

MIESIĘCZNIK
POŁOCKI.

Т о м I.
Р о к 1818.

*«Вестник Полоцкого государственного университета»
продолжает традиции первого в Беларуси литературно-
научного журнала «Месячник Полоцкий».*



ВЕСНІК ПОЛАЦКАГА ДЗЯРЖАУНАГА УНІВЕРСІТЭТА
Серыя С. Фундаментальныя навукі

У серыі С навукова-тэарэтычнага часопіса друкуюцца артыкулы, якія прайшлі рэцэнзаваанне, змяшчаюць новыя навуковыя вынікі ў галіне інфарматыкі і матэматыкі, фізікі.

ВЕСТНИК ПОЛОЦКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия С. Фундаментальные науки

В серии С научно-теоретического журнала публикуются статьи, прошедшие рецензирование, содержащие новые научные результаты в области информатики и математики, физики.

HERALD OF POLOTSK STATE UNIVERSITY
Series C. Fundamental sciences

Series C includes reviewed articles which contain novelty in research and its results in computer science and mathematics, physics.

Адрес редакции:

Полоцкий государственный университет, ул. Блохина, 29, г. Новополоцк, 211440, Беларусь
тел. + 375 (214) 53 34 58, e-mail: vestnik@psu.by

Отв. за выпуск В.А. Груздев, С.Г. Ехилевский, Э.М. Пальчик.
Редактор Р.Н. Авласенок.

Подписано к печати 30.03.2015. Бумага офсетная 65 г/м². Формат 60×84¹/₈. Ризография.

Усл. печ. л. 12,32. Уч.-изд. л. 14,85. Тираж 100 экз. Заказ 694.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 534.21:621.391.81

ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ЛЧМ-СИГНАЛОВ В ПОЛОСАХ РАВНОЙ РАЗБОРЧИВОСТИ

*д-р техн. наук, проф. В.К. ЖЕЛЕЗНЯК; И.Б. БУРАЧЕНОК
(Полоцкий государственный университет)*

Исследованы наиболее значимые свойства широкополосных линейно-частотно-модулированных сигналов в полосах равной разборчивости. Предложено использовать частотно-временной анализ измерительных широкополосных линейно-частотно-модулированных сигналов при оценке степени защищенности каналов утечки речевой информации с целью повышения точности и разрешающей способности по частоте частотно-временной обработкой. Задача заключается в оценке степени защиты речевой информации от утечки по техническим каналам на соответствие установленным нормативными требованиями к показателям эффективности защиты информации.

Введение. Для оценки защищенности каналов утечки (КУ) речевой информации в качестве измерительного широко применяется гармонический сигнал, обоснованный корреляционной теорией разборчивости речи [1]. Однако для речевого сигнала с диапазоном частот от 100 Гц до 10 кГц оценка только по 20-ти гармоническим составляющим не исключает некоторые методические погрешности, так как прохождение измерительного сигнала через сложную среду, характеристики которой меняются в зависимости от различных условий, приводит к значительной деформации его спектральной плотности и увеличению погрешности оценки его тонкой частотно-временной структуры. Для уменьшения методической погрешности, обусловленной неравномерностями спектральной плотности речевого сигнала и искусственных шумов в широком диапазоне частот, чувствительностью уха, амплитудно-частотной характеристикой преграды, через которую распространяется речевой сигнал, а также обеспечения высокой чувствительности и разрешающей способности по частоте при оценке каналов утечки речевой информации в качестве измерительных в работе [2] предложено использовать широкополосные линейно-частотно-модулированные (ЛЧМ) сигналы в 20-ти полосах равной разборчивости (ПРР). Применение для оценки измерительных широкополосных ЛЧМ-сигналов значительно повышает требования к их исходным параметрам, поэтому исследования в данной области остаются актуальными и возникает теоретический и практический интерес к анализу и синтезу широкополосных ЛЧМ-сигналов в ПРР. Несмотря на то, что в последнее время большое количество работ посвящено теоретическим исследованиям и практическим применениям различных сигналов в системах передачи информации исследование широкополосных ЛЧМ-сигналов представляет интерес при оценке степени защищенности КУ речевой информации.

Цель данной работы – исследование спектральных и корреляционных характеристик широкополосных ЛЧМ-сигналов в полосах равной разборчивости и выявление наиболее значимых, обеспечивающих высокую чувствительность, точность, разрешающую способность и эффективность систем оценки степени защищенности КУ речевой информации.

Математическая модель широкополосного ЛЧМ-сигнала с большой базой. Достоинством широкополосных сигналов является возможность одновременного повышения его энергетического потенциала и разрешающей способности по частоте без уменьшения длительности модулирующих импульсов [3]. Практическая значимость ЛЧМ-сигналов заключается в существенном сжатии сигнала при приеме и увеличении его амплитуды над уровнем помех в надпороговой области. Из достоинств широкополосных ЛЧМ-сигналов следует отметить возможности их аппаратной реализации.

Для оценки защищенности КУ информации в работе [1] предложена методика автоматизированной обработки гармонического измерительного сигнала при разбиении спектральной плотности речевого сигнала на двадцать ПРР. На основе данной методики для оценки защищенности решено использовать измерительные широкополосные ЛЧМ-сигналы в ПРР с большой базой $B \gg 1$ и прямоугольной огибающей.

Проведем сравнительную оценку широкополосности ЛЧМ-сигналов в 20-ти ПРР. Используемые для оценки КУ речевой информации широкополосные измерительные ЛЧМ-сигналы в ПРР можно отнести к сигналам [4] с большой относительной полосой η , определяемой по следующей формуле [4]:

$$\eta = \frac{(f_g - f_n)}{(f_g + f_n)}, \quad (1)$$

где f_g, f_n – соответственно высшая и низшая частоты полос равной разборчивости.

Обозначим полосы равной разборчивости N_k , где k – порядковый номер полосы ($k = 1, \dots, 20$). Величина η для каждой полосы равной разборчивости представлена в таблице.

Величины относительных полос ЛЧМ-сигналов в двадцати полосах равной разборчивости

N_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
η	0,62	0,15	0,11	0,1	0,09	0,08	0,07	0,05	0,05	0,05

Окончание таблицы

N_k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
η	0,04	0,04	0,05	0,06	0,06	0,05	0,05	0,11	0,18	0,16

Как следует из таблицы, относительные полосы всех исследуемых широкополосных ЛЧМ-сигналов в ПРР изменяются в зависимости от ширины полосы в пределах $\eta \approx 0,01 \dots 1$. Согласно [4] $\eta = 1$ является максимальной величиной, допускаемой определением. Самое высокое значение относительной полосы $\eta = 0,62$ имеет широкополосный ЛЧМ-сигнал в первой N_1 ПРР.

В качестве исходных используем широкополосные ЛЧМ-сигналы $s_{ЛЧМ}(t)$ длительностью T_c . Частота $\omega(t)$ их высокочастотного заполнения нарастает в пределах заданного значения длительности от начала импульса к его концу по линейному закону [5; 6]:

$$\omega(t) = \omega_0 + \mu t, \quad -\frac{T_c}{2} \leq t \leq \frac{T_c}{2}, \quad (2)$$

где ω_0 – центральное значение частоты широкополосного ЛЧМ-сигнала; μ – скорость изменения мгновенной частоты во времени.

Таким образом, широкополосный ЛЧМ-сигнал на входе КУ описывается следующей математической моделью [5; 6]:

$$s_{ЛЧМ}(t) = \begin{cases} 0, & t < -\frac{T_c}{2}, \\ A_m \cos \left[\left(\omega_0 t + \frac{\mu}{2} t^2 \right) + \varphi_0 \right], & -\frac{T_c}{2} < t < \frac{T_c}{2}, \\ 0, & t > \frac{T_c}{2}. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь A_m – амплитуда широкополосного ЛЧМ-сигнала; φ_0 – начальная фаза, в рассматриваемом случае $\varphi_0 = 0$.

Полная фаза такого сигнала определяется выражением [5; 6]:

$$\Theta(t) = \omega_0 t + \frac{\mu}{2} t^2, \quad (4)$$

скорость изменения мгновенной частоты во времени [6]

$$\mu = \frac{\Delta\omega}{T_c} = \frac{2\pi(2\Delta f)}{T_c}, \quad (5)$$

где $\Delta\omega = 2\pi(2\Delta f)$ – полная девиация частоты; $\Delta f = \frac{f_g - f_n}{2}$ – девиация частоты.

Конкретизируя математическую модель исходного широкополосного ЛЧМ-сигнала для каждой ПРР, заметим, что, согласно [7], их длительность одинакова и равна T_c , причем точке $t_0 = 0$ соответствует середина каждого импульса, а их амплитуда имеет постоянное значение, равное $A_m = const = 1$.

На рисунке 1 показаны основные характеристики сформированного на основании выражения (3) в девятой N_9 ПРР измерительного широкополосного ЛЧМ-сигнала продолжительностью $T_c = 1$ с и частотой дискретизации $F_s = 44100$ Гц. Диапазон задаваемых частот от $f_n = 1600$ Гц до $f_g = 1780$ Гц, средняя

частота $f_0 = 1690$ Гц, девиация частоты $2\Delta f = 180$ Гц. Сформированному сигналу соответствуют временная, частотно-временная и фазовая характеристики, представленные на рисунках 1, а, б, в.

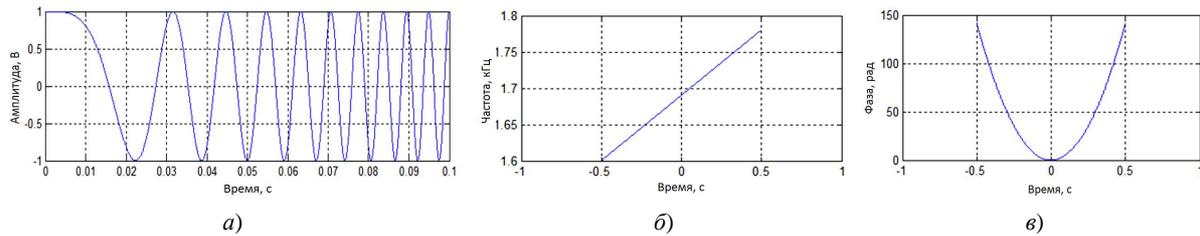


Рис. 1. Основные характеристики исходного широкополосного ЛЧМ-сигнала:
а – фрагмент измерительного широкополосного ЛЧМ-сигнала длительностью $T_c' = 0,1$ с;
б – закон изменения частоты; в – закон изменения фазы

При прохождении измерительного широкополосного ЛЧМ-сигнала через неоднородную среду распространения возможны различные искажения закона модуляции, которые приводят к изменению характеристик исходного сигнала и его частотно-временной структуры. Возможные изменения основных характеристик широкополосного ЛЧМ-сигнала представлены на рисунках 2, а, б, в.

На рисунке 2, а отображено изменение закона модуляции в течение времени, а также случайное запаздывание выходного сигнала относительно входного, обусловленное прохождением его через среду распространения и задержками аппаратуры. На рисунках 2, б и 2, в отображены соответственно искажения законов изменения частоты и фазы выходного сигнала.

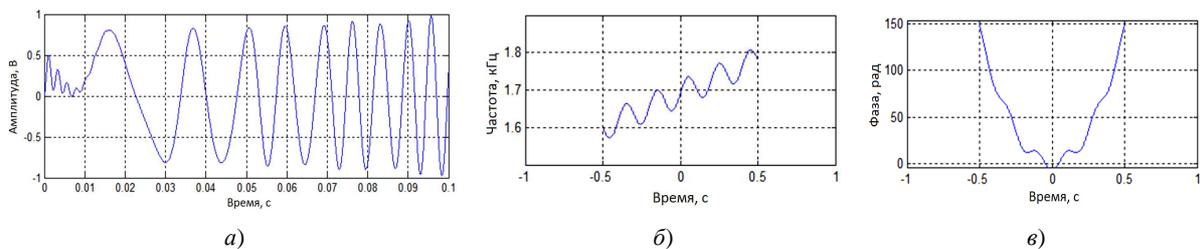


Рис. 2. Основные характеристики искаженного широкополосного ЛЧМ-сигнала:
а – фрагмент искаженного измерительного широкополосного ЛЧМ-сигнала длительностью $T_c' = 0,1$ с;
б – искажения закона изменения частоты; в – искажения закона изменения фазы

Сравнительный анализ характеристик широкополосного ЛЧМ-сигнала без искажения закона модуляции (рис. 1, а, б, в) и характеристик сигнала с искажениями (рис. 2, а, б, в) показывает возможные дополнительные пульсации в амплитудном спектре принятого сигнала. Амплитуда и частота пульсаций зависят от параметров, характеризующих искажение законов модуляций, представленных в работе [6].

Получение для характеристик выходных ЛЧМ-сигналов выражений, достаточно простых для анализа, связано с трудностями, так как в общем виде получение характеристик для широкого диапазона исходных данных (законов модуляций и различного вида огибающей) возможно только с использованием численных методов [6]. Для исследования фазовых искажений широкополосного ЛЧМ-сигнала, прошедшего неоднородную среду распространения, воспользуемся в качестве элементарных функций не обычными действительными значениями сигналов, а экспоненциальными функциями их мнимого аргумента по формуле Эйлера [8; 9]:

$$\cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} \left[e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)} \right]. \quad (6)$$

Здесь $j = \sqrt{-1}$ – принятое в технических дисциплинах обозначение для мнимой единицы.

Так как фаза (аргумент) комплексного числа – это угол между действительной осью и линией, проведенной из центра координат (пересечения осей x и y) до точки, представленной комплексным числом, то представление сигналов согласно выражению (6) позволяет определить фазы исходного и искаженного сигналов по формуле [10]:

$$\ln \dot{A} = \ln(A \cdot e^{j\varphi}) = \ln(A) + \ln(e^{j\varphi}) = \ln A + j \cdot \varphi, \quad (7)$$

где \dot{A} – комплексное число (в рассматриваемом случае широкополосный ЛЧМ-сигнал представлен в виде двух составляющих: реальной и мнимой).

Из выражения (7) следует, что действительная часть логарифма комплексного числа равна логарифму его абсолютного значения, а мнимая часть – величине его угла.

На рисунке 3 показаны фазовые характеристики исходного (рис. 1, а) и искаженного (рис. 2, а) широкополосных ЛЧМ-сигналов соответственно: зависимость фазового сдвига от абсолютного значения логарифма сигнала (рис. 3, а) и фазовый сдвиг в полярной системе координат (рис. 3, б).

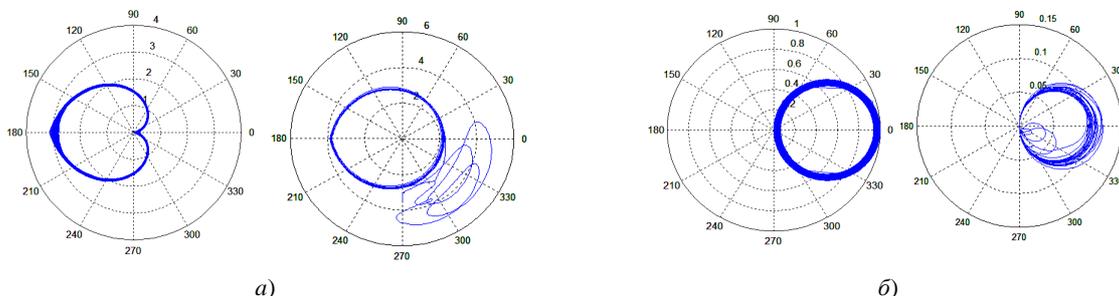


Рис. 3. Фазовые характеристики исходного и искаженного широкополосных ЛЧМ-сигналов:
 а – зависимость фазового сдвига от абсолютного значения логарифма сигнала;
 б – фазовый сдвиг в полярной системе координат

По изображениям на рисунке 3 можно определить изменение фазы искаженного измерительного ЛЧМ-сигнала относительно исходного, однако данный метод анализа является ограниченным и предназначен для исследования изменения фазовых характеристик сигнала либо по частоте, либо по времени. Поэтому в дальнейшем целесообразно рассмотреть возможность использования наиболее удобных и информативных методов анализа сигналов при оценке защищенности каналов утечки речевой информации с помощью широкополосных ЛЧМ-сигналов.

Спектральные свойства широкополосных ЛЧМ-сигналов. Спектральный анализ является одним из наиболее распространенных видов анализа сигналов. При данном виде анализа исключительно полезным является использование преобразования Фурье временной функции, описывающей сигнал, и все исследования, таким образом, переносятся в частотную область.

Широкополосный ЛЧМ-сигнал с большой базой приблизительно описывается модулем спектральной плотности [5]:

$$|F(\omega)| = \begin{cases} 0, & 0 < \omega < \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}; \\ A_m \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}, & \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} < \omega < \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}; \\ 0, & \omega > \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь ω_0 – центральное значение частоты широкополосного ЛЧМ-сигнала; A_m – амплитуда сигнала; μ – скорость изменения мгновенной частоты во времени; $\Delta\omega$ – полная девиация частоты.

Энергетический спектр такого сигнала [5]

$$W = \frac{\pi A_m^2}{2\mu} \quad (9)$$

постоянен в интервале частот $\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}; \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)$ и обращается в нуль вне указанной полосы.

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) $\Theta(t)$ для исследуемых широкополосных ЛЧМ-сигналов представлена следующим выражением [5; 6]:

$$\Theta(\omega) = -\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\mu} = -\frac{\pi B}{4} \cdot \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega_0^2}, \quad (10)$$

где B – база широкополосного ЛЧМ-сигнала, $B = 2\Delta f T_c = \frac{\omega_0 T_c}{\pi}$ [6].

Рассмотрим спектральные свойства двух широкополосных ЛЧМ-сигналов с большой базой продолжительностью $T_c = 1$ с и частотой дискретизации $F_s = 44100$ Гц: первого, сформированного в третьей N_3 ПРР и имеющего самую узкую полосу частот; второго, сформированного в двадцатой N_{20} ПРР и имеющего самую широкую полосу частот.

Исходными данными для широкополосного ЛЧМ-сигнала в третьей N_3 ПРР являются: диапазон задаваемых частот от $f_n = 570$ Гц до $f_s = 710$ Гц; средняя частота $f_0 = 640$ Гц; девиация частоты $2\Delta f = 140$ Гц; база сигнала $B = 140$.

Исходными данными для широкополосного ЛЧМ-сигнала в двадцатой N_{20} ПРР являются: диапазон задаваемых частот от $f_n = 7250$ Гц до $f_s = 10000$ Гц; средняя частота $f_0 = 8625$ Гц; девиация частоты $2\Delta f = 2750$ Гц; база сигнала $B = 2750$.

Спектральные характеристики данных сигналов представлены на рисунке 4.

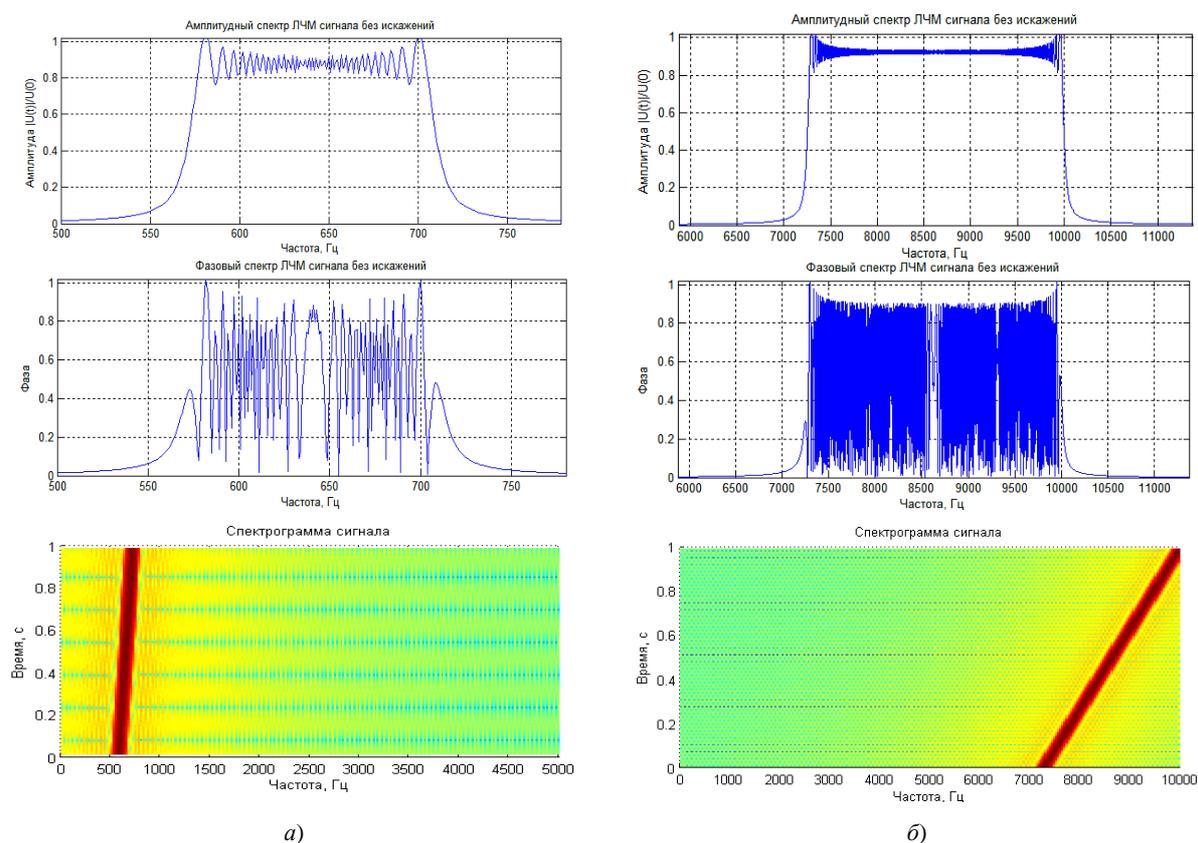


Рис. 4. Спектральные характеристики широкополосных ЛЧМ-сигналов:
а – в третьей N_3 полосе частот; б – в двадцатой N_{20} полосе частот

Таким образом, для широкополосных ЛЧМ-сигналов в ПРР, определяемых выражением (3), при $B \gg 100$ пульсации спектра пренебрегают и амплитудный спектр считают прямоугольным [11], что является удобным в устройствах обработки сигналов.

Достоинством спектрального анализа является возможность оценки по спектральным характеристикам изменения: средней частоты – центра тяжести спектра; «ширины» спектра; коэффициента асимметрии, характеризующего симметрию спектра относительно центральной частоты f_0 ; коэффициента эксцесса, характеризующего сглаженность спектра в окрестности центральной частоты f_0 [12], и др.

Однако в речевом сигнале самым информативным является одновременное изменение его частотно-временных характеристик. Для осуществления такого вида анализа методы, основанные на спектральной модели сигнала, недостаточно информативны, так как позволяют проводить анализ либо частотных, либо временных характеристик сигнала. Далее рассмотрим другие виды анализа сигналов.

Корреляционные свойства широкополосных ЛЧМ-сигналов в полосах равной разборчивости. Аналитические описания широкополосных ЛЧМ-сигналов в ПРР и их спектры, описанные выше, являются важнейшими характеристиками, на основании которых можно построить автокорреляционную и

взаимокорреляционную функции. Полученные функции позволят осуществить корреляционный анализ сигналов. Корреляционный анализ сигналов – это действие или процесс взаимосвязей, существующих между сигналами [13]. Данный вид анализа позволяет установить в сигналах наличие определенной связи изменения значений сигналов по независимой переменной, то есть когда большие значения одного сигнала (относительно средних значений сигнала) связаны с большими значениями другого сигнала (положительная корреляция) или, наоборот, малые значения одного сигнала связаны с большими значениями другого сигнала (отрицательная корреляция), или данные двух сигналов никак не связаны (нулевая корреляция).

Взаимокорреляционная функция (ВКФ) – функция времени, которая позволяет оценивать степень подобия двух сигналов, имеет размерность энергии и определяется выражением [6; 14]:

$$R_{1,2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t - \tau) dt, \quad (11)$$

где $s_1(t)$ и $s_2(t)$ – входной и выходной сигналы соответственно; τ – сдвиг по времени между сигналами; $R_{1,2}(\tau)$ – ВКФ двух сигналов: $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

Функция (11) позволяет дополнительно оценить степень сходства формы двух сигналов, а также их взаимное расположение по оси времени. В момент времени, когда выходной сигнал $s_2(t)$ наиболее подобен входному $s_1(t)$, корреляционная функция будет иметь максимум. Ширина этого максимума равна удвоенной длине исходного импульса и симметрична относительно центра.

Если $s_1(t) = s_2(t)$, то выражение (11) для $R_{1,2}(\tau)$ является выражением автокорреляционной функции (АКФ) сигнала $s(t) = s_1(t) = s_2(t)$ [6; 14]:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s(t - \tau) dt. \quad (12)$$

Автокорреляционную функцию можно рассматривать как частный случай ВКФ при одном и том же сигнале. Помимо этого, АКФ позволяет оценить среднестатистическую зависимость текущих отсчетов сигнала от своих предыдущих и последующих значений, а также выявить в сигнале наличие периодически повторяющихся элементов.

Использование данной функции позволяет измерять сдвиг между двумя сигналами, полученными с помощью временного смещения τ . Чем больше значение $|R_{1,2}(\tau)|$ отличается от $|R(0)|$, тем легче могут быть обнаружены два сигнала, отличающиеся временем запаздывания. Данный способ также позволяет измерить расстояние до преграды. Если излучаемый сигнал имеет вид $s_1(t)$, то после отражения от преграды возвращается сигнал следующего вида: $s_2(t) = \alpha s_1(t - 2T)$, где $2T$ – время прохождения сигнала до преграды и обратно. Пусть c – скорость распространения сигнала, d – расстояние от излучателя до преграды, тогда $d = cT$.

Оценку корреляции двух сигналов будем проводить на основе линейного коэффициента корреляции. Коэффициент корреляции рассчитывается по формуле [15]:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n (s_{1i} - \bar{s}_1)(s_{2i} - \bar{s}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (s_{1i} - \bar{s}_1)^2 (s_{2i} - \bar{s}_2)^2}}, \quad (13)$$

где $\bar{s}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_{1i}$ и $\bar{s}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_{2i}$ – среднее значение выборок измерительных ЛЧМ-сигналов на входе и выходе канала утечки речевой информации. Коэффициент корреляции изменяется в пределах от минус единицы до плюс единицы.

Согласно выражению (12) построены АКФ широкополосных ЛЧМ-сигналов в третьей N_3 (рис. 5, а) и двадцатой N_{20} ПРР (рис. 5, б). Так как все исследуемые широкополосные ЛЧМ-сигналы относятся к сигналам с большой базой, то они имеют узкую корреляционную функцию. Эти положительные качества широкополосных ЛЧМ-сигналов позволяют успешно их использовать в различных комплексах аппаратуры. Причем более широкому графику спектральной плотности соответствует более узкий график максимума АКФ и наоборот. Для измерительных ЛЧМ-сигналов с исходными данными, представленными в

работе [7], самый широкий максимум $\Delta t = 7,1$ мс имеет АКФ широкополосного ЛЧМ-сигнала в третьей N_3 ПРР; самый узкий максимум $\Delta t = 0,36$ мс – АКФ широкополосного ЛЧМ-сигнала в двадцатой N_{20} ПРР.

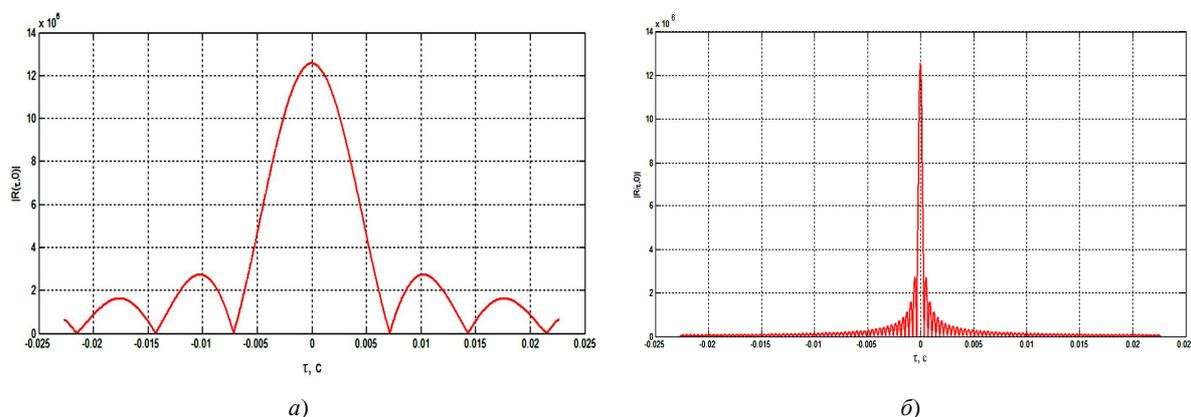


Рис. 5. Автокорреляционные функции широкополосных ЛЧМ-сигналов:
 а – в третьей N_3 полосе частот ($\Delta t = 7,1$ мс);
 б – в двадцатой N_{20} полосе частот ($\Delta t = 0,36$ мс)

При исследовании корреляционных свойств двух широкополосных ЛЧМ-сигналов, взятых в одной и той же полосе без зашумления (первый исходный с постоянным значением мощности $P_{U1} = 74$ дБ; второй с переменным значением мощности P_{U2} , лежащим в диапазоне от -74 до 74 дБ) установлено, что взаимная мощность $P_{U1,U2}$, определенная на основе ВКФ, равна их усредненной мощности. При снижении уровня выходного широкополосного ЛЧМ-сигнала наблюдается линейная зависимость мощности ВКФ $P_{U1,U2}$ от мощности P_{U2} . При различной длительности сигналов данная зависимость сохраняется. Коэффициент корреляции в условиях отсутствия шумов при заданном соотношении исходного широкополосного ЛЧМ-сигнала в любой ПРР с его ослабленной по уровню копией всегда равен 1.

Дальнейшие исследования проводились в условиях сильного зашумления. Для зашумления применялась хаотическая импульсная последовательность (ХИП). Основная особенность используемого шума ХИП – он имеет спектральную плотность, близкую к спектральной плотности речевого сигнала, и его график плотности распределения вероятности практически совпадает с графиком распределения вероятности нормального закона [14]. Коэффициент корреляции широкополосного ЛЧМ-сигнала с таким шумом стремится к нулю.

Исследовалась корреляция широкополосных ЛЧМ-сигналов при условии значительного ослабления на 50 дБ и сильного зашумления сигнала на выходе КУ при различных отношениях сигнал/шум (ОСШ) P_{U2}/P_{noise} в интервале от -30 до 20 дБ. Для этого использовались исходные широкополосные ЛЧМ-сигналы в третьей N_3 и двадцатой N_{20} ПРР с частотой дискретизации $F_s = 44100$ Гц и постоянным значением мощности $P_{U1} = 74$ дБ. Значения коэффициента корреляции оценивались при их длительностях $T_c = 1, 2, 4, 6, 10$ с и различных значениях базы. Для формирования сигналов в третьей N_3 ПРР задавались значения баз в соответствии с установленными длительностями T_c : $B = 140, 280, 560, 840, 1400$. При этих же условиях для формирования сигналов в двадцатой N_{20} ПРР задавались значения баз $B = 2750, 5500, 11000, 16500, 27500$.

Результаты эксперимента для двух полос равной разборчивости представлены на рисунке 6 (рис. 6, а – для сигналов в третьей N_3 полосе частот; рис. 6, б – для сигналов в двадцатой N_{20} полосе частот).

По результатам анализа следует, что при увеличении длительности сигналов в третьей N_3 и двадцатой N_{20} ПРР значение коэффициента корреляции увеличивается. Коэффициент корреляции в третьей N_3 полосе при одной и той же длительности (например, $T_c = 2$ с) больше, чем коэффициент корреляции в двадцатой N_{20} полосе. При условии, что значение мощности сигнала на выходе КУ на 50 дБ меньше мощности входного сигнала и ОСШ $P_{U2}/P_{noise} = 0$ дБ, коэффициент корреляции составит $k = 0,72$.

Таким образом, использование функций ВКФ и АКФ во временной области позволяют, снижая их шумовую составляющую, проявить свойства широкополосных ЛЧМ-сигналов и тем самым обнаружить

периодические составляющие сигналов на фоне шума. Выигрыш в помехоустойчивости системы в этом случае также зависит от величины амплитуды исходного измерительного сигнала.

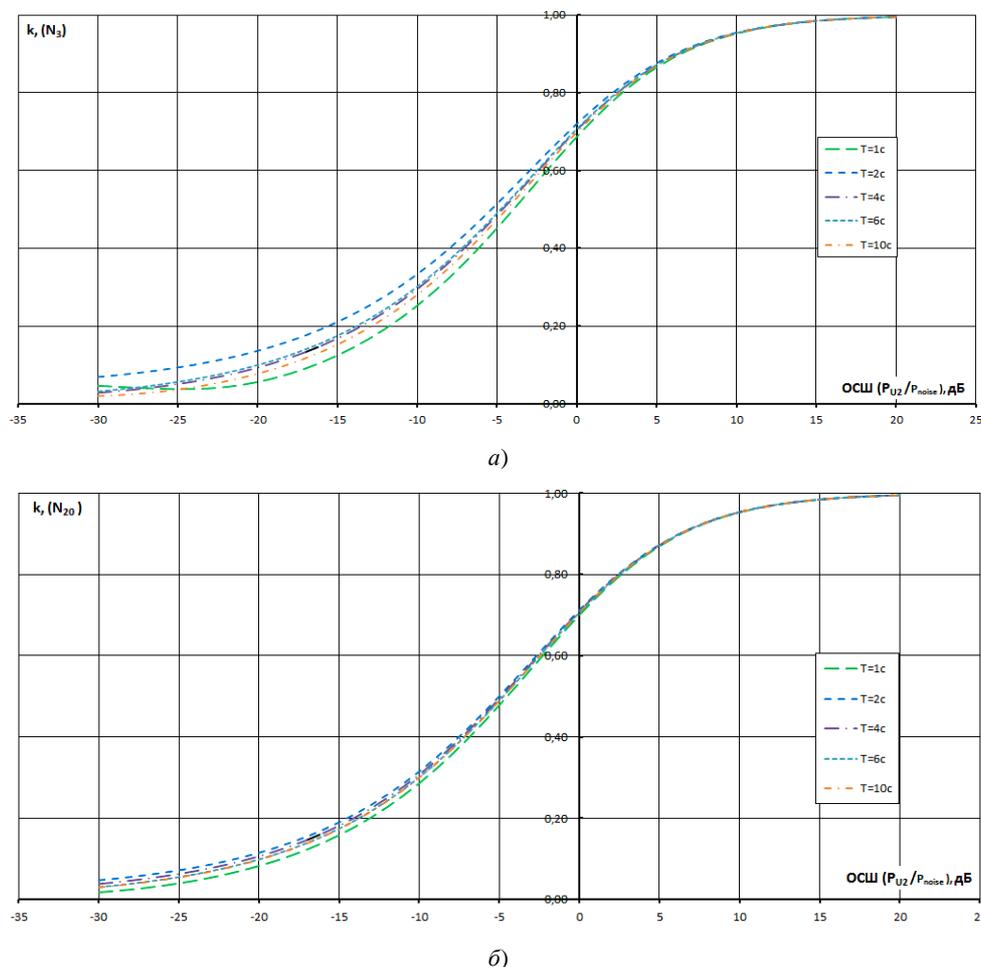


Рис. 6. Изменение коэффициента корреляции в зависимости от изменения ОСШ P_{U2} / P_{noise} широкополосного ЛЧМ-сигнала на выходе КУ: a – в третьей N_3 полосе частот; b – в двадцатой N_{20} полосе частот

С целью повышения точности обнаружения полезного сигнала на фоне шумов высокого уровня и других воздействующих факторов исходный измерительный сигнал при помощи частотно-временного преобразования Гильберта [14] представим в виде комплексной переменной как совокупность двух вещественных функций, объединенных в сумму вида

$$\dot{s}(t) = \text{Re}(t) + j \cdot \text{Im}(t), \tag{14}$$

где $\text{Re}(t)$ – вещественная переменная сигнала; $\text{Im}(t)$ – мнимая переменная сигнала.

Далее для удобства обработки сигнал $\dot{s}(t)$, представленный комплексной переменной, запишем в виде векторов в экспоненциальной форме [16]:

$$\dot{s}(t) = s(t) \cos \varphi(t) + j \cdot s(t) \sin \varphi(t) = s(t) \cdot e^{j\varphi(t)}, \tag{15}$$

где $s(t) = \sqrt{\text{Re}^2(t) + \text{Im}^2(t)}$ – огибающая сигнала; $\varphi(t) = \text{arctg} \frac{\text{Im}(t)}{\text{Re}(t)}$ – фаза сигнала.

Сигнал $\dot{s}(t)$, изображённый в виде вектора на плоскости, показан на рисунке 7, a . Длина этого вектора равна A , он наклонен к действительной оси под углом $\varphi(t)$. В разные моменты времени вектор $\dot{s}(t)$

имеет разную длину и занимает различное положение в зависимости от законов изменения вещественной $Re(t)$ и мнимой $Im(t)$ переменных сигнала. Величина этого вектора определяется как корень квадратный из суммы двух вещественных функций $Re(t)$ и $Im(t)$ сигнала $\dot{s}(t)$. Использование в качестве измерительного широкополосного ЛЧМ-сигнала, представленного в комплексной форме, позволяет получить выигрыш по амплитуде в 1,41 раза.

Далее рассмотрим возможность использования комплексно-сопряженного к нему сигнала в виде [16]

$$\dot{s}^*(t) = Re(t) - j \cdot Im(t) = s(t) \cos \varphi(t) - j \cdot s(t) \sin \varphi(t) = s(t) \cdot e^{-j\varphi(t)}, \quad (16)$$

где $*$ – операция комплексного сопряжения.

Комплексно-сопряженный сигнал представляет на плоскости вектор $\dot{s}^*(t)$, который является зеркальным отображением вектора сигнала $\dot{s}(t)$ относительно действительной оси и вращается со скоростью ω в противоположном направлении (рис. 7, б). Длина этого вектора равна A , однако он наклонен по отношению к действительной оси под противоположным углом $-\varphi(t)$. Конец этого вектора описывает окружность радиуса, длиной A .

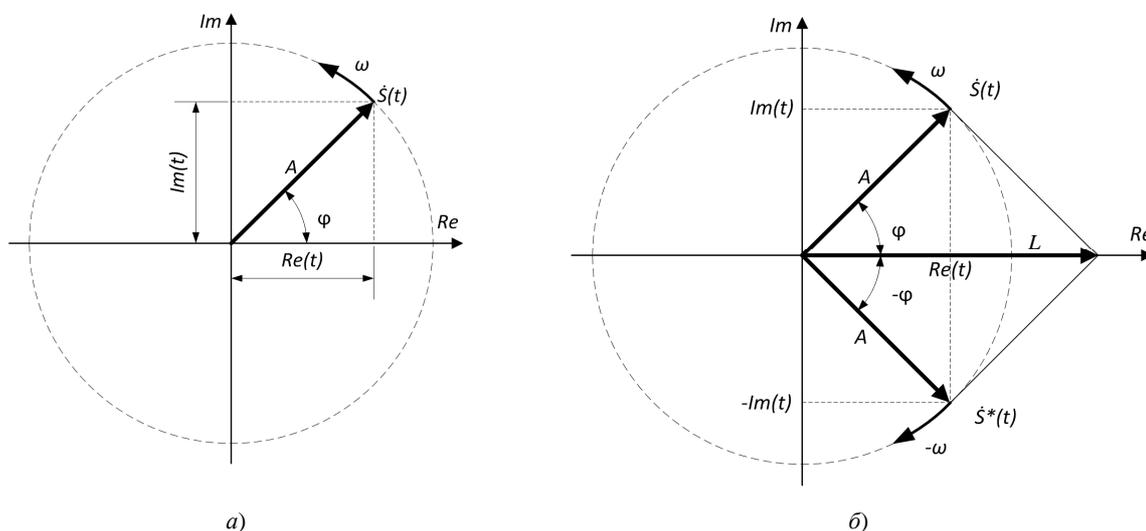


Рис. 7. Представление сигналов в виде комплексных переменных
а – аналитический сигнал в виде комплексной переменной; б – комплексно-сопряженные сигналы

Суммарный вектор $s_{12}(t)$, отображающий сигнал в любой момент времени, параллелен оси действительных чисел; длина этого вектора равна L . Мнимая часть сигнала в данном случае равна нулю.

Использование двух комплексно-сопряженных сигналов позволяет получить выигрыш по амплитуде сигнала в два раза.

Если представить два сигнала как

$$\dot{s}_1(t) = s_1(t) \cdot e^{j\varphi_1(t)} \quad \text{и} \quad \dot{s}_2(t) = s_2(t) \cdot e^{j\varphi_2(t)}, \quad (17)$$

тогда обобщенную двумерную ВКФ двух комплексно-сопряженных сигналов можно представить в следующем виде:

$$R_{1,2}(\tau, \Omega) = \frac{1}{E} \int_0^{T_c} \dot{s}_1(t) \dot{s}_2^*(t - \tau) e^{j\Omega t} dt, \quad (18)$$

где τ и Ω соответственно временное и частотное смещение сигнала; E – энергия сигнала; T_c – длительность сигнала.

Однако взаимокорреляционный процесс не ограничивается функциями во временной области. Зачастую для анализа тонкой частотно-временной структуры сигналов необходимо получить взаимокорреляционные функции и в частотной области.

Если $s_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$; $s_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$, тогда

$$R_{1,2}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2^*(\omega - \Omega) d\omega, \quad (19)$$

где $R_{1,2}(\Omega)$ – взаимокорреляционная функция; $F_1(\omega)$, $F_2^*(\omega - \Omega)$ – спектры исходного и принятого сигналов; Ω – частотная переменная сдвига по частоте между $F_1(\omega)$ и $F_2(\omega)$.

Или

$$R_{1,2}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1^*(\omega - \Omega) F_2(\omega) d\omega. \quad (20)$$

Спектральная АКФ также является частным случаем спектральной ВКФ при одном и том же сигнале. При условии, что $F(\omega) = F_1(\omega) = F_2(\omega)$, она может быть представлена выражением:

$$R(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega - \Omega) d\omega. \quad (21)$$

Взаимокорреляционная функция сигналов в частотной области равна нулю при любых временных сдвигах τ , при условии, что спектры этих сигналов не перекрываются на частотной оси. Сигналы, амплитудные спектры которых одинаковы, а фазовые отличаются, имеют одинаковую АКФ. Таким образом, корреляционная функция не зависит от фазового спектра.

На рисунке 8 отображена АКФ по времени и по частоте для широкополосного ЛЧМ-сигнала в третьей N_3 ПРП длительностью сигнала $T_c = 100$ мс ($B = 14$).

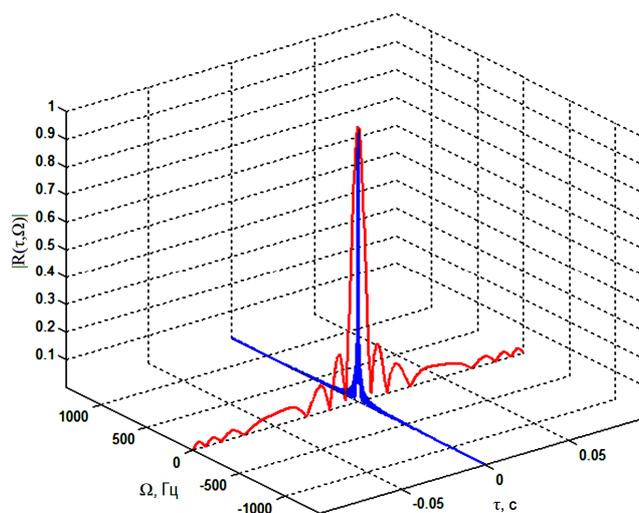


Рис. 8. Временная и частотная АКФ широкополосного ЛЧМ-сигнала в третьей N_3 полосе частот

Форма АКФ широкополосного ЛЧМ-импульса зависит от его базы, что проявляется в числе боковых лепестков и их форме. Взаимокорреляционная функция во временной области имеет максимум при нулевом запаздывании, то есть при $\tau = 0$. Ширина главного максимума определяется из соотношения $\pi B \frac{\tau}{T_c} = \pi$ и равна $\tau = \frac{T_c}{B}$. Таким образом, при больших значениях базы ($B \gg 1$) ширина главного максимума корреляционной функции значительно меньше длительности импульса.

Функции частотной корреляции применяются редко, однако нет никакой причины отдавать предпочтение временной форме, так как при обработке сигналов частотное представление может быть известно так же хорошо, как и его временная форма. Функция частотной корреляции имеет свойства, аналогичные свойствам функции временной корреляции: $|R_{1,2}(\Omega)| \leq |R(0)|$, то есть она максимальна при нулевом частотном сдвиге. Следует отметить, что оба представления взаимосвязаны и модификация одного из них приводит к изменению другого. В частности, некоторый временной сдвиг эквивалентен частному

фазовому сдвигу: $s(t-\tau) \rightleftharpoons F(f) \cdot e^{-2\pi j f \tau}$, а частотный сдвиг эквивалентен временному фазовому сдвигу: $F(f-\Phi) \rightleftharpoons s(t) \cdot e^{+2\pi j \Phi t}$. Исходя из этого двумерная обобщенная ВКФ, характеризующая разрешающую способность системы по времени и частоте (способность системы различать сигналы со смещением по времени и частоте один относительно другого), может быть представлена как

$$R_{1,2}(\tau, \Omega) = \frac{1}{2\pi E} \int_{-\omega_H}^{\omega_B} F_1(\omega) F_2^*(\omega - \Omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (22)$$

где ω_H и ω_B – нижняя и верхняя границы заданной полосы широкополосного ЛЧМ-сигнала.

Разрешение системы при обнаружении объектов характеризуется квадратом функции $|R(\tau, \Omega)|^2$, на основании которого можно получить отдельно характеристики разрешения по времени и по частоте. Разрешение по времени определяется выражением [6]:

$$\Delta\tau = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau, 0)|^2 d\tau}{R^2(0, 0)}. \quad (23)$$

Установлено, что $\Delta\tau$ достигает минимального значения тогда, когда спектр будет равномерен в пределах занимаемой ширины.

Постоянная разрешения по частоте определяется следующим образом [6]:

$$\Delta\Omega = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |R(0, \Omega)|^2 d\Omega}{R^2(0, 0)}. \quad (24)$$

На рисунке 9 приведены значения разрешения для измерительных широкополосных ЛЧМ-сигналов в 20-ти ПРР. Разрешение по времени отображено на рисунке 9, а. Согласно графику самое малое значение постоянной разрешения по времени соответствует девятнадцатой N_{19} и двадцатой N_{20} ПРР. Следует отметить, что сигнал, для которого постоянная разрешения по времени при заданном значении τ имеет меньшее значение, обладает большими возможностями разрешения по частоте. На рисунке 9, б отображено разрешение по частоте. В рассматриваемом нами случае преграда – это неподвижный объект, поэтому частота отраженного от нее сигнала в каждой из ПРР будет отличаться на бесконечно малую величину сдвига по частоте.

Возможность системы по одновременному разрешению по времени и частоте оценивается произведением $\Delta\tau$ и $\Delta\Omega$ [9]. График постоянной разрешения системы одновременно по времени и частоте повторяет форму спектральной плотности речевого сигнала.

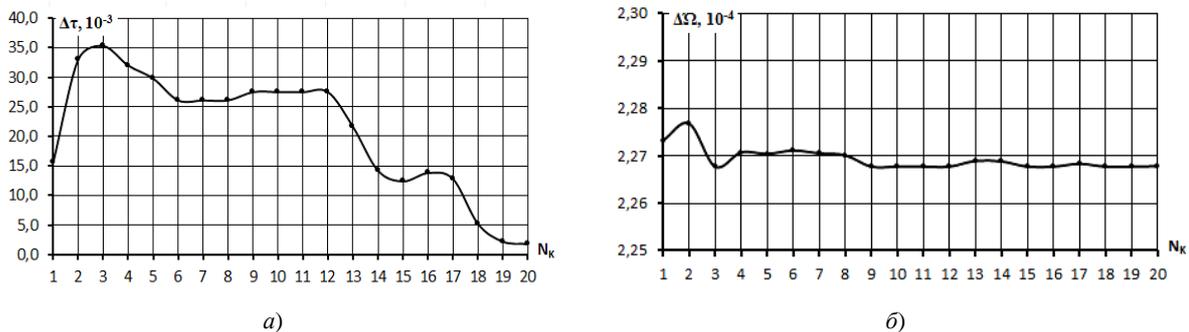


Рис. 9. Разрешения измерительных широкополосных ЛЧМ-сигналов в двадцати полосах разной разборчивости: а – постоянные разрешения по времени; б – постоянные разрешения по частоте

Таким образом, функции ВКФ и АКФ позволяют выявить наиболее важные свойства широкополосного ЛЧМ-сигнала. При помощи корреляционного анализа можно не только осуществить анализ измерительных широкополосных ЛЧМ-сигналов одновременно и по времени, и по частоте, что является более информативным при идентификации сигнала по сравнению со спектральными методами анализа, но и обнаружить периодическую составляющую сигнала на фоне шумов высокого уровня и других воздействующих факторов.

Заключение. В результате проведенного исследования спектральных и взаимокорреляционных свойств широкополосных ЛЧМ-сигналов в ПРР выявлены наиболее значимые их свойства, позволяющие проводить частотно-временной анализ сигналов на выходе КУ речевой информации.

Использование для анализа функций ВКФ комплексно-сопряженных исходного измерительного и выходного широкополосных ЛЧМ-сигналов обеспечивает выигрыш в ОСШ на выходе канала утечки на 6 дБ. Одновременная частотно-временная корреляционная обработка измерительных широкополосных ЛЧМ-сигналов в ПРР является эффективным методом оценки степени защищенности КУ речевой информации на фоне шумов высокого уровня и других факторов с высокой точностью и разрешающей способностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Железняк, В.К. Защита информации от утечки по техническим каналам: учеб. пособие / В.К. Железняк. – СПб.: ГУАП, 2006. – 188 с.
2. Раханов, К.Я. Широкополосная линейно-частотная модуляция сигнала для оценки разборчивости речи в каналах утечки информации / К.Я. Раханов, В.К. Железняк // Изв. Нац. акад. наук Беларуси. Серия физико-технических наук; редкол.: П.А. Витязь (гл. ред.) [и др.]. – Минск: Белорус. наука, 2014. – С. 88–95.
3. Ширман, Я.Д. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех / Я.Д. Ширман, В.Н. Манжос. – М.: Радио и связь, 1981. – 416 с.
4. Хармут, Х.Ф. Несинусоидальные волны в радиолокации и радиосвязи / Х.Ф. Хармут; пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1985. – 376 с.
5. Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов по спец. «Радиотехника» / С.И. Баскаков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1988. – 448 с.
6. Денисенко, А.Н. Статистическая теория радиотехнических систем / А.Н. Денисенко. – М.: АРИ, 2007. – 200 с.
7. Бураченко, И.Б. Представление параметров широкополосного линейно-частотно-модулированного сигнала для оценки разборчивости речи в технических каналах утечки информации / В.К. Железняк, К.Я. Раханов, И.Б. Бураченко // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия С. Фундаментальные науки. – 2014. – № 12. – С. 2–12.
8. Общая теория связи / Д.Л. Бураченко [и др.]; под ред. Л.М. Финка. – Л.: ВАС, 1970. – 412 с.
9. Теория электрической связи: учебник для вузов / А.Г. Зюко [и др.]; под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 1999. – 432 с.
10. Скучик, Е. Основы акустики / Е. Скучик. – Т. 1. – М.: Мир, 1976. – 520 с.
11. Кочемасов, В.Н. Формирование сигналов с линейной частотной модуляцией / В.Н. Кочемасов, Л.А. Белов, В.С. Оконешников. – М.: Радио и связь, 1983. – 192 с.
12. Левин, Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. – М.: Сов. радио, 1969. – 752 с.
13. Бурдик, В.С. Анализ гидроакустических систем / В.С. Бурдик; пер. с англ. – Л.: Судостроение, 1988. – 392 с.
14. Сергиенко, А.Б. Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко. – СПб.: Питер, 2005. – 604 с.
15. Общая теория статистики: учебник / под ред. Р.А. Шмойловой. – 3-е изд., перераб. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 560 с.
16. Трахман, А.М. Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов / А.М. Трахман. – М.: Сов. радио, 1972. – 352 с.

