

MIESIĘCZNIK
POŁOCKI.

Т о м I.
Р о к 1818.

*«Вестник Полоцкого государственного университета»
продолжает традиции первого в Беларуси литературно-
научного журнала «Месячник Полоцкий».*



ВЕСНІК ПОЛАЦКАГА ДЗЯРЖАУНАГА УНІВЕРСІТЭТА
Серыя С. Фундаментальныя навукі

У серыі С навукова-тэарэтычнага часопіса друкуюцца артыкулы, якія прайшлі рэцэнзаваўне, змяшчаюць новыя навуковыя вынікі ў галіне інфарматыкі і матэматыкі, фізікі.

ВЕСТНИК ПОЛОЦКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия С. Фундаментальные науки

В серии С научно-теоретического журнала публикуются статьи, прошедшие рецензирование, содержащие новые научные результаты в области информатики и математики, физики.

HERALD OF POLOTSK STATE UNIVERSITY
Series C. Fundamental sciences

Series C includes reviewed articles which contain novelty in research and its results in computer science and mathematics, physics.

Адрес редакции:

Полоцкий государственный университет, ул. Блохина, 29, г. Новополоцк, 211440, Беларусь
тел. + 375 (214) 53 34 58, e-mail: vestnik@psu.by

Отв. за выпуск *В.А. Груздев, С.Г. Ехилевский, Э.М. Пальчик.*
Редактор *О.П. Михайлова.*

Подписано к печати 30.09.2015. Бумага офсетная 65 г/м². Формат 60×84¹/₈. Ризография.

Усл. печ. л. 14,41. Уч.-изд. л. 13,15. Тираж 100 экз. Заказ 1639.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 004.43

ФОРМАЛЬНЫЙ ЯЗЫК ОПИСАНИЯ ГЕНЕРАТОРА ТРЕХМЕРНОГО ЛАНДШАФТА НА ОСНОВЕ КОМПОЗИЦИЙ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

канд. техн. наук, доц. Д.О. ГЛУХОВ, канд. техн. наук, доц. Р.П. БОГУШ, Т.М. ГЛУХОВА
(Полоцкий государственный университет)

Вопросы генерирования ландшафта являются актуальными в теории компьютерного моделирования. Особую актуальность данное направление получило при решении задач трехмерной компьютерной графики. Предложен механизм формирования ландшафта с использованием композиций гармонических функций. Для достижения этой цели использован формальный язык описания генератора сложного рельефа, а также разработано соответствующее программное обеспечение.

Введение. Если попытаться классифицировать существующие методы генерирования ландшафтов, то, исходя из практической составляющей, мы предлагаем придерживаться следующего разделения:

1) **алгоритмы, генерирующие случайные ландшафты.** Такие алгоритмы не в состоянии воспроизвести один и тот же ландшафт повторно, поскольку используют генераторы псевдослучайных последовательностей. Для таких алгоритмов применяются случайные фракталы [1], диаграмма Воронова для случайного набора точек [2], для оптимизации случайных наборов используется метод релаксации Ллойда [3];

2) **алгоритмы, генерирующие неслучайные ландшафты ограниченных размеров.** Такие алгоритмы чаще всего применяются для целей визуализации фотореалистических изображений ландшафтов, а также для игр с ограниченным размером карт. Данный класс алгоритмов предлагает широкий ряд математических методов (фрактальные алгоритмы, алгоритмы на основе готовой карты высот) [4];

3) **алгоритмы, генерирующие неслучайные ландшафты неограниченных размеров.** Под неограниченностью размеров генерируемого пространства мы будем иметь в виду такие размеры, при которых невозможно хранение в памяти всего сгенерированного ландшафта и возникает потребность генерирования в режиме реального времени. Данный класс алгоритмов представляется нам наиболее перспективным, и именно на нем мы и сфокусируем наше внимание.

Основная часть. Рассмотрим возможную параметризацию задачи генерирования ландшафта. Нами предлагаются следующие генерируемые параметры.

Непрерывные:

- 1) высота блока;
- 2) цвет блока;
- 3) прозрачность блока.

Дискретные (опция):

- 4) тип блока;
- 5) тип растения;
- 6) высота растения;
- 7) размер растения по высоте;
- 8) деревья.

Основные понятия и определения

Области генерации – произвольные подпространства с различной математикой, на которые функционально разбивается все пространство с целью снижения вычислительной нагрузки при обеспечении высокого многообразия ландшафтов. Для выполнения быстрого разбиения пространства на подпространства с различной математикой предлагается задать границы между ними через плавный переход относительно некоторого базового пространства, заполняющего зоны между пространствами разбиения.

Пространства с различной математикой обладают следующими свойствами:

- 1) не пересекаются, но примыкают друг к другу, образуя разбиение покрытия;
- 2) существует ограниченное количество типов пространств с различной математикой;
- 3) имеют неправильные формы;
- 4) для любой области покрытия однозначно определяется ее тип.

Введем необходимые для построения генератора определения.

Периодическая функция – это функция, представляющая собой суперпозицию нескольких (от 3-х и более) синусоидальных волн, распространяющихся в двумерном пространстве в различных направлениях. Амплитуда волны в каждой точке двумерного пространства будет нами интерпретироваться в контексте генератора как часть генерируемого параметра (вклад в высоту ландшафта, цвет, тип и т.д.).

Каждая периодическая функция задается количеством волн, их направлениями, начальными фазами, периодами и амплитудами (рис. 1).

Ограниченная периодическая функция – периодическая функция, существующая при превышении ее амплитуды заданного порогового значения (рис. 2).



Рисунок 1 – Пример гармонической функции

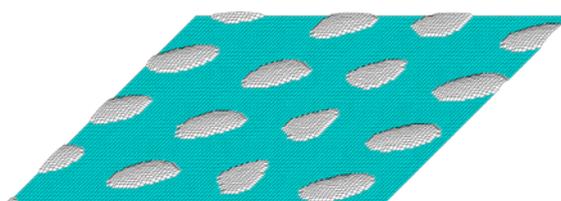
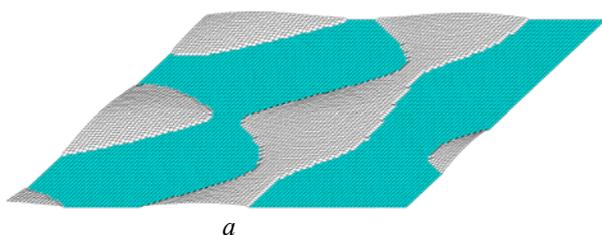


Рисунок 2 – Пример ограниченной гармонической функции

Периодическая функция ограниченная другой периодической функцией – это периодическая функция, существующая только в тех точках, в которых ограничивающая периодическая функция по амплитуде превышает заданный порог (рис. 3).



a



б

Рисунок 3 – Пример ограниченной волновой функции: *a* – ограничивающая, *б* – ограниченная

Композиция периодических функций – суперпозиция периодических функций, получаемая с целью усложнение результата интерференции и получения более разнообразных поверхностей (рис. 4).

Ограниченная композиция периодических функций – это суперпозиция периодических функций, существующая при превышении амплитуды композиции заданного порогового значения (рис. 5).

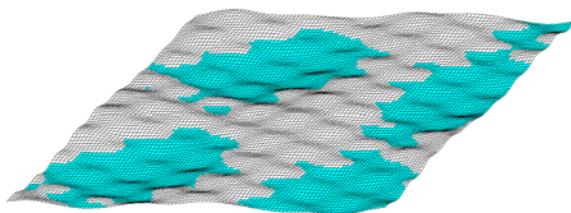


Рисунок 4 – Пример композиции периодических функций

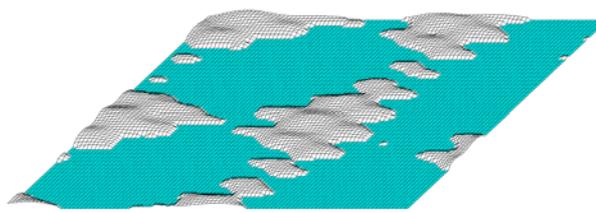


Рисунок 5 – Пример ограниченной композиции периодических функций

Инверсная периодическая функция или композиция – это периодическая функция или композиция периодических функций, отраженная относительно плоскости распространения волны (рис. 6).

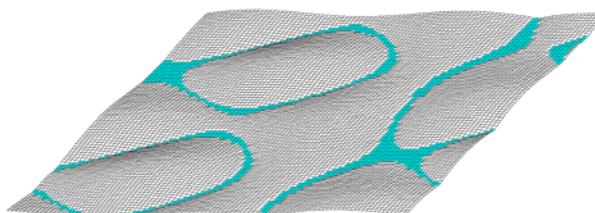


Рисунок 6 – Пример композиции (периодическая функция и ее инверсия), ограниченной ненулевым порогом

Маска – это периодическая функция или композиция периодических функций, возвращающая для всех ненулевых значений значение 1.

Маска является прекрасным механизмом разбиения пространства на подпространства, которые образуют покрытие исходного пространства. Композиция из N масок позволяет разбить пространство на $N + 1$ (если учитывать остающиеся подпространства с нулевым значением) покрывающих его подпространств (рис. 7). Причем чем выше амплитуда результирующей композиции, тем более уникальным является подпространство. Это позволяет контролировать редкость определенных генераций.

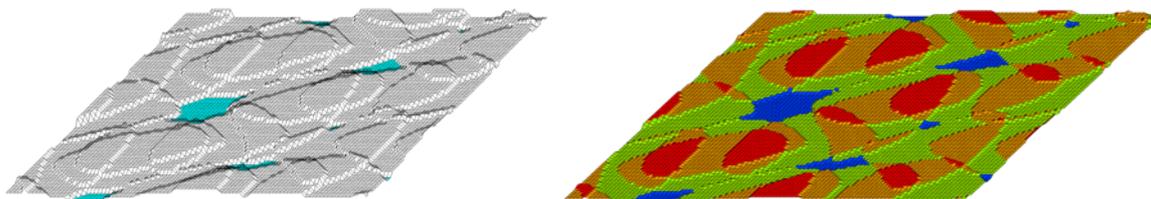


Рисунок 7 – Пример композиции нескольких масок

Разработка языка управления генератором

Базовые определения стали основой разработанного языка управления периодическими функциями и композициями периодических функций. Рассмотрим основные операторы предлагаемого языка управления генератором.

Оператор периодической функции, представляющей собой суперпозицию трех синусоид

$$\mathbf{W3} \text{ name } x_0 \ y_0 \ dx_1 \ dy_1 \ p_1 \ a_1 \ dx_2 \ dy_2 \ p_2 \ a_2 \ dx_3 \ dy_3 \ p_3 \ a_3,$$

где x_0, y_0 – нулевая точка; dx_i, dy_i – направление распространения гармоника; p_i и a_i – период и амплитуда гармоника; *name* – имя периодической функции.

Оператор композиции периодических функций

$$\mathbf{MIX} \text{ name } \text{name}_1 \ \text{name}_2 \ \dots,$$

где *name* – имя композиции; $\text{name}_1, \text{name}_2, \dots$ – имена периодических функций, входящих в композицию.

Оператор максимума композиции

$$\mathbf{MAX} \text{ name } \text{name}_1 \ \text{name}_2 \ \dots,$$

где *name* – имя композиции; $\text{name}_1, \text{name}_2, \dots$ – имена композиций-операндов.

Оператор минимума композиции

$$\mathbf{MIN} \text{ name } \text{name}_1 \ \text{name}_2 \ \dots,$$

где *name* – имя композиции; $\text{name}_1, \text{name}_2, \dots$ – имена композиций-операндов.

Оператор ограничения композиции по не превышению порога или периодической функции

$$\mathbf{RD} \text{ name } d,$$

где *name* – имя композиции; d – пороговое значение.

Оператор ограничения композиции по превышению порога или периодической функции

$$\mathbf{RDU} \text{ name } d,$$

где *name* – имя композиции; d – пороговое значение.

Оператор ограничения в ноль композиции или периодической функции

$$\mathbf{RDZ} \text{ name } d,$$

где *name* – имя композиции; d – пороговое значение.

Оператор ограничения композиции или периодической функции другой композицией или периодической функцией

$$\mathbf{RW} \text{ name}_1 \ \text{name}_2 \ d,$$

где name_1 – имя ограничиваемой композиции; name_2 – имя ограничивающей композиции; d – пороговое значение.

Оператор маски

MASK name,

где name – имя композиции, по которой строится маска.

Рассмотрим пример 1 получения композиции (рис. 8):

W3w0 0 0 -0.9 0.13 0.9 0.3 0.5 0.75 0.7 0.3 0.4 -0.87 0.5 0.3

W3w1 0 0 1 0.2 10 2 -0.5 0.7 10 2 -0.5 -0.7 10 2

W3w2 0 0 0.4 0.5 3 1 0.7 -0.5 3.2 1.5 -0.3 -0.8 2.5 1

MIXw3 w2 w0 w1

RWw3 w3 0.3

MIXELw3

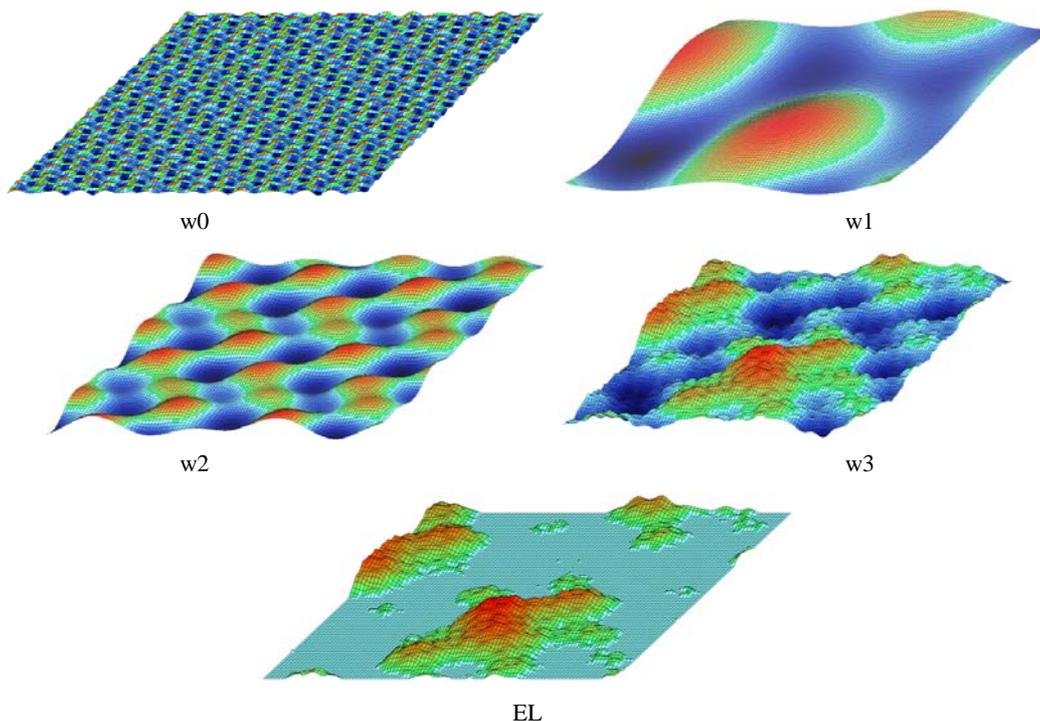


Рисунок 8 – Периодические функции и композиции из примера 1

Оператор сложения периодической функции с числом

ADD name d,

где name – имя композиции; d – число.

Оператор масштабирования композиции или периодической функции

SCALE name d,

где name – имя композиции или периодической функции; d – масштаб.

Оператор перемножения композиций или периодических функций

MUL name₁ name₂,

где name₁ – имя умножаемой композиции; name₂ – имя композиции множителя.

Оператор умножения композиций или периодической функции на число

MUL name₁ d,

где name₁ – имя умножаемой композиции; d – множитель.

Оператор перемножения композиций

MULT name₁ name₂ name₃,

где name₁ – имя композиции результата; name₂ и name₃ – имена перемножаемых композиций.

Оператор сдвига композиции или периодической функции

SHIFT name d_x d_y,

где name – имя сдвигаемой композиции; d_x d_y – величина сдвига в плоскости распространения волны.

Оператор инверсии композиции или периодической функции

REVERS name,

где name – имя композиции, подвергаемой инверсии.

Оператор селекции композиции или периодической функции

CASE name₁ name₂ name₃ d,

где name₁ – имя результирующей композиции; name₂ – имя композиции оригинала; name₃ – имя композиции условия; d – уровень условия.

Оператор выбора является мощным средством сокращения вычислительных операций, он позволяет создать карту условий для подпространств с разной математикой, где каждое подпространство локализовано на своем уровне высоты и обеспечивает плавность сопряжения подпространств.

Рассмотрим пример 2 применения селектора (оператора выбора) (рис. 9):

```

W3w0      0 0      -0.9 0.13 0.9 0.3      0.5 0.75 0.7 0.3      0.4 -0.87 0.5 0.3
W3mega1   1230 3450 0.3 0.7 130949 0.3      0.6 -0.4 134212 0.4      -0.6 -0.71 142534 0.3
W3mega2   30 13450 -0.9 0.12 230949 0.3      0.6 -0.4 334212 0.4      0.6 0.71 242534 0.3
W3mega3   0 0      0.5 0.7 109049 0.3      -0.6 -0.45 103412 0.3      -0.6 0.71 104534 0.4
MIXm1     mega1 mega2 mega3
CASEc1     w0m1 2
MIXELc1    m1
  
```

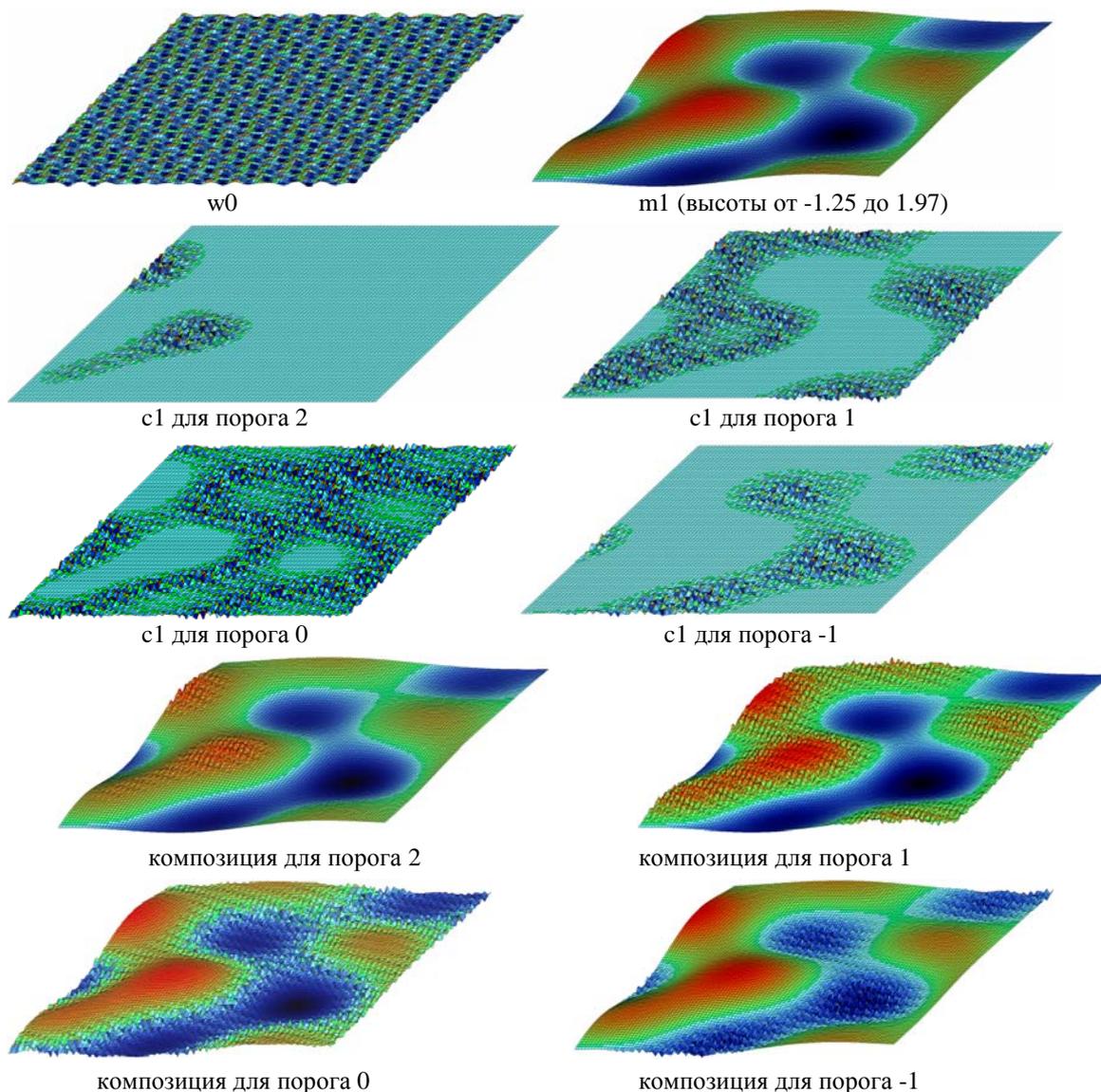


Рисунок 9 – Периодические функции и композиции из примера 2

Из примера 2 видно, как можно выборочно применять композиции для областей, определяемых уровнями представления разбиения пространства.

Оператор копирования композиций или периодических функций

COPY name₁ name₂,

где name₁ – имя копии композиции; name₂ – имя копируемой композиции.

Рассмотрим еще несколько интересных операций над периодическими функциями. Данные операции неприменимы к композициям, поскольку работают с фазами волн.

Оператор фазового сдвига

FASA name₁ name₂,

где name₁ – имя периодической функции, у которой будет происходить фазовый сдвиг на величину, задаваемую значением периодической функции второго операнда, name₂ – имя периодической функции, значения которой интерпретируются как величина фазового сдвига.

Рассмотрим пример 3 (рис. 10):

```

W3 mega1 1230 3450 0.3 0.7 530949 0.3 0.6 -0.4 634212 0.4 -0.6 -0.71 742534 0.3
W3pl1 0 0 1 0 23 0.3 1 0 28 0.5 1 0 45 0.87
W3pl2 0 0 0.6 0.3 33 0.7 0.6 0.3 38 0.5 0.6 0.3 35 0.87
W3pl3 0 0 0.3 0.6 63 0.3 0.3 0.6 48 0.53 0.3 0.6 15 0.7
W3pl4 0 0 0 1 73 0.67 0 1 126 0.75 0 1 68 0.37
MIX plx pl1 pl2 pl3 pl4
MUL plx 10
COPY super1 mega1
FASA super1 plx
    
```

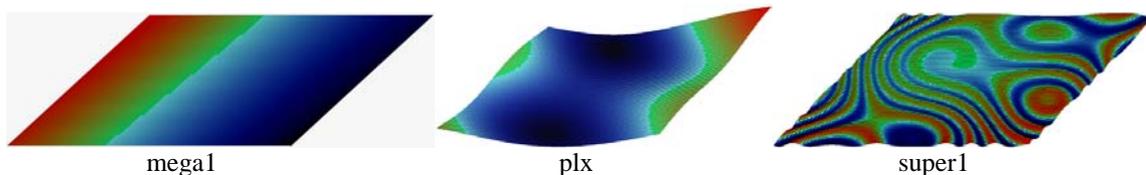


Рисунок 10 – Периодические функции и композиции из примера 3

Применение данной функции позволяет получить интересные профили поверхности, например, при генерировании пещер (рис. 11).

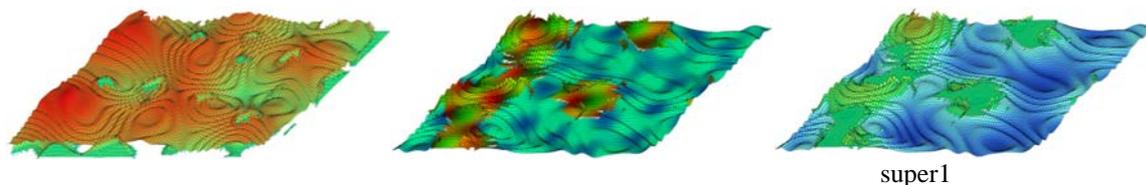


Рисунок 11 – Пещеры и композиции из примера 3

Рассмотрим операторы быстрого выбора областей.

Оператор выбора композиции

SELECT name₁ op name₂

d₁ name₃

d₂ name₄

...

END

где name₁ – имя результирующей композиции; name₂ – имя композиции шаблона выбора; d₁, d₂, ... – значения порогов; name₃, name₄ – имена композиций-источников.

Оператор выбора ближайшей композиции

SELECTNEAREST name₁ op name₂

d₁ name₃

d₂ name₄

...

END

где name₁ – имя результирующей композиции; name₂ – имя композиции шаблона выбора; d₁, d₂, ... – значения порогов; name₃, name₄ – имена композиций-источников.

Поясним работу операторов выбора на примере 4 (рис. 12):

// пусть у нас есть две периодические функции, колеблющиеся в пределах ± 1 на уровнях 12 и 6:

```
W3 whi 0 0 1 0 300 0.25 0.5 0.7 300 0.3 -0.5 0.7 300 0.35
```

```
ADD whi 12
```

```
COPY hiwhi
```

```
ADD hi 6
```

```
// Создадим холм высотой 9
```

```
W3 circle 0 0 1 0 1500 0.25 0.5 0.7 1500 0.3 -0.5 0.7 1500 0.35
```

```
MUL circle 8
```

```
ADD circle 2
```

```
/*
```

Холм выступает шаблоном. Там, где значение высоты на холме равно 8, в итоговую композицию будет проецироваться функция *hi*. С удалением от уровня 8 ее влияние будет уменьшаться, по достижению отклонения значения 1 влияние функции будет равно 0. Между уровнями 8 и 9 будет наблюдаться плавный переход от функции *whi* к функции *hi*.

```
*/
```

```
SELECTWoncircle
```

```
9 hi
```

```
8 whi
```

```
END
```

```
/*
```

В отличие от предыдущего выбора оператор **SELECTNEAREST** обеспечивает скачкообразный переход к функции, чей порог оказывается ближе.

```
*/
```

```
SELECTNEARESTWNoncircle
```

```
9 hi
```

```
8 whi
```

```
END
```

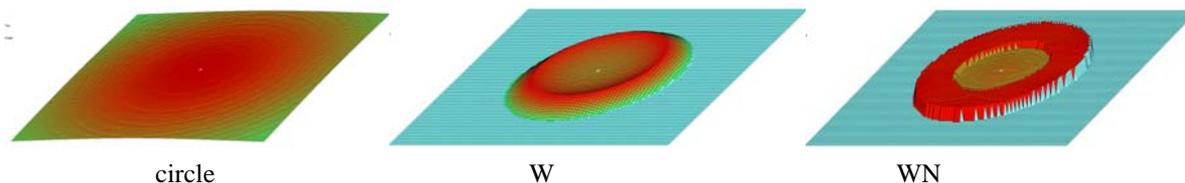


Рисунок 12 – Визуализации к примеру 4

Макрокоманды

Макрокомандами (макросами) называются сложные операторы, которые построены на основе комбинации более простых команд (базовых команд).

Синтаксис описания макроса:

```
PROCname
```

```
// тело макроса в виде последовательности операторов языка управления генератором.
```

```
// в операндах операторов могут использоваться ключи вставки реальных параметров,
```

```
// передаваемых при вызове макроса. Для вставки параметров применяется
```

```
// следующий синтаксис ключа: #0#, #1#, #2#, ... с номером операнда.
```

```
END
```

где *name* – имя макроса.

Оператор вызова макроса

```
CALL name1 name2 p1 p2 p3 ...
```

где *name₁* – имя макроса; *name₂* – имя результирующей композиции; *p₁, p₂, p₃, ...* – операнды (имена композиций, числа).

Рассмотрим пример 5 описания макроса и результат его вызова:

```

PROCgo
/*
создадим две периодические функции: первую с именем go1#0# – основную, и вторую с именем
go2#0# – для фазового сдвига.
*/
W3 go1#0# #1# #2# 1 0.2 #3# 0.33 0.5 0.7 #3# 0.33 -0.5 0.7 #3# 0.33
W3 go2#0# #1# #2# 1 0.2 100 1 0.5 0.7 100 1 -0.5 0.7 100 1
FASA go1#0# go2#0#
MIX #0# go1#0#
END
CALL go S1 0 0 200
CALL go S2 100 0 200
CALL go S3 200 0 200
CALL go S4 300 0 200
CALL go S5 400 0 200
MIXGS1 S2 S3 S4S5

```

Результат выполнения вызовов макроса представлен на рисунке 13.

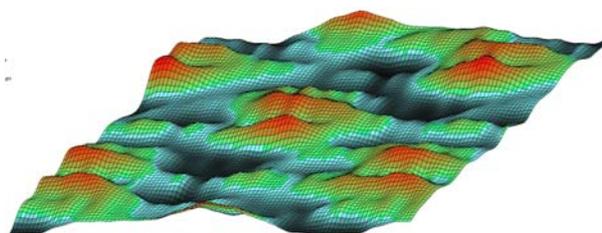


Рисунок 13 – Визуализации к примеру 5

Заключение. Разработанный в рамках данной работы метод генерирования ландшафта на основе композиции гармонических функций и предложенный формальный язык описания генератора ландшафта обладают выразительностью и позволяют формировать оптимизированные по производительности генераторы неограниченного воспроизводимого ландшафта. Данный инструмент может быть применен в области компьютерной графики и 3D-моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Paul Martz Generating Random Fractal Terrain [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.gameprogrammer.com/fractal.html>.
2. Guibas, L. Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of Voronoi / Lenoidas Guibas, Jorge Stolfi // ACM. – 1985. – P. 107. – (Retrieved 2009-08-01).
3. Lloyd, S. P. Least squares quantization in PCM / Stuart P. Lloyd // IEEE Transactions on Information Theory. – 1982. – Vol. 28 (2). – P. 129–137. – DOI : 10.1109/TIT.1982.1056489.
4. Advances in multimedia modelling : 13th International Multimedia Modeling Conference / ed. Tat-Jen Cham. – 2007. – ISBN 3-540-69428-5.

Поступила 18.09.2015

FORMAL LANGUAGE OF GENERATOR DESCRIPTION OF THE THREE-DIMENSIONAL LANDSCAPE ON THE BASIS OF THE COMPOSITIONS OF HARMONIC FUNCTIONS

D. GLUKHOV, R. BOGUSH, T. GLUKHOVA

Generating landscape are relevant to the theory of computer simulation. Of particular relevance, this trend has been in solving the three-dimensional computer graphics. In this paper an attempt is made to offer a mechanism of formation of the landscape using the compositions of harmonic functions. To achieve this, there is provided a formal description language generator difficult terrain, as well as to develop appropriate software.

УДК 004.056:534.61

ОЦЕНКА НОРМАТИВНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ЗАЩИЩЕННОСТИ РЕЧЕВОГО СИГНАЛА СЛОЖНЫМ СИГНАЛОМ С БОЛЬШОЙ БАЗОЙ

д-р техн. наук, проф. В.К. ЖЕЛЕЗНЯК, И.Б. БУРАЧЕНОК
(Полоцкий государственный университет)

Предложен способ оценки нормативного показателя защищенности речевого сигнала по критерию разборчивости речи в k -полосах равной разборчивости речевого сигнала в шумах высокого уровня сложным измерительным сигналом с большой базой. Величина нормативного показателя защищенности речевого сигнала определяется как отношение показателя защищенности речевого сигнала в виде численного значения отношения сигнал/шум измерительного сложного сигнала с большой базой на выходе канала утечки речевой информации к нормативному показателю численного значения отношения сигнал/шум измерительного гармонического сигнала при условии, что отношения сигнал/шум исходных измерительных сигналов равны. Показано преимущество сложного измерительного сигнала с большой базой перед гармоническим при оценке защищенности каналов утечки речевой информации.

Введение. Оценка защищенности в каналах утечки речевой информации по установленным нормативным требованиям регламентирована в Республике Беларусь СТБ 34.101.29-2011. Защищенность каналов утечки речевой информации оценивают в реальном масштабе времени и с высокой точностью и высокой чувствительностью по численным значениям отношения сигнал/шум (энергетический показатель) или по критерию разборчивости речи (информационный показатель).

Для оценки защищенности в каналах утечки речевой информации широко применяется в качестве измерительного гармонический сигнал, обоснованный корреляционной теорией разборчивости речи [1]. Метод гармонического измерительного сигнала обладает рядом преимуществ по сравнению с другими и обусловлен рядом положительных свойств. Методическая погрешность оценки защищенности речевого сигнала измерительным гармоническим сигналом на одной частоте в каждой из k -полос равной разборчивости не в полной мере учитывает неравномерности АЧХ преграды. Для снижения методической погрешности при оценке защищенности речевого сигнала гармоническим измерительным сигналом необходимо обосновать применение для оценки сложного измерительного сигнала с большой базой.

Целью работы является установление математической зависимости между нормированным показателем защищенности гармоническим измерительным сигналом и показателем защищенности сложным измерительным сигналом с большой базой [2, 3] для обоснования преимуществ последнего в качестве измерительного.

Нормированный показатель защищенности речевого сигнала, установленный для метода гармонического сигнала [1], подтверждает возможность однозначно оценивать защищенность речевого сигнала и установить обоснованный нормированный показатель защищенности речевого сигнала методом сложного измерительного сигнала с большой базой.

Оценку нормативного показателя защищенности речевого сигнала целесообразно осуществить по критерию разборчивости речи в k -полосах равной разборчивости в шумах высокого уровня. Для оценки формируем k измерительных сигналов с большой базой в k -полосах равной разборчивости. Исходными данными измерительных сигналов являются одинаковые значения длительности T_c и девиации частоты $\pm \Delta f_k$, перекрывающей каждую из k -полос равной разборчивости ($k = \overline{1, n}$, k – порядковый номер полосы равной разборчивости, n – количество полос равной разборчивости) [4].

Энергетический спектр W сложного сигнала с большой базой представим выражением [5]:

$$W = \frac{\pi U_0^2}{2\mu}, \quad (1)$$

где U_0 – амплитуда огибающей сигнала; $\mu = \Delta\omega / T_c$ – скорость нарастания частоты сложного сигнала с большой базой.

Выражение (1) представим $W = \frac{\pi U_0^2}{2\mu} = \frac{\pi U_0^2 T_c}{2\pi \Delta f} = \frac{U_0^2 T_c^2}{2\Delta f T_c} = \frac{U_0^2 T_c^2}{B}$, где B – база сложного сигнала,

определяемая произведением девиации частоты в k -полосах равной разборчивости на длительность сигнала $B = 2\Delta f T_c$, имеющая различные значения для каждой k -й полосы равной разборчивости [6].

Для детерминированного сигнала [7] отношение сигнал/шум в диапазоне $0 \leq t \leq T_c$ определяют как $q_{\text{вых}}^2 = \frac{2E}{N_0}$, где N_0 – спектральная плотность мощности шума [8]. Отношение сигнал/шум для сложного сигнала с большой базой можно записать:

$$q_{\text{вых_сл}}^2 = \frac{2U_0^2 T_c^2}{BN_0 R} 2\Delta f = \frac{2U_0^2 T_c^2 2\Delta f}{T_c 2\Delta f N_0 R} = \frac{2U_0^2 B}{2\Delta f N_0 R} = \frac{P_c}{P_{ш}} 2B, \quad (2)$$

где $P_{ш}$ – мощность шума в заданной полосе равной разборчивости $2\Delta f$, равная $P_{ш} = N_0 2\Delta f$, а P_c – мощность сигнала, равная $P_c = \frac{U_0^2}{R}$, где $R = 1 \text{ Ом}$.

Таким образом, отношение сигнал/шум на выходе приемника $q_{\text{вых_сл}}^2$ связано с отношением сигнал/шум на входе приемника $\rho_{\text{вх}}^2 = P_c / P_{ш}$:

$$q_{\text{вых_сл}}^2 = 2B\rho_{\text{вх_сл}}^2. \quad (3)$$

Отношение сигнал/шум на выходе $q_{\text{вых_сл}}^2$ определяет рабочие характеристики приема сложных сигналов с большой базой, а отношение сигнал/шум на входе $\rho_{\text{вх_сл}}^2$ – энергетику сигнала и шума. Величина $q_{\text{вых_сл}}^2$ может быть получена, даже если $\rho_{\text{вх_сл}}^2 \ll 1$. Для этого достаточно выбрать сложные сигналы с величиной базы B , удовлетворяющей выражению (3) [2]. Как видно из отношения (2), прием сложных сигналов с большой базой сопровождается подавлением шума на выходе.

На рисунке 1 представлена зависимость базы сложного измерительного сигнала от отношения сигнал/шум на входе $\rho_{\text{вх}}^2$ дБ при значениях h_0^2 , равных $-20, 10, 20$ и 30 дБ, построенных согласно того, что в широкополосных системах связи прием информации характеризуется отношением сигнал/шум $h_0^2 = \frac{q_{\text{вых}}^2}{2}$ [2], т.е. $h_0^2 = B\rho_{\text{вх}}^2$.

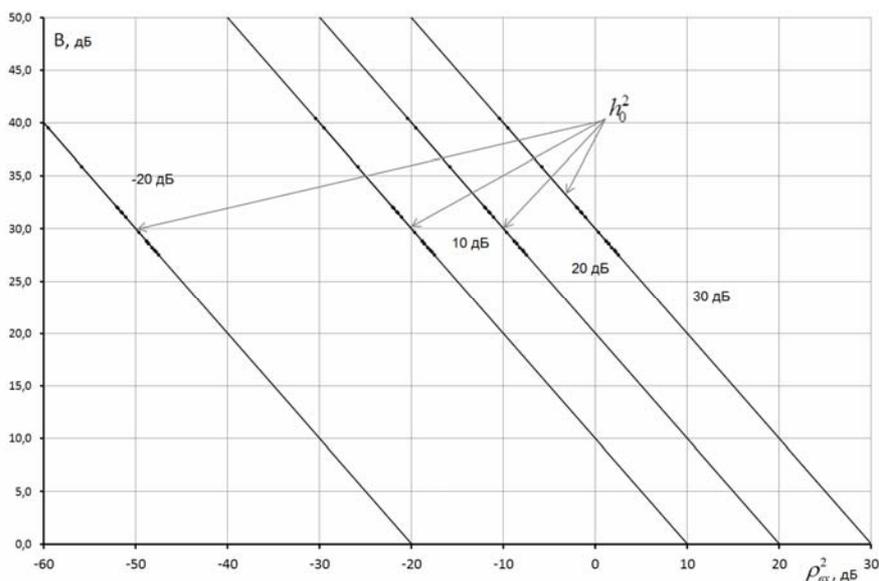


Рисунок 1 – Зависимость базы B сложного измерительного сигнала от отношения сигнал/шум на выходе приемника $\rho_{\text{вх}}^2$

Например, если база равна $27,5$ дБ (т.е. $B = 560$, данные значения базы для сложного сигнала в третьей полосе N_3 равной разборчивости (наиболее критичная полоса) при длительности сигнала $T_c = 4$ с) и необходимо иметь на выходе приемника $h_0^2 = 20$ дБ, то на вход приемника подаем не менее чем $\rho_{\text{вх}}^2 = -7,5$ дБ. Таким образом, чем больше база сложного измерительного сигнала, тем меньше отношение сигнал/шум на входе приемника можно допустить при заданной надежности обнаружения.

Для примера, когда каждая полоса равной разборчивости имеет постоянное значение девиации частоты $\pm\Delta f_k$, при увеличении длительности T_c исходного сигнала можно увеличивать значение размера базы и тем самым улучшать отношение сигнал/шум на выходе приемника. Зависимость заданного отношения сигнал/шум сложного измерительного сигнала с большой базой на выходе приемника от отношения сигнал/шум на входе приемника представлена на рисунке 2.

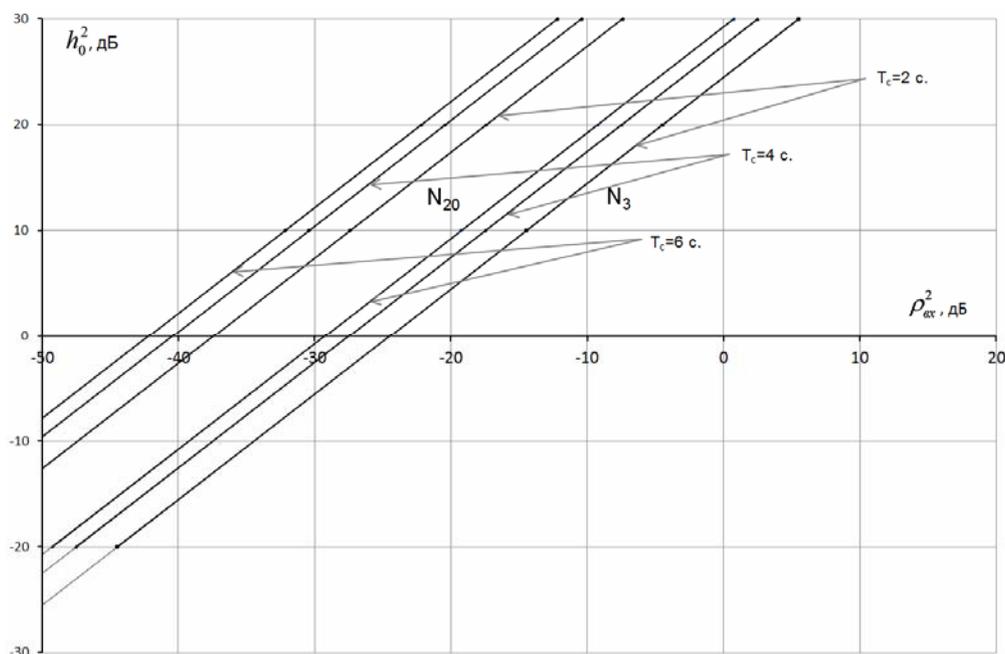


Рисунок 2 – Зависимость отношения сигнал/шум сложного измерительного сигнала с большой базой на выходе приемника h_0^2 от отношения сигнал/шум на входе приемника ρ_{ex}^2 при T_c , равном 2, 4, 6 с, в N_3 и N_{20} полосах равной разборчивости

Однако увеличение длительности сложных измерительных сигналов обуславливает увеличение времени оценки защищенности каналов утечки речевой информации.

База гармонического сигнала равна единице $B=1$ [2]. При использовании его для оценки защищенности речевого сигнала отношение сигнал/шум на выходе канала утечки речевой информации можно представить в виде $q_{вых_гар}^2 = \frac{2E}{N_0} = \frac{P_c T_c}{N_0} \frac{2\Delta f}{2\Delta f} = \frac{P_c}{N_0} \frac{B}{2\Delta f} = \frac{P_c}{N_0}$ или

$$q_{вых_гар}^2 = \frac{2E}{N_0} = \frac{P_c}{P_{ш}}. \quad (4)$$

Нормативный показатель, устанавливающий математическую зависимость между нормированным показателем защищенности гармоническим измерительным сигналом и показателем защищенности сложным измерительным сигналом с большой базой, определяют как отношение сигнал/шум на выходе канала утечки речевой информации, оцененное при помощи сложного сигнала с большой базой $q_{вых_сл}^2$, к нормативному показателю $q_{вых_гар}^2$ защищенности речевого сигнала в виде численного значения отношения сигнал/шум гармонического измерительного сигнала [9]:

$$\delta_{сл} = \frac{q_{вых_сл}^2}{q_{вых_гар}^2}. \quad (5)$$

Если нормативный показатель защищенности речевого сигнала гармоническим измерительным сигналом определяется как $q_{вых_гар}^2 = \left(\frac{P_c}{P_{ш}} \right)_{норм}$, то при равенстве отношений сигнал/шум выход-

ных измерительных сигналов гармонического и сложного с большой базой $\left(\frac{P_c}{P_{ш}}\right)_{сл} = \left(\frac{P_c}{P_{ш}}\right)_{норм}$ имеем следующее отношение:

$$\delta_{сл} = \frac{q_{вых_сл}^2}{\left(\frac{P_c}{P_{ш}}\right)_{норм}} = \frac{B\left(\frac{P_c}{P_{ш}}\right)_{сл}}{\left(\frac{P_c}{P_{ш}}\right)_{норм}} = B. \tag{6}$$

С помощью математической модели (6), устанавливающей однозначную связь метода оценки разборчивости речи сложным измерительным сигналом с большой базой с методом гармонического измерительного сигнала оценки разборчивости речи, показано однозначное преимущество первого метода перед вторым, определяемое величиной базы первого сигнала, равной произведению времени существования сигнала на удвоенную девиацию частоты в пределах полосы равной разборчивости.

Из выражения (6) следует, что увеличение (выигрыш) отношения сигнал/шум на выходе канала утечки речевой информации при использовании в качестве измерительного сложного сигнала с большой базой по сравнению с отношением сигнал/шум на его выходе при использовании в качестве измерительного гармонического сигнала зависит от размера базы сложного сигнала.

Обозначим полосы равной разборчивости N_k , где $k = 1, \dots, 20$ – порядковый номер полосы, и приведем теоретически обоснованные расчетные значения порогов обнаружения сложных измерительных сигналов с большой базой при необходимости получения на выходе приемника заданного отношения сигнал/шум 0 и 5 дБ (таблица).

Таблица – Расчетное значение порога обнаружения сложных измерительных сигналов с большой базой при необходимости получения на выходе приемника заданного отношения сигнал/шум 0 и 5 дБ

N_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B , дБ	31	28	27	28	28	27	29	29	29	29
ρ_{ex}^2 при $h_0^2=0$, дБ	-31	-28	-27	-28	-28	-29	-29	-29	-29	-29
ρ_{ex}^2 при $h_0^2=5$, дБ	-26	-23	-22	-23	-23	-24	-24	-24	-24	-24

Продолжение таблицы

N_k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B , дБ	29	29	30	31	32	32	32	36	40	40
ρ_{ex}^2 при $h_0^2=0$, дБ	-29	-29	-30	-31	-32	-32	-32	-36	-40	-40
ρ_{ex}^2 при $h_0^2=5$, дБ	-24	-24	-25	-26	-27	-27	-27	-31	-35	-35

На рисунке 3 приведен график нормированных значений коэффициента разборчивости речи K_p на выходе канала утечки речевой информации для измерительных сигналов гармонического и сложного с большой базой.

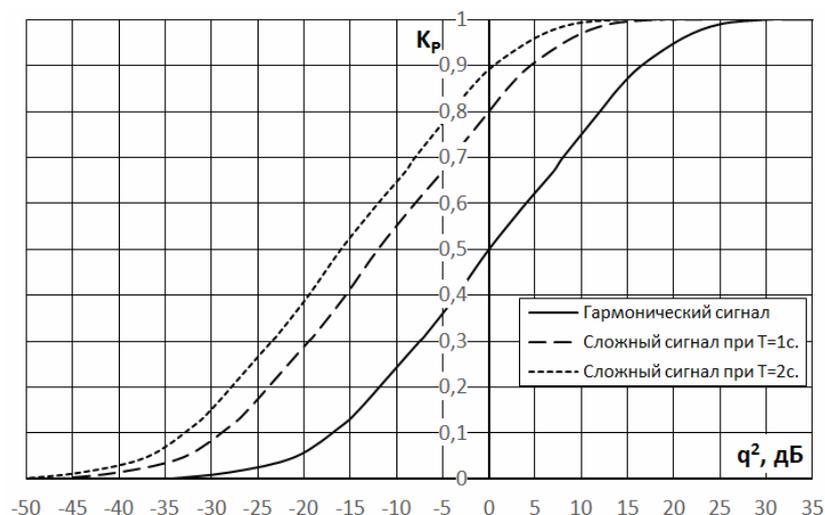


Рисунок 3 – Зависимость коэффициента разборчивости речи K_p от отношения сигнал/шум на выходе канала утечки речевой информации для измерительных сигналов гармонического и сложного с большой базой

Из графика следует, что чем больше база измерительного сложного сигнала, тем выше возможность его обнаружения на фоне помех относительно измерительного гармонического сигнала. Таким образом, преимуществом сложных измерительных сигналов с большой базой является то, что с их помощью возможно получить большие значения отношения сигнал/шум на выходе канала утечки речевой информации.

Заключение. Установленная математическая зависимость критерия оценки защищенности речевого сигнала сложным измерительным сигналом с большой базой с критерием оценки защищенности речевого сигнала гармоническим измерительным сигналом позволила обосновать преимущество сложного измерительного сигнала с большой базой для оценки защищенности речевого сигнала. Расчетным путем показана возможность улучшения отношения сигнал/шум на выходе канала утечки речевой информации в k -полосах равной разборчивости на 12 дБ при длительности сигналов $T_c = 1$ с и на 16 дБ при $T_c = 4$ с. Как элемент базы девиация частоты ограничена шириной каждой k -полосы равной разборчивости, и поэтому при постановке задачи получения результатов в реальном режиме времени она является ограничивающим фактором.

ЛИТЕРАТУРА

1. Железняк, В.К. Защита информации от утечки по техническим каналам : учеб. пособие / В.К. Железняк. – СПб. : ГУАП, 2006. – 188 с.
2. Варакин, Л.Е. Теория сложных сигналов / Л.Е. Варакин. – М. : Советское радио, 1970. – 376 с.
3. Чердынцев, В.А. Проектирование радиотехнических систем со сложными сигналами : учеб. пособие для радиотехн. специальностей вузов / В.А. Чердынцев. – Минск : Высш. шк., 1979. – 192 с.
4. Бураченко, И.Б. Представление параметров широкополосного линейно-частотно-модулированного сигнала для оценки разборчивости речи в технических каналах утечки информации / В.К. Железняк, К.Я. Раханов, И.Б. Бураченко // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2014. – № 12. – С. 2–12.
5. Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для вузов по спец. «Радиотехника». – 2-е изд., перераб. и доп. / С.И. Баскаков. – М. : Высш. шк., 1988. – 448 с.
6. Бураченко, И.Б. Корреляционная частотно-временная обработка широкополосных ЛЧМ-сигналов для оценки разборчивости речи в каналах утечки информации. / В.К. Железняк, И.Б. Бураченко // Интеллектуальные системы на транспорте : материалы V междунар. науч.-практ. конф. «ИнтеллектТранс-2015», СПб., 2-3 апр. 2015 г. / ПГУПС. – СПб., 2015. – С. 286–292.
7. Сигналы радиотехнические измерительные. Термины и определения : ГОСТ 16465-70. – введ. 01.07.1971 (с изм. № 1, 01.07.2005). – М. : ИПК Изд-во стандартов, 2008. – 30 с.
8. Линдсей, В.С. Системы синхронизации в связи и управлении / В.С. Линдсей ; пер. с англ. ; под ред. Ю.Б. Бакаева и М.В. Капанова. – М. : Сов. радио. 1978. – 600 с.
9. Бураченко, И.Б. Оценка нормативных показателей защищенности речевого сигнала в аналоговой и цифровой форме. / В.К. Железняк, Д.В. Рябенко, И.Б. Бураченко // Современные средства связи : материалы XX Междунар. науч.-техн. конф., Минск, 14-15 окт. 2015 г. / УО «ВГКС» ; редкол.: А.О. Зеневич [и др.]. – Минск, 2015. – С. 168–169.

Поступила 03.09.2015

ASSESSMENT OF THE NORMATIVE PROTECTION INDICATOR OF SPEECH SIGNAL BY MEANS OF COMPLEX SIGNAL WITH A LARGE BASE

V. ZHELEZNYAK, I. BURACHONAK

This paper proposes a method of assessing a normative protection indicator of speech signal by the criterion of speech intelligibility in the k -band of equal to intelligibility of the speech signal in a high noise level by means of complex measuring signal with a large base. The value of the normative protection indicator of speech signal is defined as a ratio of protection indicator of speech signal in a form of a numeric value signal/noise ratio of the measuring complex signal with a large base at the output of speech data leakage channel to the numerical value standard indicator of the signal/noise ratio of the measuring harmonic signal provided that the signal/noise ratio of the original measuring signals are equal. The advantage of the complex measuring signal with a large base over harmonic signal when assessing protection of speech data leakage channels is shown.

УДК 681.3.06

НЕРЕКУРСИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММИРУЕМЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СХЕМ АРХИТЕКТУРЫ FPGA

В.М. ЧЕРТКОВ, канд. техн. наук, доц. **Р.П. БОГУШ**, **А.В. АНДРОЩУК**
(Полоцкий государственный университет)

Представлена структура двумерного нерекурсивного фильтра с использованием ПЛИС архитектуры FPGA для обработки крупноформатных изображений. При этом применен параллельно-конвейерный алгоритм. Представлена модель устройства, которая разработана и исследована в программном продукте Simulink. Для аппаратной реализации предлагается использовать ПЛИС XC6SLX75 семейства Spartan-6. В среде разработки Xilinx ISE определена максимальная задержка в цепях внутренней структуры ПЛИС. Рассчитана скорость обработки для двумерных фильтров различных размеров и представлены примеры обработки.

Введение. Обеспечение высокой производительности обработки крупноформатных изображений является актуальной задачей. Развитие технологий цифровой обработки изображений и внедрение их в различные производственные области предполагает значительное увеличение вычислительных затрат. Это приводит к необходимости совершенствования алгоритмической базы и использованию высокопроизводительных систем обработки. Одним из подходов повышения производительности вычислений является распараллеливание процесса обработки [1], которое в большинстве случаев реализуется при помощи специализированных интегральных схем (ИС), таких как программируемые логические интегральные схемы (ПЛИС) типа Field Programmable Gate Array (FPGA) [2]. Интегральные схемы такого типа представляют программируемую логическую матрицу (ПЛИМ), между элементами которой проложены электрически коммутируемые соединения. Это позволяет конфигурировать отдельные компоненты и создавать связи между ними путем загрузки в ПЛИС потока данных, включающего требуемые цепи и узлы коммутации. В результате из имеющихся в составе ПЛИМ ресурсов создается требуемая цифровая схема, которая при необходимости может быть легко модифицирована. Современные ПЛИС имеют достаточно большой объем ресурсов, достигающий миллионов эквивалентных логических вентилей, составляющих сотни тысяч логических ячеек, что позволяет проектировать цифровые устройства практически любой сложности [3]. Самые распространенные ПЛИС Xilinx и Altera содержат в архитектуре своих устройств специализированные модули DSP, которые могут выполнять умножение с накоплением с максимальной производительностью и перспективны для высокоскоростной обработки изображений [4].

Основная часть. Одной из базовых операций при цифровой обработке изображений является операция вычисления свертки. Данная операция широко используется при цифровой фильтрации, идентификации характеристик и оценивании параметров систем, классификации и распознавании образов, прогнозировании и моделировании. Корреляционная обработка и пространственная фильтрация – разновидности сверточного преобразования, т.е. они являются связанными, что предполагает вычисление суммы произведений над входными данными.

