения частиц;

$\omega_{\Gamma i}$ – гиротропная частота, $\omega_{\Gamma i} = \frac{q_i \mu_0 H_0}{m_i}$;

w_{ni} – плазменная частота, $w_{ni} = q_i \left(\frac{N_i}{m_i \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Результаты исследований. Проведен частотный анализ выражений (2) для частоты радиопульса $5 \cdot 10^5$ Гц и концентрации частиц $N_e = 10^{17}$ м⁻³ (рисунок 1, 3) и $N_e = 10^{15}$ м⁻³ (рисунок 2, 4).

Результаты теоретических исследований и существующие модели УВЗ [1] показывают, что свойства среды над залежью нефти и газа отличаются от данных, полученных при исследовании образцов пород, отобранных непосредственно над УВЗ. При этом аномалии ЭМП на реальном месторождении

могут достигать нескольких десятков процентов. Данные расхождения объясняются непосредственным влиянием углеводородов на электрические свойства вмещающих пород над УВЗ.

Поэтому исследование отобранных образцов вмещающих пород над УВЗ в отрыве от естественных условий залегания не соответствует реальной физической картине, возникающей над реальным месторождением или скоплением нефти и газа. Тем не менее такие расчеты показывают основные закономерности поведения комбинационных составляющих диэлектрической проницаемости среды над УВЗ и могут быть рекомендованы для диагностики анизотропных сред.

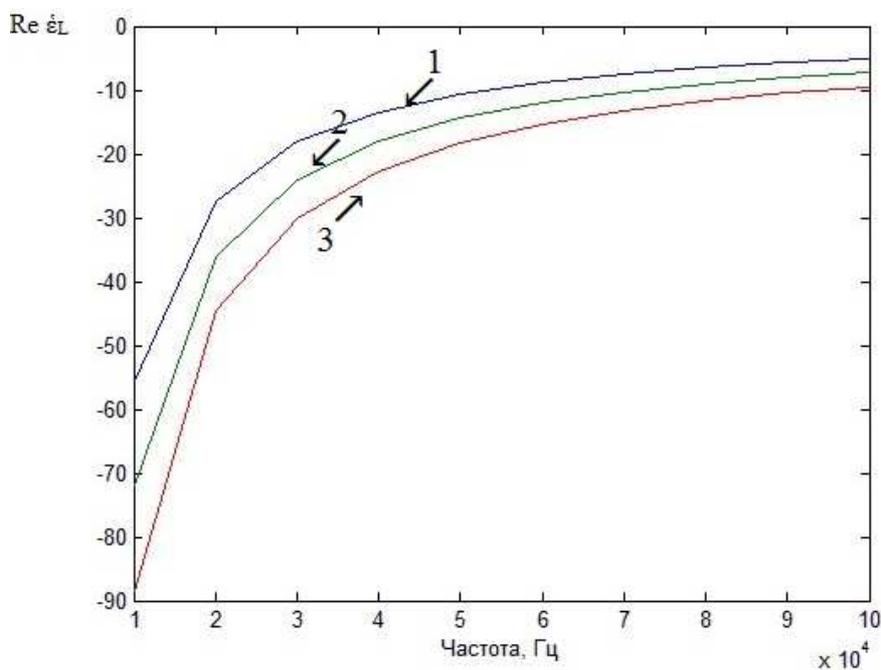


Рисунок 1. – Зависимости $Re \epsilon_L = \psi(f)$ при концентрации $N_c = 10^{17} \text{ м}^{-3}$:
1 – для $\epsilon_r = 25$; 2 – для $\epsilon_r = 15$; 3 – для $\epsilon_r = 5$

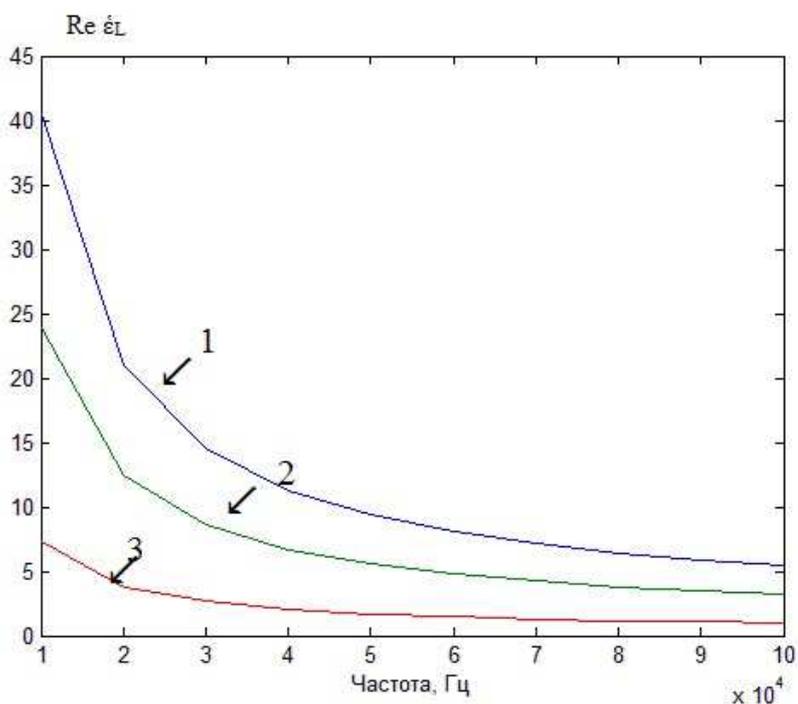


Рисунок 2 – Зависимости $Re \epsilon_L = \psi(f)$ при концентрации $N_c = 10^{15} \text{ м}^{-3}$:
1 – для $\epsilon_r = 25$; 2 – для $\epsilon_r = 15$; 3 – для $\epsilon_r = 5$

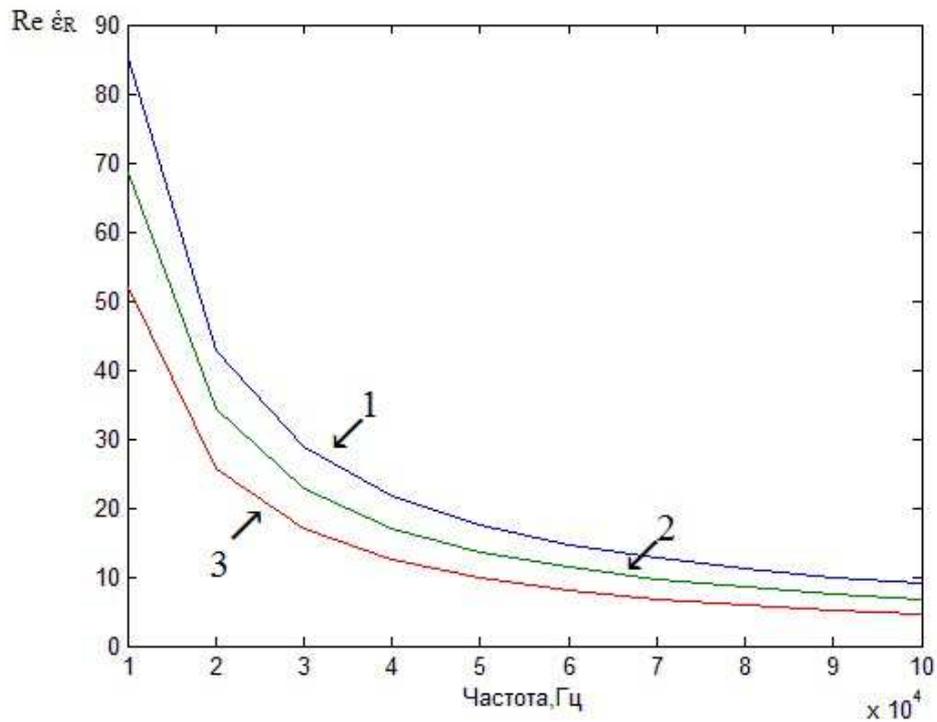


Рисунок 3 – Зависимости $\text{Re } \hat{\epsilon}_R = \psi(f)$ при концентрации $N_c = 10^{17} \text{ м}^{-3}$:
1 – для $\epsilon_r = 25$; 2 – для $\epsilon_r = 15$; 3 – для $\epsilon_r = 5$

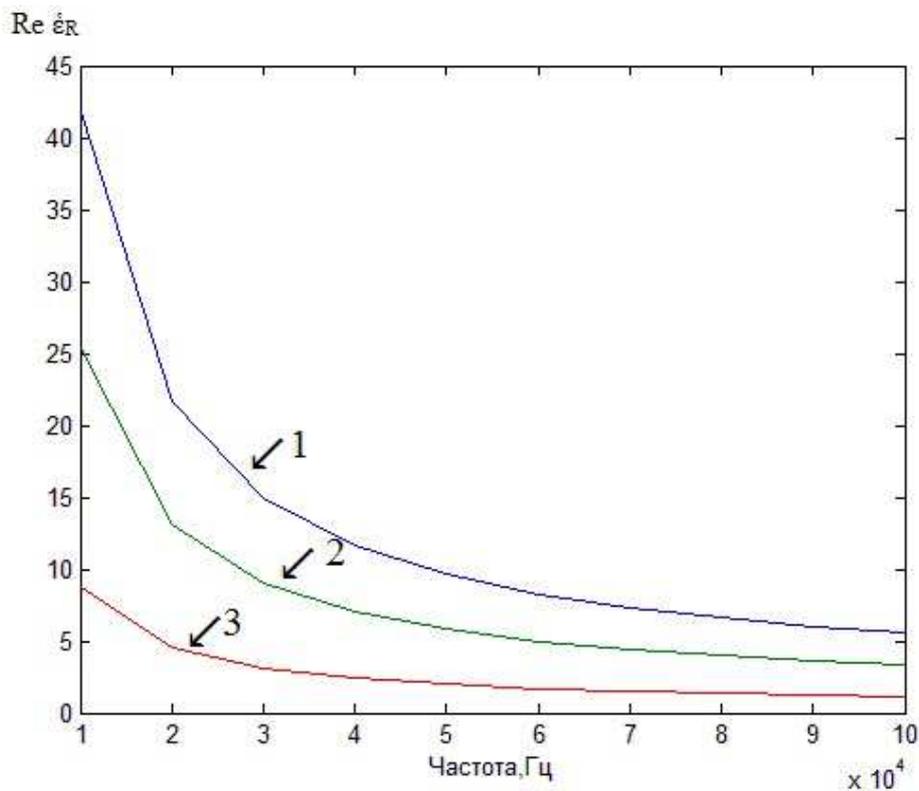


Рисунок 4. – Зависимости $\text{Re } \hat{\epsilon}_R = \psi(f)$ при концентрации $N_c = 10^{15} \text{ м}^{-3}$:
1 – для $\epsilon_r = 25$; 2 – для $\epsilon_r = 15$; 3 – для $\epsilon_r = 5$

Расчет компонентов тензоров диэлектрической проницаемости осуществлен на основании экспериментально полученных параметров среды над залежами углеводородов [2]: удельная электрическая

проводимость $\delta_r = 10^{-5}$ См/м; концентрация частиц $N_c = N_n = (10^{15} - 10^{17}) \text{ м}^{-3}$; частота столкновения частиц $\nu = 2 \cdot \pi \cdot 10^9$ рад / с. Значение n выбрано равным 5. Диэлектрическая проницаемость среды исследовалась в диапазоне от 1 до 25.

Выбор частоты радиоимпульсных сигналов $F_n = 5 \cdot 10^5$ Гц обусловлен обеспечением глубин зондирования до 500 м для определения характеристик сред над залежами на больших глубинах по сравнению с дневной поверхностью [2]. Распространение ЭМВ с левой поляризацией при $N_c = 10^{17} \text{ м}^{-3}$ характеризуется ростом комбинационной составляющей при увеличении частоты. При этом наблюдаются отрицательные значения разностной компоненты. Уменьшение концентрации частиц среды над УВЗ приводит к уменьшению комбинационной составляющей с ростом частоты, при этом она становится положительной.

Распространение ЭМВ с правой поляризацией при применении концентрации частиц в указанном выше диапазоне характеризуется одинаковым законом изменения суммарной компоненты диэлектрической проницаемости среды, отличаясь лишь численными значениями. При изменении диэлектрической проницаемости среды происходит изменение комбинационной составляющей без изменения знака суммарной компоненты.

Процедура диагностики среды осуществляется согласно методике решения обратной задачи [12], по которой определения диэлектрической проницаемости, удельной проводимости среды и глубины слоя основаны на измерении времени запаздывания отраженного сигнала и амплитуды напряженности электрического поля отраженной волны. С помощью перемещения передатчика и приемника вдоль исследуемого профиля получают дополнительную априорную информацию, задаваясь конкретными значениями расстояний. Двухканальная схема определения комбинационных составляющих ЭМВ в режимах с правой и левой круговыми поляризациями позволяет повысить производительность методов электроразведки, поскольку полученные результаты дают возможность выделения АС на фоне других сред [13].

Заключение. Проведен анализ взаимодействия анизотропного слоя над углеводородами с ЭМВ в режиме радиоимпульсных сигналов. Выведен тензор диэлектрической проницаемости АС над УВЗ в режиме радиоимпульсных сигналов. Результаты исследования могут быть применены в поисковой геофизике. При этом следует отметить:

- тензор диэлектрической проницаемости АС над УВЗ в режиме радиоимпульсных сигналов может быть использован для определения электродинамических характеристик среды над залежью в широком диапазоне частот зондируемых сигналов при изменении концентрации частиц сред;
- исследования могут быть полезны для определения характеристик среды над залежью при распространении ЭМВ с правой и левой круговыми поляризациями, что повышает информативность методов оконтуривания и выделения УВЗ;
- распространение ЭМВ с левой поляризацией при изменении концентрации частиц среды приводит к изменению комбинационной составляющей с изменением знака разностной компоненты, что может быть использовано для разработки методов электромагнитной разведки, поиска и идентификации УВЗ;
- проведенный анализ взаимодействия импульсных сигналов со средой над УВЗ показал, что в компонентах тензоров диэлектрической проницаемости появляются дополнительные составляющие, зависящие от параметров сигналов. Все это приводит к расширению функциональных зависимостей компонентов тензоров от режимов зондирования, что позволяет повысить точность разрабатываемых методов поиска УВЗ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гололобов, Д.В. Взаимодействие электромагнитных волн и углеводородных залежей / Д.В. Гололобов. – Минск : Бестпринт, 2009. – 185 с.
2. Москвичёв, В.Н. Исследование взаимодействия электромагнитных волн с углеводородной залежью / В.Н. Москвичёв // Радиотехника и электроника. – Минск : Выш. шк., 1989. – Вып. 18. – С. 91–96.
3. Поиск и разведка углеводородов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.companypetroservice.com> // . – Дата доступа: 10.01.2017.
4. Гололобов, Д.В. Поверхностный импеданс среды над углеводородными залежами в режиме частотно-модулированных сигналов / Д.В. Гололобов, С.В. Калинин, В.Ф. Янушкевич // Весці НАН Беларусі. Сeryя фіз.-тэхн. навук. – 2010. – № 4. – С. 98–101.
5. Asch, T. Mapping and monitoring electrical resistivity with surface and surface electrode arrays / T. Asch, H.F. Morrison // Geophysics. – 1989. – P. 235–244.

6. Moskvichew, V.N. Interaction of electromagnetic waves (EMW) with anisotropic inclusion in communication line / V.N. Moskvichew // 9-th Microw. Conf. NICON-91, Rydzyna, May 20–22, 1991. – Rydzyna, 1991. – Vol. 1. – P. 240–244.
7. Huang, R.H. Low temperature (-80°C) thermionic electron emission from alkalis and electrolites / R.H. Huang, I.Z. Dyl // Chem Phys Zett. – 1990. – Vol. 166, № 2. – P. 133–136.
8. Levashov, S.P. Electric-resonance sounding method and its application for, geological-geophysical and engineering-geological investigations / S.P. Levashov // 66nd EAGE Conference and Technical Exhibition, Paris, France, 7–10 June 2003. – (CD-ROM Abstracts volume).
9. Adamovskiy, E. Simulation of electromagnetic waves interaction with hydrocarbon deposits / E. Adamovskiy, V. Yanushkevich // 8 Junior researchers conference European and national dimension in research : in 3 p. / PSU. – Novopolotsk, 2016. – P. 3 : Technology. – P. 179–183.
10. Взаимодействие электромагнитных волн с анизотропными средами над углеводородными залежами в режиме радиоимпульсных сигналов / В.Ф. Янушкевич [и др.] // Вестник ПГУ. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 45–50.
11. Иванова, К.И. Способ геоэлектроразведки углеводородной залежи с использованием радиоимпульсных сигналов. Фундаментальные и прикладные исследования в современном мире / К.И. Иванова, В.Ф. Янушкевич // Материалы XV Междунар. науч.-техн. конф., 4 окт. 2016 г. – СПб., 2016. – Т. 1. – С. 107–111.
12. Копейкин, В.В. Обратная задача георадиолокации [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.geo-radar.ru/articles/article4.php>. – Дата доступа: 15.01.2013.
13. Янушкевич, В.Ф. Электромагнитные методы поиска и идентификации углеводородных залежей : моногр. / В.Ф. Янушкевич. – Новополоцк : ПГУ, 2017. – 232 с.

Поступила 10.09.2018

INFLUENCE OF CONCENTRATION OF PARTICLES OF MEDIUM ON HYDROCARBONS ON DISTRIBUTION OF RADIOIMPULSE SIGNALS

V. YANUSHKEVICH, S. KALINTSEV

The article analyzes the interaction of electromagnetic waves in the regime of radio pulse signals with the medium over hydrocarbon deposits. A tensor of the dielectric constant of an anisotropic medium above the deposit in the mode of radio-impulse signals is derived on the basis of a quasihydrodynamic approach using multi-particle electron-ion currents. The analysis of the combination components of the dielectric permittivity of the medium over hydrocarbons for electromagnetic waves with right and left circular polarizations is performed, depending on the concentration of the particles in the medium. It is shown that the results of research can be used to identify the environment above the halls by the nature and magnitude of the total and difference components of the dielectric permittivity of the anisotropic layer.

Keywords: radio impulse signal, anisotropic medium, hydrocarbon deposit, methods of electromagnetic reconnaissance.

УДК 535.4

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ
КОЭФФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ ПРЕДМЕТНОЙ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ
В КРИСТАЛЛЕ $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$**

*канд. физ.-мат. наук А.В. МАКАРЕВИЧ, д-р физ.-мат. наук, проф. В.В. ШЕПЕЛЕВИЧ
(Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина);
д-р физ.-мат. наук, проф. С.М. ШАНДАРОВ
(Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники)*

Экспериментально исследована зависимость коэффициента усиления предметной световой волны от ориентационного угла и толщины кристалла силленитов $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ среза ($\bar{1}\bar{1}0$) с использованием только одного кристаллического образца. Показано, что теоретическая интерпретация полученных экспериментальных данных возможна лишь при одновременном учете обратного пьезоэлектрического и фотоупругого эффектов в дополнение к традиционно рассматриваемым в силленитах электрооптическому эффекту и оптической активности. Выполнена теоретическая оптимизация коэффициента усиления предметной световой волны в этом кристалле.

Ключевые слова: *фоторефрактивный кристалл, кристалл BGO, электрооптический эффект, обратный пьезоэлектрический эффект, фотоупругий эффект, оптическая активность, коэффициент усиления предметной световой волны.*

Введение. Кубические фоторефрактивные кристаллы силленитов $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ (BSO), $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ (BGO) и $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ (BTO) находят применение в голографической интерферометрии, цифровой голографической микроскопии и других важных современных приложениях, которые представлены, например, в работах [1–3]. Однако зачастую в подобных работах кристаллические образцы в оптических схемах голографической записи предлагается ориентировать таким образом, чтобы вектор голографической решетки \vec{K} был параллелен или перпендикулярен кристаллографическому направлению [001]. Вероятно, это связано с тем, что в ранних трудах по изучению кристаллов данного типа основным и единственным механизмом фоторефракции выступал электрооптический эффект [4, 5]. Рассмотрение этого эффекта наряду с естественной оптической активностью силленитов позволяло адекватно теоретически описывать процессы взаимодействия световых волн в этих кристаллах при названных выше ориентациях, когда $\vec{K} \parallel [001]$ и $\vec{K} \perp [001]$. Однако, как было установлено теоретически и экспериментально (например, как в обзорной статье [6]), при других ориентациях вектора решетки учета только электрооптического эффекта и оптической активности кристалла оказалось недостаточно, чтобы результаты расчетов соответствовали экспериментальным данным. Кроме того, в [6] было показано, что для теоретического описания выходных энергетических и поляризационных характеристик голограмм в кристаллах силленитов при произвольных ориентациях вектора \vec{K} относительно направления [001] необходимо, в дополнение к традиционному электрооптическому эффекту, принимать во внимание обратный пьезоэлектрический эффект, вызывающий упругие деформации, обуславливающие вследствие фотоупругого эффекта дополнительный вклад в фоторефракцию (далее – пьезоэффект). При этом отметим, что к важнейшим выходным энергетическим характеристикам голограмм в фоторефрактивных кристаллах принято относить их *дифракционную эффективность* η и *коэффициент усиления* γ *предметной световой волны при двухволновом взаимодействии* (далее – *коэффициент усиления*), обусловленный перекачкой световой энергии из опорного пучка R в предметный пучок S .

В настоящей статье, основываясь на полученных экспериментальных данных, с учетом всех названных эффектов, показано, что для различных значений толщины d кристалла BGO максимум *коэффициента усиления* γ достигается при условиях, отличных от $\vec{K} \parallel [001]$ и $\vec{K} \perp [001]$. Данное обстоятельство позволяет повысить эффективность работы голографических устройств, выполненных на основе этого кристалла.

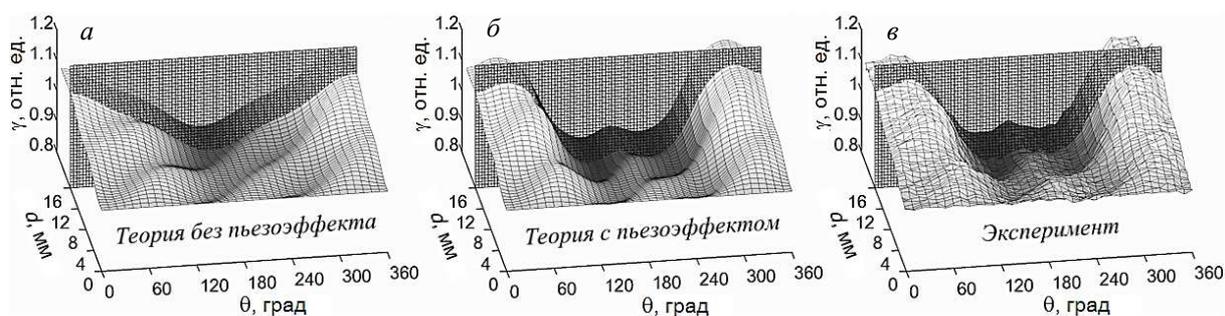
Результаты и их обсуждение. Для проведения экспериментальных исследований была применена трапециевидная геометрия пересечения в кристалле световых пучков с плоским волновым фронтом, предложенная в работах [7–9] и позволяющая с использованием только одного кристаллического образца получать зависимость $\gamma(d)$, где d – толщина кристалла. Однако в этих работах изучение *коэффициента*

усиления в силленитах также проводилось для указанных выше условий, когда пьезоэффектом в теоретических расчетах можно пренебречь (при $\vec{K} \parallel [001]$ и $\vec{K} \perp [001]$).

Следует отметить, что в [10] трапециевидная геометрия была впервые успешно применена для экспериментального изучения ориентационной зависимости *дифракционной эффективности* голограмм от толщины кристалла BSO с дополнительным учетом пьезоэффекта.

Эксперимент проводился с кристаллическим образцом BGO среза $(\bar{1}\bar{1}0)$, имеющим толщину $d_0 = 16$ мм. При выполнении исследований использовалась оптическая схема экспериментальной установки, аналогичная [10]. Пространственная ориентация кристалла относительно плоскости распространения световых пучков, а также относительно вектора голографической решетки \vec{K} определялась ориентационным углом θ , отсчитываемым от кристаллографического направления $[001]$ к вектору \vec{K} в соответствии с [11]. Поляризации пучков R и S , образованных в результате деления луча гелий-неонового лазера ($\lambda = 633$ нм), задавались параллельными плоскости их падения на кристалл (в соответствии с [11] азимуты линейной поляризации Ψ_0 световых пучков одинаковы и равны 0). Отношение интенсивностей предметного пучка к опорному пучку до вхождения в кристалл I_S^0 / I_R^0 составляло 1/4, а угол между пучками вне кристалла был равен 30° . Голографическая решетка формировалась в течение промежутка времени τ , приблизительно равного 30 с.

Полученные в результате теоретического расчета поверхности $\gamma(\theta, d)$ без учета и с учетом пьезоэффекта, а также из эксперимента, представлены на рисунке 1.



**Рисунок 1. – Зависимости $\gamma(\theta, d)$ для кристалла BGO среза $(\bar{1}\bar{1}0)$ при азимутах линейной поляризации взаимодействующих в нем световых пучков $\Psi_0 = 0$:
 а – теоретические расчеты без учета пьезоэффекта;
 б – теоретические расчеты с учетом пьезоэффекта; в – экспериментальные данные**

Из рисунка 1 можно видеть, что теоретически рассчитанная поверхность $\gamma(\theta, d)$, построенная без учета пьезоэффекта (рисунок 1, а), имеет существенные различия с экспериментальными данными (рисунок 1, в). При этом «включение» в теоретических расчетах пьезоэффекта (рисунок 1, б) приводит к качественному и количественному согласию теории с экспериментом.

Аналогичная ситуация по согласованию результатов теоретических расчетов с экспериментальными данными наблюдалась и в случае, когда входящие в кристалл световые пучки были поляризованы в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения ($\Psi_0 = 90^\circ$).

Отметим, что применение указанной выше трапециевидной геометрии пересечения в кристалле световых пучков для изучения зависимости $\gamma(d)$ обуславливает наличие в получаемых экспериментальных данных двух областей: исследуемой области, в которой наблюдается изменение γ от d ($0 < d \leq d_0$), и дополнительной области, в которой коэффициент усиления γ должен оставаться постоянным, так как в этой области пучки интерferируют при одинаковой толщине кристалла, равной d_0 . Указанное обстоятельство наиболее подробно описано в [8]. Поскольку в рамках настоящего исследования изучалась зависимость γ не только от d , но и от θ , то в данном случае получаемые результаты содержали область изменения γ от θ ($0 \leq \theta \leq 360^\circ$) и d ($0 < d \leq d_0$), а также область, в которой коэффициент усиления γ должен зависеть только от θ . Условная «граница» между этими двумя областями отмечена на фрагментах а–в рисунка 1 плоскостью $d = d_0 = 16$ мм.

При теоретических расчетах использовались следующие параметры кристалла BGO для длины волны $\lambda = 633$ нм из [12–14]: показатель преломления $n = 2,55$; электрооптический коэффициент $r_{41} = -3,4 \cdot 10^{-12}$ м/В; модули упругости $c_1 = 12,84 \cdot 10^{10}$ Н/м², $c_2 = 2,94 \cdot 10^{10}$ Н/м², $c_3 = 2,55 \cdot 10^{10}$ Н/м²; пьезоэлектрический коэффициент $e_{14} = 0,99$ Кл/м²; фотоупругие постоянные $p_1 = -0,136$, $p_2 = -0,103$, $p_3 = -0,091$, $p_4 = -0,0134$. Кроме того, удельное вращение плоскости поляризации было измерено на используемом образце кристалла BGO и составило $\rho = 363$ рад/м.