Поступила 02.03.2015

TIME-FREQUENCY FEATURES OF BROADBAND CHIRP SIGNALS IN THE BANDS OF EQUAL INTELLIGIBILITY

V. ZHELEZNYAK, I. BURACHONAK

Studied the most important properties of broadband linearly frequency-modulated signals in the bands of equal intelligibility. Proposed to use time-frequency analysis of measuring broadband linearly frequency-modulated signals when assessing the level of protection leakage channels of speech information in order to increase the accuracy and frequency resolution by frequency-time processing.

УДК 621.317+681.849

**ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТА МОРЛЕ ПРИ СОЗДАНИИ МЕТОДОВ И АППАРАТУРЫ
ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРТИЗ МАТЕРИАЛОВ ЦИФРОВОЙ ВИДЕОЗВУКОЗАПИСИ**

д-р техн. наук, проф. О.В. РЫБАЛЬСКИЙ
(Национальная академия внутренних дел, Киев);

канд. техн. наук, доц. В.И. СОЛОВЬЕВ
(Восточноукраинский национальный университет имени В. Даля, Луганск);

д-р техн. наук, проф. В.К. ЖЕЛЕЗНЯК
(Полоцкий государственный университет)

Рассматриваются особенности вейвлета Морле, побудившие авторов к его использованию для построения программ, предназначенных для проведения экспертиз материалов и аппаратуры цифровой видео- и звукозаписи. Показано, что вейвлет Морле обладает наилучшей избирательной способностью как во временной, так и в частотной области.

Введение. С появлением и широким использованием цифровой аппаратуры записи эксперты, проводящие экспертизу материалов и средств видеозвукозаписи, столкнулись с серьезной проблемой, заключающейся в отсутствии методик и аппаратуры, позволяющей получать достоверные результаты такой экспертизы [1]. При разработке методик и средств были созданы основы теории выявления следов цифровой обработки фонограмм и созданы первые методики и программы для проведения указанной экспертизы, основанные на вейвлет-анализе исследуемых сигналов [1–3]. Но разработанные методики и программы не полностью удовлетворяли требованиям экспертизы. В частности, они не полностью соответствовали теории криминалистической идентификации [4]. Поэтому для дальнейшего развития этого направления в разработке экспертного инструментария нами был предложен новый подход, основанный на исследовании фрактальной структуры цифровых сигналов [5]. При этом для выделения фракталов из сигналов был использован вейвлет Морле. Цель данной работы – показать те соображения, которыми мы руководствовались при выборе этого вейвлета для построения разрабатываемых программ.

Основная часть. Практическое применение фрактальной теории в экспертизе материалов и аппаратуры видео- и звукозаписи позволило значительно повысить достоверность результатов такой экспертизы и ее производительность [5]. Выявление фрактальности (и самих фракталов) в сигналах изображения и речи, записанных на аппаратуре видеозвукозаписи, как и фрактальности и фракталов в собственных шумах такой аппаратуры, является основой применения фрактальной теории для создания методологии, методик и средств экспертизы цифровой аппаратуры звукозаписи (ЦАЗЗ) и цифровой аппаратуры видеозаписи (ЦАВЗ). Известно, что лучшим инструментом для выявления фрактальности в сигналах и выделения из них фракталов являются вейвлеты [6]. В работе [1] было экспериментально доказано, что вейвлет Морле наилучшим образом подходит для экспертных исследований оригинальности и подлинности цифровых фонограмм (ЦФ) с использованием программного обеспечения, построенного на основе применения вейвлет-преобразования, в частности программы «Академия» (рис. 1).

В этом эксперименте проводилось сравнение способности разных вейвлетов («Мексиканская шляпа», вейвлета Майера, вейвлета Габора, вейвлета Морле и т.п.) к выделению характерных признаков цифровой обработки в ЦФ на вейвлет-портретах. В результате проведенного эксперимента было установлено, что вейвлет Морле обеспечивает наилучшую детализацию нелинейных искажений на вейвлет-портрете. Однако впоследствии пришлось отказаться от использования этой программы при проведении экспертиз материалов и средств видеозвукозаписи, что обуславливалось рядом недостатков, присущих этой программе [4], и заставило искать другие методы и средства для проведения такой экспертизы.

Проведенные исследования показали, что решение проблемы экспертизы ЦФ и цифровых видеозаписей (ЦВЗ) лежит в использовании фрактального характера цифрового сигнала [5]. Фрактальность такого сигнала четко проявляется на рисунке 1 в виде ветвлений сигнала на вейвлет-портрете. При этом признаки обработки сигнала проявляются в виде дополнительных ветвей, поскольку в обработанном сигнале появляются дополнительные частотные составляющие от устройства обработки [1]. Естественно, данный тип вейвлета был избран для выделения фракталов из ЦФ и ЦВЗ.

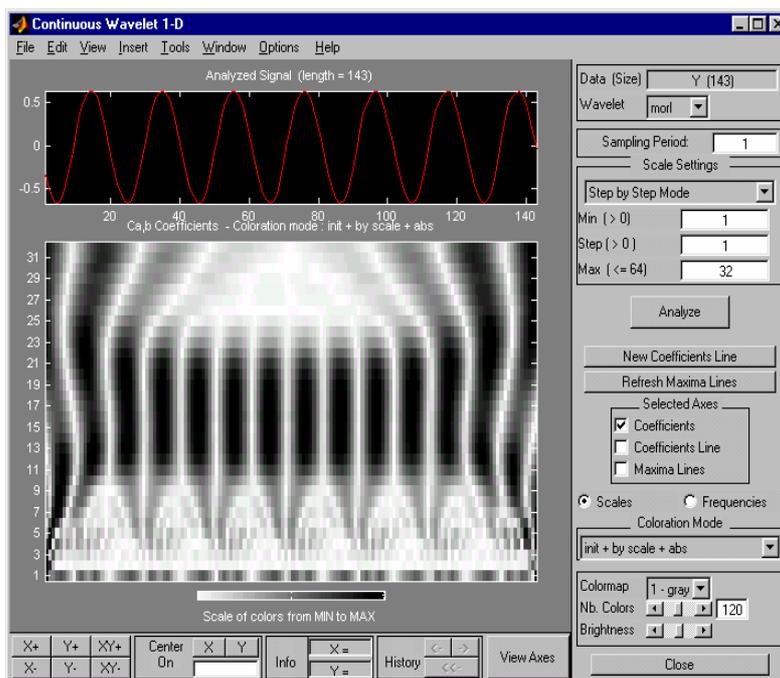
Но почему именно вейвлет Морле обеспечивает наилучшее выделение фракталов из цифровых сигналов? Ответ на этот вопрос кроется в рассмотрении «конструкции» этого вейвлета. Вейвлет Морле представляет собой комплексную неортогональную функцию. Во-первых, этот вейвлет сконструирован из колокольного импульса (гауссиана), во-вторых, в соответствии с известным принципом неопределен-

ности Гейзенберга имеет наилучшее произведение эффективной ширины импульса на эффективную ширину спектра. Действительно, вейвлет-функция Морле во временной области записывается как

$$\Psi(t) = \pi^{-\frac{1}{4}} \left(e^{j\xi_0 t} - e^{-\frac{\xi_0^2}{2}} \right) e^{-\beta^2 t^2} = \pi^{-\frac{1}{4}} \left(e^{j\omega_c t} - e^{-\frac{\omega_c^2}{2}} \right) e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (1)$$

где $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$; ω_c – частота гетеродинамирования гауссиана (носитель) [7].

Фактически этот вейвлет в своей действительной части представляет собой отрезок косинусоиды, а в мнимой – отрезок синусоиды, модулированной гауссианом, что вытекает из (1).



Вейвлет-портрет (вейвлет Морле) обработанного цифрового сигнала

Известно [7], что эффективная ширина импульса для гауссиана

$$T_3 = \frac{1}{2\beta}, \quad (2)$$

а эффективная ширина спектра

$$P_3 = \frac{\beta}{2\pi}. \quad (3)$$

Из принципа Гейзенберга вытекает, что для импульса любой формы

$$T_3 \cdot P_3 \geq \frac{1}{4\pi} \quad (\text{при размерности в герцах}) \quad (4)$$

или

$$T_3 \cdot P_3 \geq \frac{1}{2} \quad (\text{при размерности в рад/с}). \quad (5)$$

То есть для любой формы импульса произведение эффективной ширины импульса на эффективную ширину спектра не может быть меньше величин, указанных в (4) и (5). При этом только для гауссиана это неравенство переходит в равенство.

Следовательно, для принятого в гауссиане значения $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ произведение эффективной ширины импульса на эффективную ширину спектра составит:

- для размерности в герцах

$$T_3 \cdot P_3 = \frac{1}{2\beta} \cdot \frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{4\pi}; \quad (6)$$

- для размерности в рад/с

$$T_3 \cdot P_3 = \frac{2\pi}{2\beta} \cdot \frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Полученные результаты свидетельствуют: во-первых, для импульсов любой другой формы это значение будет большим, что свидетельствует о наилучшей избирательной способности вейвлета, построенного на гауссиане, как во временной, так и в частотной области; во-вторых, комплексность вейвлета Морле обеспечивает проведение качественного прямого и обратного преобразования сигнала, поскольку позволяет учитывать фазу сигнала и предоставляет возможность исследований его малых временных отрезков.

Эти особенности вейвлета Морле обусловили необходимость его использования для выделения фракталов как из сигналов собственных шумов аппаратуры записи, так и из речевых сигналов, записанных в цифровой форме.

В заключение исследования можно сделать следующий **вывод**: свойства вейвлета Морле наиболее полно отвечают требованиям построения методической и программно-аппаратной базы для проведения экспертиз материалов и средств видеозвукозаписи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыбальський, О.В. Застосування вейвлет-аналізу для виявлення слідів цифрової обробки аналогових і цифрових фонограм у судово-акустичній експертизі / О.В. Рыбальський. – К.: НАВСУ, 2004. – 167 с.
2. Спосіб виявлення слідів цифрової обробки аналогових і цифрових сигналів: пат. 73631 України, МКВ G 11 b 27/00, 27/36 / Рыбальський О.В., Геранін В.О., Жаріков Ю.Ф., Орлов Ю.Ю., Волкович С.Л., Струк І.О. (Україна); НАВСУ. – № 2003076921; заявл. 22.07.03; опубл. 15.08.05 // Бюл. № 8.
3. Свідоцтво № 11088 про реєстрацію авторського права на твір. Комп'ютерна програма «Академія» / Рыбальський О.В., Волкович С.Л. (Україна); Рыбальський О.В. – № 10986; заявл. 26.07.2004; опубл. 17.09.2004.
4. Рыбальский, О.В. Основы технологии создания инструментария проведения экспертизы сложных технических объектов / О.В. Рыбальский, Т.А. Татарникова // Закон и жизнь: междунар. науч.-практ. правовой журнал. – Кишинев, 2013. – № 11(263). – С. 29–31.
5. Рыбальский, О.В. К развитию теории, методов и средств проведения экспертизы материалов цифровых фото, видео- и звукозаписи / О.В. Рыбальский, В.И. Соловьев // Сучасна спеціальна техніка. – К., 2012. – № 3(30). – С. 119–121.
6. Мала, С. Вейвлеты в обработке сигналов / С. Мала; пер. с англ. – М.: Мир, 2005. – 671 с.
7. Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – М. – Ижевск: Dynamica, 2001. – 463 с.

Поступила 05.03.2014

THE APPLICATION OF THE MORLET WEVLET FOR CREATION METHODS AND EQUIPMENT FOR EXAMINATION OF MATERIALS OF DIGITAL VIDEO AND SOUND RECORDING

O. RYBALSKY, V. SOLOVYOV, V. ZHELEZNYAK

The features of wevlet Molet, impelling authors to his use for the construction of the programs intended for realization of examinations of materials and apparatus digital to video and audio recording, are considered in the article. It is shown that wevlet Molet possesses the best electoral ability both in a temporary and in frequency realm.

УДК 621.372.037.372; 621.391.26

**РАСШИРЕНИЕ АЛФАВИТА СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННЫХ МАТРИЦ
ДЛЯ ПЕРЕДАЧ ДЕКАМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА****С.С. ДВОРНИКОВ***(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет);**канд. техн. наук Д.С. РЯБЕНКО**(Полоцкий государственный университет)*

Анализируется возможность расширения информационного алфавита сигналов, сформированных на основе частотно-временных матриц для средств радиосвязи декаметрового диапазона. Предлагается метод, обеспечивающий увеличение размерности матриц за счет дополнительной модуляции поднесущих частот функциями Уолша. Представлены результаты компьютерного моделирования по оценке эффективности разработанного подхода. Обосновывается сохранение требуемой помехоустойчивости передачи в целом.

Введение. К системам радиосвязи, функционирующим в условиях радиоэлектронного подавления, предъявляются жесткие требования по обеспечению защищенности их радиоканалов. Указанные мероприятия, согласно [1], направлены как на снижение негативных последствий деструктивного воздействия, так и на ограничение несанкционированного доступа. К ним относят режимы с псевдослучайной перестройкой рабочей частоты (ППРЧ) и методы прямого расширения спектра на основе псевдослучайных последовательностей (ПСП) [2]. Однако для декаметрового диапазона применение данных методов связано с определенными сложностями ввиду ограниченности по частоте используемых радиоканалов. Кроме того, применение большинства помехоустойчивых способов ведет к снижению информационной скорости, что является нежелательным явлением.

Таким образом, необходим поиск решений, позволяющих при сохранении допустимой помехоустойчивости не только сохранить, но и повысить скорость передачи, в частности за счет увеличения размерности информационного алфавита. На поиск такого решения и направлено данное исследование.

Предложения по расширению информационного алфавита. Для обеспечения скрытности и помехоустойчивости передач в декаметровом диапазоне широко используются системы радиосвязи (СРС), в которых сигналы формируются на основе частотно-временных матриц (ЧВМ) [3]. Особенность такого подхода состоит в том, что каждый сигнальный символ кодируется определенной комбинацией частот на заданном временном интервале, поэтому его передача во времени эквивалентна режиму с ППРЧ. В результате информационная емкость такого сигнала определяется размерностью его ЧВМ, то есть чем больше размерность матрицы, тем выше информационная емкость и, как следствие, скорость передачи.

Однако для декаметровых СРС размерность ЧВМ ограничивается частотной емкостью выделенного радиоканала, поскольку ширина спектра такого сигнала будет определяться в соответствии с выражением

$$\Delta F = 1/T_h, \quad (1)$$

где T_h – длительность субчастоты информационного сигнала.

Очевидно, что сам по себе режим ППРЧ обеспечивает определенную скрытность, если порядок смены частот в ЧВМ неизвестен системе мониторинга. Причем чем больше размерность ЧВМ, тем выше скрытность передачи. Согласно [3] размерность ЧВМ определяет помехозащищенность СРС. Заметим, что для ЧВМ режим ППРЧ является внутрисимвольным [4], так как каждый информационный элемент длительностью T_s передается N поднесущими, длительность каждой из которых равна T_h . Такой подход позволяет по результатам приема всех поднесущих в пределах интервала T_s принимать решение о значении символа. Следовательно если в результате деструктивных воздействий отдельные поднесущие сигнала и будут подавлены, то, используя мажоритарный критерий, по оставшимся непораженным помехами частотным позициям ЧВМ можно принять правильное решение.

В качестве примера на рисунке 1 показана ЧВМ сигнала, у которого одна из поднесущих подавлена помехой (помеха на частоте f_2).

Между тем эффективность мажоритарного подхода определяется размерностью ЧВМ (чем выше размерность, тем сильнее помехоустойчивость ЧВМ). Однако в ограниченном частотном канале обеспечение большого значения N связано с серьезными техническими сложностями.

Представленные выше аргументы стимулируют поиск новых подходов к решению данного вопроса. В частности, предлагается расширить алфавит канального кодирования за счет дополнительной модуляции поднесущих ЧВМ посредством ПСП, то есть последовательно осуществлять перемножение каждого частотного элемента ЧВМ с модулирующей последовательностью [4]. В результате указанная операция умножения приведет к расширению спектра, то есть полезный сигнал трансформируется в широкополосный сигнал (ШПС), вследствие чего возрастет его энергетическая скрытность по отношению к несанкционированным средствам радиомониторинга.

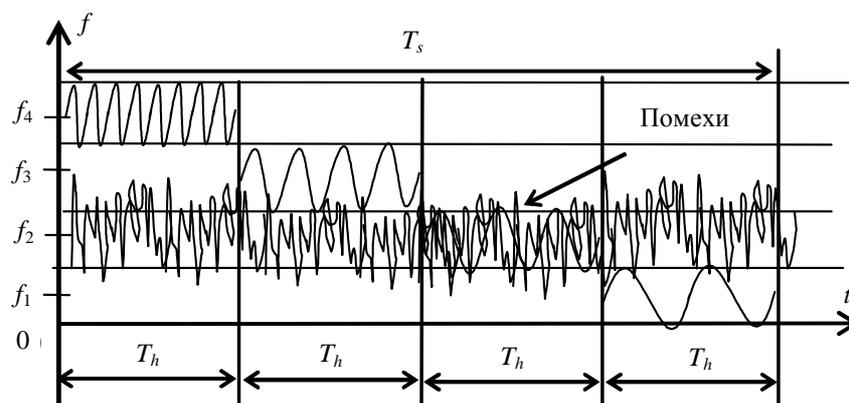


Рис. 1. Частотно-временная матрица, у которой одна из субчастот подавлена помехой

Предложенный подход открывает новые возможности по экономии частотного ресурса, если большую часть информации кодировать за счет выбора структуры модулирующей последовательности (под структурой ПСП понимается порядок следования нулей и единиц). Положительным моментом такого подхода является то, что формируемые ШПС обладают относительно низкой спектральной плотностью полезной энергии [5], поэтому они не оказывают существенного мешающего воздействия сторонним СРС.

Прием сформированных указанным выше образом сигналов целесообразно осуществлять на основе корреляционной обработки.

Предложения по выбору псевдослучайных последовательностей. В качестве модулирующих ПСП предлагается выбрать последовательности на основе функций Уолша, поскольку они обладают свойствами ортогональности [6].

Задать функции Уолша можно, например, через функции Радамахера [7]:

$$r_i(x) = \text{sign}[\sin(2^i \pi x)], \quad 0 \leq x < 1 \quad (2)$$

где аргумент $x = t/T$ – безразмерное время; T – период функции; $i = 0, 1, 2, \dots$ – порядок функции.

Функции Радамахера являются единичными, их знак определяется знаком аргумента.

В результате система функций Уолша $wal_j(x)$ (при $j \geq 1$ число j представляется в двоичной системе счисления упорядоченной суммой $j = 2^{\gamma_1} + 2^{\gamma_2} + \dots + 2^{\gamma_p}$, где $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_p$) принимает вид

$$wal_j(x) = r_{\gamma_1+1}(x) r_{\gamma_2+1}(x) \dots r_{\gamma_p+1}(x). \quad (3)$$

Одним из основных достоинств функций Уолша является то, что они обеспечивают минимальный уровень взаимных помех.

Таким образом, для расширения алфавита канального кодирования предлагается поднесущие ЧВМ дополнительно модулировать ПСП на основе функций Уолша. В результате указанной операции каждая из поднесущих ЧВМ будет представлять собой ШПС. Указанные операции позволят снизить энергетическую заметность сигналов, повысить их помехозащищенность и обеспечат увеличение алфавита канального кодирования.

Результаты компьютерного моделирования. Для подтверждения правомерности теоретических предположений было проведено компьютерное моделирование.

В качестве исходных данных рассматривалась информационная система со следующими параметрами: длительность символа $T_s = 40$ мс; интервал ортогональности $\Delta f = 400$ Гц. Защитный интервал вы-

бирался из условия четырехкратного перекрытия полосы $\Delta f_{\text{защ}} = 4\Delta f = 4 \cdot 400 = 1600$ Гц (определено из практического опыта).

Для моделирования определена стандартная модель канала с аддитивным белым гауссовым шумом (АБГШ).

В общем случае по характеру воздействия все мешающие излучения (шумы и помехи) можно разделить на сосредоточенные по спектру (гармонические) и сосредоточенные по времени (квазиимпульсные) помехи, а также флуктуационные шумы радиоканала.

С учетом указанных условий принимаемую смесь полезного сигнала с шумами и помехами, обладающими сосредоточенным, импульсным и флуктуационным характером, можно представить в следующем виде:

$$z(t) = s(t, \mathfrak{R}(t)) + \eta_{\text{сосп}}(t) + \eta_{\text{имп}}(t) + \eta_{\text{фл}}(t). \quad (4)$$

Здесь $s(t, \mathfrak{R}(t))$ – полезный сигнал; $\mathfrak{R}(t)$ – дискретный параметр сигнала, определяемый видом модуляции.

Совокупность мешающих воздействий в (4) представляет комплекс помех: $\eta_{\text{сосп}}(t)$ – сосредоточенных, $\eta_{\text{имп}}(t)$ – импульсных (квазиимпульсных), $\eta_{\text{фл}}(t)$ – флуктуационных. Последняя составляющая в уравнении (4) близка по структуре к гауссовой и определяется как шумами радиоканала, так и собственными шумами приемного и передающего трактов.

Как правило, сосредоточенные помехи преимущественно имеют узкий спектр, локализованный в относительно узкой частотной полосе приемного тракта, а импульсные помехи, напротив, представляют регулярные или хаотические последовательности кратковременных импульсов, ширина спектра которых превышает полосу пропускания приемного тракта.

Поскольку в эксперименте принималось условие, что ширина спектра полезного сигнала совпадает с полосой пропускания приемного тракта, то вся совокупность шумов и помех вырождается в АБГШ различной интенсивности [8]. Указанные обстоятельства обуславливают правомерность выбора модели канала с АБГШ для компьютерного моделирования.

Учитывая, что целью исследования является анализ зависимости помехоустойчивости передачи информационного сообщения от вида модуляционного формата, показателем, определяющим качество процесса, целесообразно определить вероятность ошибки на бит.

Значение вероятности ошибки на бит P_b можно рассчитать согласно [2]:

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right), \quad (5)$$

где E_b – энергия, приходящаяся на бит; N_0 – спектральная плотность мощности шума или аддитивных помех.

В формуле (5) $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-t^2/2) dt$ – функция плотности распределения вероятности.

В ходе эксперимента оценивалась помехоустойчивость предложенного подхода, предусматривающего использование ЧВМ с дополнительной модуляцией их поднесущих ПСП на основе функций Уолша.

В качестве исходных были выбраны следующие ЧВМ:

- размерностью 2×2 , в которой каждая из ее субчастот дополнительно модулировалась ПСП на основе функций Уолша длиной в 16 элементов;
- размерностью 4×4 , в которой каждая из ее субчастот дополнительно модулировалась ПСП на основе функций Уолша длиной в 8 элементов;
- размерностью 8×8 , в которой каждая из ее субчастот дополнительно модулировалась ПСП на основе функций Уолша длиной в 4 элемента.

Тогда с учетом выражения (4) аналитическую модель можно представить как

$$z_m(n, t) = \sum_n^N \sin(2\pi f_n t) \delta_n(T_h) + wal_m(T_h) + \eta(t), \quad (6)$$

где m – текущее значение разновидности функции Уолша; N – число частотных позиций ЧВМ; T_h – длительность субпосылки ЧВМ; T_s – длительность сигнала ЧВМ; f_n – значение частоты n -й субпосылки (поднесущей) ЧВМ; $\eta(t)$ – деструктивные аддитивные помехи.

В формуле (6)

$$\delta_n(T_h) = \begin{cases} \delta_n(T_h) = 1 & \text{при } \frac{T_s}{N}(n-1) \leq T_h < \frac{T_s}{N}n; \\ \delta_n(T_h) = 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

В качестве альтернативного решения рассматривалась ЧВМ размерностью 32×32 без дополнительной модуляции ее поднесущих (фактически сигнал ППРЧ). Выбор указанных конструкций обусловлен тем, что каждая из ЧВМ обеспечивала передачу пятиэлементной информационной комбинации.

Результаты оценки помехоустойчивости представлены на рисунке 2.

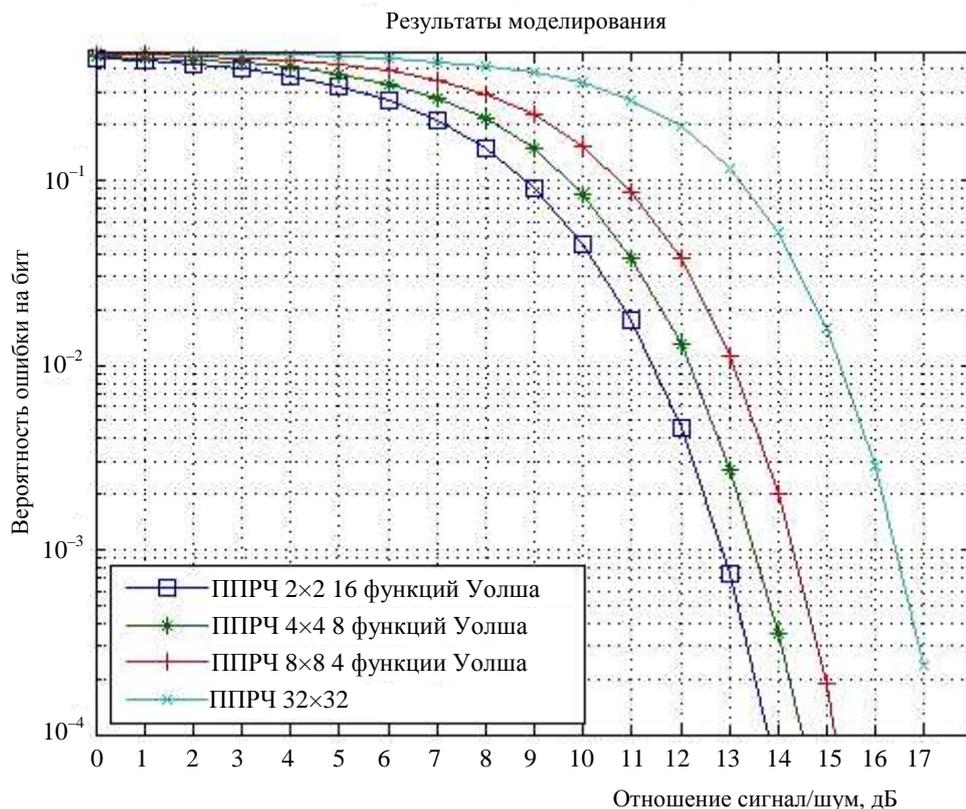


Рис. 2. Сравнительная оценка разработанных научно-технических предложений

В рассмотренных экспериментах при выборе алфавита канального кодирования исходили из условия обеспечения максимальной ортогональности формируемых конструкций, а именно чтобы каждая ЧВМ имела уникальные неповторяющиеся комбинации номиналов субчастот и временных интервалов. Такой подход позволяет увеличить степень различия используемых символов и тем самым повысить вероятность принятия правильного решения при демодуляции.

Анализ полученных результатов, проиллюстрированных рисунком 2, позволяет сделать следующее заключение: применение комбинированного способа, при котором ЧВМ 2×2 расширяется 16-разрядной последовательностью Уолша, обеспечило наилучшую помехоустойчивость.

Заданное значение вероятности ошибки на бит, согласно выражению (5), определяемое значением 10^{-4} [2], обеспечивается при отношении сигнал/шум (ОСШ), равном 14 дБ, что лишь на 1 дБ уступает ЧВМ размером 2×2 без дополнительной модуляции.

Однако следует отметить, что при этом предложенная модель ЧВМ позволяет осуществлять передачу пятиэлементной последовательности. В то время как для ЧВМ 32×32 (с аналогичной информационной емкостью алфавита) подобный результат достигается лишь при ОСШ, равном 17 дБ. Кроме того, предложенный подход требует меньший частотный ресурс по отношению к подходу, основанному на увеличении размерности ЧВМ.

Таким образом, в заключение проведенного исследования можно сделать **вывод**, что предлагаемый подход обеспечивает требуемый компромисс между увеличением размерности алфавита канального кодирования и сохранением помехоустойчивости. А поскольку процедуры дополнительного модулиро-

вания поднесущих фактически ведут к формированию ШПС, то можно утверждать, что при этом обеспечивается приемлемая скрытность факта работы СРС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каневский, З.М. Теория скрытности / З.М. Каневский, В.П. Литвиненко. – Воронеж: ВГУ, 1991. – 144 с.
2. Прокис, Дж. Цифровая связь / Дж. Прокис; пер. с англ. под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.
3. Помехозащищенность систем радиосвязи с расширением спектра сигналов методом псевдослучайной перестройки рабочей частоты / В.И. Борисов [и др.]; под ред. В.И. Борисова. – М.: Радио и связь, 2000. – 384 с.
4. Каргашин, В.Л. Проблемы обнаружения и идентификации радиосигналов средств негласного контроля // Специальная техника. – 2000. – № 3–5.
5. Дворников, С.В. Теоретические основы синтеза билинейных распределений / С.В. Дворников. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. – 268 с.
6. Залмазон, Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях / Л.А. Залмазон. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
7. Григорьев, В.А. Сигналы зарубежных систем электросвязи: учебник / В.А. Григорьев. – СПб.: ВАС, 2007. – 368 с.
8. Применение методов частотно-временной обработки акустических сигналов для анализа параметров реверберации / А.А. Алексеев [и др.] // Научное приборостроение. – 2001. – Т. 11, № 1. – С. 65–76.

Поступила 02.03.2015

EXPANSION OF THE ALPHABET SIGNALS BASED ON TIME-FREQUENCY TRANSMISSION MATRICES FOR DECAMETER WAVES

S. DVORNIKOV, D. RYABENKO

The possibility of expanding the information alphabet signals generated on the basis of time-frequency matrix to radio communications decameter. We propose a method that provides increasing the dimension of the matrix due to the additional subcarrier modulation Walsh functions. Presents the results of computer simulation to evaluate the effectiveness of the developed approach. Substantiates the preservation of the required noise immunity transfer in general.

УДК 621.396.6

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ПАРАМЕТРОВ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ ВИВАЛЬДИ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ИЗЛУЧАТЕЛЯМИ

К.И. КРЕМЕНЯ; канд. техн. наук, доц. В.Ф. ЯНУШКЕВИЧ
(Полоцкий государственный университет)

Демонстрируются результаты исследования зависимости параметров антенной решетки, собранной на основе излучателей – антенн Вивальди, от изменения расстояния между ними. Рассмотрен этап моделирования антиподальной антенны Вивальди в программе схемотехнического моделирования High Frequency Structure Simulator. Выявлены основные её характеристики. Показано моделирование антенной решетки из полученной антенны Вивальди. Проведён сравнительный анализ основных характеристик: коэффициента стоячей волны по напряжению, диаграммы направленности, входного сопротивления. Результаты анализа позволили выбрать оптимальное расстояние для расположения антенных излучателей.

Введение. Антенны и антенные решётки являются одним из важнейших функциональных блоков различных радиотехнических систем. Сегодня потребность в таких антеннах становится всё более очевидной (к примеру, в беспроводных информационных сетях, в радио- и видеолокации и т.д.). В связи с этим значительный интерес представляет конструирование антенн, небольших по размеру, легко маскируемых и недорогостоящих.

Современные антенные системы работают в различных стандартах передачи информации (WiMAX, EDGE, WCDMA, UMTS, LTE), для каждого из которых необходимо выделить определенные каналы связи. Современные системы передачи данных должны обеспечивать не только многоканальность, но и отвечать требуемым показателям быстродействия, надежности, стоимости [1].

Указанными свойствами обладают антенные решётки, состоящие из излучающих щелевых элементов типа антенн Вивальди. Данный тип антенн обладает требуемой шириной полосы пропускания и уровнем усиления сигнала. Изготовление излучателя Вивальди имеет высокие показатели технологичности, что положительным образом сказывается на стоимости антенной решетки.

Компьютерное моделирование антиподальной антенны Вивальди. В антенне Вивальди полоса частот ограничивается снизу размерами антенны и способом питания по верхней частоте. Именно поэтому правильная структура питания является важной для максимизации полосы частот. Большинство сверхвысокочастотных печатных плат реализуются на микрополосковой основе. Однако лучшим вариантом питания для антенны Вивальди является волоконно-щелевая линия. Для передачи микроволнового сигнала в антенну необходим переход, он должен быть компактным и иметь малые потери.

Кроме топологии антенны с использованием волоконно-щелевой линии, существует антиподальная топология, созданная для того, чтобы уменьшить потери при подключении антенны к симметричным линиям передачи. В данном случае переход от микрополоска к линии происходит через параллельную полосковую линию. Такая конструкция позволяет не делать согласовывающее отверстие, используемое в предыдущем случае. Экспериментально установлено, что длина перехода должна быть $3...5\lambda$, чтобы избежать резкой неоднородности между линией питания и антенной [2].

При компьютерном моделировании антиподальной антенны Вивальди для определения формы и размеров антенны учтены следующие факторы:

- направленность антенны зависит от её длины;
- ширина апертуры увеличивает направленность, однако значительно меньше, поэтому обычно её оставляют минимально необходимой;
- в широком диапазоне частот на ширину луча частота влияет незначительно;
- нижняя частота определяется размером антенны;
- нижняя частота сильно зависит от крутизны экспоненты: чем меньше этот показатель, тем ниже минимальная частота.

Для компьютерного моделирования антиподальной антенны Вивальди использована программа схемотехнического моделирования High Frequency Structure Simulator (HFSS).

Для моделирования использованы следующие параметры:

- диэлектрическая проницаемость подложки $\xi = 3$;
- размер диэлектрической подложки 52×57 мм;
- толщина подложки 1 мм.

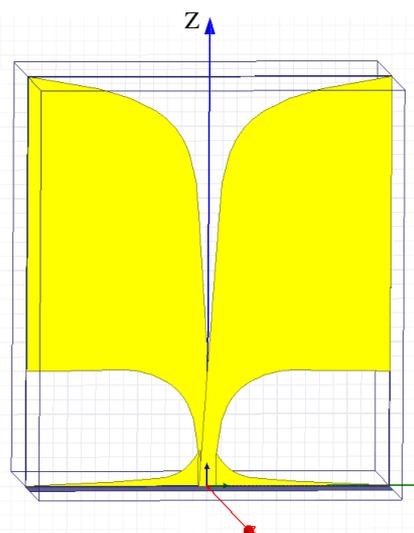


Рис. 1. Модель антиподальной антенны Вивальди, выполненной в программе HFSS

Модель антиподальной антенны Вивальди представлена на рисунке 1.

Основными характеристиками, полученными в результате моделирования, позволяющими определить работоспособность антенны, являются:

- коэффициент стоячей волны по напряжению;
- диаграмма направленности;
- входное сопротивление.

Коэффициент стоячей волны по напряжению антиподальной антенны Вивальди не превышает значения 2 на участке от 0,95 до 10 ГГц и является крайне нелинейным, имеются дифракционные максимумы и минимумы характеристики.

Усиление диаграммы направленности антиподальной антенны Вивальди на частоте 5 ГГц составляет 5,7 дБ в прямом направлении и 1,8 дБ – в обратном, имеет относительно небольшие задние лепестки. Диаграмма довольно широкая.

Входное сопротивление неравномерно, что говорит о частотной зависимости характеристик антенны.

Компьютерное моделирование антенной решетки, собранной на основе излучателей Вивальди.

Используя полученный антенный излучатель Вивальди, спроектирована антенная решетка. Выбран вариант расположения одиночных излучателей: линейная расстановка элементов на металлическом экране.

В качестве материала подложки для антенных элементов выбран тефлон толщиной 1 мм. Подложка имеет металлизацию с двух сторон в виде половинок диполя.

Размеры металлического экрана: длина 600, ширина 100 мм; уголкового отражателя шириной 75 мм повернуты на 45° относительно основания экрана. Для исследования выбран частотный диапазон от 2,5 до 5 ГГц. Каждая отдельная антенна питается с помощью дискретного порта, дискретный порт нормирован на линию в 50 Ом.

Проведено исследование зависимости основных характеристик антенны (коэффициента стоячей волны по напряжению, диаграммы направленности, входного сопротивления) при смещении группы из 5-ти излучателей вдоль оси OY друг относительно друга на расстояние 0,5 мм, 50 и 70 мм.

Модель антенной решетки на основе излучателей Вивальди, выполненной в программе HFSS при смещении излучателей на расстояние 50 мм, приведена на рисунке 2.

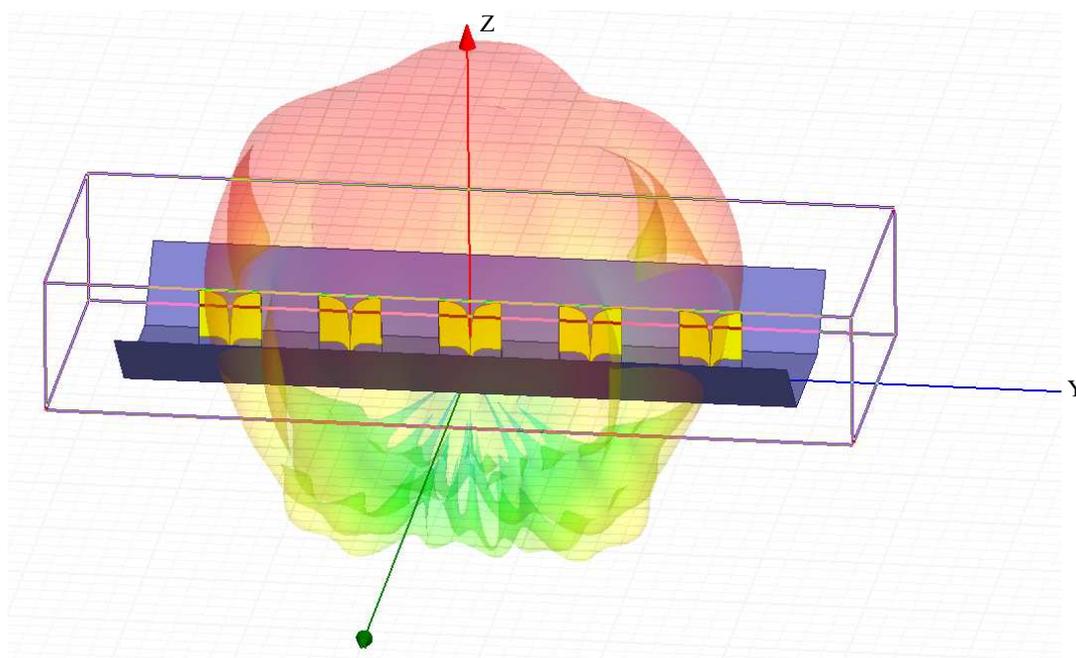


Рис. 2. Модель антенной решетки на основе антенн Вивальди, выполненной в программе HFSS

Анализ коэффициента стоячей волны по напряжению. Изменение графика коэффициента стоячей волны по напряжению при смещении излучателей Вивальди друг относительно друга представлено на рисунке 3.

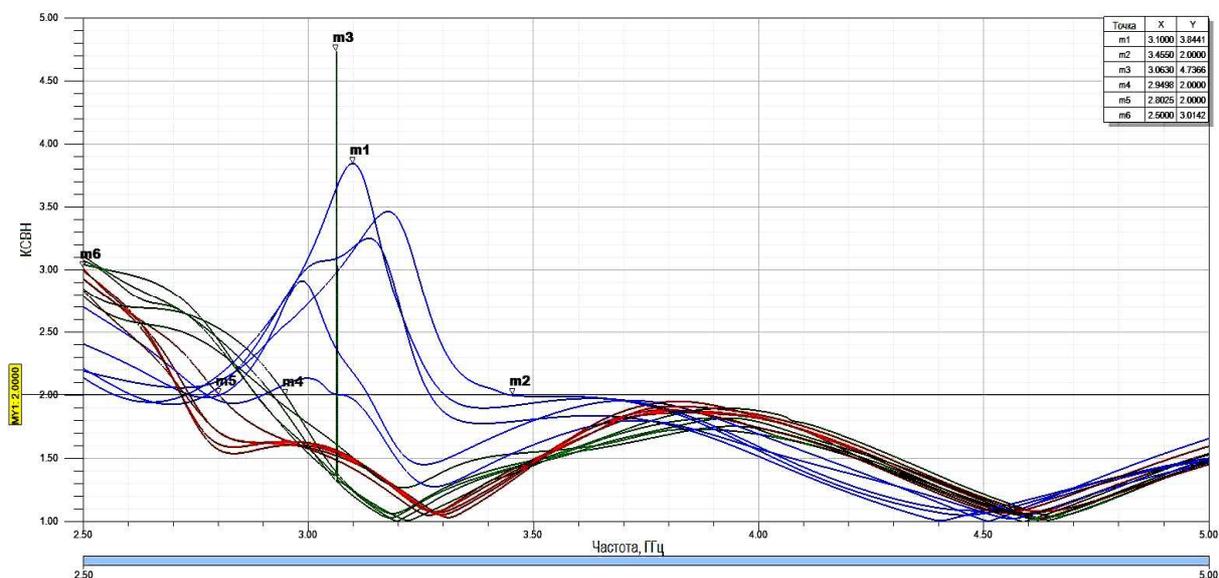


Рис. 3. Объединенные коэффициента стоячей волны по напряжению антенных решеток на основе антенн Вивальди при смещении излучателей друг относительно друга на расстояние: 1...0,5 мм (синий цвет линий); 2...50 мм (красный цвет линий); 3...70 мм (зелёный цвет линий)

Изменение расстояния между излучателями Вивальди в антенной решетке влияет на изменение коэффициента стоячей волны по напряжению:

- при расстоянии между излучателями 0,5 мм данный коэффициент не превышает значения 2 на частотах от 3,45 ГГц, это соответствует нижней рабочей частоте данной решетки. Максимальное значение коэффициента стоячей волны по напряжению составляет 3,84 на частоте 3,1 ГГц;

- при расстоянии между излучателями 50 мм на интервале частот от 2,8 до 5 ГГц значение коэффициента стоячей волны по напряжению также не превышает 2, что говорит о работоспособности решетки в данном диапазоне частот. Максимальное значение этого коэффициента равно 3 на частоте 2,5 ГГц;

- при расстоянии между излучателями 70 мм рабочий диапазон частот антенной решетки составляет от 2,94 до 5 ГГц. Максимальное значение коэффициента стоячей волны по напряжению равно 3 на частоте 2,5 ГГц. На частоте 3 ГГц наблюдается искажение, рассматриваемый коэффициент принимает самое высокое значение, равное 4,73.

Анализ диаграммы направленности. Изменение диаграммы направленности при смещении излучателей Вивальди друг относительно друга представлено на рисунке 4.

Изменение расстояния между излучателями Вивальди в антенной решетке влияет на изменение диаграммы направленности:

- при расстоянии между излучателями 0,5 мм коэффициент усиления равен 2,7 дБ, ширина переднего лепестка 123°, задний лепесток самый большой по сравнению с другими диаграммами на рисунке и его коэффициент усиления равен -7,84 дБ;

- при размещении элементов на расстоянии 50 мм друг от друга коэффициент усиления равен 5,93 дБ, ширина переднего лепестка 124°, задние лепестки небольшие и имеют коэффициент усиления, составляющий -12,28 дБ;

- при расстоянии между излучателями 70 мм коэффициент усиления равен 4,57 дБ, ширина переднего лепестка 137°, задние лепестки небольшие и имеют коэффициент усиления -14,39 дБ.

Анализ входных сопротивлений. Изменение входных сопротивлений при смещении излучателей Вивальди друг относительно друга отображено на рисунке 5.

Изменение расстояния между излучателями Вивальди в антенной решетке влияет на изменение входного сопротивления. При расстоянии 0,5 мм график более неравномерен и ярче выражена частотная зависимость решетки от входного сопротивления.

Величина нормированного входного сопротивления изменяется от 0,29 (14,7 Ом) при относительной длине, равной 0,54, до 1,9 (95 Ом) при относительной длине 0,31. При расстоянии между излучателями 50 мм входное сопротивление ближе к 1 (50 Ом).

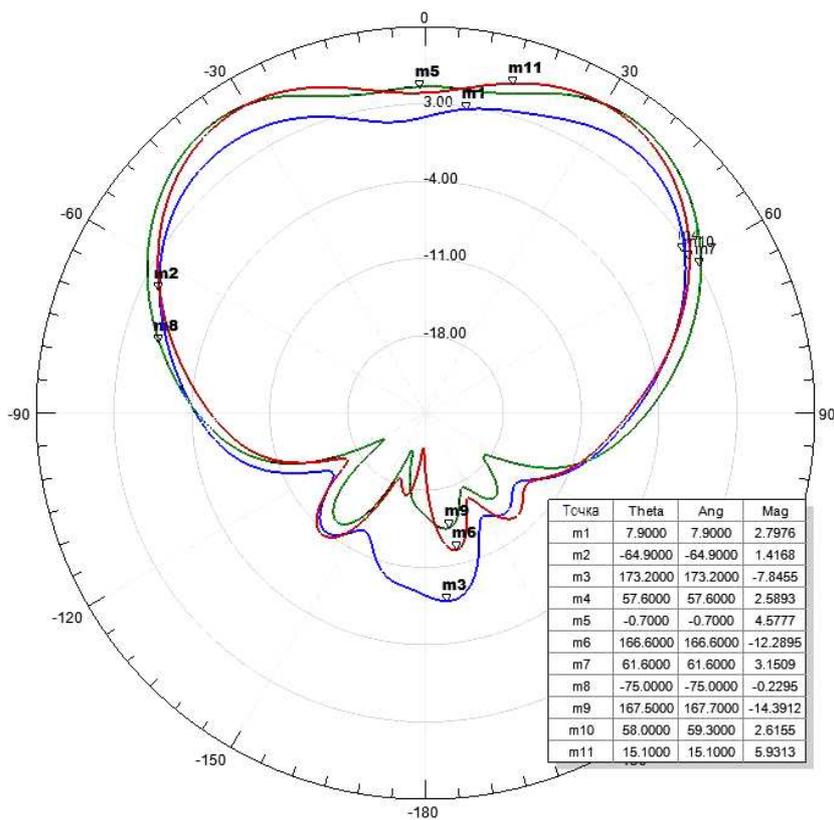


Рис. 4. Объединенные диаграммы направленности антенных решеток на основе антенн Вивальди при смещении излучателей друг относительно друга на расстояние: 1...0,5 мм (синий цвет линий); 2...50 мм (красный цвет линий); 3...70 мм (зелёный цвет линий)

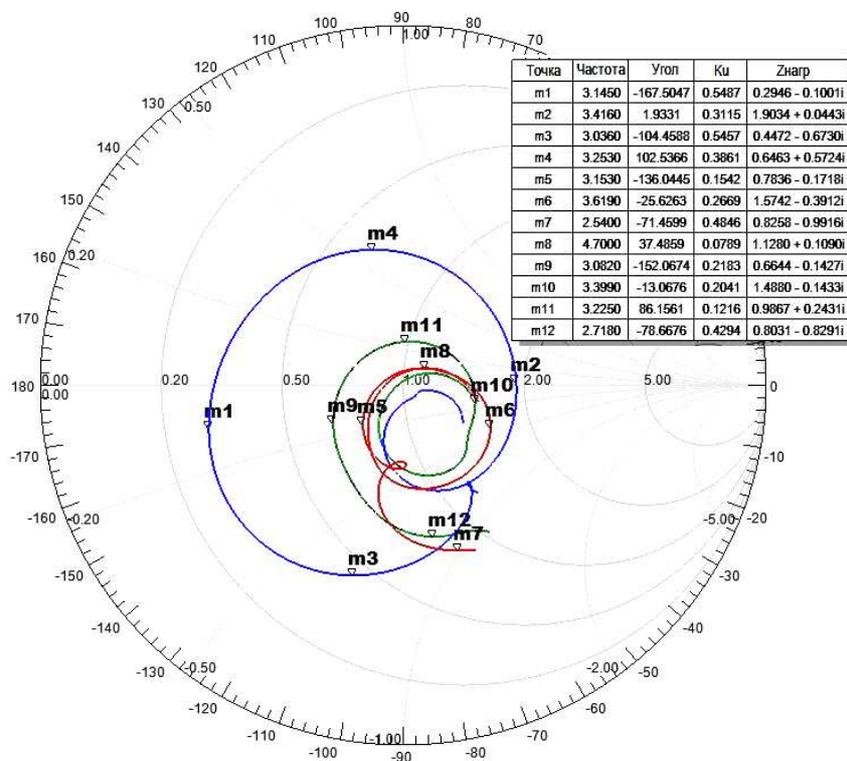


Рис. 5. Объединенные входные сопротивления антенных решеток на основе антенн Вивальди при смещении излучателей друг относительно друга на расстояние: 1...0,5 мм (синий цвет линий); 2...50 мм (красный цвет линий); 3...70 мм (зелёный цвет линий)

Величина нормированного входного сопротивления изменяется от 0,78 (39 Ом) при относительной длине 0,57 до 1,9 (78,5 Ом) при относительной длине 0,26. Неравномерность характеристики входного сопротивления образует петлю.

При расстоянии между излучателями 70 мм величина нормированного входного сопротивления изменяется от 0,66 (33 Ом) при относительной длине, равной 0,21, до 1,48 (74 Ом) при относительной длине, составляющей 0,2.

Заключение. Анализируя полученные характеристики, можно утверждать, что оптимальным расстоянием между излучателями Вивальди является расстояние, составляющее 50 мм. Коэффициент стоячей волны по напряжению в этом случае показывает наименьшее значение нижней частоты 2,8 ГГц, что делает полосу пропускания более широкой по сравнению с другими вариантами расположения излучателей. Дополнительно проведено исследование, свидетельствующее о том, что верхняя частота для данной антенной решетки составляет 10 ГГц. Сравнение диаграмм направленности показывает, что при расположении излучателей Вивальди на расстоянии 50 мм антенная решетка имеет самое большое усиление в прямом направлении, равное 5,93 дБ. Входное сопротивление при расположении излучателей на расстоянии 50 мм ближе к нормированному значению, составляющему 50 Ом.

Разработанная решетка может использоваться в системах радиолокации и радиосвязи (в том числе в биорадиолокации), работающих в различных частотных диапазонах в полосе частот 2,8...10 ГГц.

Одна из ключевых областей применения антенной решетки – компактные сверхширокополосные датчики, работающие на небольших дальностях 0...20 м с отсутствием мёртвых зон:

- охранные интеллектуальные датчики для обнаружения людей и различения их от помеховых сигналов (животные, деревья и т.п.);

- датчики для определения координат и позиционирования объектов;

- датчики для точного измерения расстояния, в том числе в оптически непрозрачных средах;

- датчики для дистанционного определения частоты дыхания и пульса человека;

- в других областях.

Следует отметить высокий уровень усиления сигнала на широкой полосе частот, что позволяет использовать данную антенную решетку в различных стандартах связи, сохраняя основные характеристики. Данный тип антенн рекомендован для использования в современных беспроводных системах связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Синтез антенной решетки с использованием излучателей Вивальди для систем беспроводного широкополосного доступа / И.Г. Рязанов [и др.] // Университет им. В.И. Вернадского. – 2013. – № 4(48). – С. 163–167.
2. Логопериодические антенны [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://odtdocs.ru/fizika/10116/index.html>. – Дата доступа: 13.09.2014.
3. Перспективы антенн нового поколения [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.wifiantenna.org.ua/antennas/perspektivy-antenn-novogo-pokoleniya/>. – Дата доступа 15.09.2014.
4. Банков, С.Е. Проектирование СВЧ устройств и антенн с Ansoft HFSS / С.Е. Банков, А.А. Курушин. – М., 2009.
5. Моделирование антенн и элементов тракта: учеб.-метод. пособие для выполнения курсовых и самостоятельных работ по учебным курсам «Устройства СВЧ и антенны» и «Антенно-фидерные устройства» / под ред. К.В. Шишакова. – Ижевск: ИжГТУ, 2009. – 127 с.