В задачах обработки изображений используют двумерные фильтры. Нерекурсивный двумерный фильтр с конечной импульсной характеристикой реализует свертку, т.е. за значение пикселя выходного изображения $G(n, m)$ принимается взвешенная сумма конечного числа пикселей обрабатываемого изображения $F(n, m)$:

$$G(n, m) = \sum_k \sum_{l \in D} h(k, l) F(n-k, m-l), \quad (1)$$

где $h(k, l)$ – двумерная матрица коэффициентов; $h(k, l)$ – коэффициенты фильтра; D – опорная область (размер окна, апертура) фильтра.

В случае высоких динамических искажений апертура фильтра имеет значительные размеры, из-за чего существенно возрастают вычислительные затраты, которые для каждого положения окна фильтра на изображении определяются необходимым числом операций умножения ($k \times l$) и необходимым числом операций сложения вычитания ($k \times (l-1)$). При этом количество положений фильтра на изображении оценивается как $(m-l+1) \times (n-k+1)$. Уменьшение размеров опорной области фильтра при значительных динамических искажениях входного изображения ухудшают качество обработанного изображения [5].

Цель работы – повышение быстродействия процедуры нерекурсивной двумерной фильтрации изображений за счет разработки и применения параллельно-конвейерного алгоритма с использованием ПЛИС архитектуры FPGA.

Методика эксперимента. Процедура фильтрации предполагает наложение окна фильтра на фрагмент изображения, вычисление результирующего значения для центрального элемента в пределах обрабатываемой области и последующий сдвиг окна на один пиксель вправо или вниз на один пиксель и влево на начало строки, т.е. окно скользит по изображению с верхнего левого края до правого нижнего. На основе данного подхода разработана внутренняя структура ПЛИС и алгоритм фильтрации полутоновых изображений с применением высокоскоростной памяти. Особенность подхода заключается в том, что из $i - 1$ строки изображения считываются и заполняют входной сдвиговый регистр по n пикселей (для маски размером $n \times n$), значения которых умножаются на соответствующие коэффициенты фильтра с последующим суммированием и записью результата в память. Особенностью разработанной структуры является возможность загрузки любого пикселя обрабатываемого изображения из высокоскоростной памяти во входной регистр, который состоит из сдвиговых регистров, соединенных определенным образом. Применяя данный метод можно сократить число запоминающих элементов до $n \times n$ для хранения отдельных пикселей исходного изображения при окне фильтра $n \times n$, обеспечивая высокую скорость обработки данных. Структурная схема, реализующая представленный способ двумерной фильтрации изображения с применением высокоскоростной памяти для хранения исходного изображения и результата обработки на базе ПЛИС, представлена на рисунке 1. Схема включает: тактовый генератор, который обеспечивает стабильную входную частоту до 100 МГц; повышающий внутренний тактовый генератор; коммутатор адреса 1, позволяющий загружать из памяти отдельные пиксели по задаваемому адресу; память для хранения; сдвигающий регистр получаемых данных, предназначенный для сдвига и хранения пикселей входного изображения; сдвигающий регистр коэффициентов фильтра, который хранит коэффициенты фильтра и осуществляет циклический сдвиг; блок умножения с накоплением, выполняющий свертку загруженных данных с коэффициентами фильтра; коммутатор адреса 2, который определяет адрес ячейки памяти для записи результата фильтрации на этапе обработки.

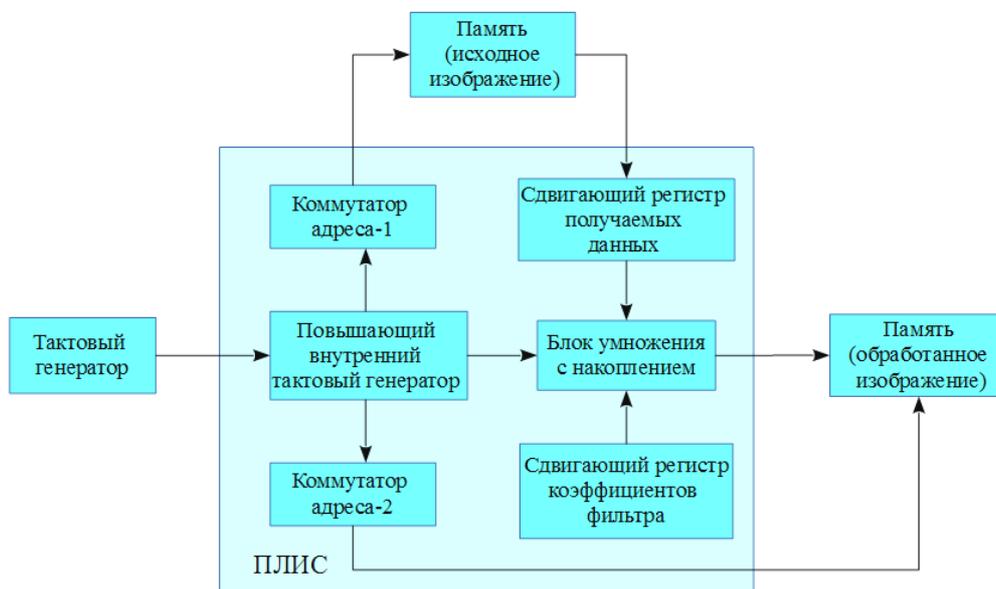


Рисунок 1 – Структурная схема двумерной фильтрации изображений на ПЛИС

Цветное изображение описывается значениями интенсивности пикселя, как правило, для трех каналов системы цветности RGB. Таким образом, для фильтрации могут быть использованы три фильтра, построенные по рассмотренной схеме и работающие параллельно во времени, которые могут быть размещены в одной ПЛИС.

Разработанная структура реализована в среде моделирования Simulink и представлена на рисунке 2. С использованием данной структуры подготовлены исходные данные и результат моделирования фильтра.

С помощью программного обеспечения систем MATLAB, Xilinx system generator среды Xilinx ISE 14.7 [6] синтезирована модель на языке описания аппаратуры Verilog для ПЛИС семейства Spartan-6.

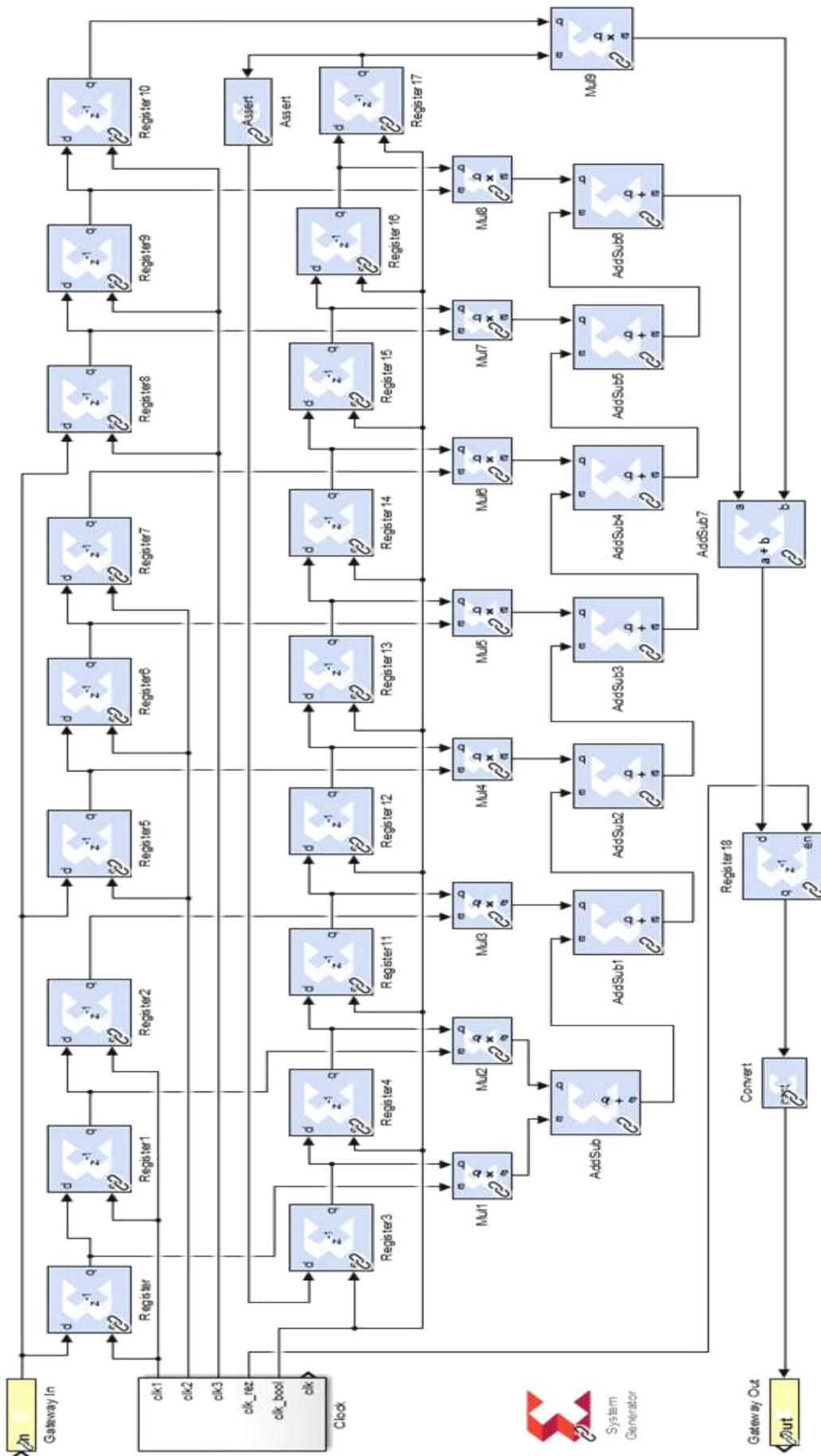


Рисунок 2 – Структурная модель двумерной фильтрации с апертурой размером 3×3

Основные характеристики выбранной ПЛИС приведены в таблице 1. Подбор ПЛИС осуществляется с учетом соответствия ее характеристик модели, синтезированной на языке описания аппаратуры Verilog.

Таблица 1 – Характеристики ПЛИС XC6SLX75 семейства Spartan-6

Количество секций Slices	Число логических ячеек Logic Cells	Аппаратные секции DSP48A1	Доступные контакты ввода/вывода	Максимальная системная частота тактирования
11 662	74 637	132	400	1000 МГц

В качестве примера использования ПЛИС для скоростной обработки полутоновых изображений и для определения времени на обработку одного пикселя используется изображение размером 512×512 пикселей и двумерный сглаживающий фильтр вида

$$h = \begin{bmatrix} 1/16 & 1/8 & 1/16 \\ 1/8 & 1/4 & 1/8 \\ 1/16 & 1/8 & 1/16 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Для обеспечения непрерывной обработки информации используется технология двухпортовой памяти. Блоки Register, Register1, Register2, Register5-Register10 представляют собой восьмиразрядные регистры данных и объединены в группы по три элемента. Каждая группа является сдвигающим регистром и имеет общую шину входных данных. Тактируются группы по отдельности, обеспечивая заполнение регистров входными данными по *n* соседних пикселей изображения.

Во входной регистр данных поступают пиксели согласно очередности загрузки, которая определяется алгоритмом обработки. При этом позиция загружаемого пикселя определяется логикой работы блока «Коммутатор адреса 1», которая заключается в том, что заполнение регистра производится по *n* пикселей (для фильтра размером *n*×*n*) из одной строки. После загрузки последнего из *n* пикселей происходит перемножение с накоплением и одновременным вычислением результата фильтрации, который записывается в определенную область выходной памяти. Следующие *n* пикселей загружаются из следующей по порядку строки, что обеспечивает равномерное заполнение окна двумерного фильтра из данных сдвиговых регистров и опять производится вычисление с выгрузкой результата в определенную ячейку памяти. Очередной этап заканчивается переходом с последней строки на первую. Процесс выбора и заполнения сдвигового регистра проиллюстрирован на рисунке 3.



Рисунок 3 – Пример загрузки и обработка пикселей с использованием фильтра размером 3×3

На рисунке 4 представлена структура модуля фильтрации на первом этапе моделирования с загруженными шестью пикселями. Заполнение сдвиговых регистров происходит последовательно, начиная с первого регистра, в каждый сдвигающий регистр заносятся данные из новой строки.

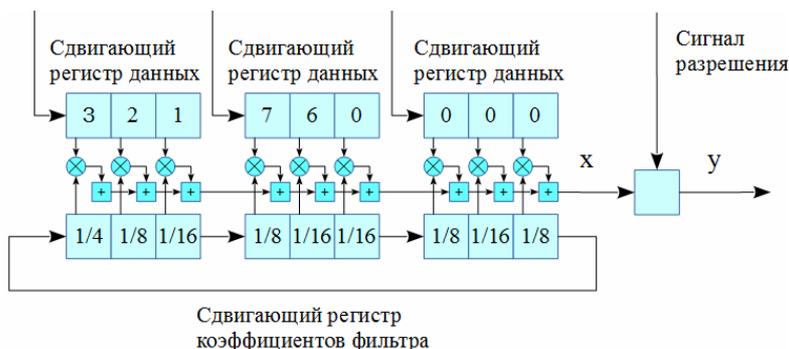
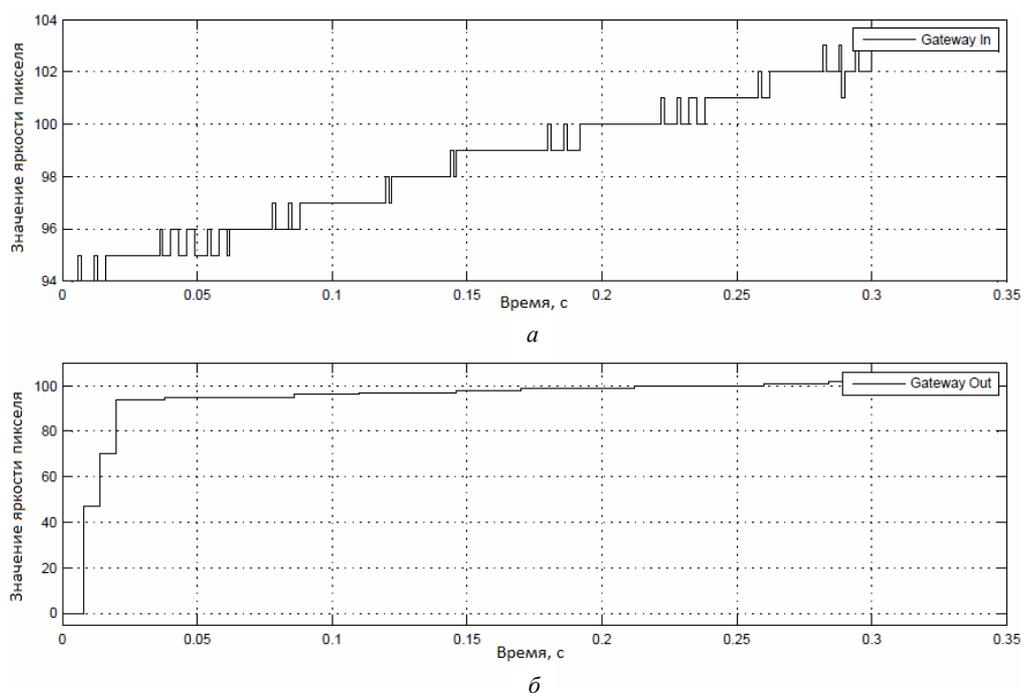


Рисунок 4 – Структура модуля фильтрации на первом этапе моделирования с загруженными шестью пикселями

Следует отметить, что умножение с накоплением происходит при каждой загрузке последующего пикселя, но результат данной операции считается справедливым после загрузки последнего из n пикселей в строке. В этот момент подается сигнал разрешения на запоминание текущего значения свертки данных с коэффициентами фильтра в сдвигающем регистре.

Результаты и их обсуждение. На рисунке 5, *а* продемонстрирована временная диаграмма загрузки изображения на восьмибитную шину данных в Simulink. На рисунке 5, *б* представлен результат двумерной фильтрации с коэффициентами фильтра, приведенными в выражении (2). Время моделирования рассчитывалось с учетом наглядности графика. При выбранной частоте семплирования 1/1000 и времени моделирования порядка 0.3 секунды обработано порядка 300 пикселей входного изображения.



**Рисунок 5 – Временные диаграммы для пикселей:
а – исходного изображения; б – выходного изображения**

Для оценки скорости обработки изображения использовался специализированный модуль Xilinx Timing Analyzer, который позволяет оценить реальную задержку прохождения сигнала через все логические элементы спроектированной системы и определить максимальную тактовую частоту работы ПЛИС.

Для определения быстродействия алгоритма фильтрации на базе ПЛИС спроектированы структуры для фильтров с размерами апертур 3×3, 5×5, 7×7, определены их основные параметры и максимальная тактовая частота. После проведения тестовых исследований выполнена оптимизация по размещению отдельных логических элементов в структуре ПЛИС и пересчитана тактовая частота работы всей системы. По полученным результатам рассчитано время, требуемое для обработки одного пикселя. В таблице 2 представлены основные характеристики для фильтров различных размеров, на рисунке 6 – результаты фильтрации на ПЛИС с использованием разработанных фильтров.

Таблица 2 – Параметры разработанных фильтров, реализуемых на ПЛИС

Наименование параметра	Размер апертуры фильтра		
	3×3	5×5	7×7
Количество секций Slices	239	619	1221
Количество элементов LUTs	172	658	1337
Количество триггеров в составе LUT	306	733	1411
Количество аппаратных секции DSP48A1	9	25	49
Минимальный период частоты тактирования, нс	17,11	33,45	65,43
Максимальная возможная частота тактирования, МГц	58,44	29,89	15,28
Максимальная частота тактирования после оптимизации, МГц	69,8	38,3	21,5
Количество тактов для обработки одного пикселя	6	10	14
Время, требуемое для обработки одного пикселя, нс	85,96	261,1	651,16

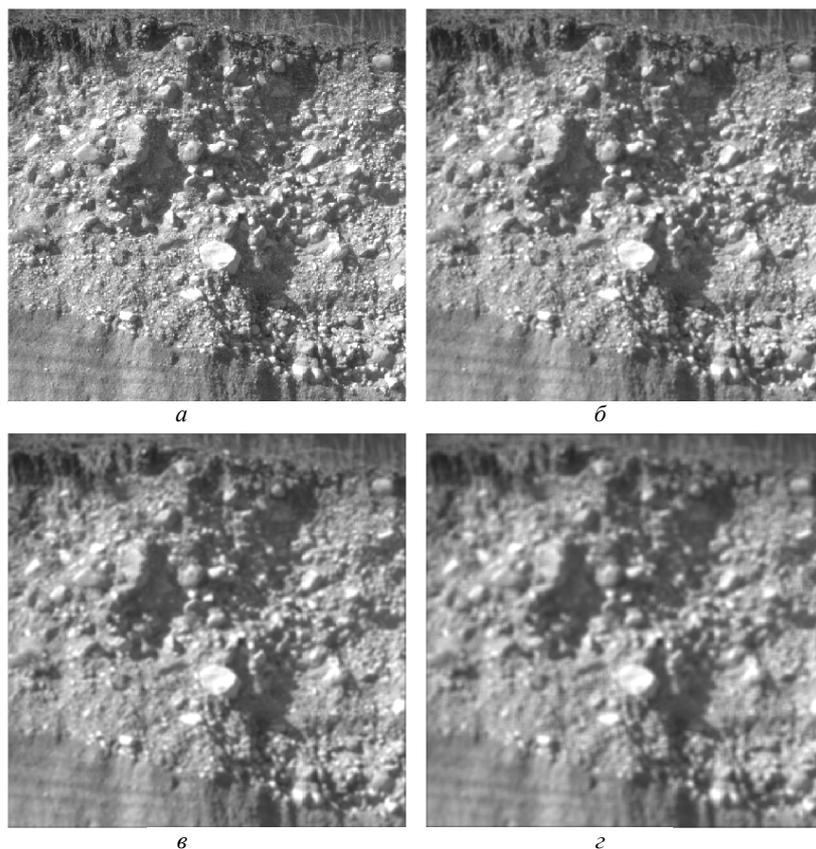


Рисунок 6 – Фильтрация изображения с использованием ПЛИС архитектуры FPGA:
a – исходное изображения; *б* – изображение, обработанное фильтром размером 3×3;
в – изображение, обработанное фильтром размером 5×5;
г – изображение, обработанное фильтром размером 7×7

Результаты моделирования показывают, что максимальная частота работы двумерных фильтров с размерами апертур 3×3, 5×5, 7×7, реализованных на одном кристалле ПЛИС XC6SLX75 серии Spartan-6, составляет 69,8 МГц, 38,3 МГц, 21,5 МГц соответственно. Для обработки массива данных скользящим окном размерностью 3×3 необходимо не более 6 тактов, размерностью 5×5 – не более 10, а для размерности 7×7 не более 14, т.е. на обработку одного пикселя тратится 85,96 нс, 261,1 нс и 651,16 нс соответственно. Программная реализация процедуры двумерной нерекурсивной фильтрации при использовании персонального компьютера с процессором Intel(R) Core(TM) i5-2450M 2500 МГц с двумя физическими ядрами и четырьмя логическими процессорами в программе MATLAB для окна размером 5×5 занимает 7,4 нс. Таким образом, целесообразность применения ПЛИС для фильтрации изображений очевидна.

Заключение. Использование высокопроизводительных ПЛИС архитектуры FPGA дает возможность повысить быстродействие по сравнению с цифровыми сигнальными процессорами и является перспективным направлением для предварительной обработки крупноформатных изображений. Разработана структура двумерного нерекурсивного фильтра с использованием ПЛИС на основе параллельно-конвейерного алгоритма. Представлена модель устройства, которая синтезирована и исследована в программном продукте Simulink. Для аппаратной реализации предлагается использовать ПЛИС XC6SLX75 семейства Spartan-6. В среде разработки Xilinx ISE определена максимальная задержка в цепях внутренней структуры ПЛИС. Проведенные исследования по оценке временных затрат для разработанных структур фильтров подтверждают эффективность их применения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Реконфигурируемые мультikonвейерные вычислительные структуры / И.А. Каляев [и др.]. – Ростов н/Д : Изд-во ЮНЦ РАН, 2008. – 397 с.

2. Зотов, В.Ю. Средства проектирования встраиваемых микропроцессорных систем, реализуемых на основе ПЛИС фирмы Xilinx. – М. : Горячая линия-Телеком, 2006. 520 с.
3. Тарасов, И.Е. Программируемые логические схемы и их применение в схемотехнических решениях : учеб. пособие / И.Е. Тарасов, Е.Ф. Певцов / Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики». – М., 2012. – 184 с.
4. Заливин, А.Н. Использование производительных ПЛИС для обработки изображений / А.Н. Заливин, И.В. Зуев // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2014. – Вып. № 8-1 (179). – Т. 30. – С. 90–93.
5. Никоноров, А.В. Двумерная рекурсивная фильтрация в GPU системах на основе модели нежесткого следования / А.В. Никоноров, С.Б. Попов, В.А. Фурсов // Научный сервис в сети Интернет: экзаф-лопное будущее : тр. Междунар. суперкомпьютерной конф., Новороссийск, 19–24 сент. 2011 г. / Моск. ун-т. – Новороссийск, 2011. – С. 61–66.
6. Байков, Д.А. Использование системы MATLAB+Simulink в проектировании цифровых систем на ПЛИС [Электронный ресурс] / Д.А. Байков // Вычислительные сети. Теория и практика / Network journal. Theory and practice. – 2014. – Вып. 24. – Режим доступа: <http://network-journal.mpei.ac.ru/cgi-bin/main.pl?ar=2&l=ru&n=24&pa=8>. – Дата доступа: 11.05.2015.

Поступила 03.09.2015

NON-RECURSIVE IMAGE FILTERING USING FPGA

V. CHERTKOV, R. BOHUSH, A. ANDROSHUK

We have presented the structure of a two-dimensional non-recursive filter using FPGA for image processing using parallel-pipelined algorithm. The model of the device, which was developed and studied in the software Simulink is provided. For a hardware implementation is proposed to use the FPGA XC6SLX75 Spartan-6 family. Maximum delay in the circuits of the internal structure determined using the Xilinx ISE. The paper includes a calculation processing speed for two-dimensional non-recursive filter of different sizes. Results of experiments are presented.

УДК 004.056

ОЦЕНКА РАЗБОРЧИВОСТИ РЕЧИ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИЕЙ СИГНАЛА ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИИ В КАНАЛАХ УТЕЧКИ ИНФОРМАЦИИ

*д-р техн. наук, проф. В.К. ЖЕЛЕЗНЯК, канд. техн. наук К.Я. РАХАНОВ, И.Б. БУРАЧЕНОК
(Полоцкий государственный университет)*

Обосновано использование взаимокорреляционной обработки сигнала линейной частотной модуляции (ЛЧМ) в пределах полос равной разборчивости между входом и выходом канала утечки информации. Показаны преимущества такой обработки для учета времени задержки измерительного ЛЧМ-сигнала. Представлены метод оценки разборчивости речи с помощью функции взаимной корреляции и имитационный эксперимент, который демонстрирует положительные свойства нового метода.

Введение. Совершенствование методов оценки разборчивости речи определяется измерительным сигналом и методами их обработки на выходе каналов утечки информации. Значительная неравномерность амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) каналов утечки обуславливает методическую погрешность при использовании гармонического сигнала в полосах равной разборчивости. Применение сигнала ЛЧМ, предложенного в работах [1, 2], позволяет решить эту научную задачу. К одним из наиболее эффективных методов оптимального приема детерминированного сигнала относятся методы, строящиеся на основе корреляционного приема. Непосредственная связь автокорреляционной функции с энергией сигнала определяет ее использование в процедурах энергетической оценки сигналов [3]. Однако в случае известной формы сигнала (ЛЧМ-сигнал в полосах равной разборчивости) более мощным средством обнаружения является функция взаимной корреляции [4].

Преимущество функции взаимной корреляции основано на том, что при оценке используется эталонный сигнал с нулевым шумом. Так как в эталонном сигнале отсутствует шум, в отличие от сигнала, используемого в функции автокорреляции, то на выходе получают большее отношение энергии сигнала к энергии шума при любых значениях отношения сигнал/шум на входе. Справедливость данного утверждения представим ниже.

Автокорреляционная и взаимокорреляционная функция в общем виде определяется общим интегралом:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) \cdot S_2(t-\tau) dt, \quad (1)$$

где S_1 – смесь измерительного ЛЧМ-сигнала и шума;

S_2 – в случае автокорреляционной функции – смещенная копия смеси измерительного ЛЧМ-сигнала и шума на время τ ;

S_2 – в случае взаимокорреляционной функции – смещенный эталонный ЛЧМ-сигнал на время τ .

Смесь ЛЧМ-сигнала и шума $S(t)$ представим выражением

$$S(t) = s(t) + n(t), \quad (2)$$

где $s(t)$ – ЛЧМ-сигнал;

$n(t)$ – шум.

Предположим, что $s(t)$ и $n(t)$ не коррелируют, тогда автокорреляционная функция $R(\tau)$ будет представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} [s_1(t) + n_1(t)] \cdot [s_2(t-\tau) + n_2(t-\tau)] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (s_1(t)s_2(t-\tau) + s_1(t)n_2(t-\tau) + n_1(t)s_2(t-\tau) + n_1(t)n_2(t-\tau)) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t-\tau) dt + \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)n_2(t-\tau) dt + \int_{-\infty}^{\infty} n_1(t)s_2(t-\tau) dt + \int_{-\infty}^{\infty} n_1(t)n_2(t-\tau) dt = \\ &= R_{s_1s_2}(\tau) + R_{s_1n_2}(\tau) + R_{n_1s_2}(\tau) + R_{n_1n_2}(\tau). \end{aligned} \quad (3)$$

В случае взаимокорреляционной функции используется эталонный ЛЧМ-сигнал свободный от шума, следовательно функция (3) будет иметь вид

$$R(\tau) = R_{s_1 s_2}(\tau) + R_{n_1 n_2}(\tau). \quad (4)$$

В полученном уравнении (4) отсутствуют дополнительные случайные составляющие ($R_{s_1 n_2}(\tau)$ и $R_{n_1 s_2}(\tau)$), значимость которых возрастает при высоком уровне шумов отличных от белого, что отрицательно влияет на погрешность измерения.

Мощность измерительного сигнала. Для оценки мощности измерительного сигнала с помощью взаимокорреляционной функции между измерительным сигналом и эталонным сигналом при смещении $\tau = 0$ рассмотрим функцию $R(0)$, которая соответствует энергии взаимодействия двух сигналов E_{12} [5]:

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) \cdot S_2(t) dt = E_{12}. \quad (5)$$

При прохождении через среду распространения измерительный сигнал $S_1(t)$ искажается по отношению к эталонному $S_2(t)$. Такое искажение в общем виде можно представить как $S_1(t) = \mu \cdot S_2(t)$, где μ – коэффициент искажения измерительного сигнала $S_1(t)$ по отношению к эталонному $S_2(t)$.

Выполнив замену переменной $S_1(t)$ в функции (5), получим

$$E_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \mu \cdot S_2(t) \cdot S_2(t) dt = \mu \int_{-\infty}^{\infty} S_2^2(t) dt = \mu \cdot E_{S_2}, \quad (6)$$

где E_{S_2} – энергия эталонного сигнала.

Из полученного уравнения выразим коэффициент искажения μ

$$\mu = \frac{E_{12}}{E_{S_2}}. \quad (7)$$

Аналогично выполнив замену $S_2(t) = \frac{1}{\mu} S_1(t)$ в выражении (5), получим

$$E_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu} \cdot S_1(t) \cdot S_1(t) dt = \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} S_1^2(t) dt = \frac{1}{\mu} \cdot E_{S_1}, \quad (8)$$

где E_{S_1} – энергия измерительного сигнала.

Выразим энергию измерительного сигнала из полученного выражения (8):

$$E_{S_1} = \mu \cdot E_{12}. \quad (9)$$

Выполнив подстановку коэффициента искажения μ из выражения (7), получим

$$E_{S_1} = \frac{E_{12}^2}{E_{S_2}}, \quad (10)$$

где E_{12} – энергия взаимодействия измерительного сигнала $S_1(t)$ и эталонного $S_2(t)$, равная взаимной корреляции $R(0)$ при смещении $\tau = 0$; E_{S_2} – априорное значение энергии эталонного сигнала.

Из полученного выражения (10) получим мощность измерительного ЛЧМ-сигнала P_{S_1}

$$P_{S_1} = \frac{E_{S_1}}{T} = \frac{E_{12}^2}{E_{S_2} T}, \quad (11)$$

где T – длительность измерительного ЛЧМ-сигнала.

Оценка мощности измерительного сигнала, представленная в выражении (11), позволяет перейти к энергетическому показателю защищенности объекта информатизации – отношению сигнал/шум. Расчет информационных показателей защищенности (парциальному коэффициенту разборчивости, коэффициент разборчивости речи, слоговой и словесной разборчивости) выполняется согласно работе [6].

Время задержки измерительного сигнала. От момента запуска изменения до момента прихода сигнала в первичный измерительный преобразователь существует временная задержка (от 10 до 50 мс), которая вызвана прохождением сигнала через среду распространения, а также временем работы программного обеспечения, операционной системы. Данная временная задержка не является постоянной величиной и может меняться в зависимости от ряда внешних факторов. В таком случае классическая функция определения энергии сигнала будет представлена выражением

$$E = \int_{t_0}^{T+t_0} s^2(t) dt, \quad (12)$$

где t_0 – время задержки ЛЧМ-сигнала.

Из выражения (12) следует, что время задержки является обязательной величиной, которую требуется учитывать при энергетической оценке сигнала. Определение времени задержки t_0 выполняют за счет положительного свойства функции взаимной корреляции, отличающегося от свойства функции автокорреляции – сдвига максимума функции взаимной корреляции на время, равное времени задержки сигнала [4].

На рисунке 1 представлен график зависимости взаимной корреляционной функции от времени смещения τ , наличие на котором острых пиков свидетельствует о существовании корреляционной связи между S_1 и S_2 при некоторых значениях τ . В момент времени t_0 наблюдается максимум взаимокорреляционной функции, который равен времени задержки ЛЧМ-сигнала.

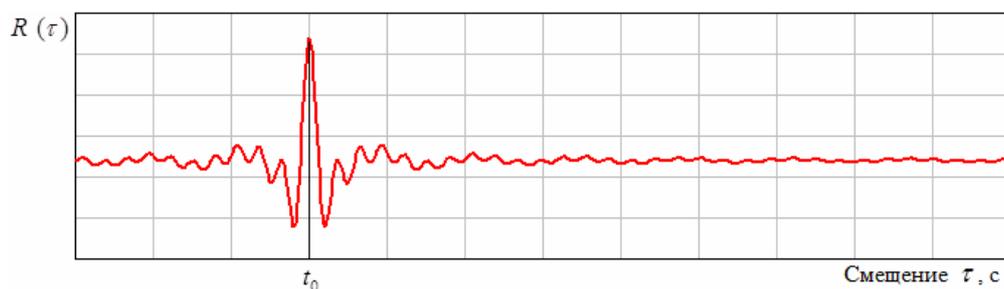


Рисунок 1 – График зависимости взаимокорреляционной функции $R(\tau)$ от смещения τ

Таким образом, перенос оценки величины взаимной корреляции $R(\tau)$ на максимум функции в допустимом интервале времени учитывает время задержки сигнала t_0 , при этом оценка мощности измерительного ЛЧМ-сигнала, определяемая из выражения (11), примет вид

$$P_{S_i} = \frac{R(t_0)^2}{E_{S_2} T}. \quad (13)$$

Оценка разборчивости речи заключается в следующем:

1) снижение порогового эффекта измерительного ЛЧМ-сигнала методом синхронного накопления с автоматическим принятием решения о достижении порога чувствительности по критерию максимального правдоподобия [7];

2) оценка мощности измерительного ЛЧМ-сигнала в каждой полосе равной разборчивости на входе первичного измерительного преобразователя P_{S_i} выполняется согласно выражению (13);

3) оценка мощности шума в каждой из полос равной разборчивости на входе первичного измерительного преобразователя P_{n_i} согласно выражению:

$$P_{n_i} = \frac{\int_0^T S_{i_i}^2(t) dt}{T - P_{S_{i_i}}};$$

4) расчет отношения сигнал/шум в каждой полосе равной разборчивости $Q_i = \frac{P_{S_{i_i}}}{P_{n_i}}$, где i – номер полосы равной разборчивости;

5) вычисление парциального коэффициента разборчивости речи для каждой полосы [6]:

$$Kp_i = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+10^{-0,1 \cdot Q_i}} + \frac{1}{1+10^{0,1(-Q_i+12)}} + \frac{1}{1+10^{0,1(-Q_i-12)}} \right), & Q < 0; \\ \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{1+10^{0,1 \cdot Q_i}} + 1 - \frac{1}{1+10^{0,1(Q_i+12)}} + 1 - \frac{1}{1+10^{0,1(Q_i-12)}} \right), & Q \geq 0; \end{cases}$$

6) расчет суммарного коэффициента разборчивости речи

$$K_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_{p_i},$$

где N – количество полос равной разборчивости.

7) вычисление информационных показателей защищенности – разборчивости речи¹ [6]:

Имитационный эксперимент выполнен с использованием классической для теории и практики локации модели сигнала с ЛЧМ [8]. Остановимся на примере анализа сигнала для первой полосы равной разборчивости, мгновенная частота которой меняется в пределах от 100 до 420 Гц [6]. Амплитуда сигнала $A = 1$ В, длительность сигнала $T = 4$ с, частота дискретизации $f_d = 8192$ Гц. Интервал дискретизации $\Delta t = 1/8192 = 122$ мкс. База сигнала $B = \Delta\omega \cdot T = (420 - 100) \cdot 4 = 1280$. Для демонстрации определения времени задержки ЛЧМ сигнала установим $t_0 = 0,1$ с.

В этом случае математическая модель ЛЧМ-сигнала в дискретном виде представлена следующим выражением:

$$s(j) = 1 \cdot \sin \left(2\pi \cdot \frac{j \cdot \text{ranc}(j / 8192)}{8192} \left(100 + 1280 \frac{j \cdot \text{ranc}(j / 8192)}{8192 \cdot 2} \right) \right),$$

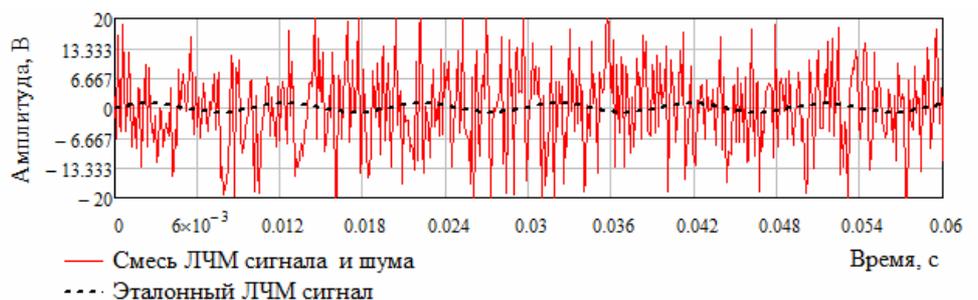
где j – индекс времени реализации сигнала; $j \in 0 \dots 33588$;

ranc – функция выделения целой части от деления.

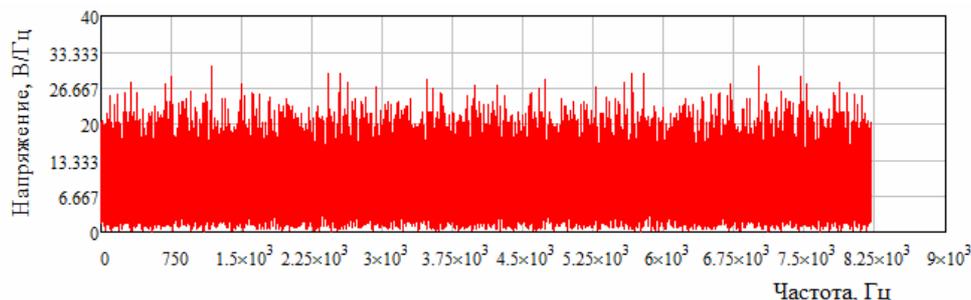
Математическая модель шума $n(j)$ представлена генератором случайных значений, плотность вероятности которых подчинена нормальному закону. Математическое ожидание шума равно нулю, а среднеквадратическое отклонение шумового процесса $\sigma = 10$ В, при этом отношение сигнал/шум на входе приемника равно минус 20 дБ.

Фрагмент реализации процесса смеси сигнала и шума $S(n) = s(j) + n(j)$ представлен на рисунке 2, *а*, спектр – на рисунке 2, *б*. На данных графиках не наблюдается гармонических составляющих ЛЧМ сигнала, что подчеркивает сложность выделения ЛЧМ сигнала из шума.

¹ См. статью *д-р техн. наук, проф. В.К. Железняк, И.Б. Бураченко* «Оценка нормативного показателя защищенности речевого сигнала сложным сигналом с большой базой» на С. 10–14 настоящего номера.



а



б

Рисунок 2 – Реализация процесса смеси ЛЧМ сигнала и шума:
а – фрагмент реализации процесса смеси ЛЧМ сигнала и шума;
б – спектр реализации процесса ЛЧМ сигнала и шума

Математическая модель расчета зависимости взаимной корреляции от смещения τ представлено дискретным выражением:

$$R(k) = \sum_{j=0}^{33587} S(j) \cdot s\left(j - \frac{k}{8192}\right) \cdot \frac{1}{8912}, \quad (14)$$

где k – индекс времени смещения τ ($k \in 0 \dots 33588$).

На рисунке 3 представлена реализация взаимокорреляционной функции, на которой максимум приходится на смещение равное 0,1 с.

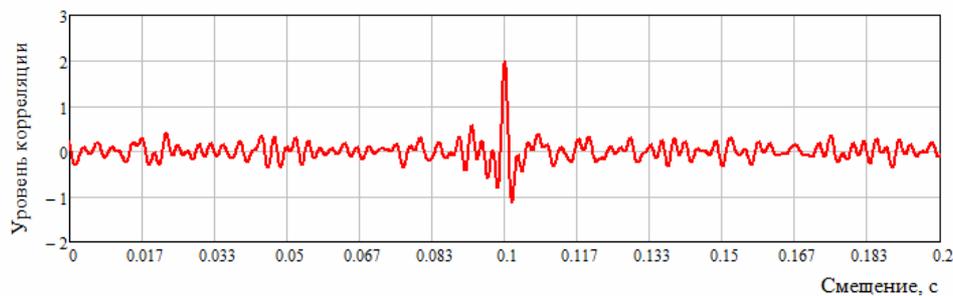


Рисунок 3 – График зависимости взаимокорреляционной функции $R(\tau)$ от смещения τ

В массиве значений $R(k)$, полученном из выражения (14), максимальное значение равно $R_{MAX} = 2,017$, индекс времени смещения k которого равен 819, а время задержки $t_0 = 819/8192 = 0,1$ с. Таким образом, экспериментально установленное время задержки измерительного сигнала t_0 соответствует заданному времени задержки ЛЧМ-сигнала в параметрах эксперимента.

Мощность измерительного ЛЧМ сигнала в первой полосе равной разборчивости согласно выражению (13) равна $P_{s_i} = \frac{2,017^2}{1^2 \cdot 4 / 2} = 0,504$ Вт. Мощность эталонного ЛЧМ сигнала в первой полосе равной

разборчивости составила $P_{s_i} = \frac{1^2 \cdot 4}{2} = 0,5$ Вт. Абсолютная погрешность оценки мощности $\lambda = 0,004$, а относительная погрешность $\gamma = 0,8\%$.

С помощью метода дисперсионной обработки результатов оценки мощности сигнала, представленного в работе [9], при доверительной вероятности 0,99 рассчитаны методические погрешности для отношений сигнал/шум минус 20 и минус 14 дБ и длительностях сигнала 2 и 4 с. Полученные значения относительных методических погрешностей представлены в таблице.

Таблица – Относительные методические погрешности

Отношение сигнал/шум, дБ	Длительность сигнала, с	Относительная погрешность, ±%
- 20	4	4,6
- 20	2	7,3
- 14	4	1,9
- 14	2	4,0

Выводы. В работе предложен метод оценки разборчивости речи с помощью функции взаимной корреляции, который:

- в оценке показателей учитывает время задержки измерительного ЛЧМ сигнала;
- позволяет одновременно оценивать мощность измерительного ЛЧМ сигнала и мощность шума;
- обладает низкой методической погрешностью и высокой чувствительностью;
- обладает высокой производительностью за счет использования простых вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Способ определения максимальной разборчивости речи : пат. 15204 Респ. Беларусь : МПК G 10L 15/00 / В.К. Железняк, К.Я. Раханов ; дата опубл.: 30.12.2011.
2. Устройство для определения разборчивости речи : пат. 15314 Респ. Беларусь : МПК G 10L 15/00, H 04R 29/00 / В.К. Железняк, К.Я. Раханов ; дата опубл.: 28.02.2012.
3. Дворников, С.В. Теоретические основы синтеза билинейных распределений / С.В. Дворников. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2007. – 268 с.
4. Бендат, Дж.С. Измерение и анализ случайных процессов / Дж.С. Бендат, А. Пирсол ; пер. с англ. Г.В. Матушевского, В.Е. Привального ; под ред. И.Н. Коваленко. – М. : Наука, 1971. – 464 с.
5. Розенберг, В.Я. Радиотехнические методы измерения параметров процессов и систем / В.Я. Розенберг. – М. : Изд-во Комитета стандартов, мер и измерительных приборов при Совете министров СССР, 1970. – 308 с.
6. Железняк, В.К. Защита информации от утечки по техническим каналам : учеб. пособие / В.К. Железняк. – СПб. : ГУАП, 2006. – 188 с.
7. Обнаружение сигналов ВЧ-диапазона перемножением спектров фрагментов их реализаций / К.Я. Раханов [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2010. – № 9. – С. 29–34.
8. Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы : учебник для вузов по специальности «Радиотехника» / С.И. Баскаков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1988 – 448 с.
9. Синтез программно-аппаратной системы оценки разборчивости речи методом ЛЧМ-сигнала : результаты эксперимента // К.Я. Раханов // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2012. – № 12. – С. 20–26.

Поступила 08.09.2015

ESTIMATION OF LEGIBILITY OF THE SPEECH BY MUTUAL SIGNAL CORRELATION OF LINEAR FREQUENCY MODULATION IN CHANNELS OF INFORMATION LEAKAGE

V. ZHELEZNYAK, K. RAKHANOV, I. BURACHENOK

The article substantiates the use of the cross-correlation signal processing linear frequency modulation (LFM) within bands of equal intelligibility between input and output channels of information leakage. The advantages of such a treatment to take account of the delay time measuring chirp signal. A method for estimation of speech intelligibility using cross-correlation function and is a simulation experiment that demonstrates the positive qualities of the new method.

УДК 004.4

**ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ АНАЛИЗА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ
ГОДИЧНОГО РАДИАЛЬНОГО ПРИРОСТА ДЕРЕВЬЕВ**

*канд. техн. наук, доц. А.Ф. ОСЬКИН, канд. с.-х. наук, доц. А.А. БОЛБОТУНОВ
(Полоцкий государственный университет)*

Описан программный комплекс, предназначенный для анализа и прогнозирования годичного радиального прироста деревьев. Предложен алгоритм обработки, основными шагами которого являются структурный анализ исходных данных, сглаживание временного ряда, построение математической модели процесса и прогнозирование. Для построения математической модели использован метод группового учета аргументов (МГУА). Построен программный комплекс, реализующий описанный выше алгоритм. Приведены результаты работы комплекса.

Введение. Исследование зависимостей годичного радиального прироста деревьев от внешних условий остается важнейшей задачей, стоящей перед дендроклиматологией. Как показывают многочисленные исследования отечественных и зарубежных ученых, на ширину годичного кольца деревьев влияют многочисленные климатические и метеорологические факторы.

Исследования цикличности в динамике радиального прироста деревьев начались в начале прошлого столетия и особенно интенсивно проводились американскими учеными [1–4]. Результаты, опубликованные А. Дугласом еще в 1936 г., показали, что во всех исследуемых группах деревьев можно выделить 11-летний цикл, характерный для динамики солнечной активности. Кроме того, им были выделены и другие циклы во временных рядах годичного радиального прироста деревьев. Эти исследования продолжаются и в настоящее время, однако интерес к ним в значительной мере снизился. Можно назвать несколько причин такого снижения – это и низкое качество прогноза радиального прироста, получаемое на моделях, учитывающих только динамику солнечной активности, и недостаточность учета в таких моделях современных знаний об экологии, физиологии и анатомии деревьев, и, наконец, несоответствие солнечных циклов динамике прироста.

Многочисленные исследования различных авторов подтверждают наличие четкой реакции на метеорологические и климатические факторы. Фитоценотическая среда способна влиять на колебания годичного прироста, нивелируя внешние воздействия, однако зависимость прироста от атмосферных климатических факторов остается неизменной, независимо от произрастания и положения в фитоценозе. Вследствие этого изучение связи между радиальным приростом и метеорологическими факторами представляется весьма актуальной задачей.

Алгоритм анализа и прогнозирования годичного радиального прироста.

Построение программного комплекса мы начали с разработки алгоритма анализа годовых циклов радиального прироста деревьев. Такие циклы представляют собой временной ряд, поэтому в программном комплексе реализованы следующие виды анализа:

- 1) структурный анализ, позволяющий определить, насколько зашумлены исходные данные;
- 2) удаление шума, случайных и стохастических компонент из исходных данных;
- 3) построение математической модели;
- 4) прогнозирование.

Структурный анализ было решено проводить путем расчета показателя Хёрста H для средних значений годичных радиальных приростов.

Показатель Хёрста рассчитывается как тангенс угла наклона прямой, проходящей максимально близко к точкам на плоскости, полученным из соотношения $(x_n, y_n) = \{\ln(n), \ln(R/S_n)\}$. Здесь R – размах первых n значений ряда, S_n – дисперсия.

Временные ряды, для которых значения показателя Хёрста больше 0,5, относятся к классу персистентных, сохраняющих имеющуюся тенденцию, причем чем ближе H к единице, тем более предсказуемо поведение моделируемого временного ряда.

Для проведения дальнейшего анализа выполним сглаживание исходного ряда, удалим шум, а также случайные и стохастические компоненты из исходных данных.

Для выполнения процедуры прогнозирования необходимо построить адекватную математическую модель, отображающую зависимость радиального прироста от климатических данных. Нами было принято решение использовать для моделирования алгоритмы, основанные на МГУА [5]. После

проведения предварительного анализа мы остановились на многорядном полиномиальном алгоритме МГУА. Суть этого метода заключается в следующем.

Пусть в нашем распоряжении имеется набор экспериментальных данных, описывающих зависимость исследуемой переменной от различных факторов. Перед нами стоит задача построения функции, наиболее точно аппроксимирующей эту зависимость. При применении для решения этой задачи многорядного полиномиального алгоритма МГУА, мы строим итерационный процесс, состоящий из следующих шагов:

1) имеющиеся экспериментальные данные разбиваются на две последовательности – обучающую и проверочную;

2) задается некоторое множество достаточно простых функций от исходных аргументов. Эти функции называются предикторами или частными описаниями моделируемого процесса. В случае полиномиального алгоритма МГУА в качестве таких функций выбираются полиномы второй степени от двух аргументов;

3) коэффициенты этих полиномов находятся методом наименьших квадратов с использованием экспериментальных данных обучающей последовательности;

4) на проверочной последовательности определяется набор частных описаний, дающих лучшую точность;

5) если требуемая по условиям задачи точность не достигнута, выполняется следующая итерация. Строится новый набор предикторов, в котором в качестве аргументов используются частные описания текущей итерации;

6) процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута требуемая по условиям задачи точность. При этом лучшее частное описание последней итерации считается искомым оптимальным решением задачи.

Разработка программного комплекса.

Располагая значительными объемами накопленной дендроклиматохронологической информации, было принято решение построить программный комплекс, максимально автоматизирующий процедуры анализа, построения математических моделей и прогнозирования. Для этого мы воспользовались существующим программным обеспечением для анализа и прогнозирования временных рядов и программным обеспечением, реализующим алгоритмы МГУА.

Чтобы объединить обозначенные выше программные продукты в единый программный комплекс, был выбран AutoIt [6] – язык сценариев, позволяющий автоматизировать любые задачи, решаемые в среде операционной системы Windows.

На рисунке 1 представлено главное окно разработанного комплекса. Его главное меню содержит следующие пункты: **Данные**, **Сглаживание**, **Модель**, **Отчеты**, **Настройки** и **Помощь**.



Рисунок 1 – Главное окно комплекса

Рассмотрим назначение каждого из перечисленных пунктов меню.

Данные. При выборе этого пункта открывается выпадающее меню, содержащее подпункты **Годовые кольца**, **Температура**, **Осадки**. При выборе подпункта **Годовые кольца** начинается стандартный диалог открытия файла, содержащего временной ряд годовых радиальных приростов деревьев. Ряд должен быть представлен в формате MS Excel 2003 (.xls), после загрузки он отображается в главном окне комплекса. Аналогичные действия выполняются при выборе подпунктов **Температура** и **Осадки**. При выборе подпункта **Температура** загружается временной ряд среднемесячных температур, а при выборе подпункта **Осадки** – временной ряд среднемесячных осадков.

Сглаживание. В пункте меню **Сглаживание** выполняется удаление шума, случайных и стохастических компонент исходного временного ряда. Для выполнения сглаживания используется фильтр Савицкого – Голея, широко применяемый при обработке экспериментальных данных. Сглаженный ряд отображается в главном окне комплекса.

Модель. При выборе этого пункта меню выполняется расчет параметров математической модели годового радиального прироста деревьев по многорядному полиномиальному алгоритму МГУА. В главном окне комплекса отображаются как сам исходный ряд, так и результаты расчета в виде кривой, аппроксимирующей исходный временной ряд.

Отчеты. Этот пункт меню ответственен за формирование и вывод на печать отчетов о результатах работы комплекса. На печать выводятся исходные временные ряды, сглаженные ряды, параметры построенной математической модели и результаты расчета по построенной математической модели.

Настройки. В данном пункте выполняется настройка параметров создаваемой математической модели. Задаются требуемая точность, максимальное число итераций, число предикторов, используемых в очередной итерации, и некоторые другие параметры.

Помощь. Пункт меню **Помощь** содержит сведения о разработчиках комплекса, номер текущей версии комплекса и краткую справку по работе с комплексом.

Пример работы комплекса

Работу комплекса продемонстрируем на наборе экспериментальных данных для ранней, поздней и общей древесины, полученных 10 ноября 2014 года на станции наблюдения «Летцы». Период наблюдения – с 1872 по 2014 год. Исходные данные в формате MS Excel представлены на рисунке 2.

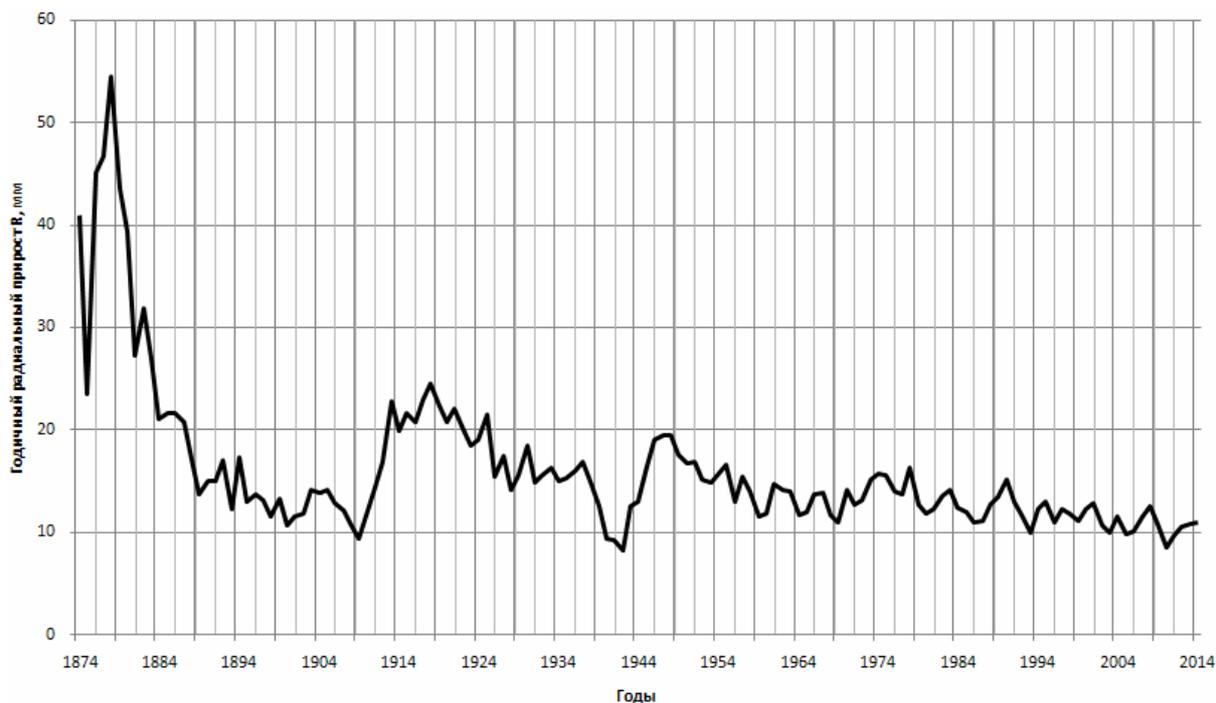


Рисунок 2 – Годовые радиальные приросты ранней, поздней и общей древесины с 1872 по 2014 год

На рисунке 3 представлен сглаженный ряд для общей древесины. Из исходного ряда удалены белый шум, случайные и стохастические компоненты.