Найденные результаты были приняты во внимание при теоретической оптимизации *коэффициента усиления предметной световой волны* в исследованном кристалле. Эта оптимизация была выполнена путем специального выбора азимутов линейной поляризации Ψ_0 взаимодействующих в кристалле световых волн, при которых для фиксированных значений его ориентационного угла θ и толщины d достигается наибольший (поляризационно оптимизированный) *коэффициент усиления предметной световой волны*. Полученные зависимости $\gamma_{\Psi_0}^{opt.}(\theta, d)$ без учета и с учетом пьезоэффекта представлены на рисунке 2. При построении данных графиков использованы все указанные выше условия формирования голограмм и физические параметры кристалла BGO.

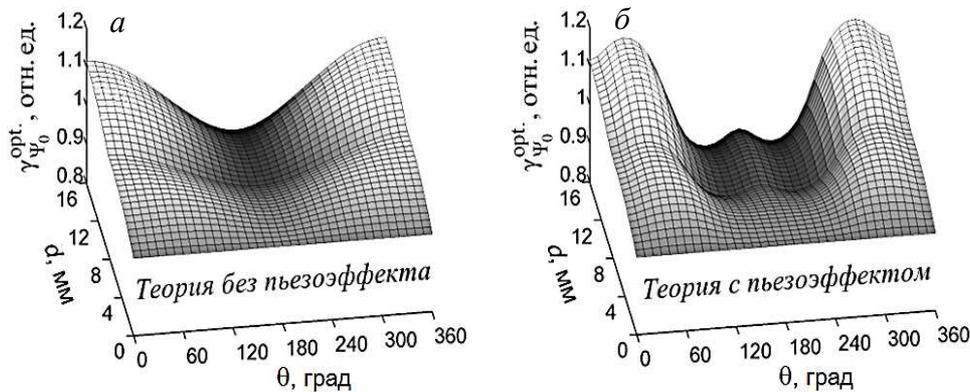


Рисунок 2. – Теоретические зависимости $\gamma_{\Psi_0}^{opt.}(\theta, d)$ для кристалла BGO среза $(\bar{1}\bar{1}0)$:
 а – без учета пьезоэффекта; б – с учетом пьезоэффекта

Детальный анализ функции $\gamma_{\Psi_0}^{opt.}(\theta, d)$, представленной на рисунке 2, а, показал, что для $d \geq 5,9$ мм она принимает наибольшие значения только при одном ориентационном угле $\theta = 0$ (360°), т.е. при условии, когда вектор голографической решетки \vec{K} сонаправлен с кристаллографическим направлением $[001]$ ($\vec{K} \uparrow \uparrow [001]$). Иначе обстоит дело при учете пьезоэффекта (рисунок 2, б). В этом случае максимально возможные значения *коэффициента усиления* во всем исследованном «рабочем» интервале толщины кристалла достигаются уже при двух его ориентационных углах. Графики этих ориентационных углов θ^{max} и соответствующих им азимутов поляризации световых пучков Ψ_0^{max} , при которых для фиксированных значений толщины d кристаллического образца достигаются «первый» и «второй» (по направлению отсчета угла θ) абсолютные максимумы *коэффициента усиления* при учете пьезоэффекта, представлены на рисунке 3.

Из графиков видно, что максимум *коэффициента усиления* предметной световой волны в исследованном кристалле может быть достигнут только при условиях, отличных от $\vec{K} \parallel [001]$ ($\theta = 0$ и 180°) и $\vec{K} \perp [001]$ ($\theta = 90^\circ$ и 270°). При этом изображенные зависимости $\theta^{max}(d)$ и $\Psi_0^{max}(d)$ представляют практический интерес, поскольку могут быть использованы для оптимизации устройств, выполненных на основе исследованного кристалла.

Учтем, что непосредственно сам *коэффициент усиления* может быть значительно увеличен, в частности, за счет повышения интенсивности пучка накачки, изменения пространственного периода голограммы и т.д., что хорошо известно, например, из классических работ [4, 5], и в этой статье не рассматривалось.

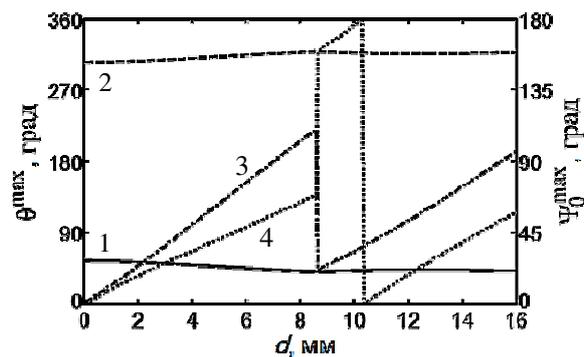


Рисунок 3. – Зависимости θ^{\max} (сплошная линия 1 и штриховая линия 2) и Ψ_0^{\max} (штрихпунктирная линия 3 и пунктирная линия 4) от толщины d кристалла ВГО среза $(\bar{1}\bar{1}0)$:
 1 и 3 – соответствующие значения θ^{\max} и Ψ_0^{\max} для «первого» максимума коэффициента усиления;
 2 и 4 – соответствующие значения θ^{\max} и Ψ_0^{\max} для «второго» максимума коэффициента усиления

Заключение. Таким образом, в рамках данной статьи на примере кристалла ВГО среза $(\bar{1}\bar{1}0)$ толщины 16 мм показана возможность экспериментального получения зависимости коэффициента усиления предметной световой волны от ориентационного угла и толщины фоторефрактивного кристалла. С учетом обратного пьезоэлектрического и фотоупругого эффектов найдены оптимальные значения ориентационных углов кристалла и азимутов линейной поляризации взаимодействующих в нем световых пучков, при выборе которых могут быть достигнуты максимальные коэффициенты усиления предметной световой волны в исследованном кристалле для каждой его толщины.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (задание 1.2.01 Государственной программы научных исследований «Фотоника, опто- и микроэлектроника»), Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Госзадания на 2017–2019 годы (проект № 3.8898.2017/8.9) и РФФИ (грант 16-29-14046-офи_м).

ЛИТЕРАТУРА

1. Photorefractive moiré-like patterns for the multifringe projection method in Fourier transform profilometry / M.E. Oliveira [et al.] // Appl. Opt. – 2016. – Vol. 55, № 5. – P. 1048–1053.
2. Photorefractive digital holographic microscopy applied in microstructures analysis / I.V. Brito [et al.] // Opt. Comm. – 2013. – Vol. 286, № 1. – P. 103–110.
3. Optical reconstruction of non-diffracting beams via photorefractive holography / T.A. Vieira [et al.] // Appl. Phys. B. – 2017. – V. 123, № 4. – P. 134–1–10.
4. Петров, М.П. Фоторефрактивные кристаллы в когерентной оптике / М.П. Петров, С.И. Степанов, А.В. Хоменко. – СПб. : Наука. С.-Петербург. отд-ние, 1992. – 320 с.
5. Yeh, P. Introduction to photorefractive nonlinear optics / P. Yeh. – New York : Wiley, 1993. – 410 p.
6. Шепелевич, В.В. Запись и считывание голограмм в кубических гиротропных фоторефрактивных кристаллах (Обзор) / В.В. Шепелевич // Журнал прикладной спектроскопии. – 2011. – Т. 78, № 4. – С. 493–515.
7. Dynamic holography with none plane waves in sillenites / E. Shamonina [et al.] // Opt. Quant. Electron. – 1996. – Vol. 28, № 1. – P. 25–42.
8. Investigation of two-wave mixing in arbitrary oriented sillenite crystals / E. Shamonina [et al.] // Appl. Phys. B. – 1997. – Vol. 64, № 1. – P. 49–56.
9. Optical activity in photorefractive $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ / E. Shamonina [et al.] // Opt. Comm. – 1998. – Vol. 146, № 1–6. – P. 62–68.
10. Экспериментальное исследование ориентационной зависимости дифракционной эффективности пропускающих голограмм от толщины кристалла $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ / А.В. Макаревич [и др.] // Письма в ЖТФ. – 2015. – Т. 41, № 19. – С. 46–54.

11. Шепелевич, В.В. Смешанные пропускающие голограммы в фоторефрактивном пьезокристалле $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ / В.В. Шепелевич, А.В. Макаревич, С.М. Шандаров // Письма в ЖТФ. – 2014. – Т. 40, № 22. – С. 83–89.
12. Акустические кристаллы / А.А. Блисталов [и др.] ; под ред. М.П. Шаскольской. – М. : Наука, 1982. – 632 с.
13. Ропот, П.И. Определение фотоупругих постоянных оптически активных кубических кристаллов поляризационным методом / П.И. Ропот // Оптика и спектроскопия. – 1991. – Т. 70, № 2. – С. 371–375.
14. Photorefractive properties of $(1\bar{1}0)$ and (111) -cut sillenite crystals when external electric field is applied along the direction of the optimum diffraction efficiency / N.C. Deliolanis [et al.] // Appl. Phys. B. – 2002. – Vol. 75, № 1. – P. 67–73.

Поступила 25.09.2018

EXPERIMENTAL STUDY AND THEORETICAL OPTIMIZATION OF THE SUBJECT LIGHT WAVE GAIN IN $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ CRYSTAL

A. MAKAREVICH, V. SHEPELEVICH, S. SHANDAROV

The dependence of the gain of the subject light wave on the orientation angle and the thickness of the $(\bar{1}\bar{1}0)$ -cut $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ crystal was studied experimentally using only one crystal sample. It is shown that theoretical interpretation of the experimental data is possible only with simultaneous accounting of the inverse piezoelectric and photoelastic effects in addition to the electro-optical effect and optical activity traditionally considered in this crystal. The theoretical optimization of the gain of the subject light wave in this crystal has been performed.

Keywords: photorefractive crystal, BGO crystal, electro-optical effect, inverse piezoelectric effect, photoelastic effect, optical activity, gain of the subject light wave.

УДК 535.42

САМОДИФРАКЦИЯ ДВУМЕРНЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ С РАЗЛИЧНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ

*канд. физ.-мат. наук, доц. В.В. ДАВЫДОВСКАЯ, д-р физ.-мат. наук, проф. В.В. ШЕПЕЛЕВИЧ
(Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина)*

Представлены теоретические результаты сравнения распространения в линейной изотропной среде в свободном режиме двумерных световых пучков: гауссовых, квадратных и круговых супергауссовых. Детально показана динамика изменения формы световых пучков при их распространении в линейной изотропной среде. Установлено, что существуют значения толщины среды, для которых характерна значительная деформация супергауссова пучка, в связи с чем наблюдается дополнительная самофокусировка супергауссовых пучков, для гауссовых пучков дополнительная самофокусировка не наблюдается. Показаны различия в распространении гауссовых и супергауссовых двумерных световых пучков, отмечены преимущества и недостатки использования квадратных и цилиндрических световых пучков с супергауссовым распределением интенсивности.

Ключевые слова: *линейная изотропная среда, свободный режим, двумерные световые пучки, гауссов и супергауссов профили, деформация, дополнительная самофокусировка, сравнение.*

Введение. В научной литературе много внимания уделено рассмотрению особенностей распространения и взаимодействия гауссовых световых пучков в фоторефрактивных кристаллах (например, в статьях [1–7]). Световые пучки с распределением интенсивности иного вида исследованы в меньшей степени. Однако в настоящее время в публикациях по оптике и фотонике наблюдается все более заметное предпочтение рассмотрению двумерных световых пучков различного профиля в отличие от использования гауссовой модели светового пучка (например, в работах [8, 9]). Для теоретического описания таких пучков часто используется модель супергауссова пучка (например, в работах [10–15]). Однако научные работы, в которых содержится описание процесса распространения супергауссовых пучков в нелинейных средах, появились сравнительно недавно [11–14].

В оптике световых потоков используются как одномерные, так и двумерные модели световых пучков. Для практических применений особенно важными являются результаты исследований распространения и взаимодействия световых пучков с двумерным распределением интенсивности (так называемых двумерных пучков) в фоторефрактивных кристаллах, так как именно такие пучки излучаются большинством оптических квантовых генераторов и не требуется их дополнительного преобразования [3]. Результаты, полученные при исследовании распространения и взаимодействия двумерных световых пучков в фоторефрактивных кристаллах, представлены в ряде работ (например, в [16–18]). В настоящее время количество таких работ продолжает расти, так как в связи с модернизацией ЭВМ повысилась скорость выполнения необходимых расчетов, что способствовало повышению интереса к исследованиям в данной области [1–3, 11, 12]. В ряде статей (например, [10–14]) установлены особенности отдельных видов двумерных световых пучков, в которых распределение интенсивности отлично от гауссова, интересные для дальнейшего изучения и практического применения. В частности, в некоторых работах [10, 19], показано, что двумерные световые пучки с плоским верхом (flat-topped light beams), к которым относятся и супергауссовы пучки, обладают определенными преимуществами по сравнению с гауссовыми пучками. Например, при распространении в свободном режиме их расходимость в ближней зоне может быть значительно меньше расходимости гауссовых пучков, и квазисолитонный режим распространения с использованием внешнего электрического поля достигается в них при меньшей напряженности электрического поля, чем в случае гауссовых пучков. Но все же двумерные пучки с распределением интенсивности, отличным от гауссова, остаются исследованными в меньшей степени и интересными будут результаты сравнения распространения в линейной изотропной среде в свободном режиме двумерных световых пучков: гауссовых, квадратных и круговых супергауссовых световых пучков с целью установления различий

Теория. В плоскости перетяжки лазерного пучка распределение относительной интенсивности $I(x, y)$ в его поперечном сечении описывается функцией Гаусса

$$I(x, y) = I_{\max} \exp \left[\frac{-(x^2 + y^2)}{2 \cdot r_0^2} \right], \quad (1)$$

где $I_{\max} = I_0/I_d$ – максимальная относительная интенсивность пучка при входе в кристалл,
 I_0 – максимальная интенсивность гауссова пучка,

I_d – темновая интенсивность, включающая фоновую засветку;

r_0 – радиус перетяжки входного светового пучка.

Относительные интенсивности квадратного и кругового супергауссовых пучков описываются выражениями (2) и (3) соответственно (например, [20–23]):

$$I(x, y) = I_{\max} \exp \left[\frac{-(x^N + y^N)}{2 \cdot r_0^N} \right], \quad (2)$$

$$I(x, y) = I_{\max} \exp \left[\frac{-(x^2 + y^2)^{\frac{N}{2}}}{2 \cdot r_0^N} \right], \quad (3)$$

где N – порядок супергауссова пучка;

r_0 – характерный размер пучка.

При исследовании распространения пучка в свободном режиме удобно отсчитывать координату z в единицах дифракционной длины. Дифракционная длина светового пучка z_R определяется выражением из [23]

$$z_R = \frac{\pi \cdot r_0^2}{\lambda}, \quad (4)$$

где λ – длина световой волны.

Численное моделирование распространения двумерных световых пучков в линейной изотропной среде в свободном режиме. Для моделирования распространения двумерных световых пучков в среде были использованы следующие параметры: $n_0 = 2,33$, $\lambda = 0,5145$ мкм, характерный размер входных пучков $r_0 = 15$ мкм.

Рассмотрим распространение гауссова светового пучка, квадратных и круговых супергауссовых световых пучков в слое линейной изотропной среды толщиной 7 мм, заключенном и интервале $0 \leq z \leq 5z_R$ (рисунок 1). В рассматриваемом случае $z_R = 1,4$ мм.

Двумерный гауссов пучок в указанной области распространяется практически без изменения формы (имеет место небольшое распыливание). При этом значения максимальной относительной интенсивности пучка и интенсивности в центре пучка одинаковы (кривые 5 и 6 на рисунке 1).

Анализируя распространение супергауссовых световых пучков, среду условно можно разбить на четыре характерных промежутка: **I**, **II**, **III** и **IV** (рисунок 1).

В промежутке **I**, заключенном в интервале $0 \leq z \leq 0,8z_R$, значения максимальной относительной интенсивности и интенсивности в центре супергауссовых пучков не совпадают. Это обусловлено тем, что в области **I** супергауссовы пучки испытывают значительную деформацию, в результате которой в краевой зоне супергауссовых пучков появляются дополнительные максимумы.

В интервале $0,8z_R \leq z \leq 1,5z_R$ (промежуток **II** на рисунке 1) различий между значениями максимальной относительной интенсивности супергауссовых пучков и значениями интенсивности на их оси практически не наблюдается. Супергауссов пучок кругового сечения в этом промежутке фокусируется в большей степени, чем пучок квадратного сечения, но при $z \approx 1,2z_R$ максимальные относительные интенсивности обоих супергауссовых пучков становятся равными. На рисунке 1 эта точка отмечена буквой **A**.

Запас энергии в супергауссовом пучке квадратного сечения больше, чем в пучке кругового сечения одного с ним характерного размера, поэтому, анализируя распространение супергауссовых пучков в среде при $1,5z_R \leq z \leq 4z_R$, заметим, что максимальная относительная интенсивность пучка квадратного сечения больше, чем для пучка кругового сечения. Кроме того, можно отметить также, что супергауссовы пучки начинают расплываться (промежуток **III** на рисунке 1). В этом промежутке выделим две точки, в которых максимальная интенсивность супергауссовых пучков становится равной интенсивности гауссова пучка. Для супергауссова пучка кругового сечения это происходит при $z \approx 2,8z_R$ (точка **B** на рисунке 1), для пучка квадратного сечения – при $z \approx 3,9z_R$ (точка **C** на рисунке 1).

При $z > 4z_R$ (промежуток **IV** на рисунке 1) супергауссовы пучки продолжают расплываться и начинают пульсировать в пространстве (для пучка квадратного сечения это проявляется в большей мере).

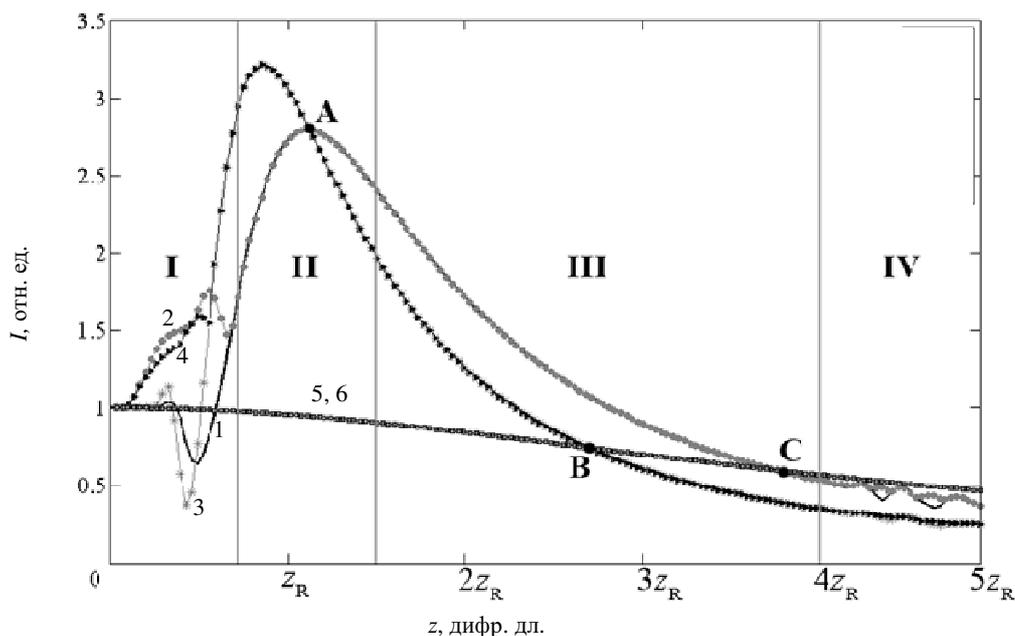


Рисунок 1. – Зависимость относительной интенсивности пучков от координаты z , выраженной в дифракционных длинах: 1, 3, 5 – интенсивность в центре поперечного сечения пучков: супергауссовых квадратного и кругового, гауссова пучка соответственно; 2, 4, 6 – максимальная интенсивность в плоскости поперечного сечения тех же пучков соответственно

Наиболее интересен для рассмотрения промежутки $0 \leq z \leq 2z_R$, так как именно в нем наблюдается значительная деформация и дополнительная самофокусировка супергауссовых световых пучков.

Проведем сравнение распространения двумерного гауссова пучка и супергауссовых световых пучков квадратного и кругового поперечного сечения. Будем рассматривать сечения каждого пучка плоскостью, проходящей параллельно его оси симметрии через максимум интенсивности, и сечения пучков, проходящие через центр пучка, и сравнивать форму пучков. В целях исследования изменения формы пучков будем сравнивать также вид пучков при наблюдении навстречу пучку. При выявлении особенностей изменения формы пучков в процессе их распространения в среде зависимость между цветом и значением относительной интенсивности светового пучка определялась автоматически в соответствии со шкалой, изображенной на рисунке 2.

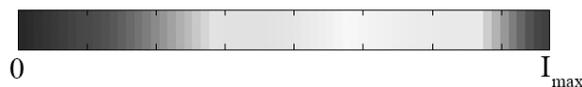


Рисунок 2. – Шкала соответствия между цветом и значением относительной интенсивности светового пучка

На рисунке 3 видно, что на входе в среду гауссов и супергауссовы пучки имеют одинаковое максимальное значение относительной интенсивности в центре пучка. Однако при $0 \leq z \leq 0,5z_R$ (рисунок 3, а–з) супергауссов пучок квадратного сечения деформируется и в его поперечном сечении вблизи краев имеется четыре максимума, в которых значения относительной интенсивности превышают единицу. Для пучка квадратного сечения сохраняется симметрия как вдоль оси OX , так и вдоль оси OY . Одинаковые сечения, проходящие через максимумы, отмечены на графиках сплошной линией, пунктирной линией отмечено сечение плоскостью, параллельной плоскости XOZ и проходящей через середину пучка.

Симметрия супергауссова пучка кольцевого сечения нарушается. При его самофокусировке образуется кольцо, на котором много «шумовых помех», и наблюдается только два максимума (сплошные линии). Подобный «коллапс» пучка кольцевого сечения в керровской среде был получен авторами работы [7].

Гауссов пучок в промежутке $0 \leq z \leq 0,5z_R$ распространяется практически без изменения формы.

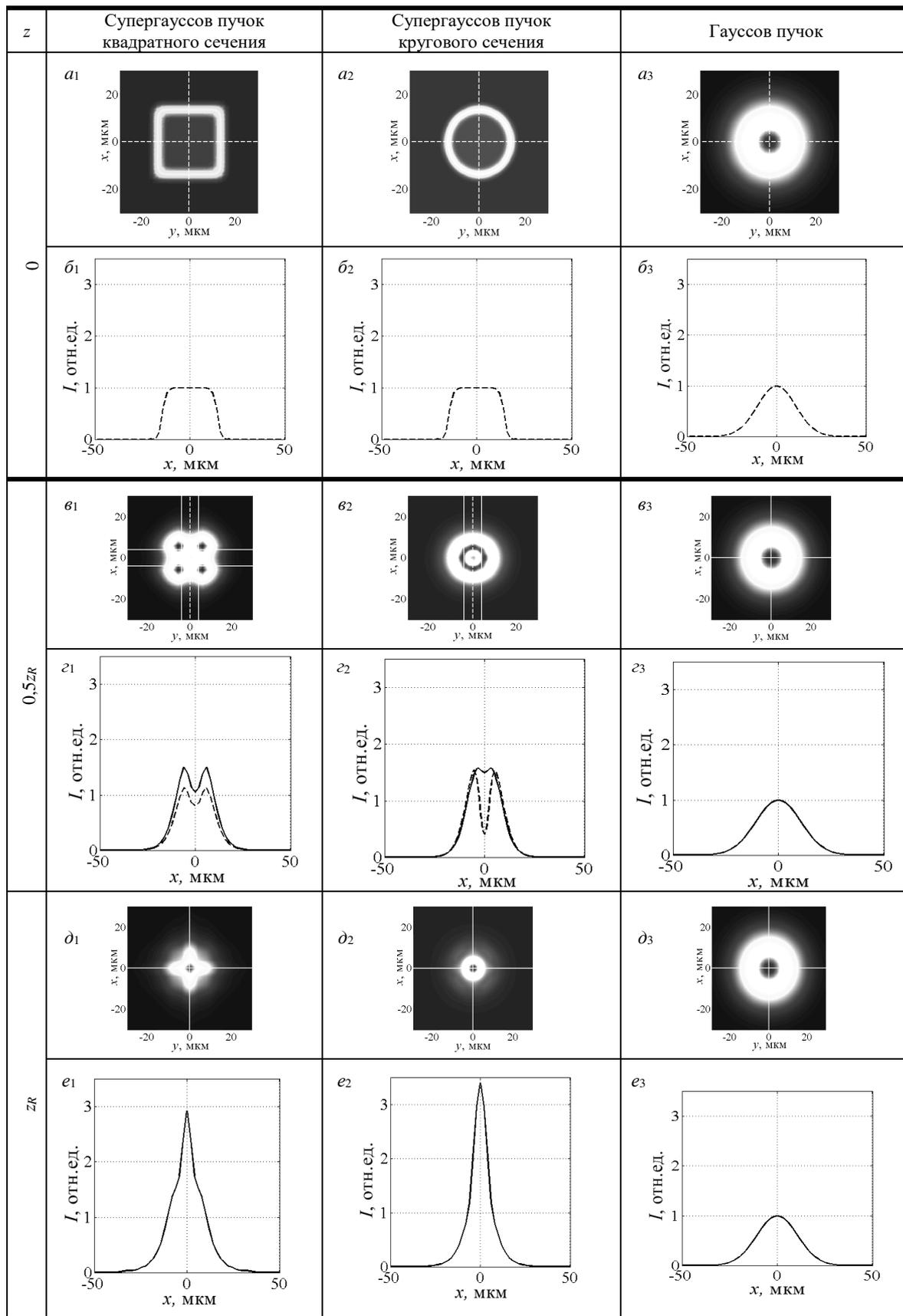


Рисунок 3. – Динамика изменения формы пучков при их распространении в свободном режиме: пунктирная линия – сечение пучков плоскостью, проходящей через их центр, сплошные линии – сечения пучков плоскостью, проходящей через максимумы интенсивности

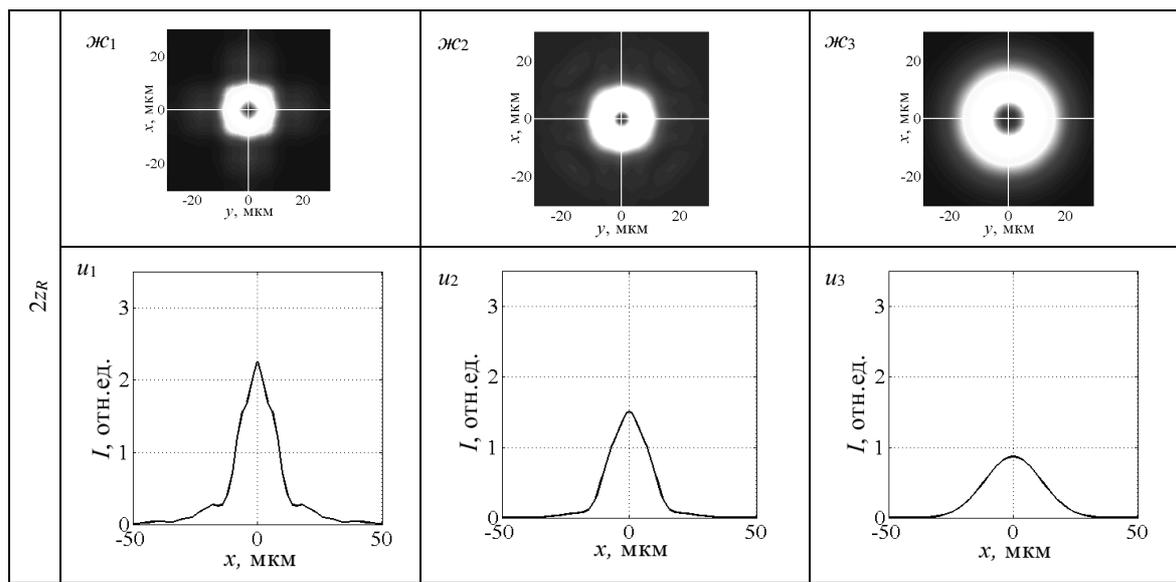


Рисунок 3. – Окончание (см. с. 57)

При $z_R \leq z \leq 2z_R$ (рисунок 3, $\partial-u$) наблюдается дополнительная самофокусировка супергауссовых световых пучков и значения относительной интенсивности в центре пучка совпадают с максимальным значением относительной интенсивности. Пучок кольцевого сечения фокусируется сильнее пучка, имеющего квадратное сечение. Это может быть обусловлено тем, что при распространении в линейной изотропной среде супергауссова пучка квадратного сечения характерными особенностями являются его деформация и появление максимумов в углах сечения пучка (рисунок 3, ∂_1-z_1), а изменение формы пучка кольцевого сечения проявляется в изменении отношения радиусов ограничивающих его окружностей (рисунок 3, ∂_2-z_2). Гауссов пучок в интервале $z_R \leq z \leq 2z_R$ начинает рассеиваться (рисунок 3, u_3).