Поступила 14.10.2014

RESEARCH OF DEPENDENCE OF THE PARAMETERS OF VIVALDI ANTENNA ARRAY WHEN CHANGING DISTANCE BETWEEN RADIATORS

K. KREMENIA, V. YANUSHKEVICH

This article presents the results of research of dependence of parameters of the antenna array, collected from the Vivaldi antenna radiators, depending on the changing of distance between the radiators. Shows the stage of modeling the antipodal Vivaldi antenna in the circuit simulation program High Frequency Structure Simulator. Shows the main characteristics for that antenna. Shows a simulation of the antenna array, consisting of the resulting Vivaldi antenna. Shows the main characteristics for it: voltage standing wave ratio, radiation pattern, input impedance. Carried out the comparative analysis of the obtained characteristics, whereby selected the optimal distance for location of antenna radiators.

УДК 519.6; 551.465

ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ПОЛЯ ЛИНИЙ ТОКА ПО ТЕМПЕРАТУРНОМУ РАЗРЕЗУ

канд. физ.-мат. наук Ю.Ф. ПАСТУХОВ; канд. физ.-мат. наук Д.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет)

Численными методами рассматривается двумерная стационарная задача пересчета разреза температурного поля на поле направлений скорости частиц воды. Температурное поле геотермального озера было измерено мостом постоянного тока. Для решения задачи достаточно использовать уравнение теплопроводности с конвективной частью и объемным источником плавучести, уравнение неразрывности, граничные условия для скорости частиц жидкости. Численная задача решается методом прогонки. Для усиления устойчивости используется метод медианной фильтрации горизонтальной компоненты скорости на каждом слое. Новым является понятие связности конвективной струи.

Введение. Летом 1992 года на озеро Банное (находится в Узон – Гейзерной долине, расположенной в 100...200 км от города Петропавловска-Камчатского) институтом вулканологии ДВНЦ РАН и физическим факультетом МГУ была организована совместная экспедиция, одной из задач которой являлось измерение температурного поля озера геотермального типа [8; 9]. Геотермальные озера относят к объектам так называемого «активного дна» при взаимодействии литосферы и гидросферы. Исследователей, проводивших комплекс измерений в данном озере и в Узон – Гейзерной долине (а также в кальдере Академии наук), в целом интересовали распределения и перенос химических веществ – радиоактивных газов; общесолевой состав; содержание *Zn, Mn, Fe, Cu, Cr, Al* (Г.А. Карпов, С.М. Файзуллин) [1]. Поскольку перенос водных масс в активных областях связан с переносом больших потоков тепла, то естественно рассматривать задачу массопереноса совместно с теплообменом.

В связи со сказанным в данной работе рассматривается математическая модель теплопереноса в активной области и ее особенности решения.

Так обстоит дело на практике с двумерной стационарной задачей пересчета разреза температурного поля геотермального озера на поле направлений скорости воды. Полностью неявная численная схема, решаемая методом прогонки такова, что требования сходимости, наложенные на коэффициенты уравнения [1; 4], выполняются, но замедляют сходимость решения. Поэтому при нахождении горизонтальной компоненты скорости в геотермальном озере на каждом слое найденное решение подвергается медианной фильтрации для усиления устойчивости. По этой причине мы назвали данную задачу плохо обусловленной. Турбулентный коэффициент температуропроводности и объемная плотность источника плавучести линейно растут с глубиной, что связано с выбросом расплава серы в нижней части озера. Введено понятие связности конвективной струи, позволяющее сравнить значения коэффициента в разных областях температурного поля численными методами. Программа написана на языке FORTRAN[6,7].

Экспериментальная часть

Озеро Банное представляет собой мини кратер вулкана, заполненный водой, – эллипсоидная чаша с наибольшей полуосью 20 м и глубиной 24 м. На дне чаши находится расплавленная сера, которая выплескивается в озеро и кристаллизуется на датчике температуры каждый раз при его максимальном погружении. Из озера вытекает ручей с температурой воды 40 °С и расходом 25 л/с. На глубине 13 м найден источник холодной воды, втекающей в озеро с температурой 11,2 °С. Холодная вода, вероятно, попадает в озеро из местного ручья, несущего талые ледниковые воды с температурой 8 °С в 100...150 м от озера. Простой подсчет показывает, что из озера с водой уносится тепловой поток мощностью:

$$P = c_p \rho v \Delta t = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} 25 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}} (40 - 11,5)^\circ\text{C} \approx 3 \text{ МВт.}$$

При этом не учитывается интенсивное испарение с поверхности озера с температурой 40 °С в воздух с температурой около 10 °С в ночное и вечернее время. В безветренное время (обычно вечером, ночью и утром) на поверхности озера Банное образуется сульфидная пленка. Расплавленная сера на дне озера порождает несколько конвективных струй, видимых на поверхности по выходу газа и выносу серы из области струи.

Методика измерения. По периметру озера через равные промежутки находились кольца от 1 до 14. Вдоль выбранного разреза натягивался канат, который прижимал лодку-плоскодонку к воде и исключал её дрейф. По горизонтали вдоль каната измерения температуры проводились с шагом $\Delta x = 5$ м. По вертикали измерительный кабель погружался с шагом $\Delta x = 3$ м. Для исключения раскочки кабель снабжался отвесом (куском железной трубы массой 2 кг). Неточность фиксации узлов координатной сетки составила ± 10 см. Платиновый датчик температуры имеет предельную рабочую температуру 200 °С и вместе с измерительным мостом сопротивлений обеспечивает абсолютную погрешность температуры $\Delta T = 0,05$ °С. Каждый разрез температурного поля измерялся в течение $\Delta t = (2 \dots 3)$ ч.

На разрезе (рис. 1) проведено примерно 30 измерений температуры с равномерным шагом по всему температурному полю. Для установления теплового равновесия платинового датчика каждое измерение производилось не менее 5 минут. Характерный промежуток циркуляции воды в озере оценим как удвоенное время поднятия воды в области струи $\tau = 200 \frac{H}{w} = 2 \frac{20 \text{ м}}{0,5 \text{ м/с}} = 80 \text{ с}$. Поскольку $\tau \ll \Delta t$, то время измерения Δt является достаточно большим для осреднения процессов теплопереноса всего температурного поля в целом, так и каждое отдельное измерение в несколько раз превышает τ . Тогда все величины, определенные по разрезе температурного поля (см. рис. 1), можно считать стационарными (математические уравнения не содержат частной производной по времени). Канат натягивался таким образом, чтобы при измерениях температуры в вертикальной плоскости разреза попали не менее 2 конвективных струй, наблюдаемых по вспучиванию поверхности и выходу газа. Такое условие симметрии задачи позволяет упростить и замкнуть систему уравнений теплопереноса.

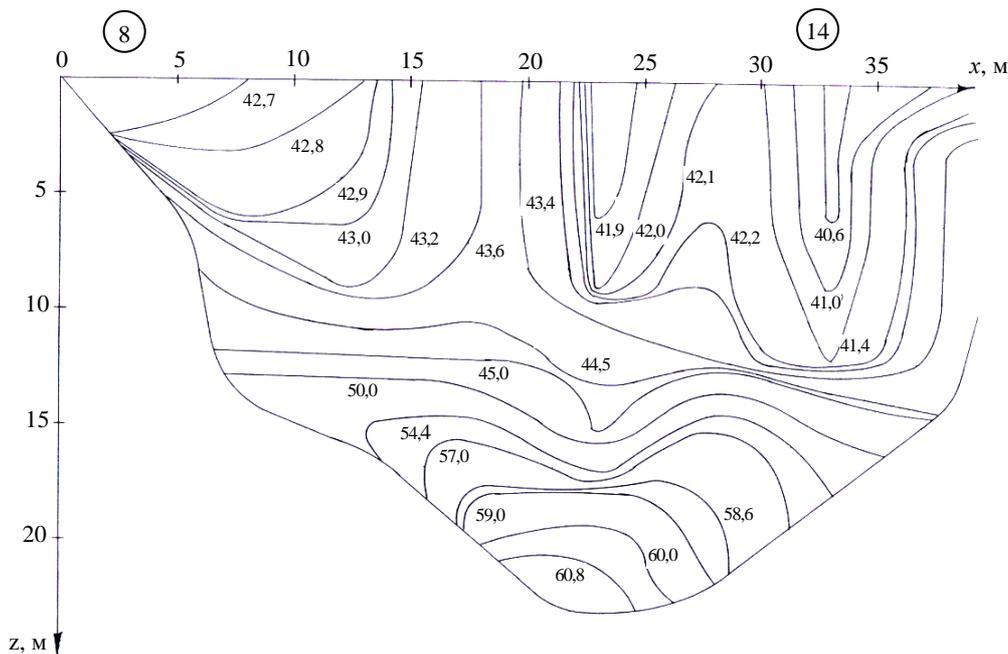


Рис. 1. Разрез температурного поля геотермального озера

Как видно из рисунка 1, присутствует не менее 2 конвективных струй. Эти струи наблюдались в стационарном положении на поверхности озера в течение измерения температурного разреза. Ввиду большого потока тепла через озеро (3 МВт) и плотности потока тепла $\left(\frac{3 \text{ МВт}}{10^3 \text{ м}^2} = 3 \text{ кВт/м}^2 \right)$ будем считать коэффициенты обмена турбулентными.

Математическая постановка задачи

Рассмотрим следующую стационарную, не зависящую от времени задачу тепло- и массопереноса:

$$\begin{cases} u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \nabla(\alpha \nabla T) + q, (x, z) \in (0, L) \cdot (0, H); \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, (x, z) \in (0, L) \cdot (0, H); \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u = u(x, z), w = w(x, z), T = T(x, z), (x, z) \in [0, L] \cdot [0, H] \equiv \bar{D}; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} w(x, 0) = w(x, H) = w(0, z) = w(L, z) = 0, u(0, z) = u(L, z) = u(x, H) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{Коэффициент температуропроводности } \alpha = \frac{P}{S \frac{\partial T}{\partial z} c_p \rho} = \frac{1 \cdot 10^6 \text{ Вт}}{10^3 \text{ м}^2 \left(\frac{20 \text{ К}}{20 \text{ м}} \right) 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} \sim 2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$$

(см. рис. 1), где S – площадь поверхности озера; $\frac{\partial T}{\partial z}$ – вертикальная компонента градиента температуры;

$P \sim 10^6$ Вт – мощность источника плавучести в озере [9]; c_p – удельная теплоемкость воды при постоянном давлении; ρ – плотность воды.

Коэффициент температуропроводности α фактически определяется мощностью источника плавучести P , то есть $\alpha = \alpha(P)$.

Первое уравнение (1) в системе есть уравнение теплопроводности с конвективной частью и источником мощности на единицу объема q , деленной на $(c_p \cdot \rho)$; $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)$ – градиент температуры; (u, w) – вектор скорости жидкой частицы, то есть ее горизонтальная и вертикальная компоненты соответственно; L, H – диаметр и максимальная глубина озера соответственно.

Уравнение (2) – уравнение неразрывности.

Компоненты скорости и температурное поле зависят от координат x, z на прямоугольнике $[0, L] [0, H]$ – третье условие (3) (мы рассматриваем двумерную задачу).

Четвертое условие – граничные условия для компонент скорости на сторонах прямоугольника (4). Все величины имеют размерность в системе СИ.

Особенностью данной задачи является известное, измеренное поле температуры, а следовательно и частные первые и вторые производные температуры, интерполированные на области прямоугольника. На поверхности раздела озера отсутствует вертикальная компонента скорости. На боковых сторонах прямоугольника и на нижней стороне (дно) обе компоненты скорости равны нулю.

Вообще говоря, координатная область озера D не является прямоугольником. Но мы доопределяем вертикальный разрез озера до прямоугольника по правилу:

$$\begin{cases} T'(x, z) = T(x, z), & (x, z) \in D \subset \bar{D}; \\ T'(x, z') = T(x', z'), & (x, z') \in D \setminus \bar{D}. \end{cases}$$

В прямоугольнике \bar{D} температурное поле обозначено $T'(x, z)$. Вне области озера $D \setminus \bar{D}$ температура доопределяется по непрерывности ее значением в граничной точке (x', z') и представляет собой горизонтальную изотерму. Так ведет себя температурное поле в твердой однородной породе, окружающей озеро, с вертикальным потоком тепла. Обоснованность такого приема – метода фиктивных областей – можно встретить в [2, с. 204]. В дальнейшем поле $T'(x, z)$ обозначаем $T(x, z)$.

Нас будет интересовать более узкая задача – определение поля направлений по полю скоростей. Такую постановку задачи можно встретить в геологии, геохимии, геодезии и других отраслях.

Постановка численной задачи

Первоначально узловые значения температуры были измерены на равномерной прямоугольной сетке с шагом $dx = L/n$ в $n+1$ точках по горизонтали и с шагом $dz = H/n1$ в $n1+1$ точках по вертикали, где L, H – длина и высота озера в данном разрезе. Другими словами, задан разрез температурного поля $T_{k1}^{j1}, j1 = 1, \dots, n1+1, k1 = 1, \dots, n+1$.

Дополним разбиение прямоугольной области, в которую вписан разрез озера, оставляя старые узлы с измеренной температурой в новой сетке на прежних местах.

В программе удобно выбрать начало координат, совмещенное с правым верхним углом (см. рис. 1), горизонтальную ось x направить влево, вертикальную z – вниз, получаем правую координатную систему.

Разобьем каждый малый прямоугольник со сторонами $h_{01} = \frac{L}{n}, h_{02} = \frac{H}{n1}$ соответственно на nx, nz целых частей. Прямоугольная сетка с горизонтальным шагом $h_1 = L/(n \cdot nx)$ и вертикальным шагом $h_2 = H/(n1 \cdot nz)$ имеет $n \cdot nx + 1$ узлов по горизонтали и $n1 \cdot nz + 1$ узлов по вертикали. Программа была написана на языке FORTRAN, в котором целочисленные переменные в массивах принимают значения, начиная с 1. Тогда номер столбца обозначим $k = 1, \dots, n \cdot nx + 1$, номер строки $j = 1, \dots, n1 \cdot nz + 1$. Температурное поле внутри каждого большого прямоугольника продолжим по непрерывности линейно:

$$T1_k^j = (z_{j1+1} - z_j) \frac{T_{k1}^{j1}(x_{k1+1} - x_k) + T_{k1+1}^{j1}(x_k - x_{k1})}{dx \cdot dz} + (z_j - z_{j1}) \cdot \frac{T_{k1}^{j1+1}(x_{k1+1} - x_k) + T_{k1+1}^{j1+1} \cdot (x_k - x_{k1})}{dx \cdot dz}; \quad (5)$$

$$k1 = 1, \dots, n, \quad j1 = 1, \dots, n1, \quad k = 1, \dots, n \cdot nx + 1, \quad j = 1, \dots, n1 \cdot nz + 1;$$

$$x_{k1} = dx(k1 - 1), \quad x_{k1+1} = dx \cdot k1, \quad z_{j1} = dz(j1 - 1), \quad z_{j1+1} = dz \cdot j1;$$

$$x_k = (k - 1)h_1, \quad z_j = (j - 1)h_2.$$

Температура T_{k1}^{j1} в формуле (5) непрерывно переходит в значение температуры в 4 угловых точках каждого большого прямоугольника:

$$T_{k1}^{j1}(j = j1, k = k1), \quad T_{k1+1}^{j1}(j = j1, k = k1+1), \quad T_{k1}^{j1+1}(j = j1+1, k = k1), \quad T_{k1+1}^{j1+1}(j = j1+1, k = k1+1),$$

а также линейна по x_k, z_j .

Уравнение неразрывности запишем в виде:

$$\frac{u_{k+1}^j - u_k^j}{h_1} + \frac{w_k^j - w_k^{j-1}}{h_2} = 0, \quad j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1; \quad k = 1, \dots, n \cdot nx, \quad (6)$$

или
$$z_0(u_{k+1}^j - u_k^j) + w_k^j - w_k^{j-1} = 0, \quad j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1; \quad k = 1, \dots, n \cdot nx, \quad z_0 = \frac{h_2}{h_1}.$$

Здесь по координате z для компоненты скорости w применяется производная назад, а по координате x для компоненты u используется производная вперед [2].

Уравнение теплопроводности:

$$u_k^j f_{1k}^j + w_k^j f_{2k}^j = f_{3k}^j + q_k^j, \quad (7)$$

где q_k^j – объемная мощность источника плавучести, выделяемая в единице объема, деленная на $c_p \rho$.

Размерность q_k^j – $\left[\frac{K}{c} \right]$.

Здесь функция f_{1k}^j определяется как

$$f_{1k}^j = \frac{T_{k+1}^j - T_{k-1}^j}{2h_1}, \quad k = 2, \dots, n \cdot nx, \quad j = 1, \dots, n1 \cdot nz + 1; \quad (8)$$

$$f_{1_1}^j = f_{1_2}^j; \quad f_{1_{n \cdot nx + 1}}^j = f_{1_{n \cdot nx}}^j; \quad j = 1, \dots, n1 \cdot nz + 1.$$

Аналогично, определяется функция f_{2k}^j :

$$f_{2k}^j = \frac{T_{k1}^{j+1} - T_{k1}^{j-1}}{2h_2}, \quad k = 1, \dots, n \cdot nx + 1, \quad j = 2, \dots, n1 \cdot nz; \quad (9)$$

$$f_{2k}^1 = f_{2k}^2; \quad f_{2k}^{n1 \cdot nz + 1} = f_{2k}^{n1 \cdot nz}; \quad k = 1, \dots, n \cdot nx + 1.$$

Функция f_{3k}^1 строится, используя формулу

$$\operatorname{div}(k(z) \cdot \operatorname{grad}(T(x, z))) = k(z) \cdot \Delta T(x, z) + \nabla T(x, z) \cdot \nabla k(z) = k(z) \Delta T(x, z) + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial k}{\partial z} \quad [1; 7], \quad \alpha(z) = k(z)/(c_p \rho),$$

по функции $f_{03_{k1}}^{j1}$:

$$f_{03_{k1}}^{j1} = \alpha_{k1}^{j1} \cdot \left(\frac{T_{k1+1}^{j1} + T_{k1-1}^{j1} - 2T_{k1}^{j1}}{dx \cdot dx} + \frac{T_{k1}^{j1+1} + T_{k1}^{j1-1} - 2T_{k1}^{j1}}{dz \cdot dz} \right) + \frac{(\alpha_{k1}^{j1+1} - \alpha_{k1}^{j1-1}) \cdot (T_{k1}^{j1+1} - T_{k1}^{j1-1})}{4dz \cdot dz}, \quad (10)$$

$$j1 = 2, \dots, n1, \quad k1 = 2, \dots, n;$$

$$f_{03_1}^{j1} = f_{03_2}^{j1}; \quad f_{03_{n+1}}^{j1} = f_{03_n}^{j1}; \quad j1 = 2, \dots, n1;$$

$$f_{03_{k1}}^1 = f_{03_{k1}}^2; \quad f_{03_{k1}}^{n1+1} = f_{03_{k1}}^{n1}; \quad k1 = 2, \dots, n;$$

$$f_{03_1}^1 = \frac{f_{03_1}^2 + f_{03_2}^1}{2}, \quad f_{03_1}^{n1+1} = \frac{f_{03_2}^{n1+1} + f_{03_1}^{n1}}{2}, \quad f_{03_{n+1}}^{n1+1} = \frac{f_{03_n}^{n1+1} + f_{03_{n+1}}^{n1}}{2};$$

$$f_{03_{n+1}}^1 = \frac{f_{03_{n+1}}^2 + f_{03_n}^1}{2};$$

$$f_{3_k}^j = (z_{j1+1} - z_j) \cdot \frac{f_{03_{k1}}^{j1} \cdot (x_{k1+1} - x_k) + f_{03_{k1+1}}^{j1} \cdot (x_k - x_{k1})}{dx \cdot dz} + (z_j - z_{j1}) \cdot \frac{f_{03_{k1}}^{j1+1} \cdot (x_{k1+1} - x_k) + f_{03_{k1+1}}^{j1+1} \cdot (x_k - x_{k1})}{dx \cdot dz}; \quad (11)$$

$$k1 = 1, \dots, n, \quad j1 = 1, \dots, n1; \quad k1 = 1, \dots, n \cdot nx + 1, \quad j = 1, \dots, n1 \cdot nz + 1,$$

$$x_{k1} = dx(k1 - 1), \quad x_{k1+1} = dx \cdot k1, \quad z_{j1} = dz(j1 - 1), \quad z_{j1+1} = dz \cdot j1,$$

$$x_k = (k - 1)h_1, \quad z_j = (j - 1) \cdot h_2.$$

Видно, что формулы (5) и (11) по построению совершенно одинаковы.

В формуле (10) коэффициент температуропроводности зависит только от глубины [4]:

$$\alpha_{k1}^{j1} = \alpha lfa(j1, k1) = \frac{2 \cdot 10^{-4} (j1 - 1)}{n1} \left[\frac{M^2}{C} \right], \quad j1 = 1, \dots, n1 + 1.$$

Из формулы (7) выразим вертикальную компоненту скорости:

$$w_k^j = \frac{f_{3_k}^j + q_k^j - u_k^j f_{1_k}^j}{f_{2_k}^j}. \quad (12)$$

Тогда, формально заменив в (12) j на $j - 1$, получим:

$$w_k^{j-1} = \frac{f_{3_k}^{j-1} + q_k^{j-1} - u_k^{j-1} f_{1_k}^{j-1}}{f_{2_k}^{j-1}}. \quad (13)$$

Выражения (12), (13) подставим в уравнение неразрывности (6):

$$z_0 u_{k+1}^j - u_k^j \left(z_0 + \frac{f_{1_k}^j}{f_{2_k}^j} \right) + u_{k-1}^j \varepsilon = -u_k^{j-1} \cdot \frac{f_{1_k}^{j-1}}{f_{2_k}^{j-1}} + \left(\frac{f_{3_k}^{j-1}}{f_{2_k}^{j-1}} - \frac{f_{3_k}^j}{f_{2_k}^j} \right) + \left(\frac{q_k^{j-1}}{f_{2_k}^{j-1}} - \frac{q_k^j}{f_{2_k}^j} \right). \quad (14)$$

В формуле (14) тождественно $\varepsilon = 0$, но положим его малым, не равным нулю.

В формуле (14) избавимся от знаменателя:

$$z_0 u_{k+1}^j f_{2_k}^{j-1} f_{2_k}^j - u_k^j (z_0 f_{2_k}^j f_{2_k}^{j-1} + f_{1_k}^j f_{2_k}^{j-1}) + u_{k-1}^j \varepsilon = -u_k^{j-1} f_{2_k}^j f_{1_k}^{j-1} + (f_{3_k}^{j-1} f_{2_k}^j - f_{3_k}^j f_{2_k}^{j-1}) + (q_k^{j-1} f_{2_k}^j - q_k^j f_{2_k}^{j-1}), \quad (15)$$

$$j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1; \quad k = 2, \dots, n \cdot nx; \quad z_0 = h_2 / h_1.$$

В формуле (15) $\varepsilon = 10^{-10}$ (опущен множитель $f_{2_k}^j f_{1_k}^{j-1}$), так как удобно выбрать коэффициент при u_{k-1}^j , не зависящий от температурного поля. Формула (15) представляет частично неявную схему с трехдиагональной матрицей.

Как показывает анализ численного решения, формула (15) неустойчива относительно метода прогонки. Поэтому перейдем к полностью неявной численной схеме, перенеся влево слагаемое $u_k^{j-1} f_{2_k}^j f_{1_k}^{j-1}$, и заменим u_k^{j-1} на u_k^j :

$$z_0 u_{k+1}^j f_{2_k}^{j-1} f_{2_k}^j - u_k^j (z_0 f_{2_k}^j f_{2_k}^{j-1} + (f_{1_k}^j f_{2_k}^{j-1} - f_{2_k}^j f_{2_k}^{j-1})) + u_{k-1}^j \varepsilon = (f_{3_k}^{j-1} f_{2_k}^j - f_{3_k}^j f_{2_k}^{j-1}) + (q_k^{j-1} f_{2_k}^j - q_k^j f_{2_k}^{j-1}), \quad (16)$$

$$j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1; \quad k = 2, \dots, n \cdot nx.$$

Из формулы (7) на поверхности озера $w_k^1 = 0$, $q_k^1 = 0$ следует, что

$$u_k^1 = \frac{f_{3_k}^1}{f_{1_k}^1}, \quad k = 2, \dots, n \cdot nx. \quad (17)$$

Метод прогонки позволяет решать итерационные уравнения с трёхдиагональной матрицей, воспользуемся методом в форме [5]:

$$A_k x_{k-1} - C_k x_k + B_k x_{k+1} = F_k, \quad k = 1, \dots, n-1; \quad (18)$$

$$x_0 = \lambda_0 x_1 + v_0, \quad x_n = \lambda_n x_{n-1} + v_n; \quad (19)$$

$$x_k = \lambda_k x_{k+1} + v_k, \quad k = 0, \dots, n-1; \quad (20)$$

$$x_n = \frac{\lambda_n v_{n-1} + v_n}{1 - \lambda_n \lambda_{n-1}}; \quad \lambda_k = \frac{B_k}{C_k - A_k \lambda_{k-1}}; \quad v_k = \frac{A_k v_{k-1} - F_k}{C_k - A_k \lambda_{k-1}}. \quad (21)$$

Условие устойчивости численной схемы:

$$|C_k| \geq |A_k| + |B_k| \geq |A_k| > 0, \quad |\lambda_0| < 1, \quad |\lambda_n| \leq 1. \quad (22)$$

Сравнивая уравнения (16) и (18), в данном случае получим:

$$A_k^j = \varepsilon, \quad B_k^j = z_0 f_{2_k}^{j-1} f_{2_k}^j, \quad C_k^j = z_0 f_{2_k}^j f_{2_k}^{j-1} + (f_{1_k}^j f_{2_k}^{j-1} - f_{2_k}^j f_{1_k}^{j-1}); \quad (18)'$$

$$F_k^j = (f_{3_k}^{j-1} f_{2_k}^j - f_{3_k}^j f_{2_k}^{j-1}) + (q_k^{j-1} f_{2_k}^j - q_k^j f_{2_k}^{j-1}), \quad k = 2, \dots, n \cdot nx, \quad j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1.$$

Так как $u_1^j = u_{n \cdot nx+1}^j = 0$, то $\lambda_1^j = \lambda_{n \cdot nx+1}^j = 0$, $v_1^j = v_{n \cdot nx+1}^j = 0$, $j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1$.

Прогонка вперед:

$$\lambda_1^j = 0, \quad v_1^j = 0, \quad j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1;$$

$$\lambda_k^j = \frac{B_k^j}{C_k^j - A_k^j \lambda_{k-1}^j}, \quad v_k^j = \frac{A_k^j v_{k-1}^j - F_k^j}{C_k^j - A_k^j \lambda_{k-1}^j}, \quad k = 2, \dots, n \cdot nx + 1, \quad j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1. \quad (21)'$$

$$u_{n \cdot nx+1}^j = \frac{\lambda_{n \cdot nx+1}^j v_{n \cdot nx}^j + v_{n \cdot nx+1}^j}{1 - \lambda_{n \cdot nx+1}^j \lambda_{n \cdot nx}^j}, \quad j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1.$$

Прогонка назад:

$$\lambda_{n \cdot nx+1}^j = 0, \quad v_{n \cdot nx+1}^j = 0, \quad j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1.$$

$$u_k^j = \lambda_k^j u_{k+1}^j + v_k^j, \quad k = 1, \dots, n \cdot nx, \quad j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1. \quad (20)'$$

$$u_k^1 = \frac{f_{3_k}^1}{f_{1_k}^1}, \quad k = 1, \dots, n \cdot nx.$$

В последней формуле u_k^j может неограниченно возрастать, если $f_{1_k}^1$ стремится к нулю, поэтому в программе реализован по непрерывности алгоритм $u_k^1 = u_{k-1}^1$, если $f_{1_k}^1 = 0$.

$$q_k^j = 4,5 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{j-1}{n1 \cdot nz} \right) \left[\frac{K}{c} \right], \quad j = 1, \dots, n1 \cdot nz + 1.$$

Здесь использовалась линейная аппроксимация объемного источника плавучести

$$q(z) = q_0 \cdot \frac{z}{H}$$

и условие нормировки:

$$\int_0^H q(z) dz = \frac{P}{c \cdot \rho L^2}.$$

Из условия нормировки получим

$$q_0 = \frac{2P}{c_p \rho L^2 H} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^6 \text{ Вт}}{4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} (40 \text{ м})^2 \cdot 20 \text{ м}} = 4,5 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\text{К}}{\text{с}} \right].$$

Кроме того, естественно предположить, что энергия источника плавучести **выделилась** только в частицах воды, если они движутся к поверхности озера:

$$w_k^j = \frac{f_{3k}^j + q_k^j - u_k^j f_{1k}^j}{f_{2k}^j}, \text{ если } w_k^{j-1} \leq 0; \quad w_k^j = \frac{f_{3k}^j - u_k^j f_{1k}^j}{f_{2k}^j}, \text{ если } w_k^{j-1} > 0. \quad (12)'$$

Условие устойчивости:

$$|C_k^j| \geq |A_k^j| + |B_k^j| \geq |A_k^j| > 0, \quad |\lambda_1^j| < 1, \quad |\lambda_{n-nx+1}^j| \leq 1, \quad (22)'$$

$$k = 1, \dots, n \cdot nx, \quad j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1.$$

Два последних неравенства обеспечивает граничное условие задачи:

$$u_1^j = u_{n-nx+1}^j = 0, \quad j = 1, \dots, n1 \cdot nz + 1 (\lambda_1^j = \lambda_{n-nx+1}^j = 0);$$

$$|A_k^j| = \varepsilon > 0.$$

Учитывая непрерывность коэффициентов f_{1k}^j и f_{2k}^j , можно ожидать, что значение $f_{1k}^j \cdot f_{2k}^{j-1} - f_{2k}^j \cdot f_{1k}^{j-1} \approx 0$ в формуле (18)'.

$$C_k^j = z_0 f_{2k}^j f_{2k}^{j-1} + (f_{1k}^j f_{2k}^{j-1} - f_{2k}^j f_{1k}^{j-1}) = B_k^j + (f_{1k}^j f_{2k}^{j-1} - f_{2k}^j f_{1k}^{j-1}) \approx B_k^j.$$

Добавим к C_k^j малое $\pm A_k^j$ и с тем же знаком, что и $C_k^j (C_k^j \approx C_k^j)$:

$$|C_k^j| = |C_k^j| + |\varepsilon_1| = |B_k^j| + |A_k^j| \geq |B_k^j| + |A_k^j| \geq |A_k^j|, \quad |\varepsilon_1| = \varepsilon. \quad (22)'$$

Конечно, на практике $|f_{1k}^j f_{2k}^{j-1} - f_{2k}^j f_{1k}^{j-1}|$ не всегда мало, но замечено, что $|f_{1k}^j f_{2k}^{j-1} - f_{2k}^j f_{1k}^{j-1}| < |B_k^j|$.

Поскольку знак выражения $(f_{1k}^j f_{2k}^{j-1} - f_{2k}^j f_{1k}^{j-1})$ быстро осциллирует и обнуляет свое среднее значение на интервале порядка dx , то можно применить метод медианной фильтрации на масштабе dx . Неравенство (22)' фактически превращается в равенство (предельно выполняется условие сходимости), в этом смысле мы назвали задачу плохо обусловленной.

Описание программы

Все действительные переменные и параметры имеют двойную точность: *Real* (8). Для стабилизации устойчивости численной задачи (18)–(21)' применялся метод медианной фильтрации. Сущность метода заключается в удалении больших по модулю значений статистического ряда чисел. Для этого при фиксированном слое j для центральной точки u_k^j после того, как программа нашла решение $res(k, j) = u_k^j$, $k = 1, \dots, n \cdot nx$, строится вектор $um(kkk)$ размерности $2lm + 1$, где lm – параметр окна фильтрации:

```
do k = lm + 1, n1 · nx + 1 - lm; kkk = 0;
do kk = -lm, lm; kkk = kkk + 1; um(kkk) = res(k + kk, j); enddo;
call sort_real(um, um1); res1(k, j) = um1(lm + 1); enddo
k, kk, kkk – целочисленные переменные.
```

Вектор $um(kkk)$ сортируется по возрастанию значений, получается вектор $um1(kkk)$ той же размерности но отсортированный. Выбираем центр отфильтрованного окна $um1(lm + 1)$. Если устранить выбросы решения (отфильтровать) на предыдущем слое, то в следующем слое решение не будет иметь больших значений. Просмотр численного решения при различном числе узлов сетки показывает, что возмущение решения, возникшее на некотором слое, медианной фильтрацией быстро подавляется на следующих слоях.

Для вызова подпрограммы *call sort_real(um,um1)* необходимо использовать библиотеки
Fortran: use dfimsl; use DELIB; use sort_real_int [5].

Для визуализации применялся графический модуль *Compaq Array Vizualizer v1.6* с использованием библиотек *use AVDer; use AVViewer* [6].

Вертикальную компоненту скорости можно найти из формулы (12):

$$w_k^j = \frac{f_{3k}^j + q_k^j - u_k^j f_{1k}^j}{f_{2k}^j}, \text{ если } w_k^{j-1} \leq 0;$$

$$w_k^j = \frac{f_{3k}^j - u_k^j f_{1k}^j}{f_{2k}^j}, \text{ если } w_k^{j-1} > 0, f_{2k}^j \neq 0, k = 2, \dots, n \cdot nx, j = 2, \dots, n1 \cdot nz + 1;$$

$$w_k^j = w_k^{j-1}, \text{ если } w_k^j = 0.$$

Напомним, что конечная цель задачи – отыскание поля направлений:

$$napr(j,k) = \arctg\left(\frac{w_k^j}{u_k^j}\right), u_k^j > 0; \quad napr(j,k) = \pi + \arctg\left(\frac{w_k^j}{u_k^j}\right), u_k^j < 0;$$

$$napr(j,k) = \frac{\pi}{2}, u_k^j = 0, w_k^j > 0;$$

$$napr(j,k) = -\frac{\pi}{2}, u_k^j = 0, w_k^j < 0;$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq napr(j,k) < \frac{3}{2}\pi.$$

Поле направлений озера (рис. 2) раскрыто программой.

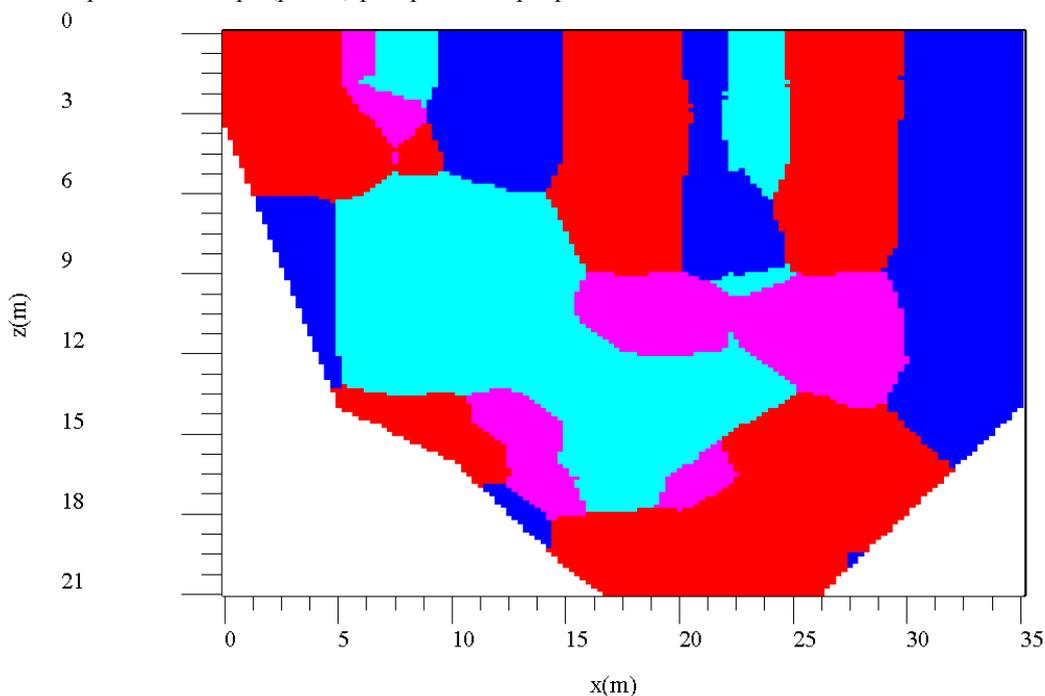


Рис. 2. Поле линий тока $nx = 20$, $nz = nx$, $n = 7$, $n1 = 7$, $ll = nx/2$, $lm = nx$

$$\alpha_{k1}^{j1} = \text{alfa}(j1,k1) = 2 \cdot 10^{-4} \left(\frac{j1-1}{n1} \right) \left[\frac{M^2}{c} \right], \quad j1 = 1, \dots, n1+1$$

$$q_{k1}^j = 4,5 \cdot 10^{-5} \left(\frac{j-1}{n1 \cdot nz} \right) \left[\frac{K}{c} \right], \quad j = 1, \dots, n1 \cdot nz + 1$$

Теплые частицы воды, поднимающиеся вверх к поверхности озера с направлением скорости

$$\left| \text{napr}(j,k) + \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{8},$$

имеют насыщенный красный цвет.

Частицы воды, поднимающиеся менее отвесно к поверхности, окрашены в светло-красный цвет:

$$\frac{\pi}{2} \geq \left| \text{napr}(j,k) - \frac{\pi}{2} \right| > \frac{\pi}{8}.$$

Аналогично, холодные частицы воды, опускающиеся более отвесно, окрашены в темно-синий цвет:

$$\left| \text{napr}(j,k) - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{\pi}{8}.$$

Частицы с более пологим опусканием имеют бирюзовый цвет:

$$\frac{\pi}{2} \geq \left| \text{napr}(j,k) - \frac{\pi}{2} \right| > \frac{\pi}{8}.$$

Кроме того, графический модуль программы использует принцип цветового осреднения, а именно определяется цвет максимального числа элементов, попавших в квадрат со стороной $2 \cdot ll + 1$, центральный элемент которого программа окрашивает в тот же цвет. В программе использованы параметры:

$$nx = 20, \quad nz = nx, \quad n = 7, \quad n1 = 7, \quad ll = nx/2, \quad lm = nx.$$

Анализ численного решения и выводы

1. На рисунке 1 видны две крупные конвективные струи, выходящие на поверхность озера в точках $x = 15 \dots 20$ м, $x = 25 \dots 30$ м, точно так же и на рисунке 2: $x = 15 \dots 20$ м, $x = 25 \dots 30$ м. Области конвективных струй, граничащих со свободной поверхностью, на рисунке 1 и на рисунке 2 полностью повторяют друг друга. Кроме того, пространственно совпадают деформированные области температурного поля (см. рис. 1) с выходом конвективных струй и поля линий тока (см. рис. 2) в нижней части озера.

Таким образом, численная схема (18)'–(21)' правильно описывает поле направлений скорости.

2. Структура раскрашенных областей и их взаимное расположение сохраняется при увеличении числа узлов сетки – чисел nx , nz , то есть существует предел решения с увеличением числа узлов как требование сходимости численной схемы.

3. Метод медианной фильтрации приводит к релаксации больших по модулю значений горизонтальной компоненты скорости.

4. Потребуем для поля направлений **условие связности конвективной струи**. Это значит, что можно подняться вдоль непрерывной кривой от дна озера до его поверхности исключительно по конвективным красным областям, отображенным на рисунке 2. Поскольку визуально обнаружены конвективные струи на поверхности озера по выходу газа и бурлению поверхности, а также многократно застывшая сера на датчике температуры, то **условие связности конвективной струи** является вполне естественным. На рисунке 2 мы видим мощную конвективную струю, поднимающуюся от дна до поверхности $x = 25 \dots 30$ м.

Таким образом, в численной модели (18)'–(21)' **условие связности конвективной струи** также выполнено.

5. На рисунке 2 видим, что скорость частиц воды в струе $x = 25 \dots 30$ м направлена отвесно в верхней и нижней части у дна части озера. В среднюю часть конвективной струи $z = 25 \dots 30$ м, вероятно, вовлекается холодный поток воды, изменяющий вертикальное движение частиц воды. Экспериментально обнаружено, что на глубине $z = 13$ м ($x = 35$ м) с максимальным градиентом температуры на рисунке 1 в озеро попадают холодные пресные воды и втягиваются в струю, двигаясь устойчиво по горячему кислотному раствору в нижней части озера. Именно, эти воды могут стать причиной деления струи на две. Кроме того, глубина опускания холодных вод в правой части озера больше, чем в левой (см. рис. 2). В левой верхней части (см. рис. 2) видна область, в которой частицы движутся к поверхности. Эта область совпадает с истоком вытекающего из озера ручья, в котором температура воды 40 °С. Указанные особенности также согласуются с экспериментальными данными.

6. Поток тепла и плотность потока тепла, проходящие через геотермальное озеро, а также коэффициенты температуропроводности и теплопроводности, характеризующие физические свойства среды, сравнимы с аналогичными параметрами в паровых котлах и бойлерах ТЭЦ большой и средней мощности. Таким образом, построенная математическая модель и описанная программа могут быть полезными

для изучения тепломассообмена на ТЭЦ большой и средней мощности, в бойлерах мощных медицинских стерилизаторов. Кроме того, дополнив постановку задачи уравнением диффузии с турбулентными коэффициентами обмена для взвешенных дымовых канцерогенных частиц, можно на базе полученной модели рассмотреть задачу теплообмена и переноса дыма при пожаре в закрытом помещении или лесном массиве, где потоки тепла, проходящие через среду, также велики.

Указанный в работе метод остается в силе, если вместо поля температуры рассматривать другие скалярные поля: солености, влажности, концентрации взвешенных суспензионных частиц и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпов, Г.А. Некоторые геохимические особенности подводного извержения в кальдере Академии Наук 2–3 янв. 1996 г. / Г.А. Карпов // Вестн. Камчатской региональной организации «Учебно-научный центр». Серия: Науки о Земле. – 2004. – № 4. – С. 81–89.
2. Самарский, А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
3. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: в 2-х т. / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер; пер. с англ. Т. 2. – М.: Мир, 1990. – 728 с.
4. Монин, А.С. Статистическая гидромеханика / А.С. Монин, А.М. Яглом. Ч. I. – М., 1965. – 640 с.
5. Красиков, И.В. Алгоритмы. Просто как дважды два / И.В. Красиков, И.Е. Красикова. – М.: Эксмо, 2007. – 256 с.
6. Бартенев, О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL / О.В. Бартенев. Ч. 2. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2001. – 325 с.
7. Бартенев, О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL / О.В. Бартенев. Ч. 3. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2001. – 372 с.
8. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: учеб. пособие: в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. лит. 1986. – Т. 6: Гидродинамика. – 736 с.
9. Пастухов, Д.Ф. Исследование особенностей термического режима геотермального озера открытого типа: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Д.Ф. Пастухов. – М., 1996.
10. The role of aeration in forming the thermal regime of a geothermal lake Anisimova E.P. [et al.] / Izvestiya Atmospheric and Oceanic Physics. – 1996. – Т. 32, № 2. – С. 268–272.

Поступила 09.03.2015

PROBLEM OF THE BUILDING OF THE CURRENT LINE FIELD ON WARM-UP CUT SHEPHERD

YU. PASTUHOV, D. PASTUHOV

In given work by numerical methods is considered two-dimensional stationary problem of the recalculation of the cut of the warm-up field on field of the directions to velocities of water. The Warm-up field geothermal lake was measured by bridge of the direct current. For decision of the problem it is enough to use the equation to heat conductivity, equation to continuity, border conditions for velocity of the particles to liquids. For reinforcement of stability is used method median to filtering horizontal components to velocities on each layer. New is a notion to coherence heated stream.

УДК 681.5.015

МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ 3D ДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЫ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ БАЙЕСА

А.В. ГОСПОД

(Могилёвский государственный университет продовольствия)

Демонстрируется новый вероятностный подход в изучении пространственных представлений динамической окружающей среды с помощью 3D-лазерных измерений. Показано, что предлагаемый метод может применяться в режиме реального времени даже при наличии большого количества динамических объектов, в отличие от большинства ранее разработанных методик, которые затратны в вычислительном плане при рассмотрении данного вопроса. Существуют способы для изучения активности переднего плана изображения. Однако они, как правило, не учитывают неопределенности, полученные в процессе зондирования. Сделан вывод, что проблема обнаружения динамических объектов может быть решена онлайн при помощи последовательной структуры Байеса. Все параметры, участвующие в процессе обнаружения, подчиняются вероятностной интерпретации. При использовании в реальных условиях, результаты, получаемые предложенным методом, могут применяться для решения различных задач, таких как навигация робота, создание карт, определение локализаций.

Введение. В робототехнике всё более популярной темой исследований становится понимание динамических свойств окружающей среды. Обнаружение движущихся объектов в поле зрения датчиков робота может, например, испортить локализацию или построение карты [1–3]. С другой стороны, новые подходы планирования направлены на навигацию в динамических средах [4; 5], поэтому они сильно полагаются на оценки параметров движения объектов, которые потенциально могут помешать траектории робота. Широко распространенная группа методов, касающихся оценки движения, стремится к тому, чтобы отслеживать перемещение целых точечных скоплений [6]. Благодаря таким подходам удалось получить параметрическое описание движения облака точек, но они обычно принимают допущения относительно размера или формы объектов, что приводит к ограничению числа классов объектов. Необходимо же обнаружить только параметры движения, а не все параметры окружающей среды.

В данной работе мы предлагаем новый подход получения 3D-модели динамической среды. Используя модель компьютерного зрения [7], этот вопрос представляет собой бинарную задачу. То есть для серии наблюдений мы стремимся оценить точечные измерения в зависимости от статического или динамического объекта. Следовательно, моделируем с помощью распределения Гаусса [8; 9].

Известны стандартные методы изучения гауссовых смесей, неуспешные из-за нестационарного характера динамической окружающей среды [10]. Поэтому предлагается решение в режиме реального времени, в котором не делается никаких предположений о количестве гауссианов в модели, но эффективно изменяется с усложнением окружающей среды. Даже при большом количестве настроек предложенный подход способен различать динамические и статические объекты в реальном времени.

Вероятностные формулировки. Предлагаемый алгоритм создает 3D-облако точек на основе данных от 2D-датчика [11]. Данные от датчика z_t представлены в виде функции $(r_t, \vartheta_t, \phi_t)$, где r_t – диапазон измерений; ϑ_t и ϕ_t – соответственно тангаж и рыскание лазерного луча в момент времени t . Предполагая, что r_t зависит от гауссовых шумов, имеем $r_t \sim N(\hat{r}_t, \sigma_r)$, где \hat{r}_t – истинное расстояние между лазером и наблюдаемым объектом.

Так как не учитываем неопределенности ϑ и ϕ , то представляем данные датчика как матрицу $N \times M$ с элементами c_{ij} , являющимися дискретизацией непрерывного пространства $S = [-\vartheta_{max}, \vartheta_{max}] \times [-\phi_{max}, \phi_{max}]$, где для тангажа и рыскания границы предопределены. Таким образом, для каждого z_t можно вычислить вектор в 3D-координатах $z_t^{[i,j]}$, где i и j индексы элементов c_{ij} , соответствующие r_t .

Для математической формулировки данного вопроса введем бинарную фиксированную переменную x_t , которая принимает значение true, если наблюдение z_t соответствует динамическому объекту, в противном случае – false. Нашей целью является оценка x_t в любой момент времени t , с учетом погрешностей измерения z_t . Поэтому формально мы находим $p(x_t|z_t)$. Предполагая статистическую независимость между всеми диапазонами изображений элементов, можно оценить апостериорную вероятность для измеренного диапазона динамического объекта $\bar{x}_t = \{x_t^{[i,j]}\}$ с учетом диапазона изображения $\bar{z}_t = \{z_t^{[i,j]}\}$:

$$p(\bar{x}_t|\bar{z}_t) = \prod_{i,j} p(x_t^{[i,j]}|z_t^{[i,j]}) \tag{1}$$

Для лаконичности, далее индексы $[i, j]$ будут опущены, а все расчеты будут выполнены на уровне ячейки. Следовательно, условный оператор $p(x_i|z_i)$, ассоциированный с каждым элементом, теперь должен быть отнесен к апостериорному элементу.

Разработка модели с помощью гауссовой смеси. Чтобы определить x_i , предполагаем, что каждое наблюдение z_i обусловлено одним из K объектов, которые могут быть статическими или динамическими. Слепая зона лазера моделируется с помощью нормального распределения $N(\mu_k, \sigma_k)$, где μ_k – математическое ожидание, σ_k – дисперсия, $k \in \{1, \dots, K\}$. Для каждого элемента, таким образом, моделируется свой набор параметров модели, которые в дальнейшем будем обозначать $\Theta = \{K, \mu_1, \dots, \mu_K, \sigma_1, \dots, \sigma_K\}$. Для выражения факта соответствия z_i объекту k введем бинарную переменную g_i^k , где только один g_i^k может быть истинным для любого z_i .

Расщепление апостериорного элемента. Предложенная модель изменяется в режиме реального времени. Следовательно, Θ_i представляет собой набор параметров, полученных в каждый момент времени. Параметры модели неизвестны, как и x_i , и должны быть выведены. То есть в каждый момент времени будет возникать вопрос, как обновить предыдущую оценку параметров Θ_{i-1} с учетом последних наблюдений z_i . Поэтому Θ_i и Θ_{i-1} должны быть определены в вероятностной интерпретации и должны быть переписаны апостериорные элементы из (1) в виде

$$p(x_i, \Theta_i | z_i, \Theta_{i-1}) = p(x_i | z_i, \Theta_i, \Theta_{i-1}) p(\Theta_i | z_i, \Theta_{i-1}) = p(x_i | z_i, \Theta_i) p(\Theta_i | z_i, \Theta_{i-1}). \quad (2)$$

Таким образом, уравнение (2) описывает модель Θ_i , что дает полное описание основного процесса. В этом уравнении имеется два условных оператора, которые необходимы для нахождения апостериорных элементов. Первый условный оператор описывает назначение бинарных состояний x_i , предполагая, что все параметры Θ_i известны. Поэтому должен быть введен второй, определяющий вероятность динамики и включающий в себя искомую модель Θ_i , полученную из данных z_i и Θ_{i-1} . Итак, получили алгоритм корректировки.

Вероятность динамики. Выражая динамику вероятностью, как в [7], имеем:

$$p(x_i | z_i, \Theta_i) = \frac{p(x_i, z_i | \Theta_i)}{p(z_i | \Theta_i)} = \frac{\sum_{k=1}^K p(x_i, z_i | g_i^k, \Theta_i^k) p(g_i^k | \Theta_i^k)}{\sum_{k=1}^K p(z_i | g_i^k, \Theta_i^k) p(g_i^k | \Theta_i^k)} = \frac{\sum_{k=1}^K p(x_i | g_i^k, \Theta_i^k) p(z_i | g_i^k, \Theta_i^k) p(g_i^k | \Theta_i^k)}{\sum_{k=1}^K p(z_i | g_i^k, \Theta_i^k) p(g_i^k | \Theta_i^k)}. \quad (3)$$

Здесь представлены параметры объекта $\Theta_i^k = \{\mu_i^k, \sigma_i^k\}$ и переменная состояния x_i^k , определенная гауссианом, динамическим или статическим. Также предполагаем, что вероятность z_i одинакова для динамических и статических объектов и обусловлена k -м объектом. Что приводит к условной независимости отношения $p(x_i^k, z_i | g_i^k, \Theta_i^k) = p(x_i^k | g_i^k, \Theta_i^k) p(z_i | g_i^k, \Theta_i^k)$.

Из (3) необходимо определить три слагаемых. Примечательно, что $p(g_i^k | \Theta_i^k)$ – априорная вероятность для z_i k -го объекта. Обычно $p(g_i^k | \Theta_i^k)$ называют весом k -го гауссиана и обозначают w_i^k . Второе – вероятность того, что данные $p(z_i | g_i^k, \Theta_i^k)$ равны $N(z_i; \mu_i^k, \sigma_i^k)$. И наконец, вероятность динамики k -го гауссиана, определенная как $p(x_i^k | g_i^k, \Theta_i^k)$.