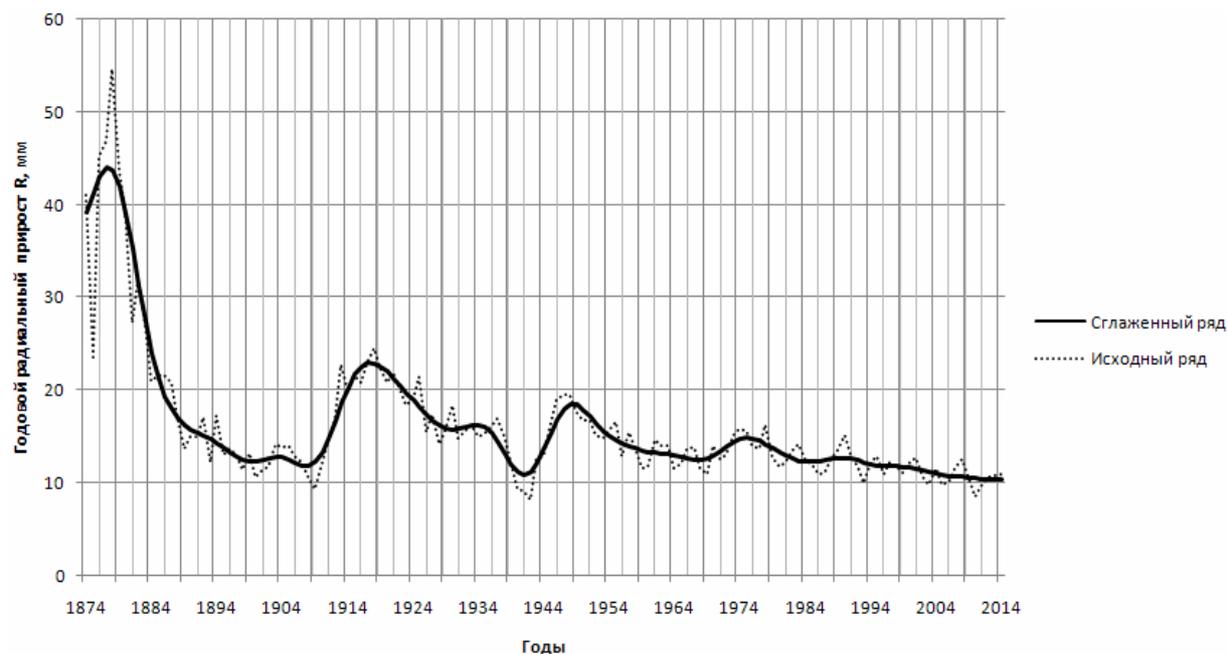


Рисунок 3 – Сглаженный ряд, в котором отсутствуют белый шум, случайные и стохастические компоненты

На рисунке 4 представлены результаты моделирования на временном интервале 1946–2014 гг. Такой интервал был выбран в связи с тем, что мы располагаем достоверными данными о средне-месячных температурах и осадках только начиная с 1946 года.

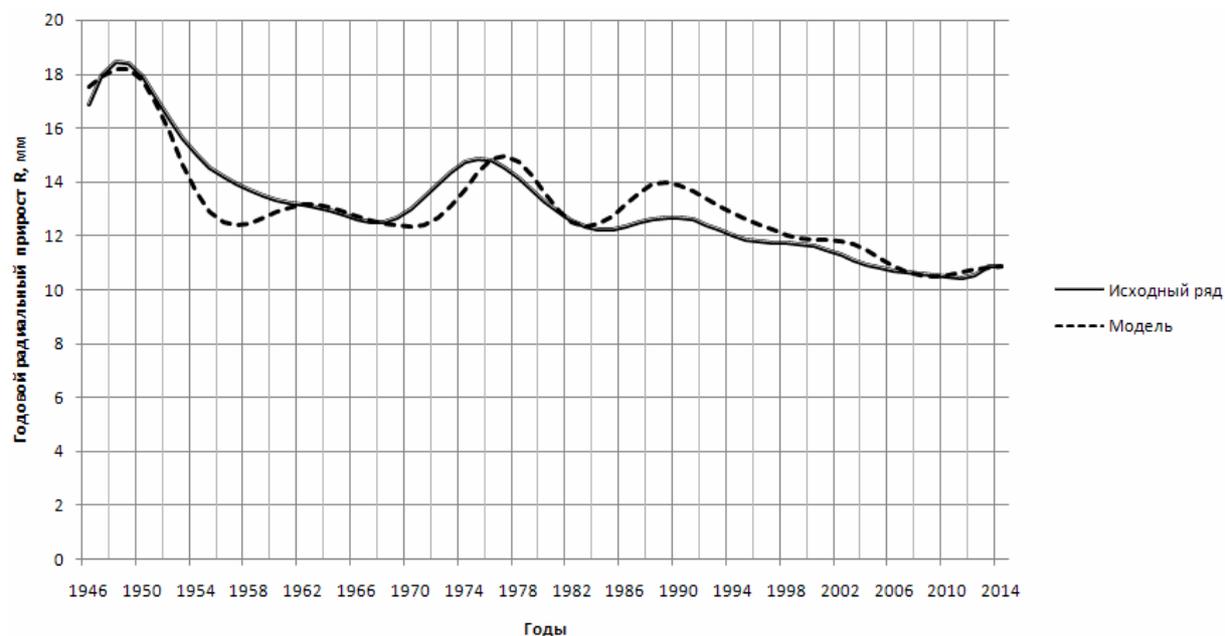


Рисунок 4 – Результаты моделирования

Выводы. Предложенные метод анализа, методы построения математической модели и прогнозирования годичного радиального прироста, основанные на полиномиальном алгоритме МГУА, показали свою высокую эффективность.

Построенный программный комплекс, реализующий данный метод, существенно сокращает время и трудоемкость обработки экспериментальных данных.

Применение комплекса позволяет поручить проведение всех этапов обработки экспериментальных данных персоналу с невысокой квалификацией, что снижает стоимость обработки и построения прогнозов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Douglass, A.E. Tree rings and their relation to solar variations and chronology : report for 1931 / A.E. Douglass / Research Corp. Award Paper, Smithsonian Ann. – P. 306–307
2. Douglass, A.E. Tree rings and chronology / A.E. Douglass // Univ. Arizona Bull. 8: – 1937. – № 4.
3. Douglass, A.E. Climatic cycles and tree growth / A.E. Douglass // Carnegie Inst. Wash. Pub. 289. – 1936. – Vol. III. – P. 7–14.
4. Schulman E. Some propositions in tree-ring analysis / E. Schulman // Ecology. – 1941. – Vol. 22, № 2. – P. 193–195.
5. Ивахненко, А.Г. Принятие решений на основе самоорганизации / А.Г. Ивахненко, Ю.П. Зайченко, В.Д. Дмитров. – М. : Советское радио, 1976.
6. AutoIt [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.autoitscript.com/site>. – Дата доступа: 07.09.2015.

Поступила 15.09.2015

SOFTWARE PACKAGE FOR ANALYSIS AND PREDICTION ANNUAL RADIAL GROWTH OF TREES

A. OSKIN, A. BOLBOTUNOV

The article describes a software package for analysis and forecasting of annual radial growth of trees. The algorithm of processing and a mathematical model of the process are suggested. The mathematical model is built on the basis of Group Method of Data Handling (GMDH). A software package implementing this algorithm is developed. The results of work of this software package are presented.

УДК 621.391.6:519.72

**ОЦЕНКА МОДЕЛИ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННОГО КАНАЛА
УТЕЧКИ РЕЧЕВОЙ ИНФОРМАЦИИ****д-р техн. наук, проф. В.К. ЖЕЛЕЗНЯК, И.С. ЧЕРНОВА**
(Полоцкий государственный университет)

Проанализирован оптико-электронный канал утечки речевой информации. Обоснован выбор измерительного сигнала на основе рассмотренных преимуществ квадратурного гармонического сигнала. Предложен метод обработки измерительного сигнала, включающий оценку суммарного эффекта амплитудной и фазовой модуляций. Рассмотрены различные виды методов обработки сигнала, выбран метод, факторы, влияющие на методическую (теоретическую) погрешность (точность) оценки разборчивости речи. Акустические колебания твердой среды, подвергающиеся амплитудно-фазовой модуляции, представлены моделью колеблющейся прямоугольной мембраны. Предложена методика оценивания отношения сигнал/шум с помощью разработанной математической модели оценки защищенности. Построена плотность распределения фазы при различных энергетических показателях, показывающая степень зависимости фаз результирующего колебания от исходного сигнала.

Введение. Защита акустической (речевой) информации является одной из важнейших задач в общем комплексе мероприятий по обеспечению информационной безопасности объекта информатизации и осуществляется пассивными и активными методами. Учитывая особенности расположения большинства объектов информатизации, задачи защиты конфиденциальных переговоров особо актуальны. Создано большое количество различных систем активной маскировки, используемых для защиты от средств перехвата речевой информации.

Речевой сигнал – сложный акустический сигнал, включающий гармонические и шумовые составляющие, поэтому важно обосновать выбор измерительного сигнала. Под действием акустических колебаний речевого источника в ограждающих строительных конструкциях и инженерных коммуникациях помещения возникают вибрационные колебания.

В зависимости от среды распространения речевых сигналов и способов их перехвата технические (параметрические) каналы утечки информации разделяют на акустические, виброакустические, электроакустические, оптико-электронные.

Резкое возрастание объемов передаваемой информации обусловило необходимость освоения оптического диапазона и на его основе развития оптико-электронных систем обработки информации.

Развитие оптических систем, основным задачам которых являются фокусировка для концентрации излучения, коллимация для формирования пучка с малым углом расходимости, согласование параметров оптического пучка с параметрами оптической системы, стало возможным благодаря изучению свойств источника сигнала (монохроматичность, острая направленность, когерентность, поляризованность).

Критериями оценки защищенности речевой информации являются [1]:

- информационный показатель (нормируемая величина разборчивости речи);
- энергетический показатель (величина отношения мощности сигнала к мощности шума).

Оценка защищенности оптико-электронного канала утечки речевой информации актуальна, поскольку существует возможность перехвата речевого сигнала дистанционно (на значительном расстоянии от объекта информатизации).

Анализ существующих методов и способов утечки информации. Защита информации за счет быстрого развития технологий ее перехвата усложняется.

Объектом исследования нами выбран оптико-электронный канал утечки речевой информации; предмет исследования – методика оценивания отношения сигнал/шум.

Цель работы – разработка математической модели оценки защищенности и на ее основе построение плотности распределения фазы при различных энергетических показателях.

Оптико-электронный (лазерный) канал утечки акустической речевой информации образуется при облучении лазерным лучом вибрирующих под действием акустического речевого сигнала отражающих поверхностей помещений (оконных стекол, зеркал и т.д.). Отраженное лазерное излучение модулируется по амплитуде и фазе и принимается приемником оптического (лазерного) излучения, при демодуляции которого выделяется речевая информация.

Для организации такого канала предпочтительным является использование зеркального отражения лазерного луча. При небольших расстояниях до отражающих поверхностей (порядка нескольких десятков метров) может быть использовано диффузное отражение лазерного излучения.

Сложные лазерные системы, работающие в ближнем инфракрасном диапазоне длин волн, применяются для перехвата речевой информации по оптическому каналу.

Чтобы обнаружить информативный сигнал в шумах высокого уровня в канале утечки информации необходимо обеспечить:

- оценку в условиях фоновых (естественных) и искусственных шумов;
- реализацию пространственной обработки;
- оценку смеси сигнал + шум для определения уровня сигнала;
- оценку реверберационной помехи, резонансных явлений;
- учет неравномерности амплитудно-частотной характеристики (АЧХ);
- оценку разборчивости речи в оптическом канале утечки информации.

Предлагается проанализировать корреляционную теорию разборчивости речи [1, с. 75]. Корреляционный метод учитывает факторы, влияющие на методическую (теоретическую) погрешность (точность) оценки разборчивости речи в канале утечки информации:

- кривые чувствительности уха;
- нормируемое значение ослабления сигнала элементами конструкции;
- спектральная плотность речи;
- неравномерность АЧХ среды передачи;
- резонансы конструкции, замкнутого пространства;
- реверберация (послезвучание);
- искусственные помехи.

Выбор измерительного сигнала. Гармонический сигнал принят в качестве измерительного сигнала корреляционной теорией разборчивости речи. Для обработки его используют согласованный квадратурный приемник, который чувствителен к начальной фазе измерительного сигнала. Высокая селективность согласованного квадратурного приемника решает задачу достоверного выявления измерительного сигнала во всех каналах утечки речевой информации. Гармоническому сигналу не присущи факторы, снижающие методическую погрешность измерения. В шумах высокого уровня время выделения слабого измерительного сигнала увеличивается. Происходит его накопление (увеличение отношения мощности сигнала к мощности шума) и уменьшение деформации спектральной плотности финитного гармонического сигнала.

Локальная измерительная схема для гармонического сигнала обладает преимуществом перед схемой измерения для шумового сигнала – установлены метрологические требования на величину погрешности и чувствительности. Результатом измерений методом гармонического сигнала является величина разборчивости речи, полученная на основании корреляционной теории разборчивости речи. Величина разборчивости речи представляет единый критерий оценки канала утечки речевой информации.

Сигнал линейной частотной модуляции (ЛЧМ) позволяет расширить возможность оценки защищенности речи и контролировать полосы частот, однако недостатком измерительного ЛЧМ-сигнала является наличие порогового эффекта. При снижении отношения мощности сигнала к мощности шума ниже порогового значения наблюдается резкое снижение возможности выделения сигнала из шумов [2].

Из анализа работы [3] следует, что в отраженных от стекла пучках лазерного излучения присутствует три вида модуляции оптического излучения:

- 1) частотная, вызванная эффектом Доплера вследствие колебательных движений оконного стекла под воздействием акустических сигналов;
- 2) фазовая, вызванная наличием в отраженном сигнале как зеркально отраженного излучения, так и дифракционных компонентов;
- 3) амплитудная модуляция, вызванная колебаниями подсвечивающего пучка относительно направления зеркального (максимального) отражения.

Особенность оптико-электронного канала заключается в том, что остронаправленный луч света, падающий на колеблющуюся под воздействием акустических колебаний поверхность, подвергает амплитудно-фазовой модуляции оптический отраженный или преломленный луч. Акустические колебания среды переходят в колебания твердой поверхности, что рассмотрено в виде модели колеблющейся прямоугольной мембраны.

Мембраной называется свободно изгибающаяся, натянутая на некоторый плоский контур пленка. Рассматриваются малые колебания мембраны. Считается, что площадь ее неизменна, а колебания каждой точки совершаются в направлении, перпендикулярном к плоскости xOy . Через $u = u(x, y, t)$ обозначили величину отклонения точки (x, y) мембраны от положения покоя [5, с. 351].

Для вынужденных колебаний уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{F(x, y, t)}{\rho}. \quad (1)$$

Здесь $c^2 = T/\rho$, T – натяжение мембраны, ρ – ее поверхностная плотность, $F(x, y, t)$ – сила, отнесенная к единице площади.

В случае свободных колебаний мембрана представляет собой прямоугольник R ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$). $ka = m\pi$, $lb = n\pi$, где m, n – целые [4]. Отсюда

$$\begin{aligned} k &= \frac{m\pi}{a}, \\ l &= \frac{n\pi}{b} \\ (m &= 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \tag{2}$$

В силу частных условий при

$$\lambda = \lambda_{mn} = \sqrt{k_m^2 + l_m^2} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \tag{3}$$

функции (1) имеют вид

$$\begin{aligned} u_{mn}(x, y, t) &= (A_{mn} \cos(c\lambda_{mn}t) + B_{mn} \sin(c\lambda_{mn}t)) \sin \frac{\pi mx}{a} \cos \frac{\pi ny}{b} \\ (m &= 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \tag{4}$$

и являются частными решениями уравнения свободных колебаний, удовлетворяющими контурному условию $u = 0$.

Частоты собственных колебаний имеют вид

$$\omega_{mn} = c\lambda_{mn} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad (m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots), \tag{5}$$

а соответствующие периоды

$$\tau_{mn} = \frac{2\pi}{\omega_{mn}} = \frac{2}{c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}} \quad (m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots). \tag{6}$$

Окончательно формула (4) примет вид

$$u_{mn} = H_{mn} \sin(\omega_{mn}t + \alpha_{mn}) \sin(\pi mx) \cos(\pi ny), \tag{7}$$

где

$$H_{mn} = \sqrt{A_{mn}^2 + B_{mn}^2}. \tag{8}$$

Для упрощения расчетов примем, что все стороны прямоугольника равны, поэтому узловые линии на квадратной мембране с предложенными частотами могут иметь вид, представленный на рисунке 1.

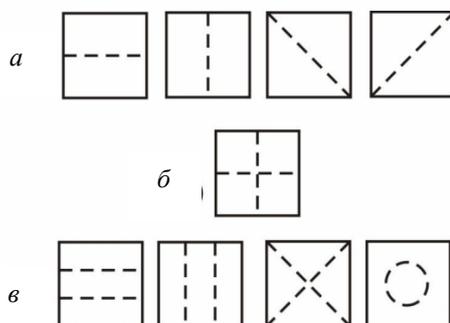


Рисунок 1 – Изображение узловых линий на квадратной мембране:
 a – с частотой $\omega = \pi c \sqrt{5}$; b – с частотой $\omega = \pi c \sqrt{7}$; c – с частотой $\omega = \pi c \sqrt{10}$

Оценка степени опасности информативного вибрационного сигнала заключается в определении коэффициентов виброизоляции ограждающих конструкций, а также различных элементов инженерно-технических систем, включая их коммуникации, в измерении уровня вибрационного шума и ограждающих конструкций, в вычислении информационного показателя оценки защищенности – разборчивости речи W с последующим сопоставлением полученного значения показателя с нормативным значением W_n . При этом если нормы на защиту речевой информации ограниченного доступа не выполняются, а уровень вибрационного информативного сигнала превышает уровень вибрационного шума, то определяется дальность перехвата речевой информации лазерными средствами разведки и дальность перехвата данных, снимаемых со стетоскопов разведки и передаваемых в ИК диапазоне.

Если дальность перехвата оптико-электронными средствами разведки не превышает радиуса контролируемой зоны, то принимается решение об отсутствии утечки информации по оптико-электронному каналу [4].

Математическая модель электронно-оптического канала. В первую очередь следует пояснить, почему используется фазовая модуляция, а не частотная. По Гоноровскому [6, с. 145], частота есть не что иное, как скорость изменения фазы колебания. Полная фаза колебания в момент t может быть определена как

$$\varphi(t) = \int \omega(t) dt = \int_0^t \omega(t) dt + \theta_0 . \quad (9)$$

Частота может изменяться во времени, ее можно представить интегральным и дифференциальным соотношениями:

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t) dt , \quad (10)$$

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} . \quad (11)$$

В этих выражениях $\omega(t) = 2\pi f(t)$ – мгновенная частота колебаний.

Из соотношений (9) и (11) следует, что изменение фазы колебаний во времени по закону $\varphi(t)$ приводит к изменению мгновенной частоты по закону производной от $\varphi(t)$, а изменение мгновенной частоты по закону $\omega(t)$ приводит к изменению фазы по закону интеграла от $\omega(t)$.

Представим колебание в виде гармонического квадратурного сигнала $s(t)$, представленного

$$s(t) = a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t) . \quad (12)$$

По преобразованию Гильберта получаем сопряженный сигнал $s_1(t)$

$$s_1(t) = a \cdot \sin(\omega t) - b \cdot \cos(\omega t) . \quad (13)$$

Данный вид колебаний возникает при излучении синусоидального и косинусоидального сигналов, представленных векторной диаграммой на рисунке 2.

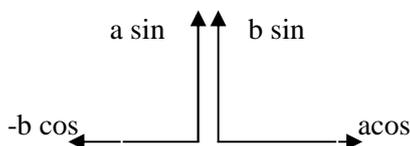


Рисунок 2 – Векторная диаграмма

Вибрации или колебания создают амплитудно-фазовую модуляцию. Отличительной особенностью проведенной работы от работы [3] является получение отдельных значений амплитудной и фазовой составляющих.

$$A(t) = \sqrt{(a \cdot \cos \theta(t) + b \cdot \sin \theta(t))^2 + (a \cdot \sin \theta(t) - b \cdot \cos \theta(t))^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{1+k} , \quad (14)$$

где $k = \frac{b}{a}$,

$$\psi(t) = \operatorname{arctg} \frac{\cos \theta(t) + k \cdot \sin \theta(t)}{\sin \theta(t) - k \cdot \cos \theta(t)}. \quad (15)$$

Таким образом, применение гармонического квадратурного сигнала позволяет находить амплитудно-фазовую модуляцию как суммарный эффект воздействующий на измерительный сигнал.

В работе [7, с. 166] предположено, что кроме флуктуационного шума на систему воздействует немодулированное колебание с амплитудой U_0 , частота которого равна резонансной частоте системы. Задача об огибающей является нелинейной, поэтому немодулированное колебание (сигнал) и флуктуационное напряжение должны рассматриваться совместно.

Конечная формула для плотности вероятности фазы отражает энергетический критерий (отношение мощности сигнала к мощности шума).

Случайная фаза шумового напряжения, под которой подразумевается угол, образованный изображающим случайный процесс вектором U с осью абсцисс:

$$\begin{aligned} u &= U \sin \theta, \\ v &= U \cos \theta. \end{aligned} \quad (16)$$

Следовательно, подлежащее изучению нелинейное преобразование имеет вид

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}, \quad (17)$$

тогда $U = \sqrt{u^2 + v^2}$, а плотность вероятностей амплитуды принимает вид закона распределения Рэлея, что говорит об отсутствии сигнала ($U_0 = 0$) [7, с.147]

$$\omega(U) = \frac{U}{\sigma^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma^2}}. \quad (18)$$

Если все фазы вектора шумового напряжения равновероятны, то на плоскости проекций uv имеет место полная круговая симметрия. Это позволяет произвольным образом повернуть оси u и v , сохраняя их взаимную перпендикулярность. Для поставленной задачи удобно направить ось u вдоль вектора U_0 сигнала, а ось v – перпендикулярно к нему. Тогда длину вектора результирующего напряжения можно записать так

$$U = \sqrt{(U_0 + u)^2 + v^2}. \quad (19)$$

Используя двумерную плотность вероятностей [7, с. 147] для данных проекций, имеем:

$$\omega(u, v) = \omega(u)\omega(v) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{u^2 + v^2}{2\sigma^2}}. \quad (20)$$

Характеристическая функция примет вид

$$A(z) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\sqrt{(U_0 + u)^2 + v^2}} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{u^2 + v^2}{2\sigma^2}} dudv. \quad (21)$$

Введем новые переменные интегрирования U и θ , связанные с u и v соотношениями

$$\begin{aligned} U_0 + u &= U \cos \theta, \\ v &= U \sin \theta. \end{aligned} \quad (22)$$

Случайная фаза θ , представляющая собой угол, образованный результирующим вектором U и вектором сигнала U_0 , принимает следующий вид:

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{v}{U_0 + u}. \quad (23)$$

Плотность вероятностей амплитуды принимает вид закона распределения Райса, что говорит о наличие сигнала ($U_0 \neq 0$) [7, с. 147]:

$$\omega(U) = \frac{U}{\sigma^2} I_0\left(\frac{UU_0}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{U^2+U_0^2}{2\sigma^2}}, \quad (24)$$

где I_0 – функция Бесселя

$$I_0 \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}. \quad (25)$$

При замене переменных характеристическая функция примет вид

$$A(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{iz\theta} d\theta \frac{e^{-\frac{U_0^2}{2\sigma^2}}}{2\pi\sigma^2} \int_0^{\infty} U e^{-\frac{U^2-2UU_0 \cos \theta}{2\sigma^2}} dU. \quad (26)$$

Вычисление внутреннего интеграла последнего выражения выполним, пользуясь формулой

$$\int_0^{\infty} x e^{-p^2 x^2 + qx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{q}{2p} e^{\frac{q^2}{4p^2}} \left[1 + \Phi\left(\frac{q}{2p}\right) \right] \right\}, \quad (27)$$

где $\Phi(z)$ – интеграл вероятности ошибок

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (28)$$

Формула (27) может быть получена из табличной

$$\int_0^{\infty} x e^{-p^2 x^2 + qx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2p} e^{\frac{q^2}{4p^2}} \left[1 + \Phi\left(\frac{q}{2p}\right) \right] \quad (29)$$

дифференцированием обеих ее частей по параметру q .

В данном случае

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}, \quad q = \frac{U_0}{\sigma^2} \cos \theta. \quad (30)$$

Применение формулы (27) дает для плотности вероятности фазы $\omega(\theta)$ следующее выражение:

$$\omega(\theta) = \frac{e^{-\eta^2}}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \eta \cos \theta e^{\eta^2 \cos^2 \theta} \left[1 + \Phi(\eta \cos \theta) \right] \right\}. \quad (31)$$

Здесь $\eta = \frac{U_0}{\sqrt{2}\sigma}$ – отношение эффективных напряжений сигнала и шума на выходе системы.

При отсутствии сигнала ($\eta = 0$) выражение (31) превращается в $\omega(0) = \frac{1}{2\pi}$.

Увеличение амплитуды сигнала приводит к концентрации наиболее вероятных значений фазы около $\theta = 0$. Это означает, что фаза результирующего колебания все в большей степени определяется фазой сигнала (рис. 3).

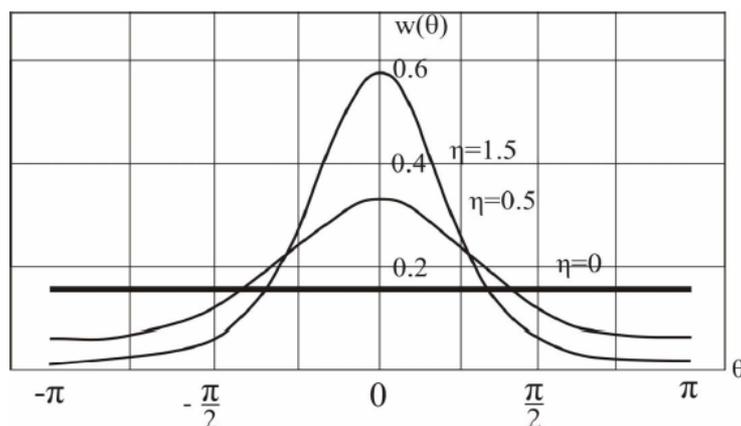


Рисунок 3 – График плотности вероятности фазы при различных отношениях сигнал/шум

Заключение. Используя квадратурный гармонический измерительный сигнал, была решена задача выделения амплитудной и фазовой модуляции измерительных сигналов в канале утечки речевой информации по оптико-электронному каналу.

Обосновано применение корреляционного метода для определения нормируемой величины разборчивости речи в канале утечки информации. Энергетический показатель, определенный как отношение сигнал/шум, зависит от фазы результирующего колебания.

С помощью полученной математической модели обработки сигнала, модулированного по амплитуде, фазе и частоте, проанализирован оптико-электронный канал на наличие утечки информации по суммарному эффекту амплитудно-фазовой модуляции, воздействующей на направленный луч.

ЛИТЕРАТУРА

1. Железняк, В.К. Защита информации от утечки по техническим каналам : учеб. пособие/ В.К. Железняк ; ГУАП. – СПб., 2006. – 188 с.
2. Дидковский, В.С. Акустическая экспертиза каналов речевой коммуникации : моногр. / В.С. Дидковский, М.В. Дидковская, А.Н. Продеус. – Киев, 2008. – 420 с.
3. Глущенко, А.В. Математическая модель получения информации об акустическом речевом сигнале по отраженному лазерному излучению : А.В. Глущенко, Л.А. Глущенко, В.И. Тупота // Лазеры. Измерения. Информация-2010 : сб. докл. 20-й междунар. конф. ; Санкт-Петербург, 1-3 июня 2010 г. / С.-Петерб. политехн. ун-т. – СПб., 2010. – Т. 1. – С. 209–220.
4. Заказнов, Н.П. Теория оптических систем : учебник для студентов приборостроительных специальностей вызов / Н.П. Заказнов, С.И. Кирюшин, В.Н. Кузичев. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1992. – 448 с. : ил.
5. Толстов, Г.П. Ряды Фурье / Г.П. Толстов. – изд. 2, испр. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. – 390 с.
6. Топорец, А.С. Оптика шероховатой поверхности / А.С. Топорец. – Л. : Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1988. – 191 с. : ил.
7. Лебедев, В.Л. Случайные процессы в электрических и механических системах / В.Л. Лебедев. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958. – 390 с.

Поступила 15.09.2015

MODEL EVALUATION OPTOELECTRONIC CHANNEL LEAKED SPEECH

V. ZHELEZNYAK, I. CHERNOVA

Analyzed opto-electronic channel leakage of voice information. The choice of the measurement signal on the basis of the considered advantages quadrature harmonic signal. A method for measuring signal, including an assessment of the cumulative effect of amplitude and phase modulation. Different types of signal processing techniques, the method chosen, the factors affecting the methodological (theoretical) uncertainty (accuracy) evaluating intelligibility. Acoustic vibrations of the solid medium, subject to amplitude and phase modulation, presents a model of a rectangular vibrating membrane. The method of estimating the signal / noise ratio by using the mathematical model developed security assessment. Built density distribution phase at various energy indicators showing the degree of dependence of the phase fluctuations resulting from the phase of the signal.

УДК 519.1:519.8:004.6

**ЭКСПЕРТНОЕ РАНЖИРОВАНИЕ ВАЖНОСТИ ЧАСТНЫХ КРИТЕРИЕВ
ОПТИМАЛЬНОСТИ РАСПИСАНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ****М.В. ДЕКАНОВА***(Полоцкий государственный университет)*

Получена количественная (расчетная) оценка качества экспертов. Произведены расчеты суммарного отклонения мнений каждого эксперта по всем критериям, отклонения мнений каждого эксперта от среднего мнения группы по всем критериям. Вычислена степень согласованности мнений экспертов (дисперсия оценок). Для определения весовых коэффициентов за основу взят метод ранжирования. Экспериментальным путем рассчитаны весовые коэффициенты для критериев оптимизации расписания.

Введение. Предположим, что предложенную в статье [1] гиперграфовую модель составления расписания реализует некая специально разработанная система, тогда в качестве входной информации будут выступать исходные данные, частные критерии оптимизации расписания, весовые коэффициенты. Выходные данные – сгенерированное расписание занятий.

В качестве частных критериев оптимизации расписания занятий в университете предлагаем использовать следующие.

1. Равномерность распределения занятий по количеству «пар» в день (K_1).
2. Минимизация количества дней, занятых учебной нагрузкой (K_2).
3. Минимизация количества «окон» (K_3).
4. Равномерность распределения занятий по количеству «пар» в течение планового периода – двух недель (K_4).
5. Возможность проведение занятий в определенную смену (K_5).
6. Отсутствие занятий в определенные дни для преподавателей, например, методические дни (K_6).

Критерии оптимизации расписания занятий рассматриваем как частные критерии. Предлагается построить обобщенный аддитивный критерий, который объединяет (свертывает) все частные критерии в одну целевую функцию [2], представляющую собой взвешенную сумму частных критериев:

$$F = \sum_{i=1}^6 w_i K_i,$$

где w_i – весовой коэффициент критерия K_i ; $0 \leq w_i \leq 1$; $\sum_{i=1}^6 w_i = 1$.

Из существующих методов решения многокритериальной задачи [3] выбран метод аддитивной свертки критериев, т.к. он прост в использовании и дает достаточно приемлемые результаты.

Коэффициенты w_i определяются на основе экспертных оценок.

Веса критериев – самое тонкое место в проблеме критериального анализа. Чаще всего веса назначают, исходя из интуитивного представления о сравнительной важности критериев. Однако исследования показывают, что человек (эксперт) не способен непосредственно назначать критериям корректные численные веса. Необходимы специальные процедуры получения весов [4, 6, 8].

Основная идея экспертных методов состоит в том, чтобы использовать интеллект людей, их способность искать и находить решение слабо формализованных задач [4].

Методы экспертных оценок являются комплексами психологических и математических процедур получения от специалистов-экспертов информации о важности рассматриваемых критериев, анализа и обобщения (консолидации) с целью выработки рациональных решений.

Формирование экспертной группы осуществляет экспертная комиссия. Качество работы последней является основополагающим и критическим фактором для достижения максимальной объективности и точности экспертных оценок риска.

Формирование экспертной группы начинается с выбора кандидатов в эксперты. При их выборе рекомендуется использовать контрольные листы, которые содержат требования к образованию (теоретической подготовке), технологической компетентности (опыт работы по направлению деятельности), опыту работы в составе экспертных комиссий и групп, профессионализму и объективности, отсут-

вию личной заинтересованности в результатах экспертизы, наличие положительных рекомендаций и отзывов [5, 6, 8].

После выбора кандидатов в эксперты проводится количественная (расчетная) оценка их качеств и отсеивание некоторых кандидатов. Простейший подход к последней процедуре основан на оценке близости мнения эксперта к среднему мнению группы. В случае большого расхождения кандидат «отбраковывается» [7].

Выбор метода сбора и обработки результатов экспертного оценивания базируются на соответствующей процедуре опроса. С этой точки зрения методы экспертного оценивания подразделяются на две большие группы: коллективной работы экспертов и получения индивидуального мнения эксперта [4, 6].

Выбор экспертной комиссии, расчет весовых коэффициентов критериев – значимые вопросы для задачи оптимизации составления расписания учебных занятий в университете. Решение данных вопросов может сильно изменить конечный результат [4, 7, 10].

Расчет оценки компетенции экспертов. Допустим, что по результатам отбора кандидатов в эксперты качественным методом было выбрано четыре эксперта с одинаковыми или очень близкими параметрами соответствия заявленным требованиям отбора. Зачетная численность экспертной группы – четыре человека: два диспетчера, преподаватель с достаточно большим стажем работы и заведующий кафедрой. Диспетчеры в университете – люди самые опытные и знающие в вопросах составления расписания занятий, поэтому их включение в экспертную группу само собой разумеющийся факт. Далее необходимо было включить эксперта, представляющего интересы преподавателей, – преподаватель с достаточно большим стажем работы, а также эксперта, представляющего интересы студентов, – обычно это заведующий кафедрой.

Итак, четырем кандидатам ($n = 4$) было предложено проранжировать 6 критериев (K_1, \dots, K_6).

Наиболее важному критерию присваивается 1-й ранг, наименее важному 6-й.

По результатам ранжирования определены:

– матрица-строка 1-го эксперта $|\alpha_1| = |1, 2, 3, 4, 5, 6|$;

– матрица-строка 2-го эксперта $|\alpha_2| = |2, 1, 4, 3, 6, 5|$;

– матрица-строка 3-го эксперта $|\alpha_3| = |1, 3, 2, 5, 6, 4|$;

– матрица-строка 4-го эксперта $|\alpha_4| = |2, 3, 1, 4, 5, 6|$.

Общая матрица ранжирования представлена в таблице 1.

Таблица 1 – Общая таблица результатов ранжирования

i	j					
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	4	3	6	5
3	1	3	2	5	6	4
4	2	3	1	4	5	6
Σ	6	9	10	16	22	21

Средние значения рангов представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Среднее значение рангов

Ранги	j					
	Обозначение критерия					
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
Сумма рангов	6	9	10	16	22	21
Среднее значение	6/4	9/4	10/4	16/4	22/4	21/4

Приведем пример вычисления нескольких элементов для построения матрицы отклонений мнений экспертов от среднего мнения:

$$i = 1; j = 1: 1 - (6/4) = - 2/4;$$

$$i = 2; j = 1: 2 - (6/4) = + 2/4;$$

$$i = 3; j = 1: 1 - (6/4) = - 2/4;$$

$$i = 4; j = 1: 2 - (6/4) = + 2/4;$$

$$\begin{aligned}
 i = 1; j = 4: & 4 - (16/4) = 0; \\
 i = 2; j = 4: & 3 - (16/4) = -4/4; \\
 i = 3; j = 4: & 5 - (16/4) = +4/4; \\
 i = 4; j = 4: & 4 - (16/4) = 0.
 \end{aligned}$$

Матрица отклонений мнений экспертов от среднего мнения:

$$D = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2/4 & 2/4 & 2/4 & 2/4 \\ 2 & 1/4 & 5/4 & 3/4 & 3/4 \\ 3 & 2/4 & 6/4 & 2/4 & 6/4 \\ 4 & 0 & 4/4 & 4/4 & 0 \\ 5 & 2/4 & 2/4 & 2/4 & 2/4 \\ 6 & 3/4 & 1/4 & 5/4 & 3/4 \end{array}$$

Суммарное отклонение мнений i -го эксперта по всем критериям представлено в таблице 3.

Таблица 3 – Суммарное отклонение мнений i -го эксперта по всем критериям

Номер эксперта	1	2	3	4
Среднее отклонение	10/4	20/4	18/4	16/4

Суммарное отклонение мнений всех экспертов по всем критериям:

$$\overline{\Delta\alpha} = \frac{10+20+18+16}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{64}{24} = 2\frac{4}{6} \approx 2,6.$$

Среднее отклонение мнений i -го эксперта от среднего мнения группы по всем критериям представлено в таблице 4.

Таблица 4 – Среднее отклонение мнений i -го эксперта от среднего мнения группы по всем критериям

Номер эксперта	1	2	3	4
Суммарное отклонение мнений экспертов по всем критериям	2,67			
Суммарное среднее отклонение по каждому эксперту	10/4 = 2,50	20/4 = 5,00	18/4 = 4,50	16/4 = 4,00
Модуль частного отклонения	0,17	2,33	1,83	1,33

Получаем матрицу-строку модулей частных отклонений:

$$|\overline{D}| = |0,17; 2,33; 1,83; 1,33|.$$

Кортеж отклонений:

$i = 1$	$i = 4$	$i = 3$	$i = 2$	(новые номера)
1	4	3	2	

Следовательно, эксперт, имеющий новый номер $i = 4$, имеет мнения наиболее удаленные от среднего мнения экспертов.

В теории экспертных оценок разработан ряд методов проведения экспертизы. Наиболее эффективными оказались методы ранжирования и приписывания баллов [4, 6–8, 10].

Определение коэффициентов важности критериев оптимизации с использованием метода ранжирования для задачи составления расписания. Более подробно этапы определения коэффициентов важности с использованием метода ранжирования рассмотрим на следующем примере. Предположим, что четыре эксперта проранжировали 6 критериев. Результат опроса экспертов относительно важности критериев представлен в таблице 1. В данной таблице представлены ранги, присвоенные экспертами рассматриваемым критериям оптимизации.

Далее необходимо вычислить весовые коэффициенты рассматриваемых частных критериев оптимизации. Результаты представлены в таблице 5.

Сумма рангов шести критериев:

$$\sum_{i=1}^m r_i = 6 + 9 + 10 + 16 + 22 + 21 = 84.$$

Весовые коэффициенты [4] рассматриваемых критериев в результате произведенного эксперимента принимают следующие значения: $\lambda_1 = 0,07, \lambda_2 = 0,11, \lambda_3 = 0,12, \lambda_4 = 0,19, \lambda_5 = 0,26, \lambda_6 = 0,25$.

Если сложить все полученные весовые коэффициенты, то в сумме получится единица, что подтверждает верность расчетов: $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

Таблица 5 – Весовые коэффициенты частных критериев

Эксперты	Критерии					
	Критерий K_1	Критерий K_2	Критерий K_3	Критерий K_4	Критерий K_5	Критерий K_6
Эксперт 1	1	2	3	4	5	6
Эксперт 2	2	1	4	3	6	5
Эксперт 3	1	3	2	5	6	4
Эксперт 4	2	3	1	4	5	6
Σ сумма рангов	6	9	10	16	22	21
$\sum_{i=1}^m r_i = 84$						
веса	$6/84 = 0,07$	$9/84 = 0,11$	$10/84 = 0,12$	$16/84 = 0,19$	$22/84 = 0,26$	$21/84 = 0,25$

Таким образом, можно сделать вывод, что, по мнению экспертов наиболее важным является первое требование.

Обработка результатов экспертных оценок. Если рассматривать результаты оценок каждого из экспертов как реализации некоторой случайной величины, то к ним можно применять методы математической статистики. Среднее значение оценки для i -го критерия:

$$\bar{r}_i = \frac{\sum_{j=1}^L r_{ji}}{L} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L r_{ji} = \frac{r_i}{L}.$$

Среднее значение \bar{r}_i выражает коллективное мнение группы экспертов. Степень согласованности мнений экспертов характеризуется величиной $\sigma_i^2 = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (r_{ji} - \bar{r}_i)^2$, называемой дисперсией оценок. Ясно, что чем меньше значение дисперсии, тем с большей уверенностью можно опираться на найденные значения \bar{r}_i оценки степени важности частного критерия $Fi(X)$. В качестве меры надёжности приведённой экспертизы принимают $\beta = \frac{\sigma_i}{r_i}$, называемой вариацией.

Проведем вычисления. Для $L = 4, L$ – количество экспертов.

Имеем $r_1 = 17, r_2 = 6, r_3 = 15, r_4 = 7, r_5 = 14, r_6 = 8$.

Определим среднее значение оценки для i -го критерия.

$$\bar{r}_1 = \frac{r_1}{L} = \frac{17}{4} = 4,25.$$

$$\bar{r}_2 = \frac{r_2}{L} = \frac{6}{4} = 1,50.$$

$$\bar{r}_3 = \frac{r_3}{L} = \frac{15}{4} = 3,75.$$

$$\bar{r}_4 = \frac{r_4}{L} = \frac{7}{4} = 1,75.$$

$$\bar{r}_5 = \frac{r_5}{L} = \frac{14}{4} = 3,50.$$

$$\bar{r}_6 = \frac{r_6}{L} = \frac{8}{4} = 2,00.$$

Рассчитаем дисперсию оценок, т.е. степень согласованности мнений экспертов.

$$\begin{aligned} \delta_1^2 &= \frac{1}{4} \left((r_{11} - \bar{r}_1)^2 + (r_{21} - \bar{r}_1)^2 + (r_{31} - \bar{r}_1)^2 + (r_{41} - \bar{r}_1)^2 \right) = \\ &= 0,25 \left((4 - 4,25)^2 + (4 - 4,25)^2 + (5 - 4,25)^2 + (4 - 4,25)^2 \right) = 0,25 \times 0,75 = 0,1875. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_2^2 &= \frac{1}{4} \left((r_{12} - \bar{r}_2)^2 + (r_{22} - \bar{r}_2)^2 + (r_{32} - \bar{r}_2)^2 + (r_{42} - \bar{r}_2)^2 \right) = \\ &= 0,25 \left((2 - 1,50)^2 + (1 - 1,50)^2 + (1 - 1,50)^2 + (2 - 1,50)^2 \right) = 0,25 \times 1 = 0,2500. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_3^2 &= \frac{1}{4} \left((r_{13} - \bar{r}_3)^2 + (r_{23} - \bar{r}_3)^2 + (r_{33} - \bar{r}_3)^2 + (r_{43} - \bar{r}_3)^2 \right) = \\ &= 0,25 \left((4 - 3,75)^2 + (3 - 3,75)^2 + (5 - 3,75)^2 + (3 - 3,75)^2 \right) = 0,25 \times 2,75 = 0,6875. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_4^2 &= \frac{1}{4} \left((r_{14} - \bar{r}_4)^2 + (r_{24} - \bar{r}_4)^2 + (r_{34} - \bar{r}_4)^2 + (r_{44} - \bar{r}_4)^2 \right) = \\ &= 0,25 \left((2 - 1,75)^2 + (2 - 1,75)^2 + (2 - 1,75)^2 + (1 - 1,75)^2 \right) = 0,25 \times 0,75 = 0,1875. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_5^2 &= \frac{1}{4} \left((r_{15} - \bar{r}_5)^2 + (r_{25} - \bar{r}_5)^2 + (r_{35} - \bar{r}_5)^2 + (r_{45} - \bar{r}_5)^2 \right) = \\ &= 0,25 \left((4 - 3,50)^2 + (3 - 3,50)^2 + (3 - 3,50)^2 + (4 - 3,50)^2 \right) = 0,25 \times 1 = 0,2500. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_6^2 &= \frac{1}{4} \left((r_{16} - \bar{r}_6)^2 + (r_{26} - \bar{r}_6)^2 + (r_{36} - \bar{r}_6)^2 + (r_{46} - \bar{r}_6)^2 \right) = \\ &= 0,25 \left((2 - 2,00)^2 + (3 - 2,00)^2 + (2 - 2,00)^2 + (1 - 2,00)^2 \right) = 0,25 \times 2 = 0,50. \end{aligned}$$

Значение дисперсии для первого критерия имеет наименьшее значение. Это означает, что на оценку степени важности первого частного критерия можно полагаться с большей уверенностью.

Статистическая обработка результатов экспертных оценок подобна статистической обработке результатов измерений. На достоверность экспертизы существенно влияют такие факторы, как численный состав экспертной группы, уровень компетентности экспертов; состав вопросов, представляемых экспертам и т.д.

Индивидуальные экспертные оценки также носят на себе печать случайности: настроение, самочувствие, обстановка, а также знание и опыт.

Заключение. Методы экспертных оценок являются комплексами психологических и математических процедур получения от специалистов-экспертов информации о важности рассматриваемых критериев, анализа и обобщения (консолидации) с целью выработки рациональных решений. В данной статье рассчитаны весовые коэффициенты критериев оптимизации задачи составления расписания методом ранжирования, сумма которых равна единице, что подтверждает верность расчетов. Описан процесс выбора кандидатов в эксперты, а также проведена оценка качества их мнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Деканова, М.В. Математическая модель и алгоритм построения расписания учебных занятий университета / М.В. Деканова // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия С. Фундаментальные науки – 2013. – № 12. – С. 24–34
2. Черноуцкий, И.Г. Методы принятия решений / И.Г. Черноуцкий. – СПб. : БХВ, 2005. – 498 с.

3. Гафаров, Е.Р. Математические методы оптимизации при составлении учебного расписания / Е.Р. Гафаров, А.А. Лазарев // Новые информационные технологии в образовании : сб. науч. тр. – М. : 1С-Публишинг. – 2013. – Ч. 2. – С. 51–55.
4. Григоров, В.М. Эксперты в системе управления общественным производством / В.М. Григоров // М. : Мысль, 1976.
5. Малин, А.С. Исследование систем управления / А.С. Малин. – М. : ГУ ВШЭ, 2005. – 399 с.
6. Кафидов, В.В. Исследование систем управления / В.В. Кафидов. – М. : Академ. Проект, 2005. – 160 с.
7. Мишин, В.М. Исследование систем управления / В.М. Мишин. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2005.
8. Мухин, В.И. Исследование систем управления / В.И. Мухин. – М. : Экзамен, 2003. – 384 с.
9. Ползунова, Н.Н. Исследование систем управления / Н.Н. Ползунова. – М. : Академ. Проект, 2004. – 176 с.
10. Игнатъева, А.В. Исследование систем управления / А.В. Игнатъева. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 157 с.
11. Баронов, В.В. Автоматизация управления предприятием / В.В. Баронов. – М. : Инфра-М, 2000.
12. Логоша, Б.А. Комплекс моделей и методов оптимизации расписания занятий в вузе / Б.А. Логоша, А.В. Петропавловская // Экономика и математические методы. – 1993. – Т. 29. – № 4.
13. Танаев, В.С. Теория расписаний. Многостадийные системы / В.С. Танаев, Ю.Н. Сотсков, В.А. Струсевич. – М. : Наука, 1989. – 328 с.
14. Гафаров, Е.Р. Задачи теории расписаний. Алгоритмы и применение / Е.Р. Гафаров // Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук: управление и прикладная математика : тр. 49 науч. конф. / МФТИ. – Москва-Долгопрудный, 2006. – С. 82–83.

Поступила 20.09.2015

EXPERT RANKINGS OF IMPORTANCE OF INDIVIDUAL CRITERIA OF OPTIMALITY OF THE SCHEDULE UNDER CONDITIONS OF UNCERTAINTY

M. DEKANOVA

The quantitative (computational) evaluation of the quality experts. Calculated total rejection of the views of each expert on all the criteria, the deviation of each expert from the average views of the group on all criteria. The calculated degree of coherence of expert opinions (dispersion estimates). To determine the weighting coefficients based on the ranking method. Experimentally calculated weight factors for optimization criteria for the schedule.

УДК 004.42,537.5,621.3

**АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ИСТОЧНИКАМИ ПИТАНИЯ
СИСТЕМЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
С РАСШИРЕННЫМИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ И СЕРВИСНЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ**

**И.С. РУСЕЦКИЙ, Д.Г. РУГОЛЬ, канд. техн. наук, доц. О.Н. ПЕТРОВИЧ
(Полоцкий государственный университет)**

Рассмотрен алгоритм управления автоматизированной работой источниками питания электронно-лучевого оборудования с использованием промышленного микроконтроллера. Описаны режимы работы, позволяющие в полном объеме обеспечить основные технологические операции. Представлена UML-диаграмма взаимосвязей элементов управления и регулирования. Алгоритм может быть использован как основа для создания программы управления электронно-лучевым энергокомплексом на базе пушки с плазменным источником электронов.

Введение. Одним из направлений применения электронно-лучевых технологий является процесс обработки металла путем воздействия на него электронным лучом с высокой плотностью энергии, достаточной для расплава, сварки, упрочнения и других технологических операций. Для этого используются электронно-лучевые пушки, способные получать электронные пучки достаточно малого диаметра и высокой энергии. Данные технологии позволяют производить прецизионные операции как по степени термического воздействия, так и по геометрии сварочного шва. Характерной особенностью электронно-лучевой сварки является возможность получения сварочного шва кинжальной формы, т.е. глубина проварки в несколько раз больше ширины. Для осуществления высокоточного и стабильного воздействия электронного луча на материал используют электрические схемы, которые стабилизируют работу электронно-лучевой пушки.

Программное управление электронно-лучевым оборудованием требует применения промышленных ЭВМ с широкими логическими и вычислительными возможностями, так как электронно-лучевое управление представляет собой многофакторный процесс, характеризующийся большим числом взаимосвязанных параметров. Электронно-лучевое управление включает в себя ряд подсистем, в целом образующих весьма сложный технический комплекс, включаемый в единую систему управления [1]. Такой системой управления может быть программируемый промышленный контроллер, который будет управлять всеми технологическими процессами в соответствии с заданными в него инструкциями.

Предложен алгоритм работы автоматизированной системы управления источниками питания электронно-лучевой пушки с плазменным эмиттером на базе промышленного микроконтроллера.

Постановка задачи. Задача автоматизированной системы управления сводится к наблюдению, контролю, регулировке и управлению основными параметрами работы электронно-лучевой пушки с плазменным эмиттером (ток пучка и разряда, ускоряющее напряжение, напряжение разряда и напряжение фокусирующей линзы). Система должна иметь возможность работы в ручном, автоматическом и полуавтоматическом режиме.

Для оптимизации процесса управления ЭЛУ предлагается использовать тактильную панель, которая позволит существенно расширить функции оперативного наблюдения и управления режимом работы электронно-лучевой пушки.

Описание функциональных возможностей алгоритма. Разработанная система состоит из программных блоков позволяющие реализовать следующие режимы работы всех источников питания:

- ручной;
- автоматический;
- полуавтоматический.

Ручной режим предполагает независимое управление и работу каждого источника питания, минуя микроконтроллер. Он необходим при пуско-наладочных работах, при выявлении неисправностей, при выполнении работ, предусматривающих нерегламентированные режимы воздействия (отсутствует автоматическое аварийное отключение), кроме этого, данный режим позволяет производить технологические операции, не требующие тонкой настройки электронного пучка в связи с тем, что при этом отсутствует стабилизация всех параметров пучка.

Автоматический режим предполагает взаимосвязанную работу источника питания фокусирующей линзы (ИПФЛ), источника питания разряда (ИПР), высоковольтного источника питания (ВИП) по заранее выбранным параметрам, которые хранятся в базе данных. После запуска происходит пошаговое

включение всех источников питания в определенной последовательности с контролем необходимых величин на каждом этапе. При удачном завершении пуска осуществляется переход в рабочий режим со стабилизацией выбранных параметров ИПР или ВИП. Стабилизация работы ИПФЛ микроконтроллером не предусматривается, так как она осуществляется источником питания самой линзы. По истечении заданного времени происходит отключение всех блоков. Кроме того, предусмотрена возможность плавного уменьшения напряжения в ИПР (вывод кратера), которое позволяет избежать появления дефектов на сварочном шве [3, 4]. Помимо этого, во время работы постоянно проводится мониторинг основных величин на предмет их выхода за рамки критических значений. При выявлении такой ситуации производится аварийное отключение всех источников питания с выдачей соответствующего сообщения на панели управления.

Полуавтоматический режим предусматривает управление всеми источниками питания в их взаимосвязи и по отдельности с тактильной панели. При совместной работе функциональные возможности ограничены включением, отключением и отображением значений измеряемых величин. При раздельном управлении осуществляется выбор необходимого источника питания с возможностью расширенного контроля и управления его работы.

Этот режим предназначен для отработки параметров воздействия электронного пучка на обрабатываемую деталь, не предусмотренных ранее.

Алгоритм работы системы управления представлен на UML-диаграмме активности (рис. 1).

Схема состоит из следующих самостоятельных элементов:

- A1. Программный блок для управления ИПФЛ;
- A2. Программный блок для управления ИПР;
- A3. Программный блок для управления ВИП;
- A4. Программный блок хранения значений параметров работы.

На начальном этапе алгоритм предлагает выбрать режим работы – автоматический или полуавтоматический. Рассмотрим работу блоков более подробно.

Программный блок управления для ИПФЛ (A1).

После включения устройства предлагается выбрать режим работы. При ручном управлении регулировка напряжения производится с помощью переменного резистора. Автоматизированное управление предполагает автоматический (CPU) и полуавтоматический (П/А) режимы работы. При этом управление ИПФЛ осуществляется через цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) микроконтроллера. При автоматическом режиме величина напряжения выбирается из параметров сварки базы данных и изменяется в соответствии с заданными в ней значениями. При полуавтоматическом режиме управление осуществляется оператором через тактильную панель. Величина напряжения подаваемого на линзу через элемент обратной связи (ОС) и аналогово-цифровой преобразователь (АЦП) отображается на тактильной панели постоянно.