При $z > 2z_R$ супергауссовы пучки, так же как и гауссов, рассеиваются, а при $z > 5z_R$ супергауссовы пучки начинают пульсировать в пространстве.

Закключение. В работе показано, что в ближней зоне дифракции супергауссовы пучки квадратного сечения в начальной зоне слоя распространяются, практически сохраняя прямоугольный профиль, и их дифракция наблюдается только на краях пучков.

По мере углубления в слой супергауссовы пучки сильно деформируются и запас энергии, который они имели вследствие наличия у них «плоского верха», обуславливает их дополнительную самофокусировку.

Эта особенность супергауссовых световых пучков может быть полезна при исследовании квазисолитонного режима, так как при их распространении на небольшие расстояния этот режим может быть достигнут при меньших напряженностях внешнего электрического поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Elliptical solitons in nonconventionally biased photorefractive crystals / P. Zhang [et al.] // Opt. Exp. – 2007. – Vol. 2, № 15. – P. 536–544.
2. Imbrock, J. Spatial photorefractive solitons with picosecond laser pulses / J. Imbrock, C. Heese, C. Denz // Appl. Phys. B. – 2009. – Vol. 95, № 5. – P. 261–268.
3. Ассельборн, С.А. Изменение показателя преломления фоторефрактивного кристалла при формировании пространственного экранированного солитона / С.А. Ассельборн, Н.Д. Кундикова, И.В. Новиков // Квантовая электроника. – 2010. – Т. 40, № 2. – С. 127–129.
4. Spatial solitons in photorefractive $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ with drift mechanism of nonlinearity / M.D. Iturbe Castillo [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 1994. – Vol. 64. – P. 408–410.
5. Влияние оптической активности на распространение двумерных пространственных солитонов в кубических фоторефрактивных кристаллах / В.В. Шепелевич [и др.] // Квантовая электроника. – 2007. – Т. 37, № 4. – С. 353–357.
6. Spatial solitons in photorefractive media / M. Segev [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1992. – Vol. 68. – P. 923–926.
7. Collapse dynamics of super-Gaussian beams / T.D. Grow [et al.] // Opt. Exp. – 2006. – Vol. 14. – P. 5468–5475.

8. Observation of topological transformations of optical vortices in two-dimensional photonic lattices / A. Bezryadina [et al.] // Opt. Exp. – 2006. – Vol. 14, № 18. – P. 317–327.
9. Perturbation of super-Gaussian optical solitons in dispersion-managed fibers / R. Kohl [et al.] // Mathematical and Computer Modelling – 2009. – Vol. 49. – P. 1700–1709.
10. Dickey, F.M. Laser beam shaping theory and techniques / F.M. Dickey, S.C. Holswade. – New York : Marcel Dekker Inc., 2000. – 428 p.
11. Yajun, L. Flat-topped light beams with non-circular cross-sections / L. Yajun // Journal of modern optics. – 2003. – Vol. 50. – P. 1957–1966.
12. Collapse dynamics of super-Gaussian beams / T.D. Grow [et al.] // Opt. Exp. – 2006. – Vol. 14. – P. 5468–5475.
13. Dorrer, C. Design and Analysis of Binary Beam Shapers Using Error Diffusion / C. Dorrer, J.D. Zuegel // J. Opt. Soc. Am. B. – 2007. – Vol. 24. – P. 1268–1275.
14. Henderson, B.G. Laser Beam Shaping with Membrane Deformable Mirrors / B.G. Henderson, J.D. Mansell // Proc. SPIE. – 2008. – Vol. 10. – P. 7093–7102.
15. Гиргель, С.С. Скалярные парааксиальные двумерные гауссоподобные световые пучки / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 7–11.
16. Zozulya, A.A. Propagation of an optical beam in a photorefractive medium in the presence of a photogalvanic nonlinearity or an externally applied electric field // A.A. Zozulya, D.Z. Anderson // Phys. Rev. A. – 1995. – Vol. 51. – P. 1520–1532.
17. Interaction of spatial photorefractive solitons / W. Królikowski [et al.] // Quantum Semiclass. Opt. – 1998. – Vol. 10. – P. 823–837.
18. Stepken, A. Anisotropic interaction of three-dimensional spatial screening solitons / A. Stepken, F. Kaiser, M.R. Belić // J. Opt. Soc. Am. B. – 2000. – Vol. 17. – P. 68–77.
19. Preeza, N.C. High power infrared super-Gaussian beams: generation, propagation and application / N.C. Preeza, A. Forbes, L.R. Bothab // Proc. of SPIE. – 2009. – Vol. 7131. – P. 71311E–1 – 71311E–8.
20. Interferometric measurements of the photoinduced refractive index profiles in photorefractive $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ / G.S. Garcia Quirino [et al.] // Opt. Commun. – 1996. – Vol. 123. – P. 597–602.
21. Roychoudhuri, C. The Nature of Light: What is a Photon? / C. Roychoudhuri, A.F. Kracklauer, K. Creath // Optical Science and Engineering. – 2008. – (Taylor & Francis Inc.: CRC Press, 2008).
22. Design and Evaluation of Light Spread Function for Area-Adaptive LCD System / Y.-K. Cheng [et al.] // J. Display Technol. – 2009. – Vol. 5, № 2. – P. 66–71.
23. Dickey, F.M. Laser beam shaping theory and techniques / F.M. Dickey, S.C. Holswade. – New York : Marcel Dekker Inc., 2000. – 428 p.

Поступила 15.06.2018

SELF-DIFFRACTION OF TWO-DIMENSIONAL LIGHT BEAMS WITH DIFFERENT INTENSITY DISTRIBUTIONS

V. DAVYDOUSKAYA, V. SHEPELEVICH

Presented theoretical results of the comparison of the propagation in a linear isotropic medium in a free regime of two-dimensional light beams: Gaussian, square and circular super-Gaussian beams.

Shown in detail the dynamics of the change in the shape of light beams during their propagation in a linear isotropic medium.

It is established that there exist values of the medium thickness for which a significant deformation of the super-Gaussian beam is characteristic, in connection with this additional self-focusing of super-Gaussian beams is observed, additional self-focusing is not observed for Gaussian beams.

Shown differences in the propagation of Gaussian and super-Gaussian 2D light beams, and the advantages and disadvantages of using square and cylindrical light beams with a super-Gaussian intensity distribution are noted.

Keywords: *linear isotropic medium, free regime, two-dimensional light beams, Gaussian, super-Gaussian profiles, deformation, additional self-focusing, comparison.*

МАТЕМАТИКА

УДК 517.6:517.958

**К ВОПРОСУ О РЕДУКЦИИ НЕОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ
ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ**

канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет);

Н.К. ВОЛОСОВА

(Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана)

Предложен алгоритм решения общей начально-краевой задачи неоднородного волнового уравнения на отрезке с неоднородными краевыми условиями. Определено понятие краевой функции. Исходная задача с неоднородными краевыми условиями редуцируется к двум простым модифицированным задачам, т.е. к задаче с модифицированной правой частью и к задаче с модифицированными начальными условиями, но с однородными граничными условиями. Получено разложение невязки задачи в самом общем виде для оптимального параметра аппроксимации разностной схемы $z = 1$. Формула невязки определяется производными четного порядка по времени и координате от правой части уравнения и производными четного порядка по времени от краевой функции. Написана программа на основе алгоритма редукции, решены точно и численно три тестовых примера, показывающие, что неоднородные краевые условия Дирихле сохраняют все свойства задачи с однородными краевыми условиями при использовании модифицированных условий и краевой функции.

Ключевые слова: краевая функция, модифицированные начальные условия и правая часть уравнения, неоднородно-краевая задача волнового уравнения на отрезке, согласование начальных и краевых условий.

Введение. Рассмотрим произвольную неоднородную начально-краевую задачу для волнового уравнения на отрезке с краевыми условиями Дирихле. Обычно задачи математической физики решают для однородных граничных условий, подразумевая, что возможна редукция задачи с неоднородными граничными условиями к задаче с однородными граничными условиями [1–3, 5, 14]. С другой стороны, отметим важность особенностей граничных условий в задачах математической физики, если границы имеют сложную геометрию или граничные функции принадлежат к более слабому классу функций, например, классу кусочно-непрерывных функций на отрезке. Неоднородная краевая задача эквивалентна однородно-краевой задаче с модифицированными неоднородными начальными условиями и модифицированной правой частью волнового уравнения, тогда в случае кусочно-непрерывных краевых функций можно использовать методы управляемых систем ОДУ [9, 10].

Участники семинара «Возобновляемые источники энергии» в МГУ, основанного профессором В.В. Алексеевым, д. ф. м. н., академиком РАН, считали, что в задачах математической физики определяющую роль играют граничные условия. В данной статье, продолжающей работу [1] на случай неоднородных краевых условий на отрезке, волновое уравнение на отрезке рассматривается в самой общей постановке задачи.

Отметим также, что уравнения математической физики, используемые в данной работе и в работах [1, 5], решаемые предложенными в них алгоритмами с двойной точностью, открывают путь для применения уравнений математической физики в совершенно новой области – стеганографии. Метод впервые предложен Н.К. Волосовой, сотрудником МГТУ им. Н.Э. Баумана, которой принадлежит смелая идея отображения пространства кусочно-непрерывных функций в пространство бесконечно-дифференцируемых функций на прямоугольнике, применяя координатные функции специального вида, но при этом сохраняются особенности постановки краевой задачи для уравнения Пуассона [4, 6–8].

В уравнениях математической физики, являющихся следствием вариационных методов и методов решения ОДУ, могут использоваться новые результаты, полученные в работах [11–13].

Постановка задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу для неоднородного волнового уравнения на отрезке:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in (a, b), \quad t \in (0, T) \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [a, b] \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [a, b] \\ u(a, t) = \mu_1(t), \quad u(b, t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T], \end{cases} \quad (1)$$

где a^2 – квадрат фазовой скорости волны;
 $f(x, t)$ – неоднородная правая часть волнового уравнения на отрезке $[a, b]$;
 $\varphi(x), \psi(x)$ – неоднородные начальные условия;
 $\mu_1(t), \mu_2(t)$ – неоднородные граничные условия;
 (x, t) – координата и время соответственно.

Проведем линейную редукцию задачи (1). Построим простейшую линейную функцию, удовлетворяющую краевым условиям:

Определение 1. Пусть $\partial\Omega$ – кусочно-гладкая граница области Ω , $\bar{\Omega}$ – компакт. Дважды непрерывно дифференцируемую функцию $V(\Omega, T) \in C^2(\Omega, T)$, $V : \Omega \times T \rightarrow R^1$, непрерывную на границе области $V(\partial\Omega) \in C(\partial\Omega)$ и определенную во всей области задачи $\bar{\Omega}$:

$$V(x, t) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\mu_2(t) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)\mu_1(t), \quad (2)$$

назовем **краевой функцией** для исходной задачи (1), если

$$1) \quad V(a, t) = \mu_1(t), \quad V(b, t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T], \quad V(\partial\Omega_i, t) = \mu_i(r_i, t), \quad i = \bar{1, l},$$

то есть граничная функция $V(\Omega, t)$, на i -й компоненте $\partial\Omega_i$ границы с переменными r_i , равна i -й функции граничных условий $V(\partial\Omega_i, t) = \mu_i(r_i, t)$, $i = \bar{1, l}$, где l – параметр связности;

$$2) \quad V(x, t) \text{ является одним из 3 слагаемых численного решения задачи (1) в замкнутой области } \bar{\Omega}.$$

Преимущество линейной краевой функции $V(x, t)$ по координате x заключается в том что, $a^2 \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} = 0$, т.е. краевая функция дает нулевой вклад в волновое уравнение задачи (1).

Замечание 1. Задание краевой функции в виде (2) для задачи (1) не единственно, например, определению (1) удовлетворяет функция $V(x, t) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n \mu_2(t) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^m \mu_1(t)$, $n, m \in N$.

Утверждение 1. На гладких элементах границы размерности $\dim r_i \geq 1$ существует производная краевой функции по нормали n_i и вдоль касательного вектора к границе τ , равная соответствующим производным от граничных условий:

$$\frac{\partial \mu_i(r_i, t)}{\partial \tau} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial \tau}, \quad V \in C_\tau^1(\partial\Omega_i), \quad \frac{\partial \mu_i(r_i, t)}{\partial n_i} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial n_i}, \quad V \in C_n^1(\partial\Omega_i), \quad i = \bar{1, l}.$$

Доказательство. В силу того, что краевая функция дважды дифференцируема по определению 1, разложим краевую функцию в ряд Тейлора, сохраняя слагаемые со вторыми производными включительно

$$\begin{aligned} V(r_i + \varepsilon n_i + \delta \tau, t) &= V(r_i + \varepsilon n_i, t) + \delta \frac{\partial V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial \tau} + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial \tau^2} \Leftrightarrow (\theta \in (0, 1)) \\ &\Leftrightarrow \frac{V(r_i + \varepsilon n_i + \tau \delta, t) - V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\delta} = \frac{\partial V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial \tau} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial \tau^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} \frac{V(r_i + \varepsilon n_i + \tau \delta, t) - V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\delta} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial \tau} = \frac{\partial \mu_i(r_i, t)}{\partial \tau} \Leftrightarrow V(\partial\Omega_i) \in C_\tau^1(\partial\Omega_i), \end{aligned}$$

где $r_i + \varepsilon n_i + \tau \delta$ – точка, удаленная от граничной точки r_i по внутренней нормали $n_i(r_i)$ на расстояние ε и вдоль касательного вектора $\tau(r_i)$ в граничной точке на расстояние δ , $n_i(r_i) \perp \tau(r_i)$.

Аналогично получим

$$\begin{aligned} V(r_i + \varepsilon n_i + \delta n_i, t) &= V(r_i + \varepsilon n_i, t) + \delta \frac{\partial V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial n_i} + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial n_i^2} \Leftrightarrow (\theta \in (0, 1)) \\ &\Leftrightarrow \frac{V(r_i + \varepsilon n_i + \delta n_i, t) - V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\delta} = \frac{\partial V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial n_i} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial n_i^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} \frac{V(r_i + \varepsilon n_i + \delta n_i, t) - V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\delta} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial V(r_i + \varepsilon n_i, t)}{\partial n_i} = \frac{\partial \mu_i(r_i, t)}{\partial n_i} \Leftrightarrow V(\partial \Omega_i) \in C_n^1(\partial \Omega_i). \end{aligned}$$

В точках нарушения гладкости границы векторы $n_i(r_i)$ и $\tau(r_i)$ не определены, не определены и $\frac{\partial \mu_i(r_i, t)}{\partial n_i}$, $\frac{\partial \mu_i(r_i, t)}{\partial \tau}$, поэтому можно требовать только более слабых условий для краевой функции на границе $V(\partial \Omega_i, t) = \mu_i(r_i, t)$, $V(\partial \Omega) \in C(\partial \Omega)$. Доказательство утверждения 1 завершено.

Решение системы уравнений (1) с краевой функцией (2), согласно определению 1, разложим в сумму

$$u(x, t) = V(x, t) + U(x, t). \quad (3)$$

Подставим формулу (3) в систему уравнений (1):

$$\begin{cases} U_{tt} + V_{tt} = a^2(U_{xx} + V_{xx}) + f(x, t) = a^2 U_{xx} + f(x, t), & x \in (a, b), t \in (0, T) \\ V(x, 0) + U(x, 0) = \varphi(x), & x \in [a, b] \\ V_t(x, 0) + U_t(x, 0) = \psi(x), & x \in [a, b] \\ V(a, t) = \mu_1(t), U(a, t) = 0, V(b, t) = \mu_2(t), U(b, t) = 0, & t \in [0, T]. \end{cases}$$

Выражая из последней системы уравнений неизвестную функцию $U(x, t)$, получим

$$\begin{cases} U_{tt} = a^2 U_{xx} - V_{tt} + f(x, t) = a^2 U_{xx} - \left(\frac{x-a}{b-a}\right) \mu_2''(t) - \left(\frac{b-x}{b-a}\right) \mu_1''(t) + f(x, t), & x \in (a, b), t \in (0, T) \\ U(x, 0) = \varphi(x) - V(x, 0) = \varphi(x) - \left(\frac{x-a}{b-a}\right) \mu_2(0) - \left(\frac{b-x}{b-a}\right) \mu_1(0), & x \in [a, b] \\ U_t(x, 0) = \psi(x) - V_t(x, 0) = \psi(x) - \left(\frac{x-a}{b-a}\right) \mu_2'(0) - \left(\frac{b-x}{b-a}\right) \mu_1'(0), & x \in [a, b] \\ U(a, t) = 0, U(b, t) = 0, & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (4)$$

Как видно из системы уравнений (4), она линейна относительно $U(x, t)$, что дает возможность провести редукцию линейной задачи $U(x, t) = U_1(x, t) + U_2(x, t)$:

$$\begin{cases} U_{1tt} = a^2 U_{1xx} - \left(\frac{x-a}{b-a}\right) \mu_2''(t) - \left(\frac{b-x}{b-a}\right) \mu_1''(t) + f(x, t), & x \in (a, b), t \in (0, T) \\ U_1(x, 0) = 0, & x \in [a, b] \\ U_{1t}(x, 0) = 0, & x \in [a, b] \\ U_1(a, t) = 0, U_1(b, t) = 0, & t \in [0, T], \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} U_{2tt} = a^2 U_{2xx}, & x \in (a, b), t \in (0, T) \\ U_2(x, 0) = \varphi(x) - \left(\frac{x-a}{b-a}\right) \mu_2(0) - \left(\frac{b-x}{b-a}\right) \mu_1(0), & x \in [a, b] \\ U_{2t}(x, 0) = \psi(x) - \left(\frac{x-a}{b-a}\right) \mu_2'(0) - \left(\frac{b-x}{b-a}\right) \mu_1'(0), & x \in [a, b] \\ U_2(a, t) = 0, U_2(b, t) = 0, & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (6)$$

Непосредственно подстановкой убеждаемся, используя формулу $U(x, t) = U_1(x, t) + U_2(x, t)$, что построчно сумма соответствующих уравнений систем (5) и (6) дает такое же уравнение из системы урав-

нений (4), в той же строке. То есть линейная редукция задачи (4) свелась к решению задач (5) и (6), а сумма решений задач (5) и (6) равна решению системы уравнений (4) ввиду ее линейности.

Таким образом, исходная задача (1) с неоднородными граничными условиями имеет решение $u(x, t) = V(x, t) + U_1(x, t) + U_2(x, t)$, где краевая функция $V(x, t)$ определена формулой (2) и на концах отрезка равна граничным условиям в (1), а $U_1(x, t), U_2(x, t)$ – решения линейных систем уравнений (5) и (6).

Отметим, что в работе [1, формулы (15) (16), (18), (19), (22), (24)] предложен алгоритм инициализации задачи на втором временном слое по начальным условиям задачи (1). Предложен и алгоритм для численного решения задач (5), (6) в [1, формулы (20), (27)] с однородными краевыми условиями на основном временном отрезке с бесконечным порядком аппроксимации путем выбора оптимального параметра аппроксимации разностной схемы, а также алгоритм масштабирования задачи, сокращающий число элементарных математических операций в [1, формулы (21), (28)] в l^2 раз.

Задача (5) имеет однородные условия, но волновое уравнение содержит модифицированную правую часть, измененную краевыми условиями задачи (1). По сравнению с задачей (1), задача (6) имеет однородное уравнение и однородные краевые условия, но начальные условия модифицированы краевыми условиями исходной задачи (1). Таким образом, мы свели общую задачу (1) с неоднородными краевыми условиями к двум известным задачам (5), (6) с модифицированной правой частью волнового уравнения и модифицированными начальными условиями соответственно. Но задачи (5), (6) решены алгоритмами, предложенными в работе [1]. Тем не менее нужно подробнее рассмотреть особенности разностных задач (8), (9).

Для создания численного алгоритма неоднородной краевой задачи по аналогии с формулой (2) построим дискретный аналог краевой функции на равномерной сетке для неоднородной краевой задачи:

$$V_m^n = V(x_m, t_n) = \left(\frac{x_m - a}{b - a}\right) \mu_2(t_n) + \left(\frac{b - x_m}{b - a}\right) \mu_1(t_n) = \left(\frac{mh}{b - a}\right) \mu_2(n\tau) + \left(\frac{b - a - mh}{b - a}\right) \mu_1(n\tau), \quad (7)$$

$$m = \overline{0, M}, \quad n = \overline{0, N}, \quad h = \frac{(b - a)}{M}, \quad \tau = \frac{T}{N}, \quad x_m = a + mh, \quad t_n = n\tau.$$

Используя вспомогательную функцию (7), аналогично задачам (5), (6) получим их разностный аналог с модифицированными неоднородными условиями (для шаблона крест)

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{U_{1m}^{n+1} + U_{1m}^{n-1} - 2U_{1m}^n}{\tau^2} = a^2 \frac{U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - 2U_{1m}^n}{h^2} + \bar{f}(a + mh, n\tau), \quad m = \overline{1, M-1}, \quad n = \overline{1, N-1} \\ & \bar{f}(a + mh, n\tau) = f(a + mh, n\tau) - \left(\frac{mh}{b - a}\right) \mu_2''(n\tau) - \left(\frac{b - a - mh}{b - a}\right) \mu_1''(n\tau) \equiv \bar{f}_m^n, \quad h = \frac{(b - a)}{M}, \quad \tau = \frac{T}{N} \\ & U_{1m}^0 = 0, \quad U_{1M}^0 = 0, \quad m = \overline{0, M} \\ & U_{10}^n = 0, \quad U_{1M}^n = 0, \quad n = \overline{0, N}. \end{aligned} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{U_{2m}^{n+1} + U_{2m}^{n-1} - 2U_{2m}^n}{\tau^2} = a^2 \frac{U_{2m+1}^n + U_{2m-1}^n - 2U_{2m}^n}{h^2}, \quad h = \frac{(b - a)}{M}, \quad \tau = \frac{T}{N}, \quad m = \overline{1, M-1}, \quad n = \overline{1, N-1} \\ & U_{2m}^0 = \bar{\varphi}(a + mh) = \varphi(a + mh) - \left(\frac{mh}{b - a}\right) \mu_2(0) - \left(\frac{b - a - mh}{b - a}\right) \mu_1(0) = \bar{\varphi}_m, \quad m = \overline{0, M} \\ & U_{2M}^0 = 0, \quad \bar{\psi}(a + mh) = \psi(a + mh) - \left(\frac{mh}{b - a}\right) \mu_2'(0) - \left(\frac{b - a - mh}{b - a}\right) \mu_1'(0) = \bar{\psi}_m, \quad m = \overline{0, M} \\ & U_{20}^n = 0, \quad U_{2M}^n = 0, \quad n = \overline{0, N}. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\bar{u}_m^{n+1} + \bar{u}_m^{n-1} - 2\bar{u}_m^n}{\tau^2} = a^2 \frac{\bar{u}_{m+1}^n + \bar{u}_{m-1}^n - 2\bar{u}_m^n}{h^2} + \bar{f}_m^n, \quad h = \frac{(b - a)}{M}, \quad \tau = \frac{T}{N}, \quad m = \overline{1, M-1}, \quad n = \overline{1, N-1} \\ & x_m = a + mh, \quad t_n = n\tau, \quad \bar{f}_m^n = f(a + mh, n\tau) - \left(\frac{mh}{b - a}\right) \mu_2''(n\tau) - \left(\frac{b - a - mh}{b - a}\right) \mu_1''(n\tau) \\ & \bar{u}(a + mh, 0) = \bar{u}_m^0 = \bar{\varphi}(a + mh) = \bar{\varphi}(a + mh) - \left(\frac{mh}{b - a}\right) \mu_2(0) - \left(\frac{b - a - mh}{b - a}\right) \mu_1(0) = \bar{\varphi}_m, \quad m = \overline{0, M} \\ & \bar{u}(a + mh, \tau) = \bar{u}_{m1}^1 \equiv \bar{\varphi}_1(a + mh), \quad m = \overline{0, M}, \quad \bar{\varphi}_1(x) = F(\bar{\varphi}(x), \bar{\psi}(x)) \\ & \bar{u}(a, n\tau) = \bar{u}_0^n = 0, \quad \bar{u}(b, n\tau) = \bar{u}_M^n = 0, \quad n = \overline{0, N} \\ & \bar{\psi}(a + mh) = \bar{\psi}(a + mh) - \left(\frac{mh}{b - a}\right) \mu_2'(0) - \left(\frac{b - a - mh}{b - a}\right) \mu_1'(0) = \bar{\psi}_m, \quad \bar{\varphi}_{1m}(x) = F(\bar{\varphi}_m(x), \bar{\psi}_m(x)). \end{aligned} \right. \quad (10)$$

$$u_m^n = V_m^n + \overline{u_m^n} = V_m^n + U_{1m}^n + U_{2m}^n,$$

где $V_m^n, \overline{u_m^n}, U_{1m}^n, U_{2m}^n$ – решения задач (7), (10), (8) и (9) соответственно.