Правило корректировки. Запишем правило корректировки так же, как и вероятность динамики:

$$p(\Theta_i | z_i, \Theta_{i-1}) = \sum_{k=1}^K p(\Theta_i^k | z_i, g_i^k, \Theta_{i-1}^k) p(g_i^k | z_i, \Theta_{i-1}^k). \quad (4)$$

Это дает два дополнительных условия: вероятность $p(g_i^k | z_i, \Theta_{i-1}^k)$ представляет собой статистический закон для выбора k -го гауссиана в качестве условного обозначения z_i ; правило корректировки k -го гауссиана обозначим через $p(\Theta_i^k | z_i, g_i^k, \Theta_{i-1}^k)$.

Вес смеси. Предполагается, что каждое наблюдение вызвано только одним объектом. Это связано с жестким присвоением точке данных в кластерах. Значит, можно сказать, что каждая точка данных, полученная в дискретном времени с шагом 1, ..., t , отнесена к k -му кластеру, где каждому кластеру соответствует гауссиан.

Выражая количество наблюдений как n_t^k , которое соответствует k -му кластеру в момент времени t , можно оценить априорную вероятность нового наблюдения z_t :

$$p(g_t^k | \Theta_t^k) = w_t^k = \frac{n_t^k}{t}. \quad (5)$$

Отметим, что, зная t , n_t^k становится эквивалентно представлению веса смеси w_t^k .

Онлайн-оценка параметров смеси. Представлена реализация онлайн-оценки моделируемых параметров. Как было указано выше, можно вычислить апостериорную вероятность наблюдения z_t от динамического объекта в два этапа: первый – применяется правило корректировки по (4) и переоценка параметров смеси Θ_t относительно Θ_{t-1} ; второй, используя вероятность динамики из (3) на скорректированных моделях смеси, – выводим новую переменную x_t .

В отличие от [8], здесь строго регулируется последовательная корректировка моделей смеси статистическими плотностями и законами вероятности. Таким образом, ключевым вкладом является интеграция новых наблюдений в существующую смесь.

Поиск оптимального значения параметров для Θ_t , обусловленных Θ_{t-1} и z_t , соответствует максимизации скорректированной вероятности $p(\Theta_t | z_t, \Theta_{t-1})$. В связи с этим необходимо пересмотреть вероятностное правило корректировки (4). Это предполагает в целях максимизации $p(\Theta_t | z_t, \Theta_{t-1})$ в первую очередь восстановить оптимальное назначение для отображения соответствия переменных g_t^k .

Так как каждое наблюдение z_t соответствует только одному объекту, то необходимо определить, есть ли уже в смеси данные от датчика z_t объекта $k \in \{1, \dots, K\}$. Исходя из [12] введем вероятность и оценку соответствия относительно двух различных случаев.

Возможное: наблюдение z_t можно объяснить k -м гауссианом в текущей модели смеси. Рассмотрим диапазон измерений r_t , обусловленный z_t и помехами σ_r . Кроме того, пусть θ_{t-1}^k параметр k -го гауссиана распределения смеси, который объясняет z_t . Тогда наша модель предполагает, что $p(z_t | g_t^k) \sim N(\mu_{t-1}^k, \sigma_{t-1}^k + \sigma_r)$. Отметим, что суммирование дисперсий σ_r и объекта σ_{t-1}^k позволяет определить шум в обеих моделях.

Невозможное: наблюдение не может быть объяснено с помощью любого из k гауссианов в текущей модели смеси. Не делая допущение о том, как незаметно появляются объекты в диапазоне сенсора, предполагаем равномерное распределение по всей длине луча. Следовательно, мы определяем $p(z_t | g^{new}) \sim U(0, r_{max})$, где U – равномерное распределение в пределах $[0, r_{max}]$, а g^{new} – новый гауссиан для z_t .

Определим $p_{new} = p(g^{new})$ и применим теорему Байеса относительно $p(g^{new} | z_t)$ для вероятности генерируемых непредставленных объектов:

$$p(g^{new} | z_t) = \frac{p(z_t | g^{new}) \cdot p_{new}}{p(z_t | g^{new}) \cdot p_{new} + p(z_t | g_t^k) \cdot (1 - p_{new})}. \quad (6)$$

Тогда, предполагая, что $p(z_t | g^{new})$ мало, можно аппроксимировать логарифм этого выражения:

$$\log p(g^{new} | z_t) \approx \log \frac{p(z_t | g^{new}) \cdot p_{new}}{p(z_t | g_t^k) \cdot (1 - p_{new})} = \log p(z_t | g^{new}) + \log p_{new} - \log p(z_t | g_t^k) - \log(1 - p_{new}). \quad (7)$$

Используя предположения модели из описанных выше случаев, имеем

$$\log p(g^{new} | z_t) \approx -\log r_{max} + \log p_{new} - \log(1 - p_{new}) + \frac{1}{2} \log 2\pi(\sigma_{t-1}^k + \sigma_r) + \frac{1}{2} \frac{(r_t - \mu_{t-1}^k)^2}{(\sigma_{t-1}^k + \sigma_r)}. \quad (8)$$

Объединив все выражения относительно диапазона измерений r_t , получим простое квадратичное отклонение

$$d_k(r_t) = (r_t - \mu_{t-1}^k)^T (\sigma_{t-1}^k + \sigma_r)^{-1} (r_t - \mu_{t-1}^k). \quad (9)$$

Если предполагать, что необъяснимые наблюдения с вероятностью $p(g^{new}|z_t) > 0,5$ значительны, то отклонение

$$d_k^{min} = 2 \log 0,5 + 2 \log r_{max} - 2 \log p_{new} + 2 \log(1 - p_{new}) - \log 2\pi(\sigma_{t-1}^k + \sigma_r). \quad (10)$$

В итоге имеем, что при $d_k(r) < d_k^{min}$ k -й гауссиан объясняет наблюдение z_t .

Представленный метод пока что позволяет только выбрать множество гауссианов из смеси. Поэтому далее, если найдем любой гауссиан для z_t , жестко определим z_t к k -му кандидату гауссиана с минимальным отклонением $d_k(r)$, что равносильно выбору объекта с максимальной вероятностью $p(g_i^k|z_t) = 1 - p(g^{new}|z_t)$. Тогда максимизируем (4), вычисляя онлайн-оценки максимальной вероятности для k -го гауссиана. Последовательный подход необходим, чтобы найти максимальную вероятность для параметров гауссового распределения, что позволяет обрабатывать наблюдения z_t по очереди [13].

В случаях если нет ни одного кандидата гауссиана, наблюдаемый объект представляют вводом нового гауссиана $K+1$ в смесь. Этот гауссиан определяется средними r_t и σ_r .

В качестве исходных данных алгоритм для последовательной корректировки параметров принимает диапазон измерений r_t и соответствующее распределение смеси клеток M_{t-1} , а взамен выдает скорректированную плотность M_t .

А л г о р и т м . Корректировка смеси (M_{t-1}, r_t)

Ввод: Гауссова смесь $M_{t-1} = \{n_{t-1}^1, \theta_{t-1}^1, \dots, n_{t-1}^K, \theta_{t-1}^K\}$

Ввод: Показания датчика r_t

Вывод: Скорректированная гауссовая смесь M_t

$M_{cand} \leftarrow \emptyset$

for each $n_{t-1}^k, \theta_{t-1}^k \in M_{t-1}$ **do**

 вычислить $d_k(r_t)$ и d_k^{min} согласно (9) и (10)

if $d_k(r_t) < d_k^{min}$ **then**

$M_{cand} \leftarrow M_{cand} \cup \{n_{t-1}^k, \theta_{t-1}^k\}$

end if

next

if $M_{cand} \neq \emptyset$ **then**

$n_{t-1}^k, \theta_{t-1}^k \leftarrow$ минимальный аргумент $d_t(r_t)$

$n_{t-1}^l, \theta_{t-1}^l \in M_{cand}$

$M_t \leftarrow M_{t-1} \setminus \{n_{t-1}^k, \theta_{t-1}^k\}$

$n_t^k \leftarrow n_{t-1}^k + 1$

$\theta_t^k \leftarrow$ скорректированный гауссиан (θ_{t-1}^k, r_t)

$M_t \leftarrow M_t \cup \{n_t^k, \theta_t^k\}$

else

$n_t^{K+1} \leftarrow 1$

$\theta_t^{K+1} \leftarrow \{\mu_t^{K+1} \leftarrow r_t, \sigma_t^{K+1} \leftarrow \sigma_r\}$

$M_t \leftarrow M_{t-1} \cup \{n_t^{K+1}, \theta_t^{K+1}\}$

End if

Коллапс смеси (M_t)

Предложенный алгоритм использует две вспомогательные функции. Первая корректирует гауссиан, последовательно определяя среднее арифметическое и дисперсию из лучших кандидатов гауссианов относительно r_t . Вторая функция следит за устойчивостью смеси – это абстрактный механизм присоединения гауссианов, которые разделяют значительную долю фиксированного пространства. Это следует из природы плотности смеси $p(z_t|\Theta_t)$, которая фактически является шумом модели среды, обусловленным

несовершенством датчика, отображенным в новых гауссианах исключительно априорно. Фактически дисперсия каждого гауссиана может выйти за пределы начальной неопределенности, например, при определении прерывистой поверхности.

Для парной идентификации гауссианов используется отклонение из (10), как и для ассоциирования зашумленных наблюдений с более подходящими кандидатами. Преимущество такой реализации состоит в том, что вместо введения нового параметра на каждом шаге корректировки можно повторно использовать априорную вероятность p_{new} при возникновении неопределенных объектов. Следовательно, общее количество K гауссианов, содержащееся в смеси, связано с предположениями модели и не требует искусственной фиксации, как в [14].

Вычисление вероятности динамики. Как скорректировать параметры распределения гауссовой смеси, которая способна представлять наблюдения в статистически независимом диапазоне изображения элементов, рассмотрено выше. Но представленная модель пока что не имеет оценку бинарных состояний переменной x_t^k .

Из вероятности динамики, согласно (3), известно, что условная плотность $p(x_t^k | g_t^k, \Theta_t^k)$ определяет методику, которая основана на весовом коэффициенте k -го гауссиана в распределении смеси.

Чтобы вычислить вероятность динамики k -го гауссиана, используется метод, описанный в [8]. Он основан на том, что большинство наблюдаемых объектов обычно статические. Это означает, что точки данных, чаще всего наблюдаемые, скорее, принадлежат статическому объекту. При моделировании каждого гипотетически возникшего объекта k -м гауссианом, согласно (5), количество наблюдений от k -го объекта кодируется в весовую смесь w_k , которую можно оценить с помощью вероятности $p(x_t^k | g_t^k, \Theta_t^k)$ следующим образом: во-первых, сортируем все веса w_k в порядке убывания, затем вычисляем количество гауссианов K_s , которое, скорее всего, равно количеству статических объектов:

$$K_s = \arg \min_l \left\{ \sum_{k=1}^l w_{s(k)} > \rho \right\}, \quad (11)$$

где $s(k)$ – индекс веса w_k после сортировки; $\rho \in [0, 1]$ – параметр, зависящий от статической части окружающей среды; $(K - K_s)$ гауссианов в отсортированной смеси соответствуют динамическим объектам.

Таким образом, чем меньше ρ , тем больше вероятность того, что гауссиан динамический.

Используя (11), аппроксимируем вероятность динамики:

$$p(x_t^k | g_t^k, \Theta_t^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } s(k) > K_s; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (12)$$

Сложность вычислений. Рассмотрим вычислительные затраты предложенного метода. Анализ шагов, предпринятых для корректировки параметров модели Θ_t , дает новое наблюдение z_t для перерасчета переменной x_t .

Повторный расчет элементов смеси в основном зависит от поиска лучшего кандидата и от парного коллапса гауссианов. Как и среднее число \hat{K} гауссианов изменяется в зависимости от выбора p_{new} , так и сложность вычислений сильно зависит от предшествующего математического ожидания возникновения динамики. Но затраты на корректировку связаны с рекурсивным коллапсом всей смеси в единственную гауссову плотность. Следовательно, в худшем случае представленный алгоритм запускается $O(\hat{K}^2 \log \hat{K})$ раз.

Оценка состояний требует дополнительной сортировки скорректированной смеси, что добавляет еще $O(\hat{K} \log \hat{K})$ итераций.

Заключение. Предложена новая методика идентификации динамических объектов, которая в отличие от других использует намного меньше предположений о внешней среде. Разработанный алгоритм определяется статическими моделями и законами вероятности. Предложенная модель служит для построения карт движения робота и слежения за препятствиями в его рабочей зоне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Biber, P. Dynamic maps for long-term operation of mobile service robots / P. Biber, T. Duckett // In: Proc. of Robotics: Science and Systems, RSS (2005).

2. Burgard, W. Mobile robot map learning from range data in dynamic environments / W. Burgard, C. Stachniss, D. Hahnel // STAR, vol. 35 (2007).
3. Schulz, D. Probabilistic state estimation of dynamic objects with a moving mobile robot / D. Schulz, W. Burgard // Robotics and Autonomous Systems 34(2–3), 107–115 (2001).
4. Coastal navigation: Mobile robot navigation with uncertainty in dynamic environments / N. Roy [et al.] // In: IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 35–40. Citeseer (1999).
5. Jensen, B. Motion detection and path planning in dynamic environments / B. Jensen, R. Philippsen, R. Siegwart // In: Workshop Proceedings Reasoning with Uncertainty in Robotics, International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI (2003).
6. Classifying dynamic objects: An unsupervised learning approach / M. Luber [et al.] // In: Robotics: Science and Systems IV, p. 270 (2009).
7. Lee, D. A Bayesian framework for Gaussian mixture background modeling / D. Lee, J. Hull, B. Erol // In: Proc. of The IEEE International Conference on Image Processing, vol. 3, pp. 973–976 (2003).
8. Stauffer, C. Learning patterns of activity using real-time tracking / C. Stauffer, W. Grimson // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 22(8), 747–757 (2000).
9. Sheikh, Y. Bayesian object detection in dynamic scenes / Y. Sheikh, M. Shah // In: Proc. of The IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, vol. 1, p. 74 (2005).
10. Hou, S. Robust estimation of Gaussian mixtures from noisy input data / S. Hou, A. Galata // In: Proc. of The IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), pp. 1–8 (2008).
11. Surmann, H. An autonomous mobile robot with a 3D laser range finder for 3D exploration and digitalization of indoor environments / H. Surmann, A. Nuchter, J. Hertzberg // Journal of Robotics and Autonomous Systems (JRAS) 45(3–4) (2003).
12. A non-rigid approach to scan alignment and change detection using range sensor data / R. Kaestner [et al.] // In: Field and Service Robotics. STAR, 25th edn., pp. 179–194. Springer (2006).
13. Bishop, C. [et al.] // Pattern Recognition and Machine Learning, pp. 94–97. Springer, New York (2006).
14. Lerner, U. Hybrid Bayesian Networks for Reasoning about Complex Systems / U. Lerner // PhD thesis, Stanford University (2002).

Поступила 11.03.2015

METHODS OF MODELING 3D OF DYNAMIC MEDIA BASED ON BAYES' THEOREM

A. HOSPAD

We propose a new probabilistic approach to the study of spatial representations of of dynamic environment using the 3D-laser measurements. Most of the previous developed techniques computationally costly when considering this issue, and the new method can be applied in real time, even in the presence of a large number of dynamic objects. There are ways for studying activity of the foreground image. However, they generally do not take into account the uncertainty generated during sensing. In this paper we consider the problem of detection of dynamic objects can be solved by means of sequential online structure Bayes. All the parameters involved in the detection process are subject to a probabilistic interpretation. When used in real-world conditions, the results obtained by the proposed method can be used for various tasks: navigation robot creation of maps, localization.

ФИЗИКА

УДК 537.533.3; 621.3.032.26

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ФОРМИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА ФОРВАКУУМНЫМ ПЛАЗМЕННЫМ ИСТОЧНИКОМ

канд. техн. наук **О.Н. ПЕТРОВИЧ**; **И.С. РУСЕЦКИЙ**
(Полоцкий государственный университет)

Исследуется влияние ионизационных процессов на характеристики пучка и свойства электронно-оптической системы. Проведено численное моделирование процессов формирования электронного пучка форвакуумным плазменным источником с использованием пакета прикладных программ ELIS. Установлен механизм обратной связи между плазменным эмиттером и электронно-оптической системой ускорения и формирования пучка, обусловленный эволюцией вторичного плазменного образования.

Введение. Электронно-лучевые технологии занимают одно из ведущих мест в ряду современных ресурсо- и энергосберегающих технологий, так как позволяют реализовать широкий спектр термического воздействия на материалы. Для сокращения объема экспериментальных работ при проектировании современных технологических электронно-лучевых установок и оптимизации конструкций источников заряженных частиц в настоящее время широко применяется компьютерное моделирование. Развитие компьютерной техники стимулировало разработку методов и алгоритмов численного моделирования и, как следствие, создание пакетов прикладных программ [1–5].

Разработанный ранее пакет прикладных программ ELIS [6] предназначен для проведения численных экспериментов с целью выявления основных физических принципов формирования электронных пучков с заданными характеристиками и сравнительного анализа влияния различных физических условий и процессов на электронно-оптические свойства источника электронов.

Методика численного анализа и разработанные алгоритмы моделирования положения и формы эмиттирующей поверхности, ионизационных процессов, динамики электронно-оптических свойств источника электронов с плазменным эмиттером [7; 8], которые легли в основу пакета ELIS, позволили дать теоретическое обоснование экспериментально обнаруженным особенностям и установить нелинейные свойства систем формирования остросфокусированного электронного пучка в форвакуумной области давлений. Результаты данного исследования изложены в настоящей работе.

Результаты численного анализа процессов формирования электронного пучка

Модель электронно-оптической системы форвакуумного источника электронов с плазменным эмиттером. Форвакуумный плазменный источник электронов можно рассматривать как электронно-оптическую систему (ЭОС) (рис. 1), в которой эмиттером электронов служит газоразрядная плазма, ограниченная эмиттерным электродом с эмиссионным каналом от промежутка формирования и ускорения электронного пучка [9].

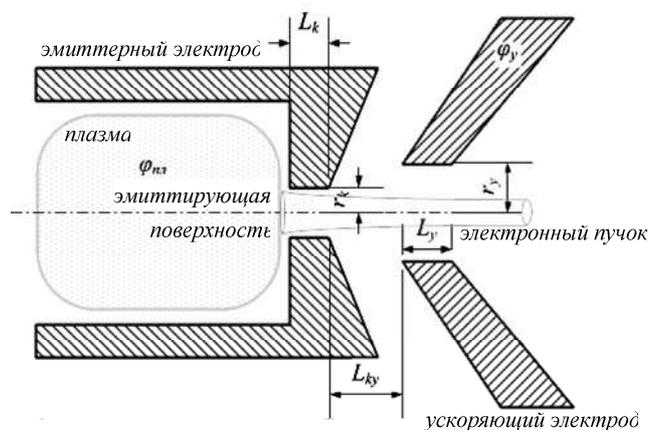


Рис. 1. Электронно-оптическая система источника электронов с плазменным эмиттером

Потенциал эмиттирующей плазмы выше потенциала эмиттерного электрода на величину от единиц до сотен вольт. Эмиссионный канал служит для инжекции электронов из плазмы в область уско-

ряющего поля, а также обеспечивает перепад давлений между пространством ускорения пучка и газоразрядной структурой. Вследствие того, что эмиттерный электрод конструкционно отделяет высоковольтный промежуток ускорения от разрядной камеры, физически функция эмиссионного канала сводится к ограничению проникновения как ускоряющего поля в разрядную камеру, так и эмиттирующей плазмы в ускоряющий промежуток.

В форвакуумной области давлений на формирование электронного пучка существенное воздействие оказывают ионизационные и сопутствующие им процессы, которые с ростом давления в ускоряющем промежутке проявляют свое влияние все в большей степени. В этом случае эмиссионный канал начинает играть роль элемента обратной связи между пространством ускорения пучка и газоразрядной структурой. Механизм обратной связи заключается в следующем. Объемный ионный заряд, образующийся вследствие ионизационных процессов, искажает распределение потенциала, как правило, вблизи границы плазмы, то есть в области эмиссионного канала, где сечение ионизации максимально. Увеличение значений потенциала вблизи границы эмиттирующей плазмы по сравнению со случаем высокого вакуума, во-первых, изменяет положение и форму эмиттирующей поверхности, во-вторых, приводит к возрастанию микропереванса пучка и увеличению эмиссионного тока. Указанные процессы в итоге изменяют характеристики пучка: ток, расходимость, режим движения потока, фазовый портрет пучка. Увеличение эмиссионного тока вызывает возрастание количества образующихся ионов. Накопление ионов ведет как к росту тока эмиссии, так и к увеличению ионного потока, уходящего на стенки эмиссионного канала.

В зависимости от соотношения скоростей генерации и ухода ионов возможно развитие следующих характерных ситуаций:

- установление динамического равновесия (стационарный режим формирования пучка);
- снижение электрической прочности промежутка ускорения (режим пробоя);
- смена процессов генерации и разрушения вторичного плазменного образования в эмиссионном канале (динамический режим).

В первом случае скорость ухода ионов на стенки эмиссионного канала и скорость их генерации выравниваются. В результате это приводит к установлению динамического равновесия ионов в эмиссионном канале и переходу электронно-оптической системы в новый стационарный режим отбора с более высоким коэффициентом переключения.

Во втором – скорость ухода ионов меньше скорости их генерации, что вызывает дальнейшее накопление ионов в эмиссионном канале, рост области с немонотонным распределением потенциала, неограниченное движение эмиттирующей поверхности вглубь канала, а затем и внутрь разрядной камеры. В конечном итоге имеет место неограниченный рост эмиссионного тока и пробой ускоряющего промежутка.

В третьем – скорость ухода ионов в какой-то момент времени становится больше скорости их генерации вследствие ионизационных процессов в эмиссионном канале, что инициирует «рассасывание» ионного объемного заряда и возвращение к ситуации, когда распределение потенциала и положение границы плазмы приближаются к вакуумному случаю. Затем процессы качественно повторяются.

Динамический режим и режим пробоя можно рассматривать как частные случаи нестационарного режима формирования пучка, так как в этих характерных ситуациях ионизационные процессы определяют динамику электронно-оптических свойств форвакуумного источника электронов с плазменным эмиттером со временем.

Критическое давление. Численным моделированием установлено существование критического значения давления $p_{кр}$, выше которого формирование остророфокусированного электронного пучка в форвакуумных источниках электронов с плазменным эмиттером становится нестационарным.

Критические значения давления, найденные численными методами, лежат в диапазоне 0,4...0,8 Па в зависимости от ускоряющего напряжения, концентрации и потенциала плазмы, что хорошо согласуется с экспериментальными данными [10; 11].

Численное моделирование показало, что для эмиттирующей плазмы, имеющей потенциал порядка нескольких десятков вольт, критическое значение давления меньше, чем в случае плазмы с потенциалом, равным сотням вольт, при прочих равных условиях. Это можно объяснить тем, что низкопотенциальная плазма неглубоко проникает в эмиссионный канал со стороны разрядной камеры, протяженность функции сечения ионизации вдоль эмиссионного канала больше, а значит больше и протяженность области, занимаемой ионами внутри канала.

Увеличение критического значения давления с ростом потенциала эмиттирующей плазмы обусловлено также обратной зависимостью эмиссионного тока от потенциала плазмы [12]. Чем меньше потенциал плазмы, тем больше радиус эмиттирующей поверхности и, следовательно, эмиссионный ток при одинаковом значении концентрации плазмы. Это приводит к тому, что область, занимаемая ионами, будет шире по радиальному направлению в этом случае. Следовательно, в случае низкопотенциальной плазмы электронно-оптическая система перейдет в нестационарный режим при меньших значениях давления.

В интервале давлений, ограниченном сверху критическим значением давления, формирование пучка является стационарным, что объясняется монотонным характером распределения потенциала в промежутке ускорения. Следовательно, монотонное распределение потенциала можно расценивать как критерий стационарного режима формирования электронного пучка при повышенном рабочем давлении (рис. 2, а).

При значениях давления выше критического в форвакуумных плазменных источниках электронов характерно развитие следующих процессов. Во-первых, ионный объемный заряд деформирует электрическое поле в ЭОС таким образом, что распределение потенциала в ускоряющем промежутке становится немонотонным (рис. 2, б). Немонотонное распределение потенциала приводит к перераспределению объемных зарядов ионов и парных электронов, что в свою очередь должно вновь исказить распределение потенциала и т.д. Во-вторых, ионный объемный заряд перемещает границу эмиттирующей плазмы по направлению к разрядной камере, что увеличивает кривизну поверхности эмиттера и эмиссионный ток. Рост тока приводит к возрастанию ионизационных эффектов и, как следствие, к большей деформации распределения потенциала, что является причиной дальнейшего перемещения границы плазмы вглубь разрядной камеры.

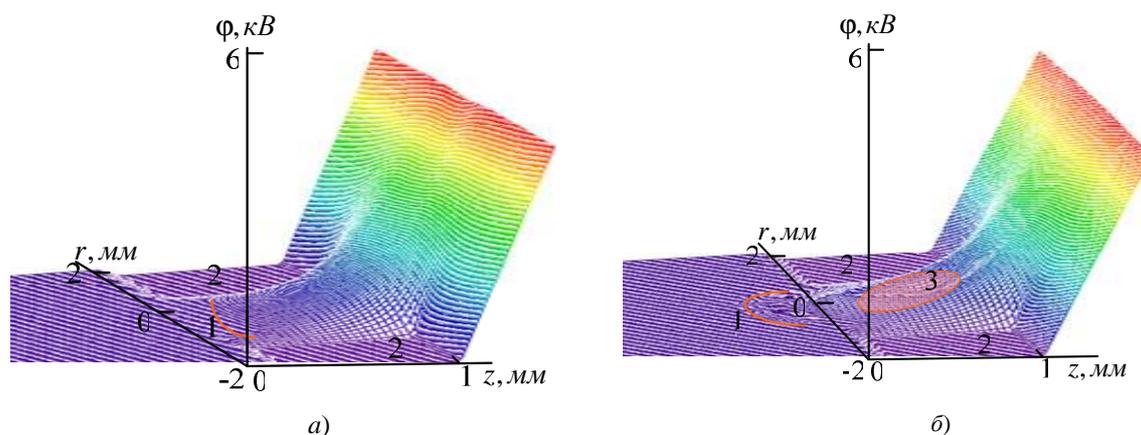


Рис. 2. Распределение потенциала в эмиссионном канале:
 в стационарном (а) и нестационарном (б) режимах формирования пучка:
 1 – эмиттирующая поверхность плазмы; 2 – эмиттерный электрод; 3 – вторичная плазма.
 Концентрация и потенциал плазмы: $n_{и\pm} = 8 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}$, $\phi_{и\pm} = 200 \text{ В}$;
 ускоряющее напряжение $\phi_y = 30 \text{ кВ}$, давление: а – 0,1 Па, б – 0,7 Па

Таким образом, совокупность всех процессов приводит к динамике характеристик эмиттирующей плазмы и распределения потенциала, что определяет изменение характеристик электронного пучка со временем. Немонотонное распределение потенциала в промежутке ускорения форвакуумного источника электронов с плазменным эмиттером можно рассматривать как критерий перехода к нестационарному режиму формирования пучка, так как именно оно является спусковым механизмом развития нестационарных процессов и динамики параметров ЭОС со временем.

Стационарный режим формирования пучка. Как показало численное моделирование, при значениях давления ниже критического усредненные по времени характеристики электронного пучка и параметры ЭОС остаются постоянными начиная с некоторого момента времени. Таким образом, стационарный режим можно рассматривать как режим установления динамического равновесия. Время перехода к динамическому равновесию сравнимо со временем движения ионов в эмиссионном канале, что позволяет сделать вывод об определяющей роли ионов в установлении стационарного режима. В стационарном режиме после перехода к динамическому равновесию распределение потенциала, распределение ионов, характеристики пучка не изменяются.

Численное моделирование стационарного режима формирования электронного пучка в форвакуумных плазменных источниках электронов показало, что ионизационные процессы, во-первых, приводят к изменению траекторий движения электронов пучка под влиянием кулоновских сил со стороны положительного ионного заряда (табл. 1). Ионный фон частично компенсирует объемный заряд электронного пучка, уменьшая тем самым уширение пучка под действием собственных сил расталкивания. Это влечет за собой компрессию электронного пучка в той области, где сосредоточены ионы, то есть около границы плазмы. Во-вторых, ионизационные процессы оказывают влияние на форму эмиттирующей поверхности плазмы, что также может привести к изменению хода траекторий электронов пучка (табл. 2). При таких значениях давления и параметрах электронно-оптической системы, когда форма плазменного эмиттера остается практически плоской, превалирует компрессия электронного пучка за счет частичной компенсации собственного заряда пучка ионным объемным зарядом ($p = 0,1 \text{ Па}$, см. табл. 1) [13].

Таблица 1

Ионная фокусировка пучка в стационарном режиме форвакуумного плазменного источника электронов

Давление	Диаметр пучка, мм	Максимальная расходимость, мрад	Форма эмиттирующей поверхности
Высокий вакуум	1,6	79	плоская
Давление $p = 0,1$ Па	1,2	59	плоская
Давление $p = 0,4$ Па	1,8	122	плоская
Концентрация и потенциал плазмы: $n_{nl} = 2 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$, $\phi_{nl} = 200 \text{ В}$; ускоряющее напряжение $\phi_y = 20 \text{ кВ}$; отношение длины к диаметру эмиссионного канала составляет 0,5.			

Таким образом, численные расчеты дают хорошее согласие с экспериментально установленным фактом [14], что ионная фокусировка за счет компенсации объемного заряда электронов пучка объемным ионным зарядом в стационарном режиме формирования пучка позволяет получить более узкий и интенсивный пучок. При дальнейшем повышении давления в ускоряющем промежутке форвакуумного плазменного источника электронов ионные процессы приводят в итоге к увеличению диаметра и расходимости пучка по сравнению со случаем высокого вакуума ($p = 0,4$ Па, см. табл. 1) вследствие перефокусировки пучка ионным объемным зарядом.

Таблица 2

Влияние формы эмиттирующей поверхности на фокусировку пучка в стационарном режиме форвакуумного плазменного источника электронов

Давление	Диаметр пучка, мм	Максимальная расходимость, мрад	Форма эмиттирующей поверхности
Высокий вакуум	95	70	плоская
Давление $p = 0,5$ Па	120	75	плоская
Концентрация и потенциал плазмы: $n_{nl} = 2 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$, $\phi_{nl} = 200 \text{ В}$; ускоряющее напряжение $\phi_y = 20 \text{ кВ}$; отношение длины к диаметру эмиссионного канала равно 1.			

Зависимости расходимости и диаметра формируемого пучка от величины давления носят немонотонный характер, так как на величину расходимости электронного пучка оказывают влияние следующие факторы:

1) компенсация заряда электронов пучка зарядом ионов, возникающих в результате ударной ионизации молекул остаточного газа электронами пучка, что может приводить как к уменьшению расходимости пучка, так и к увеличению расходимости в зависимости от степени компенсации заряда пучка ионным зарядом;

2) смещение эмиттирующей поверхности плазмы вглубь эмиссионного канала и изменение формы плазменного эмиттера вследствие деформации распределения потенциала ионным объемным зарядом (см. табл. 2).

Для каждого значения концентрации эмиттирующей плазмы существует свое значение давления, при котором диаметр и расходимость пучка имеют минимальные значения.

В-третьих, ионизационные процессы ведут к увеличению эмиссионного тока и переходу электронно-оптической системы в новый стационарный режим отбора с более высоким коэффициентом переключения, что обусловлено двумя причинами. В режиме формирования эмиттирующей поверхности плазмы полем пристеночного слоя ток эмиссии с увеличением давления возрастает по причине уменьшения потенциальной ямы у границы плазмы за счет деформации распределения потенциала объемным ионным зарядом. В режиме формирования эмиттирующей поверхности полем ускоряющего электрода ток эмиссии с ростом давления увеличивается благодаря движению границы плазмы вглубь канала, что приводит к росту её концентрации (см. табл. 2).

Нестационарный режим формирования пучка. Как указывалось выше, деформация распределения потенциала вызывает изменение положения и формы эмиттирующей поверхности плазмы. Это влечет за собой формирование плазменной поверхности результирующим полем ускоряющего электрода, пристеночного слоя и объемного ионного заряда.

Эмиттирующая поверхность в нестационарном режиме, как показало компьютерное моделирование, формируется полем ионного объемного заряда, максимум которого находится вблизи границы эмиттирующей плазмы. Поэтому ее расположение и форма нестабильны, что обусловлено соотношением скоростей генерации и ухода ионов в данный момент времени.

Положение плазменной границы задает плотность эмиссионного тока, а ее форма определяет площадь сбора электронов, что влияет на значение эмиссионного тока и, как следствие, тока пучка. Форма поверхности эмиттера определяет, в том числе, форму пучка и его расходимость. Нестабильность расположения и формы поверхности эмиттирующей плазмы вызывает динамику характеристик пучка с течением времени. При движении границы плазмы внутрь разрядной камеры кривизна эмиттирующей поверхности увеличивается, вследствие чего происходит формирование неламинарных пучков с кроссовером, расположенным внутри эмиссионного канала (рис. 3). С одной стороны, это увеличивает расходимость пучка, с другой – может вызывать замыкание части эмиссионного тока на поверхность ускоряющего электрода.

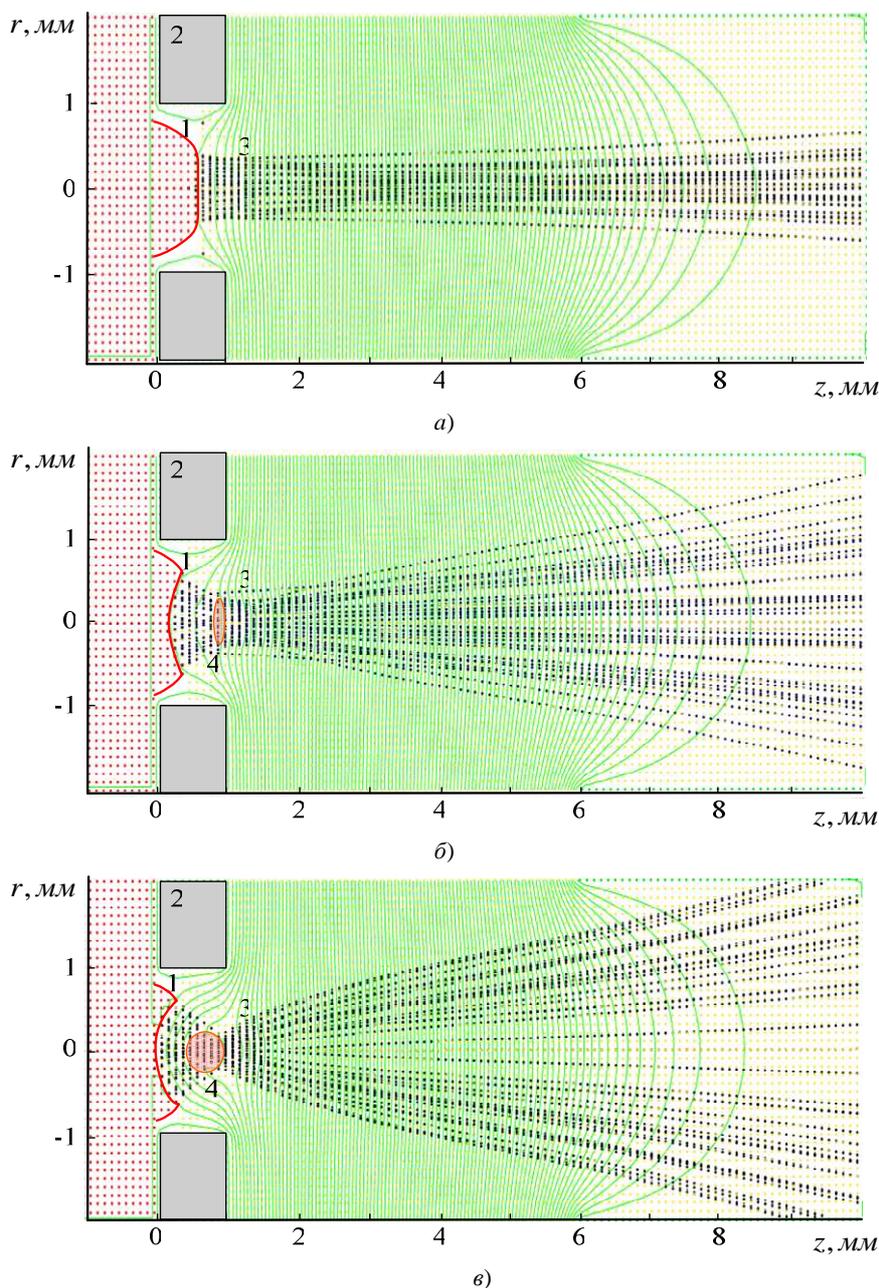


Рис. 3. Влияние эволюции вторичной плазмы на динамику электронно-оптических свойств форвакуумного плазменного источника электронов в нестационарном режиме:
 а – вакуумный режим; б, в – давление 0,5 Па; б – $t = 1,76 \cdot 10^{-7}$ с; в – $t = 2,00 \cdot 10^{-7}$ с;
 1 – эмиттирующая поверхность плазмы; 2 – эмиттерный электрод; 3 – траектории электронов пучка; 4 – вторичная плазма.
 Концентрация и потенциал плазмы: $n_{pl} = 8 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}$, $\phi_{pl} = 200 \text{ В}$; ускоряющее напряжение $\phi_y = 10 \text{ кВ}$

Результаты численного моделирования форвакуумного плазменного источника электронов при давлении выше критического показали, что в электронно-оптической системе формирования острого фокуса

ванных пучков характерно образование низкопотенциальной вторичной плазмы (см. рис. 3) внутри эмиссионного канала, которая представляет собой плазменную линзу, фокусирующую электроны пучка (см. рис. 3). Потенциал вторичной плазмы выше потенциала эмиттирующей плазмы и составляет сотни вольт. Потенциал $\varphi_{\text{вн}}$ и положение $z_{\text{вн}}$ вторичной плазмы с течением времени изменяются. Например, при концентрации $n_{\text{вн}} = 8 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}$ и потенциале $\varphi_{\text{вн}} = 200 \text{ В}$ эмиттирующей плазмы в ЭОС с приведенной напряженностью ускоряющего поля 2 кВ/мм при давлении $0,5 \text{ Па}$ в момент времени $t = 1,76 \cdot 10^{-7} \text{ с}$ потенциал и положение вторичной плазмы составляют: $\varphi_{\text{вн}} \approx 700 \text{ В}$, $z_{\text{вн}} \approx 1 \text{ мм}$; при $t = 2,00 \cdot 10^{-7} \text{ с}$ – $\varphi_{\text{вн}} \approx 500 \text{ В}$, $z_{\text{вн}} \approx 0,6 \text{ мм}$.

Установлено, что образование и динамика вторичной плазмы определяет эволюцию характеристик электронного пучка и ЭОС со временем вследствие влияния поля ионного объемного заряда на положение и форму эмиттирующей поверхности (см. рис. 3) и, как следствие, на характер движения потока электронов, перванс и эмиттанс пучка. В режиме образования вторичной плазмы характер движения электронов пучка становится неламинарным.

Численное моделирование позволило установить суть механизма обратной связи между электронно-оптической системой формирования острого фокусированного пучка и газоразрядной структурой в форвакуумных плазменных источниках в нестационарном режиме.

Определяющую роль в установлении обратной связи играет эволюция вторичной плазмы в эмиссионном канале, которая может развиваться по двум сценариям:

1) перемещение вторичной плазмы по направлению к разрядной камере, сопровождающееся движением эмиттирующей поверхности вглубь канала и ростом эмиссионного тока (см. рис. 3). В этом случае движение вторичной плазмы по направлению к разрядной камере и рост эмиссионного тока могут приводить к снижению электрической прочности промежутка ускорения ЭОС. Резкое увеличение эмиссионного тока усиливает процессы ионизации, что приводит к расширению области, занятой вторичной плазмой. Как следует из численных расчетов, концентрация вторичной плазмы сравнима с концентрацией эмиттирующей газоразрядной плазмы. В результате электронный ток, пропускаемый ускоряющим промежутком, складывается из тока, эмиттированного плазмой газового разряда и вторичной плазмой. Увеличение потока электронов через ускоряющий промежуток в совокупности с неламинарным характером движения электронов приводит в итоге к снижению электрической прочности ускоряющего промежутка;

2) смена процессов генерации и разрушения вторичной плазмы, сопровождающаяся изменением характеристик пучка со временем. В этом случае на зависимости тока пучка от времени будут наблюдаться пульсации (рис. 4), которые подтверждают предположение о роли эволюции вторичной плазмы в установлении обратной связи между промежутком ускорения пучка и эмиттирующей плазмой газового разряда.

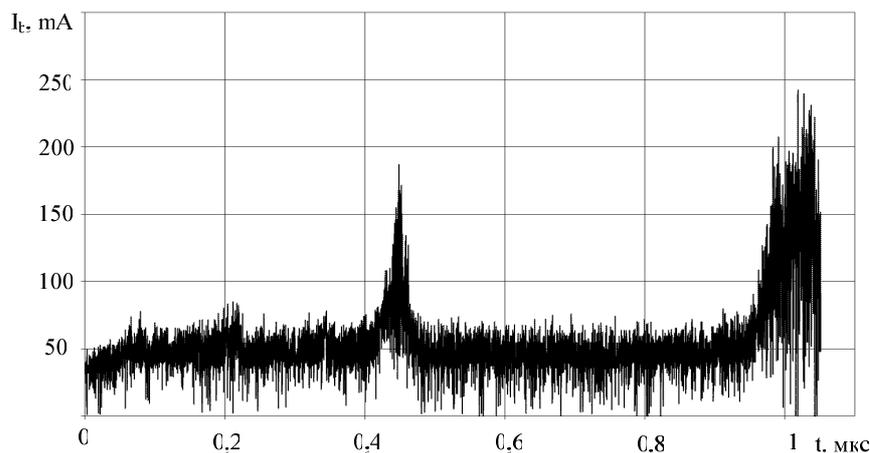


Рис. 4. Зависимость тока пучка от времени
Концентрация и потенциал плазмы: $n_{\text{вн}} = 2 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$, $\varphi_{\text{вн}} = 150 \text{ В}$;
приведенная напряженность ускоряющего поля 4 кВ/мм ; давление 1 Па

Таким образом, при значениях давления выше критического форвакуумный плазменный источник электронов представляет собой нелинейную электронно-оптическую систему с обратной связью, обусловленной эволюцией вторичной плазмы.

Заключение. Численным моделированием процессов в форвакуумном плазменном источнике с использованием пакета прикладных программ ELIS установлен критерий перехода к нестационарному

режиму формирования электронного пучка, связанный с немонотонным распределением потенциала в эмиссионном канале. Исследовано влияние ионизационных процессов на характеристики пучка и свойства электронно-оптической системы. Выявлена определяющая роль эволюции вторичной плазмы в установлении обратной связи между плазменным эмиттером и электронно-оптической системой ускорения и формирования пучка. Установлен механизм снижения электрической прочности промежутка ускорения вследствие смещения эмиттирующей поверхности вглубь разрядной камеры под воздействием вторичной плазмы. Показано влияние процессов возникновения и разрушения вторичной плазмы на характерные пульсации тока пучка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Boers, J.E. An interactive version of the PBGUNS program for the simulation of axisymmetric and 2-D, electron and ion beams and guns / J.E. Boers // Proceedings of the 1995 PAC. – Dallas TX, 1995. – P. 2312–2313.
2. Tregubov, V.F. Program package TAU. Structure and applications for electron device simulation / V.F. Tregubov, A.V. Tregubov // Proceedings of the 7-th International conference on electron beam technologies. – Varna, Bulgaria, 2003. – P. 39–41.
3. Complete Technology for 3D EM Simulation // CST Computer Simulation Technology AG [Электронный ресурс]. – 2012. – Режим доступа: <http://www.cst.com>. – Дата доступа: 15.12.2012.
4. Журавлева, В.Д. Комплекс программ расчета трехмерных электронно-оптических систем / В.Д. Журавлева, С.О. Семенов // Прикладная физика. – 2006. – № 3. – С. 97–102.
5. Астрелин, В.Т. Особенности решения задач плазменной эмиссионной электроники в пакете прикладных программ POISSON-2 / В.Т. Астрелин // Успехи прикладной физики. – 2013. – Т. 1, № 5. – С. 574–579.
6. Петрович, О.Н. Программный комплекс ELIS для моделирования ЭОС ПИЭЛ / О.Н. Петрович, В.А. Груздев // Прикладная физика. – 2012. – № 2. – С. 79–85.
7. Груздев, В.А. Особенности расчета электронно-оптических систем плазменных источников электронов / В.А. Груздев, О.Н. Петрович // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия С. Фундаментальные науки. – 2008. – № 3. – С. 2–18.
8. Петрович, О.Н. Метод численного анализа газонаполненных ЭОС с подвижным плазменным катодом / О.Н. Петрович, В.А. Груздев // Труды Междунар. конф. по вычислительной математике, Новосибирск, 21–25 июня 2004 г.: в 2 ч. / ИВМиМГ СО РАН; редкол.: Г.А. Михайлов [и др.]. – Новосибирск, 2004. – Ч. II. – С. 590–595.
9. Плазменные процессы в технологических электронных пушках / М.А. Завьялов [и др.]. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 256 с.
10. Ремпе, Н.Г. Разработка и внедрение электронно-лучевой аппаратуры на основе источников с плазменным эмиттером: дис. ... д-ра техн. наук: 05.27.02 / Н.Г. Ремпе. – Томск, 2002. – 270 л.
11. О предельном рабочем давлении плазменного источника электронов на основе разряда с полым катодом / Ю.А. Бурачевский [и др.] // ЖТФ. – 2001. – Т. 71, № 2. – С. 48–50.
12. Петрович, О.Н. Первичное формирование электронного пучка в плазменных источниках с катодным или анодным эмиттерным электродом / О.Н. Петрович // Взаимодействие излучений с твердым телом: материалы V Междунар. конф.; под ред. В.М. Анищика [и др.]. – Минск, 2003. – С. 383–386.
13. Петрович, О.Н. К вопросу о влиянии давления на характеристики электронного пучка / О.Н. Петрович // Проблемы проектирования и производства радиоэлектронных средств: материалы II Междунар. науч.-техн. конф.: в 2 т.; под ред. А.П. Достако. – Новополюк, 2002. – Т. I. – С. 42–44.
14. Акимов, П.И. Некоторые вопросы влияния ионов в высокоперевансных электронно-оптических системах / П.И. Акимов // Проблемы теоретической и прикладной электронной и ионной оптики: тез. докл. IV Всерос. семинара. – М., 1999. – С. 73–74.

Поступила 12.03.2015

**THE SIMULATION OF FEATURES OF THE ELECTRON BEAM FORMATION
BY A FORVACUUM PLASMA SOURCE**

O. PETROVICH, I. RUSETSKII

Computer simulation of electron beam formation processes by a forvacuum plasma source with use of the ELIS program is carried out. The feedback mechanism between the plasma emitter and electron-optical system of acceleration and formation of a beam caused by evolution of secondary plasma is established.

УДК 539.21:539.12:538.958

**МОДИФИКАЦИЯ СТРУКТУРЫ В ИМПЛАНТИРОВАННЫХ ПЛЕНКАХ ПОЛИИМИДА
ЗА ОБЛАСТЬЮ ПРОБЕГА ИОНОВ**

*д-р физ.-мат. наук, доц. М.Г. ЛУКАШЕВИЧ
(Белорусский государственный университет, Минск)*

В тонких ($d = 40$ мкм) пленках полиимида, имплантированных ионами Ni^+ , Mn^+ , Fe^+ , Co^+ , Ag^+ и B^+ с энергией 30...100 кэВ в интервале доз $D = 1 \cdot 10^{15} \dots 1,5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$ при плотности ионного тока $j = 4 \dots 12 \text{ мкА/см}^2$, изучены спектральные зависимости коэффициента отражения при падении света как на имплантированную, так и на неимплантированную поверхность. Обнаружено увеличение интегрального коэффициента отражения и увеличение интенсивности отражения при $\lambda_1 = 254$ и $\lambda_2 = 311$ нм и падении света на неимплантированную сторону, то есть далеко за пределами области внедрения ионов, обусловленное перестройкой структуры в приповерхностном слое полимерной матрицы. Модификация структуры полимера за пределами пробега имплантированных ионов связана с релаксацией в процессе имплантации упругих приповерхностных напряжений, возникающих при производстве пленки.

Введение. В сравнении с другими полимерами полиимиды (ПИ) характеризуются более высокой термической, химической, механической и радиационной стойкостью. На основе ПИ разработаны высокотемпературные негативные фоторезисты [1] и рентгенорезисты, используемые в методе глубокой рентгенолитографии при формировании микроструктур с высоким аспектным отношением и заданной топологией [2]; полученные в полиимидных пленках структуры могут быть использованы как микрофильтры, изолирующие или пассивные элементы интегральных микросхем [2; 3].

В настоящее время проводятся исследования по разработке резистов для ионной литографии, которая обладает рядом преимуществ по сравнению с оптической, рентгено- или электронной литографией. Так, в этом процессе отсутствуют радиационные повреждения и обратное рассеяние электронов, которые оказывают негативное влияние на полупроводниковую подложку и резист. Ранее нами показано [4; 5], что спектральная зависимость отражения полимеров в близкой ультрафиолетовой области спектра при падении света на имплантированную и неимплантированную поверхности позволяет судить о карбонизации приповерхностного слоя при ионной имплантации (ИИ) и модификации приповерхностного слоя с неимплантированной стороны. Однако процессы модификации структуры полимерного резиста, протекающие при ионной имплантации, изучены недостаточно, что и обусловило проведение настоящего исследования.

Методика измерений. Исходные пленки полиимида ($C_{22}H_{10}O_5N_2$) толщиной 40 мкм имплантировались ионами Ni^+ , Mn^+ , Fe^+ , Co^+ , Ag^+ и B^+ с энергией в диапазоне 30...100 кэВ в интервале доз $D = 1 \cdot 10^{15} \dots 1,5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$ при плотности ионного тока $j = 4 \dots 12 \text{ мкА/см}^2$ и комнатной температуре в остаточном вакууме не хуже 10^{-5} Па на имплантаторах ИЛУ-3 и «Везувий-6». Во избежание перегрева и деформации образца в процессе имплантации использовалась кассета, обеспечивающая эффективный сток ионного заряда с поверхности полимера и плотный контакт пленок с металлическим основанием, охлаждаемым водой. При таких условиях в процессе имплантации температура образцов не превышала 350 К. Режимы имплантации и параметры (проецированный пробег R_p и ΔR_p) имплантированных образцов приведены в таблице 1. Расчет пробега ионов осуществлялся программой SRIM [6].

Спектры отражения регистрировались в области непрозрачности пленки в диапазоне $\lambda = 210 \dots 480$ нм однолучевым спектрофотометром PROSKAN MC-122 при комнатной температуре с разрешением не хуже 3,7 нм. Спектральные зависимости изучались при падении света на имплантированную и неимплантированную поверхность пленки. В диапазоне длин волн $\lambda = 210 \dots 480$ нм отражение происходит только на освещаемой границе раздела «воздух – имплантированная (неимплантированная) поверхность пленки», а противоположная граница раздела «полимер – неимплантированная (имплантированная) поверхность пленки» вклада в отражение не дает, что позволяет изменения в спектрах отражения от неимплантированной поверхности однозначно связывать с процессами, протекающими вблизи неимплантированной поверхности полиимидной пленки, то есть далеко за слоем внедрения ионов.

Экспериментальные результаты и их обсуждение. Имплантация приводит к увеличению измененного с неимплантированной стороны интегрального коэффициента отражения (площадь под спектром отражения) пленок ПИ в диапазоне длин волн $\lambda = 210 \dots 480$ нм для всех использовавшихся ионов (рис. 1 и 2). Этот коэффициент возрастает с увеличением дозы имплантации тяжелых ионов в диапазоне $D = 2,5 \cdot 10^{16} \dots 1,5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$ (табл. 2). Причем если для ионов Ag^+ наблюдается монотонный рост $R_{омн}$ (образцы 1...5 Ag в таблице 2), то для более легких ионов Ni^+ он выходит на насыщение при $D = 7,5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ ($R_{омн} \sim 2,0$) и при дальнейшем увеличении дозы практически не изменяется (образцы 1...3-Ni, табл. 2).