Программный блок управления для ИПР (A2) имеет три режима работы. При ручном управлении регулировка напряжения, подаваемого на источник питания разряда, осуществляется резистором без использования микроконтроллера.

Полуавтоматический режим позволяет включать/отключать источник питания разрядом, производить регулировку напряжения, контролировать выходные напряжение и ток разряда. Он предусматривает три режима работы: без стабилизации, режим стабилизации тока разряда, режим стабилизации тока пучка.

В первом режиме имеется возможность регулировки напряжения разряда через ЦАП с использованием тактильной панели. При этом ведется контроль и индикация всех необходимых параметров. Выход их за пределы установленных значений приведет к аварийной ситуации, при которой произойдет отключение источников питания с отображением соответствующего сообщения.

Режим стабилизации тока разряда осуществляется через элемент ОС, который формирует напряжение рассогласования заданного и реального токов и подает его на вход АЦП микроконтроллера путем изменения выходного напряжения разряда. Переход в этот режим возможен по предустановленной вручную величине и по рабочему (текущему) току.

Режим стабилизации тока пучка осуществляется изменением напряжения разряда [2]. Это связано с особенностью работы плазменного источника электронов. Кроме того, предусмотрен оперативный выход из режима стабилизации без прерывания работы с текущими значениями параметров. При необходимости можно сохранять значения тока и напряжения в базе данных.

В автоматическом режиме работы оператором производится выбор значения тока разряда из базы данных и включение. Затем микроконтроллер осуществляет включение ИПР, увеличивает напряжение разряда. После зажигания разряда, что характеризуется появлением тока в цепи ОС, происходит изменение напряжения до заданной величины тока разряда. Затем следует переход в режим стабилизации. Если зажигание не произошло, осуществляется переход в аварийный режим с отключением ИПР.

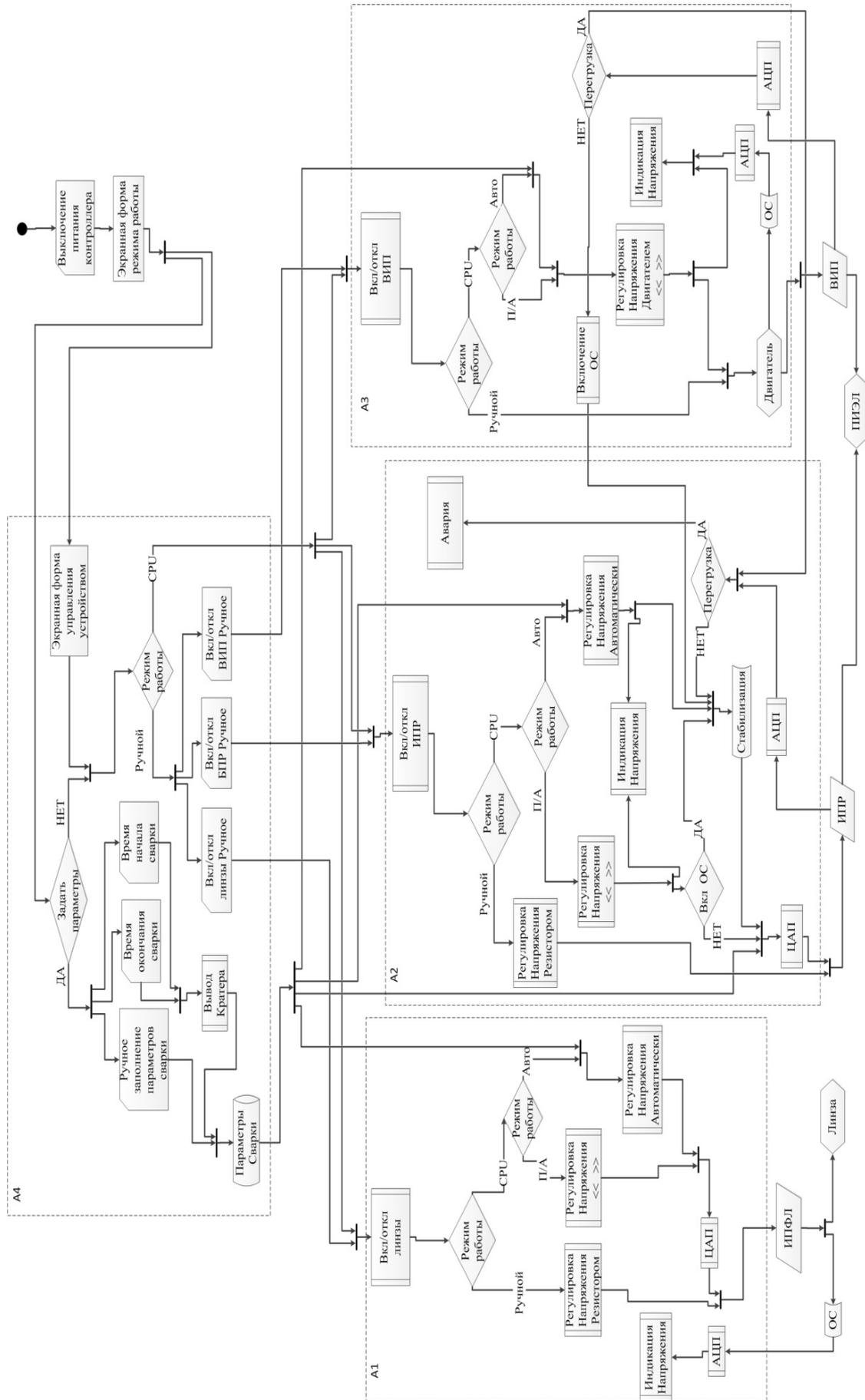


Рисунок – UML диаграмма активности

Программный блок управления для ВИП (А3) осуществляет работу с реверсивным двигателем, установленным на лабораторный автотрансформатор, с помощью которого происходит регулировка напряжения подаваемого на ВИП, и производит включение самого ВИП с подачей ускоряющего напряжения на плазменный источник электронов (ПИЭЛ).

Ручное управление ВИП и двигателем осуществляется с пульта управления. Контроль величин тока и напряжения пучка осуществляется через АЦП по их значениям на тактильной панели и стрелочных приборах. В этом режиме микроконтроллер производит мониторинг параметров на предмет их выхода за рамки критических значений. При обнаружении такой ситуации осуществляется отключение ВИП, одновременно на экран выводится соответствующее сообщение.

В полуавтоматическом режиме управление ВИП (включение и отключение, установка необходимого значения ускоряющего напряжения, подача и снятие напряжения на ПИЭЛ) производится через тактильную панель. Здесь также ведется постоянный контроль основных параметров.

Автоматический режим предполагает взаимодействие двух программных блоков А2 и А3. Вначале выбирается режим работы из базы данных и осуществляется запуск. При этом управление передается программному блоку А2 в автоматическом режиме. Результатом его работы служит наличие тока разряда со стабилизацией этого параметра. Одновременно программный блок А3 осуществляет установку заданного ускоряющего напряжения. По достижению положительного результата работы блоков А2, А3 происходит подача ускоряющего напряжения на ПИЭЛ и стабилизация его работы либо по току пучка, либо току разряда.

Программный блок хранения значений параметров работы (А4) осуществляет запись, хранение, редактирование параметров работы ПИЭЛ. К ним относятся ток и напряжения разряда и пучка, время работы, напряжение фокусирующей линзы, время вывода кратера.

Представленный алгоритм был использован для написания программы управления с использованием промышленного микроконтроллера Unitronics Vision 570. В ходе лабораторных испытаний он показал достаточно широкие функциональные возможности, удовлетворительное быстродействие, стабильную и продолжительную работу микроконтроллера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Технологии и оборудование электронно-лучевой сварки – 2008 : материалы первой С.-Петерб. междунар. науч.-техн. конф., СПб., 19–22 мая 2008 г. / ФГУП «ЦНИИМ» – СПб. : ООО «Агентство “ВиТ-Принт”», 2008. – 210 с.
2. Плазменные процессы в технологических электронных пушках / М.А. Завьялов [и др.]. – М. : Энергоатомиздат, 1989. – 212 с.
3. Окс, Е.М. Источники электронов с плазменным катодом / Е.М. Окс. – Томск : Изд-во НТЛ, 2005. – 216 с.
4. Назаренко, О.К. Схемотехника управления током сварочного пучка электронов / О.К. Назаренко. – Киев : Институт электросварки им. Е.О. Патона НАН Украины, 2013. – 56 с.

Поступила 09.09.2015

ALGORITHM OF CONTROL BY SOURCES OF POWER OF CHARGED PARTICLES BEAM FORMATION SYSTEM WITH EXPANDED FUNCTIONAL AND SERVICE OPPORTUNITIES

I. RUSETSKI, D. RUGOL, O. PETROVICH

The algorithm of control by the automated work of power source of the electron beam equipment with use of the industrial microcontroller is considered. The operational modes allowing to provide in full the main technological operations are described. The UML chart of interrelations of elements of control and regulation is submitted. The algorithm can be used as basis for control program creation by an electron beam power complex on the basis of a gun with a plasma electrons source.

ФИЗИКА

УДК 537.623

МАГНИТНАЯ КЕРАМИКА $(\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x)\text{Fe}_2\text{O}_4$ С ГРАДИЕНТОМ СОСТАВА

*д-р физ.-мат. наук, проф. В.Н. ШУТ, канд. физ.-мат. наук, доц. С.Р. СЫРЦОВ,
В.А. РОМАНОВ, канд. физ.-мат. наук, В.М. ЛАЛЕТИН*

(ГНУ «Институт технической акустики НАН Беларуси», Витебск);

канд. физ.-мат. наук, Л.С. ЛОБАНОВСКИЙ

(ГНПО «Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению», Минск)

Методом шликерного литья изготовлены многослойные керамические образцы никель-цинковых ферритов $(\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x)\text{Fe}_2\text{O}_4$ ($x = 0 \dots 0,2$) и исследованы их магнитные характеристики. Показано, что вид и параметры экспериментально полученных петель гистерезиса согласуются с теоретически рассчитанными. Сдвига петель гистерезиса (ни по оси намагниченности M , ни по оси магнитной индукции B) в исследуемых материалах при используемой геометрии эксперимента ($\vec{H} \perp \nabla M$) обнаружено не было. Разработанный метод получения градиентных структур может быть эффективен при изготовлении магнитных материалов (в частности, ферритов) с требуемыми характеристиками.

Введение. В последние годы сформировалось и интенсивно развивается новое направление в физике активных диэлектрических материалов – создание и исследование структур с изменяющимися по объему характеристиками (составом) – градиентных ферроиков (graded ferroics, GF) [1–3]. Особый прогресс был достигнут в получении и исследовании градиентных сегнетоэлектрических структур различного состава с электрофизическими характеристиками, существенно превосходящими параметры однородных материалов. В частности, создание градиентных структур на основе твердых растворов титаната бария стронция $\text{Ba}_{1-x}\text{Sr}_x\text{TiO}_3$ позволило преодолеть основной недостаток, присущий однородным материалам, – температурную нестабильность, обусловленную сильным изменением диэлектрических характеристик в рабочей области температур [1, 2]. Кроме несомненной практической перспективы, градиентные сегнетоэлектрики оказались весьма перспективными и с научной точки зрения – в плане исследования в них особенностей сегнетоэлектрической неустойчивости, процессов поляризации и т.п. Возможность единого термодинамического описания явлений в различных ферроиках (подход Ландау – Гинзбурга) позволяет предположить, что отмеченные эффекты могут проявляться и в других структурах с пространственно изменяющимся составом, в частности, в градиентных ферромагнетиках [3]. Наличие градиента намагниченности M может приводить к появлению в системе встроенного магнитного поля [4, 5]. Несомненный интерес представляет создание градиентных магнитных структур с целью улучшения традиционных характеристик материалов – магнитной проницаемости, петель гистерезиса и т.п. В то же время объем экспериментальных исследований в данной области невелик. Целью данной работы является получение многослойной керамики на основе никель-цинковых ферритов $(\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x)\text{Fe}_2\text{O}_4$ (НЦФ) и исследование ее магнитных характеристик.

Методика эксперимента. В качестве базового материала для создания градиентной (многослойной) магнитокерамики были выбраны магнитомягкие никель-цинковые ферриты. Материалы этой системы кристаллизуются в структуре шпинели (MgAlO_4) и представляют собой твердые растворы замещения, образованные двумя простыми ферритами, один из которых (NiFeO_4) является ферримагнетиком, а другой (ZnFeO_4) – немагнитным. Катионы цинка в структуре шпинели всегда занимают тетраэдрические кислородные междоузлия, а катионы трехвалентного железа могут находиться как в тетра-, так и октаэдрических промежутках. Вхождение цинка в кристаллическую решетку сопровождается вытеснением железа в октаэдрические позиции. Соответственно снижается степень компенсации магнитных моментов катионов, находящихся в А и В подрешетках, что приводит к монотонному изменению магнитных характеристик керамики. Разбавление твердого раствора немагнитным ферритом вызывает ослабление основного обменного взаимодействия типа А-В-О, что выражается в монотонном снижении температуры Кюри (T_c) при увеличении мольной концентрации ZnFeO_4 в составе феррошпинели. Значение T_c варьируется от 590°C для чистого NiFeO_4 ($x = 0$) до 80°C при $x = 0,7$ [6].

Для изготовления феррита применяли оксиды ZnO и Fe_2O_3 квалификации ЧДА и NiO квалификации Ч. Состав шихты рассчитывали с учетом содержания основного вещества. Взвешивание исходных компонентов проводили на аналитических весах ВЛР-200. Их смешивание и помол осуществляли в ша-

ровой мельнице в жидкой среде (этиловый спирт) в течение 0,5 ч. Синтез проводили на воздухе в два этапа. На первой стадии материалы спекали при температуре 1020°C в течение 2 ч. Затем проводили помол и повторное спекание при температуре 1020°C в течение 1 ч. Используя данную технологию, были получены ферриты $(Ni_{1-x}Zn_x)Fe_2O_4$ трех составов: $x = 0; 0,1; 0,2$. Полученную шихту использовали для отлива пленок методом шликерного литья. Приготовление шликера происходило в два этапа. На первом этапе в фарфоровый барабан с мелющими шарами из ZrO_2 загружали часть компонентов (керамический материал, поливинилбутираль (ПВБ), пластификатор) и смесь растворителей (этиловый спирт, бутиловый эфир уксусной кислоты). Перемешивание суспензии проводили в течение 6 ч. На втором этапе в суспензию добавляли раствор связующего вещества, изготовленного с использованием ПВБ и смеси этилового спирта, бутилового эфира и уксусной кислоты. Шликер перемешивали в течение 4 ч. Затем отливали керамические пленки толщиной ~25 мкм, которые прессовали в пакеты с требуемой конфигурацией керамических слоев. Из пакетов вырубали заготовки $5,5 \times 4,0$ мм². Полученные заготовки спекали методом двухстадийного синтеза. Температуру повышали до максимального значения 1270°C, затем снижали до 1020°C и осуществляли выдержку в течение 3 ч. Магнитные измерения проводили на универсальном автоматизированном вибрационном магнитометре фирмы Cryogenic Limited.

Результаты и их обсуждение. Рентгеноструктурные исследования как однородных, так и многослойных образцов показали, что используемая в настоящей работе технология позволяет получать однофазные структуры во всем диапазоне концентрации Zn ($x = 0..0,2$). Это дает возможность предположить, что каждый из пространственных слоев многослойной структуры имеет параметры (в частности, магнитную проницаемость ϵ и намагниченность M), близкие к параметрам однородных материалов соответствующего состава. Были изучены магнитные характеристики однородных пленок НЦФ с составами, используемыми в дальнейшем при создании многослойных структур ($x = 0..0,2$).

При измерении намагниченности индукционным методом измерительная ячейка представляла собой две соосно совмещенные катушки, намотанные в противоположных направлениях и несколько разнесенные в пространстве вдоль общей оси. Измеряемый образец помещался между катушками и колебался вдоль оси с определенной частотой. В катушках при таком колебании намагниченного образца наводилось переменное напряжение (электродвижущая сила индукции) пропорциональное намагниченности образца и частоте его колебаний: $E \sim \frac{\partial M}{\partial z} v_z$, где E – ЭДС индукции, M – намагниченность образца, z – условное направление оси катушек и оси колебания образца, v_z – частота колебания образца вдоль оси катушек. Величина переменного напряжения фиксировалась фазочувствительным вольтметром, который посредством цифрового канала связи передавал измеренную величину напряжения в программу управления на управляющий персональный компьютер.

Экспериментально полученные петли гистерезиса для однородных образцов имели стандартный вид (рис. 1).

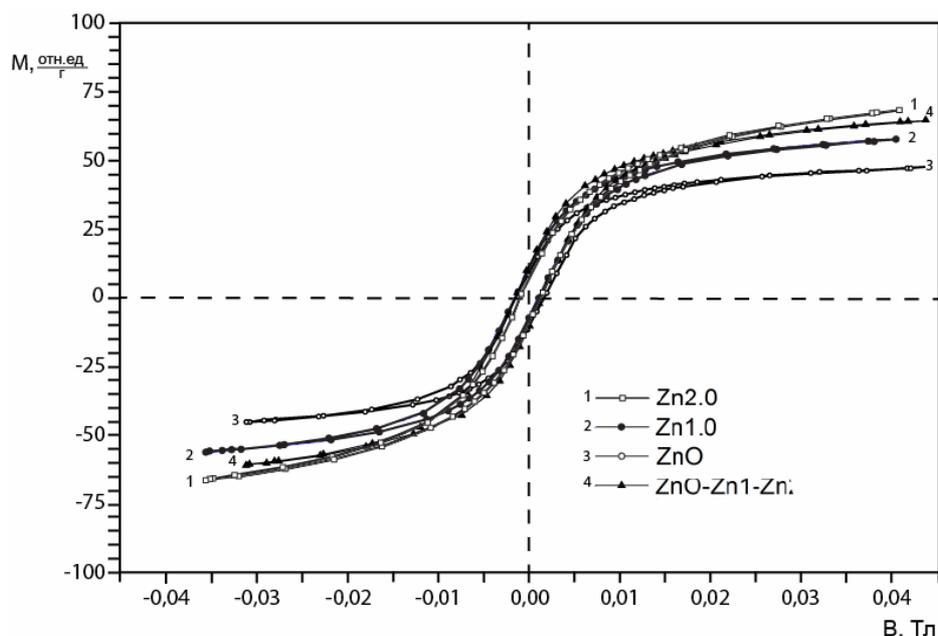


Рисунок 1 – Петли гистерезиса для однородных образцов и с градиентом состава

Для аппроксимации петель гистерезиса использовалось выражение [7, 8]

$$M = \pm M_s \operatorname{th}\left(\frac{\pm B - B_c}{2\delta}\right), \quad (1)$$

где M_s – намагниченность насыщения, B_c – коэрцитивное поле (верхний знак соответствует восходящей ветви петли, нижний знак – нисходящей). Значение параметра δ определяется соотношением

$$\delta = B_c \left[\ln \left(\frac{1 + \frac{M_r}{M_s}}{1 - \frac{M_r}{M_s}} \right) \right]^{-1}, \quad (2)$$

где M_r – остаточная намагниченность.

Концентрационные зависимости основных параметров (M_r и B_c), характеризующих гистерезисные явления в однородных и многослойных образцах, представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Магнитные характеристики однородных и градиентных материалов

	Zn 0	Zn 1,0	Zn 2,0	Многослойный
B_c , Тл	0,0016	0,0010	0,0011	0,0014
M_r , отн. ед./Г	11,1	9,5	8,5	11,2
M_s , отн. ед./Г	45	55	63	59

Приложенное магнитное поле \bar{H} в данной работе было направлено вдоль плоскости образца, т.е. перпендикулярно градиенту состава. При такой геометрии эксперимента возникающее в образце внутреннее магнитное поле (обусловленное изменением состава образца по его толщине) $\bar{H}_{\text{int}} \perp \bar{H}$ и не должно оказывать влияние на значение суммарной намагниченности M , т.е. намагничивание разных слоев происходит независимым образом. Следовательно, результирующая петля гистерезиса для многослойного материала получается суммированием ординат петель отдельных слоев структуры. Проведенные исследования магнитных характеристик многослойных образцов $(\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x)\text{Fe}_2\text{O}_4$ подтвердили данное предположение. Параметры экспериментально полученных петель гистерезиса удовлетворительным образом согласуются с теоретически рассчитанными при использовании значений B_c (B_r) и M_s (M_r), определенных для образцов однородного состава (рис. 2).

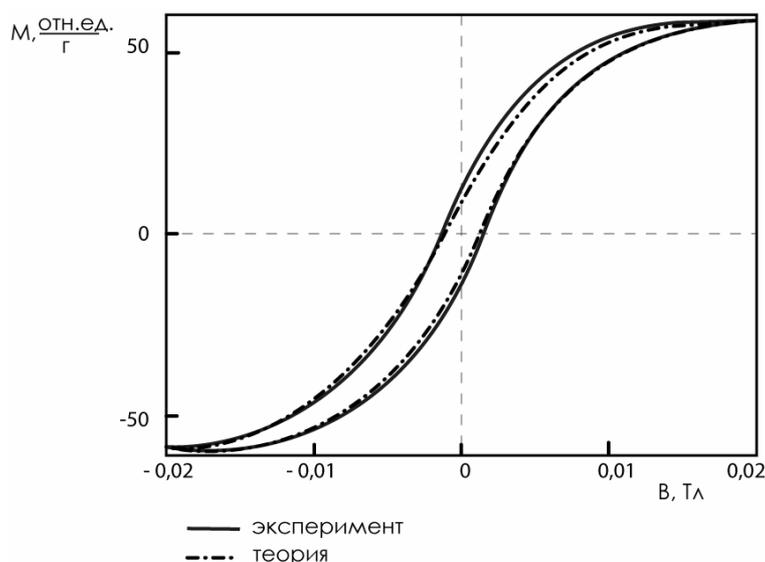


Рисунок 2 – Экспериментальная и теоретически рассчитанная петли гистерезиса для градиентного образца

Сдвига петель гистерезиса (ни по оси намагниченности M , ни по оси магнитной индукции B) в исследуемых материалах при используемой геометрии эксперимента (приложенное магнитное поле $\vec{H} \perp \nabla M$) обнаружено не было.

Заключение. По толстопленочной технологии (метод шликерного литья) получены образцы однородной и градиентной (многослойной) керамики никель-цинковых ферритов $(\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x)\text{Fe}_2\text{O}_4$ с пространственным изменением состава. В градиентных материалах содержание цинка по толщине изменялось от 0 до 20 мол.%. Исследованы особенности намагничивания полученных многослойных структур. Результирующая петля гистерезиса для многослойного образца получается суммированием петель отдельных однородных слоев структуры. Параметры экспериментально полученных петель гистерезиса хорошо согласуются с теоретически рассчитанными. Сдвига петель гистерезиса (ни по оси намагниченности M , ни по оси магнитной индукции B) в исследуемых материалах обнаружено не было. Используемый в данной работе метод получения градиентных структур может быть эффективен при изготовлении магнитных материалов (в частности, ферритов) с требуемыми характеристиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Compositionally graded BST ceramics prepared by tape casting / V.N. Shut [et al.] // *Ferroelectrics*. – 2009. – V. 386, № 1. – P. 125–132.
2. Shut, V.N. Ferroelectric properties of compositionally graded BST ceramics / V.N. Shut, S.R. Syrtsov, V.L. Trublovsky // *Phase Transitions: A Multinational Journal*. – 2010. – Vol. 83, № 5. – P. 368–377.
3. Mantese, J.V. Graded Ferroelectrics / J.V. Mantese, S.P. Alpay // *Transpacitors and Transponents*. – New York, 2005.
4. Internal magnetostatic potentials of magnetization-graded ferromagnetic materials / C. Sudakar [et al.] // *Applied Physics Letters*. – 2007. – Vol. 90, 062502-3.
5. Magnetization-graded ferromagnets: The magnetic analogs of semiconductor junction elements / J.V. Mantese [et al.] // *Alpay, Applied Physics Letters*. – 2005. – Vol. 87, 082503-3.
6. Пасынков, В.В. *Материалы электронной техники* / В.В. Пасынков, В.С. Сорокин. – М.: Высш. шк., 1986. – 366 с.
7. Берман, Л.С. Структурные дефекты на границе раздела сегнетоэлектрик-полупроводник / Л.С. Берман, И.Е. Титков // *Физика и техника полупроводников*. – 2004. – Т. 38. – Вып. 6. – С. 710–715.
8. Шут, В.Н. Поляризационные характеристики градиентных толстых пленок $\text{Ba}_{1-x}\text{Sr}_x\text{TiO}_3$ / В.Н. Шут, С.П. Сырцов, В.Л. Трубловский // *Физика твердого тела*. – 2011. – Т. 53. – Вып. 9. – С. 1761–1767.

Поступила 21.07.2015

COMPOSITIONALLY GRADED $(\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x)\text{Fe}_2\text{O}_4$ MAGNETIC CERAMICS

V. SHUT, V. LALETIN, S. SYRISOV, V. ROMANOV, L. LOBANSKI

Graded ceramics based on solid solutions of nickel-zinc ferrites $(\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x)\text{Fe}_2\text{O}_4$ ($x = 0 \dots 0,2$) was prepared by tape casting. The magnetic properties of the prepared samples were investigated. It is shown that the form and parameters of the experimental hysteresis loops consistent with the theoretically calculated. No hysteresis loop offset (along M - and B -axis) in the graded structures was observed. Tape casting method can be effective for manufacturing of compositionally graded magnetic materials (in particular, ferrites) with desired characteristics.

УДК 539.4

**ОСОБЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ
В СПЛАВЕ Ni_2MnGa В СИСТЕМЕ «ПОЛУБЕСКОНЕЧНАЯ ТРЕЩИНА
НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА – ЛИНЗОВИДНЫЙ МЕХАНИЧЕСКИЙ ДВОЙНИК»**

*Е.В. ШМАТОК, канд. техн. наук, доц. О.М. ОСТРИКОВ
(Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого)*

На основе принципа суперпозиции напряжений у вершины полубесконечной трещины нормального отрыва и у единичного линзовидного остаточного двойника выполнен расчет картины распределения напряжений образовавшейся системы. Определены области локализации напряжений и характер их распределения в окрестностях вершины трещины и линзовидного двойника.

Введение. Исследование вопросов прочности и разрушения твердых тел представляется важной задачей как в теоретическом, так и в практическом ключе. Образование трещин в сплавах группы Гейслера Ni_2MnGa сопровождается интенсивным скольжением и двойникованием [1], кроме этого, скольжение предшествует зарождению двойников, а также является адаптивным механизмом релаксации (аккомодации) напряжений у уже сформировавшихся границ.

Выделяют три типа трещин, обусловленных характером деформирования твердого тела [2]. Рассматриваемый дефект – это одна из причин появления упругих и остаточных двойников, а возможность проанализировать картину напряжений при взаимодействии в системе «двойник – трещина» является актуальной задачей с позиции фундаментальных и прикладных направлений научных исследований.

Исходя из сказанного выше, представляется актуальной целью данной работы – расчет полей напряжений, возникающих в системе «полубесконечная трещина нормального отрыва – линзовидный механический двойник», находящейся в монокристаллическом Ni_2MnGa .

Постановка задачи. Рассмотрим напряжения у вершины раскрывающейся трещины нормального отрыва, или трещины типа I (рис. 1) [2]. На рисунке 2 представлена расчетная схема моделируемой системы, на которой изображены полубесконечная трещина и единичный механический линзовидный двойник, образованный параллельно направлению развития трещины, при условиях, описанных в [3]. Двойник образовался вблизи трещины и обладает собственным полем напряжений. Используя принцип суперпозиции полей напряжений, имеем

$$\sigma_{ij}(x, y) = \sigma_{ij}^{tw}(x, y) + \sigma_{ij}^{cr}(x, y),$$

где $\sigma_{ij}^{tw}(x, y)$ – напряжения, создаваемые единичным механическим линзовидным двойником;

$\sigma_{ij}^{cr}(x, y)$ – напряжения вершины полубесконечной трещины;

i, j – принимают значения x и y , соответствующих компонент тензора напряжений.

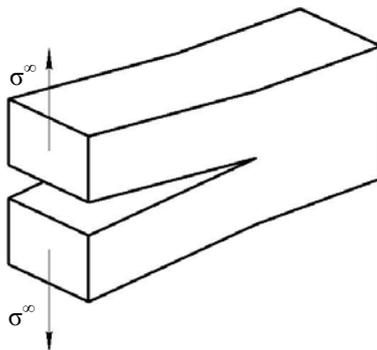


Рисунок 1 – Схематическое изображение трещины нормального отрыва

Для расчета напряжений двойника $\sigma_{ij}^{tw}(x, y)$ проводится расчет отдельных компонент матрицы тензора напряжений, индексно соответствующих расчетным формулам напряжений у вершины трещины

$\sigma_{ij}^{cr}(x, y)$ [2]. Компоненты напряжений двойника $\sigma_{xx}^{tw}(x, y)$, $\sigma_{yy}^{tw}(x, y)$, $\sigma_{xy}^{tw}(x, y)$, используя приближение непрерывного распределения двойникующих дислокаций на двойниковых границах [4–6], определяются как

$$\sigma_{ij}^{tw}(x, y) = \sum^m \sigma_{ij}^{tw(m)}(x, y)$$

где m – число границ линзовидного двойника;

$\sigma_{ij}^{tw(m)}(x, y)$ – суммарные напряжения, образуемые верхней и нижней границами двойника, которые в соответствии с [4] рассчитываются из выражений:

$$\sigma_{ij}^{tw(1)}(x, y) = \int_{-L}^L \sqrt{1+(f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{ij}^{tw(1,0)}(x, y, \xi) d\xi,$$

$$\sigma_{ij}^{tw(2)}(x, y) = \int_{-L}^L \sqrt{1+(f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{ij}^{tw(2,0)}(x, y, \xi) d\xi.$$

где L – половина длины двойника;

$\rho_1(\xi)$ и $\rho_2(\xi)$ – линейные плотности распределения двойникующих дислокаций на двойниковых границах;

$f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ – функции описывающие форму двойниковых границ;

ξ – параметр интегрирования;

$\sigma_{ij}^{tw(m,0)}(x, y, \xi)$ – напряжения, вызванные единичной двойникующей дислокацией, находящейся на границе двойника, определяемые по формулам [4]:

$$\sigma_{xx}^{tw(m,0)}(x, y, \xi) = -\frac{\mu b_{кр}}{2\pi(1-\nu)} \left[(y - f_m(\xi)) - B \right] \frac{\left[3((x - \xi) - A)^2 + ((y - f_m(\xi)) - B)^2 \right]}{\left[((x - \xi) - A)^2 + ((y - f_m(\xi)) - B)^2 \right]^2},$$

$$\sigma_{yy}^{tw(m,0)}(x, y, \xi) = \frac{\mu b_{кр}}{2\pi(1-\nu)} \left[(y - f_m(\xi)) - B \right] \frac{\left[((x - \xi) - A)^2 - ((y - f_m(\xi)) - B)^2 \right]}{\left[((x - \xi) - A)^2 + ((y - f_m(\xi)) - B)^2 \right]^2},$$

$$\sigma_{xy}^{tw(m,0)}(x, y, \xi) = \frac{\mu b_{кр}}{2\pi(1-\nu)} \left[(x - \xi) - A \right] \frac{\left[((x - \xi) - A)^2 - ((y - f_m(\xi)) - B)^2 \right]}{\left[((x - \xi) - A)^2 + ((y - f_m(\xi)) - B)^2 \right]^2},$$

где μ – модуль сдвига;

ν – коэффициент Пуассона;

A, B – константы позиционирования двойника по осям OX и OY соответственно;

$b_{кр}$ – модуль краевой составляющей вектора Бюргера частичной двойникующей дислокации.

Для исследования напряжений в линейно упругих телах в механике разрушения деформируемого твердого тела обычно используется три метода [2]:

- метод комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили [7];
- метод интегральных преобразований [8];
- метод разложения по собственным функциям [9].

Каждый из них имеет свои достоинства и недостатки [2].

Решение поставленной задачи будет осуществляться посредством метода комплексных потенциалов. Такой способ решения пригоден для анализа плоских задач, и в соответствии с [2] напряжения у вершины полубесконечной трещины нормального отрыва определяются из соотношений:

$$\sigma_{xx}^{cr}(x, y) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(1 - \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2}\right),$$

$$\sigma_{yy}^{cr}(x, y) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(1 + \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2}\right),$$

$$\sigma_{xy}^{cr}(x, y) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(\sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2}\right),$$

где K_I – коэффициент интенсивности напряжений для трещины нормального отрыва, $K_I = \text{const}$;

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} ; \theta = \arctg\left(\frac{x}{y}\right).$$

Результаты расчетов и их обсуждение. Следует отметить, что образовавшийся у трещины двойник (рис. 2) может быть как упругим, так и остаточным. Существование упругого двойника обеспечивается полем напряжений трещины.

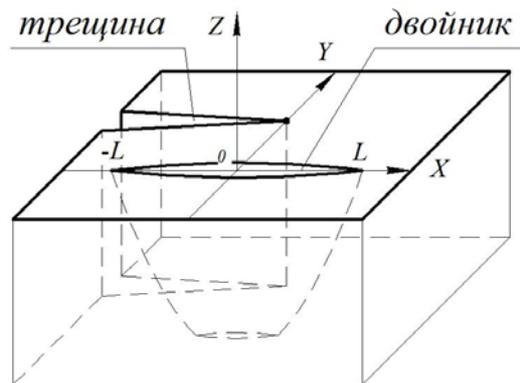


Рисунок 2 – Расчетная схема системы «линзовидный механический двойник – полубесконечная трещина нормального отрыва»

Результаты расчетов полей напряжений в рассматриваемой плоскости монокристалла Ni_2MnGa в случае, когда параллельно направлению роста трещины образовался линзовидный двойник, приведены на рисунках 3 и 4. В качестве исходных данных для расчетов принималось: $L = 60$ мкм; $H = 15$ мкм; $\rho(\xi) = \text{const} = \rho = 0,02 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}$; $\nu = 0,33$; $\mu = 19,231$ ГПа; $b_{\text{кр}} = 2,91 \text{ \AA}$; $K_I = 10 \text{ ГПа} \sqrt{\text{м}}$.

Результат расчетов полей напряжений, рассматриваемой системы, для нормальной компоненты тензора напряжений $\sigma_{xx}(x, y)$ представлен на рисунке 3, а. Характер их распределения у вершины трещины и у двойника симметричен относительно осей OX и OY . Напряжения границ двойника данной компоненты тензора обладают более высокими численными значениями в сравнении с другими рассматриваемыми компонентами. Эти напряжения имеют противоположный друг другу знак и распределены вдоль верхней и нижней границ двойника [10]. Поля напряжений вершины трещины компоненты $\sigma_{xx}(x, y)$ представлены максимальным пиковым значением, превышающим уровень напряжений границ двойника в 3...3,5 раза.

Результат решения задачи для сдвиговой компоненты $\sigma_{xy}(x, y)$ матрицы тензора напряжений показан на рисунке 3, б. Здесь, подобно другим рассчитанным компонентам тензора, наблюдается симметрия распределения величин напряженности полей, взятых по модулю, в плоскости расчета относительно OY . Однако отличительной особенностью распределения данных напряжений является наличие значительных их значений по краям двойника, на порядок превышающих напряжения его границ и имеющих отличные друг от друга знаки. Близлежащие области вокруг трещины, а также и сама ее вершина имеют пониженный уровень напряжений без значительных возмущений в сравнении с двойником и другими рассчитываемыми компонентами.

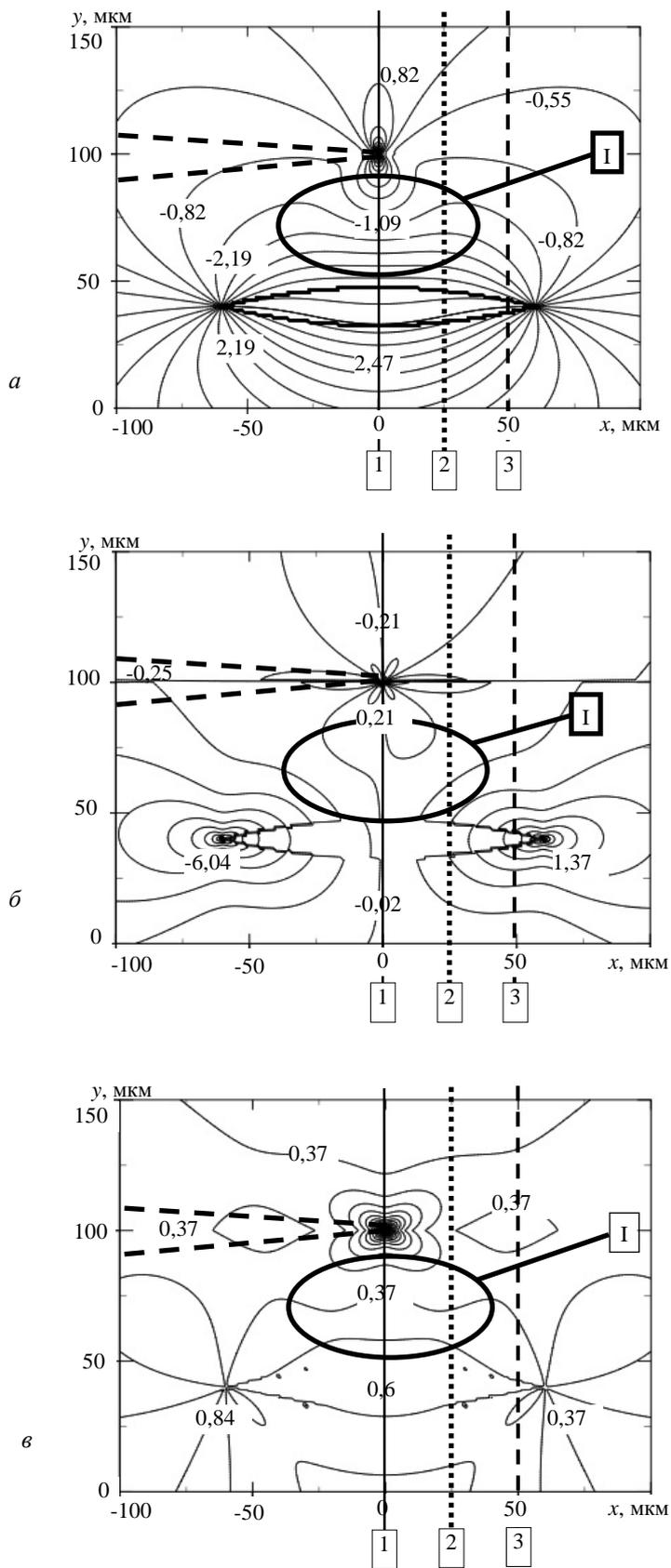


Рисунок 3 – Результаты расчетов полей напряжений в системе «линзовидный механический двойник – полубесконечная трещина нормального отрыва»: 1, 2, 3 – сечения расчетной плоскости напряжений (см. также рис. 4); а – $\sigma_{xx}(x, y)$; б – $\sigma_{xy}(x, y)$; в – $\sigma_{yy}(x, y)$ (ГПа)

Расчетная плоскость полей напряжений для нормальной компоненты $\sigma_{yy}(x, y)$ изображена на рисунке 3, в. В данном случае наблюдается пониженный, в сравнении с другими компонентами, средний уровень напряжений во всей расчетной плоскости. Помимо этого, виден сложный, но симметричный (относительно OY) рельеф линий равных величин напряжений как по знаку, так и по численным значениям. Поле напряжений участков, окружающих вершину полубесконечной трещины, подобно $\sigma_{xx}(x, y)$, не имеет значительных возмущений. Однако вершина трещины обладает максимальным пиковым значением напряжений, близким по результату компоненте $\sigma_{xx}(x, y)$.

Как видно из рисунка 3, участки с наибольшей напряженностью главным образом сосредоточены у вершины трещины, на границах двойника и по его краям. Напряжения вершины трещины имеют максимальные значения. Это связано с тем, что в процессе разрушения образца двойникованием компенсируется часть напряжений трещины.

На рисунке 4 показано, что при встрече фронта напряжений трещины и собственных напряжений двойника образуется участок «усредняющих» напряжений (область I, рис. 3).

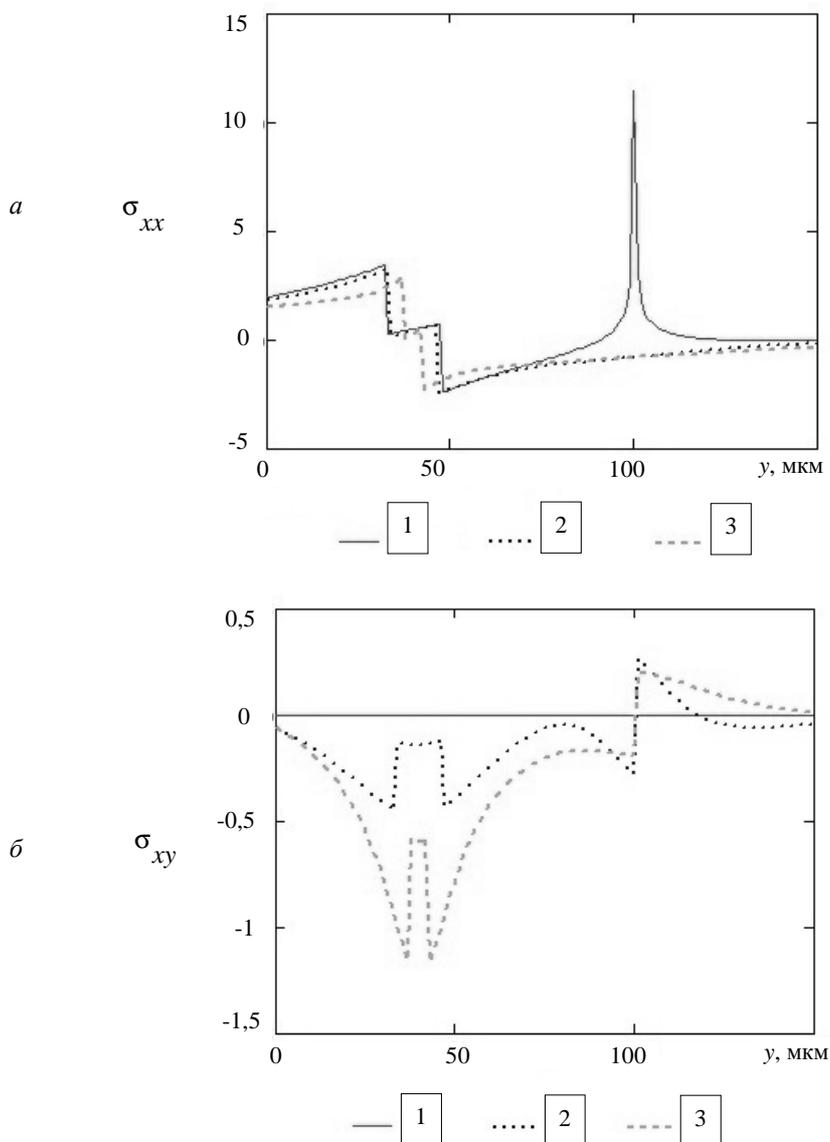


Рисунок 4 – Графики напряжений компонент: $a - \sigma_{xx}$; $b - \sigma_{xy}$; $- \sigma_{yy}$ (ГПа).

Получены сечением области координатами: 1 – $A = 0$ мкм, $B = 0$ мкм;
2 – $A = 25$ мкм, $B = 0$ мкм; 3 – $A = 50$ мкм, $B = 0$ мкм (см. также с. 59)

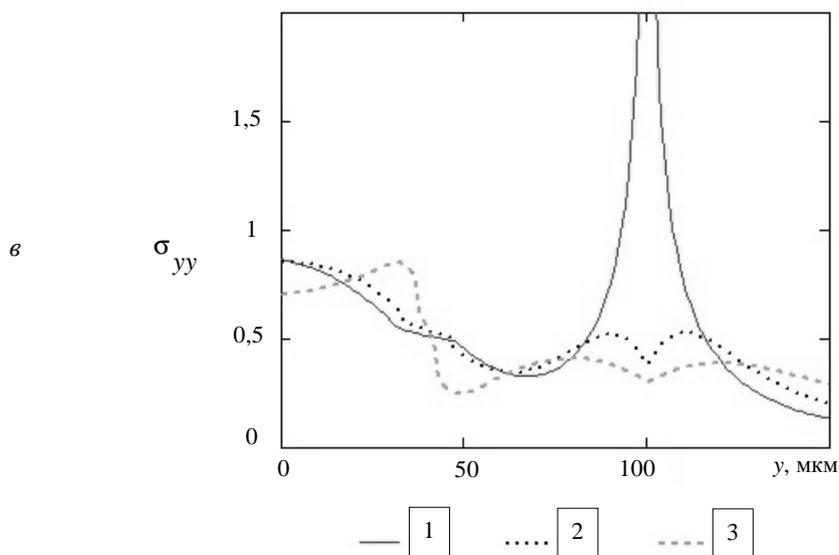


Рисунок 4 – Окончание

Напряжения выделенной области I разместились на одной расчетной поверхности в области противоположных значений осей X и Y , а также имеют близкие уровни напряжений по всей поверхности.

Представленные на рисунке 4 графики демонстрируют уровень напряжений рассматриваемой системы. Напряжения у границ и внутри двойника компонент $\sigma_{xx}(x, y)$ и $\sigma_{yy}(x, y)$ (рис. 4, а и в) сохраняют свою симметричность относительно OX , однако противоположны по знаку. Экстремум напряжений, вызванный вершиной трещины, имеет единичный пик величины без искажений.

Уровень напряжений трещины и двойника компоненты $\sigma_{xy}(x, y)$ (рис. 4, б) имеет значения, симметричные OX лишь у вершины трещины. Напряжения двойника симметричны относительно OY и имеют экстремумы у границ и вершин, расположившиеся в области отрицательных значений.

Заключение. Таким образом, используя методы расчетов напряженно-деформированного состояния у двойника и вершины трещины (метод комплексных потенциалов), разработан способ моделирования полей напряжений в системе «механический линзовидный двойник – полубесконечная трещина нормального отрыва». Установлено, что вершина трещины является концентратором больших напряжений, способных значительно превысить уровень напряжений на границе двойника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев, Ф.Ф. Взаимодействие дислокаций в цинке, висмуте и сурьме при двойниковании / Ф.Ф. Лаврентьев // Физика металлов и металловедение. – 1964. – Т. 18, № 3. – С. 428–436.
2. Астафьев, В.И. Нелинейная механика разрушения / В.И. Астафьев, Ю.Н. Радаев, Л.В. Степанова. – Самара : Самар. ун-т. – 2001. – С. 57–60.
3. Классен-Неклюдова, М.В. Механическое двойникование кристаллов / М.В. Классен-Неклюдова. – М. : Изд-во АН СССР. – 1960. – С. 262.
4. Остриков, О.М. Метод расчета полей напряжений в системе параллельных остаточных линзовидных двойников в сплаве Гейслера Ni_2MnGa / О.М. Остриков, Е.В. Шматок // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, № 4 (ч. 2). – С. 1920–1921.
5. Остриков, О.М. Напряженное состояние у поверхности кристалла, деформируемой сосредоточенной нагрузкой, при наличии клиновидного двойника / О.М. Остриков // Журнал технической физики. – 2009. – Т. 79, № 5. – С. 137–139.
6. Остриков, О.М. Метод расчета распределения деформаций у клиновидного двойника с использованием подходов макроскопической дислокационной модели / О.М. Остриков // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 4. – С. 52–58.

7. Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М. : Изд-во АН СССР. – 1954. – С. 648.
8. Уфлянд, Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд. – Л. : Наука. Ленингр. отд. – 1967. – С. 402.
9. Williams, M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack / M.L. Williams // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1975. – V. 24. – P. 109–114.
10. Остриков, О.М. Метод расчета полей напряжений в системе параллельных остаточных линзовидных двойников в сплаве Ni_2MnGa / О.М. Остриков, Е.В. Шматок // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, Вып. 3. – С. 1920–1921.

Поступила 04.06.2015

**FEATURES OF DISTRIBUTION OF STRESSES IN THE ALLOY Ni_2MnGa
IN THE «SEMI-INFINITE CRACK GROWTH – LENTICULAR MECHANICAL TWIN»**

E. SHMATOK, O. OSTRIKOV

On the basis of the principle of superposition of stress at the tip of a semi-infinite crack growth and residual twin lenticular unit, calculated the distribution pattern of stresses resulting from the system. The regions of localization of stresses and their distribution in the vicinity of the crack tip and lenticular twin.

УДК 537.868.3;537.874

**ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ И ЭКРАНИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА
КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ДИОКСИДА ТИТАНА**

М.О. МОЛОДЕЧКИН, д-р физ.-мат. наук, доц. В.А. БОГУШ,
(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск);
канд. техн. наук, доц. Т.В. МОЛОДЕЧКИНА
(Полоцкий государственный университет)

Рассмотрены особенности формирования композиционных материалов на основе диоксида титана, установлены технологические режимы синтеза. Исследованы характеристики передачи и отражения электромагнитного излучения композиционными материалами. Показано, что структура и состав исходных компонентов влияют на экранирующие характеристики композитов в частотном диапазоне 8–12 ГГц.

Введение. Материалы, существующие в природе, достаточно хорошо изучены, исследованы их основные функциональные характеристики. С развитием техники, расширением практической деятельности человека возникает необходимость иметь материалы с большим набором электрофизических свойств, таких как расширенный диапазон рабочих температур, радиационная стойкость, устойчивость к электромагнитному излучению. Поскольку созданные природой материалы не могут полностью удовлетворить комплексу предъявляемых требований, возникает необходимость в создании новых, композиционных материалов с заданным набором свойств [1, 2].

Для изготовления компонентов электронной техники широко используются оксиды и керамика на их основе. Керамика – это неметаллические неорганические материалы на основе кристаллических соединений неметаллов и металлов, синтезированных и консолидированных различными методами для придания заданных свойств и геометрии. Многообразие составов, структур и технологий керамических материалов предопределяет достижение широкого спектра их свойств и областей применения. Керамика относится к структурно- и фазочувствительным материалам. Даже при одинаковом химическом составе свойства керамических материалов могут сильно различаться в зависимости от исходных материалов, методов и параметров технологии, структуры и фазового состава спеченных материалов, промежуточных методов обработки и качества поверхности, методов определения свойств. Керамики обладают высоким уровнем межатомной связи и применяются в качестве конструкционных и функциональных материалов. Функциональными называют материалы, характеризующиеся ярко выраженным свойством и предназначенные для создания специализированных изделий и устройств. Это могут быть материалы с особыми физическими свойствами: электрическими, магнитными, тепловыми, оптическими, пьезоэлектрическими и др. [3].

Керамические материалы отличаются широким набором потребительских свойств, разнообразием способов получения. К перспективным способам синтеза таких материалов относятся методы порошковой металлургии, золь-гель технологии [3–5].

Экспериментальная часть. Представлены результаты работы по формированию и изучению свойств композиционных материалов, которые могут применяться для изготовления экранов и поглотителей электромагнитного излучения. Выбор материала экрана проводится исходя из обеспечения требуемой эффективности экранирования в заданном диапазоне частот при определенных ограничениях. Эти ограничения связаны с массогабаритными характеристиками экрана, его влиянием на экранируемый объект, с механической прочностью и устойчивостью экрана против коррозии, значением максимальной рабочей температуры, технологичностью его конструкции.

При выборе метода формирования экранирующих слоев исходили из анализа известных способов: нанесение через сито, при помощи скребка, прокатка через вальцы. Выбранный нами метод трафаретной печати обеспечивает высокую равномерность нанесения пасты и точность поддержания толщины слоя, при этом достаточно прост в реализации [6]. Образцы изготавливали методом печати на полуавтоматическом устройстве трафаретной печати SP002 В (Швейцария). Сущность процесса заключается в нанесении на подложку через сетчатый трафарет слоя пасты, который затем подвергается термообработке, в результате чего образуется прочная монолитная структура. Трафареты изготавливали из тонкой мелкоячеистой сетки, сотканной из нейлона, закрепляли в установке трафаретной печати на расстоянии при-

мерно от 0,5 до 2 мм от поверхности подложки (основания). Пасту выливали на поверхность трафарета, затем ракелем продавливали ее сквозь сетку до соприкосновения с подложкой.

Технология трафаретной печати позволяет наносить пасты различного состава: проводящие, резистивные, диэлектрические. В состав паст входят органический растворитель, функциональная фаза, связующее вещество. Для изготовления исследуемых образцов мы использовали пасту, в составе которой в качестве материала-носителя применяли этилцеллюлозу, либо каучук дивинилстирольный марки ДСТ-30. Основным функциональным наполнителем пасты был выбран диоксид титана, также использованы оксиды и соли различных материалов, керамика.

После нанесения пасты следовал этап сушки отпечатанной сырой пленки. Органику, вводимую для придания пастам вязкости, необходимой для выполнения операции печати, частично удаляли сушкой при температуре около 60 °С в ИК-печи или в обычной муфельной печи в течение 30 мин. В нашем случае использовали в качестве растворителя уайт-спирит. После сушки пленки затвердевают, и таким образом защищены от случайных механических повреждений. Пленки необходимой толщины формировали путем последовательного нанесения слоев. Далее пленку отделяли от основания (в нашем случае электротехнический картон) и помещали в печь СНОЛ для отжига при температуре 80–100 °С. В таблице 1 представлен состав образцов, изготовленных методом трафаретной печати.

Таблица 1 – Состав образцов

Номер образца	Вид связующего вещества	Состав
1	целлюлоза	$\text{TiO}_2 + \text{CuO}$
2	каучук	$\text{TiO}_2 + \text{FeSO}_4 \cdot n\text{H}_2\text{O}$
3	целлюлоза	$\text{TiO}_2 + \text{Fe}_2\text{O}_3$
4	целлюлоза	$\text{TiO}_2 + \text{CuSO}_4 \cdot n\text{H}_2\text{O}$

Исходными компонентами при изготовлении керамики, используемой в качестве функционального наполнителя паст, были выбраны оксиды железа Fe_2O_3 и титана TiO_2 . Для формирования порошка диоксида титана модификации рутил был проведен отжиг золя титана на воздухе при температуре 1000 °С в течение 1–2 ч. Кристаллографическое строение порошка подтверждено результатами анализа [7]. Порошок оксида железа использовали заводского производства.

Изготовление опытных образцов проводили по базовому технологическому процессу ферритовой керамики, используя механическое смешивание исходных порошков. Использованный метод синтеза материала-наполнителя (керамическая технология) позволяет широко варьировать технологические режимы формирования [8]. Были изготовлены образцы, соотношение оксидов в составе шихты менялось в пределах от 1:1 до 2:1. Необходимое количество исходных компонентов определяли путем расчета, взвешивание проводили на аналитических весах типа EP 214 С.