Второй временной слой $\overline{u_m^2}$, согласно (10), с использованием модифицированных $\overline{\varphi_m}, \overline{\psi_m}$ условий требует задания $\overline{u_m^1}, \overline{u_m^0}$ аналогично формулам (15), (18) из [1, с. 175, 176], связывая три (четыре) последовательных временных слоя. Для однородного волнового уравнения (9) получим систему линейных уравнений с трехдиагональной симметрической матрицей, решаемой методом прогонки с оптимальным параметром аппроксимации $z = 1$ [1, с. 175, формула (15)]:

$$U_{2m-1}^1 - 4U_{2m}^1 + U_{2m+1}^1 = -2\overline{\varphi_m} - 2\tau\overline{\psi_m} \equiv F_m + O(\tau^3), \quad A_m = 1, B_m = 1, C_m = 4, m = \overline{1, M-1}, U_{20}^1 = 0, U_{2M}^1 = 0,$$

формулами прогонки вперед [1, 5]

$$\lambda_m = \frac{B_m}{C_m - A_m \lambda_{m-1}}, v_m = \frac{A_m v_{m-1} - F_m}{C_m - A_m \lambda_{m-1}}, m = \overline{1, M-1}, \lambda_0 = 0, v_0 = U_{20}^1 = 0, \lambda_M = 0, v_M = U_{2M}^1 = 0$$

и формулами прогонки назад в [1, с. 175, формула (16)]

$$U_{2m}^1 = \lambda_m U_{2m+1}^1 + v_m, m = \overline{M-1, 1}. \quad (11)$$

Для оптимального параметра $z = 1$, связывая пять последовательных временных слоев, выражая их друг через друга, оставляя в записи только 2 первых слоя, аналогично формуле (18) из [1, с. 176] получим пятидиагональную СЛАУ:

$$U_{2m-2}^1 - \frac{9}{2}U_{2m-1}^1 + 10U_{2m}^1 - \frac{9}{2}U_{2m+1}^1 + U_{2m+2}^1 = \overline{\varphi_m} + \overline{\varphi_{m-1}} + \overline{\varphi_{m+1}} + 3\tau\overline{\psi_m} + O(\tau^4) \equiv F_m + O(\tau^4),$$

$$A_{m1} = 1, A_{m2} = -\frac{9}{2}B_{m1} = -\frac{9}{2}, C_m = -10, B_{m2} = 1, F_m = \overline{\varphi_m} + \overline{\varphi_{m-1}} + \overline{\varphi_{m+1}} + 3\tau\overline{\psi_m}, m = \overline{2, M-2}.$$

Получим аналогично формуле (19) [5; 1, с. 176]) формулы прогонки вперед

$$\lambda_{1m} = \frac{B_{1m} + A_{2m}\lambda_{2m-1} + A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{2m-1}}{C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1}}, \lambda_{2m} = \frac{B_{2m}}{C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1}},$$

$$v_m = \frac{A_{1m}\lambda_{1m-2}v_{m-1} + A_{1m}v_{m-2} + A_{2m}v_{m-1} - F_m}{C_m - A_{1m}\lambda_{1m-2}\lambda_{1m-1} - A_{1m}\lambda_{2m-2} - A_{2m}\lambda_{1m-1}}, m = \overline{2, M-2},$$

$$\lambda_{10} = 0, \lambda_{20} = 0, \lambda_{11} = 0, \lambda_{21} = 0, v_0 = U_{20}^1 = 0,$$

$$v_1 = \overset{(12)}{U}_{21}^1 = \overset{(11)}{U}_{21}^1, v_M = U_{2M}^1 = 0, v_{M-1} = \overset{(12)}{U}_{2M-1}^1 = \overset{(11)}{U}_{2M-1}^1,$$

где запись $\overset{(12)}{U}_{21}^1 = \overset{(11)}{U}_{21}^1$ читается так: значению $\overset{(12)}{U}_{21}^1$ в формуле (12) присваивается старое значение $\overset{(11)}{U}_{21}^1$ из формулы (11).

Тогда формулы прогонки назад аналогично [1, с. 176, формула (19б)] имеют вид

$$\lambda_{1M-1} = 0, \lambda_{2M-1} = 0, \lambda_{1M} = 0, \lambda_{2M} = 0,$$

$$U_{2m}^1 = \lambda_{1m}U_{2m+1}^1 + \lambda_{2m}U_{2m+2}^1 + v_m, m = \overline{M-2, 2}. \quad (12)$$

Проверим, что указанные коэффициенты на границах дают краевые условия Дирихле:

$$\begin{aligned} U_{20}^1 &= \lambda_{10}U_{21}^1 + \lambda_{20}U_{22}^1 + v_0 = U_{20}^1, \quad U_{21}^1 = \lambda_{11}U_{22}^1 + \lambda_{21}U_{23}^1 + v_1 = U_{21}^1, \\ U_{2M-1}^1 &= \lambda_{1M-1}U_{2M}^1 + \lambda_{2M-1}U_{2M+1}^1 + v_{M-1} = U_{2M-1}^1, \quad U_{2M-2}^1 = \lambda_{1M-2}U_{2M-1}^1 + \lambda_{2M-2}U_{2M}^1 + v_{M-2}, \\ U_{2M}^1 &= \lambda_{1M}U_{2M+1}^1 + \lambda_{2M}U_{2M+2}^1 + v_M = U_{2M}^1. \end{aligned}$$

Коэффициенты матриц СЛАУ $A_m = 1, B_m = 1, C_m = 4$ в формулах прогонки (11) и $A_{m1} = 1, A_{m2} = -\frac{9}{2}, B_{m1} = -\frac{9}{2}, C_m = -10, B_{m2} = 1$ в формулах (12), удовлетворяют условию корректности формул прогонки ([1, с. 177, утверждение 3]) и совпадают с аналогичными коэффициентами, корректность которых доказана в работе [1].

Запишем явную разностную схему для решения однородного уравнения, учитывая оптимальный параметр $z = 1$ из [1, с. 178, формула (20)] с бесконечным порядком аппроксимации:

$$U_{2m}^{n+1} = U_{2m+1}^n + U_{2m-1}^n - U_{2m}^{n-1}, n = \overline{2, N}, m = \overline{1, M-1}. \quad (13)$$

Возможен также алгоритм масштабирования (укрупнения) ячеек сетки с параметром $z = 1$ и коэффициентом масштабирования l , сокращающим число и время вычислений в l^2 раз.

Сначала инициализация проводится с шагом τ по времени по формулам (11), а затем по формулам (12), далее по явной формуле (13), с минимальными шагами сетки (h, τ) решается волновое уравнение $U_{2m}^{n+1} = U_{2m+1}^n + U_{2m-1}^n - U_{2m}^{n-1}, n = \overline{2, l}, m = \overline{1, M-1}$ во временном промежутке $t = [2\tau, l*\tau]$. Среди решения в слое $U_2(mh, l*\tau), m = \overline{0, M}$ и среди начального слоя $U_2(mh, 0), m = \overline{0, M}$ выбираются узлы более редкой сетки $x_{m1} = a + h*l*m1, m1 = \overline{0, M/l}$, и решение на редкой сетке $U_2(a + m1*h, 0), U_2(a + m1*h, l*\tau), m1 = \overline{0, M/l}$.

Далее используется формула (13) с крупным вектором шага $(l*h, l*\tau)$

$$1 = z = \tau^2 a^2 / h^2 \Leftrightarrow \tau = h/a, U_{2m1}^{n1+1} = U_{2m1+1}^{n1} + U_{2m1-1}^{n1} - U_{2m1}^{n1-1}, n1 = \overline{2, N/l}, m1 = \overline{1, M/l-1}. \quad (14)$$

Рассмотрим вторую задачу инициализации $z = 1$ для системы уравнений (8) свяжем условия для 3 временных слоев $U_1(x, 0) = \overline{\varphi(x)} \equiv 0, U_{1t}(x, 0) = \overline{\psi(x)} \equiv 0, \overline{f(x, t)} \neq 0$, тогда на этапе инициализации по трем (четырем) временным слоям (формула (22) в работе [1, с. 179]) имеем

$$U_{1m-1}^1 - 4U_{1m}^1 + U_{1m+1}^1 = -\overline{f_{m,1}}\tau^2 + U_{1m}^0 = -\overline{f_{m,1}}\tau^2, A_m = 1, B_m = 1, C_m = 4, F_m = -\overline{f_{m,1}}\tau^2, m = \overline{1, M-1}. \quad (15)$$

Воспользуемся затем формулами прогонки (11) с учетом (15) для решения $U_{1m}^1, m = \overline{1, M-1}, U_{10}^1 = U_{1M}^1 = 0$. Перейдем ко второй задаче инициализации для 4 временных слоев, аналогично формуле (24) из [1, с. 180]:

$$U_{1m-2}^1 - \frac{9}{2}U_{1m-1}^1 + 10U_{1m}^1 - \frac{9}{2}U_{1m+1}^1 + U_{1m+2}^1 = -\left(\overline{f_{m,2}} - \frac{9}{2}\overline{f_{m,1}} + \overline{f_{m-1,1}} + \overline{f_{m+1,1}}\right)\tau^2 + O(\tau^4) \quad (16)$$

с коэффициентами

$$A_{m1} = 1, A_{m2} = -\frac{9}{2}, B_{m1} = -\frac{9}{2}, C_m = -10, B_{m2} = 1, F_m = -\left(\overline{f_{m,2}} - \frac{9}{2}\overline{f_{m,1}} + \overline{f_{m-1,1}} + \overline{f_{m+1,1}}\right)\tau^2, m = \overline{2, M-2},$$

$$\lambda_{10} = 0, \lambda_{20} = 0, \lambda_{11} = 0, \lambda_{21} = 0, v_0 = U_{10}^1 = 0, v_1 = U_{11}^1 = U_{11}^1, v_M = U_{1M}^1 = 0, v_{M-1} = U_{1M-1}^1 = U_{1M-1}^1,$$

используя формулы прогонки (12), получим второй временной слой задачи (8) $U_{1m}^1, m = \overline{0, M}$.

Наконец, нужно написать основную рекуррентную разностную формулу для решения неоднородного уравнения с нулевыми модифицированными начальными условиями. Для параметра $z = 1$ имеем по формуле (25) из [1, с. 180])

$$U_{1m}^{n+1} = U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + \overline{f_{m,n}}\tau^2 + R(U_{1m}^n), n = \overline{2, N}, m = \overline{1, M-1}, \quad (17)$$

$$\overline{f_{m,n}} = f_{m,n} - (V_{m,n})_{tt}, \frac{\partial^2 V_{m,n}}{\partial x^2} = 0.$$

Утверждение 2. Остаточный член погрешности в формуле (17) зависит от правой части волнового уравнения и краевой функции и представим в виде

$$R(U_{lm}^n) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \left(\tau^{2k} \sum_{l=0}^{k-1} a^{2l} \frac{\partial^{2(k-l)} f_{mn}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(k-l-1)}} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\tau^{2k}}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} V_{mn}}{\partial t^{2k}}.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой невязки в общем виде для одномерного волнового уравнения на отрезке, полученной в работе [1, с. 180, формула (26)], с учетом формулы (17), имеем

$$\begin{aligned} U_{lm}^{n+1} \stackrel{z=1}{=} & U_{lm+1}^n + U_{lm-1}^n - U_{lm}^{n-1} + \overline{f_{m,n}} \tau^2 + \frac{2\tau^4}{4!} \left(a^2 \frac{\partial^2 \overline{f_{m,n}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{f_{m,n}}}{\partial t^2} \right) + \frac{2\tau^6}{6!} \left(a^4 \frac{\partial^4 \overline{f_{m,n}}}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^4 \overline{f_{m,n}}}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 \overline{f_{m,n}}}{\partial t^4} \right) + \\ & + \frac{2\tau^8}{8!} \left(a^6 \frac{\partial^6 \overline{f_{m,n}}}{\partial x^6} + a^4 \frac{\partial^6 \overline{f_{m,n}}}{\partial x^4 \partial t^2} + a^2 \frac{\partial^6 \overline{f_{m,n}}}{\partial x^2 \partial t^4} + \frac{\partial^6 \overline{f_{m,n}}}{\partial t^6} \right) + \\ & + \frac{2\tau^{10}}{10!} \left(a^8 \frac{\partial^8 \overline{f_{m,n}}}{\partial x^8} + a^6 \frac{\partial^8 \overline{f_{m,n}}}{\partial x^6 \partial t^2} + a^4 \frac{\partial^8 \overline{f_{m,n}}}{\partial x^4 \partial t^4} + a^2 \frac{\partial^8 \overline{f_{m,n}}}{\partial x^2 \partial t^6} + \frac{\partial^8 \overline{f_{m,n}}}{\partial t^8} \right) + \\ & + \frac{2\tau^{12}}{12!} \left(a^{10} \frac{\partial^{10} \overline{f_{m,n}}}{\partial x^{10}} + a^8 \frac{\partial^{10} \overline{f_{m,n}}}{\partial x^8 \partial t^2} + a^6 \frac{\partial^{10} \overline{f_{m,n}}}{\partial x^6 \partial t^4} + a^4 \frac{\partial^{10} \overline{f_{m,n}}}{\partial x^4 \partial t^6} + a^2 \frac{\partial^{10} \overline{f_{m,n}}}{\partial x^2 \partial t^8} + \frac{\partial^{10} \overline{f_{m,n}}}{\partial t^{10}} \right) + \dots = \\ = & U_{lm+1}^n + U_{lm-1}^n - U_{lm}^{n-1} + \overline{f_{m,n}} \tau^2 + \frac{2\tau^4}{4!} \left(a^2 \frac{\partial^2 \overline{f_{m,n}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{f_{m,n}}}{\partial t^2} \right) + \frac{2\tau^6}{6!} \left(a^4 \frac{\partial^4 \overline{f_{m,n}}}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^4 \overline{f_{m,n}}}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 \overline{f_{m,n}}}{\partial t^4} \right) + \\ & + \frac{2\tau^8}{8!} \left(a^6 \frac{\partial^6 \overline{f_{m,n}}}{\partial x^6} + a^4 \frac{\partial^6 \overline{f_{m,n}}}{\partial x^4 \partial t^2} + a^2 \frac{\partial^6 \overline{f_{m,n}}}{\partial x^2 \partial t^4} + \frac{\partial^6 \overline{f_{m,n}}}{\partial t^6} \right) + \\ & + \frac{2\tau^{10}}{10!} \left(a^8 \frac{\partial^8 \overline{f_{m,n}}}{\partial x^8} + a^6 \frac{\partial^8 \overline{f_{m,n}}}{\partial x^6 \partial t^2} + a^4 \frac{\partial^8 \overline{f_{m,n}}}{\partial x^4 \partial t^4} + a^2 \frac{\partial^8 \overline{f_{m,n}}}{\partial x^2 \partial t^6} + \frac{\partial^8 \overline{f_{m,n}}}{\partial t^8} \right) + \\ & + \frac{2\tau^{12}}{12!} \left(a^{10} \frac{\partial^{10} \overline{f_{m,n}}}{\partial x^{10}} + a^8 \frac{\partial^{10} \overline{f_{m,n}}}{\partial x^8 \partial t^2} + a^6 \frac{\partial^{10} \overline{f_{m,n}}}{\partial x^6 \partial t^4} + a^4 \frac{\partial^{10} \overline{f_{m,n}}}{\partial x^4 \partial t^6} + a^2 \frac{\partial^{10} \overline{f_{m,n}}}{\partial x^2 \partial t^8} + \frac{\partial^{10} \overline{f_{m,n}}}{\partial t^{10}} \right) - \tau^2 \frac{\partial^2 V_{m,n}}{\partial t^2} - \\ & - \frac{2\tau^4}{4!} \frac{\partial^4 V_{m,n}}{\partial t^4} - \frac{2\tau^6}{6!} \frac{\partial^6 V_{m,n}}{\partial t^6} - \frac{2\tau^8}{8!} \frac{\partial^8 V_{m,n}}{\partial t^8} - \frac{2\tau^{10}}{10!} \frac{\partial^{10} V_{m,n}}{\partial t^{10}} - \frac{2\tau^{12}}{12!} \frac{\partial^{12} V_{m,n}}{\partial t^{12}} - \dots = \\ = & U_{lm+1}^n + U_{lm-1}^n - U_{lm}^{n-1} + \overline{f_{m,n}} \tau^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} \left(\tau^{2k} \sum_{l=0}^{k-1} a^{2l} \frac{\partial^{2(k-l)} f_{mn}}{\partial x^{2l} \partial t^{2(k-l-1)}} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\tau^{2k}}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} V_{mn}}{\partial t^{2k}}, \quad (18) \end{aligned}$$

где $\overline{f_{m,n}} = f_{m,n} - \left(\frac{x_m - a}{b - a} \right) \mu_2''(t_n) + \left(\frac{b - x_m}{b - a} \right) \mu_1''(t_n)$ – модифицированное узловое значение правой части.

Утверждение 2 доказано.

Аналогично выражению (14) можно провести укрупнение шага в неоднородной модифицированной правой части волнового уравнения для системы уравнений (8). Сначала инициализация проводится

с шагом τ времени по формулам (15), а затем по формулам (16), далее по явной формуле (18) с минимальными шагами сетки (h, τ) решается волновое уравнение с невязкой общего вида (18)

$$U_{1m}^{n+1} = U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + \overline{f_{m,n}} \tau^2 + R(U_{1m}^n), \quad n = \overline{2, N}, \quad m = \overline{1, M-1}, \quad (19)$$

во временном промежутке $[0, l * \tau]$, $n \in \overline{2, l}$.

Среди решения в слое $U_1(a + mh, l * \tau)$, $m = \overline{0, M}$ и среди начального слоя $U_1(a + mh, 0)$, $m = \overline{0, M}$ выбираются узлы более редкой сетки $x_{m1} = a + hl * m1$, $m1 = \overline{0, M/l}$, $t_{n1} = \tau * l * n1$, $n1 = \overline{0, 1}$, тогда получаем решение на редкой сетке

$$\{U_1(a + m1 * h * l, 0), U_1(a + m1 * h * l, l * \tau), m1 = \overline{0, M/l}\} = \{U_1(a + m1 * h * l, t_{n1}), m1 = \overline{0, M/l}, n1 = \overline{0, 1}\}.$$

Далее используется формула (19) с крупным шагом $(l * h, l * \tau)$, $1 = z = \tau^2 a^2 / h^2 \Leftrightarrow \tau = h / a$:

$$U_{1m1}^{n1+1} = U_{1m1+1}^{n1} + U_{1m1-1}^{n1} - U_{1m1}^{n1-1} + \overline{f_{m1,n1}} l^2 \tau^2 + R(U_{1m1}^{n1}), \quad n1 = \overline{2, N/l}, \quad m1 = \overline{1, M/l-1}. \quad (20)$$

В последних формулах (19), (20) невязка $R(U_{1m1}^{n1})$ определяется двумя последними суммами из выражения (28) в [1, с. 181].

Рассмотрим **тестовый пример 1**:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin(t) \sin(x), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = \cos(x), & x \in [0, \pi] \\ u_t(x, 0) = \sin(2x), & x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = \cos(t) = \mu_1(t), \quad u(\pi, t) = -\cos(t) = \mu_2(t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (21)$$

$$u(x, t) = V(x, t) + U_1(x, t) + U_2(x, t) = \cos(x) \cos(t) + \frac{1}{2} (\sin(t) - t \cos(t)) \sin(x) + \frac{\sin(2x) \sin(2t)}{2}. \quad (22)$$

Можно проверить, что решение системы уравнений (21) описывается формулой (22), т.е. удовлетворяет волновому уравнению и 4 условиям (21).

К неоднородной краевой задаче (21) можно применить редукцию к однородной задаче, описанную формулами (1)–(6). Воспользуемся формулами (2), (5), (6) с краевой функцией:

$$V(x, t) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right) \mu_2(t) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right) \mu_1(t) = \left(\frac{x}{\pi}\right) (-\cos(t)) + \left(\frac{\pi-x}{\pi}\right) \cos(t) = \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) \cos(t)$$

и с модифицированной правой частью

$$\overline{f(x, t)} = f(x, t) - V_{tt}(x, t) = -\left(\frac{2x}{\pi}\right) \cos t + \cos t + \sin x \sin t, \quad -V_{tt}(x, t) = V(x, t)$$

и точным решением – формула (22), используя формулу (18), получим

$$\begin{aligned} U_{1m}^{n+1} &= U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + 2f_{m,n} \left(\frac{1}{2!} \tau^2 - 2 \frac{\tau^4}{4!} + 3 \frac{\tau^6}{6!} - 4 \frac{\tau^8}{8!} + 5 \frac{\tau^{10}}{10!} - \frac{6\tau^{12}}{12!} + \dots \right) + 2V_{m,n} \left(\frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^4}{4!} + \frac{\tau^6}{6!} - \dots \right). \\ 1 - \cos(\tau) &= \frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^4}{4!} + \frac{\tau^6}{6!} - \dots \Rightarrow \frac{\tau}{2} \frac{d}{d\tau} (1 - \cos(\tau)) = \frac{\tau}{2} \sin \tau = \frac{1}{2!} \tau^2 - 2 \frac{\tau^4}{4!} + 3 \frac{\tau^6}{6!} - 4 \frac{\tau^8}{8!} + 5 \frac{\tau^{10}}{10!} - \frac{6\tau^{12}}{12!} + \dots \\ U_{1m}^{n+1} &= U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + \tau \sin(\tau) f_{mn} + 2V_{m,n} (1 - \cos(\tau)) = \\ &= U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + \tau \sin(\tau) \sin(mh) \sin(n\tau) + 2 \left(1 - \left(\frac{2mh}{\pi} \right) \right) \cos(n\tau) (1 - \cos(\tau)), \end{aligned} \quad (23)$$

$$n = \overline{2, N}, \quad m = \overline{1, M-1}.$$

В первом примере по формуле (23) для бесконечного ряда получена *производящая функция* $\tau \sin(\tau) f_{mn} + 2V_{m,n}(1 - \cos(\tau))$, состоящая из двух слагаемых. Первое совпадает с аналогичным примером с той же неоднородной правой частью волнового уравнения и однородными краевыми условиями в работе [1, с. 181]. Второе слагаемое своим существованием обязано краевой функции из первого примера. Предположим, что аналитическое решение каждой частной задачи (18), (19) представимо в виде бесконечного медленно сходящегося ряда для каждой из подзадач с модифицированными неоднородным уравнением или с модифицированными начальными условиями. Тогда экономнее численно решать каждую из модифицированных подзадач, сравнивая их сумму и сумму с краевой функцией с известным общим точным решением. В таблице 1 по порядку записаны численные решения частных задач (8), (9), краевая функция и сумма всех трех величин соответственно

$$U_1(x, t), U_2(x, t), V(x, t), U_1(x, t) + U_2(x, t) + V(x, t), t = 25.1327412287183.$$

Таблица 1

$U_1(x, t)$	$U_2(x, t)$	$V(x, t)$	$U_1(x, t) + U_2(x, t) + V(x, t)$
0.000000000000000E+00	0.000000000000000E+00	1.000000000000000	1.000000000000000
-3.88322207745093	0.151056516295153	0.800000000000000	-2.93216556115578
-7.38632732196183	0.209016994374947	0.600000000000000	-6.57731032758688
-10.1664073846305	0.187785252292473	0.400000000000000	-9.57862213233804
-11.9513286589662	0.109016994374947	0.200000000000000	-11.6423116645913
-12.5663706143592	-7.216449660063518E-16	0.000000000000000E+00	12.5663706143592
-11.9513286589662	-0.109016994374948	-0.200000000000000	-12.2603456533412
-10.1664073846305	-0.187785252292473	-0.400000000000000	-10.7541926369230
-7.38632732196184	-0.209016994374948	-0.600000000000000	-8.19534431633678
-3.88322207745093	-0.151056516295154	-0.800000000000000	-4.83427859374609
0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000	-1.000000000000000	-1.000000000000000

В первом столбце таблицы 2 с равномерным шагом указаны координаты узлов. Во втором столбце записаны значения решения согласно формуле (22) в узлах координатной сетки

$$u(x, t) = V(x, t) + U_1(x, t) + U_2(x, t) = \cos(x) \cos(t) + \frac{1}{2} (\sin(t) - t \cos(t)) \sin(x) + \frac{\sin(2x) \sin(2t)}{2}.$$

Таблица 2

x	<i>exact</i>	$(U_1(x, t) + U_2(x, t) + V(x, t))$ numerical
0.000000000000000E+000	1.000000000000000	1.000000000000000
0.314159265358979	-2.93216556115578	-2.93216556115578
0.628318530717959	-6.57731032758688	-6.57731032758688
0.942477796076938	-9.57862213233805	-9.57862213233804
1.25663706143592	-11.6423116645913	-11.6423116645913
1.57079632679490	-12.5663706143592	-12.5663706143592
1.88495559215388	-12.2603456533412	-12.2603456533412
2.19911485751286	-10.7541926369230	-10.7541926369230
2.51327412287183	-8.19534431633677	-8.19534431633678
2.82743338823081	-4.83427859374609	-4.83427859374609
3.14159265358979	-1.000000000000000	-1.000000000000000

В третьем столбце программа вычисляет сумму краевой функции и численных решений задач (8), (9). Программа с параметрами $n = 100$, $l = 10$, $m = 8$, $t = n \cdot m \cdot \tau = 25.1327412287183$ возвращает норму Чебышева для невязки задачи (7). Норма относительной погрешности имеет порядок $1E-15$, что соответствует двойной точности решения. Последние столбцы таблиц 1 и 2 совпадают.

Относительная норма Чебышева равна $1.119445273655962E-015$. Среднее арифметическое от модуля численного решения в конечный момент времени по всем узлам составляет 7.93409415003782 . В примере 1 краевые условия $\mu_1(t) = \cos(t)$, $\mu_2(t) = -\cos(t)$ линейно зависимы.

Тестовый пример 2.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + t \sin(x), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(x/2), & x \in [0, \pi] \\ u_t(x, 0) = \frac{1}{2} \cos(x/2), & x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = \sin(t/2) = \mu_1(t), & u(\pi, t) = \cos(t/2) = \mu_2(t), t \geq 0. \end{cases} \quad (24)$$

Точное решение примера (24) есть

$$u(x, t) = (t - \sin(t)) \sin(x) + \sin(x/2) \cos(t/2) + \cos(x/2) \sin(t/2)$$

с краевой функцией

$$V(x, t) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right) \mu_2(t) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right) \mu_1(t) = \left(\frac{x}{\pi}\right) \cos(t/2) + \left(\frac{\pi-x}{\pi}\right) \sin(t/2)$$

и модифицированной правой частью

$$\overline{f(x)} = f(x, t) - V_{tt}(x, 0) = t \sin(x) + \frac{x}{4\pi} \cos(t/2) + \left(\frac{\pi-x}{4\pi}\right) \sin(t/2),$$

а также с модифицированными начальными условиями:

$$\overline{\varphi(x)} = \varphi(x) - V(x, 0) = \sin(x/2) - \frac{x}{\pi}, \quad \overline{\psi(x)} = \psi(x) - V_t(x, 0) = \frac{1}{2} \cos(x/2) - \left(\frac{\pi-x}{2\pi}\right).$$

Тогда модифицированные правую часть волнового уравнения и начальные условия для второго тестового примера подставим в формулу (18):

$$\begin{aligned} U_{1m}^{n+1} &= U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + 2f_{m,n} \left(\frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^4}{4!} + \frac{\tau^6}{6!} - \frac{\tau^8}{8!} + \frac{\tau^{10}}{10!} - \frac{\tau^{12}}{12!} + \dots \right) + 2V_{m,n} \left(\frac{\tau^2}{2^2 2!} - \frac{\tau^4}{2^4 4!} + \frac{\tau^6}{2^6 6!} - \frac{\tau^8}{2^8 8!} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau^{10}}{2^{10} 10!} - \frac{\tau^{12}}{2^{12} 12!} + \dots \right) = U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + 2f_{m,n} (1 - \cos(\tau)) + 2V_{m,n} \left(1 - \cos\left(\frac{\tau}{2}\right) \right) = \\ &= U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + 2(n\tau) \sin(mh) (1 - \cos(\tau)) + 2 \left(\left(\frac{mh}{\pi}\right) \cos(n\tau/2) + \left(\frac{\pi-mh}{\pi}\right) \sin(n\tau/2) \right) \left(1 - \cos\left(\frac{\tau}{2}\right) \right), \quad (25) \end{aligned}$$

$$n = \overline{2, N}, \quad m = \overline{1, M-1}.$$

Производящая функция $2f_{m,n} (1 - \cos(\tau)) + 2V_{m,n} \left(1 - \cos\left(\frac{\tau}{2}\right) \right)$ в формуле (25) состоит из двух слагаемых: первое слагаемое обусловлено правой частью волнового уравнения, второе определяется краевой функцией.