Аналогичное поведение $R_{отн}$ с выходом на насыщение наблюдалось и при имплантации ионов Mn^+ , Fe^+ и Co^+ с массой, близкой к массе иона никеля. Для этих ионов $R_{отн}$ выходит на насыщение при дозе $D \sim 5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ и достигает максимальных значений $R_{отн} \approx 2,0 \dots 2,5$. Можно отметить, что при имплантации Fe^+ наблюдалось даже некоторое уменьшение $R_{отн}$ при $D = 1,5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$.

Таблица 1

Режимы ионной имплантации и пробеги имплантированных ионов

№ образца	Режим имплантации			R_p , нм	ΔR_p , нм	
	имплантированный элемент	доза D , см^{-2}	j , мкА/см^2			энергия иона, кэВ
1-Ni	Ni	$2,5 \cdot 10^{16}$	4	40	49	13
2-Ni		$7,5 \cdot 10^{16}$	4	40		
3-Ni		$1,25 \cdot 10^{17}$	4	40		
4-Ni		$1,25 \cdot 10^{17}$	8	40		
5-Ni		$1,25 \cdot 10^{17}$	12	40		
1-Mn	Mn	$5 \cdot 10^{16}$	4	40	49	13
2-Mn		$1,25 \cdot 10^{17}$	4	40		
1-Fe	Fe	$5 \cdot 10^{16}$	4	40	49	13
2-Fe		$1,25 \cdot 10^{17}$	4	40		
1-Co	Co	$1,25 \cdot 10^{17}$	6	40	49	13
2-Co		$1,25 \cdot 10^{17}$	10	40		
1-Ag	Ag	$5 \cdot 10^{16}$	4	30	40	8
2-Ag		$7,5 \cdot 10^{16}$	4	30		
3-Ag		$1 \cdot 10^{17}$	4	30		
4-Ag		$1 \cdot 10^{17}$	8	30		
5-Ag		$1,5 \cdot 10^{17}$	4	30		
1-B	B	$1 \cdot 10^{15}$	4	100	400	40
2-B		$6 \cdot 10^{15}$	4	100		
3-B		$6 \cdot 10^{16}$	4	100		

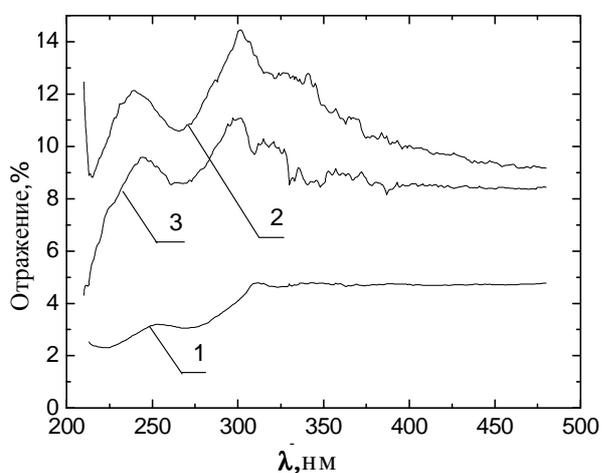


Рис. 1. Спектральная зависимость отражения исходной (1) и имплантированных ионами Mn^+ (2) и Fe^+ (3) дозой $D = 5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ при $j = 4 \text{ мкА/см}^2$ пленок полиимида и падения света на неимплантированную сторону пленки

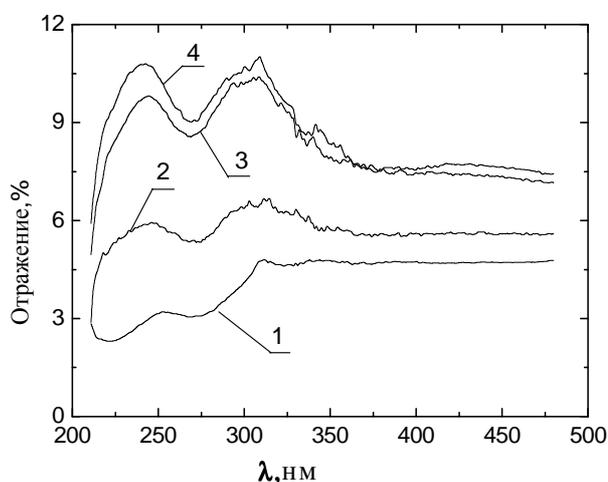


Рис. 2. Спектральная зависимость отражения исходной (1) и имплантированных ионами Ni при падении света на неимплантированную поверхность пленок полиимида. D , см^{-2} : 2 – $2,5 \cdot 10^{16}$; 3 – $7,5 \cdot 10^{16}$; 4 – $1,5 \cdot 10^{17}$ при $j = 4 \text{ мкА/см}^2$

Значения интегрального коэффициента отражения, отнесенные к его величине в исходном не имплантированном образце ($R_{отн} = R/R_{исх}$), приведены в таблице 2.

В случае ИИ легких ионов B^+ при падении света на неимплантированную сторону относительный интегральный коэффициент отражения имел максимальное значение $R_{отн} = 1,57$ при минимальной дозе $D = 1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$. При увеличении дозы он уменьшался, и при $D = 6 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ его значение практически совпадало со значением, характерным для исходного ПИ (образцы 1...3-В, табл. 2). Можно отметить, что при падении света на имплантированную сторону $R_{отн}$ с увеличением дозы увеличивается. Увеличение

плотности ионного тока при заданной дозе приводит к уменьшению $R_{отн}$ при имплантации ионов никеля (образцы 3...5-Ni, табл. 2) и кобальта. При имплантации тяжелых ионов Ag^+ увеличение плотности ионного тока не вызывает существенных изменений относительного интегрального коэффициента отражения: $R_{отн}$ увеличивалось до $\sim 10\%$ при возрастании тока с 4 до 8 мкА/см².

Таблица 2

Зависимость относительного коэффициента отражения неимплантированной стороной пленки полиимида от вида ионов и режима имплантации

Образец	Отношение интегрального коэффициента отражения имплантированной пленки к его величине в исходном образце	Энергетическое положение полос отражения	
		λ_1 , нм	λ_2 , нм
Исходный	1	252	311
1-Ni	1,38	247	311
2-Ni	2,03	244	308
3-Ni	2,09	242	309
4-Ni	1,41	247	310
5-Ni	0,90	253	309
1-Mn	2,67	240	301
2-Mn	2,67	244	301
1-Fe	2,14	244	300
2-Fe	1,97	247	301
1-Co	2,15	245	300
2-Co	1,95	245	303
1-Ag	1,17	252	308
2-Ag	1,24	254	311
3-Ag	1,30	252	310
4-Ag	1,431	251	310
5-Ag	1,89	244	308
1-B	1,57	–	–
2-B	1,49	–	–
3-B	1,02	–	–

Таким образом, чем больше масса иона при ИИ, тем большие дозы требуются для достижения максимальных значений интегрального коэффициента отражения. У легких ионов V^+ изменения $R_{отн}$ при малых дозах $D < 1 \cdot 10^{16}$ см⁻² более выраженные, чем у тяжелых ионов. Так, если при $D = 1 \cdot 10^{16}$ см⁻² для ионов Ag^+ $R_{отн} \approx 1,1$, то для ионов V^+ уже при $D = 1 \cdot 10^{15}$ см⁻² $R_{отн} > 1,5$ (см. табл. 2). Указанный эффект может быть связан как с уменьшением доли электронного торможения при увеличении массы иона, так и с разной величиной проецированного пробега. При меньших величинах R_p следует ожидать большей вероятности рекомбинации первичных радиационных дефектов в модернизированном слое.

После имплантации в спектрах отражения, измеренных с неимплантированной стороны, наблюдается увеличение интенсивности полос отражения при $\lambda_1 = 254$ и $\lambda_2 = 311$ нм, характерных для исходных образцов при падении света на обе стороны (см. рис. 1 и 2). Энергетическое положение указанных полос зависит от режима ИИ (см. табл. 2). С ростом дозы имплантации полоса λ_1 и в меньшей степени λ_2 смещаются в высокоэнергетическую область. Особенно отчетливо это смещение наблюдается при имплантации Ni^+ , а при имплантации Ag^+ существенное изменение энергетического положения λ_1 наблюдалось только при $D = 1,5 \cdot 10^{17}$ см⁻². Увеличение плотности ионного тока с $j = 4$ до 12 мкА/см² приводит к подавлению указанного эффекта (образцы 3-Ni, 4-Ni и 5-Ni, табл. 2).

Приведенные экспериментальные данные указывают на то, что радиационно-стимулированные процессы модификации пленок ПИ при ИИ протекают далеко за областью проецированного пробега имплантируемых ионов, как минимум на расстоянии, сравнимом с толщиной исследованных пленок ПИ $d = 40$ мкм. Надо отметить, что эффект «дальнего действия» наблюдался ранее при облучении металлических фольг и пластин кремния заряженными частицами и фотонами светового диапазона [4; 5] и обусловлен, по мнению авторов [4–6], перестройкой протяженных дефектов возбуждаемыми при имплантации упругими колебаниями кристаллической решетки.

Изменение свойств полимера на глубинах, значительно превышающих проецируемый пробег ионов, невозможно объяснить эмиссией вторичных электронов, образующихся при электронном торможении имплантируемых ионов, так как в полимерах эмиссия вторичных электронов ограничена областью около 10 нм [3], а с увеличением массы имплантируемых ионов доля электронного торможения снижает-

ся, и для тяжелых ионов (в частности Ag) не превышает 10 % [7]. При ИИ также маловероятно ожидать реализации свободнорадикальных процессов на глубинах, значительно превышающих проецируемый пробег ионов и расстояние распространения выбиваемых ими электронов, поскольку миграция радикалов в матрице полимеров затруднена [8; 9].

При объяснении увеличения интегрального коэффициента отражения далеко за пределами пробега имплантированных ионов в полимерную пленку необходимо принимать во внимание особенности молекулярной структуры и специфику радиационного воздействия на полимеры. Прямое воздействие ионов на полимер, а также нейтрализация разноименно заряженных ионов и рекомбинация свободных радикалов в треке иона приводит к переводу молекул в возбужденное состояние. При этом в полимерах возможны два механизма передачи энергии: во-первых, упругие волны (колебания атомов); во-вторых, посредством передачи энергии возбуждения молекул по электронной подсистеме, а наличие длинных цепей и периодичность структуры полимеров способствует передаче энергии из области проецированного пробега ионов на сравнительно большие расстояния.

Первичные физические процессы (возбуждение или ионизация) и следующие за ними химические изменения (разрыв связи, образование сшивок и т.д.) могут быть разделены существенным расстоянием вследствие переноса возбуждения [8]. Теоретические оценки [9] показывают, что средний «пробег» электронного возбуждения по алифатической цепочке составляет более 100 связей C–C. С другой стороны, по данным [10], энергия возбуждения может передаваться в полимере на расстояние около 1000 мономерных звеньев. Однако эти расстояния существенно меньше, чем толщина исследовавшихся пленок полиимида ($d = 40$ мкм). Это позволяет исключить механизм радиационно-стимулированных процессов модификации полимера на неимплантированной стороне пленки толщиной $d = 40$ мкм посредством передачи энергии возбуждения по электронной подсистеме молекул. Вероятнее всего, выделившаяся в приповерхностном слое энергия из области пробега ионов на обратную сторону пленки передается с помощью упругих волн, которые могут распространяться по цепочке молекулы либо по границам раздела фаз. На расстояниях свыше 10 мкм от области имплантации вероятность разрыва (или образования) химической связи также мала. Однако переданной энергии может быть достаточно для конформационной перестройки, которая может приводить к релаксации напряжений, сформировавшихся в приповерхностных областях при ее изготовлении.

Оптические характеристики органических соединений определяются переходом π -, σ - и n -электронов молекулы в возбужденное состояние, которое зависит от симметрии молекулы и ее окружения. Так, изменение последних параметров при структурной перестройке, обусловленной релаксацией упругих напряжений в приповерхностной области, может приводить к разрешению ранее запрещенных электронных переходов и увеличению коэффициента отражения. Следует также заметить, что «дальнодействующий» эффект может быть связан и с чувствительностью радиационных эффектов к наличию дефектов и концов молекулярных цепей, а также микропримесей [8]. Концентрация таких дефектов особенно велика у поверхности полимера.

В заключение отметим, что спектральная зависимость коэффициента отражения не позволяет определить, где происходит модификация структуры полиимида: только вблизи поверхности или во всем объеме полимерной пленки. Анализ спектров поглощения показал, что ИИ не вызывает существенного изменения структуры спектров поглощения. Так, не выявлена полоса 38000 см^{-1} , ответственная за продукты деструкции полиимида, а изменение коэффициента поглощения в максимумах полос 1780 , 1730 и 1175 см^{-1} , обусловленных имидной структурой [11], не превышало погрешности измерений. Это косвенно свидетельствует о том, что модификация структуры полиимида при ионной имплантации происходит только в тонком приповерхностном слое.

Выводы. Имплантация пленок полиимида толщиной 40 мкм ионами с энергией в диапазоне $30\text{--}100$ кэВ в интервале доз $D = 1 \cdot 10^{16}\text{--}1,5 \cdot 10^{17}\text{ см}^{-2}$ при плотности ионного тока $j = 4\text{--}12\text{ мкА/см}^2$ приводит к модификации приповерхностного слоя не только с имплантированной, но и с противоположной неимплантированной стороны, которая выражается в увеличении интегрального коэффициента отражения и интенсивности полос отражения при $\lambda_1 = 254$ и $\lambda_2 = 311$ нм и их смещении в коротковолновую область спектра.

Отмеченные изменения спектральной зависимости отражения неимплантированной стороной вызываются структурной перестройкой полимера в процессе имплантации за пределами внедрения ионов из-за релаксации в приповерхностной области упругих напряжений, возникших при получении пленки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моро, У. Микролитография. Принципы, методы, материалы: в 2-х ч. / У. Моро. Ч. 2. – М.: Мир, 1990. – 632 с.

2. Радиационная модификация полиимида в процессе субмикронной рентгенолитографии / В.П. Назьмов [и др.] // Поверхность. – 2002. – № 12. – С. 16–26.
3. Попок, В.Н. Влияние высоких доз имплантации и плотности ионного тока на свойства пленок полиимида / В.Н. Попок, И.И. Азарко, Р.И. Хабибуллин // Журнал технической физики. – 2002. – Т. 72, № 4. – С. 88–93.
4. Оптические свойства пленок полиимида, имплантированных ионами серебра / Ю.А. Бумай и [др.] // Материалы, технологии, инструменты. – 2010. – Т. 15, № 4. – С. 54–58.
5. Оптические характеристики композита, полученного имплантацией ионов серебра в полиэтилен-терефталат/ Ю.А. Бумай [и др.] // Журнал прикладной спектроскопии. – 2012. – Т. 79, № 5. – С. 781–787.
6. Particle interactions with matter [Electronic resource] / ed. James F. Ziegler. – U.S.N.A. Annapolis, MD, USA. – Mode of access: <http://www.srim.org/>. – Date of access: 30.10.2013.
7. Тетельбаум, Д.И. Эффект дальнего действия при малоинтенсивном облучении твердых тел / Д.И. Тетельбаум, Е.В. Курильчик, Ю.А. Менделеева // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2009. – № 3. – С. 94–103.
8. О едином подходе к интерпретации эффекта дальнего действия при облучении твердых тел заряженными частицами и фотонами светового диапазона / Д.И. Тетельбаум [и др.] // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2000. – № 5. – С. 87–89.
9. Левшунова, В.Л. Автоколебания распределенных зарядов в естественном оксиде на поверхности кремния как источник возбуждения процессов, ответственных за эффект дальнего действия / В.Л. Левшунова, Г.П. Похил, Д.И. Тетельбаум // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2011. – № 3. – С. 76–79.
10. Ионная имплантация полимеров / В.Б. Оджаев [и др.]. – Минск: БГУ, 1998. – 197 с.
11. Экспериментальные методы химии высоких энергий / под общ. ред. М.Я. Мельникова. – М.: МГУ, 2009. – С. 169–178.
12. Пикаев, А.К. Современная радиационная химия. Твердое тело и полимеры. Прикладные аспекты / А.К. Пикаев. – М.: Наука, 1987. – 448 с.
13. Светочувствительные полимерные материалы / под ред. А.В. Ельцова. – Л.: Химия, 1985. – 296 с.
14. Структура поверхностных слоев полипирометиллитимида, модифицированных щелочами / М.М. Котон [и др.] // Доклады АН СССР. – 1982. – Т. 26, № 3. – С. 660–664.

Поступила 11.03.2015

MODIFICATION OF POLYIMIDE FILMS STRUCTURE BEYOND THE PROJECTED RANGE AT ION IMPLANTATION

M. LUKASHEVICH

Thin (40 μm) films of polyimide have been implanted by Ni^+ , Mn^+ , Fe^+ , Co^+ , Ag^+ и B^+ ions with energy 30...100 keV in a dose range $D = 1 \cdot 10^{15} \dots 1,5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-2}$ at ions current density $j = 4 \dots 12 \text{ } \mu\text{A/cm}^2$. Reflectivity of non-implanted surface have been investigated in the wave length range 210...480 nm. Increasing of integral reflectivity coefficient and reflection intensity at $\lambda_1 = 254$ and $\lambda_2 = 311$ nm were observed because of elastic exertion relaxation of polyimide structure in near-surface region during implantation beyond ions projected range.

УДК 621.315.592:546.28

МОДИФИКАЦИЯ ПРИПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ МОНОКРИСТАЛЛОВ КРЕМНИЯ, ИМПЛАНТИРОВАННЫХ ИОНАМИ В⁺ И Р⁺ В ПРОЦЕССЕ СОЗДАНИЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРИБОРОВ ПО КМОП ТЕХНОЛОГИИ*канд. физ.-мат. наук Д.И. БРИНКЕВИЧ**(Белорусский государственный университет, Минск);**канд. физ.-мат. наук, доц. С.А. ВАБИЩЕВИЧ**(Полоцкий государственный университет);**канд. физ.-мат. наук, доц. В.С. ПРОСОЛОВИЧ; канд. физ.-мат. наук Ю.Н. ЯНКОВСКИЙ**(Белорусский государственный университет, Минск)*

Методами масс-спектрометрии вторичных ионов, измерений поверхностного сопротивления и микротвердости проведены исследования свойств приповерхностной (рабочей) области пластин монокристаллического кремния, имплантированных ионами бора и фосфора с целью формирования сильнолегированных «карманов» КМОП-структур. Обнаружено приповерхностное упрочнение монокристаллов при имплантации. Аморфизация имплантированной области кремния снижает микротвердость приповерхностного слоя. Быстрый термический отжиг приводит к разупрочнению приповерхностной области монокристалла кремния на глубине до 1 мкм и увеличению трещиностойкости (росту K_{IC} и γ) при малых нагрузках. Полученные экспериментальные результаты объяснены с учетом генерации вакансий в процессе быстрого термического отжига.

Введение. Использование высокоэнергетичной ($E \sim 1$ МэВ) ионной имплантации донорных и акцепторных примесей в кремнии при изготовлении КМОП-структур позволяет создавать ретроградный профиль распределения примесей в «карманах» транзисторов с максимумом концентрации примеси, расположенным в глубине подложки, где поверхностный канал МОП-транзистора не формируется. В этом случае на поверхности возможно сформировать низкую концентрацию носителей заряда, необходимую для невысоких значений порогового напряжения транзистора, а в глубине – высокую, что уменьшит сопротивление самого «кармана» и снизит коэффициент усиления паразитного биполярного транзистора. В конечном итоге создание «карманов» с подобным распределением примесей позволит создавать КМОП-структуры, в которых ослаблен или подавлен эффект «защёлки» [1].

Поскольку канал транзистора расположен в приповерхностной области, то целью настоящей работы являлось исследование влияния радиационных дефектов, созданных имплантацией, на свойства рабочей области пластин монокристаллического кремния.

Методика эксперимента

Пластины кремния КЭФ 4,5(100), КДБ 12(100) и КДБ 10(111) имплантировались ионами В⁺ ($E = 500$ кэВ) и Р⁺ ($E = 1000$ кэВ) дозами (Φ) от $5 \cdot 10^{12}$ до $5 \cdot 10^{14}$ см⁻² при комнатной температуре на ускорителе ионов ДТЛ. Плотность ионного тока варьировалась в интервале от 0,3 до 2,5 мкА/см². Быстрый термический отжиг (БТО) осуществлялся галогеновыми лампами накаливания при температуре 1000 °С длительностью до 60 с на установке АСТ-500.

Методом масс-спектрометрии вторичных ионов (ВИМС) на установке IMS-4f «Самеса» определяли профили распределения примесей в имплантированных слоях. Измерение поверхностного сопротивления производилось четырехзондовым методом прибором ИУС-3. Для изучения распределения электрофизических параметров по глубине кристалла применялась методика последовательного стравливания тонких слоев. Измерения микротвердости (H) проводились на приборе ПМТ-3. Нагрузка (P) на индентор варьировалась в пределах от 20 до 200 г. При каждом измерении на поверхность образца наносилось не менее 50 отпечатков и проводилась обработка результатов измерений с использованием методов математической статистики. Это обеспечивало погрешность измерений микротвердости менее 2,5 % (с доверительной вероятностью 0,95). Значения коэффициента вязкости разрушения K_{IC} и эффективной энергии разрушения γ рассчитывались по средней длине радиальных трещин в углах отпечатков согласно [2]. Погрешность измерений не превышала 8 %.

Экспериментальные результаты и их обсуждение

Исследованием ВИМС было установлено, что профили распределения имплантированных примесей бора и фосфора имеют максимум на глубинах ~ 1 мкм. Концентрация примеси у поверхности пластины в зависимости от дозы находится в пределах $1,0 \cdot 10^{16}$ см⁻³ ... $1,0 \cdot 10^{17}$ см⁻³, что необходимо для субмикронных МОП-транзисторов.

При увеличении дозы имплантации в пределах до $5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$ наблюдался рост микротвердости приповерхностного слоя, то есть имел место эффект приповерхностного упрочнения. Однако при нагрузке 200 г, что соответствует глубине проникновения индентора $\sim 3 \text{ мкм}$, существенных изменений величины H , обусловленных радиационными дефектами, после имплантации не происходило. Такое поведение характерно как для имплантации бора, так и для фосфора.

При дозах имплантации свыше $5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$ поведение образцов, имплантированных ионами P^+ и B^+ , существенно различается. В образцах, имплантированных бором, эффект приповерхностного упрочнения продолжает возрастать, а при имплантации фосфора дозой $1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$ он резко снижается и при $\Phi_p = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$ практически исчезает (рис. 1).

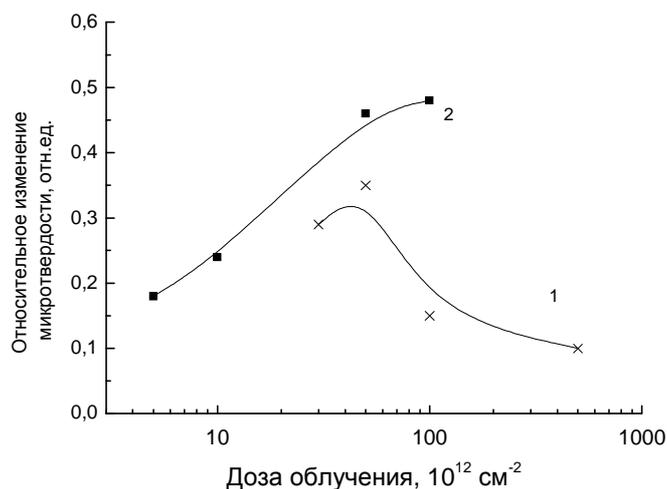


Рис. 1. Дозовая зависимость эффекта приповерхностного упрочнения (разница между значениями микротвердости при нагрузках 200 и 50 г) пластин КДБ 12, имплантированных ионами фосфора (1) и пластин КЭФ 4,5, имплантированных ионами бора (2)

Принимая во внимание, что глубина проникновения индентора при минимальной нагрузке 20 г составляла 0,8...0,9 мкм и практически совпадала с проецированным пробегом R_p ионов фосфора в исследовавшихся образцах, можно предположить, что наблюдавшееся экспериментально снижение величины микротвердости H при нагрузке 20 г в образцах, имплантированных дозами Φ_p свыше $1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$, обусловлено, вероятнее всего, аморфизацией приповерхностной области монокристалла [1]. Следует отметить, что микротвердость аморфных образцов всегда ниже микротвердости монокристалла. Так, микротвердость пористого кремния почти на порядок ниже по сравнению с монокристаллом Si [3]. При имплантации бора аморфизация, вероятно [1], не имела места, поэтому при увеличении дозы ионов B^+ эффект упрочнения приповерхностного слоя монокристалла не исчезал.

После проведения постимплантационного БТО методом ВИМС (рис. 2) установлено, что профили распределения имплантированных примесей бора и фосфора не претерпевают существенных изменений, то есть положение максимума распределения примесей в районе 1 мкм и ретроградный характер профиля распределения сохраняются. Данное обстоятельство является весьма существенным, поскольку если бы термообработка после ионного внедрения изменяла профиль распределения примесей, то это привело бы к невозможности подавления эффекта «защелки».

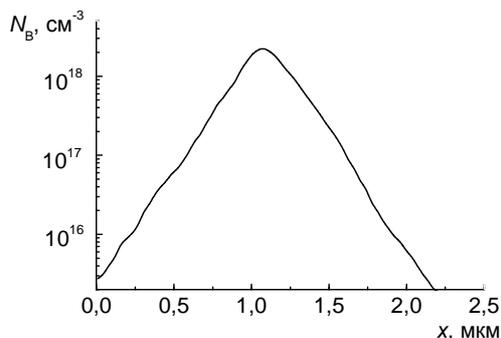


Рис. 2. Профиль распределения примеси бора, внедренной с энергией 500 кэВ дозой $1,0 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, после быстрого (60 с) термического отжига при $1000 \text{ }^\circ\text{C}$

После БТО длительностью 60 секунд устанавливаются значения слоевого сопротивления, коррелирующие с величиной дозы внедрения. Исследованиями значений поверхностного сопротивления в процессе последовательного удаления слоев кремния (рис. 3) установлено, что его максимальное изменение соответствует максимуму профиля распределения примеси в кармане; 60-ти секунднй отжиг является вполне достаточным для полной активации примеси и отжига радиационных дефектов. Следует отметить, что повышение температуры быстрого термического отжига свыше 1000 °С приводит к увеличению количества структурных дефектов, обусловленных эффектом закалки кремния при остывании образцов после высокотемпературного нагрева.

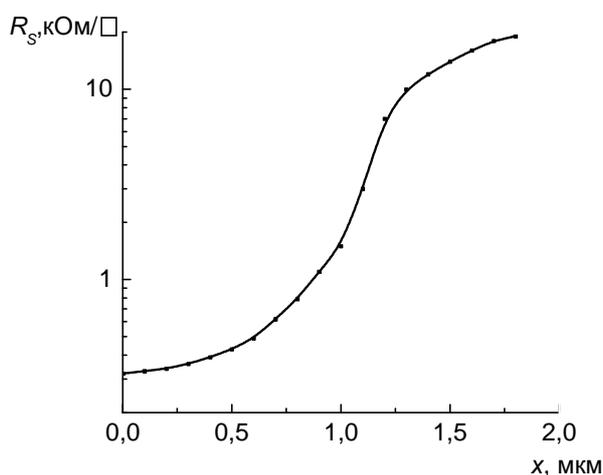


Рис. 3. Изменение слоевого сопротивления в процессе последовательного удаления слоев образцов кремния, имплантированных ионами бора с энергией 500 кэВ, дозой $5,0 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$, и последующего быстрого термического отжига при 1000 °С в течение 60 с

Быстрый термический отжиг исследовавшихся образцов, имплантированных ионами бора B^+ , приводил к резкому снижению микротвердости в приповерхностной области монокристалла на глубинах до 1 мкм, что соответствовало нагрузкам 20...40 г. При увеличении нагрузки микротвердость резко возрастает и при $P = 100$ г и выше достигает значений, характерных для исходного необлученного кремния. Какой-либо зависимости от дозы имплантации для подвергавшихся БТО образцов не наблюдалось. При БТО имплантированных ионами P^+ образцов наблюдалась несколько иная картина. При увеличении дозы имплантации отжиг протекает менее интенсивно. В аморфизированных имплантацией образцах (дозы $\Phi_p > 1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$) микротвердость после БТО не снижается ниже $H = 9$ ГПа даже после отжига длительностью 60 с.

Микрохрупкость имплантированных и подвергнутых БТО образцов была несколько ниже, чем исходных пластин кремния. Так, даже при максимальной нагрузке 200 г разрушения отпечатков не наблюдалось, в то время как в исходном неимплантированном кремнии при этой же нагрузке разрушалось около 10 % отпечатков.

Имплантация ионов бора приводила также к снижению трещиностойкости кремния. Трещины в углах отпечатков появлялись только при нагрузке 50 г и выше. Значения коэффициента вязкости разрушения K_{1C} и эффективной энергии разрушения γ при увеличении нагрузки снижаются, то есть трещиностойкость материала падает (табл. 1, 2). С увеличением дозы ионов бора Φ_B прослеживалось монотонное снижение значений данных параметров. Быстрый термический отжиг длительностью 60 с приводил к увеличению трещиностойкости при малых нагрузках. Значения K_{1C} и γ во всех исследовавшихся образцах независимо от дозы имплантации восстанавливались до величин, характерных для пластин исходного (неимплантированного) кремния (табл. 1).

При имплантации ионов P^+ дозой Φ_p до $5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$ также наблюдалось снижение трещиностойкости при малых нагрузках, а БТО приводил к восстановлению величин K_{1C} и γ до их значений в исходных (неимплантированных) монокристаллах. При увеличении дозы имплантации Φ_p свыше порога аморфизации кремния ($1 \dots 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$) значения коэффициента вязкости разрушения K_{1C} при нагрузке 50 г в имплантированных образцах возрастают до $\sim 2,0 \dots 2,2 \text{ Па} \cdot \text{м}^{1/2}$, причем последующий БТО существенного влияния на значения K_{1C} не оказывает. Их изменения в процессе БТО составляют 10...15 % и близки к погрешности измерений (табл. 2). Аналогично ведет себя и эффективная энергия разрушения γ .

Таблица 1

Параметры трещиностойкости кремния марки КЭФ4,5 ориентацией (100), имплантированного ионами бора ($E_B = 500$ кэВ) и подвергнутого быстрому термическому отжигу

$\Phi_B, \text{см}^{-2}$	Длительность БТО, с	$K_{Ic}, 10^6 \text{Па} \cdot \text{м}^{1/2}$, при нагрузке, г				$\gamma, \text{Па} \cdot \text{м}$, при нагрузке, г			
		50	100	150	200	50	100	150	200
$5 \cdot 10^{13}$	–	1,65	1,36	1,31	1,29	9,1	6,1	5,7	5,5
	60	2,66	1,68	1,35	1,31	23,6	9,35	6,0	5,7
$5 \cdot 10^{12}$	–	2,24	1,61	1,34	1,28	16,7	8,6	5,9	5,4
	60	2,74	1,64	1,34	1,29	25,0	9,1	5,9	5,5

Таблица 2

Параметры трещиностойкости кремния марки КДБ12 ориентацией (100), имплантированного ионами фосфора ($E_P = 1000$ кэВ) и подвергнутого быстрому термическому отжигу

$\Phi_P, \text{см}^{-2}$	Длительность БТО, с	$K_{Ic}, 10^6 \text{Па} \cdot \text{м}^{1/2}$, при нагрузке, г				$\gamma, \text{Па} \cdot \text{м}$, при нагрузке, г			
		50	100	150	200	50	100	150	200
$5 \cdot 10^{13}$	–	1,47	1,40	1,40	1,38	7,2	6,7	6,5	6,3
	15	1,83	1,54	1,35	1,30	11,1	7,12	6,05	5,7
	60	3,00	1,52	1,40	1,38	29,9	7,7	6,5	6,34
$1 \cdot 10^{14}$	–	2,05	1,50	1,50	1,50	14,0	7,5	7,5	7,5
	15	1,90	1,54	1,40	1,33	11,9	7,9	6,6	5,9
	60	1,91	1,64	1,53	1,51	12,1	9,0	7,7	7,6
$5 \cdot 10^{14}$	–	2,00	1,41	1,40	1,40	12,6	6,6	6,5	6,5
	15	1,92	1,66	1,51	1,48	12,4	9,2	7,6	7,0
	60	2,22	1,47	1,47	1,43	16,4	7,2	7,1	6,8

Поскольку проецируемый пробег ионов R_p составлял ~ 1 мкм, что сопоставимо с глубиной внедрения индентора при минимальной нагрузке 20 г, то в процессе индентирования тестируется нарушенный ионной имплантацией слой. Следовательно, упрочнение приповерхностного слоя монокристалла обусловлено радиационными дефектами, созданными при имплантации. Наличие полей упругих напряжений на границе раздела «нарушенный имплантацией слой – бездефектная подложка» обуславливает снижение трещиностойкости при малых нагрузках в имплантированных образцах. Эту границу индентор достигает при нагрузке 50...70 г. Аморфизация нарушенного ионной имплантацией слоя приводит к снижению напряжений на этой границе раздела, что проявляется как увеличение трещиностойкости при нагрузке 50 г в образцах, имплантированных ионами P^+ дозой свыше $1 \cdot 10^{14} \text{см}^{-2}$ (см. табл. 2). Увеличение трещиностойкости кремния после быстрого термического отжига обусловлено увеличением пластичности материала и хорошо коррелирует с поведением микротвердости.

При БТО происходит отжиг радиационных дефектов, что приводит к подавлению эффекта радиационного упрочнения и снижению микротвердости приповерхностного слоя. Кроме того, свой вклад дает и другой механизм снижения H . Так, известно [4; 5], что в процессе БТО по всему объему монокристалла кремния имеет место генерация вакансий, которые могут приводить к разупрочнению кремния [6]. Это легко объяснимо, если учесть, что сжатие (индентирование) бездислокационных полупроводников сопровождается генерацией избыточных собственных междоузельных атомов [7]. Резкое снижение (ниже значений, характерных для необлученного кремния) микротвердости в приповерхностной области после проведения БТО имплантированных образцов обусловлено, вероятнее всего, указанным разупрочняющим воздействием вакансионных дефектов, формирующихся в результате ионной имплантации и последующего быстрого термического отжига.

В заключение проведенного исследования, исходя из полученных экспериментальных результатов, можно сделать следующие **выводы**:

- обнаружено приповерхностное упрочнение монокристаллов при имплантации ионами бора и фосфора с проецированным пробегом в кремнии ~ 1 мкм;
- аморфизация нарушенной ионной имплантацией слоя приводит к разупрочнению материала в области пробега ионов и к росту концентрации вакансионных дефектов за слоем внедрения ионов. Действие этих двух механизмов способствует существенному снижению значений H при малых нагрузках;
- быстрый термический отжиг приводит к разупрочнению приповерхностной области монокристалла кремния на глубине до 1 мкм и увеличению трещиностойкости (росту K_{1C} и γ) при малых нагрузках вследствие генерации вакансий в процессе БТО.

ЛИТЕРАТУРА

1. Технология СБИС: в 2-х кн. Кн. 1 / под ред. С. Зи. – М.: Мир, 1986. – С. 235–353.
2. Колесников, Ю.В. Механика контактного разрушения / Ю.В. Колесников, Е.М. Морозов. – М.: Наука, 1989. – 220 с.
3. Соколов, В.И. Некоторые характеристики пористого кремния (отражение, рассеяние, показатель преломления, микротвердость) / В.И. Соколов, А.И. Шелых // Письма в ЖТФ. – 2008. – Т. 34, № 5. – С. 34–39.
4. Patent 6686620 US, primary class 438/473 / R.J. Falster, M.J. Binns, H.W. Korb; publication 03.02.2004.
5. Voronkov, V.V. Effect of vacancies on nucleation of oxide precipitates in silicon / V.V. Voronkov, R. Falster // Materials science in semiconductor processing. – 2003. – V. 5 – P. 387–390.
6. Головин, Ю.И. Недислокационная пластичность и ее роль в массопереносе и формировании отпечатка при динамическом индентировании / Ю.И. Головин, А.А. Дмитриевский, Н.Ю. Сучкова // Физика твердого тела. – 2006. – Т. 48, № 2. – С. 262–265.
7. Головин, Ю.И. Структура комплексов, ответственных за радиационно-стимулированное разупрочнение монокристаллов кремния / Ю.И. Головин, А.И. Тюрин // Физика твердого тела. – 2000. – Т. 42, № 10. – С. 1818–1820.

Поступила 05.03.2015

MODIFICATION OF THE SURFACE LAYERS OF SILICON SINGLE CRYSTALS IMPLANTED WITH B⁺ AND P⁺ IONS AT THE CREATION OF SEMICONDUCTOR DEVICES BY CMOS TECHNOLOGY

D. BRINKEVICH, S. VABISHCHEVICH, V. PROSOLOVICH, Y. YANKOVSKI

Properties of the surface layers of monocrystalline silicon wafers implanted with boron and phosphorus to form a heavily doped “pockets” of CMOS structures was investigated by mass spectrometry of secondary ions, measuring the surface resistivity and microhardness. Near-surface hardening of single crystals during implantation was founded. Amorphization of the implanted region of silicon reduces the microhardness of the surface layer. Rapid thermal annealing leads to a softening of the surface layer of the of the silicon single crystal to a depth of 1 μm and an increase in fracture toughness (K_{1C} and γ) at low loads. The experimental results are discussed in terms of the generation of vacancies in the process of rapid thermal annealing.

УДК 621.371: 550.837.6

ПРИМЕНЕНИЕ МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ ДЛЯ ПОИСКА АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД ПЛАЗМОПОДОБНОГО ТИПА

канд. техн. наук, доц. **В.Ф. ЯНУШКЕВИЧ**; **С.В. КАЛИНЦЕВ**; **К.И. КРЕМЕНЯ**
(Полоцкий государственный университет);

Е.Ю. ЗАЯЦ

(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск)

Рассматриваются вопросы применения модулированных сигналов для поиска анизотропных сред плазмopodobного типа. Приведены характеристики сред над углеводородными залежами. Особое внимание уделено анализу поправки Дебая в выражении для диэлектрической проницаемости среды. Проведен анализ взаимодействия электромагнитных волн с углеводородами в режимах амплитудно-, частотно- и амплитудно-частотно-модулированных сигналов. Для этих режимов исследованы компоненты тензора диэлектрической проницаемости среды. Используется вертикальная поляризация электромагнитных волн. Рассмотрен широкий диапазон используемых частот. Вариация характеристик зондирующих сигналов позволяет повысить информативность поиска.

Вопросы поиска анизотропных сред плазмopodobного типа (АСПТ) представляют интерес во многих областях науки и техники. Одним из таких направлений является поиск, выделение и идентификация углеводородных залежей (УВЗ). Сходство многих процессов, происходящих над месторождениями нефти и газа, со свойствами анизотропных сред (АС) позволяет унифицировать теоретические и практические наработки в области исследования плазмы и плазмopodobных сред с разработкой современных электромагнитных методов (ЭММ) георазведки углеводородов [1].

Характеристики сред над углеводородными залежами. Методы электроразведки нефти и газа основаны на дифференциации земной поверхности по электромагнитным свойствам. Характеристики электромагнитных волн (ЭМВ) определяют геологическим строением изучаемого профиля местности. Задачи электроразведки могут решаться как с помощью искусственных, так и естественных источников излучения ЭМВ. Выделение искомого объекта осуществляется по выявленным электромагнитным аномалиям (ЭМА) на данной территории. Рассмотрим характеристики сред над залежами УВЗ.

Относительная диэлектрическая проницаемость ϵ показывает, во сколько раз увеличивается сила взаимодействия зарядов в данной среде по сравнению с вакуумом, диэлектрическая проницаемость которого $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$. Абсолютная диэлектрическая проницаемость определяется следующим образом:

$$\epsilon_a = \epsilon \cdot \epsilon_0. \quad (1)$$

Практически все вещества, кроме чистых металлов, могут быть отнесены к классу диэлектриков с конечной проводимостью. В связи с этим применяют понятие комплексной диэлектрической проницаемости

$$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'', \quad (2)$$

где ϵ' – действительная часть, связанная с поляризацией диэлектрика под действием приложенного поля; ϵ'' – мнимая часть, связанная с конечной проводимостью диэлектрика, $\text{См} \cdot \text{м}^{-1}$.

Существует связь ϵ'' с удельной проводимостью среды

$$\sigma = \omega \cdot \epsilon'' \cdot \epsilon_0, \quad (3)$$

где $\omega = 2\pi f$ – частота приложенного электромагнитного поля (ЭМП).

Комплексная диэлектрическая проницаемость может быть представлена векторной диаграммой, изображенной на рисунке 1 [1].

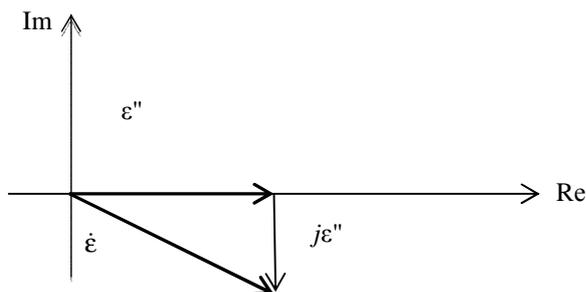


Рис. 1. Векторная диаграмма комплексной диэлектрической проницаемости

Выражение (2) можно представить следующим образом:

$$\dot{\epsilon} = \epsilon' \cdot (1 - j \cdot tg \delta) = \frac{\epsilon'}{\cos \delta} \cdot e^{-j\delta}, \quad (4)$$

где
$$tg \delta = \frac{\delta}{\omega \epsilon'}, \quad (5)$$

В формуле (5) $tg \delta$ показывает потери в данной среде, которые имеют частотную зависимость.

Величина ϵ меняется от нескольких единиц (у сухих осадочных пород) до 81 (у воды) и зависит от процентного содержания воды и минерального состава породы. Большое значение для ЭММ гео-разведки имеет дисперсия диэлектрической проницаемости, то есть зависимость от частоты зондирующего сигнала.

Обобщающая дисперсионная зависимость для диэлектриков представлена П. Дебаем в [3]:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\infty} + \frac{\epsilon_{0\omega} - \epsilon_{\infty}}{1 + j\omega\tau}, \quad (6)$$

где $\epsilon_{0\omega}$ – значение диэлектрической проницаемости на частоте $\omega \ll \omega_{кр}$; ϵ_{∞} – значение диэлектрической проницаемости на частоте $\omega \gg \omega_{кр}$. Здесь $\omega_{кр} = 2\pi f_{кр} = 1/\tau$ – критическая частота, то есть значение частоты, на которой поведение кривой $\epsilon(\omega)$ существенно меняется.

Выражение (6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \epsilon'(\omega) &= \epsilon_{\infty} + (\epsilon_{0\omega} - \epsilon_{\infty}) / (1 + \omega^2 \tau^2), \\ \epsilon''(\omega) &= \omega \tau \cdot (\epsilon_{0\omega} - \epsilon_{\infty}) / (1 + \omega^2 \tau^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда прослеживается характер частотных зависимостей составляющих диэлектрической проницаемости: $\epsilon'(\omega)$ монотонно уменьшается с ростом частоты, а $\epsilon''(\omega)$ имеет максимум на $\omega_{кр}$.

Многочисленные экспериментальные исследования указывают на сильное влияние влажности грунтов W на диэлектрическую проницаемость [3].

Для песков и суглинков:

$$\epsilon' = 3,2 + 1,1 \cdot W. \quad (8)$$

Для осадочных пород:

$$\epsilon' = 3,03 + 9,3W_{OB} + 146W_{OB}^2 - 76,7W_{OB}^3, \quad (9)$$

где W_{OB} – объемная влажность; $W_{OB} = \gamma/100$ (γ – плотность сухой породы в г/см³).

Для сред с большой влажностью:

$$\epsilon' = 720 / (180 - W). \quad (10)$$

В зависимости от свойств среды классифицируются по нескольким признакам [4].

Линейной называют среду, которая не меняет свои характеристики в зависимости от величины напряженности электрического поля \vec{E} . Для линейной среды справедливы выражения:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}, \quad (11)$$

$$\vec{P} = k_s \cdot \vec{E}, \quad (12)$$

где \vec{D} – вектор электрического смещения; \vec{P} – вектор поляризованности; k_s – диэлектрическая восприимчивость среды.

Свойства нелинейных сред зависят от величины приложенного поля. Для таких сред зависимость $\vec{P} = f(\vec{E})$ имеет нелинейный гистерезисный характер, что характерно для сегнетоэлектриков и ряда других веществ.

Однородными считаются среды, параметры которых имеют одно и то же значение во всех точках, то есть не являются функциями координат. Применительно к диэлектрической проницаемости $\epsilon_a(x, y, z) = const$. У неоднородных сред параметры меняются от точки к точке (дискретно или непрерывно) и представляют собой некоторые функции пространственных координат.

Изотропными называют среды, физические свойства которых одинаковы по всем направлениям. Анизотропными считают среды, свойства которых различны по разным направлениям, следовательно, диэлектрическая проницаемость таких сред носит сложный характер.

Выражение (11) в данном случае будет представлено следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{D}_x &= \epsilon_0(\epsilon_{11}\bar{E}_x + \epsilon_{12}\bar{E}_y + \epsilon_{13}\bar{E}_z), \\ \bar{D}_y &= \epsilon_0(\epsilon_{21}\bar{E}_x + \epsilon_{22}\bar{E}_y + \epsilon_{23}\bar{E}_z), \\ \bar{D}_z &= \epsilon_0(\epsilon_{31}\bar{E}_x + \epsilon_{32}\bar{E}_y + \epsilon_{33}\bar{E}_z).\end{aligned}\quad (13)$$

Удобнее диэлектрическую проницаемость интерпретировать как матрицу, получившую название тензора:

$$\tilde{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{vmatrix}.\quad (14)$$

Установлено, что среды над залежами УВЗ имеют анизотропный характер [5; 6], что свидетельствует о сложной картине взаимодействия ЭМВ с данным классом сред.

Магнитные свойства сред характеризуются относительной магнитной проницаемостью μ , которая показывает во сколько раз магнитная индукция \bar{B} в данной среде больше, чем в вакууме, магнитная проницаемость которого $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Г} \cdot \text{м}^{-1}$. Иногда вводят абсолютную магнитную проницаемость:

$$\mu_a = \mu_0 \cdot \mu.\quad (15)$$

Линейные магнитные среды не меняют свои свойства в зависимости от напряженности магнитного поля \bar{H} . Для таких сред справедливы выражения:

$$\bar{B} = \mu_a \cdot \bar{H},\quad (16)$$

$$\bar{M} = k_M \cdot \bar{H}.\quad (17)$$

Здесь \bar{M} – намагниченность; k_M – магнитная восприимчивость среды.

Для нелинейных магнитных сред зависимости $\bar{M} = \psi(\bar{H})$ и $\bar{B} = \psi(\bar{H})$ имеют нелинейный гистерезисный характер. Изотропные магнитные среды характеризуются одинаковым значением μ по всем координатным направлениям. Анизотропные магнитные среды обладают тензорными свойствами магнитной проницаемости:

$$\bar{B} = \mu_0 \cdot \tilde{\mu} \cdot \bar{H},\quad (18)$$

где

$$\tilde{\mu} = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{vmatrix}.\quad (19)$$

Для однородных магнитных сред магнитная проницаемость μ_a не является функцией пространственных координат, у неоднородных магнетиков магнитная проницаемость есть некоторая функция координат.

Виды сигналов для зондирования УВЗ. В данной работе был проведен анализ взаимодействия модулированных сигналов со средой над УВЗ. Применение таких зондирующих сигналов позволяет повысить информативность ЭММ поиска углеводородов, так как вариация характеристик сигналов дает возможность провести анализ электродинамических характеристик сред в более широком диапазоне.

В случае тональной амплитудной модуляции (АМ) радиосигнал записывается как

$$\epsilon(t) = E(1 + k_m \cos \Omega t) \cos wt,\quad (20)$$

где E – амплитуда несущего колебания; k_m – коэффициент амплитудной модуляции; $\Omega = 2\pi \cdot F$ – модулирующая частота, $w = 2\pi f$ – несущая.

Для радиосигнала с тональной частотной модуляцией (ЧМ) вида

$$\varepsilon(t) = E_2 \cos(\omega_2 t + \beta \sin \omega_1 t), \tag{21}$$

где E_2 и ω_2 – соответственно амплитуда и частота несущего колебания; ω_1 – модулирующая частота; β – индекс модуляции; $\Delta\omega$ – девиация частоты.

Сигнал со смешанной амплитудно-частотной модуляцией (АЧМ) имеет следующий вид:

$$\varepsilon(t) = Ew(1 + k_m \cos \Omega t) \cos[\omega t + \beta \cos \Omega t], \tag{22}$$

где Ew – амплитуда сигнала несущей частоты w ; k_m , β – соответственно коэффициент амплитудной модуляции и индекс частотной модуляции.

Результаты и их обсуждения. Был проведен анализ взаимодействия АМ-, ЧМ- и АЧМ-сигналов со средой над УВЗ. Для АМ-сигналов вида (20) с учетом поправки Дебая (7) была рассчитана представленная на рисунке 2 комбинационная компонента $\dot{\varepsilon}_R(w)$:

$$\dot{\varepsilon}_R(w) = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = \text{Re} \dot{\varepsilon}_R + jI_m \dot{\varepsilon}_R. \tag{23}$$

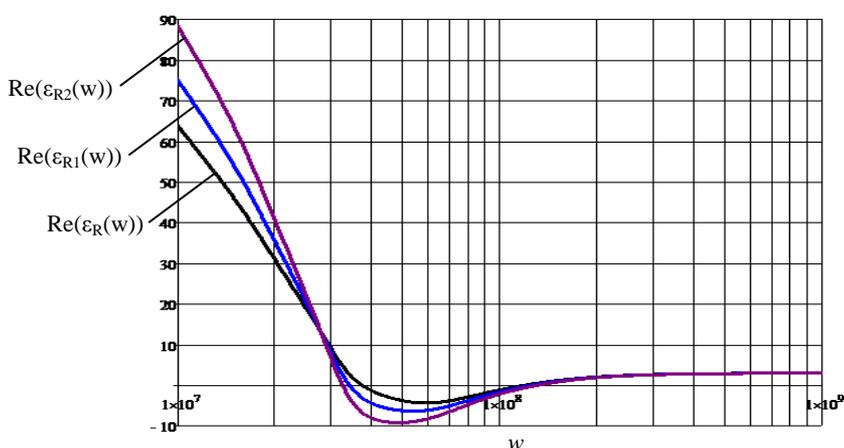


Рис. 2. График $\dot{\varepsilon}_R(w)$ для АМ-сигнала

Как видно из рисунка 2, вещественная часть $\dot{\varepsilon}_R$ имеет две точки переходов через нуль на частотах электронно-циклотронного и электронно-плазменного резонансов. Вариация коэффициента амплитудной модуляции приводит к изменениям комбинационной составляющей тензора.

Для ЧМ-сигнала (рис. 3, 4) представлены зависимости $\text{Re} \dot{\varepsilon}_R = \varphi(w)$ фазы данной компоненты $\text{arg} \dot{\varepsilon}_R = \psi(w)$ с учётом поправки Дебая (7).