Помимо основных параметров стадии спекания – температурно-временного режима и газовой атмосферы – на параметры кинетики процесса формирования микроструктуры керамики значительное влияние оказывают такие факторы, как физико-химическое состояние исходных компонентов, степень их помола, однородность перемешивания, режим предварительного спекания, способ и условия формирования заготовок и т.д. В связи с этим основные исследования были направлены на изучение влияния состава исходной шихты, температуры и длительности отжига, количества и вида связующего компонента на свойства синтезируемой керамики [9].

Операцию смешивания компонентов проводили с помощью пестика и ступки (что обычно в лабораторных условиях при небольшом количестве материала), а также с помощью вибрационной мельницы. Для хорошего смешивания небольших порций достаточно 30 мин. Возможны два варианта проведения смешивания: сухое и с добавлением воды (в количестве от 2 до 5 масс. %). Сухое смешивание удобнее мокрого, т.к. при этом отпадают операции обезвоживания и сушки, уменьшается вероятность изменения заданного состава шихты, но эффективность сухого смешивания ниже. Обезвоживание малых количеств шихты проводили с использованием фильтровальной бумаги. Во время смешивания происходит одновременное измельчение частиц порошка и обеспечивается гомогенность состава образцов.

Просеивание позволяет разделить исходные порошки на фракции и отделить от основных компонентов всевозможные посторонние примеси и включения, для чего использовали капроновое сито. Обес-

печение однородности состава изготавливаемого материала достигали путем многократно повторения операций измельчения и просеивания.

В керамическом производстве применяют следующие основные методы формования заготовок изделий: холодное прессование в пресс-формах, горячее прессование, горячее литье, мундштучное прессование на экструзионных машинах, изостатическое прессование, вибрационное уплотнение [4].

Исходные компоненты не обладают пластичностью, поэтому ввели связующее вещество, количество которого варьировалось в пределах от 2 до 5 масс. %. В качестве связки использовали крахмал, поливиниловый спирт, восковую эмульсию. Некоторые образцы были сформованы без связующего вещества. Количество связки влияет на наличие и размеры пор, что, в свою очередь, определяет условия роста зерен керамики, однородность зеренной структуры и форму границ между зернами. Эти характеристики формируются в основном в процессе высокотемпературного отжига материала.

После тщательного перемешивания порошков исходных компонентов производили формование методом прессования, поскольку подвергнутые сжатию порошки взаимодействуют в твердой фазе интенсивнее, чем порошки, не подвергавшиеся сжатию. Использовали масляный пресс марки ПГРП и металлические пресс-формы, обладающие высокой механической прочностью, стойкостью к истиранию, точностью размеров. При прессовании необходимо уменьшить силу трения гранул о поверхность стенок металлической формы, так как при большей силе трения давление не будет передаваться непосредственно на порошок, поэтому в качестве смазки применяли вазелиновое масло. Давление при прессовании составляло 150 кг/см².

Сформованные заготовки помещали в электрическую печь марки СНОЛ, температуру в которой измеряли платино-платинородиевой термопарой. Образцы отжигали на воздухе при различных температурах, в диапазоне от 500 до 1100 °С в течение 2 ч, а затем выдерживали в печи в течение 24 ч до полного остывания. Восстановление в водороде проводили при температуре 1000 °С в течение 40 мин. Изготовленные образцы керамики измельчали механически и использовали как наполнитель для приготовления пасты.

Исследование экранирующих характеристик сформированных пленок в диапазоне 8–12 ГГц выполняли по известной методике [10] на панорамном измерителе ослабления и коэффициента стоячей волны (КСВН) Я2Р-67 с ГКЧ-61, исследуемые материалы герметизировали полиэтиленом, чтобы исключить влияние влажности окружающей среды. Результаты оценивались через коэффициенты передачи и отражения измерительного тракта с образцом. Коэффициент передачи показывает долю мощности электромагнитной энергии, прошедшей через образец, коэффициент отражения – долю мощности электромагнитной энергии, отраженную от образца. Во время эксплуатации экраны и поглотители электромагнитного излучения могут подвергаться воздействию повышенной температуры, поэтому была создана лабораторная установка на базе измерительной системы, описанной выше, модернизированная таким образом, что обеспечивалась возможность нагревать образцы.

Результаты и обсуждение. Полученные в результате исследования характеристики образцов, состав которых указан в таблице 1, приведены на рисунках 1–4. По результатам проведенных измерений был сделан вывод, что пониженная температура (–12 °С) мало влияет на характеристики, поэтому полученные в этом диапазоне данные не представлены на графиках.

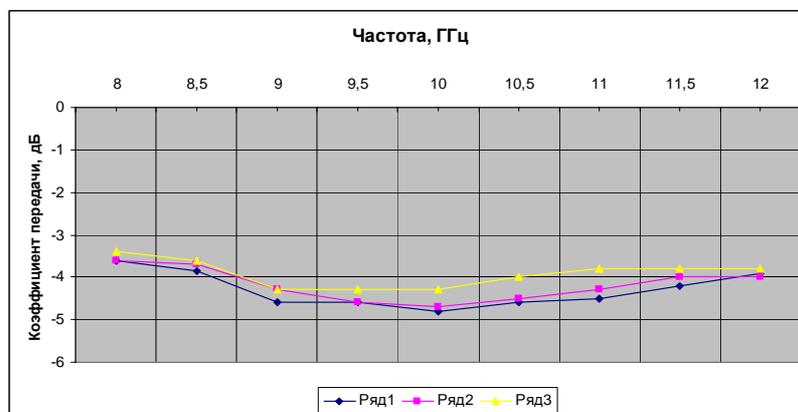


Рисунок 1 – Частотная зависимость коэффициента передачи электромагнитной энергии образца № 1: ряд 1 – температура 20 °С, ряд 2 – температура 40 °С, ряд 3 – температура 70 °С

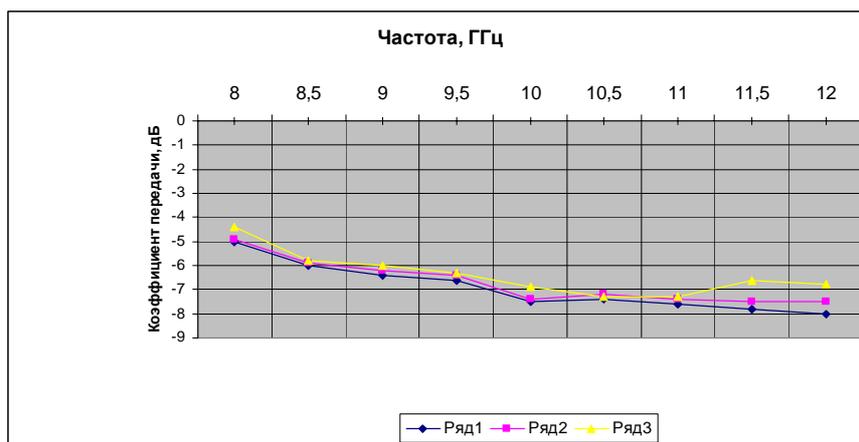


Рисунок 2 – Частотная зависимость коэффициента передачи электромагнитной энергии образца № 2: ряд 1 – температура 20 °С, ряд 2 – температура 40 °С, ряд 3 – температура 70 °С

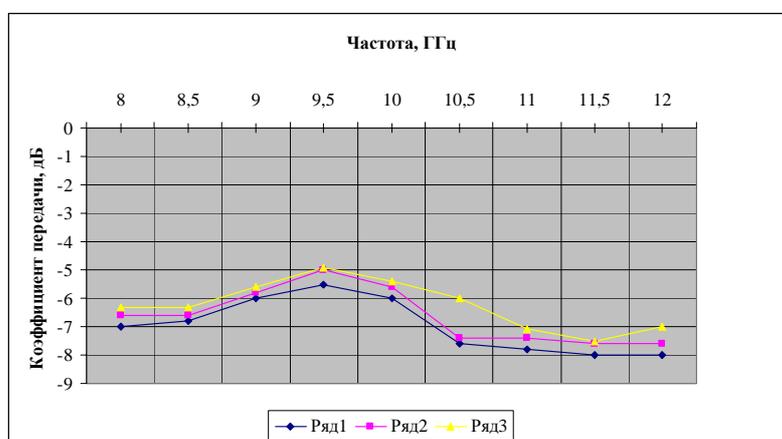


Рисунок 3 – Частотная зависимость коэффициента передачи электромагнитной энергии образца № 3: ряд 1 – температура 20 °С, ряд 2 – температура 40 °С, ряд 3 – температура 70 °С

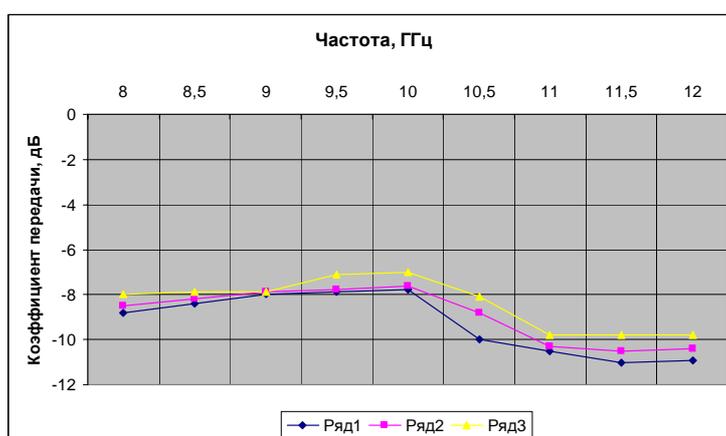


Рисунок 4 – Частотная зависимость коэффициента передачи электромагнитной энергии образца № 4: ряд 1 – температура 20 °С, ряд 2 – температура 40 °С, ряд 3 – температура 70 °С

Анализ результатов измерения показал, что наилучшие экранирующие характеристики получены для образца, содержащего в качестве функционального наполнителя TiO_2 и кристаллогидраты ($\text{CuSO}_4 \cdot n\text{H}_2\text{O}$). Можно предположить, что ослабление электромагнитного излучения в образце происхо-

дит за счет диэлектрических потерь и проводимости, обусловленной наличием воды в кристаллах медного купороса. Повышение температуры образцов до 70 °С привело к незначительному изменению коэффициентов передачи всех изученных составов. Сравнение относительного изменения коэффициентов передачи показало, что наибольшее значение получено для образцов № 2 и № 4, это можно объяснить наличием воды в составе кристаллогидратов.

Экранирующие характеристики композиционных материалов связаны с магнитными свойствами входящих в их состав компонентов [11], поэтому при изготовлении радиопоглощающих материалов в композиты вносят магнитоактивные примеси.

Нами были изготовлены и исследованы образцы, в которых в качестве функционального наполнителя добавили частицы керамики. Для уточнения технологических параметров формирования и установления связи режимов отжига керамики с экранирующими характеристиками получаемых композитов провели серию предварительных исследований [7], в результате которых установили следующее. Образцы, приготовленные без связующего вещества, имели низкую механическую прочность, и после операции отжига на их поверхности были трещины, сколы. Самую высокую механическую прочность имели образцы, приготовленные на основе крахмала, оптимальное количество связующего вещества 3%. Фазовый состав образцов исследовали методом дифракции рентгеновских лучей. Было установлено, что отжиг при температуре ниже 700 °С в течение 2 ч приводит к образованию материала, представляющего собой смесь исходных оксидов. При более высокой температуре отжига на рентгенограммах наблюдаются рефлексы, подтверждающие присутствие феррита Fe_2TiO_5 , представляющего собой псевдобрукит (сингония: ромбическая, $Z = 4$, пространственная группа $Pbmm$, тип ячейки: примитивная, параметры элементарной ячейки: $a = 9,81$, $b = 9,95$, $c = 3,74$). В псевдобруките октаэдры TiO_2 связаны друг с другом противоположными вершинами в цепочки TiO_5 , простирающиеся вдоль оси c . Между собой цепочки соединяются посредством атомов Fe , находящихся в сильно искаженных октаэдрах. В псевдобруките Fe^{3+} частично замещается Ti . Результаты измерения экранирующих характеристик композиционного материала, в составе которого присутствовал Fe_2TiO_5 , показаны на рисунке 5.

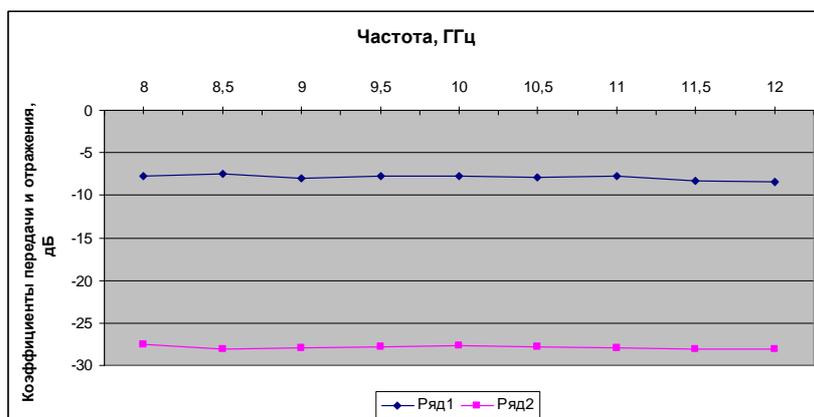


Рисунок 5 – Частотная зависимость коэффициента передачи и отражения электромагнитной энергии образца № 5, содержащего псевдобрукит (ряд 1 – коэффициент отражения, ряд 2 – коэффициент передачи)

Сравним характеристики образца № 2 (рисунок 2) и образца № 5, содержащего феррит состава Fe_2TiO_5 . В качестве исходных компонентов при приготовлении образцов были использованы одинаковые по количеству и химическому составу оксиды: $TiO_2 + Fe_2O_3$. Предварительная обработка образца, а именно синтез керамики в результате отжига при температуре выше 700 °С, позволили получить различные характеристики материалов. Так, образец, изготовленный методом трафаретной печати и не прошедший высокотемпературный отжиг, имеет коэффициент передачи –8 дБ на частоте 12 ГГц. Предварительный синтез керамики состава Fe_2TiO_5 позволил улучшить экранирующие характеристики образца № 5, коэффициент передачи которого на частоте 12 ГГц составляет –28 дБ. Объяснить это можно различиями в структуре образцов. Так, образец № 5 содержит в своем составе фазу, которая формирует магнитную подрешетку образца, с которой взаимодействует электромагнитное излучение, в результате происходит более интенсивное его поглощение.

Выводы. Установлено, что на электрофизические характеристики материалов, которые будут использованы для изготовления экранов и поглотителей электромагнитного излучения, влияют структура и состав исходных компонентов. Снизить коэффициенты передачи и отражения электромагнитной энер-

гии композиционных материалов возможно включением в их состав магнитоактивных примесей, например, феррита состава Fe_2TiO_5 . Формирование феррита состава Fe_2TiO_5 возможно путем отжига при температуре выше 700°C в течение 2 ч исходных оксидов железа (II) и титана (IV), при соотношении исходных компонентов 1:2. Введение в состав композиционного материала феррита Fe_2TiO_5 позволит получить коэффициент передачи электромагнитной энергии -28 дБ при коэффициенте отражения $-8,5$ дБ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мырова, Л.О. Обеспечение стойкости аппаратуры связи к ионизирующим и электромагнитным излучениям / Л.О. Мырова, А.З. Чепиженко. – М., 1988.
2. Третьяков, Ю.Д. Введение в химию твердофазных материалов / Ю.Д. Третьяков, В.И. Пугтяев. – М. : Изд-во Моск. ун-та: Наука, 2006. – 400 с.
3. Хасанов, О.Л. Методы компактирования и консолидации наноструктурных материалов и изделий / О.Л. Хасанов, Э.С. Двилис, З.Г. Бикбаева. – Томск : Изд-во Томс. политехн. ун-та, 2008. – 196 с.
4. Таиров, Ю.М. Технология полупроводниковых и диэлектрических материалов : учеб. для вузов / Ю.М. Таиров, В.Ф. Цветков. – 2-е изд., перераб и доп. – М. : Высш. шк., 1990. – 423 с. ; ил.
5. Свирская, С.Н. Пьезокерамическое материаловедение / С.Н. Свирская С.Н. – Ростов н/Д : Изд-во Южного федер. ун-та, 2009. – 82 с.
6. Черняев, В.Н. Технология производства интегральных микросхем и микропроцессоров / В.Н. Черняев. – М. : Радио и связь, 1987. – 464 с.
7. Borskaja, A. TiO_2 powders of different polymorphic modifications as a basis for detecting elements of gas sensors / A. Borskaja, M. Molodechkin, A. Apanasenko // National and European dimension in research : materials of junion researcher's III conference : 3 P. – Novopolotsk, 2011. – P. 1. – P. 159–161.
8. Катаржевская, С.В. Управление структурообразованием в керамике / С.В. Катаржевская, Е.В. Трахимович, М.О. Молодечкин // Труды молодых специалистов Полоц. гос. ун-та. Сер. Промышленность. – Новополоцк, 2011. – Вып. 53. – С. 110–112.
9. Трахимович, Е.В. Получение и свойства керамических оксидных материалов / Е.В. Трахимович, Е.В. Вейтко, М.О. Молодечкин // Труды молодых специалистов Полоц. гос. ун-та. Сер. Промышленность. – Новополоцк, 2013. – Вып. 68. – С. 153–156.
10. Новые материалы для экранов электромагнитного излучения / Лыньков Л.М. [и др.] // Доклады БГУИР. – Минск, 2004. – Т. 2, № 5. – С. 152–167.
11. Конструирование экранов и СВЧ-устройств / под ред. А.М. Чернушенко. – М. : Радио и связь, 1990. – 351 с.

Поступила 15.09.2015

**FEATURES OF FORMATION AND SHIELDING PROPERTIES
OF COMPOSITE MATERIALS BASED ON TITANIUM DIOXIDE**

M. MALADZECHKIN, V. BOGUSH, T. MALADZECHKINA

The features of the formation of composite materials based on titanium dioxide is considered, technological modes of synthesis is determined. The characteristics of the transmission and reflection of electromagnetic radiation by composite materials are studied. It is shown that the structure and composition of the initial components influence on shielding effect characteristics of the composites in the frequency range 8–12 GHz.

УДК 621.315.592: 546.28

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТНЫХ СВОЙСТВ ПЛЕНОК ФОТОРЕЗИСТА НА КРЕМНИИ МЕТОДОМ СКЛЕРОМЕТРИИ

*канд. физ.-мат. наук, доц. С.А. ВАБИЩЕВИЧ, Н.В. ВАБИЩЕВИЧ,
(Полоцкий государственный университет);
канд. физ.-мат. наук Д.И. БРИНКЕВИЧ, канд. физ.-мат. наук, доц. В.С. ПРОСОЛОВИЧ,
канд. физ.-мат. наук Ю.Н. ЯНКОВСКИЙ
(Белорусский государственный университет, Минск)*

Методами индентирования и склерометрии исследованы прочностные свойства структур фоторезист-кремний. Пленки позитивного фоторезиста ФП-9120 толщиной 1,0–5,0 мкм наносились на пластины кремния различных марок методом центрифугирования. Установлено, что микротвердость, определяемая методом склерометрии, на 20–40 % больше микротвердости, полученной методом микроиндентирования. При использовании нагрузки, равной 1–2 г, более точные значения микротвердости измерены методом склерометрии. Увеличение нагрузки до 10 и более грамм приводит к нивелированию указанного различий – значения микротвердости, полученные обоими методами, совпадают.

Введение. В качестве масок в современных процессах субмикронной литографии важную роль играют диазохинон-новолачные (ДХН) резисты [1]. К наиболее распространенным среди них относится позитивный фоторезист ФП9120, представляющий собой композит из светочувствительного О-нафтохинондиазида и фенол-формальдегидной смолы.

Цель настоящей работы – изучение возможности применения метода склерометрии для исследования прочностных свойств пленок ФП9120, нанесенных на пластины монокристаллического кремния различных марок.

Методика эксперимента. Пленка фоторезиста толщиной от 1,0 до 5,0 мкм наносилась на поверхность пластин (диаметр 100 см) кремния различных марок (табл. 1) методом центрифугирования на ПО «Интеграл». Толщина пленки фоторезиста $h_{пл}$ определялась скоростью вращения и составляла: 1,0 мкм при скорости вращения $\nu = 8300$ об/мин; ~ 1,8 мкм – при $\nu = 2900$ об/мин; ~ 2,5 мкм – при $\nu = 1200$ об/мин. Пленки толщиной $h_{пл} = 5,0$ мкм формировались в две стадии со скоростью вращения $\nu = 1800$ об/мин на обеих стадиях. Толщина пленок фоторезиста контролировалась с помощью микроинтерферометра МИИ-4 по 5 фиксированным точкам (центр, верх, низ, слева, справа) на каждой пластине, при этом отклонения от среднего значения для всех исследуемых образцов (независимо от ориентации и легирования пластины) не превышали 2 %, что близко к погрешности измерений.

Таблица 1 – Использувавшиеся пластины кремния

Марка	Ориентация	Удельное сопротивление, Ом-см	Легирующая примесь
КДБ 10	(111)	10	Бор
КДБ 0,005	(111)	0,005	Бор
КЭС 0,01	(111)	0,01	Сурьма
КДБ 12	(100)	12	Бор
КДБ 4,5	(100)	4,5	Бор
КЭФ 4,5	(100)	4,5	Фосфор

Исследование прочностных свойств структур фоторезист-кремний проводилось при комнатной температуре на приборе ПМТ-3 методом склерометрии – царапанием ребром четырехгранной алмазной пирамиды с квадратным основанием в оправе типа НПМ и углом при вершине $\alpha = 136^\circ$ [2]. Нагрузка P на индентор варьировалась в пределах 1–20 г. Скорость движения индентора изменялась в диапазоне 40–120 мкм/с. Наносилось не менее 7 канавок (царапин) при каждой нагрузке и скорости движения индентора и измерялась их ширина. Значения склерометрической микротвердости $H_{\square}^{скл}$ вычислялись по средней ширине канавок согласно формуле [3]

$$H_{\square}^{скл} = \frac{3,708P}{b^2},$$

где b – средняя ширина канавки.

Для сравнения на этом же приборе ПМТ-3 и этой же пирамидой проводились измерения микротвердости методом микроиндентирования по восстановленному отпечатку с использованием стандартной методики [4]. При каждом измерении на поверхность образца наносилось не менее 50 отпечатков и проводилась обработка результатов измерений с использованием методов математической статистики по методике, изложенной в [5]. Величина микротвердости H^u рассчитывалась по средней величине диагонали отпечатка d согласно формуле [5]

$$H^u = \frac{1,854P}{d^2}.$$

Имплантация ионами B^+ (энергия 100 кэВ) и P^+ (энергия 60 кэВ) в интервале доз $5 \cdot 10^{15} - 1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ в режиме постоянного ионного тока (плотность ионного тока $j = 4 \text{ мкА/см}^{-2}$) проводилась при комнатной температуре в остаточном вакууме не хуже 10^{-5} Па на ионно-лучевом ускорителе «Везувий-6». Облучение γ -квантами ^{60}Co осуществлялось при комнатной температуре и атмосферном давлении на установке МРХ- γ -25М. Мощность поглощенной дозы составляла $0,360 \pm 0,008 \text{ Гр/с}$. Интервал поглощенных доз 6–200 кГр.

На рисунке 1 представлены типичные микрофотографии канавок поверхности пленки фоторезиста. Царапины имеют ровные края и пригодны для измерения ширины. У края царапины наблюдаются трещины в пленке фоторезиста, величина которых возрастает при увеличении нагрузки. При условии, что глубина проникновения индентора меньше толщины пленки фоторезиста, значения склерометрической микротвердости для одного и того же образца совпадали или были близки друг к другу. Для пленок толщиной 5 мкм это условие соответствует нагрузкам до 5 г включительно (табл. 2). Таким образом, материал подложки не оказывает влияния на результат измерений и согласно [3] царапание алмазными наконечниками при указанных нагрузках пригодно для измерения склерометрической микротвердости пленок фоторезиста.

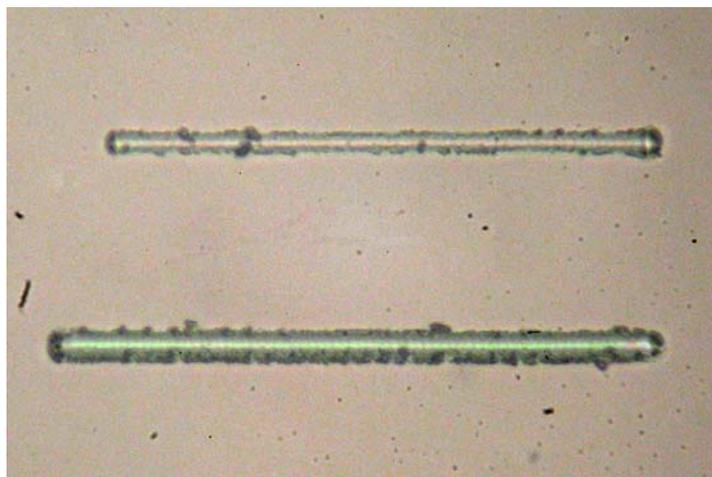


Рисунок 1 – Микрофотографии царапин поверхности пленки фоторезиста толщиной 1,8 мкм при нагрузках 1 г (верхняя полоса) и 2 г (нижняя полоса, $b \approx 12 \text{ мкм}$)

Выбор нагрузки определяется толщиной пленки $h_{пл}$. Так, для $h_{пл} = 1,8 \text{ мкм}$ величина нагрузки не должна превышать 1 г, а для $h_{пл} = 5 \text{ мкм}$ допустимы нагрузки в диапазоне 1–5 г. Выбор нагрузки в каждом конкретном случае обусловлен тем, что индентор не должен достигать границы раздела фоторезист-кремний. Рекомендуется использовать минимальные нагрузки, дающие царапины с шириной, пригодной для измерения. В нашем случае достаточна нагрузка 1 г для всех исследуемых пленок.

При увеличении нагрузки до 5 г и выше индентор проникает в кремниевую подложку (рис. 2). У границ царапины возникает большое количество трещин и, вероятно, локальные отслоения пленки от подложки (см. рис. 2). При этом значения склерометрической микротвердости снижаются (см. табл. 2). Измерения, представленные в таблице 2, выполнялись при скорости движения индентора 50 мкм/с. Увеличение скорости движения индентора в 2 раза приводило к уменьшению в 1,2 раза ширины царапины и, соответственно, к увеличению измеренной микротвердости в 1,44 раза. Таким образом, скорость движе-

ния индентора не должна превышать 50 мкм/с. Увеличение скорости индентора приводит к завышению значений микротвердости по сравнению с истинными значениями. Указанный эффект может быть обусловлен приподниманием индентора при высокой скорости движения.

Таблица 2 – Склерометрические исследования пленок ФП 9120 на пластинах кремния

Марка кремния	Толщина пленки $h_{пл}$, мкм	Нагрузка P , г	Средняя ширина канавки b , мкм	Глубина h , мкм	Склерометрическая микротвердость $H_{\square}^{скл}$, ГПа
КДБ 12 (100)	1,8	1	7,05	1,01	0,73
		2	13,20	1,89	0,42
		5	21,90	3,13	0,38
	2,5	1	7,40	1,07	0,63
		2	12,75	1,82	0,45
		5	20,40	2,91	0,44
	5,0	1	7,40	1,07	0,63
		2	11,25	1,61	0,56
		5	18,00	2,57	0,57
КЭС 0,01 (111)	1,8	1	7,35	1,05	0,67
		2	11,10	1,59	0,59
		5	21,00	3,00	0,41
КЭФ 4,5 (100)	1,8	1	7,20	1,03	0,70
		2	12,45	1,78	0,47
		5	21,60	3,09	0,39

Примечание. Глубина проникновения индентора h рассчитывалась из соотношения $b = 7h$, справедливого для четырехгранной алмазной пирамиды с квадратным основанием.

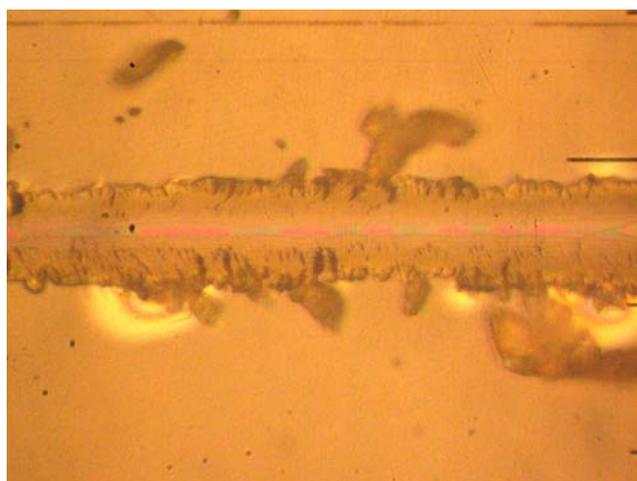


Рисунок 2 – Микрофотографии царапины поверхности пленки фоторезиста толщиной 1,8 мкм при нагрузке 5 г

Примечание. Индентор проникает в кремниевую подложку.

Механизм образования канавок на испытываемой поверхности при царапании ребром сопровождается пластическим деформированием материала преимущественно сдвигом в сторону и смещением его

в направлении от оси к краям канавки [3]. Это приводит к формированию навалов у края царапины при испытании твердых металлов и сплавов. В наших экспериментах с полимерными фоторезистивными пленками таких навалов у границ канавки не обнаружено.

Установлено, что микротвердость, определяемая методом микроиндентирования H^u , на 20–40 % меньше микротвердости, полученной методом склерометрии. Причем H^u зависит от приложенной нагрузки – она возрастает при увеличении нагрузки даже при минимальных значениях P (1–2 г), когда влияние подложки при измерении методом склерометрии не сказывается. Следовательно, метод индентирования мало пригоден для измерений тонких ($h_{пл} = 1,0–2,5$ мкм) пленок фоторезиста.

Вероятнее всего, это может быть обусловлено влиянием полей упругих напряжений вблизи поверхности фоторезистивной пленки. Упругие напряжения возникают при сушке нанесенных на кремний фоторезистивных пленок. Они растягивают отпечаток, сформировавшийся при индентировании, что приводит к увеличению его диагонали и, соответственно, к заниженным значениям микротвердости при измерении методом индентирования с использованием малых нагрузок. Наглядно этот механизм представлен на рисунке 3. Следует учесть, что при проникновении индентора в кремний на фотографии наблюдались 2 отпечатка:

- на границе воздух-полимер (с размерами диагонали D^{uzm});
- на границе полимер-Si (размер диагонали d).

Учитывая, что глубина проникновения индентора h и его диагональ d связаны соотношением $d = 7h$, и опираясь на подобие треугольников (рис. 3), можно оценить истинную величину диагонали индентора D на границе раздела воздух-полимер. Она меньше измеренной диагонали отпечатка D^{uzm} на 10–20 %, что и приводило к заниженным значениям микротвердости, измеренной методом индентирования. Различия между D^{uzm} и истинной величиной D возрастают при снижении нагрузки.

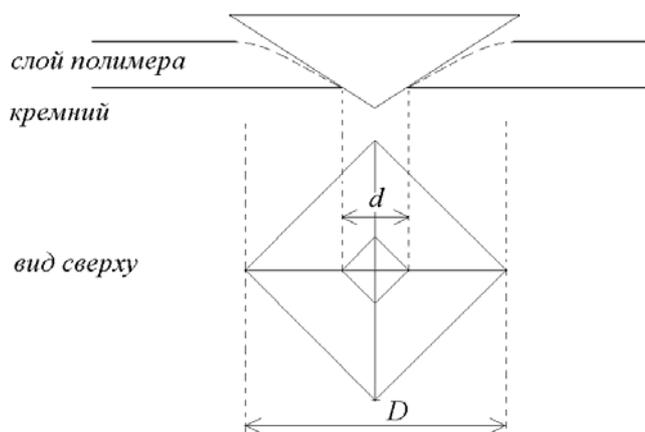


Рисунок 3 – Схема проникновения индентора в структуру полимер-кремний

Таким образом, при использовании нагрузки P , равной 1–2 г, более точные значения микротвердости получают с помощью метода склерометрии. На стабильность и точность измерений H методом микроиндентирования при малых нагрузках может оказывать влияние перемячка (линия стыка противоположных граней), возникающая на вершине четырехгранной пирамиды при ее изготовлении [2]. В процессе индентирования перемячка оказывает дополнительное нестабильное сопротивление вдавлению, которое выявляется в основном при сравнительно малой глубине отпечатка h , одного порядка с размером перемячки. Увеличение нагрузки до 10 и более грамм приводит к нивелированию указанных различий – значения микротвердости, полученные обоими методами, совпадают.

Имплантация ионов бора и фосфора, а также облучение γ -квантами, приводят к увеличению как склерометрической микротвердости $H_{\square}^{скл}$, так и микротвердости H^u , измеренной методом индентирования, и исчезновению различий между ними. При этом возрастает дисперсия микротвердости, измеренная при малых нагрузках, появляются растрескивания вокруг отпечатков и склерометрических полос. Это свидетельствует о существенном возрастании неоднородности фоторезистивной пленки и развитии в ней полей упругих напряжений после ионной имплантации. Увеличение дозы имплантации приводит к уменьшению зоны разрушения вокруг склерометрических полос, аре-

олы (предположительно, навалы) пропадают, возникают трещины в пределах отпечатка индентора и склерометрических полос.

Заключение. Таким образом, показано, что метод царапания ребром четырехгранной алмазной пирамиды (метод склерометрии) пригоден для измерения микротвердости фоторезистивных пленок толщиной от 1,0 мкм. При этом рекомендуемые нагрузки составляют 1–2 г. Метод индентирования имеет ограниченные возможности при исследовании указанных пленок вследствие влияния полей упругих напряжений вблизи поверхности пленки, которые растягивают отпечаток, что приводит к увеличению его диагонали и, соответственно, к заниженным значениям микротвердости при измерении методом индентирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моро, У. МикролитогRAFия. Принципы, методы, материалы : в 2 ч. / У. Моро. – М. : Мир, 1990. – Ч. 2. – 632 с.
2. Наконечники и бойки алмазные к приборам для измерения твердых металлов и сплавов. Технические условия : ГОСТ 9377-81. – М. : Изд-во стандартов, 1981. – 10 с.
3. Измерение микротвердости царапанием алмазными наконечниками : ГОСТ 21318-75. – введ. 01.07.76 г. – М. : Изд-во стандартов, 1976. – 30 с.
4. Бринкевич, Д.И. Микромеханические свойства эпитаксиальных слоев GaP, легированных редкоземельным элементом диспрозием / Д.И. Бринкевич, Н.В. Вабищевич, В.С. Просолович // Неорганические материалы. – 2012. – Т. 48, № 8. – С. 878–883.
5. Измерение микротвердости вдавливанием алмазных наконечников : ГОСТ 9450-76. – введ. 01.01.77 г. : с изм. – М. : Изд-во стандартов, 1993. – 35 с.

Поступила 21.09.2015

STUDY OF STRENGTH PROPERTIES OF PHOTORESIST FILMS ON SILICON BY THE SCRATCHING METHOD

**S. VABISHCHEVICH, N. VABISHCHEVICH, D. BRINKEVICH,
V. PROSOLOVICH, Y. YANKOVSKI**

The strength properties of the structures of the photoresist-silicon was investigated by indenting and scratching methods. Film positive photoresist with thickness of 1.0–5.0 μm was deposited on silicon wafers of various brands by the centrifugation method. It was found that the microhardness as determined by sclerometer, 20–40 % more than microhardness obtained by the microindentation methods. When using the load, which equals 1–2 g, more accurate values of microhardness gives the scratching method. Increasing the load to 10 or more grams leads to a leveling of the specified differences – values of microhardness obtained by both methods coincide.

УДК 537.2:621.38

ПОВЫШЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТРУКТУР ДИОДОВ ШОТТКИ С ОХРАННЫМ КОЛЬЦОМ К РАЗРЯДАМ СТАТИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

В.А. СОЛОДУХА¹, д-р техн. наук, проф. В.Л. ЛАНИН², канд. техн. наук, доц. Я.А. СОЛОВЬЁВ¹

¹ОАО «ИНТЕГРАЛ» – управляющая компания холдинга «ИНТЕГРАЛ», Минск

²Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

Рассмотрена задача повышения устойчивости структур диодов Шоттки к разрядам статического электричества. Показано, что использование в диодной структуре диффузионно-легированного охранного кольца обеспечивает устойчивость к разрядам статического электричества с потенциалом до 14 кВ.

Введение. Диоды Шоттки – полупроводниковые приборы, построенные на основе контакта металл-полупроводник. В отличие от обычных диодов с $p-n$ -переходом диоды Шоттки характеризуются более низким падением напряжения при прямом смещении, что обусловило их широкое распространение в преобразовательной технике [1]. К недостаткам диодов Шоттки относят высокие уровни обратных токов, что существенно сужает их температурный диапазон эксплуатации. Для снижения краевых токов утечки контакта металл-полупроводник и стабилизации обратного напряжения диодной структуры по периметру контакта располагают охранное кольцо p -типа проводимости (рис. 1) [2].

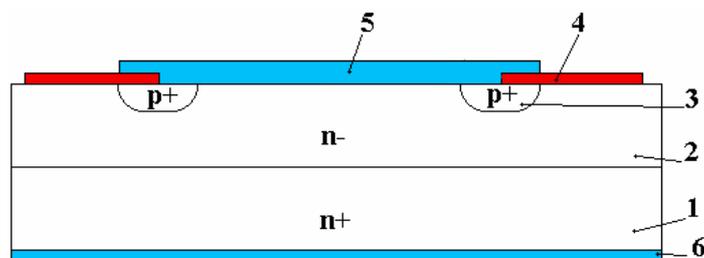


Рисунок 1 – Структура диода Шоттки с охранным кольцом:
1 – подложка; 2 – эпитаксиальный слой; 3 – охранный слой;
4 – защитный слой; 5 – металлизация анода; 6 – металлизация катода

Площадь охранного кольца в диодах Шоттки существенно меньше, чем в диодах с $p-n$ -переходом, поэтому диоды Шоттки в большей степени чувствительны импульсным перегрузкам при обратном смещении, в частности при воздействии разрядов статического электричества (РСЭ) [3].

Разряд статического электричества – это импульсный перенос электростатического заряда между телами с разными электростатическими потенциалами при непосредственном контакте или при сближении их на некоторое, достаточно маленькое, расстояние [4]. Разряды статического электричества могут возникать в результате контакта человеческого тела с радиоэлектронным устройством или его компонентами, а также при механическом воздействии на компоненты частей оборудования, при возникновении РСЭ в самом работающем устройстве, при коммутации устройства с кабелем [5]. Весьма значительные потери создают РСЭ в производстве и эксплуатации полупроводниковых приборов: 16–22% отказов у изготовителей приборов, 9–13% – у изготовителей электронной аппаратуры и 27–33% – у потребителей аппаратуры [6]. Разряды статического электричества вызывают такие виды повреждений, как тепловой пробой $p-n$ -перехода, образование пустот в окисле кремния, расплавление металлических проводников и др. [7].

Для диодов Шоттки наиболее характерным механизмом отказа является выгорание $p-n$ -переходов и барьеров Шоттки, когда сквозь них формируются проводящие каналы, приводящее к деградации электрических свойств барьера Шоттки, проявляемой, главным образом, в увеличении его обратного тока утечки и снижении пробивного напряжения. Конструктивно-технологические методы повышения устойчивости диодов Шоттки к воздействию РСЭ условно делятся на три группы:

- шунтирование барьера контакта металл-полупроводник интегрированным $p-n$ -переходом с меньшим обратным пробивным напряжением [5, 8–11];
- уменьшение напряженности электрического поля, индуцированного РСЭ, в критических местах структуры [5, 12–14];
- уменьшение проводимости полупроводникового материала при обратном смещении диода Шоттки [15, 16].

Настоящая работа посвящена разработке конструктивно-технологических методов повышения устойчивости к РСЭ диодов Шоттки с охранным кольцом.

Методика эксперимента. Диоды Шоттки формировали с использованием эпитаксиальных слоев 5 КЭФ 0,6 и 9 КЭФ 2,5, обеспечивающих обратное номинальное напряжение диодов Шоттки 45 и 100 В соответственно. Размеры кристаллов диодов Шоттки варьировали от 0,3 до 7,0 мм².

Охранный кольцо формировали ионным и диффузионным легированием. При ионном легировании проводили имплантацию ионов бора с энергией 60 кэВ дозой 9 мкКл/см² через слой защитного окисла толщиной 100 нм. Затем проводили отжиг при температуре 1050°С. При этом были получены области *p*-типа проводимости с поверхностным сопротивлением порядка 1000 Ом/□, глубиной залегания примеси до 1,1 мкм и толщиной слоя окисла кремния до 450 нм. Максимальная концентрация бора в охранный кольцо при ионном легировании может достигать уровня 8·10¹⁷ см⁻³.

При диффузионном легировании сначала проводили диффузию бора из твердых планарных источников в среде кислорода при температуре 970°С в среде азота в течение 50 мин. В результате получали поверхностное сопротивление легированных слоев 30–40 Ом/□. Далее снимали слой боросиликатного стекла и осуществляли разгонку примеси в среде азота с кислородом при температуре 1050°С в течение 50 мин [79]. С помощью диффузионного легирования получали области *p*-типа проводимости с поверхностным сопротивлением 60–80 Ом/□, глубиной залегания примеси 1,3–2,5 мкм и толщиной слоя окисла кремния 430 нм. При этом максимальная концентрация бора в диффузионно-легированном кольце может достигать 2·10¹⁹ см⁻³.

Для последующих измерений электрических параметров и испытаний на устойчивость к импульсам РСЭ кристаллы диодов Шоттки собирали в корпус КТ-28 (ТО-220). Измерения таких электрических параметров, как прямое и обратное напряжение, а также обратный ток, проводили с помощью измерителя параметров транзисторов и диодов Л 2-69. Распределение тепла по поверхности кристаллов диодов Шоттки при лавинном пробое исследовали методом фотонной эмиссии с помощью зондовой станции Signatone S1160-8N и ПЗС камеры Nikon DS-Fi2 с разрешением 5 Мпикс., регистрирующей излучение в диапазоне длин волн от 0,3 до 1,1 мкм с выдержкой в течение 60 с.

Испытания диодов Шоттки на устойчивость к импульсам РСЭ проводили с помощью РСЭ-симулятора модели MiniZap MZ-15/ЕС (ТЕС, США) по методу IЕС 61000-4-2. Электрическая схема тестового устройства представлена на рисунке 2. В данной схеме конденсатор *C*₁ заряжается через высокоомный резистор *R*₁ напряжением от 1 до 14 кВ, а затем разряжается через резистор *R*₂ в тестируемое устройство. В соответствии с методом испытаний сопротивление *R*₁ устанавливали равным 100 МОм, емкость *C*₁ – равной 150 пФ, а сопротивление *R*₂ – 330 Ом [4].

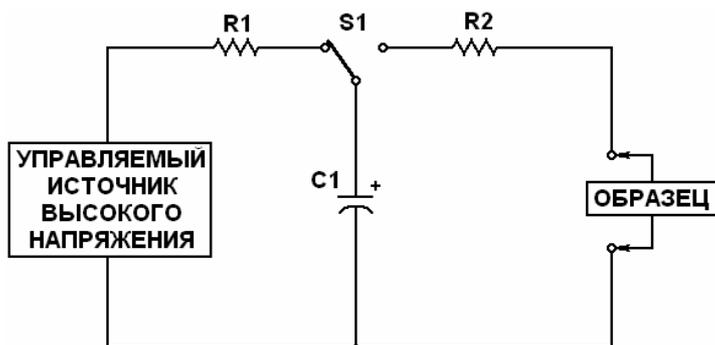


Рисунок 2 – Электрическая схема тестового устройства для испытаний на устойчивость к РСЭ

Испытания проводили на выборках, содержащих не менее 10 диодов Шоттки. Перед испытаниями на каждой выборке проводили контрольный замер основных электрических параметров: прямого напряжения и обратного тока на соответствие установленным нормам. Затем на каждый прибор из выборки последовательно подавали по 5 импульсов РСЭ положительной и по 5 импульсов РСЭ отрицательной полярности. Напряжение изменяли ступенчато от 2 до 14 кВ с шагом 2 кВ. После каждой ступени проводили замер основных электрических параметров. Критерием годности прибора считали соответствие измеренных параметров установленным нормам, пределом стойкости диодов Шоттки к РСЭ – ступень, которая предшествовала той ступени, на которой происходил хотя бы один отказ. Если во всем диапазо-

не изменяемых напряжений импульсов РСЭ отказов не наблюдали, то предел стойкости диодов Шоттки к РСЭ принимали равным 14 кВ.

Места отказов диодов Шоттки после испытаний исследовали методом растровой электронной микроскопии (РЭМ) с использованием микроскопа типа S-806 (Hitachi, Япония).

Расчет допустимых потенциалов РСЭ. Величины максимально допустимых потенциалов РСЭ рассчитывали по методике, основанной на модели теплового повреждения полупроводниковых приборов Вунша – Белла [18], для импульсов отрицательной полярности, которые наиболее критичны для структур диодов Шоттки [19]. Согласно данной методике для импульсов отрицательной полярности разрядная цепь может быть представлена схемой, изображенной на рисунке 3, где величина емкости C_1 и сопротивления R_1 в соответствии с методом ИЕС 61000-4-2 составляет 150 пФ и 330 Ом соответственно, R_2 – дифференциальное сопротивление диода Шоттки при обратном смещении, R_3 – контактное сопротивление между прибором и землей, величина которого пренебрежимо мала и принималась равной нулю.

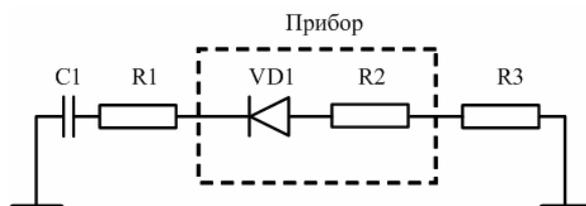


Рисунок 3 – Эквивалентная схема разряда статического электричества отрицательной полярности через диод Шоттки

Для прогнозирования максимально допустимого потенциала РСЭ принимали во внимание 2 критерия отказа Вунша-Белла:

– отказ прибора в результате плавления кремния при равномерном протекании обратного тока через p - n -переход, для которого пороговую мощность определяли по формуле [18]

$$P = 1809,7St^{-\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

где S – площадь p - n -перехода охранного кольца диода Шоттки, которая определяется топологией, t – длительность импульса РСЭ, приведенного к прямоугольной форме;

– отказ прибора в результате плавления кремния при протекании обратного тока через p - n -переход с образованием горячих точек, занимающих 10% от его площади, для которого пороговую мощность определяли формулой

$$P = 180,97St^{-\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Время импульса t рассчитывали в соответствии с формулой [6]

$$t = 5(R_1 + R_2)C_1. \quad (3)$$

Для расчета максимально допустимого потенциала импульса РСЭ отрицательной полярности в соответствии с методикой [19] использовали следующую формулу:

$$U_p = \frac{\sqrt{4U_{R\max}^2 + 40PR_2} - 2U_{R\max}}{2R_2}(R_1 + R_2) + U_{R\max}, \quad (4)$$

где $U_{R\max}$ – напряжение лавинного пробоя p - n -перехода охранного кольца.

Величина R_2 может быть определена экспериментально согласно формуле

$$R_2 = \frac{\Delta U}{\Delta I}, \quad (5)$$

где ΔU – изменение обратного напряжения при увеличении обратного тока с 10 до 20 мА.

Результаты и их обсуждение. Диоды Шоттки с ионно-легированным кольцом. При измерении электрических параметров диодов Шоттки с размером кристалла $0,76 \times 0,76 \text{ мм}^2$ с номинальным обратным напряжением 45 В величина $U_{R\text{max}}$ составила порядка 50 В, величина R_2 – порядка 40 Ом, для номинального обратного напряжения 100 В величина $U_{R\text{max}}$ составила порядка 120 В, величина R_2 – порядка 300 Ом. Данные значения $U_{R\text{max}}$ и R_2 использовали для расчетов максимально допустимых потенциалов U_p в соответствии с формулами (1–4). Сравнительные результаты расчетов величины U_p и испытаний диодов Шоттки по методу ИЕС 61000-4-2 представлены на рисунках 4, а, б. Как видно из приведенных зависимостей, отказ структур диодов Шоттки с ионно-легированным охранным кольцом вследствие воздействия импульсов РСЭ отрицательной полярности обуславливается протеканием тока разряда не по всей площади p - n -перехода охрannого кольца, а через горячие точки, занимающие менее 50 % его общей площади. Данный вывод подтверждается результатами исследований фотонной эмиссии кристаллов диодов Шоттки с номинальным обратным напряжением 100 В, результаты которых представлены на рисунках 5, а, б.

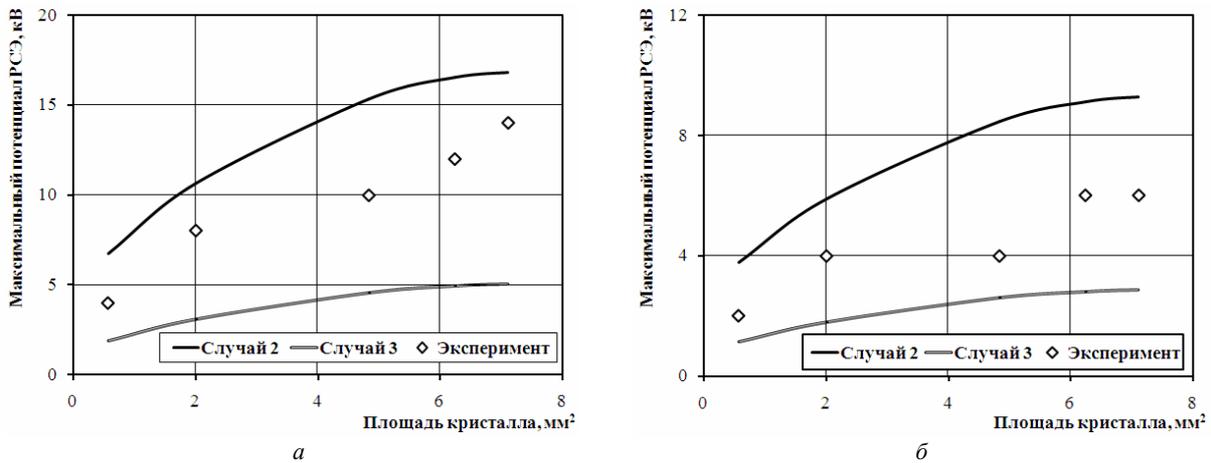


Рисунок 4 – Зависимости допустимых потенциалов импульсов РСЭ отрицательной полярности и испытаний диодов Шоттки с ионно-легированным охранным кольцом от площади кристалла: а – номинальное обратное напряжение 45 В; б – номинальное обратное напряжение и 100 В

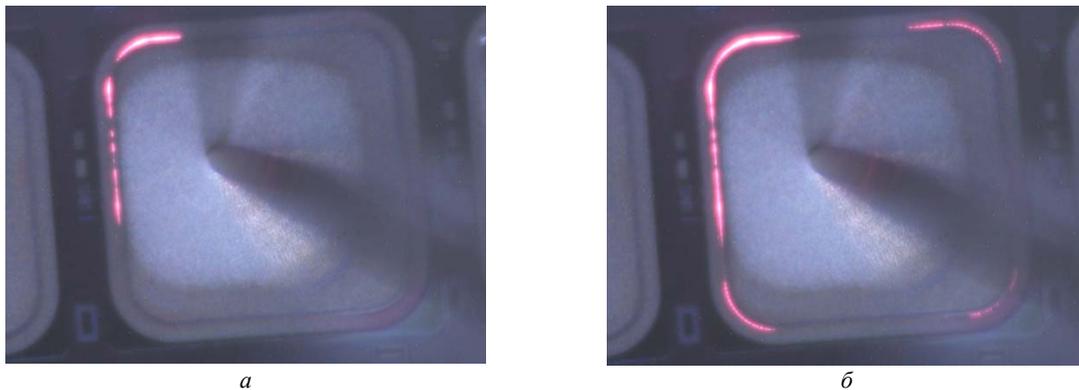


Рисунок 5 – Локализация мест выделения тепла в структурах диодов Шоттки с ионно-легированным охранным кольцом с номинальным обратным напряжением 100 В: а – обратное смещение 120 В; б – обратное смещение 125 В

Как видно из рисунков 5, а, б, основная энергия при пробое ионно-легированного охрannого кольца локализуется в области его закруглений. В рассеянии энергии лавинного пробоя участвует менее 50 % площади охрannого кольца, что объясняется в первую очередь относительно большой величиной поверхностного сопротивления p -слоя охрannого кольца, достигающей $1000 \text{ Ом}/\square$. Таким образом, ток лавинного пробоя практически не растекается по всему охрannому кольцу, а преимущественно локализуется в местах его закругления.

РЭМ-исследования структур диодов Шоттки, отказавших после испытаний на устойчивость к статическому электричеству (СЭ) (рис. 6, а, б), также показывают, что разрушение диодной структуры, как правило, происходит в области закругления охрannого кольца.