В таблице 3 собраны результаты численного решения **примера 2** с параметрами программы $n = 100, l = 10, m = 8, t = n \cdot m \cdot \tau = 25.1327412287183$.

Таблица 3

x	<i>exact</i>	$(U_1(x, t) + U_2(x, t) + V(x, t))$ <i>numerical</i>
0.0000000000000000E+000	-4.898425415289509E-016	-4.898425415289509E-016
0.314159265358979	7.92287861994210	7.92287861994209
0.628318530717959	15.0816716382986	15.0816716382986
0.942477796076938	20.7868052690006	20.7868052690006
1.25663706143592	24.4904425702249	24.4904425702249
1.57079632679490	25.8398480099049	25.8398480099049
1.88495559215388	24.7116743123074	24.7116743123074
2.19911485751286	21.2238212934494	21.2238212934494
2.51327412287183	15.7237111602188	15.7237111602188
2.82743338823081	8.75413249549701	8.75413249549700
3.14159265358979	1.000000000000000	1.000000000000000

Относительная норма Чебышева равна 3.004681541631892E-015. Среднее арифметическое от модуля численного решения в конечный момент времени по всем узлам составляет 16.5534985368844. Норма погрешности имеет порядок 10^{-15} , т.е. программа работает с использованием алгоритма согласно формулам (11)–(20) с двойной точностью. В примере 2 краевые условия $\mu_1(t) = \cos(t/2)$, $\mu_2(t) = \sin(t/2)$ линейно независимы.

Тестовый пример 3.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos(3t)\sin(3x), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = \sin x, & x \in [0, \pi] \\ u_t(x, 0) = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{3x}{2}\right), & x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = 0 = \mu_1(t), u(\pi, t) = -\sin\left(\frac{3t}{2}\right) = \mu_2(t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (26)$$

Его точное решение есть

$$u(x, t) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{3t}{2}\right) + \frac{t}{6}\sin(3x)\sin(3t) + \sin x \cos t$$

с краевой функцией $V(x, t) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\mu_2(t) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)\mu_1(t) = -\left(\frac{x}{\pi}\right)\sin\left(\frac{3t}{2}\right)$ и модифицированной правой частью $\overline{f(x)} = f(x, t) - V_{tt}(x, 0) = \cos(3t)\sin(3x) - \frac{9x}{4\pi}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)$, а также с модифицированными начальными условиями $\overline{\varphi(x)} = \varphi(x) - V(x, 0) = \sin x$, $\overline{\psi(x)} = \psi(x) - V_t(x, 0) = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{3x}{2}\right) + \frac{3x}{2\pi}$.

Тогда найденные модифицированные правую часть волнового уравнения и начальные условия для **третьего тестового примера** подставим в формулу (28):

$$\begin{aligned} U_{1m}^{n+1} &= U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + 2f_{m,n} \left(\frac{\tau^2}{2!} - 2\frac{3^2\tau^4}{4!} + 3\frac{3^4\tau^6}{6!} - 4\frac{3^6\tau^8}{8!} + 5\frac{3^8\tau^{10}}{10!} - 6\frac{3^{10}\tau^{12}}{12!} + \dots \right) + \\ &+ 2V_{m,n} \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{\tau^2}{2!} - \left(\frac{3}{2}\right)^4 \frac{\tau^4}{4!} + \left(\frac{3}{2}\right)^6 \frac{\tau^6}{6!} - \left(\frac{3}{2}\right)^8 \frac{\tau^8}{8!} + \left(\frac{3}{2}\right)^{10} \frac{\tau^{10}}{10!} - \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \frac{\tau^{12}}{12!} + \dots \right) = \\ &= U_{1m+1}^n + U_{1m-1}^n - U_{1m}^{n-1} + f_{m,n} \left(3\tau \sin(3\tau) - 8\tau^2 \right) + 2V_{m,n} \left(1 - \cos\left(\frac{3\tau}{2}\right) \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} 1 - \cos(3\tau) &= \frac{(3\tau)^2}{2!} - \frac{(3\tau)^4}{4!} + \frac{(3\tau)^6}{6!} - \dots \Leftrightarrow \frac{\tau}{2} \frac{d}{d\tau} (1 - \cos(3\tau)) = \frac{1}{2!} (3\tau)^2 - 2\frac{(3\tau)^4}{4!} + 3\frac{(3\tau)^6}{6!} - 4\frac{(3\tau)^8}{8!} + \\ &+ 5\frac{(3\tau)^{10}}{10!} - 6\frac{(3\tau)^{12}}{12!} + \dots = 4\tau^2 + \frac{\tau^2}{2!} - 2\frac{3^2\tau^4}{4!} + 3\frac{3^4\tau^6}{6!} - 4\frac{3^6\tau^8}{8!} + 5\frac{3^8\tau^{10}}{10!} - 6\frac{3^{10}\tau^{12}}{12!} + \dots = \frac{3\tau}{2} \sin(3\tau) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\tau^2}{2!} - 2\frac{3^2\tau^4}{4!} + 3\frac{3^4\tau^6}{6!} - 4\frac{3^6\tau^8}{8!} + 5\frac{3^8\tau^{10}}{10!} - 6\frac{3^{10}\tau^{12}}{12!} + \dots = \frac{3\tau}{2} \sin(3\tau) - 4\tau^2. \\ \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{\tau^2}{2!} - \left(\frac{3}{2}\right)^4 \frac{\tau^4}{4!} + \left(\frac{3}{2}\right)^6 \frac{\tau^6}{6!} - \left(\frac{3}{2}\right)^8 \frac{\tau^8}{8!} + \left(\frac{3}{2}\right)^{10} \frac{\tau^{10}}{10!} - \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \frac{\tau^{12}}{12!} + \dots &= 1 - \cos\left(\frac{3\tau}{2}\right). \end{aligned}$$

Производящая функция $f_{m,n} \left(3\tau \sin(3\tau) - 8\tau^2 \right) + 2V_{m,n} \left(1 - \cos\left(\frac{3\tau}{2}\right) \right)$ в формуле (27) состоит из двух слагаемых, первое слагаемое обусловлено правой частью волнового уравнения, второе соответствует

краевой функции. В таблице 4 показаны результаты численного решения **примера 3** с параметрами программы $n = 200, l = 20, m = 4, t = nmt = 12.5663706143592$.

Таблица 4

x	<i>exact</i>	$(U_1(x,t) + U_2(x,t) + V(x,t))$ numerical
0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
0.314159265358979	0.309016994374945	0.309016994374945
0.628318530717959	0.587785252292470	0.587785252292472
0.942477796076938	0.809016994374946	0.809016994374947
1.25663706143592	0.951056516295155	0.951056516295152
1.57079632679490	1.000000000000000	0.999999999999998
1.88495559215388	0.951056516295155	0.951056516295152
2.19911485751286	0.809016994374947	0.809016994374948
2.51327412287183	0.587785252292471	0.587785252292473
2.82743338823081	0.309016994374946	0.309016994374948
3.14159265358979	8.572244476756629E-016	7.347638122934264E-016

Относительная норма Чебышева равна $7.209524148017449E-015$. Среднее арифметическое от модуля численного решения в конечный момент времени по всем узлам составляет 0.631375151467504 . Норма погрешности имеет порядок 10^{-15} , т.е. программа работает с использованием алгоритма согласно формулам (11)–(20) с двойной точностью. В примере 3 задано только одно ненулевое краевое условие $\mu_1(t) = 0, \mu_2(t) = -\sin\left(\frac{3t}{2}\right)$. Таким образом, три рассмотренных примера исчерпывают все различные случаи задания неоднородных условий, показывающие, что программа, написанная по алгоритму формул (11)–(20), численно решает начально-краевую задачу волнового уравнения на отрезке с двойной точностью.

Для классического решения задач математической физики необходимо также согласовать начальные и краевые условия [3; 4, с. 43], которые заключаются для постановки задачи (1) в выполнении условий

$$V(a,t) = \mu_1(t), V(b,t) = \mu_2(t), \varphi(a) = u(a,0) = \mu_1(0), \varphi(b) = u(b,0) = \mu_2(0). \tag{28}$$

Отметим, что в первых двух примерах условие согласования классического решения выполнено на двух концах отрезка и, как следствие, достигнуто меньшее значение нормы погрешности, чем в третьем примере, в котором условие согласования выполнено на левом конце отрезка, но не выполнено на правом его конце: $\varphi(a) - \mu_1(0) = 0, \varphi(b) - \mu_2(0) = 1 \neq 0$. В результате норма погрешности, полученная программой, больше примерно в 10 раз, чем в первых двух примерах, тем не менее устойчивость всех указанных алгоритмов разностных схем имеет место и в случае рассогласования начальных и граничных условий.

Программа написана на языке FORTRAN и использует входные функции **тестового примера 2**.

Опишем входные функции программы, численно решающей произвольную неоднородную начально-краевую задачу для волнового уравнения на отрезке:

$$f_y(x,t) = f(x,t) - v_{tt}(x,t) = f(x,t) - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\mu_2''(t) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)\mu_1''(t) - \text{модифицированная правая часть}$$

волнового уравнения;

$$u_0(x) = \varphi(x) - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\mu_2(0) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)\mu_1(0), u_1(x) = \psi(x) - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\mu_2'(0) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)\mu_1'(0) - \text{модифици-$$

рованные условия для начального смещения точек отрезка струны и модифицированные условия для начальной скорости точек струны.

Сумма функций $fan(x,t) + ff_0(x,t) + f_2(x,t)$ в программе равна известному точному решению. Если указанные функции найдены, то их записывают в программу (для определения нормы невязки задачи по Чебышеву). Первые два слагаемых представляют частные решения задачи (1), соответствующие неоднородным начальным условиям и неоднородным граничным условиям, третье слагаемое соответствует неоднородной правой части волнового уравнения.

Программа написана на языке FORTRAN, ее особенностью является $m = 4k$, $k \in N$, быстродействию (время работы) составляет 0,01 с.

```

program wave;integer(8), parameter::n=100,n1=10,ll=n/n1;integer(8)::i,j,k;integer(8),parameter::m=8
real(8):: num(0:n+1,0:m*n+1),num0(0:n+1,0:m*n+1);real(8)::par(0:n+1),sum,s,tay2,f00(0:n+1)
real(8)::res1(0:n+1),l(0:n+1),f0(0:n+1),aa33(0:n+1), res2(0:n+1);
real(8):: aa(0:n+1),bb(0:n+1),cc(0:n+1),ff(0:n+1),ccc(0:n+1),otv(0:n+1),otv0(0:n+1)
real(8)::eps(0:n+1),nu(0:n+1),eps0(0:n+1),f11(0:n+1),f22(0:n+1)
real(8)::a1(0:n+1), a2(0:n+1), b1(0:n+1), b2(0:n+1),aa11(0:n+1),cc11(0:n+1),bb11(0:n+1)
real(8)::eps00(0:n+1),otv00(0:n+1), l1(0:n+1),l2(0:n+1),res3(0:n+1)
real(8):: aa1(0:n+1),bb1(0:n+1),aa2(0:n+1),bb2(0:n+1),aa3(0:n+1),bb3(0:n+1)
real(8)::max1,max2,max3,max4,max44,epss(0:n+1);real(8)::max5,ch,t,yy,max55,mm,tay1,c1,ff0,v,pi
real(8)::u1,u0,f1,f2,fan,z,vel,x,y,a,b,c,d,h1,tay,tt,x1,x2,x3,x4,hh,fy
v(x,t)=(x/(2d0*dasin(1d0)))*dcos(t/2d0)+(((2d0*dasin(1d0))-x)/(2d0*dasin(1d0)))*dsin(t/2d0)
fy(x,t)=dsin(x)*t+(x/(4d0*(2d0*dasin(1d0)))*dcos(t/2d0)+(((2d0*dasin(1d0))-
x)/(4d0*(2d0*dasin(1d0)))*dsin(t/2d0)
u1(x)=dcos(x/2d0)/2d0-(((2d0*dasin(1d0))-x)/(2d0*(2d0*dasin(1d0))))
u0(x)=dsin(x/2d0)-(x/(2d0*dasin(1d0)));fan(x,t)=0d0;f1(x,tay)=-2d0*u0(x)-2d0*tay*u1(x);
ff0(x,t)=dsin(t/2d0)*dcos(x/2d0)+dsin(x/2d0)*dcos(t/2d0);f2(x,t)=dsin(x)*(t-dsin(t));
pi=2d0*dasin(1d0);a=0d0;b=pi;z=1d0;vel=1d0;max1=-100d0;max2=-100d0;max4=-100d0;max44=-100d0
max5=-100d0;max55=-1000d0;mm=-100d0;h1=(b-a)/dfloat(n);tay=dsqrt(z)*h1/vel
do k=0,n;x=a+h1*dfloat(k);x2=x+h1;x1=x-h1;x4=x+2d0*h1;x3=x-2d0*h1
aa(k)=1d0;bb(k)=1d0;cc(k)=4d0;f0(k)=f1(x,tay);ff(k)= 3d0*u1(x)*tay+u0(x1)+u0(x2)+u0(x)
a1(k)=1d0;a2(k)=-4.5d0;b2(k)=1d0;b1(k)=-4.5d0;ccc(k)=-10d0;aa1(k)=1d0
bb3(k)=1d0;f11(k)=-fy(x,tay)*tay*tay;aa11(k)=z;bb11(k)=z;cc11(k)=2d0+2d0*z
f22(k)=-((fy(x1,tay)+fy(x2,tay))+fy(x,2d0*tay)-4.5d0*fy(x,tay))*tay*tay
enddo;nu(0)=0d0;nu(n)=0d0;l(0)=0d0;l(n)=0d0;res1(0)=nu(0);res1(n)=nu(n)
do k=1,n-1;x=a+h1*dfloat(k);f0(k)=f1(x,tay);nu(k)=(aa(k)*nu(k-1)-f0(k))/(cc(k)-aa(k)*l(k-1))
l(k)= bb(k)/(cc(k)-aa(k)*l(k-1));enddo;do k=n-1,1,-1;res1(k)= l(k)*res1(k+1)+nu(k);enddo
do j=0,n;x=a+h1*dfloat(j);par(j)=fan(x,tay);eps(j)= par(j)-res1(j)
if( eps(j)<=0d0 )then;eps(j)=-eps(j);else;endif;enddo;do j=0,n;if( eps(j)>=max1 )then;max1=
eps(j);endif;enddo
print*,"norma C1=" ,max1;do k=0,n;res2(k)= res1(k);enddo;
l1(0)=0d0;l1(1)=0d0;l2(0)=0d0;l2(1)=0d0;l1(n)=0d0;l2(n)=0d0;l1(n-1)=0d0
l2(n-1)=0d0;nu(n-1)=res2(n-1);nu(n)=res2(n);nu(1)=res2(1);nu(0)=res2(0)
do j=2,n-2,1;l1(j)=(a1(j)*l1(j-2)*l2(j-1)+a2(j)*l2(j-1)+b1(j))/(ccc(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a2(j)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2))
l2(j)=b2(j)/(ccc(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2)-a2(j)*l1(j-1))
nu(j)=(a1(j)*l1(j-2)*nu(j-1)+a2(j)*nu(j-1)+a1(j)*nu(j-2)-ff(j))/(ccc(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2)-
a2(j)*l1(j-1))
enddo;do j=n-2,0,-1;res2(j)=l1(j)*res2(j+1)+l2(j)*res2(j+2)+nu(j);enddo
do j=0,n;x=a+h1*dfloat(j);par(j)=fan(x,tay);eps(j)= par(j)-res2(j)
if( eps(j)<=0d0 )then;eps(j)=-eps(j);else;endif;enddo;do j=0,n
if( eps(j)>=max1 )then;max1= eps(j);endif;enddo;do j=2,n-2;if(eps(j)>=max2)then
max2=eps(j);endif;if(mod(j,n1)=0)then;endif;enddo;print*,"norma C2=" ,max2
do i=0,n;if(mod(i,n1)=0)then;endif;enddo;do j=0,n1
x=a+h1*dfloat(j);num0(0,j)=0d0;num0(n,j)=0d0;num0(j,0)=u0(x);num0(j,1)=res2(j)
enddo;do j=1,n1-1;do i=1,n-1
num0(i,j+1)=num0(i+1,j)+num0(i-1,j)-num0(i,j-1);enddo;enddo;tay1=tay*dfloat(n1)
hh=h1*dfloat(n1);t=dfloat(n*m)*tay;num0(0,1)=0d0;num0(ll,1)=0d0;num0(0,0)=0d0;num0(ll,0)=0d0
do i=0,ll;x=a+hh*dfloat(i);num0(i,1)=num0(i,n1);num0(i,0)=u0(x)
num0(0,i)=0d0;num0(ll,i)=0d0;otv(i)=fan(x,t);enddo;do j=0,ll*m;num0(0,j)=0d0;num0(ll,j)=0d0;enddo
do j=1,ll*m-1;do i=1,ll-1;num0(i,j+1)=num0(i+1,j)+num0(i-1,j)-num0(i,j-1);enddo;enddo
do i=0,ll;eps0(i)=num0(i,ll*m)-otv(i);if(eps0(i)<0d0)then;eps0(i)=-eps0(i);endif
if(eps0(i)>max44)then;max44=eps0(i);endif
s=s+abs(otv(i));enddo;print*,"norma C404=" ,max44,max44*dfloat(ll)/s
nu(0)=0d0;nu(n)=0d0;l(0)=0d0;l(n)=0d0;res1(0)= nu(0);res1(n)= nu(n)
do k=1,n-1;x=a+h1*dfloat(k);nu(k)=(aa11(k)*nu(k-1)-f11(k))/(cc11(k)-aa11(k)*l(k-1))
l(k)= bb11(k)/(cc11(k)-aa11(k)*l(k-1));enddo;do k=n-1,1,-1;res1(k)= l(k)*res1(k+1)+nu(k);enddo
do j=0,n;x=a+h1*dfloat(j);par(j)=f2(x,tay);eps(j)= par(j)-res1(j)
if( eps(j)<=0d0 )then;eps(j)=-eps(j);else;endif;enddo;do j=0,n
if( eps(j)>=max4 )then;max4= eps(j);endif;enddo;print*,"norma C101=" ,max4
do k=0,n;res2(k)= res1(k);enddo;l1(0)=0d0;l1(1)=0d0;l2(0)=0d0;l2(1)=0d0

```

```

l1(n)=0d0;l2(n)=0d0;l1(n-1)=0d0;l2(n-1)=0d0;nu(n-1)=res2(n-1)
nu(n)=res2(n);nu(1)=res2(1);nu(0)=res2(0);do j=2,n-2,1
l1(j)=(a1(j)*l1(j-2)*l2(j-1)+a2(j)*l2(j-1)+b1(j))/(ccc(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a2(j)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2))
l2(j)=b2(j)/(ccc(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2)-a2(j)*l1(j-1))
nu(j)=(a1(j)*l1(j-2)*nu(j-1)+a2(j)*nu(j-1)+a1(j)*nu(j-2)-f22(j))/(ccc(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2)-a2(j)*l1(j-1))
enddo ;do j=n-2,0,-1;res2(j)=l1(j)*res2(j+1)+l2(j)*res2(j+2)+nu(j);enddo
do j=0,n;x=a+h1*dfloat(j);par(j)=f2(x,tay);eps(j)= par(j)-res2(j);if(mod(j,n1)==0)then;endif
if( eps(j)<=0d0 )then;eps(j)=-eps(j);else;endif;enddo;do j=0,n;if( eps(j)>=max5 )then;max5= eps(j);endif;enddo;
do j=0,n;if(eps(j)>=max5)then;max5=eps(j);endif;enddo;print*, "norma C202=",max5 !;pause
do j=0,n;x=a+h1*dfloat(j);num(j,0)=0d0;num(j,1)=res2(j);enddo;do j=1,n1-1;do i=1,n-1
x=a+h1*dfloat(i);y=tay*dfloat(j)
num(i,j+1)=num(i+1,j)+num(i-1,j)-num(i,j-1)+2d0*fy(x,t)*(1d0-cos(tay))+2d0*v(x,t)*(1d0-cos(tay/2d0))
enddo;enddo;do i=0,n;res3(i)=num(i,n1);enddo;hh=h1*dfloat(n1);tay1=tay*dfloat(n1)
t=tay*dfloat(n*m);print*, "t=",t;do i=0,ll;x=a+hh*dfloat(i);num(i,1)=res3(i*n1)
num(i,0)=0d0;otv(i)=f2(x,t);enddo;do j=0,ll*m;num(0,j)=0d0;num(ll,j)=0d0;enddo
do j=1,ll*m-1;do i=1,ll-1;x=a+hh*dfloat(i);t=tay1*dfloat(j)
num(i,j+1)=num(i+1,j)+num(i-1,j)-num(i,j-1)+2d0*fy(x,t)*(1d0-cos(tay1))+2d0*v(x,t)*(1d0-cos(tay1/2d0))
enddo;enddo;s=0d0;do i=0,ll;eps(i)=num(i,ll*m)-otv(i);if(eps(i)<=0d0)then;
eps(i)=-eps(i);endif;if(eps(i)>=max55)then;max55=eps(i);endif
if(otv(i)>=maax)then;maax=otv(i);endif;enddo;print*, "norma C505=",max55,max55*dfloat(ll)/maax;
t=tay1*dfloat(m*ll);s=0d0;do i=0,ll;x=a+hh*dfloat(i);otv00(i)=num(i,ll*m)+num0(i,ll*m)+v(x,t)
res3(i)=f2(x,t)+fan(x,t)+ff0(x,t);epss(i)=otv00(i)-res3(i);if(epss(i)<0d0)then;epss(i)=-epss(i);endif;s=s+res3(i);
if(epss(i)>mm)then;mm=epss(i);endif;print*,x;print*,res3(i),otv00(i);enddo
print*, "norma C=",mm*dfloat(ll)/abs(s),abs(s)/ dfloat(ll);end program wave

```

В работе получены результаты:

1. Линейная неоднородная начально-краевая задача для волнового уравнения на отрезке редуцией сводится к решению двух частных задач с однородными краевыми условиями. Первая имеет однородное уравнение и модифицированные начальные условия. Вторая – однородные начальные условия и волновое уравнение с модифицированной правой частью.

2. В разностном виде получены формулы (11)–(20) для решения неоднородной краевой задачи, которые переходят в аналогичные формулы (15)–(28) работы [1] в случае однородных краевых условий.

3. В явном виде получена невязка общего вида (формула (18), состоящая из двух сумм: слагаемые первой двойной суммы содержат производные четного порядка по координате и времени (как и в работе [1, с. 180, формула (26)], слагаемые второй суммы пропорциональны четным производным по времени от краевой функции. Краевой может быть любая дважды непрерывно дифференцируемая функция, на границе области $\partial\Omega$, равная краевым условиям $\mu_i(t), i = \overline{1, l}$ и являющаяся одним из 3 слагаемых численно-го решения в замкнутой области $\overline{\Omega}$.

4. Все модифицированные функции – правая часть уравнения, начальные условия и общий вид невязки задачи в формуле (18) – определяются также краевой функцией, т.е. полученные алгоритмы соответствуют традициям решения задач математической физики коллективом семинара «Возобновляемые источники энергии».

5. Написана программа и получены три тестовых примера (21), (24), (26) с точными решениями при выборе оптимального параметра аппроксимации $z = 1$, с которым как неоднородная краевая задача, так и задача с однородными условиями решаются с двойной точностью. Таким образом, все свойства (точность, масштабируемость алгоритма, метод производящих функций, быстроедействие и т.д.) с оптимальным параметром аппроксимации сохраняются как в однородной краевой задаче, так и в неоднородной задаче с краевыми условиями Дирихле.

6. Благодаря алгоритму инициализации (15), (16), (18), (19), (22), (24) (что проверено программой) численное решение с использованием алгоритма (11)–(20) по норме Чебышева близко к точному решению не только при согласованных начальных и краевых условиях, но и при отсутствии их согласования в классическом смысле решения задач уравнений математической физики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пастухов, Д.Ф. Оптимальный порядок аппроксимации разностной схемы волнового уравнения на отрезке / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 167–186.
2. Пикулин, В.П. Практический курс по уравнениям математической физики : учеб. пособие / В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. – М. : Наука, 1995. – 224 с.

3. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М. : Наука, 2008. – 729 с.
4. Вакуленко, С.П. Способы передачи QR-кода в компьютерной стеганографии / С.П. Вакуленко, Н.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов // Мир транспорта. – 2018. – Т. 16, № 5 (78). – С. 14–25.
5. Пастухов, Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.
6. Волосова, Н.К. Преобразование Радона и краевой задачи для уравнения Пуассона в стеганографии / Н.К. Волосова // Тез. докл. Междунар. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 6-11 июля 2018 г. – Суздаль, 2018. – С. 61.
7. Вакуленко, С.П. К методу оценки состояния железнодорожного полотна / С.П. Вакуленко, К.А. Волосов, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2016. – Т. 14, № 3 (64). – С. 20–35.
8. Вакуленко, С.П. К вопросу о нелинейных волнах в стержнях / С.П. Вакуленко А.К. Волосова, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2018. – Т. 16, № 3 (76). – С. 6–17.
9. Козлов, А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1319–1335.
10. Козлов, А.А. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 621–627.
11. Пастухов, Ю.Ф. Группы преобразований сохраняющие вариационную задачу со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 194–209.
12. Пастухов, Ю.Ф. Тензор обобщенной энергии / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, С.В. Чернов // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 78–100.
13. Пастухов Ю.Ф. “ Необходимые условия в обратной вариационной задаче ”, Фундаментальная и прикладная математика, 7:1(2001), 285-288.
14. Свешников, А.Г. Лекции по математической физике / А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. – М. : Изд-во МГУ, 1993. – 352 с.

Поступила 24.09.2018

TO QUESTION ABOUT OF THE LUMPY MARGINAL PROBLEM DIRIHLE FOR WAVE EQUATION ON LENGTH

D. PASTUHOV, Y. PASTUHOV, N. VOLOSOVA

The Offered algorithm of the decision general initial-marginal problem of the lumpy wave equation on length with lumpy marginal condition. The Certain notion to marginal function. The Source problem with lumpy marginal condition is reduced to two simple modified problem, i.e. to problem with modified by right part and to problem with modified initial condition, but with uniform border condition. It Is Received decomposition to inaccuracy of the problem in most general type for optimum parameter of the approximations разностной schemes $z = 1$. The First double amount to inaccuracy complies with amount for problem with uniform marginal condition; the second single amount contains the composed proportional derived even order on time from marginal function. The Writtened program on base of the built algorithm to reductions, are solved exactly and numerically three test examples, showing that marginal conditions Dirihle save all characteristic of the task with uniform marginal condition when use the modified conditions and marginal function.

Keywords: boundary function, modified initial conditions and the right part of the equation, inhomogeneous boundary value problem of the wave equation on the segment, coordination of initial and boundary conditions.