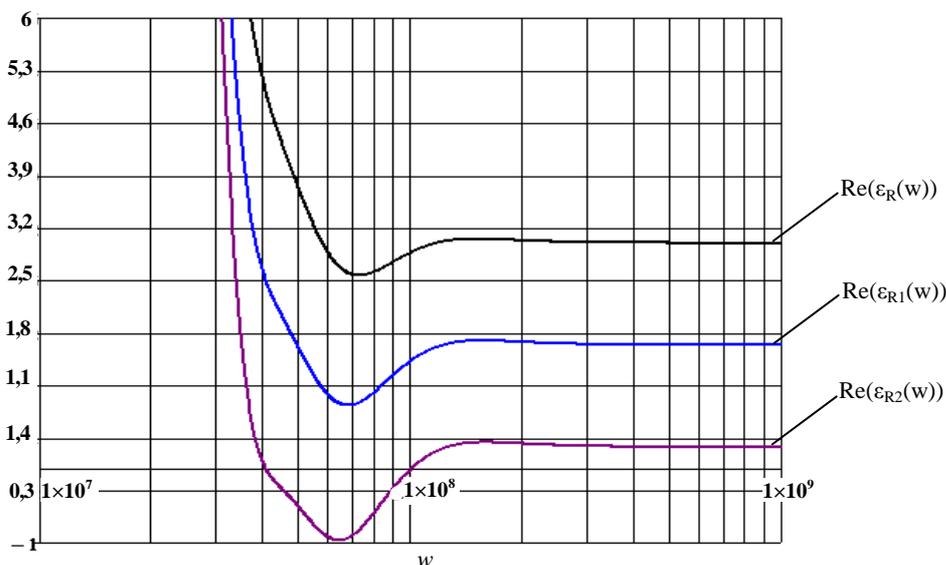
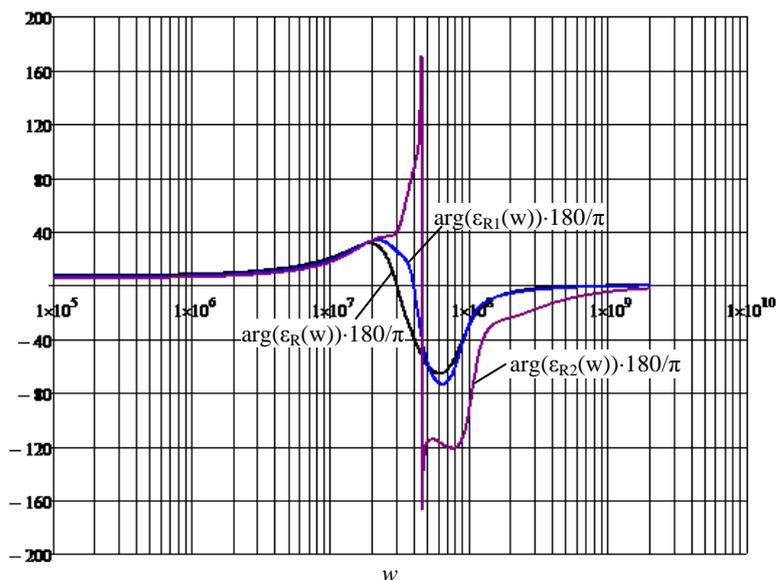


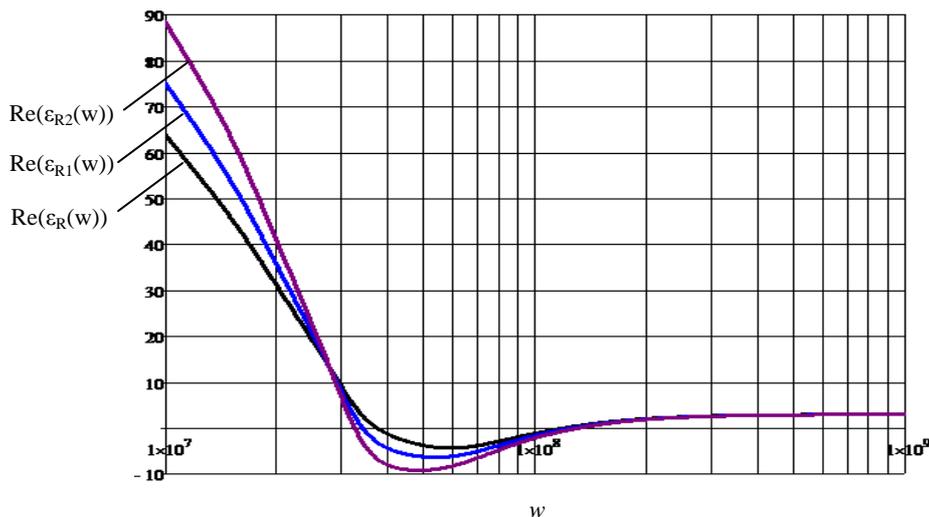
Рис. 3. График $\text{Re} \dot{\varepsilon}_R = \varphi(w)$ для ЧМ-сигнала

Рис. 4. График $\arg \dot{\epsilon}_R = \psi(\omega)$ для ЧМ-сигнала

Особенно эффективно влияет на фазовые характеристики диапазон частот ($1 \cdot 10^7 \dots 1 \cdot 10^8$) Гц, где фаза резко увеличивается. Это обстоятельство может быть использовано для построения ЭММ поиска углеводородов на основе измерения фазовых характеристик. Выявление ЭМА по измерению фазы таких сигналов для исследуемого профиля дает возможность идентифицировать УВЗ с высокой степенью достоверности. Для режима ЧМ-сигнала характерен переход фазы с положительных значений на отрицательные. Численные значения при этом примерно одинаковы. Разработка современных ЭММ поиска и выделения углеводородов, основанных на вариации характеристик зондирующих сигналов, может быть существенно дополнена применением ЧМ-режимов систем георазведки.

Следует отметить, что при теоретических расчетах необходимо располагать априорными сведениями о влажностях пород (8), (9), с другой стороны, по полученным в ходе исследований значениям диэлектрической проницаемости можно определить влажность пород.

Для АЧМ-сигнала вида (22) на рисунке 5 представлены зависимости $\arg \dot{\epsilon}_R = \psi(f)$ с учетом поправки Дебая (7).

Рис. 5. Зависимости $\arg \dot{\epsilon}_R = \psi(\omega)$ для АЧМ-сигнала $F = 100$ МГц при $k_m = 1$

Заключение. Итогом проведенного теоретического анализа явились наиболее эффективные соотношения между параметрами ЭМВ с точки зрения оптимального обнаружения, которые могут быть рекомендованы к использованию их на практике. Полученные результаты также могут использоваться для

разработки радиотехнических систем ближней и дальней радиолокации, для обнаружения локальных подземных образований, оптимизации методов поиска и оконтуривания залежей нефти и газа, при разработке методов радиоконспектирования для георазведки углеводородов, кроме того, могут быть использованы в поисковой геофизике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гололобов, Д.В. Влияние параметров амплитудно-модулированного воздействия на фазовые составляющие поверхностного импеданса анизотропной среды плазмоподобного типа / Д.В. Гололобов, О.В. Орлова, В.Ф. Янушкевич // Вестн. Полоц. гос. унта. Серия С. Фундаментальные науки. – 2010. – № 9. – С. 98–101.
2. Конструирование экранов и СВЧ-устройств: учебник для вузов / А.М. Чернушенко [и др.]; под ред. А.М. Чернушенко. – М.: Радио и связь, 1990. – 352 с.
3. Владов, М.Л. Введение в георадиолокацию / М.Л. Владов, А.В. Старовойтов. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – 153 с.
4. Баскаков, С.И. Электродинамика и распространение радиоволн: учеб. пособие для вузов / С.И. Баскаков. – М.: Высш. шк., 1992. – 416 с.
5. Гололобов, Д.В. Поверхностный импеданс углеводородной залежи в режиме двухчастотного взаимодействия / Д.В. Гололобов, Н.В. Цывис, В.Ф. Янушкевич // Изв. Белорус. нац. акад. – 2001. – № 1(11/1). – С. 101–104.
6. Степуленок, С.В. Взаимодействие амплитудно-частотно-модулированных сигналов со средой над углеводородными залежами / С.В. Степуленок, В.Ф. Янушкевич // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия С. Фундаментальные науки. – 2009. – № 9. – С. 103–108.

Поступила 19.01.2015

**THE USE OF MODULATED SIGNALS TO SEARCH FOR
THE PLASMA ANISOTROPIC MEDIA OF THIS TYPE**

V. YANUSHKEVICH, S. KALINCEV, K. KREMENYA, E. ZAYATS

The article describes the use of modulated signals to search for anisotropic media such as plasma. The characteristics of the media under hydrocarbon deposits. Particular attention is paid to the analysis of the amendments to the Debye expression for the dielectric constant of the medium. The analysis of the interaction of electromagnetic waves with hydrocarbons in the mode amplitude, and amplitude-particle-particle-simulated signals. For these modes, the research components of the dielectric tensor of the medium. Using vertically polarized electromagnetic waves. Consider the wide range of unused parts. Variation of characteristics of probing signals allows improve information search.

УДК 537.2:621.642.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ ОБЪЕМНОГО ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ЗАРЯДА, ВНОСИМОГО В РЕЗЕРВУАРЫ С ПОСТУПАЮЩЕЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ УГЛЕВОДОРОДНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

канд. техн. наук, доц. О.Г. ГОРОВЫХ

(Институт переподготовки и повышения квалификации МЧС Республики Беларусь, Минск);

А.Р. ОРАЗБАЕВ

(ТОО «SEMSER Ort Sondirushi», Астана, Республика Казахстан)

Рассматриваются носители электростатического заряда, образующегося при движении диэлектрической углеводородной жидкости по трубопроводам. Показано, что носители такого электростатического заряда имеют разную природу, следовательно, и время релаксации каждого из видов носителей заряда различно. Предложено математическое выражение для определения времени релаксации всех видов носителей электростатического заряда, учитывающее величину вносимого в резервуар электростатического заряда, изменяющуюся величину поверхности контакта углеводородной жидкости со стенкой резервуара и конфигурацию резервуара. За время релаксации принято время, по истечении которого возникновение искры, необходимой для воспламенения паров паровоздушного пространства, исключается.

Введение. Сегодня в странах СНГ эксплуатируются тысячи стационарных вертикальных и горизонтальных цилиндрических резервуаров, расположенных на территории нефтебаз, АЗС, других объектов хранения и переработки нефтепродуктов. Все резервуары, которые включены в технологический процесс, периодически заполняются и опорожняются. Процессы наполнения и слива углеводородных жидкостей из резервуаров относятся к операциям с повышенной пожароопасностью. При сливно-наливных операциях достаточно часто причиной возникновения пожаров в резервуарах являются разряды статического электричества в виде искр, что является недопустимым во взрыво- и пожароопасных условиях. Методы борьбы с накоплением зарядов статического электричества при операциях с нефтепродуктами регламентированы различными руководящими документами [1, пп. 4.7, 8; 2, п. 5.3; 3, гл. 28; 4; 5].

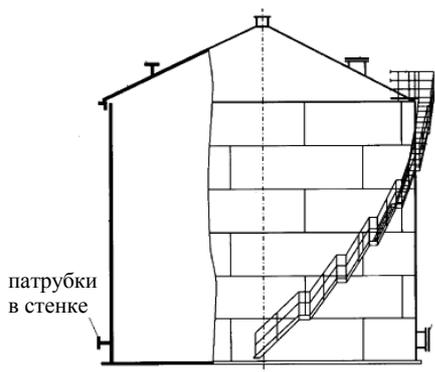
Для исключения пожаров и взрывов, инициированных искровым разрядом в паровом пространстве резервуаров, в которые происходит загрузка (выгрузка) углеводородных диэлектрических жидкостей с удельным объемным электрическим сопротивлением более 10^9 Ом·м, рекомендуется обеспечивать поддержание определенной допустимой скорости истечения жидкости в аппарат [6, п. 1.2]. Допустимую скорость истечения жидкости в резервуар определяют исходя из необходимости ограничить предельно допустимым значением максимально возможную плотность заряда в приповерхностном слое жидкости, находящейся в заполняемом аппарате (резервуаре), при данном способе загрузки. При этом в соответствии с [6, п. 4.2] предусматривается определение скорости загрузки углеводородной жидкости только в резервуары со сферическим, эллиптическим или коническим днищем, имеющие вертикальный загрузочный патрубок, причем расстояние конца загрузочного патрубка до дна резервуара должно составлять не более чем 200 мм.

Резервуары с нефтепродуктами, эксплуатируемые на нефтехранилищах различного рода, имеют, как правило, боковой ввод загрузочного патрубка (рисунок).

Таким образом, встает вопрос о методиках расчета скорости загрузки, которая может применяться и для резервуаров, интенсивно эксплуатирующихся в настоящее время, в том числе объемом до 20 000 м³, и имеющих горизонтальный ввод загрузочного патрубка. Например, на

головной нефтеперекачивающей станции «Павлодар» АО «КазТрансОйл» в эксплуатации находятся восемь стальных вертикальных резервуаров объемом 20 000 м³, и все имеют боковой патрубок для загрузки нефтепродуктов.

Основная часть. Как известно, носителями электростатического заряда, поступающего с потоком углеводородной диэлектрической жидкости в резервуар, являются как ионы, образовавшиеся в результате диссоциации имеющихся в жидкости электролитов и окислительно-восстановительных реакций, протекающих в двойном электрическом слое на стенке трубопровода, так и заряженные коллоидные частицы, потерявшие при движении жидкости внешнюю сферу. «Мы встречается с двумя основными меха-



Резервуар с боковым горизонтальным загрузочным патрубком

низмами электропроводности жидких диэлектриков: электропроводностью ионной и электропроводностью катафорической, обусловленной упорядоченным движением коллоидных частиц» [7, с. 222].

Ионная электропроводность, обусловленная движением ионов, делится на два класса: собственная электропроводность и примесная. Собственная электропроводность диэлектрических жидкостей очень мала и соответствует (определяется) электропроводности глубоко очищенной жидкости. Примесная электропроводность также зависит от степени диссоциации примесей. Степень этой диссоциации зависит от концентрации примесей, структуры молекул примеси, в том числе от величины дипольного момента и от диэлектрической проницаемости растворителя.

Электропроводность, которая складывается только из примесной и собственной электропроводности, можно определить по уравнению [7, с. 228]:

$$\alpha = A_1 \cdot e^{\frac{B_1}{T}} + A_2 e^{\frac{B_2}{T}}, \quad (1)$$

где A_1 и B_1 характеризуют собственные (основные) ионы диэлектрической жидкости и определяются по уравнениям (2) и (3); A_2 и B_2 характеризуют ионы, образующиеся от примесных веществ, и также определяются по уравнениям (2) и (3):

$$A = \frac{n_0 q^2 \delta v}{6kT}; \quad (2)$$

$$B = \frac{E_0}{k}. \quad (3)$$

Здесь n_0 – общее число молекул в 1 см^3 ; q – заряд одновалентного иона, равный $-1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл; δ – длина свободного пробега иона, см; v – частота собственного колебания молекулы в месте закрепления, равная числу попыток молекулы в течение 1 с перескочить потенциальный барьер (достичь возбужденного состояния), с^{-1} ; k – коэффициент, равный $36 \cdot \pi \cdot 10^{-11}$; T – термодинамическая температура, К; E_0 – энергия активации или диссоциации молекул в жидкости (потенциальный барьер), В.

Катафорическая электропроводность определяется количеством полимолекулярных агрегатов, которые образуются при различных процессах. Например, при старении нефтепродукта и естественной полимеризации, при прогреве нефтепродукта и образовании различных смолистых агрегатов, при включении эмульгированной воды, при наличии смесей нефтепродуктов и т.п. Коллоидные частицы, кроме того, могут адсорбировать свободный ион того или иного знака, вследствие чего и приобретают соответствующий заряд [7, с. 235]. Строение полимолекулярных агрегатов, ответственных за катафорическую проводимость, подобно строению коллоидной частицы, имеющей внутренний (адсорбционный) и внешний (диффузионный) слои. В зависимости от скорости движения углеводородной жидкости диффузионный слой частицы, ответственной за катафорическую проводимость, отстает от движения самой частицы, и поток углеводородной жидкости переносит заряд, соразмерный с числом частиц, не имеющих внешнего диффузионного слоя. Количество образовавшихся ионов, формирующих катафорическую проводимость, напрямую зависит от скорости потока жидкости.

Каждый из перечисленных видов ионов, обеспечивающих возникновение электростатического заряда в движущемся потоке диэлектрической жидкости, будет иметь свое собственное время релаксации. Причем если нейтрализовать ионы (к примеру, с помощью заземления), образовавшиеся в результате диссоциации примесей или молекул нефтепродукта, рассеивание и нейтрализация катафорического заряда, будет зависеть от времени формирования внешнего диффузионного, нейтрализующего заряд коллоидных частиц слоя.

Катафорическую электропроводность можно определить из следующего выражения [7, с. 236]:

$$\alpha_{\text{кат}} = r \cdot n_0 \frac{\varepsilon^2 \xi^2}{6\pi\eta}, \quad (4)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость жидкости; r – радиус полимолекулярной частицы, несущей заряд, м; n_0 – число заряженных коллоидных частиц в 1 см^3 жидкости; ξ – электрокинетический потенциал; η – вязкость жидкости.

Заряд, вносимый заряженными частицами, обеспечивающими катафорическую проводимость, равен

$$q_{\text{кат}} = \varepsilon \cdot \xi \cdot r \cdot n_0 \cdot S \cdot v \cdot \tau, \quad (5)$$

где S – площадь сечения трубопровода, м^2 ; v – скорость движения жидкости в трубопроводе, м/с; τ – текущее время поступления жидкости в резервуар, с.

Для определения вероятности пожаро- и взрывобезопасного состояния в паровом пространстве резервуара необходимо определить время релаксации поступающего и формируемого в процессе загрузки в резервуар объемного электростатического заряда, который выносится на поверхность жидкости и формирует ее поверхностный электростатический заряд. Чем больше время релаксации (например, составляет несколько минут), тем больше вероятность электростатического разряда, сформированного на поверхности жидкости электростатического заряда, с последующим воспламенением паров загружаемой углеводородной горючей жидкости.

Известно, что снижение (уменьшение) объемного заряда в диэлектрике протекает по экспоненциальному закону [8, с. 17]:

$$q_{\tau} = q_{исх} \cdot e^{-k_{рел} \tau}, \quad (6)$$

где q_{τ} – объемный электростатический заряд, релаксирующий в течение времени τ , Кл/м³; $q_{исх}$ – исходный объемный электростатический заряд, Кл/м³; $k_{рел}$ – коэффициент пропорциональности (константа времени релаксации), с⁻¹; τ – время, в течение которого происходит изменение (уменьшение) электростатического заряда, с.

Исходный объемный электростатический заряд включает как заряд, сформированный носителями ионной проводимости, так и катафорической проводимости.

$$q_{исх} = q_{ион} + q_{кат}. \quad (7)$$

Если за время релаксации $\tau_{рел}$, будем считать время, необходимое для достижения безопасной концентрации объемного или поверхностного электростатического заряда в жидкости, то его можно определить из уравнения (6):

$$\tau_{рел} = \frac{\ln \frac{q_{исх}}{q_{без}}}{k_{рел}} = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{q_{исх}}{q_{без}}}{\alpha}, \quad (8)$$

где $q_{исх}$ – электростатический заряд, находящийся в объеме жидкости при поступлении в резервуар, Кл; $q_{без}$ – безопасная величина электростатического заряда, не приводящая к возникновению пожароопасных разрядов на поверхности жидкости, Кл; $k_{рел}$ – константа времени релаксации, $\alpha/(\varepsilon_0 \cdot \varepsilon)$, с⁻¹; ε – диэлектрическая проницаемость углеводородной жидкости; ε_0 – абсолютная диэлектрическая проницаемость, равная $1,845 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; α – удельная электропроводность (проводимость) среды (величина, обратная удельному объемному электрическому сопротивлению жидкости), Ом⁻¹·м⁻¹.

Для определения предельно допустимого (безопасного) значения плотности заряда (предельно допустимое значение плотности заряда определяется как плотность заряда в объеме жидкости, при которой вероятность возникновения разряда с энергией, равной 0,25 минимальной энергии зажигания смеси паров этой жидкости с воздухом, не превосходит 10^{-3} [6, п. 1.5]) используют уравнение (9), приведенное в [6, п. 2.2]:

$$q_{без} = 9 \cdot 10^{-10} \cdot W_{\min}^{1/4} \cdot e^{-\frac{\varphi}{4}}, \quad (9)$$

где W_{\min} – минимальная энергия зажигания среды над поверхностью жидкости, Дж; φ – безразмерный коэффициент, определяется по (10):

$$\varphi = -45,01 + \ln \left(\varepsilon_3 \sqrt[3]{\frac{\sigma_{нат}}{k_n}} \right), \quad (10)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость жидкости; $\sigma_{нат}$ – поверхностное натяжение жидкости, кг/см²; $k_n = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot R_v$ – постоянная времени релаксации заряда в жидкости, с; ε_0 – электрическая постоянная, равная $8,854 \cdot 10^{-12}$, Ф/м; R_v – удельное объемное электрическое сопротивление жидкости, Ом·м.

Подставляя уравнение (9) в уравнение (8), получаем выражение 11:

$$\tau_{рел} = \frac{\ln \frac{q_{исх}}{q_{без}}}{k_{рел}} = \frac{\ln \frac{q_{исх} \cdot 10^{10}}{9W^{0,25}} + \frac{\varphi}{4}}{k_{рел}} = \frac{\ln \frac{(q_{ион} + q_{кат}) \cdot 10^{10}}{9W^{0,25}} + \frac{\varphi}{4}}{k_{рел}} = \frac{\ln \frac{(q_{ион} + \varepsilon \cdot \xi \cdot r \cdot n_0 \cdot S \cdot v \cdot \tau) \cdot 10^{10}}{9W^{0,25}} + \frac{\varphi}{4}}{k_{рел}}, \quad (11)$$

Анализ уравнения (11) показывает, что время релаксации всех носителей электростатических зарядов не зависит от конструкции резервуара, в то время как количество выносимых на поверхность катодических ионов (более долгоживущих) зависит от времени пребывания их в объеме жидкости для восстановления диффузионной оболочки. Поэтому для определения времени релаксации в данном резервуаре, то есть времени, необходимом для рассеивания внесенного потоком жидкости электростатического заряда и исключения возможности возникновения искрового разряда, имеющего энергию, достаточную для последующего воспламенения среды, необходимо учитывать конфигурацию резервуара. Коэффициент, отражающий влияние конструкции резервуара на формирование опасной величины поверхностного электростатического заряда, должен учитывать величину площади поверхности стенок резервуара, непосредственно контактирующей в каждый момент времени с жидкостью, и поверхность зеркала жидкости.

Знание константы времени релаксации $k_{\text{рел}}$ позволяет определить общее время релаксации $\tau_{\text{рел}}$ – промежуток времени, за который начальный электростатический заряд уменьшится до величины, позволяющей безопасную эксплуатацию системы. Время релаксации – это величина, зависящая линейно от константы времени релаксации только при сохранении площади утечки заряда и конструкции резервуара.

Учитывая изменение площади, с которой происходит утечка заряда (что наблюдается при заполнении резервуара), и конфигурацию (резервуары разных конструкций), уточненное время релаксации ($\tau_{\text{рел}}^1$), можно определить по следующей зависимости:

$$\tau_{\text{рел}}^1 = \frac{\ln \frac{(q_{\text{ион}} \cdot k_s^{-1} + k_{\text{кон}} \cdot \varepsilon \cdot \xi \cdot r \cdot n_0 \cdot S \cdot v \cdot \tau) \cdot 10^{10}}{9W^{0,25}} + \frac{\Phi}{4}}{k_{\text{рел}}}, \quad (12)$$

где k_s – коэффициент, учитывающий площадь утечки заряда (площадь стенок резервуара, контактирующей с жидкостью; $k_{\text{кон}}$ – коэффициент, учитывающий конструкцию резервуара (вертикальный, горизонтальный; эллиптическое, коническое, плоское дно) и конструкцию загрузочного патрубка, которая определяет время нахождения ионов полимолекулярных агрегатов до выхода на поверхность.

Коэффициент $k_{\text{кон}}$ учитывает вращательные процессы движения жидкости при ее загрузке в резервуар, которые зависят как от вида загрузочного патрубка, так и кривизны днища и скорости загрузки жидкости в резервуар, устанавливается экспериментально для каждого вида резервуара или с помощью гидродинамического моделирования, например, с использованием программного комплекса гидродинамических расчетов FlowVision.

Коэффициент k_s для вертикального резервуара можно найти по выражению (12), приняв, что величина заряда, утекающего с единицы поверхности, есть величина постоянная и не зависит от места присоединения заземляющего кабеля и нахождения над уровнем земли:

$$k_s = k_{y0} \int_0^{\tau} \left(\pi r^2 + \frac{2Q\tau}{r} \right), \quad (13)$$

где k_{y0} – количество заряда, релаксирующего с единицы площади, Кл/м²; r – радиус вертикального резервуара, м; Q – расход жидкости, поступающей в резервуар, м³/с; τ – текущее время от начала заполнения резервуара, с.

Величина k_{y0} может изменяться для данного резервуара с течением времени, так как стенки резервуара покрываются коррозией, на них происходит отложение смолистых и серосодержащих соединений различной проводимости, изменяются и условия токоприема системой заземления. С учетом уравнения (12) уточненное время релаксации для вертикального резервуара будет равно

$$\tau_{\text{рел}}^1 = \frac{\ln \left\{ \frac{q_{\text{ион}} \left[k_{y0} \int_0^{\tau} \left(\pi r^2 + \frac{2Q\tau}{r} \right) \right]^{-1} + k_{\text{кон}} \cdot \varepsilon \cdot \xi \cdot r \cdot n_0 \cdot S \cdot v \cdot \tau}{9W^{0,25}} \right\} + \frac{\Phi}{4}}{k_{\text{рел}}}. \quad (14)$$

Заключение. Предложено математическое выражение для определения уточненного времени релаксации, вносимого в резервуары цилиндрические вертикальные всех видов носителей электростатического заряда с потоком поступающей при загрузке резервуара жидкости. Математическое выражение учитывает величину вносимого в резервуар электростатического заряда, изменяющуюся величину поверхности контакта углеводородной жидкости со стенкой резервуара и конфигурацию резервуара, что

позволяет оценить время, в течение которого при загрузке резервуара может произойти искровой разряд, влекущий за собой взрыв паровоздушной среды углеводородной жидкости с последующим горением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Требования к безопасности нефтебаз и автозаправочных станций. Технический регламент: утв. постановлением Правительства Республики Казахстан от 29 мая 2008 года № 514.
2. Правила технической эксплуатации резервуаров магистральных нефтепроводов и нефтебаз: РД 153-39.4-078-01. – Введ. 10.04.2001 (Приказ ОАО АК «Транснефть» № 25 от 12.05.2001). – Уфа, 2001.
3. Правила технической эксплуатации складов нефтепродуктов: постановление М-ва по чрезвычайным ситуациям Респ. Беларусь от 30.09.2004 № 31.
4. Правила пожарной безопасности Республики Беларусь для объектов хранения, транспортирования и отпуска нефтепродуктов: ППБ 2.11-2001: утв. постановлением М-ва по чрезвычайным ситуациям Респ. Беларусь 16 января 2002 г. № 4. – Минск, 2002.
5. Требования промышленной безопасности при эксплуатации нефтебаз и автозаправочных станций: утв. приказом М-ва по чрезвычайным ситуациям Респ. Казахстан от 25 июля 2008 года № 132.
6. Допустимые скорости движения жидкостей по трубопроводам и истечения в емкости (аппараты, резервуары). Руководящий технический материал: РТМ 6-28-007-78 / М-во химической промышленности. – 68 с.
7. Сканави, Г.И. Физика диэлектриков (область слабых полей) / Г.И. Сканави. – Москва–Ленинград: Гос. изд-во технико-теоретической лит., 1949. – 500 с.
8. Stratton, J.A. Electromagnetic Theory / J.A. Stratton. – New York and London: McGRAW-HILL BOOK Company, Inc, 1941. – 615 s.

Поступила 12.03.2015

TIME SPECIFICATION OF VOLUME ELECTROSTATIC CHARGE RELAXATION BROUGHT IN TANKS WITH DIELECTRIC HYDROCARBONIC LIQUID

O. GOROVICH, A. ORAZBAEV

Carriers of the electrostatic charge which is formed at the movement of dielectric hydrocarbonic liquid on pipelines are considered. It is shown that as carriers of an electrostatic charge have the different nature, and time of a relaxation of each of types of carriers of a charge is different. The formula for definition of time of a relaxation of all types of carriers of an electrostatic charge considering the size of the electrostatic charge brought in the tank, the changing size of a surface of contact of hydrocarbonic liquid with a wall of the tank and a tank configuration is offered. As relaxation time is taken the time after which emergence of a spark necessary for ignition of vapors of steam-air space is excluded.

МАТЕМАТИКА

УДК 514.765.1

РАЗЛОЖЕНИЕ ДЕ РАМА И КОГОМОЛОГИИ ТРЕХМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

канд. физ.-мат. наук, доц. **Н.П. МОЖЕЙ**
(Казанский (Приволжский) федеральный университет, Россия)

Рассматриваются трехмерные однородные римановы (псевдоримановы) многообразия. Описывается разложение де Рама этих многообразий, а также их алгебры Ли когомологий. Когомологии позволяют ответить на вопрос, когда замкнутые формы на многообразии являются точными. Локальная классификация однородных пространств эквивалентна описанию эффективных пар алгебр Ли. Описаны все инвариантные симметрические невырожденные билинейные формы на таких однородных пространствах. Локально однородное риманово (псевдориманово) многообразие локально изометрично глобально однородному риманову (псевдориманову) пространству. Также изучена секционная кривизна римановых (псевдоримановых) однородных пространств. Ограничиваемся случаем нетривиальной стационарной подгруппы, поскольку все остальные псевдоримановы однородные пространства в этой размерности – только группы Ли с левоинвариантной метрикой. В работе использован алгебраический подход для описания многообразий, методы теории групп и алгебр Ли и однородных пространств.

Введение. Для понимания сложного математического объекта желательно разложить его на более простые «неразложимые» компоненты и проанализировать это разложение. В дифференциальной геометрии фундаментальным результатом в этом направлении является теорема де Рама о разложении риманова многообразия в декартово произведение многообразий, неразложимых при действии локальных групп голономии. Впоследствии было получено несколько существенных обобщений теоремы де Рама. Разложение и классификация римановых голономий применимы в физике, в особенности в теории струн. Аффинные группы голономии – группы, возникающие как голономии аффинных связностей без кручения; те, которые не являются римановыми (псевдоримановыми), известны и как неметрические группы голономии. Теорема де Рама не относится к аффинным группам голономии, таким образом, полная классификация не получена.

Трехмерные однородные римановы многообразия. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа \bar{G} , (M, \bar{G}) – однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств (M, \bar{G}) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли (\bar{G}, G) , где $G \subset \bar{G}$, так как многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов \bar{G}/G (см., например, [1]). Изучая однородные пространства, важно рассматривать не саму группу \bar{G} , а ее образ в $Diff(M)$, другими словами, достаточно рассматривать только эффективные действия группы \bar{G} на многообразии M .

Начнем с локального описания однородных пространств и связностей на них. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли \bar{G} , а \mathfrak{g} – подалгебра, соответствующая подгруппе G . Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра \mathfrak{g} не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. В дальнейшем будем предполагать, что G – связная подгруппа, это всегда можно сделать, ограничиваясь локальной точкой зрения. *Изотропное действие* группы G на $T_x M$ – есть фактор-действие присоединенного действия G на $\bar{\mathfrak{g}}$: $s \cdot (x + \mathfrak{g}) = (Ad_s)(x) + \mathfrak{g}$ для всех $s \in G, x \in \bar{\mathfrak{g}}$. При этом алгебра Ли \mathfrak{g} действует на касательном пространстве $T_x M = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ следующим образом: $x \cdot (y + \mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g}$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры \mathfrak{g} . С геометрической точки зрения это означает, что естественное действие стабилизатора \bar{G}_x произвольной точки $x \in M$ на $T_x M$ имеет нулевое ядро. *Псевдориманово однородное пространство* задается тройкой $(\bar{G}, M, \mathfrak{g})$, где \bar{G} – связная группа Ли, M является связным гладким многообразием с транзитивным действием \bar{G} , а \mathfrak{g} – инвариантная псевдориманова метрика на M . Инвариантные псевдоримановы метрики \mathfrak{g} на M находятся во взаимно

однозначном соответствии с инвариантными симметрическими невырожденными билинейными формами B на G -модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ ([2]). Билинейная форма B также является инвариантной билинейной формой на \mathfrak{g} -модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$:

$$B(x.v_1, v_2) + B(v_1, x.v_2) = 0 \quad \text{для всех } x \in \mathfrak{g}, v_1, v_2 \in \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}. \quad (1)$$

Каждое псевдориманово однородное пространство $(\bar{G}, M, \mathfrak{g})$, $\text{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} \leq 4$ описывается тройкой $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$, где $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – эффективная пара алгебр Ли, а B – инвариантная симметричная невырожденная билинейная форма на \mathfrak{g} модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Действительно, из [3] следует, что существует единственное (с точностью до эквивалентности) эффективное однородное пространство (\bar{G}, M) , такое, что M односвязно и стационарная подгруппа G также связна. Покажем, что это однородное пространство допускает единственную инвариантную псевдориманову метрику \mathfrak{g} , соответствующую билинейной форме B . Пусть $m = eG \in M$, где e – единичный элемент в \bar{G} , для существования \mathfrak{g} достаточно, чтобы B было инвариантно относительно изотропного действия G на $T_m M \cong \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Но это условие выполняется, так как G связна и B – инвариантная билинейная форма на \mathfrak{g} -модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Обозначим $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Таким образом, существует единственное (с точностью до эквивалентности) псевдориманово однородное пространство $(\bar{G}, M, \mathfrak{g})$, соответствующее $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$, такое, что M односвязно и G связна. Будем называть тройку $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ локально псевдоримановым однородным пространством. Поскольку каждая инвариантная псевдориманова метрика определяет инвариантную аффинную связность, \mathfrak{g} -модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ точен. Для нахождения всех изотропно-точных пар нужно классифицировать (с точностью до изоморфизма) все точные трехмерные \mathfrak{g} -модули U (это эквивалентно классификации всех подалгебр в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ с точностью до сопряженности), а далее классифицировать (с точностью до эквивалентности) все пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, такие, что \mathfrak{g} -модули $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ и U эквивалентны. Все подобные пары $\text{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ найдены в [4], дальнейшая нумерация пар соответствует приведенной в этом источнике. Ограничимся случаем с ненулевым стабилизатором, так как все остальные псевдоримановы однородные пространства – только трехмерные группы Ли с инвариантной метрикой. Билинейная форма B является инвариантной билинейной формой на \mathfrak{g} -модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Проверим выполнение условия (1) для всех пар $\text{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ и выберем из них допускающие риманову метрику. Далее опишем все такие формы с точностью до индуцированного действия $\text{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Получим следующий результат:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ – локально однородное пространство, допускающее риманову метрику, т.ч. $\text{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ и $\mathfrak{g} \neq \{0\}$. Оно эквивалентно одной и только одной из следующих троек:

Номер тройки	Таблица умножения					B										
1.3.1	e_1	u_1	u_2	u_3		<table border="1"> <tr><td>ε_1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>ε_1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>ε_2</td></tr> </table>	ε_1	0	0	0	ε_1	0	0	0	ε_2	$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$
	ε_1	0	0													
	0	ε_1	0													
	0	0	ε_2													
	e_1	0	$-u_2$	u_1	0											
u_1	u_2	0	0	0												
u_2	$-u_1$	0	0	0												
u_3	0	0	0	0												
1.3.2	e_1	u_1	u_2	u_3		<table border="1"> <tr><td>ε</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>ε</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>a</td></tr> </table>	ε	0	0	0	ε	0	0	0	a	$\varepsilon = \pm 1, a \neq 0$
	ε	0	0													
	0	ε	0													
	0	0	a													
	e_1	0	$-u_2$	u_1	0											
u_1	u_2	0	0	u_1												
u_2	$-u_1$	0	0	u_2												
u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0												
1.3.3	e_1	u_1	u_2	u_3		<table border="1"> <tr><td>a</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>a</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>b</td></tr> </table>	a	0	0	0	a	0	0	0	b	$ab \neq 0$
	a	0	0													
	0	a	0													
	0	0	b													
	e_1	0	$-u_2$	u_1	0											
u_1	u_2	0	$e_1 + u_3$	0												
u_2	$-u_1$	$-e_1 - u_3$	0	0												
u_3	0	0	0	0												
1.3.4	e_1	u_1	u_2	u_3		<table border="1"> <tr><td>a</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>a</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>b</td></tr> </table>	a	0	0	0	a	0	0	0	b	$ab \neq 0$
	a	0	0													
	0	a	0													
	0	0	b													
	e_1	0	$-u_2$	u_1	0											
u_1	u_2	0	$-e_1 + u_3$	0												
u_2	$-u_1$	$e_1 - u_3$	0	0												
u_3	0	0	0	0												

1.3.5	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>e_1</th> <th>u_1</th> <th>u_2</th> <th>u_3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>e_1</td> <td>0</td> <td>$-u_2$</td> <td>u_1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>u_1</td> <td>u_2</td> <td>0</td> <td>e_1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>u_2</td> <td>$-u_1$</td> <td>$-e_1$</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>u_3</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		e_1	u_1	u_2	u_3	e_1	0	$-u_2$	u_1	0	u_1	u_2	0	e_1	0	u_2	$-u_1$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0	0	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>a</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>a</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>± 1</td> </tr> </tbody> </table>	a	0	0	0	a	0	0	0	± 1	$a \neq 0$																								
	e_1	u_1	u_2	u_3																																																									
e_1	0	$-u_2$	u_1	0																																																									
u_1	u_2	0	e_1	0																																																									
u_2	$-u_1$	$-e_1$	0	0																																																									
u_3	0	0	0	0																																																									
a	0	0																																																											
0	a	0																																																											
0	0	± 1																																																											
1.3.6	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>e_1</th> <th>u_1</th> <th>u_2</th> <th>u_3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>e_1</td> <td>0</td> <td>$-u_2$</td> <td>u_1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>u_1</td> <td>u_2</td> <td>0</td> <td>$-e_1$</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>u_2</td> <td>$-u_1$</td> <td>e_1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>u_3</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		e_1	u_1	u_2	u_3	e_1	0	$-u_2$	u_1	0	u_1	u_2	0	$-e_1$	0	u_2	$-u_1$	e_1	0	0	u_3	0	0	0	0	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>a</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>a</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>± 1</td> </tr> </tbody> </table>	a	0	0	0	a	0	0	0	± 1	$a \neq 0$																								
	e_1	u_1	u_2	u_3																																																									
e_1	0	$-u_2$	u_1	0																																																									
u_1	u_2	0	$-e_1$	0																																																									
u_2	$-u_1$	e_1	0	0																																																									
u_3	0	0	0	0																																																									
a	0	0																																																											
0	a	0																																																											
0	0	± 1																																																											
1.3.7	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>e_1</th> <th>u_1</th> <th>u_2</th> <th>u_3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>e_1</td> <td>0</td> <td>$-u_2$</td> <td>u_1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>u_1</td> <td>u_2</td> <td>0</td> <td>u_3</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>u_2</td> <td>$-u_1$</td> <td>$-u_3$</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>u_3</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		e_1	u_1	u_2	u_3	e_1	0	$-u_2$	u_1	0	u_1	u_2	0	u_3	0	u_2	$-u_1$	$-u_3$	0	0	u_3	0	0	0	0	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>ε</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>ε</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>a</td> </tr> </tbody> </table>	ε	0	0	0	ε	0	0	0	a	$\varepsilon = \pm 1, a \neq 0$																								
	e_1	u_1	u_2	u_3																																																									
e_1	0	$-u_2$	u_1	0																																																									
u_1	u_2	0	u_3	0																																																									
u_2	$-u_1$	$-u_3$	0	0																																																									
u_3	0	0	0	0																																																									
ε	0	0																																																											
0	ε	0																																																											
0	0	a																																																											
3.5.1	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>e_1</th> <th>e_2</th> <th>e_3</th> <th>u_1</th> <th>u_2</th> <th>u_3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>e_1</td> <td>0</td> <td>e_3</td> <td>$-e_2$</td> <td>$-u_3$</td> <td>0</td> <td>u_1</td> </tr> <tr> <td>e_2</td> <td>$-e_3$</td> <td>0</td> <td>e_1</td> <td>$-u_2$</td> <td>u_1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>e_3</td> <td>e_2</td> <td>$-e_1$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$-u_3$</td> <td>u_2</td> </tr> <tr> <td>u_1</td> <td>u_3</td> <td>u_2</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>u_2</td> <td>0</td> <td>$-u_1$</td> <td>u_3</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>u_3</td> <td>$-u_1$</td> <td>0</td> <td>$-u_2$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1	e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0	e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2	u_1	u_3	u_2	0	0	0	0	u_2	0	$-u_1$	u_3	0	0	0	u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	1	0	0	0	1	0	0	0	1	\pm
	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3																																																							
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1																																																							
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0																																																							
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2																																																							
u_1	u_3	u_2	0	0	0	0																																																							
u_2	0	$-u_1$	u_3	0	0	0																																																							
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0																																																							
1	0	0																																																											
0	1	0																																																											
0	0	1																																																											
3.5.2	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>e_1</th> <th>e_2</th> <th>e_3</th> <th>u_1</th> <th>u_2</th> <th>u_3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>e_1</td> <td>0</td> <td>e_3</td> <td>$-e_2$</td> <td>$-u_3$</td> <td>0</td> <td>u_1</td> </tr> <tr> <td>e_2</td> <td>$-e_3$</td> <td>0</td> <td>e_1</td> <td>$-u_2$</td> <td>u_1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>e_3</td> <td>e_2</td> <td>$-e_1$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$-u_3$</td> <td>u_2</td> </tr> <tr> <td>u_1</td> <td>u_3</td> <td>u_2</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>e_2</td> <td>e_1</td> </tr> <tr> <td>u_2</td> <td>0</td> <td>$-u_1$</td> <td>u_3</td> <td>$-e_2$</td> <td>0</td> <td>e_3</td> </tr> <tr> <td>u_3</td> <td>$-u_1$</td> <td>0</td> <td>$-u_2$</td> <td>$-e_1$</td> <td>$-e_3$</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1	e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0	e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2	u_1	u_3	u_2	0	0	e_2	e_1	u_2	0	$-u_1$	u_3	$-e_2$	0	e_3	u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	$-e_1$	$-e_3$	0	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>a</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>a</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>a</td> </tr> </tbody> </table>	a	0	0	0	a	0	0	0	a	$a \neq 0$
	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3																																																							
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1																																																							
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0																																																							
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2																																																							
u_1	u_3	u_2	0	0	e_2	e_1																																																							
u_2	0	$-u_1$	u_3	$-e_2$	0	e_3																																																							
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	$-e_1$	$-e_3$	0																																																							
a	0	0																																																											
0	a	0																																																											
0	0	a																																																											
3.5.3	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>e_1</th> <th>e_2</th> <th>e_3</th> <th>u_1</th> <th>u_2</th> <th>u_3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>e_1</td> <td>0</td> <td>e_3</td> <td>$-e_2$</td> <td>$-u_3$</td> <td>0</td> <td>u_1</td> </tr> <tr> <td>e_2</td> <td>$-e_3$</td> <td>0</td> <td>e_1</td> <td>$-u_2$</td> <td>u_1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>e_3</td> <td>e_2</td> <td>$-e_1$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$-u_3$</td> <td>u_2</td> </tr> <tr> <td>u_1</td> <td>u_3</td> <td>u_2</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$-e_2$</td> <td>$-e_1$</td> </tr> <tr> <td>u_2</td> <td>0</td> <td>$-u_1$</td> <td>u_3</td> <td>e_2</td> <td>0</td> <td>$-e_3$</td> </tr> <tr> <td>u_3</td> <td>$-u_1$</td> <td>0</td> <td>$-u_2$</td> <td>e_1</td> <td>e_3</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1	e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0	e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2	u_1	u_3	u_2	0	0	$-e_2$	$-e_1$	u_2	0	$-u_1$	u_3	e_2	0	$-e_3$	u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	e_1	e_3	0	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>a</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>a</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>a</td> </tr> </tbody> </table>	a	0	0	0	a	0	0	0	a	$a \neq 0$
	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3																																																							
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1																																																							
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0																																																							
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2																																																							
u_1	u_3	u_2	0	0	$-e_2$	$-e_1$																																																							
u_2	0	$-u_1$	u_3	e_2	0	$-e_3$																																																							
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	e_1	e_3	0																																																							
a	0	0																																																											
0	a	0																																																											
0	0	a																																																											

Здесь e_1, e_2, e_3 – базис \mathfrak{g} , u_1, u_2, u_3 – базис, дополнительный к \mathfrak{g} в $\bar{\mathfrak{g}}$.

Замечание. Кроме римановой метрики, псевдориманову метрику сигнатуры (2, 1) допускают следующие однородные пространства из приведенных в теореме 2: 1.3.1 при $\varepsilon_1 \varepsilon_2 < 0$, 1.3.2, 1.3.5, 1.3.6, 1.3.7 при $\varepsilon a < 0$; 1.3.3, 1.3.4 при $ab < 0$.

Из пар, приведенных в теореме 2, симметрическое однородное пространство задают 1.3.1, 1.3.5, 1.3.6, 3.5.1–3.5.3.

Из трехмерных римановых однородных пространств следующие 7 соответствуют классификации Терстона:

- если стабилизаторы точек пространства трехмерны: $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$, тройка 3.5.1 задает евклидово пространство E^3 , 3.5.2 – сферу S^3 , 3.5.3 – гиперболическое пространство H^3 ;

- если стабилизаторы одномерны: $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$, то M есть \bar{G} -инвариантное расслоение над одной из двумерных геометрий. На M имеется \bar{G} -инвариантная метрика, определяющая связность. При нулевой кривизне связности тройка 1.3.5 задает $S^2 \times E^1$, 1.3.6 задает $H^2 \times E^1$, а при ненулевой кривизне тройка 1.3.3 задает $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$, 1.3.7 задает нильгеометрию.

- 1.3.1 подалгебра в 3.5.1 в базисе (e_2, u_1, u_2, u_3) , 1.3.2 подалгебра в 3.5.2 в базисе $(-e_1, e_2 + u_1, e_3 - u_3, u_2)$, 1.3.4 подалгебра в 3.5.3 в базисе $\left(-e_1, \frac{e_2 - u_3}{2}, \frac{e_3 - u_1}{2}, \frac{-e_1 + u_2}{2}\right)$.

Трехмерные однородные псевдоримановы многообразия. Проверим выполнение условия (1) для всех пар $\text{codim}_{\bar{g}}\mathfrak{g} = 3$ и выберем из них допускающие псевдориманову метрику. Далее опишем все такие формы с точностью до индуцированного действия $\text{Aut}(\bar{g}, \mathfrak{g})$. Получим следующий результат:

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(\bar{g}, \mathfrak{g}, B)$ – локально однородное пространство, допускающее только псевдориманову метрику, т.ч. $\text{codim}_{\bar{g}}\mathfrak{g} = 3$ и $\mathfrak{g} \neq \{0\}$, e_1, e_2, e_3 – базис \mathfrak{g} , u_1, u_2, u_3 – базис, дополнительный к \mathfrak{g} в \bar{g} . Оно эквивалентно одной и только одной из следующих троек:

3.4.1	$\begin{array}{c cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & - & 0 \\ & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	\pm
3.4.2	$\begin{array}{c cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & e_2 & -e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & -e_2 & 0 & -e_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & e_1 & e_3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 0 & 0 & a \\ \hline 0 & - & 0 \\ & a & \\ \hline a & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0$
3.4.3	$\begin{array}{c cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & -e_2 & e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & e_2 & 0 & e_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & -e_1 & -e_3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 0 & 0 & a \\ \hline 0 & - & 0 \\ & a & \\ \hline a & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0$
2.21.1	$\begin{array}{c ccccc} & e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & - & 0 \\ & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	\pm
2.21.4	$\begin{array}{c ccccc} & e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_1 & 0 & u_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & -u_2 & -u_3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 0 & 0 & a \\ \hline 0 & - & 0 \\ & a & \\ \hline a & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0$
1.8.1	$\begin{array}{c cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & - & 0 \\ & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	\pm
1.8.2	$\begin{array}{c cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_2 & -u_1 & -u_1 & 0 & u_3 \\ u_3 & -u_2 & -u_2 & -u_3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 0 & 0 & a \\ \hline 0 & - & 0 \\ & a & \\ \hline a & 0 & \varepsilon \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0, \varepsilon = \pm 1, 0$
1.8.3	$\begin{array}{c cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & u_2 + \lambda e_1 \\ u_3 & -u_2 & -u_1 & -u_2 - \lambda e_1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & - & 0 \\ & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	\pm

1.8.4	$\begin{matrix} e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & e_1 \\ u_3 & -u_2 & 0 & -e_1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$	\pm
1.8.5	$\begin{matrix} e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & -e_1 \\ u_3 & -u_2 & 0 & e_1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$	\pm
1.1.1	$\begin{matrix} e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{matrix}$	
1.1.2	$\begin{matrix} e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & u_2 & 0 & 0 & u_2 \\ u_3 & 0 & 0 & -u_2 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{matrix}$	$a \neq 0$
1.1.5	$\begin{matrix} e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & e_1 & 0 \\ u_2 & u_2 & -e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{matrix}$	$a \neq 0$
1.1.6	$\begin{matrix} e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & u_3 & 0 \\ u_2 & u_2 & -u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{matrix}$	$a \neq 0$
1.1.7	$\begin{matrix} e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & e_1+u_3 & 0 \\ u_2 & u_2 & -e_1-u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{matrix}$	$ab \neq 0$

Из пар, приведенных в теореме 3, симметрическое однородное пространство задают 1.1.1, 1.1.5, 1.8.1, 1.8.4, 1.8.5, 2.21.1, 3.4.1–3.4.3.

Разложение де Рама трехмерных однородных римановых многообразий. Если M – односвязное полное риманово многообразие, то M изометрично прямому произведению $M_0 \times M_1 \times \dots \times M_r$, где M_0 – евклидово пространство (возможно, нулевой размерности), а M_1, \dots, M_r – односвязные полные неприводимые римановы многообразия, такое разложение однозначно с точностью до порядка следования сомножителей. Наибольшая связная группа $I^0(M)$ изометрий для M естественным образом изоморфна прямому произведению наибольших связных групп $I^0(M_i)$ изометрий сомножителей M_i [5]. Отсюда следует, что M есть однородное риманово многообразие тогда и только тогда, когда однородными римановыми многообразиями являются и сомножители M_0, \dots, M_r .

Пусть далее M – односвязное однородное пространство с инвариантной римановой метрикой. Тогда существуют (К. Номидзу [6]) связные замкнутые подгруппы $\overline{G}_0, \dots, \overline{G}_r$ в \overline{G} , каждая из которых содержит G , такие, что каждый множитель наделен инвариантной римановой метрикой (\overline{G}_i может и не быть эффективной на \overline{G}_i / G). Хотя это утверждение верно для односвязных однородных римановых многообразий, желательно иметь, пусть при более сильных предположениях, разложение следующего типа: $\overline{G} = \overline{G}_0 \times \overline{G}_1 \times \dots \times \overline{G}_r$, $G = G_0 \times G_1 \times \dots \times G_r$.

Действительно, пусть M – односвязное естественно редуцируемое однородное пространство с $ad(G)$ -инвариантным разложением $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ и инвариантной римановой метрикой g .

Пусть $T_0(M) = T_0^0 \times \dots \times T_0^r$ – разложение де Рама касательного пространства $T_0(M)$ и $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}_1 + \dots + \mathfrak{m}_r$, соответствующее разложению для \mathfrak{m} при естественном отождествлении $T_0(M) = \mathfrak{m}$. Положим

$$f(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}], \quad f_i = \mathfrak{m}_i + [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i], \quad \mathfrak{g}_i = f_i \cap \mathfrak{g} \text{ для } i = 0, 1, \dots, r,$$

тогда (Б. Костант [7]) f_i – идеалы в $\bar{\mathfrak{g}}$ и $f(\mathfrak{m}) = f_0 + f_1 + \dots + f_r$ – прямая сумма алгебр Ли, и имеют место следующие соотношения:

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}_i] \in \mathfrak{m}_i, \quad [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i] \in \mathfrak{m}_i + \mathfrak{g}, \quad [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] = 0 \text{ для } i \neq j, i, j = 0, 1, \dots, r.$$

Если \bar{G} – связная группа, а \bar{G}/G односвязно, то простые гомотопические рассуждения показывают, что G связна. Беря универсальную накрывающую группу для \bar{G} вместо \bar{G} , можем считать, что \bar{G} односвязна; \bar{G} остается почти эффективной на \bar{G}/G , хотя, быть может, уже не эффективной. Так как \bar{G} односвязна, то нормальные подгруппы $\bar{G}_0, \bar{G}_1, \dots, \bar{G}_r$ для \bar{G} , порожденные идеалами f_0, f_1, \dots, f_r соответственно, замкнуты и односвязны. Если мы положим $G_i = \bar{G}_i \cap G$, то \bar{G}_i/G_i будут естественно редуктивны, и $\bar{G}/G = \bar{G}_0/G_0 \times \bar{G}_1/G_1 \times \dots \times \bar{G}_r/G_r$ совпадает с разложением де Рама для M .