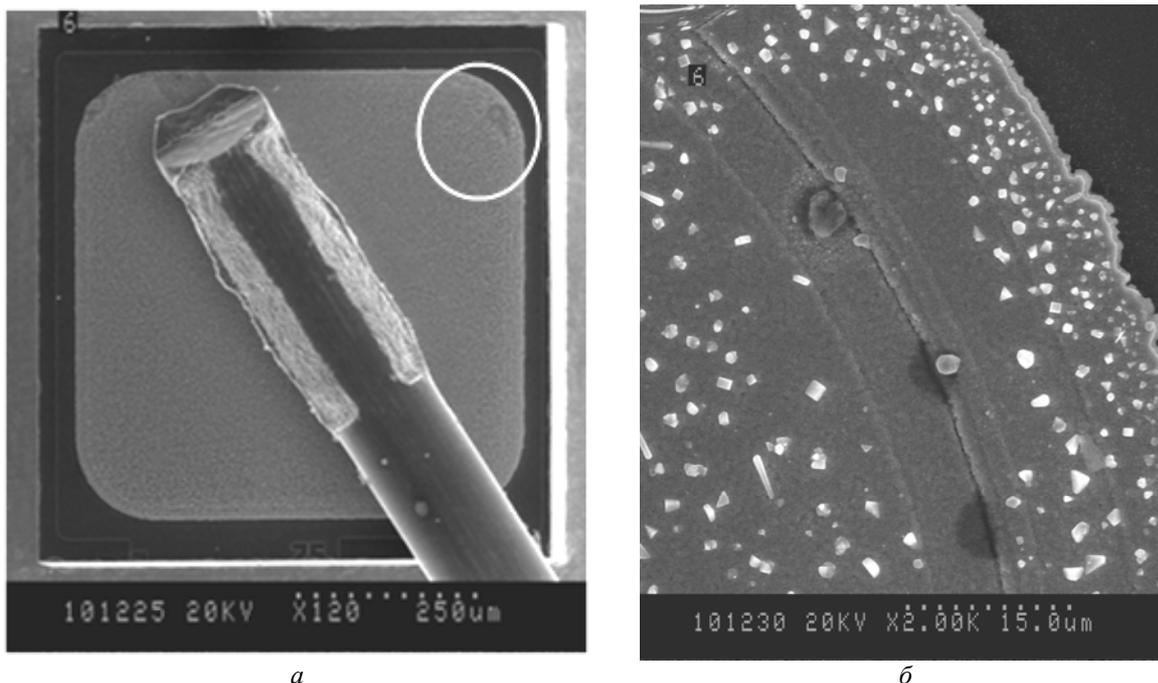


Рисунок 6 – РЭМ кристалла диода Шоттки, отказавшего после воздействия РЭС:
а – общий вид кристалла, *б* – повреждения в области закругления охранного кольца

Анализ топологии охранного кольца. При анализе топологии охранного кольца (рис. 7) можно выделить четыре участка, отличающихся напряжением лавинного пробоя:

– **участок I** является плоским *p-n*-переходом охранного кольца, конфигурация которого полностью совпадает с конфигурацией маски, через которую оно формировалось, а напряжение лавинного пробоя данного участка будет описываться формулой [2]

$$U_{R\max} = 60 \left(\frac{E_g}{1,1} \right)^{3/2} \left(\frac{N_D}{10^{22}} \right)^{-3/4}, \quad (6)$$

где E_g – ширина запрещенной зоны, N_D – концентрация доноров в полупроводнике;

– **участок II** является цилиндрическим *p-n*-переходом, образующимся за счет боковой диффузии примеси на прямолинейных участках охранного кольца. Напряжение лавинного пробоя данного участка будет определяться следующим выражением [5]:

$$\frac{V_{GY}}{V_B} = \left[\frac{1}{2} \left(\eta^2 + 2\eta^{6/7} \right) + \ln \left(1 + 2\eta^{-8/7} \right) - \eta^{6/7} \right], \quad (7)$$

где V_{CY} – напряжение лавинного пробоя цилиндрического *p-n*-перехода, V_B – напряжение лавинного пробоя плоского *p-n*-перехода, η – отношение глубины залегания *p-n*-перехода x_j к ширине обедненного слоя при пробое W_m ;

– **участок III** образован внутренней частью полутора, радиус вращения которого равен внутреннему радиусу закругления охранного кольца (по маске), а радиус окружности равен глубине залегания *p-n*-перехода. Очевидно, что совокупность всех участков III охранного кольца составит внутреннюю часть полутора, а напряжение пробоя *p-n*-перехода охранного кольца данной конфигурации будет больше, чем у цилиндрического перехода;

– **участок IV** образован наружной частью полутора, радиус вращения которого равен наружному радиусу закругления охранного кольца (по маске), а радиус окружности – глубине залегания *p-n*-перехода. Как и в предыдущем случае, очевидно, что совокупность всех участков IV охранного кольца составит наружную часть полутора, а напряжение пробоя *p-n*-перехода охранного кольца данной конфигурации будет меньше, чем у цилиндрического перехода.

Таким образом, можно утверждать, что наиболее чувствительным к воздействию РЭС отрицательной полярности элементом конструкции диода Шоттки является наружная часть области закругления охранного кольца, которая отличается наименьшим напряжением лавинного пробоя, что и было подтверждено экспериментально.

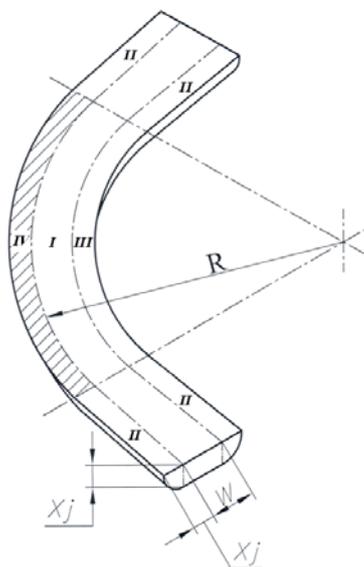


Рисунок 7 – Фрагмент топологии охранного кольца:
R – внешний радиус закругления охранного кольца,
W – ширина охранного кольца, *x_j* – глубина залегания *p-n*-перехода; **I** – участок охранного кольца с плоским *p-n*-переходом; **II** – участок охранного кольца с цилиндрическим *p-n*-переходом; **III** – участок охранного кольца с внутренней стороны изгиба; **IV** – участок охранного кольца с наружной стороны изгиба

Расчет дифференциального сопротивления. Если представить дифференциальное сопротивление в виде геометрического тела с известной длиной *l* и площадью поперечного сечения *S_{dif}*, то очевидно, что его электрическое сопротивление будет определяться известной формулой:

$$R_2 = \rho \frac{l}{S_{dif}}, \tag{8}$$

где ρ – удельное сопротивление материала. Исходя из структуры диода Шоттки (см. рис. 1) очевидно, что длина *l* будет выражаться через разность между толщиной эпитаксиального слоя *d_{N-}* и глубиной охранного кольца *x_j*. В свою очередь, удельное сопротивление ρ в формуле (8) будет определяться удельным сопротивлением эпитаксиального слоя ρ_{N-} . С учетом сказанного выше формула (8) может быть преобразована следующим образом:

$$R_2 = \rho_{N-} \frac{d_{N-} - x_j}{S_{dif}}. \tag{9}$$

С помощью формулы (9) можно экспериментально определить площадь поперечного сечения дифференциального сопротивления:

$$S_{dif} = \rho_{N-} \frac{d_{N-} - x_j}{R_2}. \tag{10}$$

С другой стороны, площадь области IV охранного кольца определяется согласно формуле

$$S_{IV} = \pi \left((R + x_j)^2 - R^2 \right). \tag{11}$$

Сравнительные результаты теоретических расчетов значений параметра *S_{IV}* по формуле (11) и определенных экспериментально значений параметра *S_{dif}* по формуле (10) для диодов Шоттки с ионно-легированным охранным кольцом различной топологии и номинальным обратным напряжением представлены в таблице 1.

Как видно из таблицы 1, величина дифференциального сопротивления не зависит от размеров охранного кольца и его ширины, а при одинаковой глубине залегания *p-n*-перехода определяется его внешним радиусом закругления. При этом для всех исследованных образцов площадь сечения дифференциального сопротивления оказалась на 10–30% меньше участка IV охранного кольца. Данный факт также

указывает на неполное задействование площади ионно-легированного охранного кольца при прохождении через диод Шоттки импульсов РСЭ отрицательной полярности.

Таблица 1 – Сравнительные результаты расчетов площади сечения дифференциального сопротивления S_{dif} и участка IV ионно-легированного охранного кольца S_{IV}

Эпитаксиальная структура	Размеры контакта внутри охранного кольца, мкм	Внешний радиус закругления охранного кольца, мкм	Ширина охранного кольца, мкм	x_j , мкм	R_2 , Ом	S_{dif} , мкм ²	S_{IV} , мкм ²
5,0 КЭФ 0,6	560×560	100	18	1,05	38,6	614	663
5,0 КЭФ 0,6	1420×1420	200	20	1,05	23,5	1021	1259
5,0 КЭФ 0,6	1752×1752	280	24	1,05	17,8	1345	1761
5,0 КЭФ 0,6	2261×2261	232,5	32	1,05	19,6	1236	1463
9,0 КЭФ 2,5	560×560	100	18	1,15	293	670	726

Для дальнейших расчетов параметры S_{dif} и S_{IV} полагали тождественными друг другу. В таком случае зависимость (4) для диодов Шоттки с ионно-легированным охранным кольцом с учетом критерия (2), а также формул (9) и (11) может быть представлена в виде

$$U_p = \frac{\sqrt{4U_{R_{max}}^2 + \frac{40 \cdot 180,97 \rho_{N-} S (d_{N-} - x_j)}{\pi((R+x_j)^2 - R^2)}} - 2U_{R_{max}}}{\frac{2\rho_{N-}(d_{N-} - x_j)}{\pi((R+x_j)^2 - R^2)}} \left(R_1 + \frac{\rho_{N-}(d_{N-} - x_j)}{\pi((R+x_j)^2 - R^2)} \right) + U_{R_{max}} = \quad (12)$$

$$= \frac{\sqrt{4U_{R_{max}}^2 + \frac{1030,52 \rho_{N-} S (d_{N-} - x_j)}{\pi((R+x_j)^2 - R^2)}} - 2U_{R_{max}}}{\frac{2\rho_{N-}(d_{N-} - x_j)}{\pi((R+x_j)^2 - R^2)}} \left(R_1 + \frac{\rho_{N-}(d_{N-} - x_j)}{\pi((R+x_j)^2 - R^2)} \right) + U_{R_{max}}.$$

Диффузионно-легированное охранный кольцо. Сравнительные результаты экспериментального определения параметра S_{dif} и теоретического расчета S_{IV} (табл. 2) для диодов Шоттки с диффузионно-легированным охранным кольцом с размером кристалла 0,76×0,76 мм² и номинальными обратными напряжениями 45 и 100 В показывают их достаточно хорошее совпадение. Таким образом, можно сделать вывод, что в формировании дифференциального сопротивления принимает участие только область наружного закругления охранного кольца, причем данный феномен не зависит от технологии формирования охранного кольца. Это также свидетельствует о пригодности формул (9) и (11) для расчета значений дифференциального сопротивления.

Таблица 2 – Сравнительные результаты определения параметров S_{dif} и S_{IV}

Эпитаксиальная структура	Размеры контакта внутри охранного кольца, мкм	Внешний радиус закругления охранного кольца, мкм	Ширина охранного кольца, мкм	x_j , мкм	R_{dif} , Ом	S_{dif} , мкм ²	S_{IV} , мкм ²
5,0 КЭФ 0,6	560×560	100	18	1,32	27,3	809	834
9,0 КЭФ 2,5	560×560	100	18	1,43	197	961	904

Сравнительные результаты расчетов величины U_p в соответствии с формулами (1)–(4), (9), (11) и испытаниями диодов Шоттки с диффузионно-легированным охранным кольцом с номинальными обратными напряжениями 45 и 100 В по методу ИЕС 61000-4-2 представлены на рисунках 8, а, б.

Как видно из рисунка 8, отказ диодов Шоттки с диффузионным охранным кольцом при испытаниях импульсами РСЭ отрицательной полярности обусловлен равномерным протеканием разрядного тока по всей площади охранный кольца. Данный вывод подтверждается также результатами фотоэмиссионных исследований локализации тепловых потоков в диодных структурах при обратном смещении (рис. 9, а, б). Как видно из рисунков 9, а и б, наблюдаемая фотонная эмиссия распределена равномерно по площади охранный кольца. Данный результат подтверждает факт влияния сопротивления охранный кольца на равномерность протекания тока пробоя по его площади, и, как следствие, на устойчивость диодных структур к РСЭ.

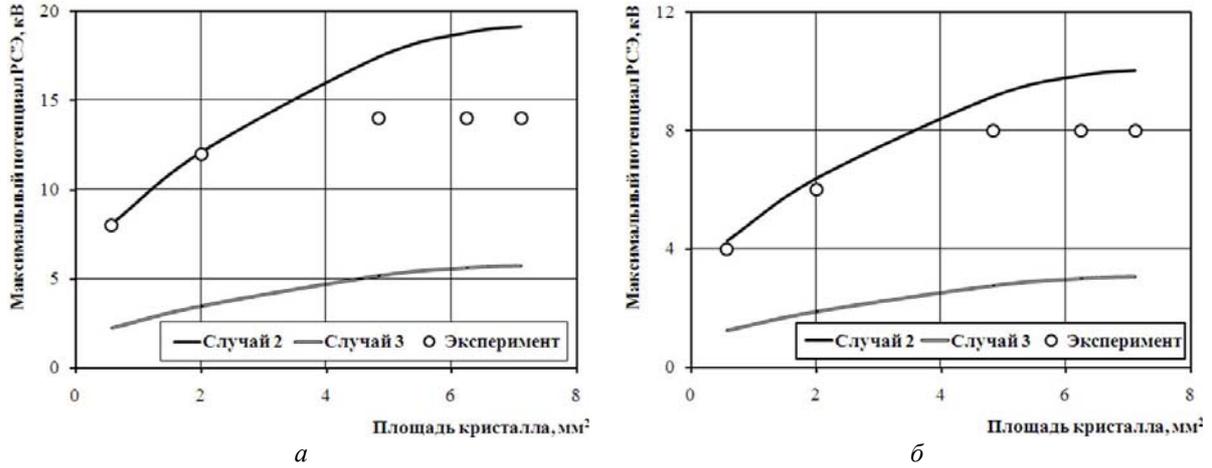


Рисунок 8 – Сравнительные результаты расчетов допустимых потенциалов импульсов РСЭ отрицательной полярности и испытаний диодов Шоттки с диффузионным охранным кольцом: а – номинальное обратное напряжение 45 В, б – номинальное обратное напряжение 100 В

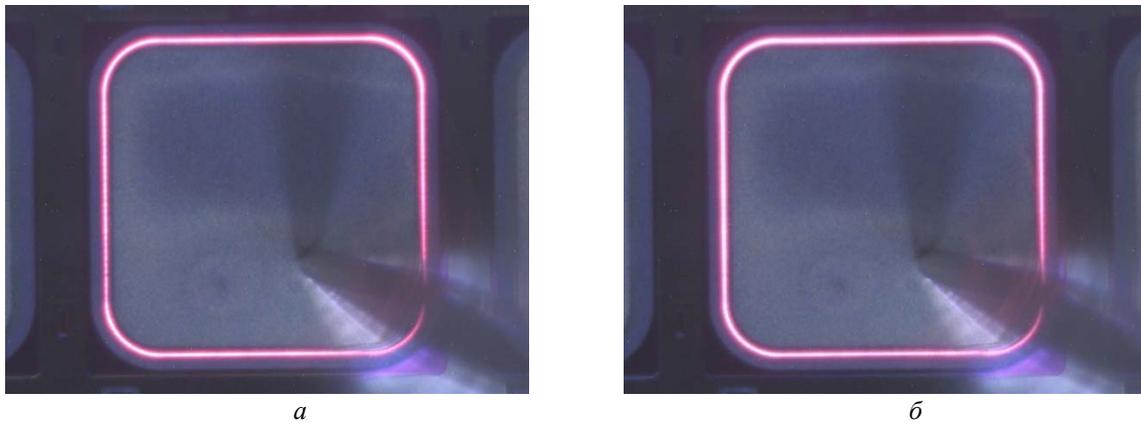


Рисунок 9 – Локализация мест выделения тепла в структурах диодов Шоттки с диффузионно-легированным охранным кольцом с номинальным обратным напряжением 100 В: а – обратное смещение 120 В, б – обратное смещение 125 В

Учитывая, что для диодов Шоттки с диффузионно-легированным охранным кольцом применим критерий Вунша – Белла согласно формуле (1), то с учетом формул (1), (3), (4), (9) и (11) справедливо следующее выражение для расчета максимально допустимого потенциала РСЭ:

$$U_P = \frac{\sqrt{4U_{R\max}^2 + \frac{10305,2S\rho_{N-}(d_{N-} - x_j)}{\pi((R+x_j)^2 - R^2)} \left(R_1 + \frac{\rho_{N-}(d_{N-} - x_j)}{\pi((R+x_j)^2 - R^2)} \right) C_1} - 2U_{R\max}}{\frac{2\rho_{N-}(d_{N-} - x_j)}{\pi((R+x_j)^2 - R^2)}} \left(R_1 + \frac{\rho_{N-}(d_{N-} - x_j)}{\pi((R+x_j)^2 - R^2)} \right) + U_{R\max}. \quad (13)$$

Из сравнения формул (12) и (13) видно, что при прочих равных параметрах диффузионно-легированное охранное кольцо обеспечивает более чем трехкратный запас по величине допустимого потенциала РСЭ. Дополнительным фактором, способствующим увеличению запаса по потенциалу РСЭ при неизменных параметрах топологии диода Шоттки, является увеличение глубины залегания p - n -перехода, а также уменьшение толщины и удельного сопротивления эпитаксиального слоя. Однако три последних параметра непосредственно влияют на запас по параметру U_{Rmax} , поэтому их варьирование должно проводиться с учетом данных условий. Кроме того, повышению запаса устойчивости к РСЭ способствует увеличение площади и внешнего радиуса закругления охранного кольца, но при варьировании данного параметра необходимо учитывать изменение площади активной структуры диода Шоттки, которая непосредственно определяет его прямое падение напряжения.

Выводы. Таким образом, на основании аналитических расчетов и экспериментальных исследований было установлено, что:

- количественные зависимости максимально допустимых потенциалов РСЭ диодов Шоттки с ионно-легированными и диффузионно-легированными охранными кольцами в соответствии со стандартом испытаний IEC 61000-4-3-2009 на основе модели теплового повреждения полупроводниковых приборов Вунша – Белла учитывают площадь охранного кольца, глубину залегания и внешний радиус закругления охранного кольца, а также толщину и удельное сопротивление эпитаксиального слоя;
- диффузионно-легированное кольцо характеризуется трехкратным запасом устойчивости к воздействию РСЭ по сравнению с ионно-легированным охранным кольцом, что связано с меньшим поверхностным сопротивлением p -слоя, которое обеспечивает равномерное протекание разрядного тока без образования горячих точек;
- повышению запаса устойчивости диодов Шоттки с охранным кольцом способствует увеличение глубины залегания p - n -перехода охранного кольца, уменьшение толщины и удельного сопротивления эпитаксиального слоя, увеличение площади и радиуса внешнего закругления охранного кольца;
- установленные закономерности позволяют определять конструктивные параметры проектируемых диодов Шоттки с заданными размерами кристалла, номинальным обратным напряжением и требуемой стойкостью к импульсам электростатических разрядов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов, С. Диоды Шоттки для преобразовательной техники / С. Попов // Электронные компоненты. – 2002. – № 3. – С. 35–38.
2. Зи, С.М. Физика полупроводниковых приборов : в 2 кн. / С.М. Зи. – М. : Мир, 1984. – Кн. 1. – 455 с.
3. Повышение надежности диодов Шоттки при воздействии разрядов статического электричества / В.А. Солoduха [и др.] // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2012. – № 5. – С. 22–26.
4. Совместимость технических средств электромагнитная. Устойчивость к электростатическим разрядам. Требования и методы испытаний : ГОСТ Р 51317.4.2-99 (МЭК 61000-4-2-95). – введ. 24.12.1999. – М. : Изд-во стандартов, 2000. – 24 с.
5. Dabral, S. Basic ESD and I/O design / S.Dabral, T.J. Maloney. – NY. : John Wiley&Sons, 1998. – 305 p.
6. Горлов, М.И. Электростатические заряды в электронике / М.И. Горлов, А.В. Емельянов, В.И. Плебанович. – Минск : Белорусская наука, 2006. – 295 с.
7. Строгонов, А. Воздействие электростатического разряда на интегральные микросхемы / А. Строгонов, М. Горлов // Компоненты и технологии. – 2008. – № 3. – С. 188–192.
8. Schottky diode with voltage limiting guard band : pat. US4110775, USA : IPC H01L29/48 / T. A. Festa ; publ. date: 29.08.1978.
9. Design of edge termination for GaN power Schottky diodes / J.R. Laroch [et al.] // J. of Electronic Materials. – 2005. – Vol. 34, № 4. – P. 370–374.
10. Distributed reverse surge guard : pat. US6717229, USA : IPC H01L29/66 / W. R. Buchanan., R. J. Hamerski., W. A. Smith ; publ. date: 06.04.2004.
11. Trench-gated Schottky diode with integral clamping diode : pat. US6078090, USA : IPC H01L29/66 / R.K. Williams, S.S. Malikarjunaswamy, J. Korec, W. B. Grabowski ; publ. date: 20.06.2000.
12. High voltage, high speed Schottky semiconductor device and method of fabrication : pat. US5027166, USA : IPC H01L29/872 / K. Ohtsuka, Y. Kutsuzawa, K. Ogata, H. Ichinosawa ; publ. date: 25.07.1991.
13. Schottky diode with titanium or like layer contacting the dielectric layer : pat. US4899199, USA : IPC H01L23/52 / H.J. Gould ; publ. date: 06.02.1990.
14. Schottky diode and method of manufacture : pat. US7820473, USA : IPC H01L21/00 / L. Chen, B.E. Kruse, M. Duskin, J.D. Moran ; publ. date: 26.10.2010.

15. Schottky barrier diod, and manufacturing method thereof : pat. JP2009059765, JPN : IPC H01L29/47 / K. Onishi ; publ. date: 19.03.2009.
16. Gate controlled Schottky barrier diode : pat. US5258640, USA : IPC H01L29/56 / C-M. Hsieh, L.L. Hsu, P.T. Nguyen, L.F. Wagner ; publ. date: 02.11.1993.
17. Способ диффузии бора из твердых источников бора при изготовлении полупроводниковых приборов и интегральных микросхем : пат. 10529 Респ. Беларусь : МПК Н 01L 21/02 (2006) / А.С. Турцевич [и др.] ; дата публ.: 30.04.08 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуальнай уласнасці. – 2008. – № 2 – С. 110.
18. Wunch, D.C. Determination of Threshold Failure Levels of Semiconductor Diodes and Transistors Due to Pulse Voltages / D.C. Wunch, R.R. Bell // IEEE Trans. Nuc. Science. – 1968. – Vol. 15. – № 4. – P. 244–259.
19. Солодуха, В.А. Прогнозирование максимально допустимых потенциалов разрядов статического электричества и их влияние на диоды Шоттки / В.А. Солодуха, В.Л. Ланин, Я.А. Соловьев // Доклады БГУИР. – 2015. – № 4 (90). – С. 80–86.

Поступила 21.09.2015

INCREASING OF STABILITY OF DIODES SCHOTTKY STRUCTURES WITH GUARD RING TO ELECTROSTATIC DISCHARGES

V. SOLODUKHA, V. LANIN, J. SOLOVJOV

The problem of increase of stability of diodes Schottky structures to electrostatic discharges is observed. Application in diodes structure of the ionic-alloyed guard ring provides stability to affecting electrostatic discharges pulses of negative polarity at level 14 kV.

УДК 621.382; 535.015

**ОПТИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОБЛУЧЕННЫХ
БЫСТРЫМИ ЭЛЕКТРОНАМИ СВЕТОДИОДОВ НА ОСНОВЕ ГЕТЕРОСТРУКТУР****канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.А. БУМАЙ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.С. БОБУЧЕНКО,
О.С. ВАСЬКОВ***(Белорусский национальный технический университет, Минск);***канд. физ.-мат. наук, доц. С.А. ВАБИЩЕВИЧ***(Полоцкий государственный университет);***канд. физ.-мат. наук, С.Б. ЛАСТОВСКИЙ***(ГО «Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению», Минск);***канд. техн. наук Ю.В. ТРОФИМОВ, В.И. ЦВИРКО***(РНПУП «Центр светодиодных и оптоэлектронных технологий НАН Беларуси», Минск)*

Исследовано влияние облучения быстрыми электронами (4 МэВ) на электрические и оптические свойства светоизлучающих диодов (СИД) на основе нитридов и фосфидов. Установлены закономерности изменения при облучении в вольтамперных характеристиках, спектрах электролюминесценции и тепловых свойствах СИД. Обнаружено изменение в спектрах электролюминесценции ультрафиолетовых и синих СИД, связанное возбуждением в люминесценции в поврежденных облучением полимерных линзах СИД в области ~2 эВ. Обнаружено восстановление в процессе работы оптической мощности облученных СИД на основе нитридов, подчиняющееся кинетике мономолекулярной реакции первого порядка.

Введение. Современные светоизлучающие диоды (СИД) на основе гетероструктур широко используются в различных осветительных системах и системах индикации. Облучение заряженными частицами высоких энергий, создающих дефекты в полупроводниковых слоях и элементах структуры СИД, позволяет получить информацию о характере изменений параметров СИД при работе в условиях повышенной радиации [1–3].

Цель настоящей работы – изучение изменений оптических и электрических свойств СИД, облученных быстрыми электронами, обладающими высокой проникающей способностью. Облучение – один из методов достижения быстрой деградации СИД наряду с ускоренными тепловыми испытаниями, позволяющими оценить срок службы СИД, и др.

Методика эксперимента. Облучение быстрыми электронами (4 МэВ, плотность потока электронов $2 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2}$, флюенсами до $1,2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$) СИД Helio (1 Вт) различного свечения (синих, зеленых, красных) и ультрафиолетовых, а также маломощных СИД Nichia (90 мВ) синего свечения проведено на ускорителе ЭЛУ-4. Энергия быстрых электронов оказалась достаточной для глубокого проникновения в СИД, т.е. для создания радиационных дефектов как в линзе СИД, так и в кристалле [4]. Вольтамперные характеристики (ВАХ) и спектры электролюминесценции СИД измерялись в режиме стабилизации тока СИД:

- ВАХ – с помощью программируемого источника питания Agilent-E3640A;
- спектры электролюминесценции – радиометрического комплекса для определения светотехнических характеристик светодиодов, светодиодных модулей и дисплеев производства Instrument Systems.

Методом переходных электрических процессов исследованы изменения тепловых свойств СИД, облученных быстрыми электронами.

Экспериментальные результаты и их обсуждение. Зависимость энергетической эффективности исследуемых СИД Helio от флюенса приведена в таблице 1, из которой видно, что деградация оптических свойств СИД на основе нитридов (ультрафиолетовых, синих, зеленых) при облучении происходит значительно слабее, чем красных (на основе фосфидов). Энергетическая эффективность заметно уменьшилась, особенно для красных светодиодов, которые после набранной дозы $4,7 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ практически полностью деградировали. При этом существует различие в характере изменении спектров данных групп СИД. Необходимо отметить, что после облучения произошло визуально наблюдаемое помутнение линз, они приобрели желтый оттенок. В целом радиационная стойкость зеленых, синих и ультрафиолетовых светодиодов, изготовленных на основе соединений InGaN, оказалась примерно одинаковой и значительно более высокой, чем у красных светодиодов на основе AlInGaP [1].

Спектры электролюминесценции синих и, для сравнения, красных СИД приведены на рисунках 1, а, б. Как показало исследование нормированных зависимостей спектрального потока излучения,

форма спектра от дозы облучения меняется незначительно, но спектры смещаются в низкоэнергетическую область. Это смещение для синих светодиодов составляет 8–17 мэВ, для зеленых – 42–47 мэВ, для ультрафиолетовых – 13–23 мэВ, для красных – 15–17 мэВ (при дозе облучения $4,7 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$). Сдвиг максимума спектров обусловлен, по-видимому, уменьшением уровня возбуждения СИД и/или уменьшением эффективной ширины запрещенной зоны вследствие повышения температуры активной области облученных СИД из-за уменьшения их энергетической эффективности.

Таблица 1 – Энергетическая эффективность СИД

СИД	Энергетическая эффективность, %		
	Исходный	Доза облучения $D, 10^{16} \text{ см}^{-2}$	
		4,7	12
Ультрафиолетовый	23	6	2
Синий	32	18	3
Зеленый	16	8	2
Красный	14	1	0

По низкоэнергетическому фронту спектров электролюминесценции $I(h\nu) \sim \exp(h\nu/E_g)$ определены энергии Урбаха E_g , а по высокоэнергетическому фронту $I(h\nu) \sim \exp(-h\nu/kT)$ проведена оценка температуры электронной подсистемы T [5]. На рисунках 1, а, б приведены данные E_g, T для синих и красных светодиодов InGaN при различных флюенсах облучения и величине тока СИД 350 мА.

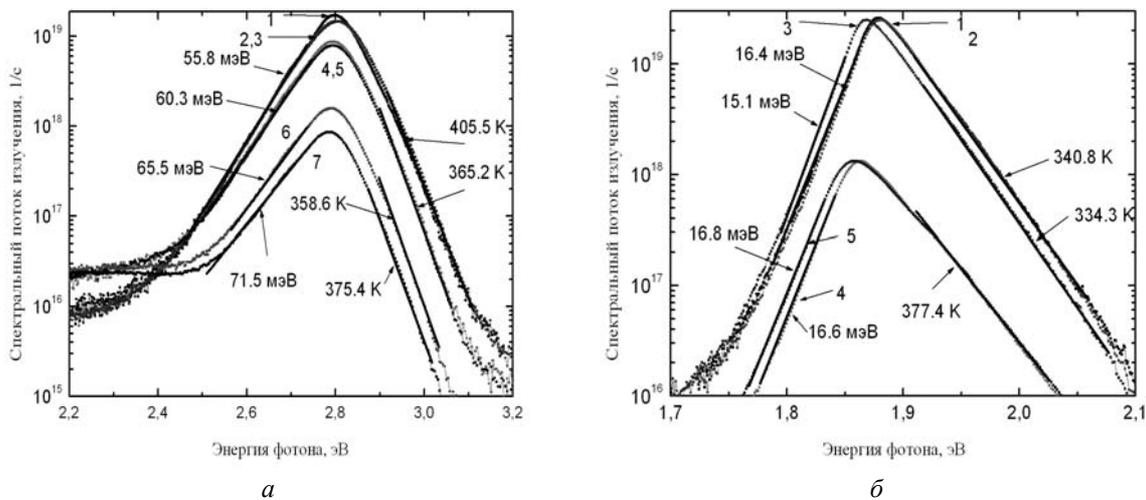


Рисунок 1– Зависимость потока излучения от энергии фотона (ток 350 мА):
 а – для синего СИД при флюенсах, см^{-2} : 1 – 0; 2, 3 – $5 \cdot 10^{15}$; 4 – $4,7 \cdot 10^{16}$; 5 – $4,6 \cdot 10^{16}$; 6, 7 – $1,2 \cdot 10^{17}$;
 б – для красного СИД при флюенсах, см^{-2} : 1 – 0; 2, 3 – $5 \cdot 10^{15}$; 4 – $4,7 \cdot 10^{16}$; 5 – $4,6 \cdot 10^{16}$

Как видно из рисунков 1, а, б, с увеличением флюенса облучения энергии Урбаха E_g у светодиодов на основе нитридов увеличиваются, а у светодиодов на основе фосфидов остаются постоянными. Энергию Урбаха связывают с локальными состояниями на гетерограницах (флуктуациями состава соединений, примесей, дефектов), поэтому можно предположить, что увеличение E_g объясняется увеличением дефектов на границах раздела. Этот фактор существенен для светодиодов на основе соединений InGaN , для которых хвосты плотности состояний и большие энергии Урбаха в большей степени обусловлены флуктуациями концентрации In .

С увеличением флюенса быстрых электронов температура электронной подсистемы T у светодиодов на основе нитридов уменьшается, что можно объяснить снижением числа рекомбинирующих излучательно электронов и, следовательно, понижением уровня возбуждения электролюминесценции. У красных СИД температура электронной подсистемы T увеличивается с флюенсом, так как светодиоды деградируют при облучении в большей степени, более сильное снижение их энергетической эффектив-

ности приводит к более сильному нагреву кристалла, что сказывается и на температуре электронной подсистемы. Кроме того, при наибольшем флюенсе облучения у всех светодиодов на основе GaN увеличилась спектральная плотность излучения в области ~ 2 эВ, которую обычно связывают с дефектами структуры в слоях СИД [6].

Необходимо отметить, что при длительной работе СИД, помимо оптической и электрической деградации их кристаллов из-за роста количества дефектов структуры, происходит также деградация полимерных линз СИД, формирующих определенную диаграмму направленности излучения. В данных исследованиях деградация полимерных линз происходит при облучении. В связи с этим необходимо рассмотреть влияние деградации полимерных линз СИД, вызванной облучением быстрыми электронами, на спектры электролюминесценции.

Спектры электролюминесценции при разных токах ультрафиолетового СИД, облученного быстрыми электронами, показаны на рисунке 2, а. На спектрах СИД с линзой наблюдаются две полосы. Одна из них с максимумом в интервале 3,08–3,09 эВ принадлежит основному излучению СИД, вторая (широкая) с максимумом в интервале $\sim 2,0$ – $2,1$ эВ связана с радиационными дефектами. После удаления линзы интенсивность основной полосы возрастает приблизительно в ~ 170 – 190 раз (в исследованном диапазоне токов). Это значит, что ультрафиолетовое излучение эффективно поглощается материалом линзы облученного СИД. Интенсивность второй полосы после удаления линзы, наоборот, уменьшается в несколько раз. В этом случае широкая полоса полностью обусловлена радиационными дефектами в кристалле СИД и представляет собой, вероятно, «желтую дефектную полосу», наблюдаемую в этом спектральном диапазоне в несовершенных кристаллах СИД на базе нитридов [6]. В связи с этим наиболее вероятной причиной увеличения интенсивности широкой полосы в облученных СИД при наличии линзы является фотолюминесценция радиационных дефектов материала линзы, возбуждаемая ультрафиолетовым излучением кристалла. При этом она наблюдается приблизительно в том же диапазоне спектра, что и «желтая дефектная полоса» в кристалле СИД. Необходимо отметить, что из-за наличия данной полосы, связанной с дефектами как в кристалле, так и линзе, свечение ультрафиолетового СИД становится подобным свечению белого, т.е. сильно изменяются цветовые координаты излучения.

Спектры электролюминесценции при разных токах зеленого СИД, облученного быстрыми электронами, показаны на рисунке 2, б. В отличие от ультрафиолетовых СИД в спектрах зеленых наблюдается одна полоса с максимумом в интервале 2,32–2,37 эВ (в зависимости от уровня возбуждения, определяемого током), принадлежащая основному излучению. Удаление линзы приводит лишь к небольшому ($\sim 1,5$ – 2 раза) возрастанию потока излучения в максимуме. Это значит, что повреждение линзы не сказывается существенным образом на эффективности излучения зеленого СИД. По-видимому излучение зеленого СИД не возбуждает люминесценцию радиационных дефектов материала линзы (имеющую максимум вблизи $\sim 2,0$ – $2,1$ эВ) ввиду близости к энергии основной полосы. Необходимо отметить, что «дефектная желтая полоса» кристалла лежит также в диапазоне излучения данного СИД и ее вклад мало заметен, в отличие, например, от ультрафиолетового или синего СИД.

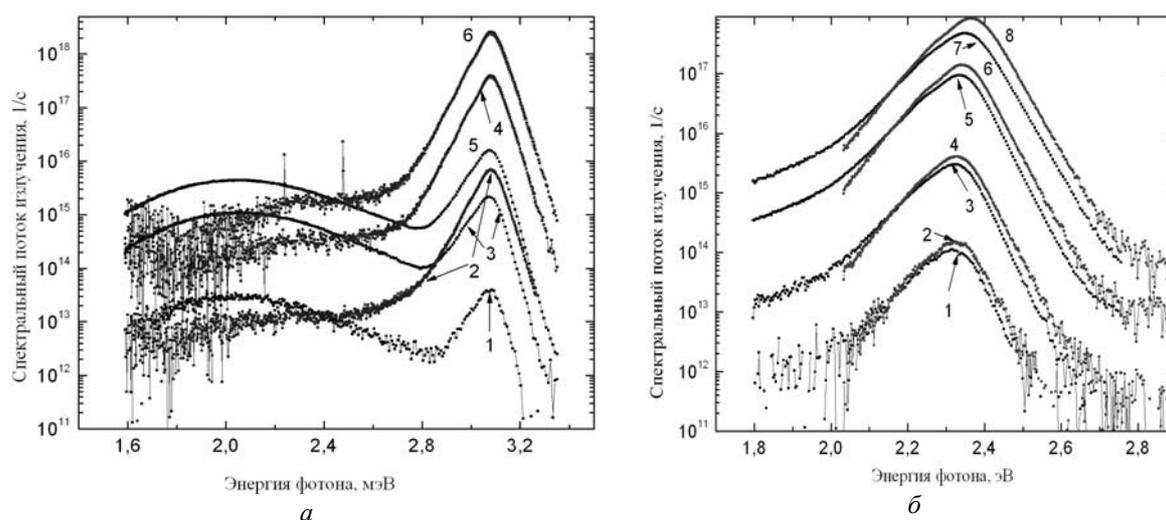


Рисунок 2 – Спектр электролюминесценции СИД, облученного флюенсом быстрых электронов $D = 1,2 \cdot 10^{17}$ см⁻²:
 а – ультрафиолетового: 1, 3, 5 – с линзой; 2, 4, 6 – без линзы; ток: 1, 2 – 10 мА; 3, 4 – 100 мА; 5, 6 – 350 мА;
 б – зеленого: 1, 3, 5, 7 – с линзой; 2, 4, 6, 8 – без линзы; ток: 1, 2 – 1 мА; 3, 4 – 10 мА; 5, 6 – 100 мА

Установлено, что деградация линз может приводить к отказу СИД вследствие образования проводящего канала по краю линзы и отражателя, приводящего к короткому замыканию электродов, т.е. шунтированию кристалла. На термограммах таких СИД между электродами отчетливо наблюдался разогрев проводящего канала по краю линзы. Вольтамперная характеристика СИД после отказа становится линейной с сопротивлением ~1–2 Ом. Отметим, что аналогичные отказы появлялись и при ускоренных тепловых испытаниях (температурах СИД порядка 130°C и токах 330 мА после 110 ч работы). Это свидетельствует о том, что облучение и сильный нагрев СИД во время работы приводят к примерно одинаковым последствиям – генерации дефектов, вызывающих деградацию электрических и оптических параметров СИД.

Вольтамперные характеристики исследованных синих и красных СИД HeIio приведены на рисунках 3, а, б. Анализ и подгонка ВАХ СИД на основе гетероструктур проведены на основе приближенного уравнения [7]:

$$U = \frac{mkT}{e} \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) + IR_s + CI^{0.5} + \phi_k \tag{1}$$

и его первых производных – dU/dI и $dU/d\ln I$ [8]:

$$\frac{dU}{dI} = \frac{mkT}{e} \frac{1}{I} + R_s + \frac{C}{2} I^{-0.5}, \tag{2}$$

$$\frac{dU}{d \ln I} = I \frac{dU}{dI} = \frac{mkT}{e} + IR_s + \frac{C}{2} I^{0.5}. \tag{3}$$

где m – фактор неидеальности диода, T – температура, I_0 – независящая от температуры доля тока насыщения, R_s – последовательное сопротивление, $CI^{0.5}$ – слагаемое, учитывающее двойную инжекцию и описывающее степенной участок ВАХ, ϕ_k – контактная разность потенциалов.

Необходимо отметить, что подгонка ВАХ только в рамках формулы (1) чаще всего является неоднозначной, ввиду наличия большого числа подгоночных параметров, поэтому определение параметров ВАХ СИД осуществлено на основе построения зависимостей напряжения U и производных по току dU/dI и $dU/d\ln I$ от I , $I^{1/2}$, I^1 , $I^{1/2}$, и анализа линейных участков полученных зависимостей. Из рисунка 3, а видно, что облучение приводит к снижению прямого напряжения смещения на СИД на основе нитридов, при этом сдвиг напряжения для синего и ультрафиолетового СИД достигал ~50 мВ, для зеленого ~75 мВ. Вероятно, это связано с повышением тока насыщения данных СИД в связи с увеличением при облучении количества ловушек в области пространственного заряда. Это подтверждается также увеличением малых прямых токов (в ~2 раза для синих и зеленых СИД и в ~1,5 раза для ультрафиолетового СИД) на участке ВАХ 1 мкА – 1 мА. Результаты анализа ВАХ СИД с использованием формул (1)–(3) приведены в таблице 2. Из таблицы 2 видно, что в ВАХ СИД на базе нитридов наблюдается небольшое ослабление инжекционной составляющей на максимальном флюенсе (увеличение коэффициента C), при этом фактор неидеальности экспоненциальной части ВАХ, контактная разность потенциалов СИД и последовательное сопротивление изменяются слабо.

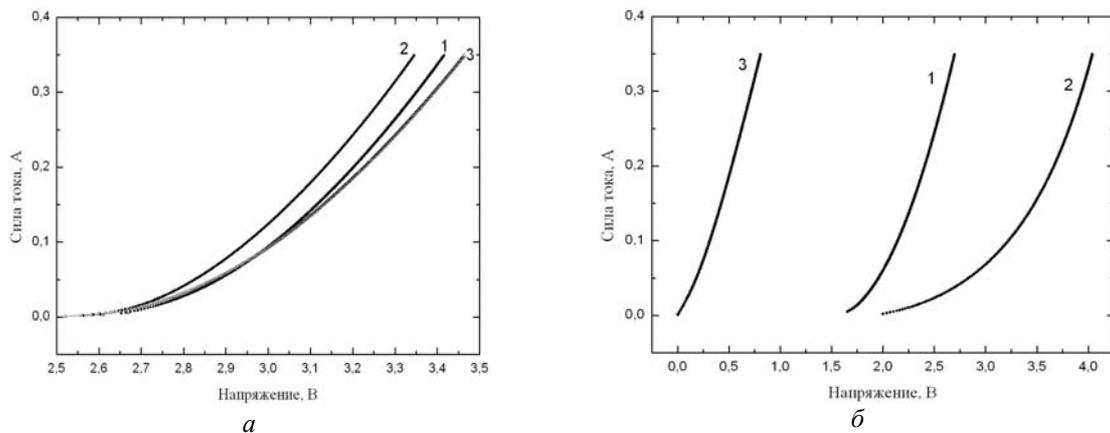


Рисунок 3 – Вольт амперная характеристика СИД при флюенсах быстрых электронов: а – синего; б – красного; 1 – исходный; 2 – $D = 4,7 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$; 3 – $D = 1,2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$

Изменения ВАХ красных СИД на основе фосфидов при облучении имеют противоположную тенденцию (рис. 3, б). Наблюдается сильное изменение ВАХ красного СИД, сильно увеличиваются контактная разность потенциалов, последовательное сопротивление и существенно уменьшается степенной участок ВАХ, соответствующий двойной инжекции. При этом на последнем флюэнсе ВАХ красного СИД имеет практически линейный наклон, соответствующий сопротивлению $R = \sim 1,5$ Ом. Сдвиг ВАХ в сторону высоких напряжений смещения при облучении красных диодов можно объяснить образованием на гетерограницах кристаллов СИД интерфейсных состояний с высокой поверхностной плотностью, вызывающих сильное повышение барьеров для носителей заряда.

Таблица 2 – Результаты анализа ВАХ

СИД	Исходный	Доза облучения, $D = 1,2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$
Ультрафиолетовый	$m = 2,7$ $C = 1,30 \text{ В/А}^{0,5}$ $\varphi_k = 2,78 \text{ В}$ $R_s = 0,42 \text{ Ом}$	$m = 2,7$ $C = 1,34 \text{ В/А}^{0,5}$ $\varphi_k = 2,74 \text{ В}$ $R_s = 0,35 \text{ Ом}$
Синий	$m = 2,0$ $C = 1,45 \text{ В/А}^{0,5}$ $\varphi_k = 2,56 \text{ В}$ $R_s = 0,14 \text{ Ом}$	$m = 2,1$ $C = 1,62 \text{ В/А}^{0,5}$ $\varphi_k = 2,51 \text{ В}$ $R_s = 0,14 \text{ Ом}$
Зеленый	$m = 1,6$ $C = 2,13 \text{ В/А}^{0,5}$ $\varphi_k = 1,90 \text{ В}$ $R_s = 0,91 \text{ Ом}$	$m = 1,7$ $C = 2,31 \text{ В/А}^{0,5}$ $\varphi_k = 1,80 \text{ В}$ $R_s = 0,93 \text{ Ом}$
Красный	$m = 2,5$ $C = 2,01 \text{ В/А}^{0,5}$ $\varphi_k = 1,51 \text{ В}$ $R_s = 0,06 \text{ Ом}$	– $C = 2,64 \text{ В/А}^{0,5}$ $\varphi_k = 2,49 \text{ В}$ $R_s = 0,36 \text{ Ом}$ (для дозы облучения $D = 4,7 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$)

С использованием метода переходных электрических процессов [9, 10] проведено исследование тепловых свойств (тепловых сопротивлений, сечений теплового потока) зеленых СИД HeLiO , облученных быстрыми электронами. Основные тепловые параметры образцов и режимы их измерения приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Параметры СИД и режимы их измерения

СИД	Доза облучения $D, \text{ см}^{-2}$		
	0	$4,7 \cdot 10^{16}$	$1,2 \cdot 10^{17}$
Сечение теплового потока (измерение при нагреве) $S_a, \text{ мм}^2$	0,62	0,49	0,51
Сечение теплового потока (измерение при остывании) $S_b, \text{ мм}^2$	0,98	0,85	0,83
Температурный коэффициент напряжения, мВ/К	5,64	3,95	4,54
Напряжение на СИД, В	3,7	3,84	4,06
Сила тока СИД, А	0,750	0,744	0,729
Энергетическая эффективность СИД, %	30	6	1,9
Температура перегрева активной области СИД, °С	26,1	32,1	37,6
Тепловое сопротивление СИД (включая слой посадки), К/Вт	9,72	11,46	11,86

Из таблицы 3 видно, что, несмотря на сильное уменьшение оптической мощности СИД, тепловые сопротивления компонентов СИД на основе нитридов лишь немного увеличились после облучения. В облученных образцах происходит сужение теплового потока при переходе через слой посадки кристалла на теплоотводящее основание и заметное изменение температурного коэффициента напряжения. Сужение теплового потока, вероятно, связано с уменьшением (в результате облучения) теплопроводности областей отражателя и теплоотводящего основания, незакрытых кристаллом СИД, что ухудшило условия растекания тепла.

С использованием облучения быстрыми электронами проведена деградация маломощных СИД Nichia синего свечения. С увеличением флюенса быстрых электронов свыше $1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ наблюдались достаточно сильные изменения в ВАХ (рис. 4) и видимое почернение линзы СИД (эпоксидная смола), сильно уменьшающее его оптическую мощность. Необходимо отметить, что существенной разницы в изменениях электрических и оптических параметров СИД от его положения при облучении (фронтальное или боковое) не наблюдалось. Флюенс, при котором наблюдался отказ СИД, составил $1,8 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$, при этом его ВАХ становилась линейной, сопротивление составило $\sim 10 \text{ кОм}$.

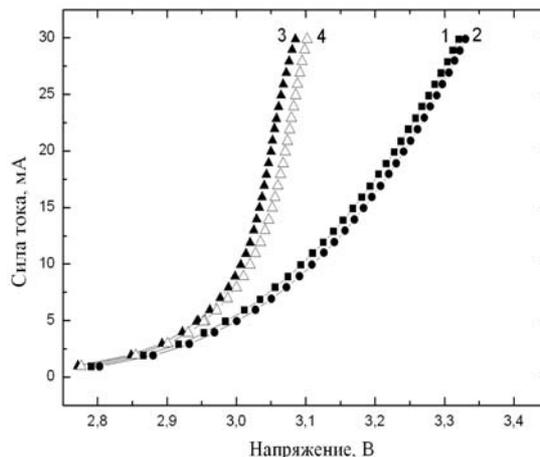


Рисунок 4 – Вольтамперная характеристика синего СИД Nichia после облучения быстрыми электронами: 1 – исходный; 2 – облученный флюенсом $4 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$; 3 – $5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$; 4 – $5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ (повторное измерение через 10 мин)

После облучения СИД Nichia с увеличением флюенса первоначально наблюдается смещение ВАХ в сторону больших напряжений смещения (см. рис. 4), затем после определенного флюенса (в области $\sim (3-5) \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$) для разных СИД одной партии происходит резкое смещение ВАХ в сторону низких напряжений. Вероятно, на первом этапе облучения происходит компенсация областей СИД радиационными дефектами, что приводит к увеличению последовательного сопротивления СИД. Второй этап, вероятно, обусловлен пробойными явлениями. На рисунке 4 видно, что ВАХ после больших флюенсов является нестабильной и для некоторых СИД может при больших токах проявлять отрицательное дифференциальное сопротивление, которое обусловлено разогревом СИД в области каналов пробоя.

Обнаружена особенность в спектрах электролюминесценции СИД и динамике их изменения после облучения небольшим флюенсом $1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$. На рисунке 5 видно существенное уменьшение спектрального потока излучения сразу же после облучения (мощность излучения уменьшилась в 2,6 раза), ВАХ СИД при этом практически не изменилась.

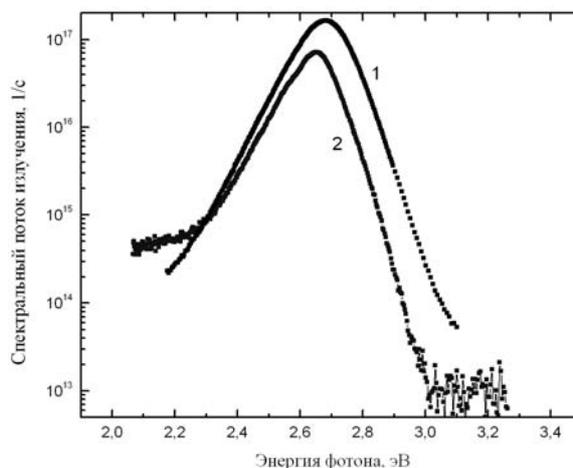


Рисунок 5 – Зависимость спектрального потока излучения от энергии фотона СИД Nichia до и после облучения быстрыми электронами: 1 – до облучения быстрыми электронами; 2 – после облучения быстрыми электронами флюенсом $1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$

Установлено (рис. 6 и 7), что в процессе работы облученного СИД оптическая мощность СИД постепенно возрастает и выходит на стабильные значения спустя 3–4 ч (возрастание достигает 50%).

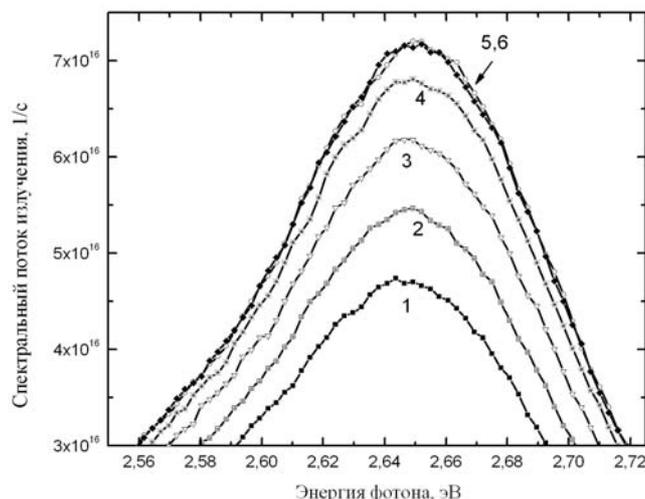


Рисунок 6 – Зависимость спектрального потока излучения облученного образца СИД Nichia (сила ток 20 мА) от энергии фотона для различных времен наработки. Время наработки в минутах: 1 – 0; 2 – 16,8; 3 – 54,1; 4 – 117,4; 5 – 166,5; 6 – 172,2

Форма спектра при этом практически не изменяется, однако длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности излучения, со временем работы СИД уменьшается (рис. 8).

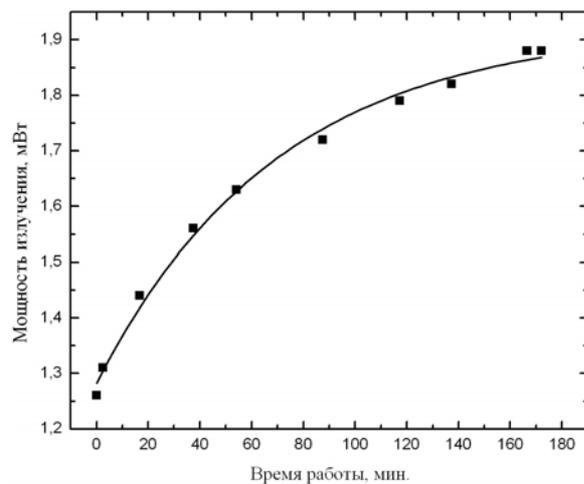


Рисунок 7 – Зависимость мощности излучения облученного СИД Nichia от времени работы

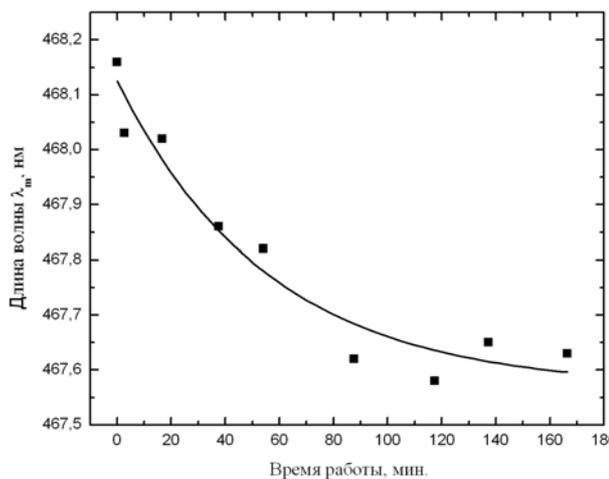


Рисунок 8 – Зависимость длины волны, соответствующей максимальному значению спектральной плотности потока излучения облученного СИД Nichia, от времени работы

Примечание. Сплошная линия (рис. 7 и 8) представляет результат подгонки в рамках мономолекулярной реакции.

Эту особенность можно объяснить повышением уровня возбуждения СИД, что, в свою очередь, связано с отжигом во время работы радиационных дефектов, вносимых облучением. Кинетика восстановления как оптической мощности СИД, так и длины волны, соответствующая максимуму спектральной плотности излучения, имеет экспоненциальный вид, характерный для мономолекулярной реакции первого порядка с постоянной времени $\tau = 70$ мин. Такое поведение связано, вероятнее всего, с инъекционно стимулированным и/или светоиндуцированным отжигом введенных электронным облучением дефектов структуры СИД.