УДК 514

ЛАГРАНЖЕВЫ СЕЧЕНИЯ

*канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет)*

Инвариантным образом определено понятие лагранжевых сечений в расслоенных пространствах скоростей произвольного порядка, сформулированы и доказаны их свойства. Дан инвариантный критерий решения задачи. Получено необходимое условие лагранжевых сечений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного четного порядка.

Ключевые слова: обратная вариационная задача, расслоенное пространство скоростей, лагранжево сечение, уравнения Эйлера – Лагранжа, гладкие многообразия, тензор энергии, тензор обобщенного импульса, невырожденная функция.

Введение. Вариационное исчисление является одним из старейших и богатых содержанием и приложениями разделов математического анализа. Вариационные задачи (например, изопериметрические) рассматривались и в древности, но исследовались геометрическими методами. Началом зарождения вариационного исчисления можно считать работу П. Ферма 1662 г., в которой аналитическими методами исследованы задачи о распространении света из одной оптической среды в другую и о преломлении света на границе двух сред. Далее аналогичные (но более общие) вариационные задачи исследовались Ньютоном (задача о наименьшей поверхности вращения – в 1685 г.), Д. Бернулли (задача о брахистохроне) и др.

В 1696 г. И. Бернулли сформулировал и опубликовал математическую проблему с предложением для математиков своего времени заняться ее решением. В задаче о брахистохроне требовалось найти форму гладкой кривой, соединяющей две точки так, чтобы материальная точка, двигаясь по ней без трения под действием силы тяжести, прошла участок между этими точками за минимальное время. Задача была решена крупнейшими учеными того времени – Я. Бернулли, Г. Лейбницем, Г. Лопиталем и И. Ньютоном.

Свои подходы к решению этой задачи предложили Л. Эйлер и Ж. Лагранж, что привело к рождению вариационного исчисления. Эти решения наметили многие направления будущей общей теории. И. Бернулли исходил из оптико-механических аналогий, Я. Бернулли применил принцип Гюйгенса, Г. Лейбниц решил задачу, заменяя кривую ломаными, заложив тем самым основу прямым методам в вариационном исчислении.

Настоящими творцами общей теории вариационного исчисления (которые дали название этой науке) являются Л. Эйлер (уравнения Эйлера) и Ж. Лагранж (метод вариаций). Далее следует А. Лежандр (исследование второй вариации – необходимое условие Лежандра), У. Гамильтон и Б. Якоби (понятие сопряженной точки, необходимое условие Якоби, теория Гамильтона – Якоби), А. Клёбш и Ю. Майер (задачи с функционалами более общей природы, необходимое условие Клёбша, поля экстремалей Майера), Вейерштрасс (задачи в параметрической форме, достаточные условия сильного экстремума). Работы Майера конца XIX в. послужили основой для углубленного исследования вариационных задач Лагранжа и Майера, доказательства правила множителей для них и др. В начале XX в. Д. Гильберт ввел свой известный инвариантный интеграл для доказательства достаточных условий экстремума, А. Кнезер исследовал задачи с подвижными концами, получил геометрическое условие Якоби (при помощи огибающей семейства экстремалей).

Дифференциальная геометрия возникла и развивалась в тесной связи с математическим анализом, который сам в значительной степени вырос из задач геометрии. Многие геометрические понятия предшествовали соответствующим понятиям анализа. Так, например, понятие касательной предшествовало понятию производной, понятие площади и объема – понятию интеграла.

Возникновение дифференциальной геометрии относится к XVIII в. и связано с именами Л. Эйлера и Г. Монжа. Первое сводное сочинение по теории поверхностей написано Г. Монжем («Приложение анализа к геометрии», 1795). В 1827 г. К. Гаусс опубликовал работу «Общее исследование о кривых поверхностях», в которой заложил основы теории поверхностей в ее современном виде. С тех пор дифференциальная геометрия перестала быть только приложением анализа и заняла самостоятельное место в математике.

Огромную роль в развитии всей геометрии, в том числе и дифференциальной геометрии, сыграло открытие неевклидовой геометрии. Б. Риман в своей лекции «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии» (1854) заложил основы римановой геометрии, наиболее развитой части современной дифференциальной геометрии.

Теоретико-групповая точка зрения Ф. Клейна изложена в его «Эрлангенской программе» (1872): геометрия – учение об инвариантах групп преобразований. В применении к дифференциальной геометрии была развита Э. Картаном, который построил теорию пространств проективной связности и аффинной связности.

Основная задача дифференциальной геометрии состоит в нахождении и описании дифференциальных инвариантов геометрических структур. Необходимым аппаратом здесь является исчисление струй. Это понятие интенсивно использовалось в теории геометрических структур высшего порядка в работах В.В. Вагнера, Г.Ф. Лаптева, Л.Е. Евтушика, М.О. Рахулы, а в последнее время в теории особенностей гладких отображений – М. Голубицким, В. Гийеминим и геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений – А.М. Виноградовым, В.В. Лычагиным. Представленная работа является продолжением работ [9, 10, 13, 16–19].

Вариационная задача с управляемым параметром $u \in KC[t_0, t_1]$ на классе функций $x(t) \in KC^1[t_0, t_1]$ решена Л.С. Понтрягиным и сформулирована как принцип максимума Понтрягина. Эта задача тесно связана с решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений с управлением на классе кусочно-непрерывных функций от времени, новые результаты также получены А.А. Козловым для двух неизвестных функций [5–7].

Основные определения и математические объекты. Дифференциально-геометрические структуры, используемые в работе: X_m – гладкое многообразие размерности m ; $T^n X_m$ – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m ; $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ – невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$.

Определение 1. Система функций $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$,

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(p+\min(n,p)-k)}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_l^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right), \quad k = \overline{0, n}, \quad i = \overline{1, m},$$

называется обобщенным импульсом ранга n для функции $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ в локальных координатах (x) базы X_m расслоения $T^p X_m$, где $L(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)})$ – локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

Функция $p_{k,n}^i$ читается как k -я компонента обобщенного импульса P_n ранга n по i -й координате или импульс порядка k (k -импульс) по i -й координате обобщенного импульса P_n ранга n .

Замечание 1. Обобщенный импульс ранга n определен для функций $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$.

Из определения $p_k^i(n) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_l^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right)$ следует, что при $k > p$,

$l \geq 0 \Rightarrow l+k > p \Rightarrow \frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \equiv 0$ и все $p_k^i(n) \equiv 0$ (тривиальные импульсы), то есть для нетривиальных

импульсов $k \leq p$. Поскольку $k \leq n, k \leq p \Rightarrow k \leq \min(n, p)$, то в **определении 1** можно считать, что $k = \overline{0, \min(n, p)}, i = \overline{1, m}$.

Максимальный порядок производной по t в $p_k^i(n)$ равен $l+k+l = 2 \cdot l+k$.

При $l+k > p \Rightarrow \frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \equiv 0$ и коэффициент при производной $x^{(l+k)i}$ равен 0, значит, при

определении максимального порядка производной по t можно считать $l+k \leq p$, кроме того,

$$l \leq n - k \Leftrightarrow l + k \leq n \Rightarrow l + k \leq \min(n, p) \Rightarrow l \leq \min(n, p) - k \Rightarrow 2 \cdot l + k \leq 2 \cdot (\min(n, p) - k) + k = 2 \cdot \min(n, p) - 2 \cdot k + k = 2 \cdot \min(n, p) - k.$$

Хотя более грубая оценка порядка старшей производной по t в $p_k^i(n)$ дает

$$l \leq n - k \Leftrightarrow l + k \leq n \Rightarrow 2 \cdot l + k \leq 2 \cdot (n - k) + k = 2 \cdot n - 2 \cdot k + k = 2 \cdot n - k.$$

При $p > n, l + k \leq n$ и максимальный порядок производной по t в аргументах $L(x, \dots, x^{(p)})$ больше максимального порядка производной по переменной t в знаменателе частной производной.

Теорема 1 [11]. Пусть $x^i = S^i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$ $S: (\bar{x}) \rightarrow x(\bar{x})$ – невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m, i = \overline{1, m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(l)i}(x, \overset{\bullet}{x}, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(s)j}} = \begin{cases} C_l^s \cdot D_t^{l-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right), & C_l^s = \frac{l!}{s! \cdot (l-s)!}, \quad l! = \prod_{k=1}^l k, \quad l \geq s \\ 0, & l < s. \end{cases} \quad (1)$$

Теорема 2 [10] (закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе X_m расслоения $T^{2n} X_m$). При замене $(\bar{x}) \rightarrow (x(\bar{x}))$ в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n} X_m$ импульсы

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{p}_k^i(n)(x, \overset{\bullet}{x}, \dots, x^{(2n-k)}) & \text{ преобразуются как тензоры типа } (0,1) \text{ (ковекторы):} \\ \overset{\bullet}{p}_k^i(n)(x, \overset{\bullet}{x}, \dots, x^{(2n-k)}) &= \sum_{j=1}^m p_k^j(n)(x, \overset{\bullet}{x}, \dots, x^{(2n-k)}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(n)(x, \overset{\bullet}{x}, \dots, x^{(2n-k)}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} \text{ – свертка по } j, \\ p_k^i(n) &= p_{k,n}^i(x, \overset{\bullet}{x}, \dots, x^{(2n-k)}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right) \text{ – импульс порядка } k, \quad k = \overline{0, n} \quad i, j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Пусть $T^k X_m$ – расслоенное пространство скоростей порядка k многообразия X_m , $\pi_k^l: T^l X_m \rightarrow T^k X_m, l > k \geq 0$ – каноническая проекция (при $k = 0$ – проекция на базу расслоения многообразия X_m). Предполагается, что X_m – бесконечно гладкое многообразие, $U(v_{0_x}^{2n-1})$ – окрестность точки $v_{0_x}^{2n-1}$ в расслоении $T^{2n-1} X_m$.

Определение 2. Пусть $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ – гладкая функция. $L(x, \overset{\bullet}{x}, \dots, x^{(n)})$ – локальная запись в системе координат $(x) \cdot (\phi_x: (V \subset T^n X_m) \rightarrow \mathfrak{R}^{(n+1)m}$ – координатный диффеоморфизм в локальной карте (V, ϕ_x)). Функция $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ называется невырожденной (вырожденной) в точке $v_x^n \in T^n X_m$, в системе координат (x) базе X_m расслоения, если $\det \left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(n)i} \partial x^{(n)j}} \right) \neq 0$ ($= 0$) соответственно.

Теорема 3. Пусть $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ – гладкая функция в точке $v_x^n \in T^n X_m, L(x, \overset{\bullet}{x}, \dots, x^{(n)})$ – локальная запись в системе координат (x) в базе $X_m, L(x, \overset{\bullet}{x}, \dots, x^{(n)})$ – локальная запись в системе координат (\bar{x}) .

Тогда

$$\frac{\partial^2 \bar{L}(x, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial x \partial x} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x \partial x} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x}. \quad (2)$$

Доказательство.

$$\frac{\partial \bar{L}(x, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial x} = \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{L}(x, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial x \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{L}(x, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x} \right) + \frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x} \right) \right) = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x} \right) + \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \bar{L}(x, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial x \partial x}. \quad (3) \end{aligned}$$

Преобразуем левую часть в сумме (3):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x} \right) = \sum_{d=1}^m \sum_{s=0}^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial x} \right) \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x}. \quad (4)$$

Подставим выражение (4) в левую часть суммы (3):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x} \right) &= \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \left(\sum_{d=1}^m \sum_{s=0}^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x}. \quad (5) \end{aligned}$$

Подставляем полученное выражение (5) в формулу (3):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x} \right) + \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x} \right) &= \\ = \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \left(\sum_{d=1}^m \sum_{s=0}^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x} + \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x} \right) &= \\ = \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \sum_{d=1}^m \sum_{s=0}^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial x} \right) \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x} + \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x} \right) &= \\ = \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \sum_{d=1}^m \sum_{s=0}^n \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x \partial x} \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial x} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x} + \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x} \right). \quad (6) \end{aligned}$$

По теореме 1,
$$\frac{\partial x^{(l)i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(s)j}} = \begin{cases} C_l^s \cdot D_t^{l-s} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right), & C_l^s = \frac{l!}{s!(l-s)!}, \quad l! = \prod_{k=1}^l k, \quad l \geq s \\ 0, & l < s \end{cases} \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Поскольку $n \geq t \geq 0$, то

$$\frac{\partial x^{(t)j}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(n)l}} = \begin{cases} C_n^n \cdot D_t^{n-n=0} \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \right) = D_t^{n-n=0} \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \right) = \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}, & C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1, \quad n! = \prod_{k=1}^n k, \quad t = n = \delta_n^t \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \\ 0, & t < n. \end{cases}$$

Значит, при $n \geq t \geq 0$,

$$\frac{\partial x^{(t)j}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(n)i}} = \delta_n^t \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}. \tag{7}$$

где $\delta_n^t = \begin{cases} 1, & t = n \\ 0, & t \neq n \end{cases}$ – символ Кронекера.

Подставляем формулу (7) в правую часть суммы (6):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial \bar{x}^{(t)j}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{(n)k}} \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{(n)l}} \right) &= \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial \bar{x}^{(t)j}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{(n)k}} \left(\delta_n^t \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial \bar{x}^{(t)j}} \delta_n^t \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{(n)k}} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial \bar{x}^{(n)j}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{(n)k}} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right). \end{aligned} \tag{8}$$

Так как $n \geq 1$, то $\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}$ зависит только от \bar{x} и не зависит от производных первого порядка и выше. Следовательно, $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^{(n)k}} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) = 0$. Значит полученное выражение (8) – правая часть в формуле (6)

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial \bar{x}^{(n)j}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{(n)k}} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) = 0.$$

Значит, выражение (3), равное выражению (6), с учетом (8) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(n)k} \partial \bar{x}^{(n)l}} &= \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \sum_{d=1}^m \sum_{s=0}^n \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial \bar{x}^{(s)d} \partial \bar{x}^{(t)j}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{(n)k}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{(n)l}} \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{(n)l}} \right) + \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \frac{\partial L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial \bar{x}^{(t)j}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{(n)k}} \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{(n)l}} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \sum_{d=1}^m \sum_{s=0}^n \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial \bar{x}^{(s)d} \partial \bar{x}^{(t)j}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{(n)k}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{(n)l}} \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{(n)l}} \right). \end{aligned} \tag{9}$$

На основании выражения (7) имеют место равенства:

$$n \geq t \geq 0, \quad \frac{\partial x^{(t)j}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(n)l}} = \delta_n^t \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}, \quad \text{где } \delta_n^t = \begin{cases} 1, & t = n \\ 0, & t < n \end{cases} \text{ – символ Кронекера;} \tag{10}$$

$$n \geq s \geq 0, \quad \frac{\partial x^{(s)d}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(n)k}} = \delta_n^s \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}, \quad \text{где } \delta_n^s = \begin{cases} 1, & s = n \\ 0, & s < n \end{cases} \text{ – символ Кронекера.} \tag{11}$$

Подставляя формулы (10), (11) в выражение (9), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{L}(x, \bar{x}, \dots, x)}{\partial x^{(n)k} \partial \bar{x}^{(n)l}} &= \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \sum_{d=1}^m \sum_{s=0}^n \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x^{(s)d} \partial \bar{x}^{(t)j}} \frac{\partial x^{(s)d}(\bar{x})}{\partial x^{(n)k}} \frac{\partial x^{(t)j}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{(n)l}} = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \sum_{d=1}^m \sum_{s=0}^n \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x^{(s)d} \partial \bar{x}^{(t)j}} \delta_n^s \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-k}} \delta_n^t \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-l}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как $\delta_n^s = \begin{cases} 1, s = n \\ 0, s < n \end{cases}$ – символ Кронекера, то

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^n \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x^{(s)d} \partial \bar{x}^{(t)j}} \delta_n^s \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-k}} &= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x^{(s)d} \partial \bar{x}^{(t)j}} \delta_n^s \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-k}} + \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x^{(s=d=n)} \partial \bar{x}^{(t)j}} \delta_n^{s=n} \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-k}} = \\ &= \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x^{(s=n)d} \partial \bar{x}^{(t)j}} \delta_n^{s=n} \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-k}} = \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x^{(n)d} \partial \bar{x}^{(t)j}} \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-k}}, \end{aligned} \quad (13)$$

так как $\delta_n^s = 0, s < n; \delta_n^{s=n} = 1$.

Подставляем выражение (13) в формулу (12):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \sum_{d=1}^m \sum_{s=0}^n \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x^{(s)d} \partial \bar{x}^{(t)j}} \delta_n^s \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-k}} \delta_n^t \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-l}} &= \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^n \delta_n^t \sum_{d=1}^m \left(\sum_{s=0}^n \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x^{(s)d} \partial \bar{x}^{(t)j}} \delta_n^s \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-k}} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-l}} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^n \sum_{d=0}^n \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x^{(n)d} \partial \bar{x}^{(t)j}} \delta_n^t \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-k}} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-l}} = \sum_{j=1}^m \sum_{d=1}^m \sum_{t=0}^n \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x^{(n)d} \partial \bar{x}^{(t)j}} \delta_n^t \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-k}} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-l}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Так как $\delta_n^t = 0, t < n; \delta_n^{t=n} = 1$, то

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^n \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x^{(n)d} \partial \bar{x}^{(t)j}} \delta_n^t \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-k}} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-l}} &= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x^{(n)d} \partial \bar{x}^{(t)j}} \delta_n^t \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-k}} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-l}} + \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x^{(n)d} \partial \bar{x}^{(t=n)j}} \delta_n^{t=n} \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-k}} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-l}} = \\ &= \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x^{(n)d} \partial \bar{x}^{(n)j}} \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-k}} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-l}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя формулу (15) в формулу (14), получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{d=1}^m \sum_{t=0}^n \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x^{(n)d} \partial \bar{x}^{(t)j}} \delta_n^t \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-k}} &= \sum_{j=1}^m \sum_{d=1}^m \left(\sum_{t=0}^n \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x^{(n)d} \partial \bar{x}^{(t)j}} \delta_n^t \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-k}} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{d=1}^m \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}), \dots, x(\bar{x}))}{\partial x^{(n)d} \partial \bar{x}^{(n)j}} \frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-k}} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{-l}} = \frac{\partial^2 \bar{L}(x, \bar{x}, \dots, x)}{\partial x^{(n)k} \partial \bar{x}^{(n)l}}. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ – невырожденная (вырожденная) функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$ в системе координат (x) базы X_m расслоения. Тогда в любой другой системе координат (\bar{x}) в базе X_m функ-

ция Лагранжа $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ также будет невырожденной (вырожденной) соответственно, следовательно, свойства вырожденности и невырожденности не зависят от выбора локальной системы координат в базе X_m , то есть является геометрическим инвариантом в расслоении $T^n X_m$.

Доказательство. По теореме 3,
$$\frac{\partial^2 \bar{L}(x, \bar{x}, \dots, x)}{\partial x^k \partial x^l} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^k} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x^l}.$$

Невырожденность в системе координат (x) в базе X_m по определению означает, что

$$\det \left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^i \partial x^j} \right) \neq 0.$$

Поэтому, по теореме 3, имеем

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial^2 \bar{L}(x, \bar{x}, \dots, x)}{\partial x^k \partial x^l} \right) &= \det \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^k} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x^l} \right) = \\ &= \det \left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^i \partial x^j} \right) \det \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^k} \right) \det \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x^l} \right) \neq 0, \end{aligned}$$

так как $\det \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^k} \right) \neq 0$ и $\det \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x^l} \right) \neq 0$,

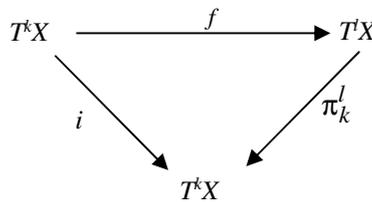
поскольку замена координат $x = x(\bar{x})$ в базе X_m невырожденная.

Аналогично, если $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ – вырожденная функция, то $\det \left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^i \partial x^j} \right) = 0$. В силу теоремы 3 получим

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial^2 \bar{L}(x, \bar{x}, \dots, x)}{\partial x^k \partial x^l} \right) &= \det \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^k} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x^l} \right) = \\ &= \det \left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^i \partial x^j} \right) \det \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^k} \right) \det \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x^l} \right) = 0 \cdot \det \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^k} \right) \det \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x^l} \right) = 0. \end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

Определение 3. Гладкое отображение $f : T^k X_m \rightarrow T^l X_m$ ($0 \leq k < l$) называется сечением, если следующая диаграмма коммутативна (рисунок).



Рисунок

Определение 4. Пусть $U(v_{0x}^{2n-1})$ – окрестность точки v_{0x}^{2n-1} в расслоении $T^{2n-1} X_m$.

Подмногообразие $\sigma_f \subset T^{2n} X_m$, $\sigma_f = \sigma_f(U) = \left\{ v_x^{2n} \in T^{2n} X_m \mid v_x^{2n} = f(v_x^{2n-1}), v_x^{2n-1} \in U(v_{0x}^{2n-1}) \right\}$

называется (гладким) подмногообразием, порожденным сечением $f : T^{2n-1} X_m \supset U(v_{0x}^{2n-1}) \rightarrow T^{2n} X_m$.

Пусть $L: T^n X_m \supset \pi_n^{2n} V \rightarrow \mathfrak{R}$ – невырожденная функция, $L(x, x, \dots, x^{(n)})$ локальная запись в системе координат (x) и $\varphi_x: (V \subset T^{2n} X_m) \rightarrow \mathfrak{R}^{(2n+1)m}$ – координатный гомеоморфизм в локальной карте $(V \subset T^{2n} X_m, \varphi_x)$ – расслоенного пространства $T^{2n} X_m$

Лемма 1. Пусть $U(v_{0x}^{2n-1})$ – окрестность точки v_{0x}^{2n-1} в расслоении $T^{2n-1} X_m$. Подмногообразие

$$\sigma_f \subset T^{2n} X_m, \sigma_f = \sigma_f(U) = \left\{ v_x^{2n} \in T^{2n} X_m \mid v_x^{2n} = f(v_x^{2n-1}), v_x^{2n-1} \in U(v_{0x}^{2n-1}) \right\},$$

задаваемое сечением $f: T^{2n-1} X_m \supset U(v_0^{2n-1}) \rightarrow T^{2n} X_m$ имеет размерность $2mn$.

Доказательство. Пусть (x) – локальная система координат в базе X_m расслоения $T^{2n} X_m$. Тогда отображение $f: T^{2n-1} X_m \supset U(v_0^{2n-1}) \rightarrow T^{2n} X_m$ в локальных координат имеет вид

$$y^{(k)i}(x, x, \dots, x^{(2n-1)}) = \begin{cases} x^{(k)i}, k = \overline{0, 2n-1} \\ f_i(x, x, \dots, x^{(2n-1)}), k = 2n \end{cases} \quad i = \overline{1, m}.$$

Рассмотрим отображения $s(k, i) = m \bullet k + i, k = \overline{0, 2n}, p(l, j) = m \bullet l + j, l = \overline{0, 2n-1}, i, j = \overline{1, m}$.

Отображение $s(k, i), k = \overline{0, 2n}, i = \overline{1, m}$ биективно отображает двумерную целочисленную решетку размером $[0; 2n] \times [1; m]$ в одномерную целочисленную решетку отрезок $[1; (2n+1) \bullet m]$.

Сюръективность отображения $s(k, i) = m \bullet k + i$ следует из очевидного тождества:

$$s = \begin{cases} m \bullet \left[\frac{s}{m} \right] + s - m \bullet \left[\frac{s}{m} \right], \text{mod}(s, m) \neq 0 \Rightarrow 0 \leq k = \left[\frac{s}{m} \right] \leq 2n, 1 \leq i = s - m \bullet \left[\frac{s}{m} \right] < m, \\ m \bullet \left(\left[\frac{s}{m} \right] - 1 \right) + m, \text{mod}(s, m) = 0 \Rightarrow 0 \leq k = \left[\frac{s}{m} \right] - 1 \leq 2n, i = m, \end{cases}$$

где $\text{mod}(s, m)$ – остаток от деления s на m .

Докажем, что $s(k, i)$ инъективно: $s(k_1, i_1) = m \bullet k_1 + i_1 = m \bullet k_2 + i_2 \Rightarrow m \bullet (k_2 - k_1) = i_1 - i_2$. Поскольку $1 \leq i_1, i_2 \leq m \Rightarrow 1 - m \leq i_1 - i_2 \leq m - 1$, то $m \bullet (k_2 - k_1): m \Rightarrow i_1 - i_2 = 0 \Rightarrow k_2 - k_1 = 0$, следовательно, инъективность и сюръективность, а значит, и биективность $s(k, i)$ доказаны.

Аналогично доказывается биективность отображения $p(l, j) = m \bullet l + j$.

Рассмотрим замену переменных

$$\begin{cases} Y^{s(k,i)} = x^{(k)i}, k = \overline{0, 2n-1}, i = \overline{1, m} \Rightarrow Y^{s(k,i)} = Y^{mk+i} = x^{(k)i} = X^{p(k,i)} = X^{mk+i} = X^s \\ Y^{s(2n,i)} = x^{(2n)i} = f_i(x, x, \dots, x^{(2n-1)}) \\ X^{p(l,j)} = x^{(l)j}, l = \overline{0, 2n-1}, j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Пусть E_{2mn} – единичная матрица размера $2mn$, $F_i(X^1, \dots, X^{2mn}) = f_i(x, x, \dots, x^{(2n-1)})$. Тогда ранг матрицы Якоби

$$\text{rk} \frac{\partial y^{k(i)}(x, x, \dots, x^{(2n-1)})}{\partial x^{(l)j}} = \text{rk} \frac{\partial Y^{s(k,i)}(x, x, \dots, x^{(2n-1)})}{\partial X^{p(l,j)}} = \text{rk} \frac{\partial X^{s(k,i)}(x, x, \dots, x^{(2n-1)})}{\partial X^{p(l,j)}} = \text{rk} \begin{pmatrix} E_{2mn} \\ \frac{\partial F_i}{\partial X^p} \end{pmatrix} \geq 2mn.$$

С другой стороны, ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} E_{2mn} \\ \frac{\partial F_i}{\partial X^p} \end{pmatrix}$ размером $(2mn + m) \times 2mn$ имеет вид

$$\text{rk } A \leq \min(2mn + m, 2mn) = 2mn \Rightarrow \text{rk } A = \text{rk} \begin{pmatrix} E_{2mn} \\ \frac{\partial F_i}{\partial X^p} \end{pmatrix} = 2mn.$$

Значит, отображение $f: T^{2n-1}X_m \supset U(v_0^{2n-1}) \rightarrow T^{2n}X_m$ задает подмногообразие размерности $2mn$.

Лемма 1 доказана.

Определение 5. Подмногообразие $\varepsilon = \varepsilon_L(V) = \{v_x^{2n} \in V \subset T^{2n}X_m, | \varepsilon_{(x)L}(\varphi_x(v_x^{2n})) = 0 \in \mathfrak{R}^m\}$ называется лагранжевым подмногообразием в окрестности $V(v_0^{2n}) \subset T^{2n}X_m$, $\varepsilon_L \subset T^{2n}X_m$. Здесь $\varepsilon_{(x)L}: \mathfrak{R}^{(2n+1)m} \supset \varphi_x(V \subset T^{2n}X_m) \rightarrow \mathfrak{R}^m$ – гладкая функция, которая в локальной системе координат (x) в базе X_m расслоенного пространства $T^{2n}X_m$ имеет вид

$$\varepsilon_{(x)L}(x, x, \dots, x) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_l^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}} \right), \quad i = \overline{1, m}.$$

Постановка задачи. Дифференциально-геометрические структуры, используемые в работе: X_m – гладкое многообразие размерности m ; $T^n X_m$ – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m ; $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ – невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$.