ТЕОРЕМА 3. Разложение де Рама касательного пространства $T_0(M)$ при естественном отождествлении $T_0(M) = \mathfrak{m}$ имеет вид:

Номер тройки	Разложение де Рама	Номер тройки	Разложение де Рама
3.5.1	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.3.3	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$
3.5.2	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.3.4	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$
3.5.3	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.3.5	$\mathfrak{m}_0 = \langle u_3 \rangle, \mathfrak{m}_1 = \langle u_1, u_2 \rangle$
1.3.1	$\mathfrak{m}_0 = \langle u_3 \rangle, \mathfrak{m}_1 = \langle u_1, u_2 \rangle$	1.3.6	$\mathfrak{m}_0 = \langle u_3 \rangle, \mathfrak{m}_1 = \langle u_1, u_2 \rangle$
1.3.2	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.3.7	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$

Естественно теперь рассмотреть случай, когда $\bar{\mathfrak{g}} = f(\mathfrak{m})$. Если $ad(G)$ – инвариантное скалярное произведение B на \mathfrak{m} , соответствующее метрике g , может быть продолжено до $ad(\bar{G})$ -инвариантной невырожденной билинейной симметричной формы B на $\bar{\mathfrak{g}}$, такой, что $B(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}) = 0$, то

$$\bar{\mathfrak{g}} = f_0 + f_1 + \dots + f_r.$$

В более общей форме в тех же предположениях имеем

$$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}].$$

Определим теперь случай, когда $\bar{\mathfrak{g}} = f(\mathfrak{m})$, и выпишем, при необходимости, идеалы f_0, f_1, \dots, f_r :

3.5.1	$\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
3.5.2	$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
3.5.3	$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.3.1	$\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}], f(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}, f_0 = \langle u_3 \rangle, f_1 = \langle u_1, u_2 \rangle, \mathfrak{g}_i = 0$
1.3.2	$\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.3.3	$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.3.4	$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.3.5	$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}], f_0 = \langle u_3 \rangle, f_1 = \langle e_1, u_1, u_2 \rangle, \mathfrak{g}_0 = 0, \mathfrak{g}_1 = e_1$
1.3.6	$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}], f_0 = \langle u_3 \rangle, f_1 = \langle e_1, u_1, u_2 \rangle, \mathfrak{g}_0 = 0, \mathfrak{g}_1 = e_1$
1.3.7	$\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$

Если M – односвязное естественно редуктивное однородное пространство с инвариантной римановой метрикой g и \bar{G} проста, то M не приводимо (как риманово многообразие). Если связная группа Ли \bar{G}

действует транзитивно на евклидовом пространстве как группа евклидовых движений, то \bar{G} не полупростая (Лихнерович [8]). Номидзу была высказана гипотеза о том, что однородное пространство компактной группы Ли \bar{G} неприводимо (в смысле де Рама) относительно произвольной римановой метрики, инвариантной относительно действия группы, тогда и только тогда, когда группа \bar{G} проста. Это утверждение появилось в работе А. Лихнеровича [8] в качестве теоремы. В работе [7] Б. Костант доказал эту гипотезу для естественной метрики и построил контрпример к утверждению Номидзу – Лихнеровича в общем виде.

Группа \bar{G} проста в случаях 3.5.2 и 3.5.3, разрешима в случаях 1.3.1, 1.3.2, 1.3.7.

Разложение де Рама трехмерных однородных псевдоримановых многообразий

ТЕОРЕМА 4. Разложение де Рама касательного пространства $T_0(M)$ при естественном отождествлении $T_0(M) = \mathfrak{m}$ имеет вид:

Номер тройки	Разложение де Рама	Номер тройки	Разложение де Рама
3.4.1	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.8.4	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$
3.4.2	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.8.5	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$
3.4.3	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.1.1	$\mathfrak{m}_0 = \langle u_1 \rangle, \mathfrak{m}_1 = \langle u_2 \rangle, \mathfrak{m}_2 = \langle u_3 \rangle$
2.21.1	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.1.2	$\mathfrak{m}_0 = \langle u_1 \rangle, \mathfrak{m}_1 = \langle u_2, u_3 \rangle$
2.21.4	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.1.5	$\mathfrak{m}_0 = \langle u_3 \rangle, \mathfrak{m}_1 = \langle u_1, u_2 \rangle$
1.8.1	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.1.6	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$
1.8.2	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$	1.1.7	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$
1.8.3	$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$		

Определим теперь случай, когда $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{f}(\mathfrak{m})$, и выпишем, при необходимости, идеалы $\mathfrak{f}_0, \mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_r$:

3.4.1	$\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
3.4.2	$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
3.4.3	$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
2.21.1	$\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
2.21.4	$\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.8.1	$\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.8.2	$\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.8.3	при $\alpha = 0$ $\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$, при $\alpha \neq 0$ $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.8.4	$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.8.5	$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.1.1	$\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$, $\mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}, \mathfrak{f}_0 = \langle u_1 \rangle, \mathfrak{f}_1 = \langle u_2 \rangle, \mathfrak{f}_2 = \langle u_3 \rangle, \mathfrak{g}_i = 0$
1.1.2	$\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$, $\mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}, \mathfrak{f}_0 = \langle u_1 \rangle, \mathfrak{f}_1 = \langle u_2, u_3 \rangle, \mathfrak{g}_i = 0$
1.1.5	$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$, $\mathfrak{f}_0 = \langle u_3 \rangle, \mathfrak{f}_1 = \langle e_1, u_1, u_2 \rangle, \mathfrak{g}_0 = 0, \mathfrak{g}_1 = e_1$
1.1.6	$\bar{\mathfrak{g}} \neq \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$
1.1.7	$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$

Группа \bar{G} проста в случаях 3.4.2 и 3.4.3, разрешима в случаях 2.21.1, 1.8.1, 1.8.3, 1.8.4, 1.8.5, 1.1.1, 1.1.2, 1.1.6.

Когомологии римановых (псевдоримановых) многообразий. За определение алгебры когомологий многообразия принимается ее конструкция согласно теореме де Рама. Алгебра когомологий любого гладкого многообразия M совпадает с алгеброй когомологий внешних форм на M . В работе [9] рассматриваются приложения аппарата когомологий алгебр Ли к изучению когомологии главных расслоений и однородных пространств.

Обозначим через $d(\alpha)$ внешнюю производную дифференциальной формы α , через C_1 – множество $(p - 1)$ -форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, через C_2 – множество p -форм, а через C_3 – множество $(p + 1)$ -форм и т.д.

Пусть C – множество $\{C_1, C_2, C_3, \dots\}$, пустое множество будем записывать как $\{\}$. Пусть $A^p(\bar{g}, g)$ – пространство внешних p -форм, p -форма α из $A^p(\bar{g}, g)$ замкнута, если $d(\alpha) = 0$ и точная, если $\alpha = d(\beta)$ для некоторой $(p-1)$ -формы β из $A^{(p-1)}(\bar{g}, g)$. Алгебра Ли кохомологий $H^p(\bar{g}, g)$ степени p – векторное пространство замкнутых p -форм из $A^p(\bar{g}, g)$ по модулю точных p -форм из $A^p(\bar{g}, g)$. Обозначим H_1 – множество p -форм на \bar{g} , образующих базис кохомологий C_2 , H_2 – множество $(p+1)$ -форм на \bar{g} , образующих базис кохомологий C_3 , и т.д., то есть $H = \{H_1, H_2, H_3, \dots\}$ – множество всех замкнутых форм на \bar{g} , задающих базис кохомологий на \bar{g} .

ТЕОРЕМА 5. Когомологии трехмерных однородных римановых (псевдоримановых) многообразий имеют следующий вид:

римановы:

3.5.1, 3.5.2, 3.5.3

$$C = \{\{\}, \{\}, \{\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\}\}, \quad H = \{\{\}, \{\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

1.3.1, 1.3.5, 1.3.6

$$C = \{\{\}, \{\theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\}\}, \quad H = \{\{\theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

1.3.2

$$C = \{\{\}, \{\theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\}\}, \quad H = \{\{\theta_3\}, \{\}, \{\}\}.$$

1.3.3, 1.3.4, 1.3.7

$$C = \{\{\}, \{\theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\}\}, \quad H = \{\{\}, \{\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

псевдоримановы:

3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, 2.21.1, 2.21.4

$$C = \{\{\}, \{\}, \{\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\}\}, \quad H = \{\{\}, \{\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

1.1.1, 1.1.5

$$C = \{\{\}, \{\theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\}\}, \quad H = \{\{\theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

1.1.2

$$C = \{\{\}, \{\theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\}\}, \quad H = \{\{\theta_3\}, \{\}, \{\}\}.$$

1.1.6, 1.1.7

$$C = \{\{\}, \{\theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\}\}, \quad H = \{\{\}, \{\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

1.8.1, 1.8.3, 1.8.4, 1.8.5

$$C = \{\{\}, \{\theta_3\}, \{-\theta_2 \wedge \theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\}\}, \quad H = \{\{\theta_3\}, \{-\theta_2 \wedge \theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

1.8.2

$$C = \{\{\}, \{\theta_3\}, \{-\theta_2 \wedge \theta_3\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\}\}, \quad H = \{\{\}, \{\}, \{-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3\}\}.$$

Секционная кривизна римановых (псевдоримановых) однородных пространств. Наиболее важной и интересной задачей римановой геометрии в целом является задача о нахождении связей между геометрическими и топологическими характеристиками римановых многообразий и их локальной характеристикой – кривизной. Секционная кривизна римановых однородных пространств вычисляется по формуле

$$K(x, E) = \frac{B(R(Y, Z)Y, Z)}{B(Y, Y)B(Z, Z) - B(Y, Z)^2},$$

где $x \in M$, E – невырожденное плоское сечение в M_x , $\{Y, Z\}$ – базис в E .

Для псевдоримановых однородных пространств понятие секционной кривизны может быть введено уже не для всех двумерных направлений, так как определитель Грамма, стоящий в знаменателе определения секционной кривизны, обращается в нуль для изотропных двумерных направлений (то есть таких, на которых индуцируется вырожденная метрика, если в этом случае обращается в нуль и числитель, то понятие секционной кривизны можно сохранить с помощью продолжения по непрерывности). Выпишем секционные кривизны римановых (псевдоримановых) однородных пространств.

ТЕОРЕМА 6. Секционные кривизны римановых однородных пространств:

Номер	$\frac{B(R(u_1, u_2)u_1, u_2)}{B(u_1, u_1)B(u_2, u_2) - B(u_1, u_2)^2}$	$\frac{B(R(u_1, u_3)u_1, u_3)}{B(u_1, u_1)B(u_3, u_3) - B(u_1, u_3)^2}$	$\frac{B(R(u_2, u_3)u_2, u_3)}{B(u_2, u_2)B(u_3, u_3) - B(u_2, u_3)^2}$
3.5.1	0	0	0
3.5.2	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$
3.5.3	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$
1.3.1	0	0	0
1.3.2	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$
1.3.3	$\frac{3 / 4b + a}{a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$
1.3.4	$\frac{3 / 4b - a}{a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$
1.3.5	$\frac{1}{a}$	0	0
1.3.6	$-\frac{1}{a}$	0	0
1.3.7	$\frac{3}{4}a$	$-\frac{a}{4}$	$-\frac{a}{4}$

Секционные кривизны псевдоримановых однородных пространств:

Номер	$\frac{B(R(u_1, u_2)u_1, u_2)}{B(u_1, u_1)B(u_2, u_2) - B(u_1, u_2)^2}$	$\frac{B(R(u_1, u_3)u_1, u_3)}{B(u_1, u_1)B(u_3, u_3) - B(u_1, u_3)^2}$	$\frac{B(R(u_2, u_3)u_2, u_3)}{B(u_2, u_2)B(u_3, u_3) - B(u_2, u_3)^2}$
3.4.1	0	0	0
3.4.2	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$
3.4.3	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$
2.21.1	0	0	0
2.21.4	$-\frac{1}{4a}$	$-\frac{1}{4a}$	$-\frac{1}{4a}$
1.8.1	0	0	0
1.8.2	$-\frac{1}{4a}$	$-\frac{1}{4a}$	$-\frac{5}{4a}$
1.8.3	0	0	$a / 0 = \infty$
1.8.4	0	0	$1 / 0 = \infty$
1.8.5	0	0	$-1 / 0 = \infty$
1.1.1	0	0	0
1.1.2	$\frac{1}{4a}$	$\frac{1}{4a}$	$\frac{1}{4a}$
1.1.5	$\frac{1}{a}$	0	0
1.1.6	$-\frac{3}{4}a$	$\frac{1}{4}a$	$\frac{1}{4}a$
1.1.7	$\frac{3 / 4 b - a}{-a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$	$-\frac{b}{4a^2}$

Заключение. В работе описано разложение де Рама трехмерных однородных римановых (псевдоримановых) многообразий, а также их алгебры Ли когомологий. Найдена секционная кривизна римановых (псевдоримановых) однородных пространств.

Полученные результаты могут быть использованы для решения различных геометрических задач и открывают широкие возможности для их приложения при исследовании псевдоримановых многообразий в физике и механике. Предложенная методика также может быть использована для изучения однородных римановых многообразий других размерностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Онищик, А.Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А.Л. Онищик. – М.: Физ.-мат. лит., 1995. – 344 с.
2. Kobayashi, S. Foundations of Differential Geometry / S. Kobayashi, K. Nomizu. – New-York–London, 1963. – V. I; 1969. – Vol. II.
3. Mostow, G.D. The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces / G.D. Mostow // Ann. Math., Vol. 52, no. 3, pp. 606–636 (1950).
4. Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces / В. Комраков [et al.], Vol. I–III, Preprints Univ. Oslo, no. 35–37, (1993).
5. Kobayashi, S. Foundations of differential geometry John Wiley and Sons / S. Kobayashi, K. Nomizu. – New York, 1963. – Vol. 1; 1969. – Vol. 2.
6. Nomizu, K. Studies on riemannian homogeneous spaces Nagoya Math / K. Nomizu // J., 1955, 9, pp. 43–56.
7. Kostant, B. On differential geometry and homogeneous spaces / B. Kostant // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 42 (1956), pp. 258–261, 354–357.
8. Lichnerowicz, A. Espaces homogenes riemannien et reductibilite / A. Lichnerowicz // C.R. 242(1954), pp. 1410–1413.
9. Greub, W. Connections, curvature and cohomology / W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone // Cohomology of principal bundles and homogeneous spaces. – N. Y.– L., 1975. – Vol. 3.

Поступила 30.05.2014

DE RHAM DECOMPOSITION AND COHOMOLOGY THREE-DIMENSIONAL HOMOGENEOUS SPACE PSEUDO-RIEMANNIAN MANIFOLDS

N. MOZHEY

In this paper we study three-dimensional homogeneous Riemannian (pseudo-Riemannian) manifolds. We describe de Rham decomposition and cohomology this manifolds. The cohomology allows us to answer the question of when closed forms on a manifold are exact. The local classification of homogeneous spaces is equivalent to the description of effective pairs of Lie algebras. We describe all invariant symmetric nondegenerate bilinear forms on those homogeneous spaces. A complete locally homogeneous Riemannian (pseudo-Riemannian) manifold is locally isometric to a globally homogeneous Riemannian (pseudo-Riemannian) space. Also we describe curvature Riemannian (pseudo-Riemannian) homogeneous spaces. We restrict ourselves to the case of a non-trivial stationary subgroup, all other pseudo-Riemannian homogeneous spaces in this dimension are just Lie groups with a left-invariant metric. We use the algebraic approach for description of manifolds, methods of the theory of Lie groups and Lie algebras and homogeneous spaces.

UDK 517.983

**SOLUTION OF A MULTIDIMENSIONAL INTEGRAL EQUATION OF THE FIRST KIND
WITH THE BESSEL – KLIFFORD FUNCTION IN THE KERNEL
OVER A PYRAMIDAL DOMAIN**

O. SKOROMNIK, T. ALEKSANDROVICH
(Polotsk State University)

The multidimensional integral equation of the first kind with the Bessel – Klifford function in the kernel over the special bounded pyramidal domain in Euclidean space is considered. The interest in such equations is caused by their applications to the problems on the reflection of waves on a rectilinear boundary and on a supersonic flow around spatial corners. Ya. Tamarkin obtained a well-known classical result on the solvability of the Abel integral equation in the space $L_1(a,b)$ of integrable functions on a finite interval $[a,b]$ of the real line. By Tamarkin's method the solution of the investigating equation in the closed form is established, and necessary and sufficient conditions for its solvability in the space of summable functions are given. The results generalize the well know findings for the multi-dimensional Abel type integral equation and the corresponding one-dimensional hypergeometric equations.

1. Introduction. One – dimensional integral equations of the first kind, which generalize the classical Abel integral equation and contain the Gauss hypergeometric function, the Legendre function, the Kummer hypergeometric function and other special functions in their kernels, have been studied by many authors (see a survey of results and a bibliography in [1, Section 39]). Such equations arise in studying boundary value problems for equations of the hyperbolic and mixed type with boundary conditions containing generalized fractional integrals and derivatives [2]. In most papers, methods for studying Abel-type equations with hypergeometric functions, the Legendre function in kernels were based on representing the integral operators of these equations as compositions of fractional integration operators with power weights and using well-known properties of fractional integrals. In this way, sufficient solvability conditions for the integral equations under consideration in certain classes of functions and the solution of such equations in quadratures were obtained [1, sections 35.1, 35.2, 37.1].

The investigation of necessary and sufficient solvability conditions for equations mentioned above is a more difficult task. Ya. Tamarkin obtained a well-known classical result on the solvability of the Abel integral equation in the space $L_1(a,b)$ of integrable functions on a finite interval $[a,b]$ of the real line [1, Theorem 2.1]. In [3], a similar result was obtained for the multidimensional Abel-type integral equations over a special bounded pyramidal domain in Euclidean space. The interest in such equations is caused by their applications to the problems on the reflection of waves on a rectilinear boundary [4, p. 48; 5] and on a supersonic flow around spatial corners [6] (see also [1, Sections 25.1 and 28.4]).

Tamarkin's method [7; 8] was applied to obtain necessary and sufficient solvability conditions in the space of summable functions for a one-dimensional and multidimensional Abel-type integral equations with the Gauss hypergeometric function over a pyramidal domain.

In [9] the closed-form solutions of more general integral equations over pyramidal domains were obtained and necessary and sufficient solvability conditions in the space of summable functions were established. The analogical results were also received for the multidimensional integral equations of the first kind with the Legendre and Kummer functions in the kernels over pyramidal domains in [10; 11].

The target of this paper is to continue the aforementioned study. We give a closed – form solution to an integral equation with the Bessel-Klifford function over a pyramidal domain and investigate its solvability in the space of integrable functions.

2. Preliminary data. We use the following notations (see [1, Section 28.4]). By $N = \{1, 2, \dots\}$ we denote the set of positive integers, $N_0 = N \cup \{0\}$, and R^n – Euclidean n -space. For vectors $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ and $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in R^n$, $x \cdot t = \sum_{k=1}^n x_k t_k$ denotes their scalar product; in particular, $x \cdot 1 = \sum_{k=1}^n x_k$ for $1 = (1, 1, \dots, 1)$. The expression $x > t$ means that $x_1 > t_1, \dots, x_n > t_n$; the nonstrict inequality \geq has a similar meaning. We set $R_+^n = \{x \in R^n : x > 0\}$ and $k = (k_1, \dots, k_n) \in N_0^n = N_0 \times \dots \times N_0$, ($k_i \in N_0$, where $i = 1, 2, \dots, n$) is a multi-index

with $k! = k_1! \cdots k_n!$ and $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$. For $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}_0^n$, and $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$, we set $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x_1)^{\alpha_1} (\partial x_2)^{\alpha_2} \cdots (\partial x_n)^{\alpha_n}}$, $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_n)$.

Let $A = \|a_{jk}\|$ ($a_{jk} \in \mathbb{R}^1$) be an $n \times n$ matrix with the determinant $|A| = \det A$; we denote its vector-rows by $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$ and the elements of the inverse matrix A^{-1} by \tilde{a}_{jk} . Without loss of generality, we assume that $|A| = 1$. Let $A \cdot x = (a_1 \cdot x, a_2 \cdot x, \dots, a_n \cdot x)$ and $(A \cdot x)^\alpha = (a_1 \cdot x)^{\alpha_1} (a_2 \cdot x)^{\alpha_2} \cdots (a_n \cdot x)^{\alpha_n}$. For $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, and $r \in \mathbb{R}^1$, by

$$A_{c,r}(b) = \{t \in \mathbb{R}^n : A \cdot (b - t) \geq 0, c \cdot t + r \geq 0\}, \tag{1}$$

we denote the bounded n -pyramid in \mathbb{R}^n with the vertex at b , the base in the hyperplane $c \cdot t + r = 0$, and the lateral faces in the hyperplanes $a_j \cdot (b - t) = 0$ ($j = 1, \dots, n$). In particular, if $A = E = \|\delta_{jk}\|$ is the identity matrix, $c = (1, 1, \dots, 1)$, and $r = 0$, then $E_1(b)$ is the model pyramid

$$E_1(b) = \{t \in \mathbb{R}^n : t \leq b, 1 \cdot t \geq 0\}. \tag{2}$$

As it is known [1, Lemma 28.2], the pyramid (1) is bounded if and only if $A^{-1}c \cdot b > 0$ (for the pyramid (2) respectively $A^{-1}c > 0$).

For $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ and $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ we introduce the function

$$\bar{J}_v[x] = \prod_{j=1}^n \bar{J}_{v_j}[x_j], \tag{3}$$

which is the product of the Bessel – Klifford functions $\bar{J}_v(z)$ defined by the formula [1, § 37.1]

$$\bar{J}_v(z) = \Gamma(v+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{-v} J_v(z), \quad |z| < \infty, \tag{4}$$

where $J_v(z)$ is the Bessel function of the first kind [1, § 1.3; 13, chapters 9, 10]

$$J_v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+v}}{\Gamma(v+k+1)k!}. \tag{5}$$

The Abel-type integral equation under consideration has the form

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{A_{c,r}(x)} (A \cdot (x - t))^{\alpha-1} \bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}}[A \cdot \lambda(x-t)] f(t) dt = g(x), \quad x \in A_{c,r}(b), \tag{6}$$

where $A_{c,r}(b)$ ($c, b \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^1$) is a pyramid of the form (1); $x, t, \alpha, \lambda \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 1$, and $\bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}}[A \cdot \lambda(x-t)]$ is a function of the form (3). This equation generalizes the proper one-dimensional integral equation (see [1, § 37.1]). We need the integral formula of the convolution type for the Bessel function (5) [12, 7.7(6)]:

$$\int_0^t \tau^\mu J_\mu(\tau) (t-\tau)^\nu J_\nu(t-\tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)t^{v+\mu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(v+\mu+1)} J_{v+\mu+\frac{1}{2}}(t), \quad \operatorname{Re}(\mu) > -\frac{1}{2}, \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}, \tag{7}$$

and the following auxiliary assertion [1, Lemma 28.3].

Lemma 1. If a function $f(t, \tau)$ on $A_{\mathbf{c}}(\mathbf{b}) \times A_{\mathbf{c}}(\mathbf{b})$ is measurable, then the formula

$$\int_{A_{\mathbf{c}}(\mathbf{b})} dt \int_{A_{\mathbf{c}}(\mathbf{t})} f(t, \tau) d\tau = \int_{A_{\mathbf{c}}(\mathbf{b})} d\tau \int_{\sigma(\mathbf{b}, \tau)} f(t, \tau) dt, \tag{8}$$

for changing the order of integration is valid, where

$$\sigma(\mathbf{b}, \tau) = \{t \in \mathbb{R}^n : A \cdot \tau \leq A \cdot t \leq A \cdot \mathbf{b}\}, \tag{9}$$

provided that one of the multiple integrals in (8) converges absolutely.

3. Solution in the closed-form. First, we give a formal solution of the Eq. (6). Replacing in (6) \mathbf{x} by \mathbf{t} and \mathbf{t} by \mathbf{u} , multiplying both sides of the resulting equality by $(A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t}))^{-\alpha} \bar{J}_{\frac{\alpha}{2}} [A \cdot \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{t})]$, integrating over the pyramid $A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})$, we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t}))^{-\alpha} \bar{J}_{\frac{\alpha}{2}} [A \cdot \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{t})] dt \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{t})} (A \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{u}))^{\alpha-1} \bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}} [A \cdot \lambda(\mathbf{t} - \mathbf{u})] f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \\ & = \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t}))^{-\alpha} \bar{J}_{\frac{\alpha}{2}} [A \cdot \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{t})] g(\mathbf{t}) dt, \quad \mathbf{x} \in A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}). \end{aligned} \tag{10}$$

Changing the order of integration in the left side of the (10) according to the formula (8), we obtain:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \int_{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u})} (A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t}))^{-\alpha} (A \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{u}))^{\alpha-1} \cdot \bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}} [A \cdot \lambda(\mathbf{t} - \mathbf{u})] \bar{J}_{\frac{\alpha}{2}} [A \cdot \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{t})] dt = \\ & = \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t}))^{-\alpha} \bar{J}_{\frac{\alpha}{2}} [A \cdot \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{t})] g(\mathbf{t}) dt, \end{aligned} \tag{11}$$

where $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \{t \in \mathbb{R}^n : A \cdot \mathbf{u} \leq A \cdot t \leq A \cdot \mathbf{x}\}$.

To calculate the inner integral in the left side of the (11), we introduce the new variables

$$s_j = \mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{t}), \quad \mathbf{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn}) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Using the formula (4) for the Bessel – Klifford function $\bar{J}_{\nu}[z]$ and the formula (7) for the inner integral in (11) we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u})} (A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t}))^{-\alpha} (A \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{u}))^{\alpha-1} \bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}} [A \cdot \lambda(\mathbf{t} - \mathbf{u})] \bar{J}_{\frac{\alpha}{2}} [A \cdot \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{t})] dt = \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \prod_{j=1}^n \left[\int_0^{\mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{u})} s_j^{-\alpha_j} \bar{J}_{\frac{\alpha}{2}} [s_j] (\mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{u}) - s_j)^{\alpha_j-1} \bar{J}_{\frac{\alpha_j-1}{2}} [\mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{u}) - s_j] ds_j \right] = \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \prod_{j=1}^n \left[\Gamma\left(1 - \frac{\alpha_j}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha_j + 1}{2}\right) \int_0^{\mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{u})} s_j^{-\alpha_j} \left(\frac{s_j}{2}\right)^{\frac{\alpha_j}{2}} J_{\frac{\alpha_j}{2}}(s_j) \times \right. \\ & \left. \times (\mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{u}) - s_j)^{\alpha_j-1} \left(\frac{\mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{u}) - s_j}{2}\right)^{\frac{1-\alpha_j}{2}} J_{\frac{\alpha_j-1}{2}}(\mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{u}) - s_j) ds_j \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{2}\Gamma(\alpha)} \prod_{j=1}^n \left[a_j \cdot \lambda(x-u) \int_0^{\frac{\alpha_j}{2}} s_j^{\frac{\alpha_j}{2}-1} J_{\frac{\alpha_j}{2}}(s_j) \cdot (a_j \cdot \lambda(x-u) - s_j)^{\frac{\alpha_j-1}{2}} J_{\frac{\alpha_j-1}{2}}(a_j \cdot \lambda(x-u) - s_j) ds_j \right] = \\
 &= \frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{2}\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot t^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \cdot J_{\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}(A \cdot \lambda(x-u)) = \\
 &= \frac{\pi\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{2\pi\Gamma(\alpha)\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \cdot J_0(A \cdot \lambda(x-u)) = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{2\Gamma(\alpha)\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \cdot J_0(A \cdot \lambda(x-u)),
 \end{aligned}$$

where $2 = (2, \dots, 2)$, $\pi = (\pi, \dots, \pi)$.

Thus, the equality (11) takes the form:

$$\int_{A_{c,r}(x)} J_0(A \cdot \lambda(x-t)) f(t) dt = f_{A_{c,r}}^{\lambda,\alpha}(x), \tag{12}$$

or

$$\int_{A_{c,r}(x)} f^*(t) dt = f_{A_{c,r}}^{\lambda,\alpha}(x),$$

where

$$f^*(t) = J_0(A \cdot \lambda(x-t)) f(t),$$

$$f_{A_{c,r}}^{\lambda,\alpha}(x) = \frac{2\Gamma(\alpha)\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \int_{A_{c,r}(x)} (A \cdot (x-t))^{-\alpha} \bar{J}_{\frac{\alpha}{2}}[A \cdot \lambda(x-t)] g(t) dt. \tag{13}$$

Making the change of variables

$$x + \frac{r}{nc} = A^{-1} \cdot \frac{y}{d}, \quad t + \frac{r}{nc} = A^{-1} \cdot \left(\frac{\tau}{d}\right), \tag{14}$$

where $\frac{y}{d} = \left(\frac{y_1}{d_1}, \dots, \frac{y_n}{d_n}\right) \in \mathbb{R}^n$ and $d = A^{-1} \cdot c$, we represent (12) in the form

$$\int_{E_1(y)} \psi(\tau) d\tau = \varphi(y), \tag{15}$$

where $E_1(y)$ is the model pyramid (2) and

$$\psi(\tau) = f^* \left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\tau}{d}\right) - \frac{r}{nc} \right), \quad \varphi(y) = f_{A_{c,r}}^{\lambda,\alpha} \left(A^{-1} \cdot \left(\frac{y}{d}\right) - \frac{r}{nc} \right) \prod_{j=1}^n d_j.$$

To invert Eq. (15), we rewrite this equation in the form

$$\int_{-(y_1+\dots+y_{n-1})}^{y_n} d\tau_n \int_{-(y_1+\dots+y_{n-2}+\tau_n)}^{y_{n-1}} d\tau_{n-1} \dots \int_{-(\tau_2+\dots+\tau_n)}^{y_1} \psi(\tau) d\tau_1 = \varphi(y). \tag{16}$$

Successively differentiating with respect to y_n, y_{n-1}, \dots, y_1 , we obtain

$$\psi(y) = \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y) = \frac{\partial}{\partial y_1} \dots \frac{\partial}{\partial y_n} \varphi(y).$$

Returning to the variable $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} - \frac{\mathbf{r}}{n\mathbf{c}}$ in (14) and taking into account the equalities

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{a}_{jk}}{d_k} \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (k=1, \dots, n), \tag{17}$$

where the \tilde{a}_{jk} ($j, k=1, \dots, n$) are the elements of the inverse matrix A^{-1} , we arrive at the following formula for the solution of Eq. (15) and taking into consideration that $J_0(A \cdot \lambda(\mathbf{x}-\mathbf{x})) = J_0(0) = 1$, we come at the following form of the equation solution (6):

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left\{ \frac{2 \Gamma(\alpha) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{t}))^{-\alpha} \bar{J}_{\frac{\alpha}{2}} [A \cdot \lambda(\mathbf{x}-\mathbf{t})] g(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right\}. \tag{18}$$

Thus, we have proved that if the Eq. (6) is solvable, then its solution has the form (18).

4. Necessary and sufficient solvability conditions. Let us prove the necessary and sufficient solvability conditions for the Eq. (6) in the space $L_1(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}))$ defined by

$$L_1(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})) = \left\{ f(\mathbf{x}) : \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} < \infty \right\}. \tag{19}$$

Consider the space

$$I_{A_{\mathbf{c},r}}(L_1) = \left\{ \varphi : \varphi(\mathbf{x}) = \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x}), A \cdot (\mathbf{b}-\mathbf{t}) \geq A \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{t})} h(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, h(\mathbf{t}) \in L_1(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})) \right\}. \tag{20}$$

The space $I_{A_{\mathbf{c},r}}(L_1)$ plays the same role for the Eq. (6) as the space $AC([a, b])$ of absolutely continuous functions plays for the classical Abel integral equation [1, Section 2.2]. Note that if $\varphi \in I_{A_{\mathbf{c},r}}(L_1)$, then, almost everywhere on $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$, this function has partial derivatives, and

$$\prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \varphi(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}).$$

In particular, if $A = E$ is the identity matrix, $\mathbf{c} = \mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, and $r = 0$, then relations (19)–(20), respectively take the forms

$$L_1(E_1(\mathbf{b})) = \left\{ f(\mathbf{x}) : \int_{E_1(\mathbf{x})} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} < \infty \right\},$$

$$I_{E_1}(L_1) = \left\{ \varphi : \varphi(\mathbf{x}) = \int_{E_1(\mathbf{x}), (\mathbf{b}-\mathbf{t}) \geq (\mathbf{x}-\mathbf{t})} h(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, h(\mathbf{t}) \in L_1(E_1(\mathbf{b})) \right\},$$

where

$$h(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} \varphi(\mathbf{x}).$$

Tamarkin’s classical theorem on the solvability of the one-dimensional Abel integral equation in $L_1(a, b)$ has the following analogue.

THEOREM 1. *The multidimensional Abel-type integral equation (6) $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}^n$ ($0 < \alpha < 1$) is solvable in the space $L_1(A_{c,r}(b))$ if and only if*

$$f_{A_{c,r}}^{\lambda,\alpha}(x) = \frac{2 \Gamma(\alpha) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \int_{A_{c,r}(x)} (A \cdot (x-t))^{-\alpha} \bar{J}_{\frac{\alpha}{2}} [A \cdot \lambda(x-t)] g(t) dt \in I_{A_{c,r}}(L_1), \quad (21)$$

$$\left[f_{A_{c,r}}^{\lambda,\alpha}(x) \right]_{c \cdot x+r=0} = \left[\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{A_{c,r}}^{\lambda,\alpha}(x) \right]_{c \cdot x+r=0} = \dots = \left[\prod_{k=2}^n \sum_{j=1}^n \left(\tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f_{A_{c,r}}^{\lambda,\alpha}(x) \right]_{c \cdot x+r=0} = 0. \quad (22)$$

Under these conditions, the Eq.(6) is uniquely solvable in $L_1(A_{c,r}(b))$ and its solution is given by (18).

Proof. In the model case $A_{c,r}(b) = E_1(b)$, the required assertion follows from (15) and (16). In the case of an arbitrary pyramid $A_{c,r}(b)$, this assertion is obtained from (15) and (16) by making the change of variables (14) and taking into account (17).

Corollary 1. *The multidimensional Abel-type model integral equation*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{E_1(x)} (x-t)^{\alpha-1} \bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}} [\lambda(x-t)] f(t) dt = g(x), \quad x \in E_1(b), \quad (23)$$

$\lambda, \alpha \in \mathbb{R}^n$ ($0 < \alpha < 1$), *is solvable in the space $L_1(E_1(b))$ if and only if*

$$f_{E_1}^{\lambda,\alpha}(x) = \frac{2 \Gamma(\alpha) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \int_{E_1(x)} (x-t)^{-\alpha} \bar{J}_{\frac{\alpha}{2}} [\lambda(x-t)] g(t) dt \in I_{E_1}(L_1)$$

and

$$\left[f_{E_1}^{\lambda,\alpha}(x) \right]_{1 \cdot x=0} = \left[\frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}^{\lambda,\alpha}(x) \right]_{1 \cdot x=0} = \dots = \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}^{\lambda,\alpha}(x) \right]_{1 \cdot x=0} = 0.$$

Under these conditions, Eq. (23) is uniquely solvable in $L_1(E_1(b))$, and its solution is given by

$$f(x) = \frac{\partial}{\partial x} f_{E_1}^{\lambda,\alpha}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{2 \Gamma(\alpha) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \int_{E_1(x)} (x-t)^{-\alpha} \bar{J}_{\frac{\alpha}{2}} [\lambda(x-t)] g(t) dt \right\}.$$

REFERENCES

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Репин, О.А. Краевые задачи со сдвигом для уравнений гиперболического и смешанного типов / О.А. Репин. – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1992. – 183 с.
3. Kilbas, A.A. On integrable solution of a multidimensional Abel – type integral equation / A.A. Kilbas, M. Saigo, H. Takushima // Fukuoka Univ. Sci. Rep. – 1995. – Vol. 25, № 1. – P. 1–9.
4. Михлин, С.Г. Лекции по интегральным уравнениям / С.Г. Михлин. – М.: Физматгиз, 1959. – 232 с.
5. Преображенский, Н.Г. Абелева инверсия в физических задачах: Инверсия Абеля и ее обобщения / Н.Г. Преображенский. – Новосибирск: Ин-т. теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – С. 6–24.

6. Федосов, В.П. О некоторых обобщенных уравнениях Абеля / В.П. Федосов. – Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – 106 с.
7. Решение многомерных гипергеометрических уравнений типа Абеля / А.А. Килбас [и др.] // Докл. НАН Беларуси. – 1995. – Т. 43, № 2. – С. 23–26.
8. Solvability of some Abel – type integral equations involving the Gauss hypergeometry Function as kernels in the space of summable functions / К.Л. Raina [et al.] // ANZIAM J. – 2001. – Vol. 43, № 2. – P. 291–320.
9. Килбас, А.А. Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области / А.А. Килбас, О.В. Скоромник // Труды Ин-та математики / НАН Беларуси, Ин-т математики. – Минск, 2009. – Т. 17, № 1. – С. 71–78
10. Килбас, А.А. Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Лежандра в ядре по пирамидальной области / А.А. Килбас, О.В. Скоромник // Докл. Акад. наук (Российская Академия наук). – 2009. – Т. 429, № 4. – С. 442–446.
11. Скоромник, О.В. Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Куммера в ядре по пирамидальной области / О.В. Скоромник, С.А. Шлапаков // Веснік Віцебск. дзярж. ун-та. – 2014. – № 1. – С. 12–18.
12. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973. – Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – 296 с.
13. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 831 с.

Поступила 02.03.2015

РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ФУНКЦИЕЙ БЕССЕЛЯ – КЛИФФОРДА В ЯДРЕ ПО ПИРАМИДАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. СКОРОМНИК, Т.А. АЛЕКСАНДРОВИЧ
(Полоцкий государственный университет)

Рассматривается многомерное интегральное уравнение первого рода с функцией Бесселя – Клиффорда в ядре по ограниченной пирамидальной области многомерного евклидова пространства специального вида. Интерес к исследованию таких уравнений вызван их приложениями в задачах исследования отражения волн от прямолинейной границы и в задачах сверхзвукового обтекания пространственных углов. Хорошо известен классический результат Я. Тамаркина о разрешимости интегрального уравнения Абеля в пространстве $L_1(a,b)$ суммируемых функций на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси. Следуя методике Я. Тамаркина, устанавливается формула решения исследуемого уравнения в замкнутой форме, даются необходимые и достаточные условия его разрешимости в пространстве суммируемых функций. Доказанные утверждения обобщают результаты, полученные ранее для многомерного уравнения типа Абеля и для соответствующих одномерных гипергеометрических уравнений.

УДК 517.544, 517.548

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О СКАЧКЕ С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ И СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

*канд. физ.-мат. наук Т.М. УРБАНОВИЧ, С.В. БЕЛЯЙ
(Полоцкий государственный университет)*

Исследуется краевая задача о скачке, правая часть которой представляет собой произведение логарифмических множителей, а также краевая задача о скачке, правая часть которой является произведением степенных и логарифмических множителей. Для решения задачи применяется новый подход – метод формального умножения гиперфункций.

1. Краевая задача о скачке с логарифмической правой частью

Рассмотрим в классе гиперфункций Сато $H.F.\{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ краевую задачу Римана о скачке:

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \prod_{k=1}^n \ln(x - b_k), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (1)$$

где b_k точки, принадлежащие действительной прямой, $b_1 < b_2 < \dots < b_n, k = \overline{1, n}$.

Начнем рассматривать в классе гиперфункций Сато простейшую неоднородную краевую задачу Римана (1) с частного случая $n = 1$, то есть решим в классе гиперфункций задачу

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \ln(x - b), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2)$$

Для того чтобы решить задачу (2), надо реинтерпретировать обыкновенную функцию $f_b(x) = \ln(x - b)$ в виде гиперфункции.

Воспользуемся схемой Юрова (см. [1–6]) для определения гиперфункции $H.F.\{F_{1,b}^+(z), F_{1,b}^-(z)\}$, соответствующей обыкновенной функции $f_b(x) = \ln(x - b), b < x < +\infty$.

Приведем, следуя [7], некоторые сведения из теории ортогональных многочленов. Напомним, что многочлены Бернулли определяются равенством

$$B(\omega) = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k \omega^{n-k}, \quad (3)$$

в котором C_n^k – биномиальные коэффициенты, B_k – числа Бернулли:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -0,5, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad \dots \quad (4)$$

Для удобства (см. [7]) вводятся многочлены:

$$\tilde{B}_n(\omega) = B_n(\omega) - B_n, \quad (5)$$

для которых $\tilde{B}_n(0) = 0$.

Лемма 1. *Гиперфункция $H.F.\{F_{1,b}^+(z), F_{1,b}^-(z)\}$, соответствующая обыкновенной функции $f_b(x) = \ln(x - b), b < x < +\infty$, имеет вид*

$$H.F.\{F_{1,b}^+(z), F_{1,b}^-(z)\} = H.F.\left\{\left[-\pi i \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln^*(z-b)}{2\pi i} \right] \right]_+, \left[-\pi i \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln^*(z-b)}{2\pi i} \right] \right]_- \right\}, \quad (6)$$

где $\ln^*(z-b)$ – фиксированная непрерывная ветвь многозначной функции $f_b(x) = \ln(x-b)$ с разрезом $b < x < +\infty$; контурное значение $\ln(x-b)$, которое совпадает с граничным значением $\ln^*(z-b)$ на верхнем берегу разреза; $[\dots]_+, [\dots]_-$ означает в (6) соответственно верхнюю и нижнюю компоненту гиперфункции, соответствующей обыкновенной функции $f_b(x) = \ln(x-b), b < x < +\infty$.

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить, что разность предельных значений функции $F_{1,b}(z) = -\pi i \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln^*(z-b)}{2\pi i} \right]$ при $b < x < +\infty$ равна $\ln(x-b)$.

Найдем предельные значения функции $F_{1,b}(z)$:

$$F_{1,b}^+(x) = -\pi i \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln(x-b)}{2\pi i} \right], \quad F_{1,b}^-(x) = -\pi i \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln(x-b)}{2\pi i} + 1 \right].$$

Выполнив преобразования (см. (3) – (5)), получим

$$F_{1,b}^+(x) = -\pi i \left(-\frac{\ln^2(x-b)}{4\pi^2} - \frac{\ln(x-b)}{2\pi i} \right), \quad F_{1,b}^-(x) = -\pi i \left(-\frac{\ln^2(x-b)}{4\pi^2} + \frac{\ln(x-b)}{2\pi i} \right).$$

Отсюда

$$F_{1,b}^+(x) - F_{1,b}^-(x) = \ln(x-b), \quad b < x < +\infty,$$

и

$$F_{1,b}^+(x) - F_{1,b}^-(x) = 0, \quad -\infty < x < b,$$

что завершает доказательство.

Аналогично можно определить гиперфункцию, соответствующую обыкновенной функции $f_b(x) = \ln(x-b)$, $-\infty < x < b$.

Лемма 2. Гиперфункция $H.F.\{F_{2,b}^+(z), F_{2,b}^-(z)\}$, соответствующая обыкновенной функции $f_b(x) = \ln(x-b)$, $-\infty < x < b$, имеет вид

$$H.F.\{F_{2,b}^+(z), F_{2,b}^-(z)\} = H.F.\left\{ \left[\pi i \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln^{**}(b-z)}{2\pi i} \right] \right]_+, \left[\pi i \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln^{**}(b-z)}{2\pi i} \right] \right]_- \right\}, \quad (7)$$

где $\ln^{**}(b-z)$ – фиксированная непрерывная ветвь многозначной функции $f_b(x) = \ln(b-z)$ с разрезом $-\infty < x < b$, причем контурное значение $\ln(x-b) + 2\pi i$ выбранной ветви $\ln^{**}(b-z)$ совпадает с граничным значением её на верхнем берегу разреза; $[...]_+, [...]_-$ означают в (7) соответственно верхнюю и нижнюю компоненту гиперфункции, соответствующей обыкновенной функции $f_b(x) = \ln(x-b)$, $-\infty < x < b$.

Доказательство. Найдем предельные значения функции $F_{2,b}(z) = \pi i \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln^{**}(b-z)}{2\pi i} \right]$:

$$F_{2,b}^+(x) = \pi i \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln(x-b)}{2\pi i} + 1 \right], \quad F_{2,b}^-(x) = \pi i \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln(x-b)}{2\pi i} \right].$$

Выполним преобразования:

$$F_{2,b}^+(x) = \pi i \left(-\frac{\ln^2(x-b)}{4\pi^2} + \frac{\ln(x-b)}{2\pi i} \right), \quad F_{2,b}^-(x) = \pi i \left(-\frac{\ln^2(x-b)}{4\pi^2} - \frac{\ln(x-b)}{2\pi i} \right).$$

Разность предельных значений равна

$$F_{2,b}^+(x) - F_{2,b}^-(x) = \ln(x-b), \quad -\infty < x < b,$$

и

$$F_{2,b}^+(x) - F_{2,b}^-(x) = 0, \quad b < x < +\infty,$$

что завершает доказательство.

ТЕОРЕМА 1. Решение задачи (2) в классе гиперфункций Сато имеет вид

$$\begin{aligned} H.F.\{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\} &= H.F.\{F_{1,b}^+(z) + F_{2,b}^+(z), F_{1,b}^-(z) + F_{2,b}^-(z)\} = \\ &= H.F.\left\{ \left[\pi i \left[\tilde{B}_2 \left[\frac{\ln^{**}(b-z)}{2\pi i} \right] - \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln^*(z-b)}{2\pi i} \right] \right] \right]_+, \left[\pi i \left[\tilde{B}_2 \left[\frac{\ln^{**}(b-z)}{2\pi i} \right] - \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln^*(z-b)}{2\pi i} \right] \right] \right]_- \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1 базируются на утверждениях лемм 1 и 2.

Рассмотрим теперь задачу (1) в случае n логарифмических множителей в правой части. Применим к её решению метод формального произведения гиперфункций

$$f_{b_k}(x) = H.F.\{ F_{1,b_k}^+(z) + F_{2,b_k}^+(z), F_{1,b_k}^-(z) + F_{2,b_k}^-(z) \}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Формальное произведение построим следующим образом:

$$\prod_{k=1}^n f_{b_k}(x) = H.F.\{V_{b_1, b_2, \dots, b_n}^+(z), V_{b_1, b_2, \dots, b_n}^-(z)\},$$

где

$$\begin{aligned} V_{b_1, b_2, \dots, b_n}^+(z) &= \prod_{k=1}^n F_{1, b_k}^+(z) + F_{2, b_n}^+(z) \prod_{k=1}^{n-1} F_{1, b_k}^+(z) + F_{2, b_{n-1}}^+(z) F_{2, b_n}^+(z) * \\ &* \prod_{k=1}^{n-2} F_{1, b_k}^+(z) + \dots + F_{1, b_1}^+(z) \prod_{k=2}^n F_{2, b_k}^+(z) + \prod_{k=1}^n F_{2, b_k}^+(z), \\ V_{b_1, b_2, \dots, b_n}^-(z) &= \prod_{k=1}^n F_{1, b_k}^-(z) + F_{2, b_n}^-(z) \prod_{k=1}^{n-1} F_{1, b_k}^-(z) + F_{2, b_{n-1}}^-(z) F_{2, b_n}^-(z) * \\ &* \prod_{k=1}^{n-2} F_{1, b_k}^-(z) + \dots + F_{1, b_1}^-(z) \prod_{k=2}^n F_{2, b_k}^-(z) + \prod_{k=1}^n F_{2, b_k}^-(z). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Решение задачи (1) в классе гиперфункций Сато имеет вид:

$$H.F.\{\Phi^+(x) - \Phi^-(x)\} = H.F.\{V_{b_1, b_2, \dots, b_n}^+(z), V_{b_1, b_2, \dots, b_n}^-(z)\}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы проверяется непосредственно.

При $n = 1$ теорема совпадает с теоремой 1.

Для $n = 2$ равенство (1) проверяется непосредственно, для чего находится разность предельных значений

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{z \rightarrow x, \\ \operatorname{Im} z > 0 \\ x \in R \setminus \{b_1, b_2\}}} V_{b_1, b_2}^+ - \lim_{\substack{z \rightarrow x, \\ \operatorname{Im} z < 0 \\ x \in R \setminus \{b_1, b_2\}}} V_{b_1, b_2}^- &= (F_{1, b_1}^+(x) F_{1, b_2}^+(x) + F_{1, b_1}^+(x) F_{2, b_2}^+(x) + F_{2, b_1}^+(x) F_{1, b_2}^+(x) + \\ &+ F_{2, b_1}^+(x) F_{2, b_2}^+(x)) - (F_{1, b_1}^-(x) F_{1, b_2}^-(x) + F_{1, b_1}^-(x) F_{2, b_2}^-(x) + F_{2, b_1}^-(x) F_{1, b_2}^-(x) + \\ &+ F_{2, b_1}^-(x) F_{2, b_2}^-(x)) \end{aligned}$$

в тех точках, в которых таковая существует.

Таким образом, можно построить решение задачи (1) при $n = 2$ по известным решениям задач:

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \ln(x - b_1), \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \ln(x - b_2), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Этим же способом доказывается справедливость утверждения теоремы для $n \geq 3$.

Теорема доказана.

2. Краевая задача о скачке со степенно-логарифмической правой частью

Рассмотрим в классе гиперфункций $H.F.\{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ решение краевой задачи Римана о скачке:

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \prod_{j=1}^m (x - a_j)^{\alpha_j} \cdot \prod_{k=1}^n \ln(x - b_k), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{8}$$

где a_j, b_k точки, принадлежащие действительной прямой, $a_1 < a_2 < \dots < a_m$, $b_1 < b_2 < \dots < b_n$, $\alpha_j \in R$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n}$.

Начнем рассматривать в классе гиперфункций простейшую неоднородную задачу Римана (8) с частного случая $m = 1$, $n = 1$, то есть решим в классе гиперфункций следующую задачу:

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = (x - a)^\alpha \cdot \ln(x - b), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{9}$$

где $\alpha \in R$.