Заключение. Исследовано влияние облучения быстрыми электронами (4 МэВ, флюенсами до $1,2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$) на электрические и оптические свойства мощных синих, зеленых, красных и ультрафиоле-

товых СИД Helio (1 Вт), а также маломощных СИД Nichia (90 мВ) на основе соединений InGaN и AlInGaP. Установлены закономерности изменений при облучении в ВАХ и спектров электролюминесценции СИД. Обнаружено изменение в спектрах электролюминесценции ультрафиолетовых и синих СИД, связанное возбуждением в люминесценции в поврежденных облучением полимерных линзах СИД. Обнаружено восстановление в процессе работы оптической мощности облученных СИД на основе нитридов с кинетикой, характерной для мономолекулярной реакции первого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гриндин, Н.В. Исследование воздействия быстрых нейтронов и электронов на светодиоды с белым и синим цветом свечения / Н.В. Гриндин., И.В. Рыжиков, В.С. Виноградов // Известия вузов. Электроника. – 2009. – Т. 76, № 1. – С. 27–32.
2. Hwang, Y. Effect of electron irradiation on AlGaIn/GaN and InAlN/GaN heterojunctions / Ya-Shi Hwang [et al.] // J. Vac. Sci. Technol. B. – 2013. – Vol. 31. – P. 022206/1-1022206/6.
3. Градобоев, А.В. Деградация светодиодов на основе гетероструктур InGaIn/GaN при облучении гамма-квантами / А.В. Градобоев, П.В. Рубанов, И.М. Скакова // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2014. – № 1. – С. 190–194.
4. Павленко, В.И. Воздействие высокоэнергетических пучков быстрых электронов на полимерные радиационно-защитные композиты / В.И. Павленко [и др.] // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика радиационных повреждений и радиационное материаловедение (95). – 2010. – № 1. – С. 129–134.
5. Шуберт, Ф. Светодиоды / пер. с англ. под ред. А.Э. Юновича – М. : Физматлит. 2008. – 496 с.
6. Юнович, А.Э. Дивакансия азота возможная причина желтой полосы в спектрах люминесценции нитрида галлия / А.Э. Юнович // ФТП. – 1998. – Т. 32, Вып. 10. – С. 1181–1183.
7. Мамакин, С.С. Электрические свойства и спектры люминесценции светодиодов на основе гетеропереходов InGaIn/GaN с модулированно-легированными квантовыми ямами / А.Э. Юнович, А.Б. Ваттана, Ф.И. Маняхин // ФТП. – 2003. – Т. 37, Вып. 9. – С. 1131–1137.
8. Бумай Ю.А. Температурные изменения импульсных вольт-амперных характеристик GaN светодиодов / Ю.А. Бумай [и др.] // Сборник материалов 2-ой междунар. науч.-техн. конф. БНТУ, ПСФ «Приборостроение – 2009», Минск, 11-13 нояб. 2009 г. – Минск : БНТУ, 2009. – С. 262–263.
9. Bumai, Y.A. Measurement and analysis of thermal parameters and efficiency of laser heterostructures and light-emitting diodes / Y.A. Bumai, A.S. Vaskou, V.K. Kononenko // Metrology and Measurement Systems. – 2010. – Vol. 17, № 1. – P. 39–46.
10. Zakgeim, A.L. Comparative Analysis of the Thermal Resistance Profiles of Power Light-Emitting Diodes Cree and Rebel Types / A.L. Zakgeim [et al.] // EuroSimE 2013 : 14th International Conference on Thermal, Mechanical and Multi-Physics Simulation and Experiments in Microelectronics and Microsystems. – 2013. – № 1. – P. 1/7–7/7.

OPTICAL AND ELECTRICAL PROPERTIES OF GETEROSTRUCTURE BASED LIGHT EMMITING DIDODES AFTER FAST ELECTRON IRRADIATION

**Y. BUMAI, D. BOBUCHENKO, A. VASKOW, S. VABISHCHEVICH,
S. LASTOVSKII, U. TROPHIMOV, V. ZVIRKO**

An influence of fast electron irradiation (4 MeV) on the electrical and optical properties of light emitting diodes (LEDs) on the basis of nitride and phosphide heterostructures have been studied. The features of volt-ampere characteristics, electroluminescence spectra and thermal characteristics of LEDs after irradiation have been established. The wide band at ~ 2 eV in electroluminescence spectra of ultraviolet and blue LED related to polymer lens damage has been found. The recovery of optical power during LED operating following to monomolecular first order reaction has been observed.

УДК 621.383.92

ВЛИЯНИЕ ПОСЛЕИМПУЛЬСНЫХ ЯВЛЕНИЙ НА КОЭФФИЦИЕНТ ШУМА ЛАВИННОГО ФОТОПРИЕМНИКА В РЕЖИМЕ СЧЕТА ФОТОНОВ

канд. физ.-мат. наук **О.К. БАРАНОВСКИЙ**, д-р техн. наук, проф. **А.О. ЗЕНЕВИЧ**, **О.Ю. ГОРБАДЕЙ**
(Высший государственный колледж связи, Минск)

Предложены выражения для определения коэффициента шума лавинного фотоприемника, работающего в режиме счета фотонов, с учетом образования послеимпульсов и проявления эффекта мертвого времени фотоприемника. Выполнены измерения коэффициента шума лавинного фотоприемника в зависимости от напряжения питания, температуры окружающей среды, мощности регистрируемого оптического излучения.

Введение. Для регистрации стационарных оптических потоков с мощностью, меньшей либо равной 10^{-12} Вт, широко используются счетчики фотонов на основе лавинных фотоприемников (ЛФП) [1, 2]. Регистрируемое оптическое излучение поступает на вход счетчика фотонов совместно с фоновым излучением. Для любого оптического излучения наблюдаются флуктуации мощности [3], поэтому оптическое излучение регистрируется в присутствии собственных шумов и шумов, создаваемых фоновым излучением. Фотоприемник счетчика фотонов, вследствие происходящих в нем физических процессов, вносит дополнительные шумы [1, 2]. Это приводит к тому, что отношение сигнал/шум на выходе счетчика фотонов уменьшается по сравнению с его значением на входе. Чтобы определить во сколько раз происходит понижение отношения сигнал/шум, используется параметр – коэффициент шума F [4].

Величина отношения сигнал/шум на выходе счетчика фотонов зависит от таких характеристик фотоприемника, как квантовая эффективность регистрации, скорость счета темновых импульсов, вероятность образования послеимпульсов, длительность мертвого времени. При изменении напряжения питания, температуры окружающей среды, мощности регистрируемого оптического излучения указанные характеристики фотоприемника могут изменяться, что должно оказывать влияние на результирующее значение коэффициента шума. Однако до настоящего времени в литературе отсутствовали сведения о подобных исследованиях, в связи с этим целью данной работы является установление теоретических и экспериментальных зависимостей F ЛФП от указанных характеристик.

Модель лавинного фотоприемника. Предположим, что на вход ЛФП, работающего в режиме счета фотонов, поступает стационарный оптический поток, формируемый фотонами сигнального оптического излучения с постоянной мощностью и фонового излучения. Под оптическим информационным сигналом будем понимать постоянную составляющую сигнального оптического излучения, а его шум – определять флуктуациями числа фотонов сигнального оптического излучения и фонового излучения. Вероятность образования послеимпульсов для импульсов, образованных в ЛФП как сигнальным оптическим излучением, так и фоновым излучением, одинакова. Квантовая эффективность регистрации ЛФП зависит от скорости счета смеси фоновых, темновых и сигнальных импульсов из-за проявления эффекта мертвого времени.

С учетом предположений можно записать отношение сигнал/шум ρ_0 для поступающего на фотоприемник оптического информационного сигнала:

$$\rho_0 = \frac{\langle N_\phi \rangle^2}{D_\phi + D_{ш}},$$

где $\langle N_\phi \rangle$ – среднее число фотонов, образованных сигнальным оптическим излучением, попавших на фотоприемник за время измерения t ; D_ϕ и $D_{ш}$ – дисперсия числа фотонов, образованных сигнальным оптическим излучением, N_ϕ и числа фотонов фонового излучения $N_{ш}$ соответственно.

С учетом дисперсионной теоремы Бурже [5] на выходе фотоприемника с квантовой эффективностью регистрации η , вероятностью образования послеимпульсов Z и средним числом темновых импульсов $\langle N_m \rangle$, зарегистрированных за время измерения t , отношение сигнал/шум ρ_1 можно записать в виде [1]

$$\rho_1 = \frac{\eta^2 \langle N_\phi \rangle^2}{\frac{Z\eta + \eta(1-\eta)}{(1-Z)^2} \langle N_\phi \rangle + \frac{\eta^2}{(1-Z)^2} D_\phi + \frac{Z\eta + \eta(1-\eta)}{(1-Z)^2} \langle N_{ш} \rangle + \frac{\eta^2}{(1-Z)^2} D_{ш} + D_m},$$

где D_m – дисперсия числа темновых импульсов N_m ; $\langle N_{ш} \rangle$ – среднее число фотонов фонового излучения.

Соответственно, коэффициент шума ЛФП

$$F = \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{\frac{Z\eta + \eta(1-\eta)}{(1-Z)^2} (\langle N_\phi \rangle + \langle N_{uu} \rangle) + \frac{\eta^2}{(1-Z)^2} (D_\phi + D_{uu}) + D_m}{\eta^2 (D_\phi + D_{uu})}. \quad (1)$$

Для ЛФП, работающего в режиме счета фотонов, наблюдается промежуток времени после формирования темнового или сигнального импульса, в течение которого он нечувствителен к падающему на него оптическому излучению. Этот промежуток времени называется мертвым временем. Фотон излучения, поступающий на ЛФП в течение мертвого времени, не будет зарегистрирован, поэтому необходимо учитывать влияние мертвого времени на коэффициент шума. Для этого введем вероятность регистрации импульса P . Величина P зависит от типа мертвого времени. Вероятность регистрации импульса для постоянного типа ЛФП в течение мертвого времени, согласно [1], имеет вид

$$P = \frac{1}{1 + (n_c + n_{uu} + n_m) \tau_m}, \quad (2)$$

где n_c, n_{uu}, n_m – скорости счета сигнальных, фоновых и темновых импульсов; τ_m – длительность мертвого времени.

Для прудлевающегося мертвого времени, согласно [1], P примет вид

$$P = \exp(-(n_c + n_{uu} + n_m) \tau_m). \quad (3)$$

Тогда выражение (1) можно записать следующим образом:

$$F = \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{\frac{Z\eta P + \eta P(1-\eta P)}{(1-Z)^2} (\langle N_\phi \rangle + \langle N_{uu} \rangle) + \frac{\eta^2 P^2}{(1-Z)^2} (D_\phi + D_{uu}) + D_m}{\eta^2 P^2 (D_\phi + D_{uu})}. \quad (4)$$

Рассмотрим случай, когда статистика фотонов регистрируемого и фонового излучения определяется распределением Пуассона. В этом случае формулу (4) можно записать в виде

$$F = \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{(1+Z)\eta P (\langle N_\phi \rangle + \langle N_{uu} \rangle) + D_m}{\eta^2 P^2 (\langle N_\phi \rangle + \langle N_{uu} \rangle) (1-Z)^2}. \quad (5)$$

При охлаждении лавинных фотоприемников до температуры жидкого азота число темновых импульсов, зарегистрированных за время измерения t , можно пренебречь [2]. Тогда выражение (5) будет иметь вид

$$F = \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{(1+Z)}{\eta P (1-Z)^2}. \quad (6)$$

В случае, когда $\langle N_\phi \rangle \gg \langle N_{uu} \rangle$, фоновым излучением можно пренебречь, коэффициент шума ЛФП определяется выражением

$$F = \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{(1+Z)\eta P \langle N_\phi \rangle + D_m}{\eta^2 P^2 \langle N_\phi \rangle (1-Z)^2}. \quad (7)$$

В формуле (7) перейдем от $\langle N_\phi \rangle$ к $\langle N_c \rangle$, где $\langle N_c \rangle$ – среднее число импульсов на выходе ЛФП, зарегистрированных за время t , образованных фотонами регистрируемого оптического излучения. Для этого перехода воспользуемся работой [1], согласно которой $\langle N_\phi \rangle = \langle N_c \rangle (1-Z)\eta^{-1}$. Тогда (6) перепишем в следующем виде:

$$F = \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{1}{\eta P^2 (1-Z)^3} \left((1-Z^2) P + \frac{D_m}{\langle N_c \rangle} \right). \quad (8)$$

При $\langle N_c \rangle \gg D_m$ значение коэффициента шума, определяемого по формуле (8), приближается к величине F , полученной на основании выражения (6).

Описание установки и методика эксперимента. Блок-схема экспериментальной установки приведена на рисунке 1. Объектом исследования являются кремниевые лавинные фотодиоды ФД-115Л, применяемые в счетчиках фотонов в качестве ЛФП.

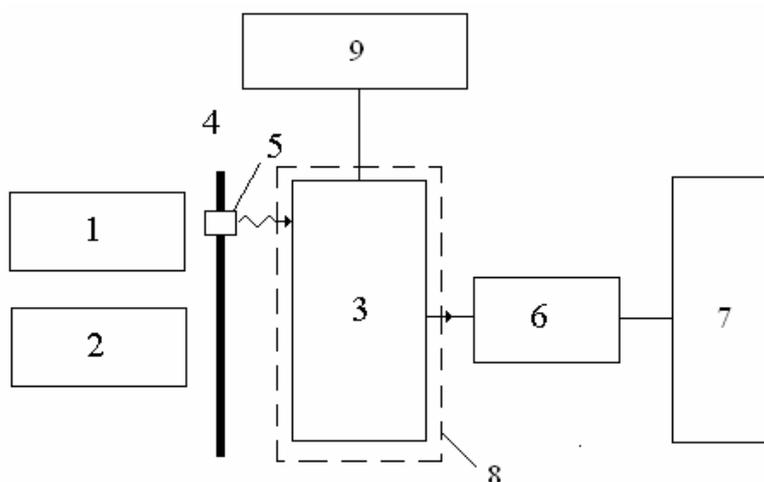


Рисунок 1 – Блок-схема установки для измерения коэффициента шума:

- 1 – источник излучения с пуассоновской статистикой фотонов; 2 – источник излучения с непуассоновской статистикой фотонов; 3 – лавинный фотоприемник; 4 – шторка; 5 – отверстие с ирисовой диафрагмой; 6 – счетчик импульсов; 7 – компьютер; 8 – холодильная камера; 9 – блок управления режимами работы лавинного фотоприемника

Установка состоит из двух источников излучения 1 и 2, укрепленных на оптической скамье и находящихся в светонепроницаемом кожухе напротив ЛФП 3. Между источниками 1 и 2 и ЛФП 3 находится шторка 4 с отверстием 5, обеспечивающая возможность поочередного открывания источников 1 и 2, а также перекрытия излучения от обоих источников. К выходу ЛФП 3 подключен счетчик импульсов 6, выход которого соединен с компьютером 7.

Лавинный фотоприемник работает в режиме счета фотонов. Для реализации режима счета фотонов используют две схемы включения ЛФП: схема пассивного гашения и схема активного гашения лавинного пробоя [1]. При включении по схеме пассивного гашения лавинного пробоя ЛФП имеет мертвое время прудлевающегося типа длительностью 1 мкс. При включении по схеме активного гашения лавинного пробоя ЛФП имеет мертвое время постоянного типа длительностью 0,5 мкс.

При проведении измерений средние числа фотонов, падающих на ЛФП от источников 1 и 2, подбираются одинаковыми. Источник 1 характеризуется пуассоновской статистикой фотонов, источник 2 – статистикой фотонов, для которой дисперсия фотонов больше пуассоновской в $k > 1$ раз (непуассоновская статистика). Перед началом измерений в память компьютера 7 заносят данные о значении k .

Вначале проводится измерение дисперсии темновых импульсов, при этом оптическое излучение от источников 1 и 2 перекрывается ирисовой диафрагмой, встроенной в отверстие 5. Далее начинают измерения числа темновых импульсов с выхода ЛФП счетчиком 6. С помощью компьютера выполняют их усреднение, параллельно вычисляют средний квадрат числа темновых импульсов $\langle N_m^2 \rangle$, затем – дисперсию числа отсчетов темновых импульсов по формуле

$$D_m = \langle N_m^2 \rangle - \langle N_m \rangle^2.$$

Через отверстие 5 на ЛФП подают излучение от пуассоновского источника фотонов 1, интенсивность которого регулируют ирисовой диафрагмой. В этом положении начинают измерения числа импульсов с выхода ЛФП 3 счетчиком 6. С помощью компьютера производят их усреднение, параллельно вычисляют средний квадрат числа отсчетов $\langle N^2 \rangle$ и квадрат среднего $\langle N \rangle^2$, после этого рассчитывают дисперсию числа отсчетов $D = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$ и скорость счета импульсов $n = \langle N \rangle / t$.

Затем определяют среднее число сигнальных импульсов как разность $\langle N_c \rangle = \langle N \rangle - \langle N_m \rangle$ и дисперсию сигнальных импульсов как разность $D_c = D - D_m$.

Вероятность образования послеимпульсов вычисляется согласно [1]:

$$Z = \frac{D_c - \langle N_c \rangle}{D_c + \langle N_c \rangle}.$$

Затем отверстие 5 перемещают таким образом, чтобы на ЛФП 3 поступало излучение от источника 2. После этого измеряют число импульсов с выхода ЛФП 3 с использованием счетчика 6, с помощью компьютера производят их усреднение. Параллельно вычисляют среднее значение квадрата числа отсчетов $\langle NI^2 \rangle$ и квадрат среднего $\langle NI \rangle^2$, затем – дисперсию числа отсчетов

$$DI = \langle NI \rangle^2 - \langle NI^2 \rangle.$$

Среднее число сигнальных импульсов определяют как разность $\langle NI_c \rangle = \langle NI \rangle - \langle N_t \rangle$, а дисперсию – как разность $DI_c = DI - D_m$.

Квантовую эффективность регистрации ЛФП рассчитывают согласно [1]:

$$\eta = \frac{(1-Z) \frac{DI_c}{\langle N_c \rangle} - 1 - Z}{k - 1}.$$

Определение типа и длительности мертвого времени τ_m осуществляют на основании способа, описанного в работе [1]. По формулам (2) и (3) определяют вероятность регистрации для мертвого времени постоянного и продлевающегося типа соответственно. При этом считают, что $n = n_c + n_{ш} + n_t$.

На основании рассчитанных квантовой эффективности регистрации η , вероятностей образования послеимпульсов Z и регистрации импульса P , дисперсии числа темновых импульсов D_t и среднего числа сигнальных импульсов от пуассоновского источника фотонов $\langle N_c \rangle$ по формуле (8) определяют значение коэффициента шума F .

При проведении измерений варьировалось перенапряжение ЛФП $\Delta U = U_n - U_{пр}$ (U_n – напряжение обратного смещения ЛФП, $U_{пр}$ – напряжение пробоя ЛФП), рабочая температура ЛФП, мощность и длина волны оптического излучения. Для оценки зависимостей использовали ΔU , поскольку исследуемые ЛФП имеют различное напряжение пробоя при различных температурах. В процессе измерений мощность фонового излучения была минимизирована до уровня, при котором ею можно пренебречь. Измерения зависимостей коэффициента шума от перенапряжения, мощности оптического излучения, характеристик ЛФД выполнены для источника излучения с пуассоновской статистикой фотонов. Время измерения составляло $t = 1$ с, при этом относительная погрешность измерения не превышала 5%.

Экспериментальные результаты и их обсуждение. Измеренные зависимости коэффициента шума ЛФП от перенапряжения ΔU приведены на рисунке 2. При этом получено, что понижение температуры приводит к увеличению вероятности образования послеимпульсов. Так, при температуре $T = 300$ К максимальное значение вероятности $Z = 0,09$, а при $T = 233$ К максимальное значение вероятности $Z = 0,17$. Измерения вероятности образования послеимпульсов были выполнены для длины волны оптического излучения $\lambda = 680$ нм и мощности $0,8 \cdot 10^{-12}$ Вт. Квантовая эффективность регистрации увеличивалась от 0,001 до 0,06 с ростом ΔU при $T = 300$ К и от 0,076 до 0,11 при $T = 233$ К. Кроме того, увеличивалась дисперсия темновых импульсов от $3 \cdot 10^5$ до 10^6 с ростом перенапряжения при $T = 300$ К и от 10^4 до $4 \cdot 10^5$ при $T = 233$ К.

Как видно из рисунка 2, коэффициент шума возрастает с увеличением перенапряжения при температуре $T = 233$ К.

Это связано с тем, что в измеряемом диапазоне перенапряжений при температуре $T = 233$ К происходил рост вероятности образования послеимпульсов от 0,13 до 0,18 и дисперсии темновых импульсов. Именно эти факторы играют определяющую роль в увеличении коэффициента шума с ростом ΔU для мертвого времени как постоянного, так и продлевающегося типа.

При температуре $T = 300$ К происходило уменьшение коэффициента шума в диапазоне перенапряжений от 0,1 до 0,2 В (см. рис. 2). Это вызвано как уменьшением вероятности образования послеимпульсов, так и увеличением квантовой эффективности регистрации. Уменьшение вероятности регистрации импульсов начинает проявляться при $\Delta U > 0,2$ В, что приводило к незначительному увеличению коэффициента шума по сравнению со значениями в диапазоне перенапряжений от 0,1 до 0,2 В (см. рис. 2).

Изменение типа мертвого времени с продлевающегося на постоянное с уменьшением длительности приводит к повышению вероятности регистрации импульсов и, как следствие, к уменьшению коэф-

фициента шума (см. рис. 2). Необходимо отметить, что учет вероятности образования послеимпульсов существенно влияет на рассчитываемое значение F . Так, относительная погрешность определения F без учета вероятности образования послеимпульсов по сравнению с её учетом составляла 32% при температуре $T = 233$ К и $\Delta U = 0,1$ В, а при температуре $T = 300$ К и $\Delta U = 0,1$ В – 23% для мертвого времени постоянного типа.

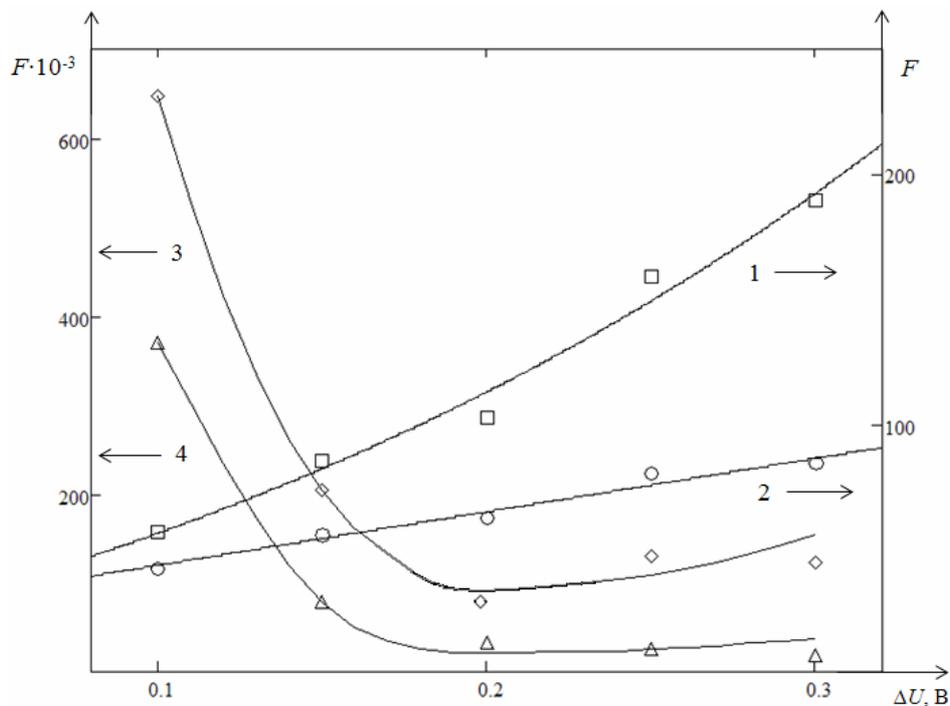


Рисунок 2 – Зависимость коэффициента шума от величины перенапряжения лавинного фотоприемника:
 1 – для мертвого времени продлевающегося типа при температуре $T = 233$ К;
 2 – для мертвого времени постоянного типа при температуре $T = 233$ К;
 3 – для мертвого времени продлевающегося типа при температуре $T = 300$ К;
 4 – для мертвого времени постоянного типа при температуре $T = 300$ К

Понижение температуры приводит к значительному уменьшению коэффициента шума для мертвого времени продлевающегося типа ($\Delta U = 0,2$ В):

- $F = 2,6 \cdot 10^4$ при температуре $T = 300$ К;
- $F = 71$ при $T = 233$ К.

Это связано с тем, что при уменьшении температуры увеличивается квантовая эффективность регистрации, понижается скорость счета темновых импульсов. Отмечено, что уменьшение скорости счета темновых импульсов привело к уменьшению дисперсии темновых импульсов и увеличению вероятности регистрации импульса.

Исследованы зависимости коэффициента шума от мощности оптического излучения при $\Delta U = 0,2$ В и двух температурах 233 и 300 К. Измерения коэффициента шума проведены для мощностей оптического излучения от $1,5 \cdot 10^{-15}$ Вт и выше для длины волны $\lambda = 680$ нм.

Вероятность образования послеимпульсов:

- $Z = 0,06$ при $T = 300$ К;
- $Z = 0,16$ при $T = 233$ К.

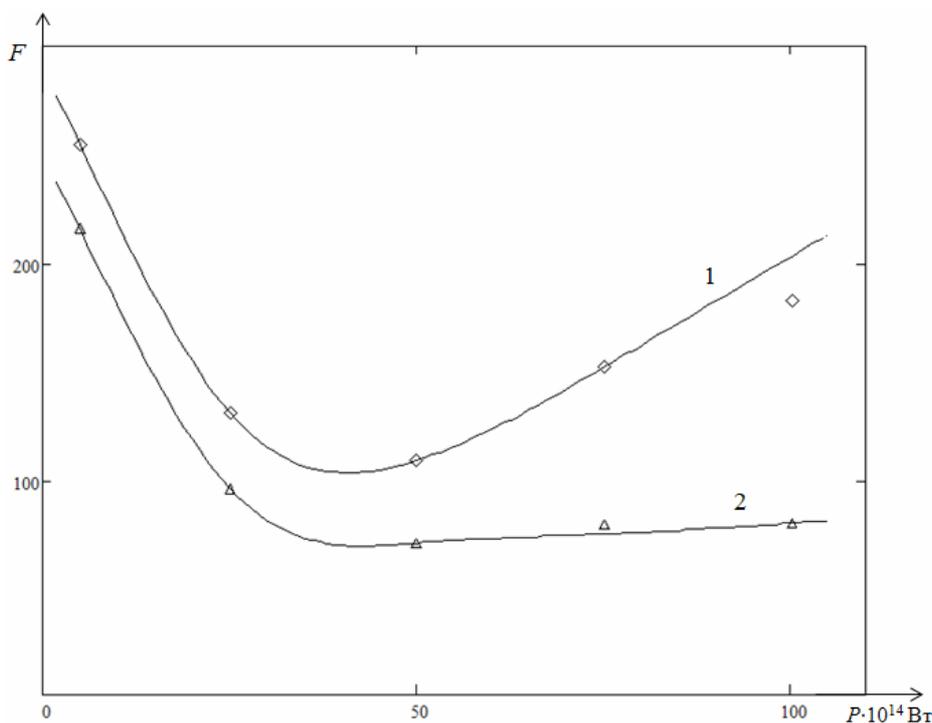
Квантовая эффективность регистрации:

- $\eta = 0,005$ при $T = 300$ К;
- $\eta = 0,09$ при $T = 233$ К.

Дисперсия темновых импульсов D_m составляла $9 \cdot 10^5$ и $3 \cdot 10^5$ при температурах 300 и 233 К соответственно.

Зависимости коэффициента шума от мощности оптического излучения для исследуемых температур имели схожий вид, поэтому на рисунке 3 представлены зависимости при $T = 233$ К. С увеличением мощности оптического излучения наблюдалось сначала уменьшение, а затем увеличение коэффициента шума. С увеличением мощности оптического излучения от $1,5 \cdot 10^{-15}$ до $4,0 \cdot 10^{-13}$ Вт скорость счета сиг-

нальных импульсов изменяется от $4,5 \cdot 10^2$ до $1,2 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ при температуре $T = 233 \text{ К}$. В этом интервале мощностей вероятность регистрации импульсов изменяется от 0,96 до 0,70 для мертвого времени продлевающегося типа, для постоянного типа – от 0,99 до 0,84. При этом уменьшение вероятности P в таком диапазоне мощности оптического излучения незначительно влияет на результирующее значение F . Увеличение скорости счета сигнальных импульсов в этом случае, согласно (8), приводит к уменьшению коэффициента шума. При увеличении мощности оптического излучения от $4,0 \cdot 10^{-13}$ до $1,0 \cdot 10^{-12} \text{ Вт}$ вероятность регистрации импульсов уменьшается от 0,70 до 0,44 для мертвого времени продлевающегося типа и от 0,84 до 0,71 для постоянного типа, что связано с проявлением эффекта мертвого времени. Величина среднего интервала между импульсами (обратная величина скорости счета сигнальных импульсов) приближается к значениям величины мертвого времени. В связи с этим замедляется рост скорости счета сигнальных импульсов. В результате коэффициент шума увеличивается. Наиболее существенно это проявляется для мертвого времени продлевающегося типа.



**Рисунок 3 – Зависимость коэффициента шума лавинного фотоприемника от мощности регистрируемого оптического излучения температуре $T = 233 \text{ К}$:
1 – для мертвого времени продлевающегося типа; 2 – для мертвого времени постоянного типа**

В таблице представлены значения коэффициента шума, полученные для трех длин волн оптического излучения при двух температурах 233 и 300 К и мертвом времени продлевающегося типа. Увеличение длины волны приводит к росту квантовой эффективности регистрации, увеличению вероятности образования послеимпульсов и уменьшению коэффициента шума. Из полученных результатов следует, что изменение коэффициента шума в большей степени обусловлено изменением квантовой эффективности регистрации ЛФП, чем изменением вероятности образования послеимпульсов.

Таблица – Характеристики лавинного фотоприемника

Перенапряжение, В	Мощность оптического излучения, Вт	Длительность мертвого времени, мкс	Длина волны, мкм	Температура, К	Квантовая эффективность	Вероятность образования после импульсов	Дисперсия темновых импульсов	Коэффициент шума
0,2	$0,8 \cdot 10^{-12}$	1	0,53	233	0,10	0,11	$3 \cdot 10^5$	79
				300	0,005	0,01	$9 \cdot 10^5$	107998
			0,68	233	0,12	0,16	$3 \cdot 10^5$	71
				300	0,010	0,06	$9 \cdot 10^5$	25601
			0,93	233	0,16	0,21	$3 \cdot 10^5$	68
				300	0,015	0,11	$9 \cdot 10^5$	10503

Заключение. Получены выражения для определения коэффициента шума ЛФП, используемых в счетчиках фотонов, с учетом вероятности образования послеимпульсов и вероятности регистрации импульса, определяемой влиянием мертвого времени ЛФП различного типа в зависимости от схемы гашения лавины ЛФП. Для случая пуассоновского потока фотонов сигнального и фонового излучений учтены зависимости дисперсии темновых импульсов и скорости счета сигнальных импульсов.

Определено, что изменение коэффициента шума в большей степени обусловлено изменением квантовой эффективности регистрации ЛФП, чем изменением вероятности образования послеимпульсов.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор № Т14М-130).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гулаков, И.Р. Фотоприемники квантовых систем / И.Р. Гулаков, А.О. Зеневич. – Минск : УО ВГКС, 2012. – 276 с.
2. Ветохин, С.С. Одноэлектронные фотоприемники / С.С. Ветохин [и др.]. – М. : Энергоатомиздат, 1986. – 160 с.
3. Ахманов, С.А. Введение в статистическую радиофизику и оптику / С.А. Ахманов, Ю.Е. Дьяков, А.С. Чиркин. – М. : Наука, 1981. – 640 с.
4. Робинсон, Ф.Н.Х. Шумы и флуктуации в электронных схемах и цепях. / Ф.Н.Х. Робинсон. – М. : Атомиздат, 1980. – 254 с.
5. Перина, Я. Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений / Я. Перина. – М. : Мир, 1987. – 368 с.

Поступила 26.06.2015

THE EFFECT OF ATERPULSES PHENOMENA ON NOISE FACTOR OF AVALANCHE PHOTODETECTOR OPERATING IN PHOTON COUNTING MODE

A. BARANOUSKI, A. ZENEVICH, O. GORBADEY

The expressions for determination of the noise factor for avalanche photodetector operating in photon counting mode are proposed. This expressions include the effect of afterpulses and dead time of photodetector. The silicon avalanche photodetectors noise factor depending on the supply voltage, ambient temperature, the power of registered optical radiation are measured.

УДК 621.371:550.837.6

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ
С АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДОЙ ПЛАЗМОПОДОБНОГО ТИПА**

*канд. техн. наук, доц. В.Ф. ЯНУШКЕВИЧ, К.И. КРЕМЕНЯ
(Полоцкий государственный университет);
Е.Ю. ЗАЯЦ*

(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск)

Рассмотрены вопросы применения модулированных сигналов для поиска и выделения анизотропных сред плазмopodobного типа. Исследовано физическое моделирование взаимодействия электромагнитных волн с углеводородными залежами. Анализ проведен с применением электродинамического подхода, основанного на использовании квазигидродинамического приближения. Проведены лабораторные исследования взаимодействия амплитудно-модулированных сигналов на модели среды с включением нефти, находящейся под слоем почвы, соответствующей песчано-алевритовым фракциям. Измерены амплитудные и фазовые характеристики электромагнитных волн. Используется вертикальная поляризация зондирующих сигналов. Рассмотрен широкий диапазон используемых частот. Вариация характеристик зондирующих сигналов позволяет повысить информативность поиска. Полученные результаты лабораторных исследований позволяют дать рекомендации по разработке электромагнитных методов поиска, а также могут быть использованы в поисковой геофизике.

Введение. Для изучения физических процессов, происходящих на реальных месторождениях, используется моделирование. В геофизике моделирование проводят на образцах горных пород, отобранных в скважинах, шахтах, штольнях и т.д. С помощью образцов моделируют процессы фильтрации флюидов, электромагнитные, тепловые, диффузионные, ядерные, акустические и другие природные процессы. В некоторых случаях создают модели самих горных пород (искусственные образцы), на которых в последующем выполняют моделирование указанных процессов. Кроме самих физических процессов иногда моделируют термобарические условия, в которых протекают эти процессы. Для этой цели необходимо использовать специальные установки, позволяющие моделировать температуру залегания горных пород, геостатическое и пластическое давление.

Проведение физического моделирования в геофизике связано с определенными сложностями. Прежде всего нарушается геометрическое подобие контурного объекта и модели. Объем породы, исследуемый в лабораторных условиях, не соответствует ее естественным условиям залегания, которые изучаются геофизическими методами в скважинных вариантах и особенно методами полевой (наземной) геофизики. Сложность физического моделирования горных пород заключается также в том, что в природных условиях исследуемый объект не является изолированной системой, а занимает определенное пространственное положение среди других пород, обладающих иными метрологическими и петрофизическими характеристиками, и находится с ними в физико-химическом и термодинамическом взаимодействии.

При извлечении породы с той или иной глубины с конкретными термобарическими условиями на поверхность (в атмосферные условия) нарушается внутренняя структура горной породы, которая оказывает значительное влияние на петрофизические характеристики. Нарушение первоначальной структуры породы связано с образованием в ней дополнительной трещиноватости, усыханием, растрескиванием и изменением набухаемости глинистого цемента, изменением порового объема породы за счет деформаций ее скелета и т.п. [1].

В настоящее время более широко распространено предметно-математическое и несколько реже физическое моделирование. В геофизике наибольшее распространение получило электрическое моделирование, которое позволяет изучать на электрических моделях электромагнитные, тепловые, акустические, диффузионные, гидродинамические и другие явления. Для этой цели используют плоские сеточные модели, состоящие из набора различных сопротивлений (электроинтегратор), – дискретное моделирование, электролитические ванны и электропроводную бумагу – моделирование на сплошных средах [2].

Моделирование взаимодействия электромагнитных волн с анизотропными средами плазмopodobного типа. Наряду с натурными исследованиями углеводородных залежей широко используется физическое моделирование с применением электродинамического подхода, основанного на использовании связи характеристик исследуемого объекта с параметрами воздействующих сигналов.

Аналогия исследуемой среды над залежью углеводородов с плазмopodobным образованием, имеющим анизотропные свойства, позволяет использовать для изучения взаимодействия электромагнит-

ных волн (ЭМВ) с углеводородными залежами (УВЗ) существующие решения при изучении плазмы и плазмоподобных сред:

- использование кинетического подхода [3] и его приближенное решение в области низких частот [4];
- гидродинамическое рассмотрение процессов взаимодействия в сильных магнитных полях [5], в том числе с учетом столкновений, в нелинейных режимах при исследовании устойчивости решений;
- использование как кинематического, так и гидродинамического подходов в частных случаях взаимодействия слабых и сильных электромагнитных полей;
- моделирование одножидкостной плазмы в различных энергетических состояниях и ограничение условий существования анизотропии магнитоактивной плазмы на высоких частотах.

Предметом анализа плазмоподобных сред служат используемые для создания радиомаскировки и радиоукрытий различные аэрозоли, факелы горючих смесей и плазменные источники, создающие облака ионизированного газа, а также плазменные разряды (газовые, молнии), твердотельная электроионно-дырочная плазма полупроводников и т.д.

Анализ основных направлений исследования параметров плазмоподобных образований с помощью электромагнитных методов показывает, что наиболее общим методом изучения процесса взаимодействия ЭМВ с анизотропной средой является метод кинетического уравнения, использующий функцию пространственно-временного распределения частиц. Для сильно разреженного газа, когда взаимодействие между частицами мало (в пределе бесстолкновительный режим), компоненты тензора диэлектрической проницаемости однозначно определяются гидродинамическим приближением.

Для рассмотренной электрохимической обстановки в окрестности залегающих углеводородов следует отдать предпочтение квазигидродинамическому приближению с использованием многочастичных электронно-ионных токов и феноменологически заданных частот столкновений, ввиду отсутствия необходимости учета точных пространственно-временных перемещений частиц [6].

Теоретический анализ взаимодействия амплитудно-модулированных (АМ) сигналов достаточно подробно изложен в [7]. Целью настоящей работы является разработка рекомендаций для методов поиска анизотропных сред плазмоподобного типа (АСПТ) на основе лабораторных исследований.

Рассмотрено взаимодействие радиосигнала вида

$$e(t) = E(1 + k_m \cos \Omega t) \cos \omega t, \quad (1)$$

где E – амплитуда несущего колебания;

k_m – коэффициент амплитудной модуляции;

$\Omega = 2\pi F$, $\omega = 2\pi f$ – модулирующая и несущая частоты.

Лабораторные исследования с использованием модулированных сигналов

Лабораторное исследование трансформации поля модулирующих ЭМВ проведено на модели среды с включением нефти, находящейся под слоем почвы, соответствующей песчано-алевритовым фракциям.

Для локализации нефти помещена в специальный контейнер с размерами $l_k = 1$ м, $d = h = 0,4$ м. На отрезке $l_{k1} = 1$ м моделируется участок относительно однородных вмещающих пород (рис. 1). Модель не учитывает анизотропии среды и предназначена для исследования поведения поля ЭМВ на границе раздела «вмещающие породы – протяженная нефтяная залежь».

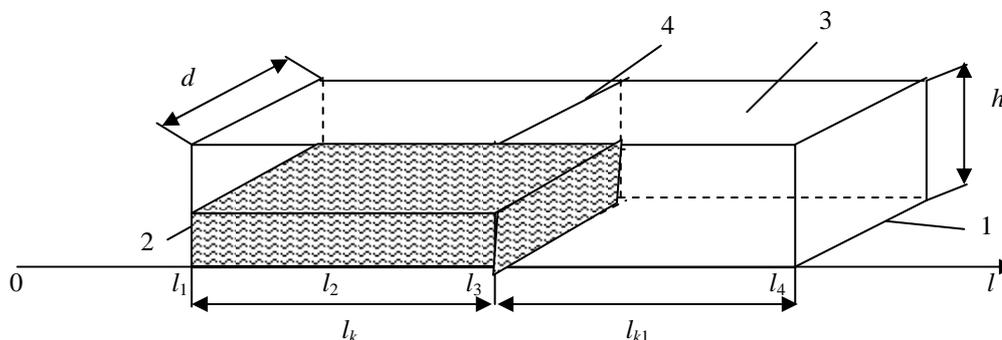


Рисунок 1 – Экспериментальная модель залежи углеводородов:

1 – контейнер; 2 – специальный контейнер; 3 – слой почвы; 4 – граница раздела сред

Структурная схема лабораторной установки для исследования границы раздела «нефть – вмещающая порода» представлена на рисунке 2.

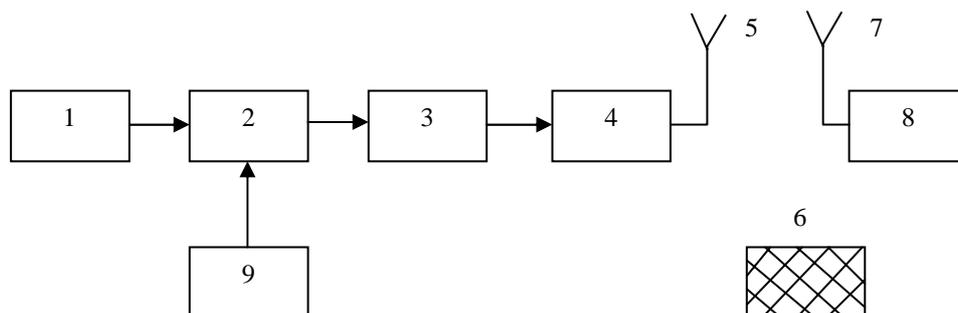


Рисунок 2 – Структурная схема установки для исследования нефти в режиме АМ-сигналов:
 1 – генератор несущей частоты; 2 – модулятор; 3 – развязывающее устройство; 4 – согласующее устройство;
 5, 7 – антенны; 6 – исследуемая среда; 8 – измеритель плотности потока мощности ПЗ-18;
 9 – генератор модулирующего сигнала

Для обеспечения дальнейшей зоны действия исследуемых антенн частоты исследуемых сигналов выбирались из условий геометрии моделируемого объекта.

Так, например, при частоте $f = 3$ ГГц ($\lambda = 10$ см) расстояние $l_k + l_{k1} = 2$ м = 20λ , а ширина $d = h = 4\lambda$.

На рисунке 3 показаны экспериментальные зависимости напряженности электрического поля вдоль исследуемого участка на частоте $f = 5$ ГГц и частоте модуляции $F = 50$ МГц.

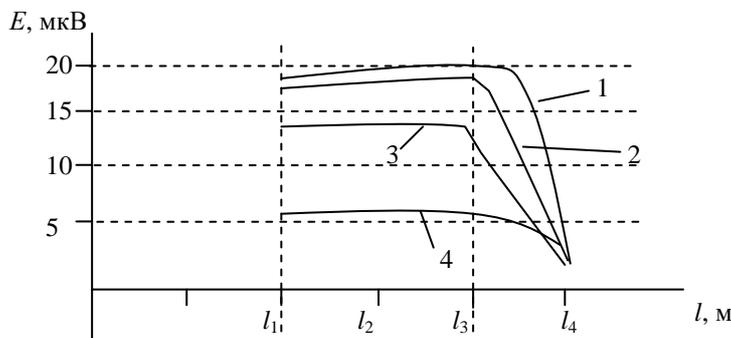


Рисунок 3 – Экспериментальные зависимости $E = \varphi(l)$:
 1 – $k_m = 0,3$; 2 – $k_m = 0,5$; 3 – $k_m = 0,7$; 4 – $k_m = 0,9$

Результаты проведенных лабораторных исследований свидетельствуют о том, что амплитудная модуляция приведет к незначительным изменениям реакции среды над УВЗ.

Устройство, реализующее измерение фазовых характеристик, показано на рисунке 4.

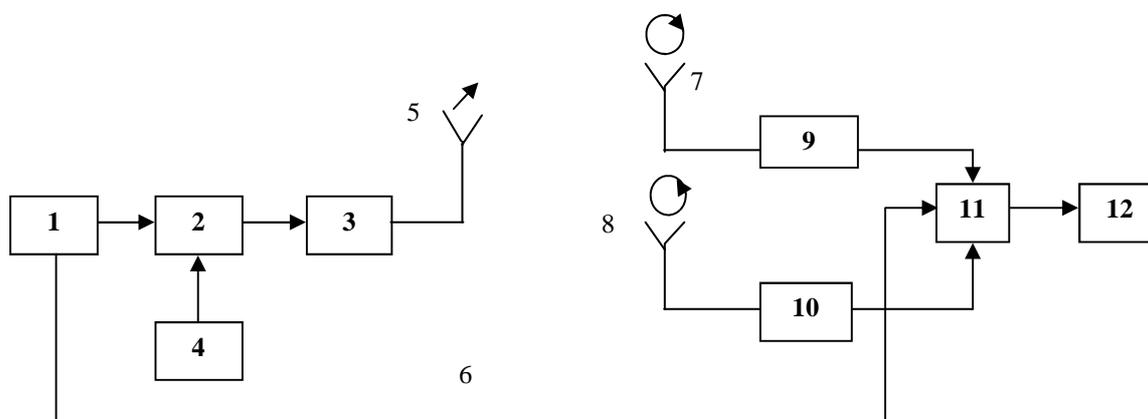


Рисунок 4 – Структурная схема для измерения фазовых характеристик ЭМВ:
 1 – генератор; 2 – модулятор; 3 – усилитель мощности;
 4 – генератор модулирующего колебания; 5 – антенна линейной поляризации;
 6 – опорный канал; 7, 8 – антенны правой и левой круговой поляризации;
 9, 10 – радиоприемные устройства; 11 – разностное устройство; 12 – устройство сравнения фаз

Фазовые характеристики ЭМВ, измеренные для частоты модуляции $F = 150$ МГц (рис. 5) и для коэффициента амплитудной модуляции $k_m = 0,5$ (рис. 6), свидетельствуют о разных эффектах взаимодействия ЭМВ с исследуемой средой.

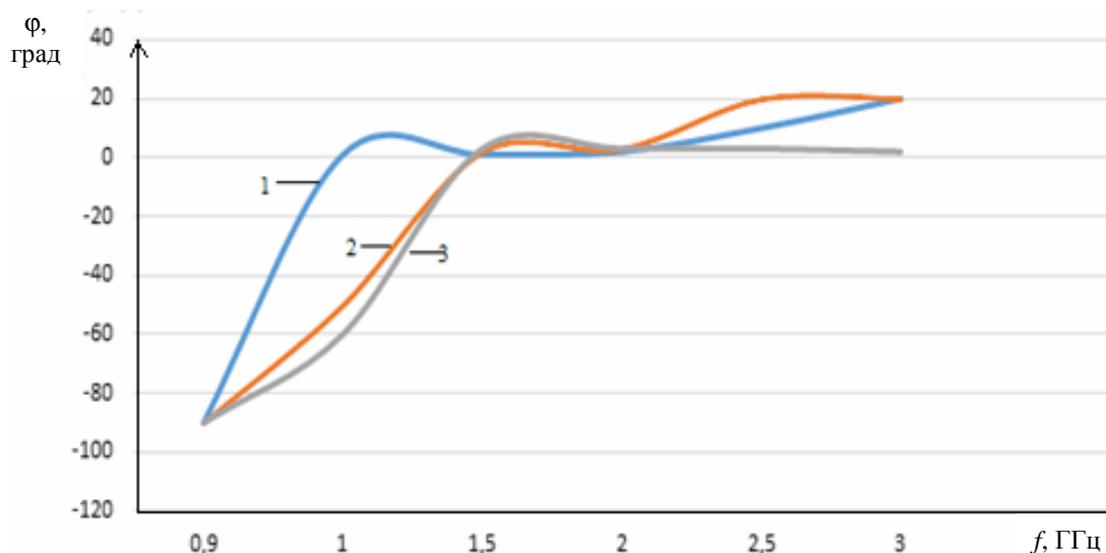


Рисунок 5 – Фазовые характеристики: 1 – $k_m = 0,1$; 2 – $k_m = 0,3$; 3 – $k_m = 0,9$

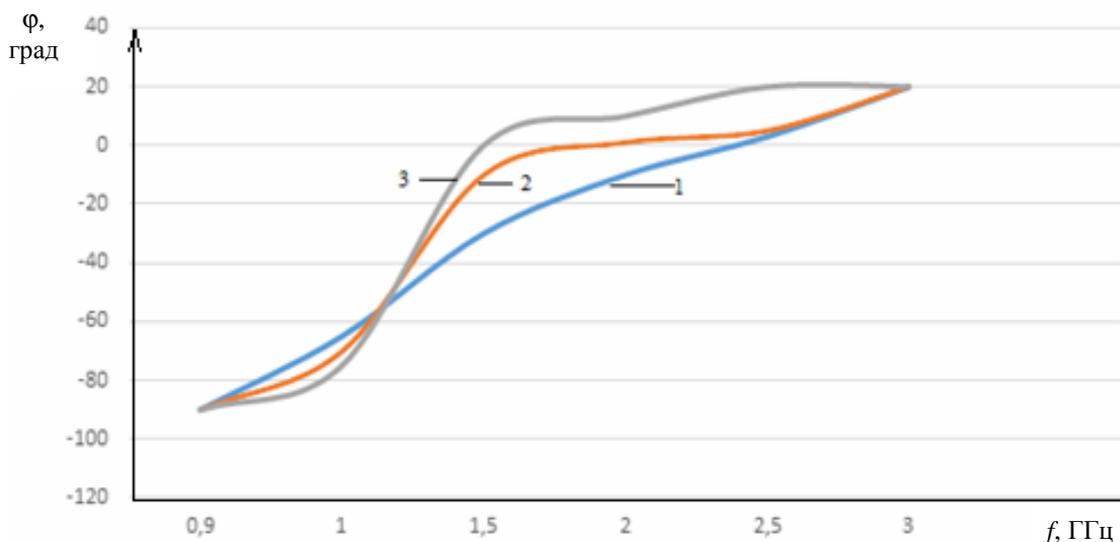


Рисунок 6 – Фазовые характеристики:
1 – $F = 100$ МГц; 2 – $F = 150$ МГц; 3 – $F = 200$ МГц

Наиболее существенное влияние на изменение фазового сдвига оказывают частоты несущего колебания $f = (0,5-1,5)$ ГГц. Дальнейший рост частоты стабилизирует фазу в области небольших положительных значений, равных примерно $(20-25)^\circ$ для $f = 3$ ГГц. Вариации модулирующей частоты и коэффициента АМ отражаются на изменении фазового сдвига.

Заключение. Проведено физическое моделирование взаимодействия ЭМВ с анизотропными средами, созданными искусственно в лабораторных условиях. Полученные измерения свидетельствуют о частотной зависимости амплитудных и фазовых характеристик электромагнитного поля. Установлены наиболее эффективные соотношения параметров ЭМВ для задач георазведки. Результаты исследований могут быть использованы при построении радиотехнических систем поиска и выделения АСПТ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтьев, Е.И. Моделирование в петрофизике / Е.И. Леонтьев. – М. : Недра, 1978. – 125 с.

2. Дахнов, В.Н. Интерпретация результатов геофизических исследований разрядов скважин / В.Н. Дахнов. – М. : Недра, 1972. – 365 с.
3. Shkarofsky, I.P. New representations of dielectric tensor elements in magnetized plasma / I.P. Shkarofsky // I. Plasma Phys. – 1986. – Vol. 35, № 2. – P. 319–331.
4. Новиков, В.В. О кинетическом подходе к описанию электрических свойств нижней ионосферы в диапазоне СДВ / В.В. Новиков // Проблемы дифракции и распространения радиоволн : сб. – Л., 1981. – Вып. 18. – С. 29–43.
5. Лауринавичус, А. Особенности распространения электромагнитных волн в волноводе с замагниченной полупроводниковой стенкой / А. Лауринавичус, П. Маланаускас // Литовский физический сборник / ЛГУ. – Вильнюс, 1982. – Т. 22, № 3. – С. 48–51.
6. Бенефи, Дж. Радиационные процессы в плазме / Дж. Бенефи. – М. : Мир, 1973. – 437 с.
7. Янушкевич, В.Ф. Зондирование анизотропных сред двухчастотными и модулированными сигналами / В.Ф. Янушкевич / Полоц. гос. ун-т. – Минск, 1997. – 8 с. – Деп. в БелИСА 12.06.97 г. – № Д199713.

Поступила 21.09.2015

IDENTIFICATION OF ANISOTROPIC PLASMA ENVIRONMENTS OF THIS TYPE

V. YANUSHKEVICH, K. KREMENYA, E. ZAYATS

The problems of modulated signals for search and selection-governmental anisotropic plasma-type environments. The physical modeling of the interaction of electromagnetic-magnetic waves with hydrocarbon deposits. The analysis was performed using electrodynamic under-progress based on the use of quasi-hydrodynamic approximation. The laboratory studies of the interaction amplitude-modulated signals on the model of the environment with the inclusion of oil under a layer of soil, sand and silt respective factions. The amplitude and phase characteristics of electromagnetic waves. Use the vertical polarization of probing signals. A wide range of frequencies used. Variation characterized tics-probing signals allows to increase the information content of the search. The results of laboratory studies: Laws allow us to give advice on the development of electro-magnetic methods of search. The correlation of the results of simulation experiments, experimental studies. The measurement results can be used to search geophysics.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.958:519.6

СОГЛАСОВАНИЕ ПОРЯДКОВ АППРОКСИМАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ГРАНИЧНОГО ОПЕРАТОРОВ В КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

*А.Ю. ГЕРЕЦ, А.А. ЗЕЛЕНКЕВИЧ, канд. физ.-мат. наук, доц. Н.А. ГУРЬЕВА,
канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет)*

Численными методами показано, что разностная схема аппроксимирует задачу математической физики параболического типа с четвертым порядком для приведенного примера относительно шага сетки при условии, что разностные дифференциальный и граничный (граничное условие Неймана) операторы построены с одинаковым четвертым порядком аппроксимации. Приведен контрпример, когда граничный оператор имеет первый порядок аппроксимации, а дифференциальный – четвертый порядок, сходимость разностного решения к точному решению дифференциальной задачи не имеет места. Теоретически обоснована сходимость или расходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи в указанных примерах. Получены формулы с аппроксимацией четвертым порядком для граничного оператора с однородным и неоднородным условием Неймана для одномерных уравнений в частных производных эллиптического, параболического и гиперболического типов, а также при аппроксимации краевых задач.

Введение. Рассмотрим в области D с границей G краевую дифференциальную задачу:

$$Lu = f \quad \text{в } D \quad (1)$$

с граничным условием

$$lu = \varphi \quad \text{на } G \quad (2)$$

Здесь L и l – дифференциальные операторы; f, φ – заданные, u – искомый элементы некоторых линейных нормированных функциональных пространств F, Φ, U соответственно [1].