Ставится следующая задача: пусть $T^{2n}X_m \supset V(v_0^{2n}) = V$ – окрестность точки $v_0^{2n} \in T^{2n}X_m$, $\pi_{2n-1}^{2n}: T^{2n}X_m \rightarrow T^{2n-1}X_m$ – каноническая проекция: $\pi_{2n-1}^{2n}(V) = U(u_0^{2n-1}) = U = \{\pi_{2n-1}^{2n}(v) | \forall v \in V(v_0^{2n})\}$, $\pi_{2n-1}^{2n}(v_0^{2n}) = u_0^{2n-1}$ $f: T^{2n-1}X_m \supset U(v_0^{2n-1}) \rightarrow T^{2n}X_m$ – гладкое сечение.

Существуют ли окрестность $\bar{V}(v_0^{2n}) \subset V(v_0^{2n})$ ($\pi_{2n-1}^{2n}(\bar{V}) = \bar{U}$) и такая невырожденная функция $L: T^n X_m \supset \pi_n^{2n}V \rightarrow \mathfrak{R}^m$, такие что указанные многообразия $\sigma_f(\bar{U}) = \varepsilon_L(\bar{V})$ совпадают.

Теорема 5. Определение 5 корректно, так как оно не зависит от выбора локальных координат (x) в базе X_m расслоенного пространства $T^{2n}X_m$, то есть независимо от выбора локальных координат (x) в базе X_m в окрестности точки $v_x^{2n} \in V \subset T^{2n}X_m$ расслоенного пространства $T^{2n}X_m$ определяет одно и то же подмногообразие:

$$\varepsilon = \varepsilon_L(V) = \{v_x^{2n} \in V \subset T^{2n}X_m | \varepsilon_{(x)L}(\varphi_x(v_x^{2n})) = 0 \in \mathfrak{R}^m\}.$$

Более точно: если $x = x(\bar{x})$ – произвольная невырожденная замена в базе X_m расслоенного пространства $T^{2n}X_m$ и функции

$$\varepsilon_{(x)L}^i(x, x, \dots, x) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_l^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}} \right), \quad i = \overline{1, m},$$

$$\varepsilon_{(\bar{x})L}^i(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_l^l \left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^{(l)i}} \right), \quad i = \overline{1, m},$$

представляющие собой координатные записи отображений:

$$\varepsilon_{(x)L}: \mathfrak{R}^{(2n+1)m} \supset \varphi_x(V \subset T^{2n}X_m) \rightarrow \mathfrak{R}^m, \quad \varepsilon_{(\bar{x})L}: \mathfrak{R}^{(2n+1)m} \supset \varphi_{\bar{x}}(V \subset T^{2n}X_m) \rightarrow \mathfrak{R}^m,$$

то имеет место следующее равенство:

$$\varepsilon_{(x)L}^i(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) = \sum_{j=1}^m \varepsilon_{(x)L}^j(x, x, \dots, x) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}. \quad (16)$$

Доказательство. По определению $\varepsilon_{(x)L}: \mathfrak{R}^{(2n+1)m} \supset \varphi_x (W \subset T^{2n} X_m) \rightarrow \mathfrak{R}^m$

$$\varepsilon_{(x)L}^i(x, x, \dots, x) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_l^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}} \right) = p_0^i(n) = p_{0,n}^i(x, x, \dots, x), \quad i = \overline{1, m}.$$

Действительно, так как $L: T^n X_m \supset \pi_n^{2n-1} U \rightarrow \mathfrak{R} \Rightarrow p = n$, следовательно,

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, x, \dots, x) = p_{k,n}^i(x, x, \dots, x) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_l^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_l^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right),$$

$k = \overline{0, n}, i = \overline{1, m}$. В частности, при $k = 0$ запишем

$$p_{k=0}^i(n) = p_{0,n}^i(x, x, \dots, x) = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_l^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}} \right) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_l^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}} \right) = \varepsilon_{(x)L}^i(x, x, \dots, x).$$

Аналогично, $\varepsilon_{(x)L}^i(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_l^l \left(\frac{\partial \bar{L}(x, x, \dots, x)}{\partial \bar{x}^{(l)i}} \right) = \bar{p}_0^i(n) = \bar{p}_{0,n}^i(x, x, \dots, x), i = \overline{1, m}$, поскольку

$$\bar{p}_k^i(n) = \bar{p}_{k,n}^i(x, x, \dots, x) = \bar{p}_{k,n}^i(x, x, \dots, x) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_l^l \left(\frac{\partial \bar{L}(x, \dots, x)}{\partial \bar{x}^{(l+k)i}} \right) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_l^l \left(\frac{\partial \bar{L}(x, \dots, x)}{\partial \bar{x}^{(l+k)i}} \right),$$

$k = \overline{0, n}, i = \overline{1, m}$.

$$\bar{p}_{k=0}^i(n) = \bar{p}_{0,n}^i(x, x, \dots, x) = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_l^l \left(\frac{\partial \bar{L}(x, \dots, x)}{\partial \bar{x}^{(l)i}} \right) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_l^l \left(\frac{\partial \bar{L}(x, x, \dots, x)}{\partial \bar{x}^{(l)i}} \right) = \varepsilon_{(x)L}^i(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}).$$

По теореме 2, для $k = 0, n, i, j = \overline{1, m}$ имеем

$$\bar{p}_k^i(n) \bar{p}_k^j(n) = \sum_{j=1}^m p_k^j(n) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = p_k^j(n) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}, \det \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} \right) \neq 0.$$

В частности, для $k = 0$ (импульсы 0-го порядка – функциональные части в уравнениях Эйлера – Лагранжа)

$$\begin{aligned} \bar{p}_0^i(n) \bar{p}_0^j(n) &= \varepsilon_{(x)L}^i(x, x, \dots, x) \cdot \varepsilon_{(x)L}^j(x, x, \dots, x) = \sum_{j=1}^m p_0^j(n) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = p_0^j(n) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = \\ &= \sum_{j=1}^m p_0^j(n) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = \sum_{j=1}^m \varepsilon_{(x)L}^j(x, x, \dots, x) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}. \end{aligned}$$

Таким образом доказано, что $\varepsilon_{(x)L}^i(x, x, \dots, x) = \sum_{j=1}^m \varepsilon_{(x)L}^j(x, x, \dots, x) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}, \det \left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} \right) \neq 0$,

поэтому $\varepsilon_{(x)L}^i(x, x, \dots, x) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_{(x)L}^j(x, x, \dots, x) = 0, i, j = \overline{1, m}$.

Следовательно, равенство нулю левой части уравнения Эйлера – Пуассона $\varepsilon_{(x)L}^j(x, x, \dots, x) = 0, j = \overline{1, m}$ в одной системе координат влечет $\varepsilon_{(x)L}^i(x, x, \dots, x) = 0$ во всех системах

координат. Таким образом, лагранжево подмногообразие не зависит от выбора локальной системы координат при замене в базе X_m расслоенного пространства $T^{2n} X_m$.

Теорема 5 доказана.

Теорема 6. Пусть $f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot}$ – локальная запись гладкой функции $f : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$. В локальных координатах в базе X_m расслоения $T^n X_m$. Тогда

$$D_t^p f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot}}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p)j} + a(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k+p-1)}{\cdot}, \quad p \geq 1.$$

Доказательство. Проведем индукцией по p . База индукции $p = 1$, тогда

$$D_t^1 f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot} = D_t f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot} = \sum_{s=0}^k \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot}}{\partial x^{(s)j}} x^{(s+1)j} = \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot}}{\partial x^{(s)j}} x^{(s+1)j} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot}}{\partial x^{(k)j}} x^{(k+1)j}.$$

При $s \leq k-1 \Rightarrow s+1 \leq k$, поэтому $\frac{\partial f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot}}{\partial x^{(s)j}}$, $x^{(s+1)j}$ и произведение $\frac{\partial f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot}}{\partial x^{(s)j}} x^{(s+1)j}$ зависят от производных порядка не выше k , значит и вся сумма

$$a(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k+1-1)}{\cdot} = a(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot} = \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot}}{\partial x^{(s)j}} x^{(s+1)j}$$

также зависит от производных порядка не

выше k . Получим

$$D_t^1 f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot} = \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot}}{\partial x^{(s)j}} x^{(s+1)j} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot}}{\partial x^{(k)j}} x^{(k+1)j} = a(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot}}{\partial x^{(k)j}} x^{(k+1)j}.$$

База индукции проверена.

Индуктивный переход. Пусть утверждение верно для любого натурального числа p , то есть

$$D_t^p f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot}}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p)j} + a(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k+p-1)}{\cdot}.$$

Тогда докажем, что оно верно для $p+1$, то есть имеет место равенство

$$D_t^{p+1} f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot}}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p+1)j} + a(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k+p+1-1)}{\cdot} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot}}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p+1)j} + a(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k+p)}{\cdot}.$$

По предположению индукции имеем

$$\begin{aligned} D_t^{p+1} f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot} &= D_t (D_t^p f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot}) = D_t \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot}}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p)j} + a(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k+p-1)}{\cdot} \right) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^m D_t \frac{\partial f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot}}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p)j} + \frac{\partial f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot}}{\partial x^{(k)j}} D_t (x^{(k+p)j}) \right) + D_t a(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k+p-1)}{\cdot} = \\ &= \sum_{j=1}^m D_t \frac{\partial f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot}}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p)j} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot}}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p+1)j} + D_t a(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k+p-1)}{\cdot}. \end{aligned}$$

Максимальный порядок производных в каждом члене суммы $\sum_{j=1}^m D_t \frac{\partial f(x, x, \dots, x) \overset{\bullet}{\cdot} \overset{(k)}{\cdot}}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p)j}$ равен

$\max(k+1, k+p) = k+p$, так как $p \geq 1$. По доказанному утверждению при $p=1$ максимальный порядок

производных в $D_t \frac{\overset{\bullet}{\partial} f(x, x, \dots, x)}{\overset{(k)j}{\partial} x}$ равен $k+1$, а максимальный порядок производных в $D_t a(x, x, \dots, x)$ равен $k+p-1+1=k+p$.

Значит, $\overset{\bullet}{a}(x, x, \dots, x) = \sum_{j=1}^m D_t \frac{\overset{\bullet}{\partial} f(x, x, \dots, x)}{\overset{(k)j}{\partial} x} \cdot x^{(k+p)j} + D_t a(x, x, \dots, x)$ зависит от производных

порядка не выше $k+p$.

$$\begin{aligned} \text{Итак, } \sum_{j=1}^m D_t \frac{\overset{\bullet}{\partial} f(x, x, \dots, x)}{\overset{(k)j}{\partial} x} \cdot x^{(k+p)j} + \sum_{j=1}^m \frac{\overset{\bullet}{\partial} f(x, x, \dots, x)}{\overset{(k)j}{\partial} x} \cdot x^{(k+p+1)j} + D_t a(x, x, \dots, x) &= \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\overset{\bullet}{\partial} f(x, x, \dots, x)}{\overset{(k)j}{\partial} x} \cdot x^{(k+p+1)j} + a(x, x, \dots, x). \end{aligned}$$

Теорема 6 доказана.

Теорема 7. Пусть $\varepsilon_{(x)L}^i(x, x, \dots, x)$ – функции из условия **теоремы 5**. Тогда

$$\varepsilon_{(x)L}^i(x, x, \dots, x) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left(\frac{\overset{\bullet}{\partial} L(x, x, \dots, x)}{\overset{(l)i}{\partial} x} \right) = (-1)^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)j} + g_i(x, x, \dots, x), \quad i = \overline{1, m}.$$

Доказательство. Проведем индукцией по n . База индукции $n=1$, тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(x)L}^i(x, x, \dots, x) &= \varepsilon_{(x)L}^i(x, x) = \sum_{l=0}^{n=1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\overset{\bullet}{\partial} L(x, x, \dots, x)}{\overset{(l)i}{\partial} x} \right) = (-1)^0 D_t^0 \left(\frac{\overset{\bullet}{\partial} L(x, x, \dots, x)}{\overset{(0)i}{\partial} x} \right) + (-1)^1 D_t^1 \left(\frac{\overset{\bullet}{\partial} L(x, x, \dots, x)}{\overset{(1)i}{\partial} x} \right) = \\ &= \frac{\overset{\bullet}{\partial} L(x, x)}{\overset{\bullet}{\partial} x^i} + (-1)^1 D_t^1 \left(\frac{\overset{\bullet}{\partial} L(x, x)}{\overset{\bullet}{\partial} x^i} \right) = \frac{\overset{\bullet}{\partial} L(x, x)}{\overset{\bullet}{\partial} x^i} + (-1)^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, x)}{\partial x^{(p)j} \partial x^{\overset{\bullet}{i}}} \cdot x^{(p+1)j} = \\ &= \frac{\overset{\bullet}{\partial} L(x, x)}{\overset{\bullet}{\partial} x^i} + (-1)^1 \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, x)}{\partial x^{(0)j} \partial x^{\overset{\bullet}{i}}} x^{(0+1)j} + (-1)^1 \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, x)}{\partial x^{(1)j} \partial x^{\overset{\bullet}{i}}} x^{(1+1)j} = \\ &= \frac{\overset{\bullet}{\partial} L(x, x)}{\overset{\bullet}{\partial} x^i} + (-1)^1 \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, x)}{\partial x^j \partial x^{\overset{\bullet}{i}}} x^i + (-1)^1 \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, x)}{\partial x^j \partial x^{\overset{\bullet}{i}}} x^j = (-1)^1 \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, x)}{\partial x^j \partial x^{\overset{\bullet}{i}}} x^j + g_i(x, x), \end{aligned}$$

где $g_i(x, x) = \frac{\overset{\bullet}{\partial} L(x, x)}{\overset{\bullet}{\partial} x^i} + (-1)^1 \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, x)}{\partial x^j \partial x^{\overset{\bullet}{i}}} x^i$. База индукции доказана.

Индуктивный переход. Пусть утверждение верно для n . Докажем, что оно верно для $n+1$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(x)L}^i(x, x, \dots, x) &= \sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\overset{\bullet}{\partial} L(x, x, \dots, x, x)}{\overset{(l)i}{\partial} x} \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n+1)j} + g_i(x, x, \dots, x) = \\ &= \sum_{l=0}^{n+1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, x, \dots, x, x)}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(n+1)i}} x^{(2n+2)j} + g_i(x, x, \dots, x). \end{aligned}$$

Для $n+1$ имеет место равенство

$$\sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x, x)}{\partial x^{(l)i}} \right) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x, x)}{\partial x^{(l)i}} \right) + (-1)^{n+1} D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right).$$

По теореме 6,

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x, x)}{\partial x^{(l)i}} \right) + (-1)^{n+1} D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) = \\ & = \sum_{l=0}^n (-1)^l \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, x, \dots, x, x)}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(l)i}} \cdot x^{(n+1+l)j} + a_l(x, x, \dots, x) \right) + \\ & + (-1)^{n+1} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, x, \dots, x, x)}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(n+1)i}} \cdot x^{(n+1+n+1)j} + a(x, x, \dots, x) \right) = \\ & = \sum_{l=0}^n (-1)^l \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, x, \dots, x, x)}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(l)i}} \cdot x^{(n+1+l)j} + a_l(x, x, \dots, x) \right) + \\ & + (-1)^{n+1} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, x, \dots, x, x)}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(n+1)i}} \cdot x^{(2n+2)j} + a(x, x, \dots, x) \right). \end{aligned}$$

Максимальный порядок производных в $\sum_{l=0}^n (-1)^l \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, x, \dots, x, x)}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(l)i}} \cdot x^{(n+1+l)j} + a_l(x, x, \dots, x) \right)$

равен $\max_{0 \leq l \leq n} (n+1, n+1+l, n+l) = \max_{0 \leq l \leq n} (n+1+l) = n+n+1 = 2n+1$, поэтому

$$\sum_{l=0}^n (-1)^l \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, x, \dots, x, x)}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(l)i}} \cdot x^{(n+1+l)j} + a_l(x, x, \dots, x) \right) + (-1)^{n+1} \cdot a(x, x, \dots, x) = a(x, x, \dots, x).$$

$$\sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x, x)}{\partial x^{(l)i}} \right) = (-1)^{n+1} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, x, \dots, x, x)}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(n+1)i}} \cdot x^{(2n+2)j} + a(x, x, \dots, x) \right).$$

Индуктивный переход доказан.

Теорема 7 доказана.

Теорема 8. Для двух отображений: $\varepsilon_{(x)L} : \mathfrak{R}^{(2n+1)m} \supset \varphi_x(V \subset T^{2n} X_m) \rightarrow \mathfrak{R}^m$ и $\varepsilon_{(\bar{x})L} : \mathfrak{R}^{(2n+1)m} \supset \varphi_{\bar{x}}(V \subset T^{2n} X_m) \rightarrow \mathfrak{R}^m$, рассмотрим 2 их композиции:

$$\varepsilon_{(x)L} \circ \varphi_x : V \subset T^{2n} X_m \rightarrow \mathfrak{R}^m \quad \text{и} \quad \varepsilon_{(\bar{x})L} \circ \varphi_{\bar{x}} : V \subset T^{2n} X_m \rightarrow \mathfrak{R}^m.$$

Тогда множества решений уравнений $\varepsilon_{(x)L} \circ \varphi_x(v^{2n}) = 0 \in \mathfrak{R}^m$ и $\varepsilon_{(\bar{x})L} \circ \varphi_{\bar{x}}(v^{2n}) = 0 \in \mathfrak{R}^m$, $v^{2n} \in W \subset T^{2n} X_m$, совпадают поточечно, то есть задают в $T^{2n} X_m$ одно и то же гладкое подмногообразие размерности $(2n+1) \cdot m - m = 2mn$.

Более того, имеет место равенство

$$\varepsilon_{(\bar{x})L}^i(\varphi_{\bar{x}}(v^{2n})) = \sum_{j=1}^m \varepsilon_{(x)L}^j(\varphi_x(v^{2n})) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} \quad (17)$$

Доказательство: Для окрестности $V \ni v^{2n} \in V \subset T^{2n} X_m$ из расслоенного пространства $T^{2n} X_m$, на которую действует локальная карта $\varphi_x(v^{2n})$, запишем

$$\varphi_x(v^{2n}) = (x, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x}), \quad \varphi_{\bar{x}}(v^{2n}) = (\bar{x}, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x}).$$

По **теореме 5**, имеет место следующее равенство:

$$\varepsilon_{(x)L}^i(\bar{x}, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x}) = \sum_{j=1}^m \varepsilon_{(x)L}^j(x, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x^{-i}},$$

поэтому $\varepsilon_{(x)L}^i(\varphi_{\bar{x}}(v^{2n})) = \sum_{j=1}^m \varepsilon_{(x)L}^j(\varphi_x(v^{2n})) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x^{-i}}$, то есть

$$\varepsilon_{(x)L}^i \circ \varphi_{\bar{x}}(v^{2n}) = \sum_{j=1}^m \varepsilon_{(x)L}^j \circ \varphi_x(v^{2n}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial x^{-i}}.$$

Соотношение (17) доказано.

В матрице Якоби $\frac{\partial \varepsilon_{(x)L}^i(x, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x})}{\partial x^{(k)j}}$, $k = 0, 2n$, $i = \overline{1, m}$, отображения $\varepsilon_{(x)L}: \mathfrak{R}^{(2n+1)m} \supset \varphi_x(V \subset T^{2n} X_m) \rightarrow \mathfrak{R}^m$

размером $m \times (2n+1)$ существует невырожденный минор порядка $m \times m$.

По **теореме 7**, имеем

$$\varepsilon_{(x)L}^i(x, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x}) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_l^i \left(\frac{\partial L(x, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x})}{\partial x^{(l)i}} \right) = (-1)^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)j} + g_i(x, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x}), \quad i = \overline{1, m}.$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{(x)L}^i(x, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x})}{\partial x^{(2n)j}} = \frac{\partial}{\partial x^{(2n)j}} \left((-1)^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 L(x, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x})}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)k} + g_i(x, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x}) \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{(2n)j}} \left((-1)^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 L(x, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x})}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)k} \right) + \frac{\partial g_i(x, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x})}{\partial x^{(2n)j}} =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x^{(2n)j}} \left(\frac{\partial^2 L(x, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x})}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)k} \right) + \frac{\partial g_i(x, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x})}{\partial x^{(2n)j}} =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x^{(2n)j}} \left(\frac{\partial^2 L(x, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x})}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} \right) x^{(2n)k} + \frac{\partial^2 L(x, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x})}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{(2n)j}} (x^{(2n)k}) + \frac{\partial g_i(x, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x})}{\partial x^{(2n)j}}.$$

Так как $g_i(x, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x})$, $\frac{\partial^2 L(x, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x})}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}}$ не зависит от $x^{(2n)j}$ явно, то

$$\frac{\partial g_i(x, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x})}{\partial x^{(2n)j}}, \frac{\partial}{\partial x^{(2n)j}} \left(\frac{\partial^2 L(x, \overset{\cdot}{x}, \dots, \overset{\cdot}{x})}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} \right) = 0.$$

Поскольку $\frac{\partial}{\partial x^{(2n)j}} (x^{(2n)k}) = \delta_j^k = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases}$ – символ Кронекера, то имеет равенство

$$\begin{aligned}
 & (-1)^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} \right) \bullet x^{(2n)k} + \frac{\partial^2 L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} \bullet \frac{\partial}{\partial x} (x^{(2n)k}) + \frac{\partial g_i(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(2n)j}} = \\
 & = (-1)^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} \bullet \frac{\partial}{\partial x} (x^{(2n)k}) + \frac{\partial g_i(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(2n)j}} = (-1)^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} \bullet \delta_j^k + \frac{\partial g_i(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(2n)j}} = \\
 & = (-1)^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} \bullet \delta_j^k = (-1)^n \bullet \frac{\partial^2 L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}},
 \end{aligned}$$

где $\delta_j^k = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases}$ – символ Кронекера.

По условию функция $L : T^n X_m \supset \pi_n^{2n} W \rightarrow \mathfrak{R}$ – невырожденная, поэтому, по **теореме 4**, в любых координатах $\det \left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i} \partial x^{(n)j}} \right) \neq 0$.

Значит, $\text{rank} \left(\frac{\partial \varepsilon_{(x)L}^i}{\partial x^{(k)j}} \right) \geq m$. С другой стороны, ранг матрицы Якоби

$$\text{rank} \left(\frac{\partial \varepsilon_{(x)L}^i}{\partial x^{(k)j}} \right) \leq \min(m, (2n+1) \bullet m) \leq m, k = \overline{0, 2n}, i = \overline{1, m}.$$

Значит, $\text{rank} \left(\frac{\partial \varepsilon_{(x)L}^i}{\partial x^{(k)j}} \right) = m$. Следовательно, система уравнений $\varepsilon_{(x)L} : \mathfrak{R}^{(2n+1)m} \supset \varphi_x^-$

$(W \subset T^{2n} X_m) \rightarrow \mathfrak{R}^m$ задает гладкое подмногообразие размерности $(2n+1) \cdot m - m = 2mn$.

Теорема 8 доказана.

Рассмотрим V окрестность точки $v_0^{2n} \in T^{2n} X_m$, на которой определена проекция $\pi_{2n-1}^{2n} : T^{2n} X_m \rightarrow T^{2n-1} X_m$ (каноническая проекция). Окрестность $U(u_0^{2n-1}) = \pi_{2n-1}^{2n} (V(v_0^{2n}))$ – образ при каноническом проектировании окрестности V .

Функция $f : T^{2n-1} X_m \supset U(v_0^{2n-1}) \rightarrow T^{2n} X_m$ представляет собой гладкое сечение и невырожденную функцию Лагранжа во всей области определения $L : T^n X_m \supset \pi_n^{2n-1} U \rightarrow \mathfrak{R}$.

Теорема 9 (инвариантный критерий решения задачи). Пусть σ_f – подмногообразие сечения f , то есть

$$\sigma_f = \sigma_f(U) = \left\{ v^{2n} \in V \subset T^{2n} X_m \mid v^{2n} = f(u^{2n-1}), u^{2n-1} \in U(u_0^{2n-1}) \right\},$$

а $\varepsilon_L(V)$ – лагранжево подмногообразие в $T^{2n} X_m$, то есть

$$\varepsilon_L(V) = \left\{ v^{2n} \in V \subset T^{2n} X_m \mid \varepsilon_{(x)L}(\varphi_x(v^{2n})) = 0 \in \mathfrak{R}^m \right\}.$$

Два подмногообразия σ_f и ε_L совпадают

$$\sigma_f(U) = \sigma_f(\pi_{2n-1}^{2n}(V)) = \varepsilon_L(V),$$

тогда и только тогда, если в любой локальной системе координат (x) в базе X_m

$$\varepsilon_{(x)L} \circ \Phi_x \circ f : T^{2n-1}X_m \supset U(u_0^{2n-1}) \rightarrow 0 \in \mathfrak{R}^m.$$

Доказательство проведем от противного. По **теореме 8**, решение уравнения $\varepsilon_{(x)L} \circ \Phi_x(v^{2n}) = 0 \in \mathfrak{R}^m$ не зависит от выбора локальных координат (x) в базе X_m . Значит, равенство композиции

$$\varepsilon_{(x)L} \circ \Phi_x \circ f : T^{2n-1}X_m \supset U(u_0^{2n-1}) = 0 \in \mathfrak{R}^m$$

не зависит от выбора локальных координат.

Так как $f : T^{2n-1}X_m \supset U(u_0^{2n-1}) \rightarrow T^{2n}X_m$ – гладкое сечение, то в локальной системе координат (x) в базе X_m лагранжево сечение задается уравнением

$$x = f^i(x, x, \dots, x), \quad (18)$$

$\varepsilon_L(V)$ задается системой уравнений Эйлера – Пуассона

$$\varepsilon_{(x)L}^i(x, x, \dots, x) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_l^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)j} + g^i(x, x, \dots, x) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (19)$$

Равенство $\sigma_f(U) = \sigma_f(\pi_{2n-1}^{2n}(V)) = \varepsilon_L(V)$ означает, что наборы $x = f(x, x, \dots, x)$ являются решением системы уравнений (18). Это значит, что

$$\varepsilon_{(x)L}^i(x, x, \dots, x = f(x, x, \dots, x)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} f^j(x, x, \dots, x) + g^i(x, x, \dots, x) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (20)$$

Пусть существует набор (x, x, \dots, x, x) , являющийся решением (19), но не удовлетворяющий условию (18), то есть $x = f_j(x, x, \dots, x) + d_j, |d| = \sqrt{\sum_{j=1}^m d_j^2} \neq 0$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)j} + g^i(x, x, \dots, x) = 0 &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} (f_j(x, x, \dots, x) + d_j) + g^i(x, x, \dots, x) = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} (f_j(x, x, \dots, x) + g^i(x, x, \dots, x)) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} d_j = 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (21)$$

В силу равенства (21) имеем

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} (f_j(x, x, \dots, x) + g^i(x, x, \dots, x)) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \text{ Значит,}$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} d_j = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (22)$$

Так как $L : T^n X_m \supset \pi_n^{2n-1} U \rightarrow \mathfrak{R}$ – невырожденная функция, то, по **теореме 4**, в любой системе координат $\det \left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i} \partial x^{(n)j}} \right) \neq 0$. Значит, существует обратная матрица $\left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i} \partial x^{(n)j}} \right)^{-1}, k, i = \overline{1, m}$,

такая что

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} \right)^{-1} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} = \delta_j^k, \text{ где } \delta_j^k = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases} \text{ – символ Кронекера.}$$

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} d_j \right) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} \right)^{-1} \cdot 0 = 0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} \right)^{-1} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} d_j =$$

$$= \sum_{j=1}^m d_j \left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)i}} \right)^{-1} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} \right) = \sum_{j=1}^m d_j \delta_j^k = \sum_{j=1}^m d_j \delta_j^k + d_k \delta_{j=k}^k = \sum_{j=1}^m d_j \cdot 0 + d_k \delta_k^k = d_k, k = \overline{1, m}. \quad (23)$$

В правой части выражения (22) $\sum_{j=1}^m d_j \delta_j^k = \sum_{j=1}^m d_j \cdot 0 = 0$, т.к. $\delta_j^k = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases}$ – символ Кронекера, то

есть $\bar{d} = (d_1, d_2, \dots, d_m) = (0, 0, \dots, 0) = \bar{0}$. Получили противоречие с тем, что $x^{(2n)j} = f^j(x, x, \dots, x) + d_j, |d| = \sqrt{\sum_{j=1}^m d_j^2} \neq 0$. Значит, решением системы (19) являются только наборы вида (18).