Для решения задачи (9) применим метод формального произведения гиперфункций:

$$f_{a, \alpha}(x) = H.F.\{F_{1, a, \alpha}^+(z) + F_{2, a, \alpha}^+(z), F_{1, a, \alpha}^-(z) + F_{2, a, \alpha}^-(z)\}$$

$$f_b(x) = H.F.\{F_{1, b}^+(z) + F_{2, b}^+(z), F_{1, b}^-(z) + F_{2, b}^-(z)\}.$$

Формальное произведение построим следующим образом:

$$f_{a,\alpha}(x) \circ f_b(x) = H.F. \{ F_{1,a,\alpha}^+(z) F_{1,b}^+(z) + F_{1,a,\alpha}^+(z) F_{2,b}^+(z) + F_{2,a,\alpha}^+(z) F_{1,b}^+(z) + F_{2,a,\alpha}^+(z) F_{2,b}^+(z), \\ F_{1,a,\alpha}^-(z) F_{1,b}^-(z) + F_{1,a,\alpha}^-(z) F_{2,b}^-(z) + F_{2,a,\alpha}^-(z) F_{1,b}^-(z) + F_{2,a,\alpha}^-(z) F_{2,b}^-(z) \},$$

где

$$F_{1,a,\alpha}(z) = -\frac{i(-1)^\alpha}{2 \sin \pi \alpha} (z-a)^\alpha,$$

$$F_{2,a,\alpha}(z) = \frac{i}{2 \sin \pi \alpha} (a-z)^\alpha,$$

$$F_{1,b}(z) = -\pi i \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln^*(z-b)}{2\pi i} \right],$$

$$F_{2,b}(z) = \pi i \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln^*(b-z)}{2\pi i} \right].$$

Найдем предельные значения этих функций:

$$F_{1,a,\alpha}^+(x) = \begin{cases} -\frac{i(-1)^\alpha}{2 \sin \pi \alpha} (a-x)^\alpha e^{i\pi\alpha}, & x < a, \\ -\frac{i(-1)^\alpha}{2 \sin \pi \alpha} (a-x)^\alpha, & x > a; \end{cases}$$

$$F_{1,a,\alpha}^-(x) = \begin{cases} -\frac{i(-1)^\alpha}{2 \sin \pi \alpha} (a-x)^\alpha e^{-i\pi\alpha}, & x < a, \\ -\frac{i(-1)^\alpha}{2 \sin \pi \alpha} (a-x)^\alpha, & x > a; \end{cases}$$

$$F_{2,a,\alpha}^+(x) = \begin{cases} \frac{i}{2 \sin \pi \alpha} (a-x)^\alpha, & x < a, \\ \frac{i}{2 \sin \pi \alpha} (a-x)^\alpha e^{-i\pi\alpha}, & x > a; \end{cases}$$

$$F_{2,a,\alpha}^-(x) = \begin{cases} \frac{i}{2 \sin \pi \alpha} (a-x)^\alpha, & x < a, \\ \frac{i}{2 \sin \pi \alpha} (a-x)^\alpha e^{i\pi\alpha}, & x > a; \end{cases}$$

$$F_{1,b}^+(x) = \begin{cases} -\pi i \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln(x-b)}{2\pi i} \right], & x < b, \\ -\pi i \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln(x-b)}{2\pi i} \right], & x > b; \end{cases}$$

$$F_{1,b}^-(x) = \begin{cases} -\pi i \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln(x-b)}{2\pi i} \right], & x < b, \\ -\pi i \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln(x-b)}{2\pi i} + 1 \right], & x > b; \end{cases}$$

$$F_{2,b}^+(x) = \begin{cases} \pi i \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln(x-b)}{2\pi i} + 1 \right], & x < b, \\ \pi i \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln(x-b)}{2\pi i} + 1 \right], & x > b; \end{cases}$$

$$F_{2,b}^-(x) = \begin{cases} \pi i \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln(x-b)}{2\pi i} \right], & x < b, \\ \pi i \tilde{B}_2 \left[\frac{\ln(x-b)}{2\pi i} + 1 \right], & x > b. \end{cases}$$

Построенное формальное произведение гиперфункций решает задачу (9). Для того чтобы убедиться в этом, найдем разность предельных значений

$$(F_{1,a,\alpha}^+(z)F_{1,b}^+(z) + F_{1,a,\alpha}^+(z)F_{2,b}^+(z) + F_{2,a,\alpha}^+(z)F_{1,b}^+(z) + F_{2,a,\alpha}^+(z)F_{2,b}^+(z)) - (F_{1,a,\alpha}^-(z)F_{1,b}^-(z) + F_{1,a,\alpha}^-(z)F_{2,b}^-(z) + F_{2,a,\alpha}^-(z)F_{1,b}^-(z) + F_{2,a,\alpha}^-(z)F_{2,b}^-(z))$$

в тех точках, в которых таковая существует.

Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Решение задачи (9) в классе гиперфункций Сато имеет вид:*

$$\{\Phi^+(x), \Phi^-(x)\} = H.F. \{F_{1,a,\alpha}^+(z)F_{1,b}^+(z) + F_{1,a,\alpha}^+(z)F_{2,b}^+(z) + F_{2,a,\alpha}^+(z)F_{1,b}^+(z) + F_{2,a,\alpha}^+(z)F_{2,b}^+(z), F_{1,a,\alpha}^-(z)F_{1,b}^-(z) + F_{1,a,\alpha}^-(z)F_{2,b}^-(z) + F_{2,a,\alpha}^-(z)F_{1,b}^-(z) + F_{2,a,\alpha}^-(z)F_{2,b}^-(z)\}.$$

Рассмотрим теперь задачу (8) в случае m степенных и n логарифмических множителей в правой части. Применим к её решению метод формального произведения гиперфункций:

$$f_{a_j, \alpha_j}(x) = H.F. \{F_{1,a_j, \alpha_j}^+(z) + F_{2,a_j, \alpha_j}^+(z), F_{1,a_j, \alpha_j}^-(z) + F_{2,a_j, \alpha_j}^-(z)\}, j = \overline{1, m}$$

и

$$f_{b_k}(x) = H.F. \{F_{1,b_k}^+ + F_{2,b_k}^+, F_{1,b_k}^- + F_{2,b_k}^-\}, k = \overline{1, n}.$$

Формальное произведение построим следующим образом:

$$\prod_{j=1}^m f_{a_j, \alpha_j}(x) \circ \prod_{k=1}^n f_{b_k}(x) = H.F. \{W_{a_1, a_2, \dots, a_m; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; b_1, b_2, \dots, b_n}^+(z), W_{a_1, a_2, \dots, a_m; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; b_1, b_2, \dots, b_n}^-(z)\}$$

где

$$W_{a_1, a_2, \dots, a_m; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; b_1, b_2, \dots, b_n}^+(z) = U_{a_1, a_2, \dots, a_m; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}^+(z) V_{b_1, b_2, \dots, b_n}^+(z),$$

$$W_{a_1, a_2, \dots, a_m; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; b_1, b_2, \dots, b_n}^-(z) = U_{a_1, a_2, \dots, a_m; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}^-(z) V_{b_1, b_2, \dots, b_n}^-(z).$$

ТЕОРЕМА 4. *Решение задачи (8) в классе гиперфункций Сато имеет вид:*

$$\{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\} = \{W_{a_1, a_2, \dots, a_m; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; b_1, b_2, \dots, b_n}^+(z), W_{a_1, a_2, \dots, a_m; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; b_1, b_2, \dots, b_n}^-(z)\}$$

Доказательство. Утверждение теоремы проверяется непосредственно.

При $m = 1, n = 1$ теорема совпадает с теоремой 3.

Для $m = 1, n = 2$ равенство (8) проверяется непосредственно, для чего находится разность предельных значений

$$\lim_{\substack{z \rightarrow x, \\ \text{Im } z > 0, \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, b_1, b_2\}}} W_{a_1; \alpha_1; b_1, b_2}^+(z) - \lim_{\substack{z \rightarrow x, \\ \text{Im } z < 0, \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, b_1, b_2\}}} W_{a_1; \alpha_1; b_1, b_2}^-(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow x, \\ \text{Im } z > 0, \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, b_1, b_2\}}} U_{a_1; \alpha_1}^+(z) V_{b_1, b_2}^+(z) - \lim_{\substack{z \rightarrow x, \\ \text{Im } z > 0, \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, b_1, b_2\}}} U_{a_1; \alpha_1}^-(z) V_{b_1, b_2}^-(z) =$$

$$= (F_{1,a_1, \alpha_1}^+(x)F_{1,b_1}^+(x)F_{1,b_2}^+(x) + F_{1,a_1, \alpha_1}^+(x)F_{1,b_1}^+(x)F_{2,b_2}^+(x) + F_{1,a_1, \alpha_1}^+(x)F_{2,b_1}^+(x)F_{1,b_2}^+(x) + F_{1,a_1, \alpha_1}^+(x)F_{2,b_1}^+(x)F_{2,b_2}^+(x) +$$

$$+ F_{2,a_1, \alpha_1}^+(x)F_{1,b_1}^+(x)F_{1,b_2}^+(x) + F_{2,a_1, \alpha_1}^+(x)F_{1,b_1}^+(x)F_{2,b_2}^+(x) + F_{2,a_1, \alpha_1}^+(x)F_{2,b_1}^+(x)F_{1,b_2}^+(x) + F_{2,a_1, \alpha_1}^+(x)F_{2,b_1}^+(x)F_{2,b_2}^+(x)) -$$

$$- (F_{1,a_1, \alpha_1}^-(x)F_{1,b_1}^-(x)F_{1,b_2}^-(x) + F_{1,a_1, \alpha_1}^-(x)F_{1,b_1}^-(x)F_{2,b_2}^-(x) + F_{1,a_1, \alpha_1}^-(x)F_{2,b_1}^-(x)F_{1,b_2}^-(x) + F_{1,a_1, \alpha_1}^-(x)F_{2,b_1}^-(x)F_{2,b_2}^-(x) +$$

$$+ F_{2,a_1, \alpha_1}^-(x)F_{1,b_1}^-(x)F_{1,b_2}^-(x) + F_{2,a_1, \alpha_1}^-(x)F_{1,b_1}^-(x)F_{2,b_2}^-(x) + F_{2,a_1, \alpha_1}^-(x)F_{2,b_1}^-(x)F_{1,b_2}^-(x) + F_{2,a_1, \alpha_1}^-(x)F_{2,b_1}^-(x)F_{2,b_2}^-(x))$$

в тех точках, в которых таковая существует.

Таким образом, можно построить решение задачи (8) при $m = 1$, $n = 2$ по известным решениям следующих задач:

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = (x - a_1)^{\alpha_1}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \ln(x - b_1), \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \ln(x - b_2), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Этим же способом доказывается справедливость утверждения теоремы для $m = 2$, $n = 1$, $m = 2$, $n = 2$, а также для всех случаев $m \geq 3$, $n \geq 3$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юров, П.Г. Интеграл типа Коши по разомкнутому контуру / П.Г. Юров // Изв. высших учебных заведений. Математика. – 1989. – № 8 (327). – С. 90–92.
2. Юров, П.Г. Интегралы типа Коши и уравнения в конечных разностях / П.Г. Юров // Изв. Акад. наук БССР. Серия физ.-мат. наук. – 1967. – № 3. – С. 67–74.
3. Юров, П.Г. Один из случаев краевой задачи Римана с бесконечным индексом / П.Г. Юров // Докл. Акад. наук БССР. – 1968. – Т. 12, № 6. – С. 489–491.
4. Юров, П.Г. Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического типа / П.Г. Юров // Изв. высших учебных заведений. Математика. – 1966. – № 2 (51). – С. 158–163.
5. Юров, П.Г. О представлении интегралов типа Коши / П.Г. Юров // Математические заметки. – 1969. – Т. 6, № 1. – С. 55–63.
6. Юров, П.Г. Сингулярный интеграл с логарифмическим весом / П.Г. Юров // Математические заметки. – 1979. – Т. 26, № 1. – С. 61–70.
7. Гельфонд, А.О. Исчисление конечных разностей / А.О. Гельфонд. – М.: Наука, 1967. – 375 с.

Поступила 04.09.2014

THE JUMP BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH LOGARITHMIC AND POWER-LOGARITHMIC RIGHT-HAND SIDE

T. URBANOVICH, S. BELYAI

The jump boundary value problem in the case when the right-hand side is a product of the logarithmic factors and in the case when the right-hand side is a product of the power and logarithmic factors is investigated in the work. A new approach to solve the problem is applied. It is the method of the formal multiplication of hyperfunctions.

УДК 543.42; 517.518.45

ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

*д-р техн. наук С.Г. ЕХИЛЕВСКИЙ;
канд. физ.-мат. наук О.В. ГОЛУБЕВА; Е.П. ПОТАПЕНКО; С.А. ОЛЬШАННИКОВ
(Полоцкий государственный университет)*

Демонстрируется новая идеология поиска и исследования решений уравнений математической физики. Исходя из сути решаемой задачи, вводится квазистационарная плотность вероятности некоторой случайной величины, связанной с искомой функцией. В качестве примера рассмотрена диффузия в бесконечной трубке. Асимптотика дифференциальной функции распределения и ее параметры получаются методом моментов с помощью самого уравнения, а также связанных с ним начальных условий. Показано, как погрешность при замене точного решения его асимптотическим выражением связана с эксцессами функции распределения.

Уравнения математической физики, описывающие явления переноса, получаются на основе рассуждений, учитывающих молекулярную природу моделируемых процессов. Однако распространенные способы их решения эту природу игнорируют и сводятся к реализации абстрактного математического формализма (метода разделения переменных Фурье, изображений и т.п.). Такой подход существенно обедняет арсенал средств поиска и исследования решений, не позволяет применить аппарат, адекватный задаче.

Проиллюстрируем изложенное на примере уравнения диффузии. Ограничившись для простоты одномерным случаем, запишем последнее в виде

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где $n(x,t)$ – объемная концентрация переносимой субстанции (примеси); t – время; x – координата; D – коэффициент диффузии.

При наличии начального условия

$$n(x,0) = n_0(x) \quad (2)$$

существует единственное решение задачи (1), (2) (см. [1]), которое позволяет достоверно предсказать значение концентрации $n(x,t)$ в любом месте и в любой момент времени. Однако несмотря на такой детерминизм, координаты отдельных молекул примеси являются случайными величинами, закон распределения которых эволюционирует во времени.

Изложенное позволяет, соответствующим образом нормировав $n(x,t)$, ввести дифференциальную функцию распределения координаты частицы примеси

$$f(x,t) = \frac{n(x,t)S}{N}, \quad (3)$$

где

$$N = S \int_{-\infty}^{\infty} n(x,t) dx \quad (4)$$

равно общему числу диффундирующих молекул в тонкой трубке, параллельной оси OX , с площадью поперечного сечения S .

Введенная вместо $n(x,t)$ новая неизвестная функция $f(x,t)$ вероятностно характеризует положение в момент времени t каждой отдельной молекулы примеси. И только их огромное количество (сравнимое с числом Авогадро) в соответствии с законом больших чисел приводит к достоверному прогнозу эволюции $n(x,t)$, что находит свое формальное отражение в справедливости теорем существования и единственности решения задачи (1), (2).

Интерпретация диффузии как случайного процесса позволяет подключить к ее моделированию дополнительный мощный ресурс в виде основных теорем теории вероятностей, математической статистики и теории информации. В частности, асимптотика $f(x, t)$ и поправки к ней могут быть установлены с помощью начальных и центральных моментов случайной координаты отдельной молекулы примеси. Найти моменты можно, используя (но не решая) уравнение (1) и соотношения (2), (3). Такой подход реализован в [2; 3] при исследовании динамической сорбционной активности. Применим его к решению уравнения диффузии.

Подставив (3) в (1), получим уравнение относительно плотности вероятности $f(x, t)$:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} . \tag{5}$$

Вначале рассмотрим задачу о расплзании однородного концентрационного пятна шириной l :

$$f(x, 0) = \begin{cases} 1/l, & x \in [-l/2, l/2]; \\ 0, & x \notin [-l/2, l/2]. \end{cases} \tag{6}$$

Зависимость (6) описывает равновесное состояние, ибо максимуму энтропии на отрезке отвечает равномерное распределение случайной величины [4]. Поэтому использование (6) в качестве начального условия вполне естественно.

Для дальнейшего удобно перейти к обезразмеренным времени τ и координате ξ :

$$\tau = Dt/l^2, \quad \xi = x/l . \tag{7}$$

В новых переменных соотношения (5), (6) соответственно примут вид:

$$\frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} , \tag{8}$$

$$f(\xi, 0) = \begin{cases} 1, & \xi \in [-1/2, 1/2]; \\ 0, & \xi \notin [-1/2, 1/2]. \end{cases} \tag{9}$$

Согласно [5], вся информация о плотности вероятности $f(\xi, \tau)$ содержится в начальных $v_n(\tau)$ или центральных $\mu_n(\tau)$ моментах обезразмеренной координаты ξ отдельной частицы примеси. В силу симметрии задачи (8), (9) имеют место равенства

$$v_{2n+1}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2n+1} f(\xi, \tau) d\xi = 0 \quad (n = 0, 1, \dots) , \tag{10}$$

то есть

$$\mu_n(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - v_1(\tau))^n f(\xi, \tau) d\xi = v_n(\tau) . \tag{11}$$

Из условия нормировки

$$\mu_0(\tau) = 1, \tag{12}$$

а для остальных (четных) n дифференцированием (11) по τ с учетом (10) и при помощи (8) получим

$$\mu_{2n}(\tau)' = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2n} \frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \tau} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2n} \frac{\partial^2 f(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} d\xi . \tag{13}$$

Очевидно, что при любых конечных временах $f(\pm\infty, \tau) \equiv 0$. С учетом этого обстоятельства дважды проинтегрируем правую часть (13) по частям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\xi^{2n}}_U \underbrace{\frac{\partial^2 f(\xi, \tau)}{\partial \xi^2}}_{dV} \partial \xi = \left| \begin{array}{l} dU = 2n\xi^{2n-1} d\xi \\ V = \frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \xi} \end{array} \right| = 2n(2n-1)\mu_{2n-2}(\tau). \quad (14)$$

Из (13), (14) следует искомое соотношение для определения $\mu_{2n}(\tau)$:

$$\mu_{2n}(\tau)' = 2n(2n-1)\mu_{2n-2}(\tau). \quad (15)$$

С помощью (15) и условия нормировки (12) можно развить рекуррентную процедуру последовательного вычисления моментов любых четных порядков. В частности, для $n=1$ получим

$$\mu_2(\tau)' = 2(2-1)\mu_0(\tau) = 2, \quad (16)$$

откуда с учетом вытекающего из (9)–(11) начального условия

$$\mu_2(0) = \int_{-1/2}^{1/2} \xi^2 d\xi = \frac{1}{12} \quad (17)$$

следует, что

$$\mu_2(\tau) = 2\tau + 1/12 = \sigma^2(\tau), \quad (18)$$

где $\sigma(\tau)$ – среднеквадратическое отклонение обезразмеренной координаты ξ молекулы примеси в момент времени τ .

Аналогично для $n=2$ из (15) с учетом (18) получим

$$\mu_4(\tau)' = 4(4-1)\mu_2(\tau) = 24\tau + 1. \quad (19)$$

Дополнив (19) вытекающим из (9)–(11) начальным условием

$$\mu_4(0) = \int_{-1/2}^{1/2} \xi^4 d\xi = \frac{1}{80}, \quad (20)$$

выполним интегрирование

$$\mu_4(\tau) = 12\tau^2 + \tau + 1/80. \quad (21)$$

Найденных моментов достаточно для определения асимптотики $f(\xi, \tau)$ при больших временах. С этой целью вычислим эксцесс ξ :

$$E(\tau) = \frac{\mu_4(\tau)}{\sigma^4(\tau)} - 3 = \frac{12\tau^2 + \tau + 1/80}{(2\tau + 1/12)^2} - 3 = -\frac{1}{120\sigma^4(\tau)} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0. \quad (22)$$

Отсутствие эксцесса при больших временах означает, что в результате диффузионного перемешивания частицы примеси все дальше выходят за пределы отрезка $[-1/2, 1/2]$, а первоначальное распределение (9) постепенно эволюционирует в нормальное

$$f(\xi, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(\tau)}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma(\tau)^2}} \equiv f_0(\xi, \tau), \quad (23)$$

обеспечивающее максимум энтропии на всей числовой оси [4].

Согласно (7), при $l \rightarrow 0$ безразмерные времена сразу ($\forall t \neq 0$) становятся бесконечными, а распределение – нормальным (см. (18), (23)):

$$f(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{\xi^2}{4\tau}} \equiv \varphi(\xi, \tau). \quad (24)$$

Используем (24) для решения (8) в общем виде (без конкретизации начального распределения $f(\xi, 0)$). Рассмотрим участок $[\eta, \eta + d\eta]$ на числовой оси. В начальный момент молекула примеси принадлежит ему с вероятностью

$$dF(\eta, 0) = f(\eta, 0) d\eta, \quad (25)$$

где $F(\eta, \tau)$ – интегральная функция распределения.

В соответствии с изложенным из малости $d\eta$ следует, что при $t \neq 0$ эта вероятность распределится по числовой оси с плотностью (24) при математическом ожидании η . Воспользовавшись линейностью (8), просуммируем вклады в $f(\xi, \tau)$ отдельных участков, для чего выполним интегрирование по η :

$$f(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\eta, 0)}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau}} d\eta. \quad (26)$$

В том, что (26) обращает (8) в тождество, можно убедиться непосредственно, продифференцировав абсолютно сходящийся интеграл (26) по параметрам ξ и τ :

$$\frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\eta, 0)}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau}} \left(-\frac{\xi-\eta}{2\tau} \right) d\eta,$$

$$\frac{\partial^2 f(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\eta, 0)}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau}} \left[\frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau^2} - \frac{1}{2\tau} \right] d\eta, \quad (27)$$

$$\frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\eta, 0)}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau}} \left[-\frac{1}{2\tau^{3/2}} + \frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau^{5/2}} \right] d\eta. \quad (28)$$

Видно, что правые части формул (27), (28) тождественно совпадают.

В справедливости начального условия для $f(\xi, \tau)$, определяемой правой частью (26), можно убедиться, воспользовавшись известным представлением для δ -функции Дирака (см. [6]):

$$\varphi(\xi, 0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{\xi^2}{4\tau}} = \delta(\xi). \quad (29)$$

С учетом (29)

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\eta, 0)}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau}} d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta, 0) \delta(\xi - \eta) d\eta = f(\xi, 0), \quad (30)$$

как это и должно быть.

Решение (26) с точностью до замены $z = \eta - \xi$ совпадает с полученным в [1] методом Фурье. Формально такая замена ничего не меняет, но вуалирует теоретико-вероятностный смысл подынтегрального выражения.

Вернемся теперь к начальному условию (9). С его учетом из (26) следует

$$f(\xi, \tau) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau}} d\eta = \Phi(\xi + 1/2, \tau) - \Phi(\xi - 1/2, \tau), \quad (31)$$

где $\Phi(\xi, \tau)$ есть интегральная функция распределения, отвечающая нормальному закону (24):

$$\Phi(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\xi} \varphi(\zeta, \tau) d\zeta. \quad (32)$$

Действительно,

$$\Phi(\xi + 1/2, \tau) = \int_{-\infty}^{\xi+1/2} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{\zeta^2}{4\tau}} d\zeta = \left| \begin{array}{l} \zeta = \xi - \eta \\ d\zeta = -d\eta \end{array} \right| = \int_{-1/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau}} d\eta,$$

поэтому

$$\Phi(\xi + 1/2, \tau) - \Phi(\xi - 1/2, \tau) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau}} d\eta.$$

Определим погрешность при замене (31) асимптотическим выражением (23). Осуществив в (31) разложение по степеням $1/2$, получим

$$f(\xi, \tau) = \varphi(\xi, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^{2n}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{2n} \varphi(\xi, \tau)}{\partial \xi^{2n}}. \quad (33)$$

В качестве нулевого приближения в (33) при определении поправок к асимптотическому выражению следует выделить функцию $f_0(\xi, \tau)$, определяемую равенствами (23), (18).

Погрешность

$$\Delta(\xi, \tau) = f(\xi, \tau) - f_0(\xi, \tau) \quad (34)$$

в силу симметрии задачи – четная функция ξ , то есть экстремальная при $\xi = 0$ (рис. 1).

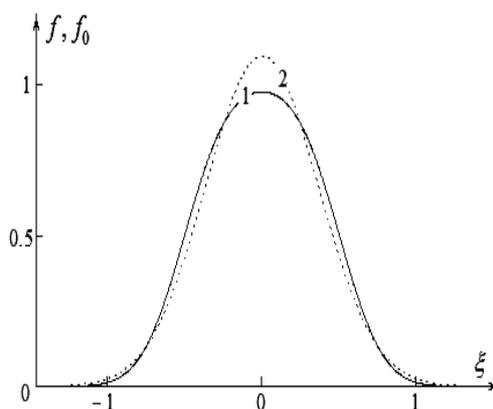


Рис. 1. Плотность вероятности $f(\xi, \tau)$ (кривая 1) и ее асимптотика $f_0(\xi, \tau)$ (кривая 2) в момент времени $\tau = 0,025$

Видно, что экстремум абсолютный, то есть значение $\Delta(0, \tau)$ может быть использовано для оценки погрешности при замене $f(\xi, \tau)$ асимптотическим выражением $f_0(\xi, \tau)$.

Вычислив несколько фигурирующих в (33) производных и положив $\xi = 0$, получим

$$f(0, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \left[1 + \frac{(1/2)^2}{3!} \left(-\frac{1}{2\tau} \right) + \frac{(1/2)^4}{5!} \frac{3}{(2\tau)^2} - \dots \right]. \quad (35)$$

Чтобы сравнить $f_0(0, \tau)$ с правой частью (35), положим в (23) $\xi = 0$ и выполним разложение по степеням τ^{-1} :

$$f_0(0, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2\tau+1/12)}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{24\tau} + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{24\tau}\right)^2 - \dots \right]. \quad (36)$$

И наконец, вычтя нулевое приближение (36) из точного выражения (35), получим, пренебрегая высшими порядками по τ^{-1} , относительную погрешность, вносимую при замене $f(\xi, \tau)$ нормальным законом (23):

$$\frac{f(0, \tau) - f_0(0, \tau)}{f(0, \tau)} \approx -\frac{1}{960} \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 = \frac{1}{8} E(\tau), \quad (37)$$

где последнее равенство записано с учетом (18), (22).

Согласно (37) большими могут считаться времена

$$\tau \geq 0,05 \equiv \tau^*, \quad (38)$$

что обеспечивает малость относительной погрешности при замене $f(\xi, \tau)$ нормальным законом (18), (23).

Рисунок 2 иллюстрирует, как равномерное распределение на отрезке по мере осуществления (38) трансформируется в нормальное на всей числовой оси. Интересно, что τ^* отвечает примерно двукратное увеличение дисперсии (см. (18)).

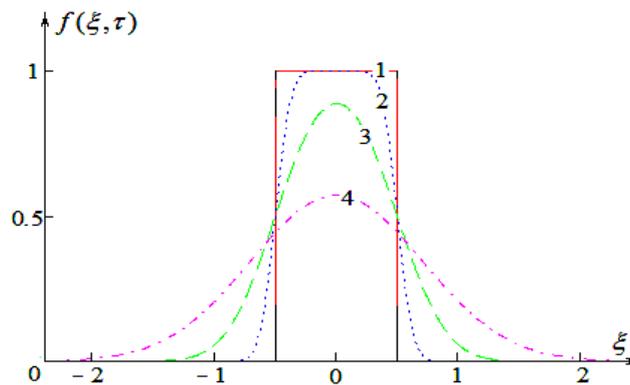


Рис. 2. Диффузионное «расползание» однородного концентрационного пятна:
1 – $\tau = 0$; 2 – $\tau = 0,1\tau^*$; 3 – $\tau = \tau^*$; 4 – $\tau = 4\tau^*$

Используем моменты (11) для определения поправки к асимптотическому выражению (23). В соответствии с изложенным (см. (37), (22)) главная часть такой поправки порядка $\sigma^{-4} f_0$. Учет в разложениях (35), (36) следующих слагаемых приведет в (37) к вкладам более высоких порядков по степеням τ^{-1} , обусловленных (см. (18)) эксцессами старших порядков:

$$E_{2k}(\tau) = \frac{\mu_{2k}(\tau)}{\sigma(\tau)^{2k}} - 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k - 1), \quad (k = 3, 4, \dots).$$

Поэтому плотность вероятности обезразмеренной координаты диффундирующей молекулы будем искать в виде

$$f(\xi, \tau) = f_0(\xi, \tau) \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varphi_{2k}(\xi)}{\sigma^{2k}(\tau)} \right) = f_0(\xi, \tau) + \underbrace{f_1(\xi, \tau) + f_2(\xi, \tau) + \dots}_{\Delta(\xi, \tau)}, \quad (39)$$

где ξ – приведенная координата, учитывающая эволюцию актуального диапазона обезразмеренной координаты ξ .

Обезразмеренная координата ξ определяется из формулы

$$\zeta = \zeta(\xi, \tau) = \xi/\sigma(\tau). \tag{40}$$

Искомые функции $\varphi_{2k}(\zeta)$ в силу симметрии задачи должны раскладываться по четным степеням ζ . При этом согласно зависимости 1, изображенной на рисунке 3, для $\varphi_4(\zeta)$ в таком разложении можно ограничиться тремя слагаемыми:

$$\varphi_4(\zeta) = C_{40} + C_{42}\zeta^2 + C_{44}\zeta^4. \tag{41}$$

Систему линейных алгебраических уравнений для определения фигурирующих в (41) коэффициентов C_{4i} ($i = 0, 2, 4$) получим, используя уже найденные центральные моменты (12), (18), (21).

Согласно (22), (11), (39)

$$\frac{\mu_4(\tau)}{\sigma^4(\tau)} = 3 - \frac{1}{120\sigma^4(\tau)} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \zeta^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} d\zeta}_{=3} + \frac{1}{\sigma^4(\tau)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \varphi_4(\zeta) \cdot d\zeta, \tag{42}$$

где выполнена замена переменной интегрирования (40).

Приравняв в (42) коэффициенты при одинаковых степенях σ^{-1} , получим с учетом (41)

$$3C_{40} + 15C_{42} + 105C_{44} = -1/120. \tag{43}$$

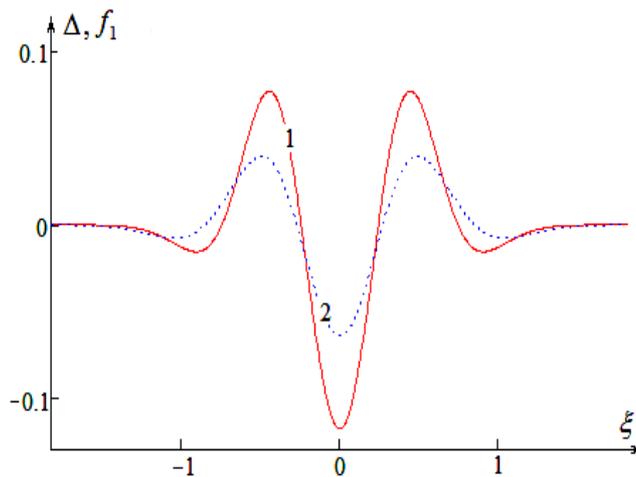


Рис. 3. Отклонение $f(\xi, \tau)$ от своего асимптотического выражения (кривая 1) и поправка порядка σ^{-4} (кривая 2) для $\tau = 0,5 \tau^*$

Аналогично получают еще два уравнения для определения C_{4i} :

$$\frac{\mu_2(\tau)}{\sigma^2(\tau)} = 1 = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \zeta^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} d\zeta}_{=1} + \frac{1}{\sigma^4(\tau)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \varphi_4(\zeta) \cdot d\zeta + \dots \tag{44}$$

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} (C_{40}\zeta^2 + C_{42}\zeta^4 + C_{44}\zeta^6) d\zeta, \quad C_{40} + 3C_{42} + 15C_{44} = 0, \tag{45}$$

$$\frac{\mu_0(\tau)}{\sigma^0(\tau)} = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(\tau)} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2(\tau)}} \cdot (1 + \frac{\varphi_4(\zeta)}{\sigma^4(\tau)} + \frac{\varphi_6(\zeta)}{\sigma^6(\tau)} + \dots) d\xi = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} d\zeta}_{=1} + \frac{1}{\sigma^4(\tau)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \varphi_4(\zeta) \cdot d\zeta + \dots \tag{46}$$

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} (C_{40} + C_{42}\zeta^2 + C_{44}\zeta^4) d\zeta,$$

$$C_{40} + C_{42} + 3C_{44} = 0. \tag{47}$$

Решение системы (47), (45), (43) удобно искать методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{aligned} & \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 15 & 0 \\ 3 & 15 & 105 & -1/120 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & 96 & -1/120 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & -1/120 \end{array} \right\rangle \sim \\ & \sim \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2880 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2880 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/960 \\ 0 & 1 & 0 & 1/480 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2880 \end{array} \right\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, главная часть $\Delta(\xi, \tau)$ (с относительным вкладом порядка $\sigma(\tau)^{-4}$ (см. (39)–(41) и (23)) имеет вид

$$f_1(\xi, \tau) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma(\tau)^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma(\tau)}} \frac{1}{\sigma^4(\tau)} \left(-\frac{1}{960} + \frac{1}{480} \left(\frac{\xi}{\sigma(\tau)} \right)^2 - \frac{1}{2880} \left(\frac{\xi}{\sigma(\tau)} \right)^4 \right). \tag{48}$$

Рисунок 3 показывает, как $f_1(\xi, \tau)$ (кривая 2) в момент времени $\tau = 0,5 \tau^*$ вписывается в отклонение $\Delta(\xi, \tau)$ плотности вероятности $f(\xi, \tau)$ от своего асимптотического выражения $f_0(\xi, \tau)$. Учет $f_1(\xi, \tau)$ позволяет вычислить $f(\xi, \tau)$ с относительной погрешностью порядка $\sigma(\tau)^{-6}$.

Отклонение первого приближения $f_1(\xi, \tau)$ (см. (39)) от точного выражения (34) для $\Delta(\xi, \tau)$ представлено на рисунке 4 (кривая 1).

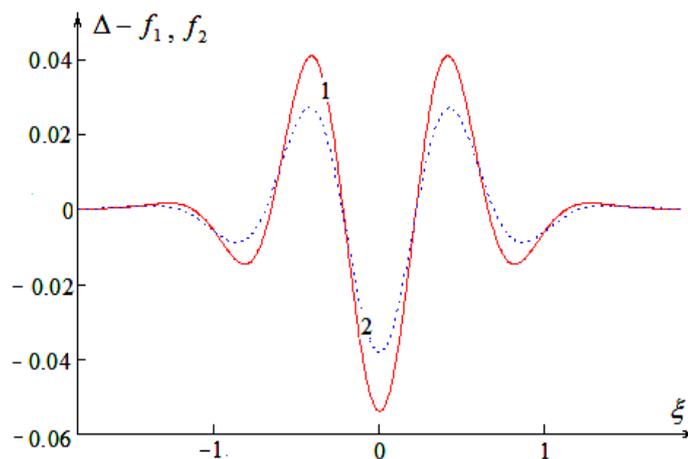


Рис. 4. Отклонение поправки порядка σ^{-6} (кривая 2) от погрешности первого приближения для $\tau = 0,5 \tau^*$

Поведение построенной кривой позволяет искать фигурирующее в (39) $\phi_6(\zeta)$ в виде

$$\phi_6(\zeta) = C_{60} + C_{62}\zeta^2 + C_{64}\zeta^4 + C_{66}\zeta^6. \tag{49}$$

Три уравнения для определения коэффициентов C_{6i} ($i = 0, 2, 4, 6.$) получаются приравнением в левой и правой частях (46), (44), (42) коэффициентов при $\sigma(\tau)^{-6}$:

$$C_{60} + C_{62} + 3C_{64} + 15C_{66} = 0; \quad (50)$$

$$C_{60} + 3C_{62} + 15C_{64} + 105C_{66} = 0; \quad (51)$$

$$3C_{60} + 15C_{62} + 105C_{64} + 945C_{66} = 0. \quad (52)$$

Для получения четвертого уравнения необходимо вычислить приведенный момент шестого порядка. Поскольку его нужно выразить через $\sigma(\tau)^2$, используем в рекуррентном уравнении (15) функцию $\mu_2(\tau)$ в качестве аргумента. Приняв во внимание (18) и первое равенство в (42), получим

$$\mu_6(\tau)' = \frac{d\mu_6}{d\mu_2} \frac{d\mu_2}{d\tau} = 2 \frac{d\mu_6}{d\mu_2} = 30\mu_4(\tau) = 90\mu_2^2(\tau) - \frac{1}{4}, \quad (53)$$

или

$$\mu_6(\tau) = \mu_6(0) + 15(\mu_2(\tau)^3 - \mu_2(0)^3) - \frac{1}{8}(\mu_2(\tau) - \mu_2(0)). \quad (54)$$

С помощью (9)–(11) вычислим

$$\mu_6(0) = \int_{-1/2}^{1/2} \xi^6 \partial \xi = \frac{1}{448}, \quad (55)$$

и приняв во внимание (17), найдем

$$\mu_6(0) - 15\mu_2(0)^3 + \frac{1}{8}\mu_2(0) = \frac{1}{252}, \quad (56)$$

Подставив результат в (54), выразим приведенный момент через $\sigma(\tau)^2$ и запишем аналог (42):

$$E_6(\tau) = \frac{\mu_6(\tau)}{\sigma^6(\tau)} - 15 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sigma^{2k}(\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^6 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \varphi_{2k}(\zeta) d\zeta. \quad (57)$$

Прежде чем продолжить поиск последнего уравнения для определения коэффициентов $\varphi_6(\zeta)$, проведем с помощью (57) строгое доказательство справедливости вида, в котором искали $\varphi_4(\zeta)$. Увеличим степень полинома $\varphi_4(\zeta)$, добавив к правой части (41) слагаемое $C_{46}\zeta^6$. Тогда систему (47), (45), (43) следует модифицировать (добавив в матрицу коэффициентов при неизвестных четвертый столбец) и дополнить четвертым уравнением, получаемым приравнением в левой и правой частях (57) коэффициентов при $\sigma(\tau)^{-4}$:

$$15C_{40} + 105C_{42} + 945C_{44} + 945 \cdot 11C_{46} = -1/8. \quad (58)$$

Подставив в (58) ранее найденные $C_{40} = -1/960$, $C_{42} = 1/480$, $C_{44} = -1/2880$, получим, что $C_{46} = 0$, то есть модификация (47), (45), (43) не принципиальна и изначально использованное разложение (41) было верным.

Возвратимся теперь к определению $\varphi_6(\zeta)$. Приравняв в (57) коэффициенты при $\sigma(\tau)^{-6}$, получим последнее уравнение искомой системы:

$$15C_{60} + 105C_{62} + 945C_{64} + 945 \cdot 11C_{66} = 1/252. \quad (59)$$

Решив совместно (50)–(52) и (59), с помощью (49), (39) построим кривую 2, представленную на рисунке 4. Видно, что поправка порядка $\sigma(\tau)^{-6}$ хорошо вписывается в отклонение первого приближения от $f(\xi, \tau)$. Программа соответствующих расчетов, выполненных в среде пакета MathCAD, представлена на рисунке 5.

$$\tau := \frac{1}{40} \quad \sigma(\tau) := \sqrt{2\tau + \frac{1}{12}}$$

$$f(\xi, \tau) := \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4\tau}} d\eta$$

$$f_0(\xi, \tau) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(\tau)}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma(\tau)^2}} \quad \Delta(\xi, \tau) := f(\xi, \tau) - f_0(\xi, \tau)$$

$$f_1(\xi, \tau) := \frac{f_0(\xi, \tau)}{\sigma(\tau)^4} \left[1 \left(\frac{\xi}{\sigma(\tau)}\right)^2 \left(\frac{\xi}{\sigma(\tau)}\right)^4 \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 15 \\ 3 & 15 & 105 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 120 \end{pmatrix} \right]$$

$$f_2(\xi, \tau) := \frac{f_0(\xi, \tau)}{\sigma(\tau)^6} \left[1 \left(\frac{\xi}{\sigma(\tau)}\right)^2 \left(\frac{\xi}{\sigma(\tau)}\right)^4 \left(\frac{\xi}{\sigma(\tau)}\right)^6 \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 15 \\ 1 & 3 & 15 & 105 \\ 3 & 15 & 105 & 945 \\ 15 & 105 & 945 & 11\cdot 945 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{252} \end{pmatrix} \right]$$

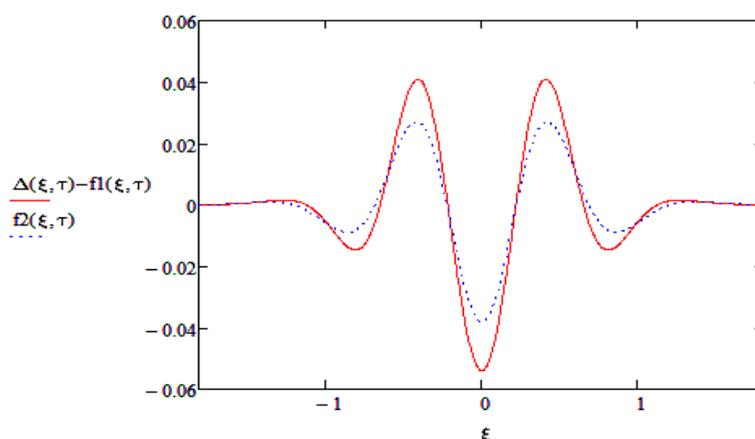


Рис. 5. Программа расчета поправок к асимптотике плотности вероятности координаты диффундирующей молекулы примеси

Таким образом, структура матрицы коэффициентов системы алгебраических уравнений для определения коэффициентов полиномов $\varphi_{2k}(\zeta)$ понятна. По столбцам и строкам коэффициенты представляют собой последовательность произведений нечетных чисел. Столбец свободных членов состоит из нулей за исключением последнего элемента, равного константе в разложении $\mu_{2k}(\tau)$ по степеням $\mu_2(\tau)$. В частности, для $k = 4$ с помощью (15), (16), (57), а также (9)–(11) получим значение этой константы:

$$\mu_8(\tau)' = 56 \left(15\mu_2(\tau)^3 - \frac{1}{8}\mu_2(\tau) + \frac{1}{252} \right),$$

$$\mu_8(\tau) = \mu_8(0) + 105(\mu_2(\tau)^4 - \mu_2(0)^4) - \frac{14}{8}(\mu_2(\tau)^2 - \mu_2(0)^2) + \frac{28}{252}(\mu_2(\tau) - \mu_2(0)), \quad (60)$$

$$\mu_8(0) - 105\mu_2(0)^4 + \frac{14}{8}\mu_2(0)^2 - \frac{28}{252}\mu_2(0) = -\frac{1}{576}. \quad (61)$$

Найденная с помощью (61) поправка $f_3(\xi, \tau)$ (см. (39)) позволяет в актуальном диапазоне ξ построить $f(\xi, \tau)$ с погрешностью $3 \cdot 10^{-3}$, что, в отличие от изображенного на рисунке 1, уже неразличимо на глаз. Заметим также, что следующее из (60), (61) уравнение

$$E_8(\tau) = \frac{\mu_8(\tau)}{\sigma^8(\tau)} - 105 = -\frac{14}{8\sigma^4(\tau)} + \frac{28}{252\sigma^6(\tau)} - \frac{1}{576\sigma^8(\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^8 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varphi_{2k}(\zeta)}{\sigma^{2k}(\tau)} d\zeta \quad (62)$$

приводит после приравнивания коэффициентов при σ^{-4} и σ^{-6} соответственно к двум новым уравнениям относительно коэффициентов полиномов $\varphi_4(\zeta)$ и $\varphi_6(\zeta)$:

$$105C_{40} + 945C_{42} + 945 \cdot 11C_{44} = -14/8, \tag{63}$$

$$105C_{60} + 945C_{62} + 945 \cdot 11C_{64} + 945 \cdot 11 \cdot 13C_{66} = 28/252. \tag{64}$$

Нетрудно убедиться, что они обращаются в тождество с помощью уже найденных значений. То есть учет эксцессов высших порядков необходим лишь для определения коэффициентов соответствующего полинома в разложении (39). Вместе с тем, поскольку числа в правых частях (63), (64) с точностью до знака совпадают с соответствующими коэффициентами при степенях $\mu_2(0)$ в (61), найденные при получении предыдущих поправок коэффициенты C_{ki} ($k = 4, 6, \dots, 2n - 2$), ($i = 0, 2, \dots, k$) могут быть использованы для определения свободного члена системы уравнений относительно коэффициентов C_{2ni} следующего полинома. Предлагаемый подход позволяет исключить интегрирование рекуррентного соотношения (15) и полностью формализовать процесс получения поправок $f_n(\xi, \tau)$ к асимптотическому выражению $f_0(\xi, \tau)$. Фрагмент соответствующей программы по отысканию $f_3(\xi, \tau)$ представлен на рисунке 6.

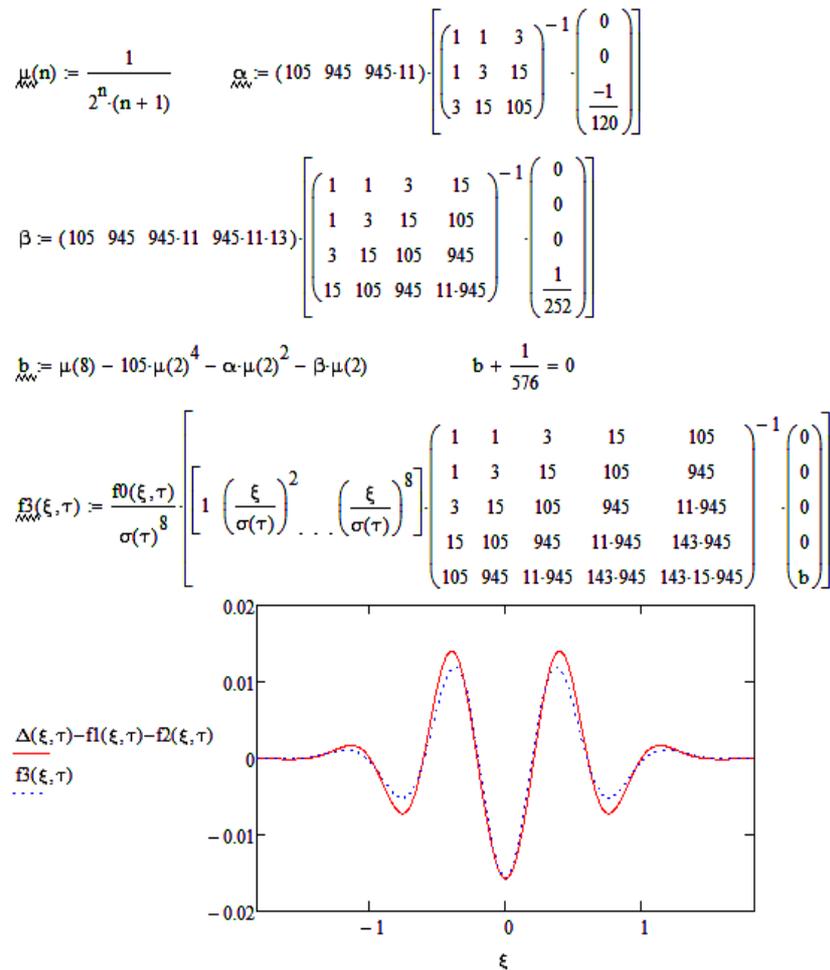


Рис. 6. Программа расчета поправки $f_3(\xi, \tau)$ к плотности вероятности ($\tau = 0,5 \tau^*$)

Видим, что $f_3(\xi, \tau)$ хорошо вписалась в отклонение погрешности $\Delta(\xi, \tau)$ от своего второго приближения.

В заключение обсудим вопрос о сходимости ряда (39). Чтобы определить, при каких τ она имеет место, заметим, что константа в разложении $\mu_{10}(\tau)$ по степеням $\mu_2(\tau)$ равна $1/1584$. То есть последова-

тельность отличных от нуля свободных членов в системах уравнений относительно коэффициентов полиномов $\{-120^{-1}, 252^{-1}, -576^{-1}, 1584^{-1}, \dots\}$ убывает по модулю быстрее, чем $2^{-n}/120$. Поскольку столбцы свободных членов содержат только по одному отличному от нуля элементу, коэффициенты фигурирующих в (39) полиномов в соответствии с теоремой Крамера содержат в качестве общего множителя соответствующий элемент приведенной выше числовой последовательности. Знаменатель в разложении (39) должен убывать медленнее. Значит при $\sigma^2(\tau) > 1/2$, то есть (см. (18)) для $\tau > 5/24$ ряд (39) будет сходиться, что и подтверждается численными расчетами.

Выводы. Предложена новая идеология поиска и исследования решений уравнений математической физики, описывающих явления переноса. Исходя из сути решаемой задачи, неизвестная функция заменяется плотностью вероятности некоторой случайной величины. Ее начальные и центральные моменты получаются с помощью самого уравнения (без его решения), а также связанных с ним начальных условий. Информация о моментах позволяет установить параметры и асимптотику переменной плотности вероятности введенной случайной величины. Разработана методика определения поправок к асимптотическому выражению дифференциальной функции распределения. В качестве примера рассмотрено диффузионное расплывание однородного концентрационного пятна в бесконечной трубке. Введена плотность вероятности координаты диффундирующей молекулы примеси. Получено рекуррентное уравнение для определения центральных моментов рассматриваемой случайной величины. Найдены среднеквадратическое отклонение и эксцесс функции распределения. Показано, что со временем формируется нормальное распределение координаты, причем погрешность при замене точного решения его асимптотическим выражением пропорциональна эксцессу функции распределения. Определены как функции координат и времени главная часть погрешности и поправки, связанные с учетом эксцессов высших порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров, Я.С. Высшая математика / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
2. Ехилевский, С.Г. Теоретико-вероятностный подход к моделированию динамической сорбционной активности / С.Г. Ехилевский, О.В. Голубева, Д.В. Пяткин // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия В. Промышленность. Прикладные науки. – 2013. – № 11. – С. 144–151.
3. Ехилевский, С.Г. Метод моментов и динамика сорбционной активности при малых временах / С.Г. Ехилевский, О.В. Голубева, С.А. Ольшанников // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия В. Промышленность. Прикладные науки. – 2013. – № 3. – С. 150–156.
4. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. – М.: Наука, 1988. – 451 с.
5. Гихман, И.И. Теория вероятностей и математическая статистика / И.И. Гихман, А.В. Скороход, М.И. Ядренко. – М., 1979. – 408 с.
6. Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1979.

Поступила 10.03.2015

PROBABILITY-THEORETIC APPROACH TO THE SOLUTION OF THE EQUATION OF DIFFUSION

**S. EKHILEVSKIY, O. GOLUBEVA,
E. POTAPENKO, S. OLSHANNIKOV**

In work the new ideology of search and research of solutions of the equations of mathematical physics is offered. Proceeding from an essence of the solved task the quasistationary frequency function of some random variable connected with required function is entered. As an example diffusion in an infinite tube is considered. An asymptotic of differential distribution function and its parameters turn out by method of the moments by means of the equation, and also the related entry conditions. It is shown how the error when replacing the exact decision with its asymptotic expression is connected with distribution function excesses.

СОДЕРЖАНИЕ

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

<i>Железняк В.К., Бураченко И.Б.</i> Частотно-временные характеристики широкополосных ЛЧМ-сигналов в полосах равной разборчивости	2
<i>Рыбальский О.В., Соловьев В.И., Железняк В.К.</i> Применение вейвлета Морле при создании методов и аппаратуры для проведения экспертиз материалов цифровой видеозаписи.....	14
<i>Дворников С.С., Рябенко Д.С.</i> Расширение алфавита сигналов на основе частотно-временных матриц для передач декаметрового диапазона	17
<i>Кременя К.И., Янушкевич В.Ф.</i> Исследование зависимости параметров антенной решетки Вивальди от изменения расстояния между излучателями.....	22
<i>Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф.</i> Задача построения поля линий тока по температурному разрезу.....	27
<i>Господ А.В.</i> Методика моделирования 3D динамической среды на основе теоремы Байеса.....	37

ФИЗИКА

<i>Петрович О.Н., Русецкий И.С.</i> Моделирование особенностей формирования электронного пучка форвакуумным плазменным источником	43
<i>Лукашевич М.Г.</i> Модификация структуры в имплантированных пленках полиимида за областью пробега ионов.....	50
<i>Бринкевич Д.И., Вабищевич С.А., Просолович В.С., Янковский Ю.Н.</i> Модификация приповерхностных слоев монокристаллов кремния, имплантированных ионами В ⁺ и Р ⁺ в процессе создания полупроводниковых приборов по КМОП технологии	55
<i>Янушкевич В.Ф., Калинин С.В., Кременя К.И., Заяц Е.Ю.</i> Применение модулированных сигналов для поиска анизотропных сред плазмоподобного типа.....	60
<i>Горовых О.Г., Оразбаев А.Р.</i> Определение времени релаксации объемного электростатического заряда, вносимого в резервуары с поступающей диэлектрической углеводородной жидкостью.....	66

МАТЕМАТИКА

<i>Можей Н.П.</i> Разложение де Рама и когомологии трехмерных однородных псевдоримановых многообразий	71
<i>Skorotnik O., Aleksandrovich T.</i> Solution of a multidimensional integral equation of the first kind with the Bessel – Klifford function in the kernel over a pyramidal domain	81
<i>Урбанович Т.М., Беляй С.В.</i> Краевая задача о скачке с логарифмической и со степенно-логарифмической правой частью	88
<i>Ехилевский С.Г., Голубева О.В., Потапенко Е.П., Ольшанников С.А.</i> Теоретико-вероятностный подход к решению уравнения диффузии	94