Теорема 9 доказана.

Следствие. Из **теоремы 9** вытекает, что лагранжевость сечения $f : T^{2n-1} X_m \supset U(v_0^{2n-1}) \rightarrow T^{2n} X_m$, которое в локальных координатах задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x^{(2n)j} = f^j(x, x, \dots, x), j = \overline{1, m}, \text{ эквивалентно существованию невырожденной матрицы } a_{ij}(x, x, \dots, x), \det(a_{ij}(x, x, \dots, x)) \neq 0, \text{ такой что}$$

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}(x, x, \dots, x) (x^{(2n)j} - f^j(x, x, \dots, x)) = \sum_{j=1}^m a_{ij}(x, x, \dots, x) \cdot 0 = 0.$$

$$\varepsilon_{(x)L}^i(x, x, \dots, x) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}} \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)j} + g_i(x, x, \dots, x) = 0, i = \overline{1, m}.$$

Итак, сформулированная выше задача лагранжевых сечений в расслоенных пространствах скоростей в локальных координатах означает существование невырожденной системы уравнений Эйлера – Лагранжа, разрешая которую относительно старших производных можно получить обыкновенные дифференциальные уравнения с заданной правой частью.

Возникает естественный вопрос: существуют ли нелагранжевые сечения. Оказывается при $n > 1$ существует прозрачный необходимый признак.

Теорема 10. Имеет место формула разложения от производной функции Лагранжа порядка k по независимой переменной t

$$D_t^k L(x, x, \dots, x) = \sum_{p=1}^k \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r} C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + h(x, \dots, x), k \geq 1. \quad (24)$$

$$\sum_{i=1}^r k_i = m+p$$

Доказательство. Проведем индукцией по k . Для базы индукции $k = 1$

$$\begin{aligned} D_t^k L(x, x, \dots, x) &= \sum_{p=1}^k \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r}^r C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + h(x, \dots, x) = \\ &= \sum_{r=1}^{p=1} \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r}^r C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + h(x, \dots, x). \end{aligned} \quad (25)$$

Так как $r = p = 1$, то выражение (25) примет вид

$$\begin{aligned} &\sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r=1}^r C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + h(x, \dots, x) = \\ &= \sum_{j_1=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1}^m C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + h(x, \dots, x) = \sum_{j_1=1}^m C_{n+1}^{j_1} (x, \dots, x) x^{(n+1)j_1} + h(x, \dots, x). \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} D_t^{k+1} L(x, x, \dots, x) &= D_t L(x, x, \dots, x) = \sum_{j_1=1}^m \sum_{p=0}^n \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(p)j_1}} x^{(p+1)j_1} = \sum_{j_1=1}^m \left(\sum_{p=0}^{n-1} \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(p)j_1}} x^{(p+1)j_1} + \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)j_1}} x^{(n+1)j_1} \right) = \\ &= \sum_{j_1=1}^m \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(p)j_1}} x^{(p+1)j_1} + \sum_{j_1=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)j_1}} x^{(n+1)j_1} = \sum_{j_1=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)j_1}} x^{(n+1)j_1} + h(x, \dots, x). \end{aligned}$$

База индукции доказана.

Рассмотрим индуктивный переход. Пусть утверждение верно для k . Докажем, что оно верно для $k + 1$

$$D_t^{k+1} L(x, x, \dots, x) = \sum_{p=1}^{k+1} \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r}^r \bar{C}_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + \bar{h}(x, \dots, x), \quad k \geq 1. \quad (27)$$

По предположению индукции имеем

$$D_t^k L(x, x, \dots, x) = \sum_{p=1}^k \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r}^r C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + h(x, \dots, x), \quad k \geq 1.$$

Учитывая линейность оператора дифференцирования $D_t \left(\prod_{s=1}^r f_s \right) = \sum_{u=1}^r \frac{f_s}{f_u} D_t f_u$, получим

$$\begin{aligned} D_t^{k+1} L(x, x, \dots, x) &= D_t (D_t^k L(x, x, \dots, x)) = D_t \left(\sum_{p=1}^k \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r}^r C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + h(x, \dots, x) \right) = \\ &= \sum_{p=1}^k \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r}^r D_t C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + D_t h(x, \dots, x) + \\ &+ \sum_{p=1}^k \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r}^r C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) D_t x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + \sum_{p=1}^k \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r}^r C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} D_t x^{(k_r)j_r} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{p=1}^k \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r}^r D_t C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + D_t h(x, \dots, x) + \\
 &\quad \sum_{i=1}^r k_i = m+p \\
 &\quad + \sum_{p=1}^k \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r}^r C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1+1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + \\
 &\quad \sum_{i=1}^r k_i = m+p \\
 &\quad + \dots + \sum_{p=1}^k \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r}^r C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} x^{(k_2+1)j_2} \dots x^{(k_r)j_r} + \\
 &\quad \sum_{i=1}^r k_i = m+p \\
 &\quad + \sum_{p=1}^k \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r}^r C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r+1)j_r}. \tag{28}
 \end{aligned}$$

Условие $\sum_{i=1}^r k_i = m+p \Leftrightarrow \sum_{i=1}^r (k_i - n) = p$ приводит к виду

$$D_t C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) = \sum_{j=1}^m \sum_{u=0}^n \frac{\partial C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x)}{x^{(u)j}} x^{(u+1)j} = \sum_{j=1}^m B_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(n+1)j} + D_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x)$$

и означает, что набор $(k_1, \dots, k_r) : \sum_{i=1}^r (k_i - n) = p$ в сумме

$$\sum_{p=1}^k \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r}^r D_t C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} \tag{29}$$

будет соответствовать набору $(k_1, \dots, k_r, k_{r+1} = n+1) : \sum_{i=1}^{r+1} (k_i - n) = \sum_{i=1}^r (k_i - n) + (n+1 - n) = p+1$.

В формуле (29) $r \leq p \leq k \Rightarrow r+1 \leq k+1, p+1 \leq k+1$, а т.к. в выражении (27) выполнено неравенство $r \leq p \leq k+1$, то все слагаемые вида (29) войдут в сумму (27). Каждому набору

$(k_1, \dots, k_i, \dots, k_r) : \sum_{j=1}^r (k_j - n) = p$ в сумме (28)

$$\sum_{p=1}^k \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r}^r C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} x^{(k_2)j_2} \dots x^{(k_i+1)j_i} \dots x^{(k_r)j_r}$$

соответствует набор $(k_1, \dots, k_i+1, \dots, k_r) : \sum_{j=1}^r (k_j - n) = p+1$.

В сумме (28) $r \leq p \leq k \Rightarrow p+1 \leq k+1$, а т.к. в (27) $r \leq p \leq k+1$, то все слагаемые вида (28) войдут в сумму (27).

Еще одно слагаемое в (28) $D_t h(x, \dots, x) = \sum_{j=1}^m \sum_{u=0}^n \frac{\partial h(x, \dots, x)}{x^{(u)j}} x^{(u+1)j} = \sum_{j=1}^m B(x, \dots, x) x^{(n+1)j} + D(x, \dots, x)$.

Очевидно, что первое слагаемое в последней формуле как частный случай при $r = p = 1$ входит в первую сумму формулы (27), а второе слагаемое $D(x, \dots, x)^{(n)}$ – в свободный член $\bar{h}(x, \dots, x)^{(n)}$ той же формулы (27).

Итак, все слагаемые суммы (28) являются членами суммы (27). Индуктивный переход доказан. Теорема 10 доказана.

Замечание 1. Все слагаемые в сумме при $l \geq 1, l < k$

$$D_l^l L(x, x, \dots, x) = \sum_{p=1}^l \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{\substack{n+1 \leq k_1, \dots, k_r \\ \sum_{i=1}^r k_i = m+p}} C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x)^{(n)} x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + h(x, \dots, x)^{(n)}, l \geq 1, l < k \quad (30)$$

структурно входят в сумму (24), т.к. $l \leq k$ и все условия в сумме (30) выполняются для суммы (24).

Замечание 2. Введем новые переменные:

$$k_1 - n = s_1, k_2 - n = s_2, \dots, k_r - n = s_r \Rightarrow s_1 \geq 1, s_2 \geq 1, \dots, s_r \geq 1 \quad k_1 = s_1 + n, \dots, k_r = s_r + n, \text{ тогда}$$

$$D_l^l L(x, x, \dots, x) = \sum_{p=1}^l \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{\substack{1 \leq s_1, \dots, s_r \\ \sum_{i=1}^r s_i = p}} C_{s_1, \dots, s_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x)^{(n)} x^{(s_1+n)j_1} \dots x^{(s_r+n)j_r} + h(x, \dots, x)^{(n)}, l \geq 1.$$

Теорема 11. Пусть $x = f_j(x, x, \dots, x)^{(2n-1)}, i = \overline{1, m}$ – локальная запись в системе (x) в базе X_m гладкого сечения $f : T^{2n-1} X_m \supset U(u_0^{2n-1}) \rightarrow T^{2n} X_m, n > 1$, являющегося лагранжевым сечением в окрестности $U(u_0^{2n-1})$ карты $(U(u_0^{2n-1}), \varphi_x)$; $\varphi_x : U(u_0^{2n-1}) \rightarrow \mathfrak{R}^{2mn}$ – координатный гомеоморфизм, где $\varphi_x(U(u_0^{2n-1})) = W_{\mathfrak{R}^{2mn}(x)}(x_0, x_0, \dots, x_0) \subset \mathfrak{R}^{2mn}, \varphi_x(U(u_0^{2n-1})) = (x, x, \dots, x)^{(2n-1)}$.

Тогда

$$f_i(x, x, \dots, x)^{(2n-1)} = \sum_{r=2}^n \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{\substack{1 \leq s_1, \dots, s_r \\ \sum_{i=1}^r s_i = n}} C_{s_1, \dots, s_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x)^{(n)} x^{(n+s_1)j_1} \dots x^{(n+s_r)j_r} + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{\substack{n+1 \leq k_1, \dots, k_r \\ \sum_{i=1}^r k_i = p}} C_{s_1, \dots, s_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x)^{(n)} x^{(n+s_1)j_1} \dots x^{(n+s_r)j_r} + h_i(x, \dots, x)^{(n)}. \quad (31)$$

Доказательство. На основании теоремы 7 имеем относительно старших производных линейную невырожденную систему уравнений

$$\epsilon_{(x)L}^i(x, x, \dots, x)^{(2n)} = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_l^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)j} + g_i(x, x, \dots, x)^{(2n-1)} = 0, i = \overline{1, m}.$$

Разрешая эту систему относительно старших производных, умножая обе части на $(\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}})^{-1}$, в силу

невырожденности функции $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}^m$ ($\det(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i} \partial x^{(n)j}}) \neq 0$), выражаем

$$f_i(x, x, \dots, x)^{(2n-1)} = - \sum_{j=1}^m (\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}})^{-1} g_j(x, x, \dots, x)^{(2n-1)},$$

в результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений $x = f_i(x, x, \dots, x)^{(2n-1)}, i = \overline{1, m}$.

Поскольку член со старшей производной в сумме

$$\varepsilon_{(x)L}^i(x, x, \dots, x) = \sum_{l=0}^{(2n)} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}} \right) \quad (32)$$

равен $D_t^n \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i}} \right)$, то на основании **теоремы 10** имеет место равенство

$$D_t^n \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i}} \right) = \sum_{p=1}^n \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r} C_{k_1, \dots, k_r}^{ij_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + h_i(x, \dots, x), \quad n \geq 1. \quad (33)$$

Из **замечания к теореме 10** все члены суммы (34) при $l < n$ структурно входят в сумму (33)

$$D_t^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i}} \right) = \sum_{p=1}^l \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r} C_{k_1, \dots, k_r}^{ij_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + h_i(x, \dots, x), \quad l \geq 1, \quad (34)$$

поэтому вся сумма (32) будет структурно иметь такой вид, как и выражение (33)

$$D_t^n \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i}} \right) = \sum_{p=1}^n \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r} C_{k_1, \dots, k_r}^{ij_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + h_i(x, \dots, x) \quad (n \geq 1). \quad (35)$$

По **теореме 7**, запишем биномиальный коэффициент

$$C_{2n}^{ij_1} (x, \dots, x) = \frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i} \partial x^{(n)j_1}}. \quad (36)$$

Слагаемым $x^{(2n)j_1}$, $j_1 = \overline{1, m}$ в сумме (35) с максимальным порядком производной, равным $2n$, имеющим коэффициенты вида (36) соответствует условие $\sum_{i=1}^{r-1} (k_i - n) = n \Rightarrow k_1 = 2n$, то есть $r = 1, p = n$.

Все остальные слагаемые в сумме (35) зависят от производных порядка не выше $2n - 1$. Поэтому выде-

ление в (35) слагаемых $x^{(2n)j_1}$, $j_1 = \overline{1, m}$ в отдельную сумму $\sum_{j_1=1}^m C_{2n}^{ij_1} (x, \dots, x) x^{(2n)j_1} = \sum_{j_1=1}^m \frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i} \partial x^{(n)j_1}} x^{(2n)j_1}$

означает исключение из суммы (35) слагаемых с $r = 1, p = n$.

Отрицание условия $(r = 1) \wedge (p = n)$ имеет вид $\overline{(r = 1) \wedge (p = n)} = \overline{r = 1} \vee \overline{p = n} = (r \neq 1) \vee (p \neq n)$.

Условие $(r \neq 1) \wedge (p \neq n)$ включается в условие $(p \neq n)$. Это следует из

$$\begin{aligned} (r \neq 1) &= (r \neq 1) \wedge 1 = (r \neq 1) \wedge ((p = n) \vee (p \neq n)) = (r \neq 1) \wedge (p = n) \vee (r \neq 1) \wedge (p \neq n). \\ (r \neq 1) \vee (p \neq n) &= ((r \neq 1) \wedge (p = n) \vee (r \neq 1) \wedge (p \neq n)) \vee (p \neq n) = \\ &= ((r \neq 1) \wedge (p = n)) \vee ((r \neq 1) \wedge (p \neq n)) \vee (p \neq n) = ((r \neq 1) \wedge (p = n)) \vee ((r \neq 1) \wedge (p \neq n)) \vee (p \neq n) \wedge 1 = \\ &= ((r \neq 1) \wedge (p = n)) \vee ((r \neq 1) \vee 1) \wedge (p \neq n) = ((r \neq 1) \wedge (p = n)) \vee ((r \neq 1) \vee 1) \wedge (p \neq n). \end{aligned}$$

Так как $((r \neq 1) \vee 1) = 1$ и $((r \neq 1) \vee 1) \wedge (p \neq n) = 1 \wedge (p \neq n) = (p \neq n)$ то,

$$((r \neq 1) \wedge (p = n)) \vee ((r \neq 1) \vee 1) \wedge (p \neq n) = ((r \neq 1) \wedge (p = n)) \vee (p \neq n).$$

Итак, $(r \neq 1) \vee (p \neq n) = ((r \neq 1) \wedge (p = n)) \vee (p \neq n) = (r \geq 2) \wedge (p = n) \vee (p \leq n - 1)$. (37)

Условия $((r \neq 1) \wedge (p = n))$ и $(p \leq n - 1)$ не пересекаются.

$$\begin{aligned}
 D_i^n \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i}} \right) &= \sum_{p=1}^n \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r} C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + h_i(x, \dots, x) = \\
 &= \sum_{j_1=1}^m C_{2n}^{j_1} (x, \dots, x) x^{(2n)j_1} + \sum_{p=1}^n \sum_{\substack{r=1 \\ (r \neq 1) \vee (p \neq n)}}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r} C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + h_i(x, \dots, x) = \\
 &= \sum_{j_1=1}^m C_{2n}^{j_1} (x, \dots, x) x^{(2n)j_1} + \sum_{p=1}^n \sum_{\substack{r=1 \\ ((r \geq 2) \wedge (p = n)) \vee (p \leq n - 1)}}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r} C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + h_i(x, \dots, x) = \\
 &= \sum_{j_1=1}^m \frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i} \partial x^{(n)j_1}} x^{(2n)j_1} + \sum_{r=2}^n \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r} C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + \\
 &+ \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r} C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + h_i(x, \dots, x). \tag{38}
 \end{aligned}$$

Тогда уравнения $\varepsilon_{(x)L}^i(x, x, \dots, x) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_l^i \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}} \right) = 0$ будут иметь структурный вид (38).

$$\begin{aligned}
 \sum_{j_1=1}^m \frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i} \partial x^{(n)j_1}} x^{(2n)j_1} &= - \sum_{r=2}^n \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r} C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} - \\
 &- \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r} C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + h_i(x, \dots, x). \tag{39}
 \end{aligned}$$

Так как $\left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)j_1}} \right)^{-1}$ зависит от производных порядка n , то при умножении обеих частей

формулы (39) на обратную матрицу $\left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)k} \partial x^{(n)j_1}} \right)^{-1}$ правая часть (39) сохранит свой структурный вид:

$$x^{(2n)i} = f_i(x, x, \dots, x) = \sum_{r=2}^n \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{n+1 \leq k_1, \dots, k_r} C_{k_1, \dots, k_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{\substack{n+1 \leq k_1, \dots, k_r \\ \sum_{i=1}^r k_i = m+p}} C_{k_1, \dots, k_r}^{ij_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(k_1)j_1} \dots x^{(k_r)j_r} + h_i(x, \dots, x). \quad (40)$$

При замене переменных в сумме (40)

$$k_1 - n = s_1, k_2 - n = s_2, \dots, k_r - n = s_r \Rightarrow s_1 \geq 1, s_2 \geq 1, \dots, s_r \geq 1 \quad k_1 = s_1 + n, \dots, k_r = s_r + n$$

получим

$$\begin{aligned} x^{(2n)i} = f_i(x, x, \dots, x) &= \sum_{r=2}^n \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{\substack{1 \leq s_1, \dots, s_r \\ \sum_{i=1}^r s_i = n}} C_{s_1, \dots, s_r}^{ij_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(n+s_1)j_1} \dots x^{(n+s_r)j_r} + \\ &+ \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{\substack{n+1 \leq k_1, \dots, k_r \\ \sum_{i=1}^r s_i = p}} C_{s_1, \dots, s_r}^{ij_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(n+s_1)j_1} \dots x^{(n+s_r)j_r} + h_i(x, \dots, x). \end{aligned} \quad (41)$$

Теорема 11 доказана.

Теорема 12. Пусть $x^{(2n)i} = f_i(x, x, \dots, x)$, $i = \overline{1, m}$ – локальная запись в системе (x) в базе X_m гладкого сечения $f : T^{2n-1}X_m \supset U(u_0^{2n-1}) \rightarrow T^{2n}X_m$, $n > 1$, являющегося лагранжевым сечением в окрестности $U(u_0^{2n-1})$. Тогда

$$f_i(x, x, \dots, x) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m a_{kji}(x, x, \dots, x) x^{(n)(n+1)k(2n-1)j} + \sum_{j=1}^m b_{ji}(x, x, \dots, x) x^{(n)(2n-1)j} + c_i(x, x, \dots, x) \quad i = \overline{1, m}.$$

Доказательство. Используем основное утверждение **теоремы 11** – формулу (31)

$$\begin{aligned} f_i(x, x, \dots, x) &= \sum_{r=2}^n \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{\substack{1 \leq s_1, \dots, s_r \\ \sum_{i=1}^r s_i = n}} C_{s_1, \dots, s_r}^{ij_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(n+s_1)j_1} \dots x^{(n+s_r)j_r} + \\ &+ \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{\substack{n+1 \leq k_1, \dots, k_r \\ \sum_{i=1}^r s_i = p}} C_{s_1, \dots, s_r}^{ij_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(n+s_1)j_1} \dots x^{(n+s_r)j_r} + h_i(x, \dots, x). \end{aligned} \quad (42)$$

Слагаемые со старшей производной в сумме $\sum_{r=2}^n \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{\substack{1 \leq s_1, \dots, s_r \\ \sum_{i=1}^r s_i = n}} C_{s_1, \dots, s_r}^{ij_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(n+s_1)j_1} \dots x^{(n+s_r)j_r}$

имеют вид $a(x, x, \dots, x) x^{(n)(n+n-1)(n+1)}$. Это следует из того что $r = 2$ и $s_1 + s_2 = n$, тогда решениями являются наборы $(s_1, s_2) = (n-1, 1), (s_1, s_2) = (n-2, 2), \dots$. Член со старшей производной такой $a(x, x, \dots, x) x^{(n)(2n-1)(n+1)}$.

Аналогично слагаемые со старшей производной во второй сумме $\sum_{p=1}^{n-1} \sum_{r=1}^p \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m \sum_{\substack{n+1 \leq k_1, \dots, k_r \\ \sum_{i=1}^r s_i = p}} C_{s_1, \dots, s_r}^{ij_1, j_2, \dots, j_r} (x, \dots, x) x^{(n+s_1)j_1} \dots x^{(n+s_r)j_r} + h_i(x, \dots, x)$ имеют вид $b(x, x, \dots, x) x^{(n)(n+n-1)}$.

Это следует из того, что $r=1, p=n-1$ и $s_1=p=n-1$, тогда решениями являются наборы $(s_1) = (n-1) \cdot \binom{(n)}{(2n-1)} b(x, x, \dots, x) x$.

Теорема 12 доказана.

Результаты, полученные методами дифференциальной геометрии, применимы в линейных и нелинейных задачах математической физики, а также в технических приложениях [20–23].

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин, В.А. Современная геометрия. Методы и приложения / В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М. : УРСС, 1994.
2. Рашевский, П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов, А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд, В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
5. Козлов, А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1319–1335.
6. Козлов, А.А. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 621–627.
7. Козлов, А.А. О глобальном управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2006. – № 3. – С. 63–64.
8. Галеев, Э.М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М. : Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.
9. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / С.Г. Ехилевский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.
10. Закон преобразования обобщенного импульса / С.Г. Ехилевский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.
11. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии»: ВИНТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.
12. Трофимов, В.В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В.В. Трофимов, А.Т. Фоменко. – М. : Факториал, 1995.
13. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, С.В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 117–123.
14. Вакуленко, С.П. К вопросу о нелинейных волнах в стержнях / С.П. Вакуленко А.К. Волосова, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2018. – Т. 16, № 3 (76). – С. 6–17.
15. Пастухов, Ю.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.
16. Пастухов, Ю.Ф. Тензор обобщенной энергии / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 78–100.
17. Пастухов, Ю.Ф. Группы преобразований, сохраняющие вариационную задачу со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 194–209.
18. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополюцк : ПГУ, 2018. – Режим доступа: <http://elibr.psu.by:8080/handle/123456789/22094>. – Дата доступа: 15.06.2018.
19. Пастухов Ю.Ф. “ Необходимые условия в обратной вариационной задаче ”, *Фундаментальная и прикладная математика*, 7:1(2001), 285-288.
20. Пастухов Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.

21. Пастухов, Д.Ф. Оптимальный порядок аппроксимации разностной схемы волнового уравнения на отрезке / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 167–186.
22. Наилучшее приближение монотонно убывающих функций кусочно-постоянными функциями в метрике квадратичного отклонения / Р.Ю. Карабанов // Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук : сб. науч. ст. IV науч.-практ. междунар. конф. (школы-семинара) молодых ученых: в двух частях. – 2018. – С. 48–53.
23. Пастухов, Ю.Ф. Квантование функции плотности нормального распределения в метрике квадратичного отклонения [Электронный ресурс] // Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, Р.П. Богуш / Информационно-коммуникационные технологии: достижения, проблемы, инновации (ИКТ-2018) : Электронный сб. ст. I междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 50-летию Полоцкого государственного университета, Новополоцк, 14–15 июня 2018 г. / Полоцкий государственный университет. – Новополоцк, 2018. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – С. 92–95.

Поступила 24.09.2018

LAGRANGIAN SECTIONS

Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV

The concept sections of Lagrange in fibered velocity spaces of arbitrary order is defined invariantly, their properties are formulated and proved, an invariant criterion for solving the problem is given, a necessary condition for Lagrangian sections and ODE systems of arbitrary even order is obtained.

Keywords: *inverse variational problem, stratified velocity space, Lagrangian section, Euler – Lagrange equations, smooth manifolds, energy tensor, tensor of generalized momentum, nondegenerate function.*

СОДЕРЖАНИЕ

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

<i>Богущ Р.П., Захарова И.Ю., Чертков В.М., Наумович Н.М.</i> Моделирование алгоритмов обработки данных радара с синтезированной апертурой космического аппарата для их передачи и формирования радиолокационного изображения	2
<i>Оськин А.Ф., Оськин Д.А.</i> Извлечение знаний из баз данных с помощью нейро-нечеткой модели	9
<i>Асламов Ю.П., Асламов А.П., Давыдов И.Г., Цурко А.В.</i> Разреженная вейвлетная декомпозиция сигналов вибрации для задачи распознавания образов	14
<i>Лоборева Л.А., Илюшин И.Э.</i> Виды сотрудничества роботов в робототехническом комплексе	24

ФИЗИКА

<i>Гордиенко А.И., Хейфец М.Л. Алексеева Т.А., Клименко С.А., Копейкина М.Ю.</i> Процессы самоорганизации структурообразования при интенсивной обработке материалов	31
<i>Вабищевич С.А., Васюков А.В., Вабищевич Н.В., Бринкевич Д.И., Просолович В.С.</i> Атомно-силовая микроскопия пленок позитивного диазохиноноволачного фоторезиста, имплантированного ионами бора	37
<i>Янушкевич В.Ф., Калинин С.В.</i> Влияние концентрации частиц среды над углеводородами на распространение радиоимпульсных сигналов	42
<i>Макаревич А.В., Шепелевич В.В., Шандаров С.М.</i> Экспериментальное изучение и теоретическая оптимизация коэффициента усиления предметной световой волны в кристалле $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$	49
<i>Давыдовская В.В., Шепелевич В.В.</i> Самодифракция двумерных световых пучков с различными распределениями интенсивностей	54

МАТЕМАТИКА

<i>Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К.</i> К вопросу о редукции неоднородной краевой задачи Дирихле для волнового уравнения на отрезке	60
<i>Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф.</i> Лагранжевы сечения	75