Разностную схему определяют как семейство сеточных задач, зависящих от параметра (шага) h :

$$L_h u_h = f_h \quad \text{на сетке в области } D_h, \quad (3)$$

$$l_h u_h = \varphi_h \quad \text{на граничной сетке } G_h. \quad (4)$$

Говорят, что разностная схема (3), (4) аппроксимирует на решении u с порядком аппроксимации $p = \min(p_1, p_2)$ дифференциальную задачу (1), (2), если существуют такие положительные постоянные h_0, c_1, p_1, c_2, p_2 , не зависящие от h , что при всех $h \leq h_0$, справедливы неравенства:

$$\|L_h(u) - f_h\|_{F_h} \leq c_1 h^{p_1}, \quad \|l_h(u) - \varphi_h\|_{\Phi_h} \leq c_2 h^{p_2}.$$

Из определения порядка аппроксимации следует, что для максимальной точности аппроксимации разностной задачи (3), (4) и экономии машинного времени необходимо соблюдение равенства

$$p_1 = p_2 = p. \quad (5)$$

Постановка задачи. Для обоснования условия (5) рассмотрим численное решение начально-краевой задачи параболического типа [2, с. 193]:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = \cos(2x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, 0), & t \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Система уравнений (6) имеет точное аналитическое решение: $u(x, t) = e^{-4t} \cos(2x)$. Действительно,

$$u(x, t)_t = u(x, t)_{xx} = -4 \cos(2x) e^{-4t}, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$$

$$u(x, 0) = \cos(2x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad u_x(x, t) = -2e^{-4t} \sin(2x), \quad u_x(0, t) = u_x(\pi, 0) = 0, \quad t \geq 0.$$

Используем задачу (6), в которой третье уравнение представляет собой граничное условие Неймана, в качестве теста при составлении программы. В задаче (6) первое уравнение соответствует дифференциальной задаче (1) в полуполосе $0 < x < \pi, t > 0$. Третье уравнение является граничным оператором (2) на лучах: $t \geq 0, x = 0, x = \pi$. Рассмотрим разностное уравнение (3) для задачи (6):

$$\frac{(u_m^{n+1} - u_m^n)}{\tau} = \frac{(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n)}{h^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, N, \quad n = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Уравнение (7) представляет явную разностную схему однородного уравнения теплопроводности на сетке с равномерным шагом по времени τ и по координате $h = \pi / N$. Обозначив параметр $z = \tau / h^2$, уравнение (7) преобразуем к виду

$$u_m^{n+1} = u_m^n + z(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n). \quad (8)$$

Разложим узловые значения $u_m^{n+1}, u_{m+1}^n, u_{m-1}^n$ в формуле (8) в ряд Тейлора для получения максимального порядка аппроксимации с центром разложения u_m^n :

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} &= u_m^n + \tau \frac{\partial(u_m^n)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial t^2} + o(\tau^2), \\ u_{m+1}^n &= u_m^n + h \frac{\partial(u_m^n)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3(u_m^n)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4(u_m^n)}{\partial x^4} + o(h^4), \\ u_{m-1}^n &= u_m^n - h \frac{\partial(u_m^n)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3(u_m^n)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4(u_m^n)}{\partial x^4} + o(h^4). \end{aligned}$$

Подставляя разложения для $u_m^{n+1}, u_{m+1}^n, u_{m-1}^n$ в формулу (8), получим

$$\tau \frac{\partial(u_m^n)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial t^2} = z \left(h^2 \frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4(u_m^n)}{\partial x^4} \right) + o(\tau^2 + h^4). \quad (9)$$

Потребуем по отдельности равенства первых и вторых слагаемых в формуле (9): $\tau \frac{\partial(u_m^n)}{\partial t} = zh^2 \frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial x^2}$,

тогда, используя первое уравнение системы (6) $\frac{\partial(u_m^n)}{\partial t} = \frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial x^2}$, получим равенство $\tau = zh^2$, которое справедливо для любого z . Преобразуем вторую производную во времени, считая функцию $u(x, t)$ дважды по t и четырежды по x непрерывно дифференцируемой:

$$\frac{\partial(u_m^n)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} u_m^n \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} (u_m^n) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_m^n) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} (u_m^n).$$

Учитывая последнее равенство и требование, имеем

$$\frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial t^2} = z \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4(u_m^n)}{\partial x^4} \Leftrightarrow \frac{\tau^2}{2} = z \frac{h^4}{12} = \frac{\tau}{h^2} \frac{h^4}{12} = \tau \frac{h^2}{12} \Leftrightarrow \tau = \frac{h^2}{6} \Leftrightarrow z = \frac{1}{6}. \quad (10)$$

Итак, максимальный порядок аппроксимации дифференциального оператора (1) по h $p_1 = 4$ с параметром $z = \frac{1}{6}$. Тогда уравнение (8) перепишем в виде

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{1}{6}(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n) + o(\tau^2 + h^4) = \frac{1}{6}(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n + 4u_m^n) + o(\tau^2 + h^4). \quad (11)$$

Разностное уравнение (8) необходимо исследовать на устойчивость. Используем признак спектральной устойчивости по Н.С. Бахвалову [1, с. 125, 223].

В качестве возмущающих функций [1] для разностной схемы (8) выберем $u_m^n = (\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi}$.

Определение 1 (спектральный признак устойчивости разностной схемы). Если при заданном законе стремления τ и h к нулю для всех $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ справедливо неравенство $|\lambda(\varphi)| \leq 1$ ($\lambda(\varphi)$ – комплексное число, описывающее замкнутую кривую на комплексной плоскости для всех указанных φ), то спектральный признак выполнен, и численная схема может быть использована для решения уравнения $Lu = f$.

Обоснование корректности определения 1.

$$|u_m^n| = |\lambda(\varphi)|^n \cdot 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & \text{если } |\lambda(\varphi)| < 1, \\ 1, & \text{если } |\lambda(\varphi)| = 1, \\ +\infty, & \text{если } |\lambda(\varphi)| > 1, \end{cases} \quad \text{то есть ограниченность } |u_m^n| \text{ возникает при } |\lambda(\varphi)| \leq 1.$$

Уравнение (8) – уравнение с постоянными коэффициентами, линейное и однородное относительно функции u_m^n , которое допускает решение в виде $u_m^n = (\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi}$ [1]. Подставим функцию u_m^n в уравнение (8):

$$(\lambda(\varphi))^{n+1} e^{im\varphi} - (\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi} = z(\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} - 2).$$

Разделим последнее уравнение на $(\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi}$:

$$(\lambda(\varphi) - 1) = 2z(\cos(\varphi) - 1) = -4z \left(\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right)^2 \Leftrightarrow \lambda(\varphi) = 1 - 4z \left(\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right)^2. \quad (12)$$

Если параметр $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$ (искомый спектр устойчивости схемы (8)), то справедливо из (12), что

$$-1 \leq \lambda(\varphi) \leq 1 \Leftrightarrow |\lambda(\varphi)| \leq 1.$$

Таким образом, при $z = \frac{1}{6}$ численная схема (11) имеет не только максимальный порядок аппроксимации, но и является устойчивой.

Построим схему граничного оператора $l_h u_h = \varphi_h$ для граничного условия $lu = \varphi$ – третьего уравнения системы (6): $u_x(0, t) = u_x(\pi, 0)$ с тем же порядком точности: $p_2 = p_1 = 4$. Составим квадратурную формулу для граничного оператора (производной функции в нуле $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$) методом неопределенных коэффициентов [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{1}{h} (au_0^n + bu_1^n + cu_2^n + du_3^n + eu_4^n) + r(x), \quad (13)$$

где a, b, c, d, e – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению; h – шаг равномерной сетки; $u_0^n, u_1^n, u_2^n, u_3^n, u_4^n$ – значения функции u_m^n в пяти ближайших узлах к левой границе отрезка $[0, \pi]$; $r(x)$ – невязка квадратуры.

Потребуем равенства нулю остатка $r(x)$ в формуле (13) для многочленов максимально высокой степени:

$$\begin{aligned} \text{а) } u(x, t) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 &= \frac{1}{h}(a + b + c + d + e) \Leftrightarrow a + b + c + d + e = 0; \\ \text{б) } u(x, t) = x, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 1 &= \frac{1}{h}(a \cdot 0 + bh + 2hc + 3dh + 4eh) \Leftrightarrow b + 2c + 3d + 4e = 1; \end{aligned}$$

$$c) \quad u(x,t) = x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 = \frac{1}{h}(a \cdot 0 + bh^2 + c(2h)^2 + d(3h)^2 + e(4h)^2) \Leftrightarrow b + 4c + 9d + 16e = 0;$$

$$d) \quad u(x,t) = x^3, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 = \frac{1}{h}(a \cdot 0 + bh^3 + c(2h)^3 + d(3h)^3 + e(4h)^3) \Leftrightarrow b + 8c + 27d + 64e = 0;$$

$$e) \quad u(x,t) = x^4, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 = \frac{1}{h}(a \cdot 0 + bh^4 + c(2h)^4 + d(3h)^4 + e(4h)^4) \Leftrightarrow b + 16c + 81d + 256e = 0.$$

Решаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 0 \\ b + 2c + 3d + 4e = 1 \\ b + 4c + 9d + 16e = 0 \\ b + 8c + 27d + 64e = 0 \\ b + 16c + 81d + 256e = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Линейная система уравнений (14) имеет единственное решение:

$$a = -\frac{25}{12}, \quad b = 4, \quad c = -3, \quad d = \frac{4}{3}, \quad e = -\frac{1}{4}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в (13), получим квадратуру, точную для многочленов степени не выше четырех, то есть порядок сходимости граничного оператора в поставленной задаче также $p_2 = 4 = p_1$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{1}{12h}(-25u_0^n + 48u_1^n - 36u_2^n + 16u_3^n - u_4^n). \quad (15)$$

По условию задачи (6) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$, поэтому выразим из (15) u_0^n :

$$u_0^n = \frac{1}{25}(48u_1^n - 36u_2^n + 16u_3^n - 3u_4^n). \quad (16)$$

В силу симметрии задачи для граничного оператора на правой границе в точке $x = \pi$

$$u_N^n = \frac{1}{25}(48u_{N-1}^n - 36u_{N-2}^n + 16u_{N-3}^n - 3u_{N-4}^n). \quad (17)$$

Учитывая связь $\tau = zh^2 = \frac{1}{6}h^2$, видим, что $\tau \ll h$ при малых h . Выберем временной отрезок $T = M\tau$ таким образом, чтобы по порядку величины $T \approx X = Nh$ (исходная задача рассматривается на прямоугольнике с соизмеримыми сторонами). Положим $M \approx N^2 \Rightarrow T = M\tau = N^2\tau = \frac{N^2h^2}{6} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1$ (по порядку величины). Окончательно выпишем разностные уравнения численной схемы, соответствующей дифференциальной задаче (6):

$$\begin{cases} u_m^0 = \cos(2mh), \quad m = 0, 1, 2, \dots, N, \\ u_m^n = \frac{(u_{m+1}^{n-1} + u_{m-1}^{n-1} + 4u_m^{n-1})}{6}, \quad m = 1, 2, \dots, N-1, \quad n = 1, 2, \dots, N^2, \\ u_0^n = \frac{1}{25}(48u_1^n - 36u_2^n + 16u_3^n - 3u_4^n), \quad n = 1, 2, \dots, N^2, \\ u_N^n = \frac{1}{25}(48u_{N-1}^n - 36u_{N-2}^n + 16u_{N-3}^n - 3u_{N-4}^n), \quad n = 1, 2, \dots, N^2. \end{cases} \quad (18)$$

Первое уравнение в численной схеме (18) представляет собой начальное условие задачи (6). Тогда точное решение $u(x, T)$ в узлах равномерной сетки в последнем временном слое $n = N^2$:

$$u_m^{N^2} = \cos(2mh)e^{-4T} = \cos(2mh)e^{-\frac{4}{6}h^2N^2} = \cos(2mh)e^{-\frac{2\pi^2}{3}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (19)$$

Описание программы. Для численной схемы (18) и теста (19) напишем программу на языке С. Следующая ниже программа написана с двойной точностью:

```
#include <stdio.h >
#include <math.h >
int N = 100, N1 = N * N;
int main(){
int k, j;
double res[N+1][N1+1], x[N+1];
double pi, h, dt;
pi = 2.0 * a sin(1.0);
h = pi / double(N);
dt =  $\frac{h * h}{6.0}$ ;
for(k = 0; k < N; k++){
res[k][0] = cos(2.0 * h * double(k));
x[k] = res[k][0] * exp(-4.0 * dt * double(N1));
for(j = 1; j <= N1; j++){
{
for(k = 1; k <= N - 1; k++){
{
res[k][j] =  $\left(\frac{1.0}{6.0}\right) * (res[k+1][j-1] + res[k-1][j-1] + 4.0 * res[k][j-1])$ ;
} }
res[0][j] =  $\left(\frac{1.0}{25.0}\right) (48.0 * res[1][j] - 36.0 * res[2][j] + 16.0 * res[3][j] - 3.0 * res[4][j])$ ; (20)
res[N][j] =  $\left(\frac{1.0}{25.0}\right) (48.0 * res[N-1][j] - 36.0 * res[N-2][j] + 16.0 * res[N-3][j] - 3.0 * res[N-4][j])$ ; (21)
printf("x          axact          resolve \n");
for(k = 0; k <= N; k++) {
if(k - 10 * int(double(k) / double(10)) == 0)
{
printf("x = %lf axact = %.14lf res = %.14lf \n", h * double(k), x(k), res[k][N1])
} }
printf("h = %lf h * h * h * h = %lf \n", h, h * h * h * h); }
```

Результаты численного решения. Покажем насколько важно требовать согласование порядков аппроксимации $p_2 = p_1$ дифференциального и граничного операторов в задачах математической физики. Для этого аппроксимируем сначала граничный оператор первым порядком сходимости $p_1 = 1$, а дифференциальный оператор (11) – по-прежнему, четвертым порядком $p_2 = 4$. То есть в формулах (16), (17) положим $u_0^n = u_1^n, u_N^n = u_{N-1}^n$ и в программе в формулах (20), (21)

$$res[0][j] = res[1][j], res[N][j] = res[N-1][j].$$

Программа возвращает таблицу значений $x, axact, resolve, delta$ (координату, точное решение, численное решение, разность между численным и точным решениями $delta = resolve - axact$) с шагом равномерной сетки h :

Таблица 1 – Решение численной схемы (18) при $N = 400$

x	$axact$	$resolve$	$delta$
0.00000000	0.00138821536422	-0.00116477704469	-0.00255299240891
0.31415927	0.00112308982151	-0.00141598028627	-0.00255282114823
0.62831853	0.00042898213940	-0.00208561646036	-0.00255264003627
0.94247780	-0.00042898213940	-0.00291666632857	-0.00255244911732
1.25663706	-0.00112308982151	-0.00359015697326	-0.00255224843765
1.57079633	-0.00138821536422	-0.00384758973613	-0.00255203804554
1.88495559	-0.00112308982151	-0.00359015697326	-0.00255181799127
2.19911486	-0.00042898213940	-0.00359015697326	-0.00255158832706
2.51327412	0.00042898213940	-0.00208561646036	-0.00255134910711
2.82743339	0.00112308982151	-0.00141598028627	-0.00255110038758
3.14159265	0.00138821536422	-0.00116477704469	-0.00255084222654

$$h = 7.853981633974483 \cdot 10^{-3}, \quad h^4 = 3.805042618515720 \cdot 10^{-9}$$

Сравнивая значения $axact$ и $resolve$ в таблице 1, видим, что приближенное решение даже не сходится к точному, так как приближенное решение всегда отрицательно, в то время как точное – $u_m^{N^2} = \cos(2mh)e^{-\frac{2\pi^2}{3}}$, $m = 0, 12, \dots, N$, дважды меняет знак при $h \rightarrow 0 (\Leftrightarrow N \rightarrow \infty)$; $o(1) \sim \frac{1}{\ln N}$ (здесь $o(x)$ – символика «о малое от x»).

Пусть теперь $h^4 > 6 \cdot 10^{-8}$ формулы (16), (17), (20), (21) написаны с четвертым порядком аппроксимации. В таблицах 2 и 3 также указаны полученные программой значения $x, axact, resolve, delta$.

Таблица 2 – Решение численной схемы (18) при $N = 200$

x	$axact$	$resolve$	$delta$
0.00000000	0.00138821536422	0.00138821868693	0.00000000332271
0.31415927	0.00112308982151	0.00112309312266	0.00000000332223
0.62831853	0.00042898213940	0.00042898540013	0.00000000332168
0.94247780	-0.00042898213940	-0.00042897892418	0.00000000332107
1.25663706	-0.00112308982151	-0.00112308664158	0.00000000332039
1.57079633	-0.00138821536422	-0.00138821219752	0.00000000331964
1.88495559	-0.00112308982151	-0.00112308664158	0.00000000331883
2.19911486	-0.00042898213940	-0.00042897892418	0.00000000331796
2.51327412	0.00042898213940	0.00042898540013	0.00000000331702
2.82743339	0.00112308982151	0.00112309312266	0.00000000331602
3.14159265	0.00138821536422	0.00138821868693	0.00000000331495

$$h = 1.570796326794897E \cdot 10^{-2}, \quad h^4 = 6.088068189625153 \cdot 10^{-8}$$

Таблица 3 ($N = 400$)

x	$axact$	$resolve$	$delta$
0.00000000	0.00138821536422	0.00138821868693	0.00000000010439
0.31415927	0.00112308982151	0.00112308992513	0.00000000010439
0.62831853	0.00042898213940	0.00042898224150	0.00000000010438
0.94247780	-0.00042898213940	-0.00042898203902	0.00000000010437
1.25663706	-0.00112308982151	-0.00112308972249	0.00000000010436
1.57079633	-0.00138821536422	-0.00138821526571	0.00000000010435
1.88495559	-0.00112308982151	-0.00112308972249	0.00000000010434
2.19911486	-0.00042898213940	-0.00042898203902	0.00000000010433
2.51327412	0.00042898213940	0.00042898224150	0.00000000010432
2.82743339	0.00112308982151	0.00112308992513	0.00000000010430
3.14159265	0.00138821536422	0.00138821546861	0.00000000010429

$$h = 7.853981633974483 \cdot 10^{-3}, \quad h^4 = 3.805042618515720 \cdot 10^{-9}$$

В пространстве C непрерывных на отрезке $[0, \pi]$ функций с нормой Чебышева $\|x\|_C = \max_{t \in [0, \pi]} |x(t)|$ норма разности приближенного и точного решений, заданной на равномерной сетке, равна

$$\|delta\| = \left\| u_m^{N^2}(resolve) - u_m^{N^2}(axact) \right\|_C = \max_{m=0, \dots, N} |delta_m^{N^2}|.$$

Из таблицы 2 видно при $N = 200$, что $\|delta\|_C < 4 \cdot 10^{-9}$, в то время как $h^4 > 6 \cdot 10^{-8}$. Другими словами, равномерная норма разности не превышает четвертой степени шага равномерной сетки h .

Аналогично, из таблицы 3 видно, что при $N = 400$ $\|delta\|_C < 2 \cdot 10^{-10}$, в то время как $h^4 > 3 \cdot 10^{-9}$, и равномерная норма разности также не превышает четвертого порядка степени шага сетки h .

В общем случае для определения (оценки) порядка сходимости разностной схемы, как определяет А.А. Самарский [3, с. 57], необходимо требовать уменьшение погрешности (нормы разности приближенного и точного решений) в 16 раз при уменьшении шага сетки h в 2 раза (при увеличении N в 2 раза) – для сходимости с четвертым порядком. В данной разностной схеме при увеличении N в 2 раза (с 200 до 400) погрешность по норме Чебышева уменьшается примерно в $\frac{3 \cdot 10^{-9}}{10^{-10}} = 30 > 16$ раз.

Необходимо выбирать большие N , так как указанное требование может проявляться на практике только в асимптотике [3].

Другими словами, численная схема (18) аппроксимирует задачу (6) и ее решение на последнем временном слое (19) с четвертым порядком. Легко видеть, что в общем случае от формулы (11) на конечном временном слое достаточно требовать меньшей точности – второй порядок сходимости:

$$\Delta u_m^{N^2} \sim N^2 o(\tau^2 + h^4) \sim N^2 o(h^4) \sim o(N^2 h^4) \sim o\left(\left(\frac{\pi}{h}\right)^2 h^4\right) \sim o(h^2), \quad (22)$$

здесь $o(x)$ – символика « o малое от x ».

Используя формулу (22), можно теоретически обосновать сходимость (расходимость) дифференциальной задачи с порядком аппроксимации p_2 и порядком граничного условия p_1 . Действительно, в случае равенства $p_2 = p_1 = 4$ порядок аппроксимации общей задачи $p = \min(p_1, p_2) = 4$ и согласно (22) на последнем временном слое разностное решение $u_n(x, t)$ (18) сходится при $h \rightarrow 0$ к решению дифференциальной задачи $u(x, t)$ (6) не хуже, чем со вторым порядком.

Если $p_2 = 1$; $p_1 = 4$, то $p = \min(p_1, p_2) = 1$, то есть на конечном временном слое невязка между решениями разностной и дифференциальной задачами имеет асимптотику:

$$N^2 o(h) \sim N^2 h o(1) = N^2 \left(\frac{\pi}{N}\right) o(1) \sim N o(1).$$

Поскольку $o(1)$ может иметь слабую сходимость, например, при $h \rightarrow 0 (\Leftrightarrow N \rightarrow \infty)$; $o(1) \sim \frac{1}{\ln N}$, то $|u(x,t) - u_h(x,t)| \sim N / \ln N \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$.

Что доказывает расходимость задачи в случае $x, axact, resolve, delta$.

Замечание. Массивы данных при $N = 400$, $N_1 = 400^2$ получены на FORTRAN, так как язык С, в котором написана программа, поддерживает только массив данных $N = 100$, $N_1 = 100^2$.

Выводы.

1. В работе численными методами показано, что разностная схема (18) аппроксимирует задачу математической физики (6) с уравнением параболического типа четвертым порядком относительно шага сетки при условии, что разностные дифференциальный и граничный (граничное условие Неймана) операторы построены с одинаковым четвертым порядком аппроксимации.

2. Приведен контрпример, в котором дифференциальный оператор имеет четвертый порядок аппроксимации, а граничный оператор первый порядок аппроксимации. В этом случае сходимость разностной задачи к решению дифференциальной задачи при больших N не имеет места.

3. Теоретически обоснована сходимость или расходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи в указанных примерах.

4. Из таблиц 2 и 3 видно, что невязка $delta$ точного $axact$ и численного $resolve$ решений в уравнениях параболического типа с диффузионным членом u_{xx} (одномерный случай оператора Лапласа) при больших N как уменьшается на всей области отрезка $[0, \pi]$, так и равномерно распределяется по всему отрезку. Это равномерное распределение невязки можно объяснить диффузией случайной величины машинной ошибки округления.

5. Получены формулы с аппроксимацией четвертым порядком для граничного оператора с однородным условием Неймана (формулы (16), (17)) и для неоднородного условия Неймана на границе (формула (15)). Данные формулы применимы для уравнений в частных производных эллиптического, параболического и гиперболического типов, а также при аппроксимации краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов, Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – М. : БИНОМ, Лаборатория знаний, 2010.
2. Пикулин, В.П. Практический курс по уравнениям математической физики / В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. – М. : Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1995.
3. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики : учеб. пособие / А.А. Самарский, П.Н. Вабишевич. – М. : Изд-во ЛКИ, 2014. – 480 с.

Поступила 05.09.2015

CO-ORDINATION ORDER TO APROXIMATIONS DIFFERENTIAL AND BORDER OPERATOR IN MARGINAL PROBLEM AND EQUATIONS IN QUOTIENT DERIVED

A. HERTZ, A. ZELENKEVICH, N. GUREVA, Y. PASTUHOV, D. PASTUHOV

In the article by numerical methods is shown that numerical scheme approximates the problem mathematical physicists of parabolic type with 4 rather for cites an instance for step of the net provided that differential and border (the border condition of Neyman) operators are built with alike rather approximations. The brought rebels example, when border operator has a first order to approximations, but differential 4 orders, convergence decisions to exact decision of the differential problem has a no place. It is theoretically motivated convergence or decisions problems to decision of the differential problem in specified example. Formulas are received with approximation rather for border operator with uniform and lumpy condition of Neyman for unvaried equations in quotient derived elliptical, parabolic and hyperbolic types, as well as at approximations of the marginal problems.

УДК 517.983

**РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА
С ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ
И НОРМИРОВАННОЙ ФУНКЦИЕЙ БЕССЕЛЯ В ЯДРАХ
В КЛАССЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ**

*канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. СКОРОМНИК
(Полоцкий государственный университет)*

Рассмотрены два интегральных уравнения первого рода с вырожденной гипергеометрической функцией и нормированной функцией Бесселя в ядрах. Хорошо известен классический результат Я. Тамаркина о разрешимости интегрального уравнения Абеля в пространстве $L_1(a, b)$ суммируемых функций на конечном отрезке $[a, b]$ действительной оси. Следуя методике Я. Тамаркина, получены формулы решения исследуемых уравнений в замкнутой форме, доказаны необходимые и достаточные условия их разрешимости в пространстве интегрируемых функций.

1. Предварительные сведения. Одномерные интегральные уравнения первого рода, обобщающие классическое интегральное уравнение Абеля и содержащие в ядрах гипергеометрическую функцию Гаусса, функцию Лежандра, вырожденную гипергеометрическую функцию (функцию Куммера), нормированную функцию Бесселя (функцию Бесселя – Клиффорда), другие специальные функции, изучены многими авторами (см. обзор результатов и библиографию в [1, § 39]). Такие уравнения возникают при изучении краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типа с краевыми условиями, содержащими обобщенные дробные интегралы и производные [2]. В большинстве работ метод исследования уравнений типа Абеля с гипергеометрическими функциями, функцией Лежандра в ядрах основывался на представлении интегральных операторов этих уравнений в виде композиции операторов дробного интегрирования Римана – Лиувилля со степенными или экспоненциальными весами и на использовании известных свойств дробных интегралов. На этом пути были даны достаточные условия разрешимости рассматриваемых интегральных уравнений в некоторых классах функций и получены их решения в квадратах [1, §§ 35.1, 35.2, 37.1].

Исследование необходимых и достаточных условий разрешимости выше указанных уравнений является более сложной задачей. Хорошо известен классический результат Я. Тамаркина о разрешимости интегрального уравнения Абеля в пространстве $L_1(a, b)$ суммируемых функций на конечном отрезке $[a, b]$ действительной оси [1, теорема 2.1]. Следуя методике Я. Тамаркина, в работе получены решения в замкнутой форме двух интегральных уравнений первого рода: с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера и нормированной функцией Бесселя в ядрах; установлены необходимые и достаточные условия разрешимости указанных уравнений в пространстве интегрируемых функций.

Рассматриваются интегральные уравнения:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1} {}_1F_1(\beta; \alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) f(t) dt = g(x), \quad x > a, \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1} J_{\alpha-1}(\lambda \sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) f(t) dt = g(x), \quad x > a, \quad (1.2)$$

где $\sigma > 0$; $0 < \alpha < 1$; $\lambda > 0$ – некоторый действительный параметр;

${}_1F_1(a; c; z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция (функция Куммера), определяемая по формуле [1, §1; 3, §1.6]

$${}_1F_1(a; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} = \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(a, b; c; \frac{z}{b}\right), \quad |z| < \infty, \quad (1.3)$$

здесь $(l)_n$ – символ Похгаммера: $(l)_0 \equiv 1$, $(l)_n = l(l+1)\dots(l+n-1)$ ($l \in \mathbb{C}; n \in \mathbb{N}$);

${}_2F_1(a, b; c; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, определяемая при комплексных $a, b, c \in \mathbb{C}$ и $|z| < 1$ гипергеометрическим рядом

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}$$

с соответствующим аналитическим продолжением

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt$$

для $z \in \mathbb{C}$, $0 < \operatorname{Re} b < \operatorname{Re} c$, $(|\arg(1-z)| < \pi, z \neq 1)$ (см. [4, п. 2.1, формулы (2) и (10)]);

$\bar{J}_\nu(z)$ – нормированная функция Бесселя (функция Бесселя – Клиффорда), определяемая по формуле [1, § 37.1]

$$\bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(z), \quad |z| < \infty; \tag{1.4}$$

где $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода [1, §1.3; 5]

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(\nu+k+1)k!}. \tag{1.5}$$

Будем считать, что $a > -\infty$ и уравнения (1.1), (1.2) рассматриваются на конечном отрезке $[a, b]$.

Уравнения (1.1) и (1.2) обобщают уравнения [1, формулы (37.1) и (37.4)], получающиеся из (1.1) и (1.2) при $\sigma = 1$ соответственно.

Нам понадобятся интегральная теорема сложения для функции Куммера (1.3) [4, п. 6.10, формула (15)]

$$\int_0^t \frac{u^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_1F_1(a; c; u) \frac{(t-u)^{c'-1}}{\Gamma(c')} {}_1F_1(a'; c'; t-u) du = \frac{t^{c+c'-1}}{\Gamma(c+c')} {}_1F_1(a+a'; c+c'; t), \quad \operatorname{Re}(c) > 0, \operatorname{Re}(c') > 0, \tag{1.6}$$

второй интеграл Сонина для функции Бесселя (1.5) [5, п. 7.7 формула (4)]

$$\int_0^t \sqrt{t^\mu (t-\tau)^\nu} J_\mu(\alpha\sqrt{\tau}) J_\nu(\beta\sqrt{t-\tau}) d\tau = 2\alpha^\mu \beta^\nu \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)^{-(\nu+\mu+1)}} J_{\nu+\mu+1}(t\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}), \tag{1.7}$$

$$\operatorname{Re}(\mu) > -1, \operatorname{Re}(\nu) > -1;$$

а также формула Дирихле [1, формула (1.32)]

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_a^b f(x, y) dx \tag{1.8}$$

в предположении, что абсолютно сходится один из этих интегралов.

2. Решение в замкнутой форме. Сначала дадим формальное решение уравнения (1.1). Заменяя в (1.1) x на t и t на u , умножая обе части полученного равенства на

$$(x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \sigma t^{\sigma-1}$$

и интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \sigma t^{\sigma-1} dt \int_a^t (t^\sigma - u^\sigma)^{\alpha-1} {}_1F_1(\beta; \alpha; \lambda(t^\sigma - u^\sigma)) f(u) du = \\ = \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt; \quad x > a. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Изменяя порядок интегрирования в левой части равенства (2.1) согласно формуле (1.8), представляем его в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(u) du \int_u^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} (t^\sigma - u^\sigma)^{\alpha-1} {}_1F_1(\beta; \alpha; \lambda(t^\sigma - u^\sigma)) {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \sigma t^{\sigma-1} dt = \\ = \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для вычисления внутреннего интеграла в соотношении (2.2) вводим новые переменные

$$s = \lambda(x^\sigma - t^\sigma),$$

используем формулу (1.6) и последовательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} (t^\sigma - u^\sigma)^{\alpha-1} {}_1F_1(\beta; \alpha; \lambda(t^\sigma - u^\sigma)) {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \sigma t^{\sigma-1} dt = \\ = \Gamma(1-\alpha) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\lambda(x^\sigma - u^\sigma)} s^{(1-\alpha)-1} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; s) \times \\ \times (\lambda(x^\sigma - u^\sigma) - s)^{\alpha-1} {}_1F_1(\beta; \alpha; \lambda(x^\sigma - u^\sigma) - s) ds = \Gamma(1-\alpha) {}_1F_1(0; 1; \lambda(x^\sigma - u^\sigma)) = \Gamma(1-\alpha). \end{aligned}$$

На основании этого равенство (2.2) принимает вид

$$\int_a^x f(u) du = f_{\lambda, \alpha, \beta}(x), \quad (2.3)$$

где
$$f_{\lambda, \alpha, \beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt. \quad (2.4)$$

После дифференцирования обеих частей равенства (2.3) получаем следующую формулу решения уравнения (1.1):

$$f(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) t^{\sigma-1} g(t) dt. \quad (2.5)$$

Таким образом, мы доказали, что если уравнение (1.1) разрешимо, то его решение необходимо имеет вид (2.5).

Дадим теперь формальное решение уравнения (1.2). Заменяя в нем x на t и t на u , умножая обе части полученного равенства на $(x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) \sigma t^{\sigma-1}$ и интегрируя, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) \sigma t^{\sigma-1} dt \int_a^t (t^\sigma - u^\sigma)^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{t^\sigma - u^\sigma}) f(u) du = \\ = \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt, \quad x > a. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Изменяя порядок интегрирования в левой части равенства (2.6) согласно формуле (1.8), представляем его в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(u) du \int_u^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} (t^\sigma - u^\sigma)^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{t^\sigma - u^\sigma}) \bar{J}_{-\alpha}(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) \sigma t^{\sigma-1} dt = \\ = \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt, \quad x > a. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для вычисления внутреннего интеграла в левой части (2.7) делаем замену $s = \lambda(x^\sigma - t^\sigma)$. Далее по формуле (1.4) выражаем функцию Бесселя – Клиффорда $\bar{J}_\nu(z)$ через функцию Бесселя первого рода $J_\nu(z)$ (1.5), используем формулу (1.7) и окончательно получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_u^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} (t^\sigma - u^\sigma)^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{t^\sigma - u^\sigma}) \bar{J}_{-\alpha}(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) \sigma t^{\sigma-1} dt = \\ & = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\sqrt{\lambda}}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^{\lambda(x^\sigma - u^\sigma)} \sqrt{s^{-\alpha} (\lambda(x^\sigma - u^\sigma) - s)^{\alpha-1}} J_{-\alpha}(\sqrt{\lambda}\sqrt{s}) \times \\ & \times J_{\alpha-1}(\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda(x^\sigma - u^\sigma) - s}) ds = \Gamma(1-\alpha) J_0(\sqrt{2\lambda}\lambda(x^\sigma - u^\sigma)). \end{aligned}$$

На основании этого равенство (2.7) принимает вид

$$\int_a^x J_0(\sqrt{2\lambda}\lambda(x^\sigma - u^\sigma)) f(u) du = f_{\lambda,\alpha}(x), \tag{2.8}$$

где

$$f_{\lambda,\alpha}(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt. \tag{2.9}$$

После дифференцирования обеих частей уравнения (2.8), учитывая, что $J_0(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow 0$, получаем

$$f(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt. \tag{2.10}$$

Таким образом, если уравнение (1.2) имеет решение, то это решение необходимо имеет вид (2.10).

3. Обоснование решений уравнений (1.1) и (1.2) в классе интегрируемых функций. Доказывается теорема, которая дает необходимые и достаточные условия разрешимости уравнений (1.1) и (1.2)

в пространстве $L_1(a,b) = \left\{ f(x) : \int_a^b |f(t)| dt < \infty \right\}$ в терминах вспомогательных функций $f_{\lambda,\alpha,\beta}(x)$

и $f_{\lambda,\alpha}(x)$ соответственно. При доказательстве используем тот факт, что класс $AC([a,b])$ абсолютно непрерывных функций совпадает с классом первообразных от суммируемых по Лебегу функций [6, с. 338; 7, с. 368–369]:

$$g(x) \in AC([a,b]) \Leftrightarrow g(x) = c + \int_a^x f(t) dt, \int_a^b |f(t)| dt < \infty, \tag{3.1}$$

поэтому абсолютно непрерывные функции имеют почти всюду суммируемую производную $g'(x)$.

Теорема 1. Для разрешимости уравнения (1.1) с $0 < \alpha < 1, \sigma > 0, \lambda > 0$ в пространстве $L_1(a,b)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$f_{\lambda,\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1[-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)] \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt \in AC([a,b]) \text{ и } f_{\lambda,\alpha,\beta}(a) = 0. \tag{3.2}$$

При выполнении условий (3.2) уравнение (1.1) разрешимо в $L_1(a,b)$ и его единственное решение дается формулой (2.5).

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (1.1) разрешимо в $L_1(a,b)$. Тогда справедливы все рассуждения предыдущего пункта (при этом возможность перестановки порядка интегрирования в (2.1) обосновывается с помощью теоремы Фубини (1.8)) и, следовательно, справедливо (2.3). Отсюда в силу (3.1) следуют условия (3.2).

Достаточность. Так как $f_{\lambda,\alpha,\beta}(x) \in AC([a,b])$, то $f'_{\lambda,\alpha,\beta}(x) = \frac{d}{dx} f_{\lambda,\alpha,\beta}(x) \in L_1(a,b)$. Поэтому функция, представляемая формулой (2.5), существует почти всюду и принадлежит $L_1(a,b)$. Покажем, что она дает решение уравнения (1.1). Для этого подставим ее в левую часть уравнения (1.1) и результат обозначим через $\varphi(x)$:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1} {}_1F_1(\beta; \alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) f'_{\lambda,\alpha,\beta}(t) dt = \varphi(x). \quad (3.3)$$

Покажем, что почти всюду $\varphi(x) = g(x)$, что и докажет теорему. Равенство (3.3) есть уравнение (1.1) относительно $f'_{\lambda,\alpha,\beta}(t)$. Оно заведомо разрешимо, поэтому в силу (2.5) $f'_{\lambda,\alpha,\beta}(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \times \frac{d}{dx} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) t^{\sigma-1} \varphi(t) dt$, т.е. $f'_{\lambda,\alpha,\beta}(x) = \varphi'_{\lambda,\alpha,\beta}(x)$. Функции $f_{\lambda,\alpha,\beta}(x)$ и $\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(x)$ абсолютно непрерывны: первая по предположению, вторая в силу равенства (2.3) с $\varphi(x)$ в правой части. Поэтому $f_{\lambda,\alpha,\beta}(x) - \varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(x) = c$. По предположению $f_{\lambda,\alpha,\beta}(a) = 0$, $\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(a) = 0$, потому что (3.3) – разрешимое уравнение. Отсюда $c = 0$, так что

$$\frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(\beta; \alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) t^{\sigma-1} (g(t) - \varphi(t)) dt = 0.$$

Последнее равенство есть уравнение вида (1.1). В силу единственности решения $g(t) - \varphi(t) \equiv 0$. Теорема доказана.

Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (1.1) сформулированы в терминах вспомогательной функции $f_{\lambda,\alpha,\beta}(x)$. Следующая лемма и следствие из нее дают достаточное условие в терминах самой функции $g(x)$.

Лемма 1. Если $g(x) \in AC([a,b])$, то и $f_{\lambda,\alpha,\beta}(x) \in AC([a,b])$, при этом справедливо представление

$$f_{\lambda,\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(g(a) (x^\sigma - a^\sigma)^{1-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 2-\alpha; \lambda(x^\sigma - a^\sigma)) + \int_a^x g'(t) (x^\sigma - t^\sigma)^{1-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 2-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) dt \right). \quad (3.4)$$

Доказательство. Подставляем на основании (3.1) функцию $g(t) = g(a) + \int_a^t g'(s) ds$ в формулу (2.4), имеем

$$\begin{aligned} f_{\lambda,\alpha,\beta}(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \sigma t^{\sigma-1} \left(g(a) + \int_a^t g'(s) ds \right) dt = \\ &= \frac{g(a)}{\Gamma(2-\alpha)} (x^\sigma - a^\sigma)^{1-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 2-\alpha; \lambda(x^\sigma - a^\sigma)) + \\ &+ \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) t^{\sigma-1} dt \int_a^t g'(s) ds. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь первое слагаемое – абсолютно непрерывная функция, так как выполняется равенство

$$(x^\sigma - a^\sigma)^{1-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 2-\alpha; \lambda(x^\sigma - a^\sigma)) = \sigma(1-\alpha) \int_a^x (t^\sigma - a^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(t^\sigma - a^\sigma)) t^{\sigma-1} dt.$$

Поскольку имеет место соотношение

$$\begin{aligned} & \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \sigma t^{\sigma-1} dt \int_a^t g'(s) ds = \\ & = \int_a^x \left[\int_a^t (t^\sigma - s^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(t^\sigma - s^\sigma)) \sigma s^{\sigma-1} g'(s) ds \right] dt \end{aligned} \tag{3.6}$$

(что проверяется непосредственной перестановкой порядка интегрирования в обеих его частях), то и второе слагаемое в (3.5) является первообразной от суммируемой функции и, следовательно, абсолютно непрерывно. Представление (3.4) следует из (3.5) после перестановки порядка интегрирования. Лемма доказана.

Следствие 1. Если $g(x) \in AC([a, b])$, то уравнение типа Абеля (1.1) разрешимо при $0 < \alpha < 1$, $\sigma > 0$, $\lambda > 0$ в $L_1(a, b)$, при этом решение (2.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \left(g(a) (x^\sigma - a^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - a^\sigma)) x^{\sigma-1} + \right. \\ & \left. + \int_a^x (x^\sigma - s^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - s^\sigma)) s^{\sigma-1} g'(s) ds \right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Доказательство. Действительно, условия разрешимости $g(x) \in AC([a, b])$ и $f_{\lambda, \alpha, \beta}(a) = 0$ выполнены в силу леммы 1 и формул (3.5), (3.6). Так как выполняется соотношение $f(x) = \frac{d}{dx} f_{\lambda, \alpha, \beta}(x)$, то формула (3.7) получается дифференцированием равенства (3.4), что возможно в силу (3.6).

Аналогично доказательству теоремы 1 для уравнения (1.2) устанавливаем следующую теорему.

Теорема 2. Для разрешимости уравнения (1.2) с $0 < \alpha < 1$, $\sigma > 0$, $\lambda > 0$ в пространстве $L_1(a, b)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$f_{\lambda, \alpha}(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{1-\alpha}(\lambda \sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt \in AC([a, b]) \text{ и } f_{\lambda, \alpha}(a) = 0. \tag{3.8}$$

При выполнении условий (3.8) уравнение (1.2) разрешимо в $L_1(a, b)$ и его единственное решение дается формулой (2.10).

Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (1.2) сформулированы в терминах вспомогательной функции $f_{\lambda, \alpha}(x)$. Аналогично доказательству леммы 1 и следствия 1 доказываются соответственно лемма 2 и следствие 2, которые дают достаточные условия задачи разрешимости уравнения (1.2) в терминах самой функции $g(x)$.

Лемма 2. Если $g(x) \in AC([a, b])$, то и $f_{\lambda, \alpha}(x) \in AC([a, b])$, при этом справедливо представление

$$\begin{aligned} f_{\lambda, \alpha}(x) = & \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(g(a) (x^\sigma - a^\sigma)^{1-\alpha} \bar{J}_{1-\alpha}(\lambda \sqrt{x^\sigma - a^\sigma}) + \right. \\ & \left. + \int_a^x g'(t) (x^\sigma - t^\sigma)^{1-\alpha} \bar{J}_{1-\alpha}(\lambda \sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) dt \right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Следствие 2. Если $g(x) \in AC([a, b])$, то уравнение типа Абеля (1.2) разрешимо при $0 < \alpha < 1$, $\sigma > 0$, $\lambda > 0$ в $L_1(a, b)$, при этом решение (2.10) можно представить в виде

$$f(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \left(g(a) (x^\sigma - a^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}(\lambda \sqrt{x^\sigma - a^\sigma}) x^{\sigma-1} + \right. \\ \left. + \int_a^x (x^\sigma - s^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}(\lambda \sqrt{x^\sigma - s^\sigma}) s^{\sigma-1} g'(s) ds \right). \quad (3.9)$$

Таким образом, получены еще две формы (3.7) и (3.9) обращения уравнений (1.1) и (1.2) соответственно, применимые к абсолютно непрерывным правым частям $g(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Репин, О.А. Краевые задачи со сдвигом для уравнений гиперболического и смешанного типов / О.А. Репин. – Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1992. – 183 с.
3. Kilbas, A.A. Theory and applications of fractional differential equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo // North-Holland Mathematics Studies 204. – Amsterdam : Elsevier B.V., 2006. – 523 p.
4. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1973. – Т. 1 : Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра. – 294 с.
5. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1973. – Т. 2 : Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – 296 с.
6. Колмогоров, А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : Наука, 1968. – 496 с.
7. Никольский, С.М. Курс математического анализа / С.М. Никольский. – М. : Наука, 1983. – Т. 2. – 448 с.

Поступила 15.09.2015

SOLUTION OF INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH THE CONFLUENT HYPERGEOMETRIC FUNCTION AND NORMALIZED BESSEL FUNCTION IN THE KERNELS IN THE CLASS OF INTEGRABLE FUNCTIONS

O. SKOROMNIK

Two integral equations of the first kind with the confluent hypergeometric function and the normalized Bessel function in the kernels are considered. Y. Tamarkin obtained a well-known classical result on the solvability of the Abel integral equation in the space $L_1(a, b)$ of integrable functions on a finite interval $[a, b]$ of the real line. By Tamarkin's method the solutions of the investigating equations in the closed form are obtained, and necessary and sufficient conditions for its solvability in the space of summable functions are given.

УДК 514

ИНВАРИАНТЫ В РАССЛОЕНИЯХ СКОРОСТЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

*канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ,
канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. ГОЛУБЕВА
(Полоцкий государственный университет)*

Введено инвариантное обобщение преобразования Остроградского из \mathfrak{X}^{2n} в расслоении скоростей произвольного нечетного порядка $T^{2n-1}X_m \xrightarrow{F_L(x)} T^{2n-1}X_m \rightarrow T^{2n-1}X_m$, индуцированного невырожденной функцией Лагранжа $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$. Исследован закон преобразования импульсов произвольного порядка при замене координат в базе X_m расслоения $T^n X_m$. Они преобразуются как тензоры типа $(0,1)$ (ковекторы). Обобщено свойство, являющееся аналогом известного результата в классической механике, – на экстремальных этого лагранжиана имеет место закон сохранения импульса первого порядка

ка $p_i^1(x, x, \dots, x^{(2n-1)}) = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l D_l^i \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right)$ вдоль поля $X^i(x) = \frac{dS_\tau^i(x)}{d\tau} \Big|_{\tau=0}$, $i = \overline{1, m}$, S_τ – однопараметрическая группа преобразований, $S: \mathfrak{X} \times X_m \rightarrow X_m$, $S_\tau: X_m \rightarrow X_m, \forall \tau \in \mathfrak{R}$ сохраняет лагранжиан $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$:

$$D_i(X^i \cdot p_i^1) = D_i \left(\sum_{i=1}^m X_i(x) \cdot \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l D_l^i \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right) \right) = 0.$$

Введение. Все физические процессы протекают в пространстве и времени, поэтому изучение геометрии пространства-времени и выяснение всех ее свойств играет важную роль в физике. Наиболее ярко связь геометрии с физикой проявляется при анализе таких вопросов, как определение естественной геометрии для того или иного физического поля, выяснение возможностей для получения законов сохранения в теории, нахождения систем отсчета, неотличимых от некоторой заданной системы с точки зрения любого физического эксперимента. Решение всех этих вопросов существенно зависит от характера геометрии. Физические законы (и объекты дифференциальной геометрии) не должны зависеть от выбора системы координат, поэтому они должны записываться посредством величин, не зависящих от преобразований координат. Такими величинами являются тензоры. Следовательно, физические величины должны выражаться в виде соотношений между тензорами [1–9].

Отметим, что к вариационной задаче сводятся задачи математической физики с уравнениями второго порядка эллиптического типа.

Математическая постановка задачи: исследовать закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе расслоения X_m и исследовать свойства преобразования Остроградского $F_L: T^{2n-1}X_m \rightarrow T^{2n-1}X_m$, индуцированного $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$.

Основные определения и математические объекты. Пусть на гладком многообразии X_m размерности m задана локальная однопараметрическая группа преобразований диффеоморфизмов $S_\tau, -\infty < \tau < \infty$:

$$S_{\tau_1 + \tau_2}(x) = S_{\tau_1}(S_{\tau_2}(x)) \quad S_{-\tau}(x) = S_\tau^{-1}(x) \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{R}, x \in X_m$$

$$S: \mathfrak{X} \times X_m \rightarrow X_m \quad S(\tau, x) = S_\tau(x).$$

С каждой локальной однопараметрической группой преобразований связывается векторное поле, касающееся траекторий $S_\tau(x): (X^i) = X(x) = \frac{d}{d\tau} S_\tau(x) \Big|_{\tau=0}, i = \overline{1, m}$.

Определение 1. Гладкая функция $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{K}$ называется невырожденной в точке $v_x^n \in T^n X_m$, если в некоторой системе координат (x) базы расслоения X_m $T^n X_m$ [10]:

$$\det \left(\frac{\partial^2 L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^k \partial x^i} \right)^{(n)} \neq 0,$$

$$\varphi: U_{v_x^n} \rightarrow \mathfrak{K}^{(n+1)m},$$

где $\varphi(v_x^n) = (x, \dot{x}, \dots, x) \in \mathfrak{K}^{(n+1)m}$ – координатный гомеоморфизм; $(U_{v_x^n}, \varphi)$ – локальная карта $v_x^n \in T^n X_m$; $L(x, \dot{x}, \dots, x)$ – локальная запись функции $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{K}$ в системе координат (x) : $L(x, \dot{x}, \dots, x) = L(\varphi^{-1}(v_x^n))$.

Замечание. По теореме о неявной функции гладкая функция $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{K}$, невырожденная в точке $v_x^n \in T^n X_m$, является невырожденной в некоторой окрестности $U(v_x^n)$ [1, 10].

Определение 2. Гладкая функция $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{K}$ называется невырожденной, если она невырождена в каждой точке $v_x^n \in T^n X_m$.

Определение 3. Гладкая функция $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{K}$, невырожденная в точке $v_x^n \in T^n X_m$, называется функцией Лагранжа (лагранжианом) в расслоении скоростей $T^n X_m$ порядка n , невырожденной (или локально невырожденной) в точке $v_x^n \in T^n X_m$ и невырожденной (глобально), если $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{K}$ невырождена в каждой точке $v_x^n \in T^n X_m$ [11].

Лемма 1. Определение невырожденности функции $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{K}$ в точке $v_x^n \in T^n X_m$ корректно, то есть инвариантно относительно выбора локальной системы координат (x) базы X_m расслоения $T^n X_m$ [11].

Определение 4 (корректность). Пусть $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{K}$ – невырожденная функция Лагранжа. Отображение $F_L(x): T^{2n-1} X_m \rightarrow T^{2n-1} X_m$ (индуцированное $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{K}$), которое в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^{2n-1} X_m$ задается функцией вида

$$F_L(x): (x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(2n-1)i}) \rightarrow (x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)i}, p_i^n, p_i^{n-1}, \dots, p_i^1), \quad i = \overline{1, m},$$

где $x^{(k)i} = D_t^k x^i$; D_t^k – оператор k -кратного полного дифференцирования по переменной t ; функции $p_i^k(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)})$ – импульсы порядка k по i -й координате, зависят от производных координат не более $(2n-k)$ -порядка, верхний индекс – номер порядка импульса, нижний – номер координаты,

и называется преобразованием Остроградского в расслоении скоростей $T^{2n-1} X_m$ [1, 10].

Импульс k -порядка по i -й координате в системе координат (x) в базе X_m расслоения $T^{2n-1}X_m$ имеет вид

$$p_i^k(x, \dot{x}, \dots, x) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right), \quad k = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}.$$

В любой другой системе локальных координат (\bar{x}) в базе X_m :

$$\overline{p_i^k}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}) = \sum_{j=1}^n p_j^k(x, \dot{x}, \dots, x) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = p_j^k(x, \dot{x}, \dots, x) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} \quad (\text{свертка}),$$

где $i, j = \overline{1, m}$ [11].

Теорема 1. Пусть $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ – невырожденная функция Лагранжа, тогда преобразование Остроградского, индуцированное L , $F_L: T^{2n-1} X_m \rightarrow T^{2n-1} X_m$, также является невырожденным [11].

Замечание 1. Слоевые координаты вектора $x = D_t^k x_i, i = \overline{1, m}$ в $T^{2n-1} X_m$ могут быть названы по аналогии с физическими величинами координатами вектора скорости k -го порядка, $k = \overline{1, 2n-1}$ (скорость в физике – скорость 1-го порядка, ускорение в физике – скорость 2-го порядка), а оператор D_t^k – оператор k -кратного полного дифференцирования по времени t .

Замечание 2. Функционал в уравнении Эйлера – Лагранжа может быть интерпретирован как импульс 0-го порядка:

$$p_i^0(x, \dot{x}, \dots, x) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}} \right), \quad i = \overline{1, m},$$

вектор импульса n -го порядка имеет вид

$$p_i^n(x, \dot{x}, \dots, x) = \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i}}.$$

Утверждение 1. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2 (закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе X_m расслоения $T^{2n-1} X_m$).

При замене $(\bar{x}) \rightarrow (x(\bar{x}))$ происходит следующее: в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n-1} X_m$ вектор импульса k -го порядка $\overline{p_i^k}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x})$, $i = \overline{1, m}$, преобразуется как **тензор** типа $(0, 1)$ (ковектор):

$$\overline{p_i^k}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}) = \sum_{j=1}^n p_j^k(x, \dot{x}, \dots, x) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = p_j^k(x, \dot{x}, \dots, x) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}, \quad k = \overline{1, n}, \quad i, j = \overline{1, m},$$

что позволяет называть функции $p_i^k(x, \dot{x}, \dots, x)$, $i = \overline{1, m}$, **тензором импульса k -го порядка** ($k = \overline{1, n}$) в расслоении скоростей $T^{2n-1} X_m$.

Именно этот результат позволяет корректно определить преобразование Остроградского $F_L: T^{2n-1} X_m \rightarrow T^{2n-1} X_m$, индуцированное отображением $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ при условии невырожденности $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$.

Теорема 3. Пусть $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ – невырожденная функция Лагранжа, тогда определение преобразования Остроградского, индуцированное функцией L , $F_L: T^{2n-1} X_m \rightarrow T^{2n-1} X_m$, корректно, т.е. инвариантно относительно выбора локальной системы координат (x) в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n-1} X_m$. Это позволяет не указывать локальную систему координат (x) в базе X_m расслоения $T^{2n-1} X_m$ при рассмотрении отображения $F_L(x): T^{2n-1} X_m \rightarrow T^{2n-1} X_m$ и писать просто $F_L: T^{2n-1} X_m \rightarrow T^{2n-1} X_m$ [11].

Действительно, при переходе от координат x к \bar{x} ($(x) \rightarrow (\bar{x})$) в базе X_m расслоения $T^n X_m$ импульсы преобразуются по закону

$$\overline{p_i^k}(x, \dot{x}, \dots, x) \stackrel{(2n-k)}{=} \sum_{j=1}^n p_j^k(x, \dot{x}, \dots, x) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = p_j^k(x, \dot{x}, \dots, x) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}.$$

Обратный переход от координат \bar{x} к x ($(\bar{x}) \rightarrow (x)$), по определению, при обратном переходе в базе X_m расслоения $T^n X_m$ от координат $(\bar{x}) \rightarrow (x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Поскольку } \sum_{j=1}^n \overline{p_i^k}(x, \dot{x}, \dots, x) \cdot \frac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^j} &= \overline{p_i^k}(x, \dot{x}, \dots, x) \cdot \frac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^m} = \\ &= p_j^k(x, \dot{x}, \dots, x) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^m} = p_j^k(x, \dot{x}, \dots, x) \cdot \delta_m^j = p_m^k(x, \dot{x}, \dots, x), \end{aligned}$$

где $\delta_m^j = \begin{cases} 1, & j = m \\ 0, & j \neq m \end{cases}$ – символ Кронеккера.

То есть функции $p_m^k(x, \dot{x}, \dots, x) \stackrel{(2n-k)}{\cdot}$, определенные в системе координат (x) и (\bar{x}) в базе X_m расслоения $T^n X_m$, совпадают.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ – невырожденная функция Лагранжа, тогда преобразование Остроградского $F_L: T^{2n-1} X_m \rightarrow T^{2n-1} X_m$, индуцированное функцией L , можно выразить следующим образом [11]:

$$D_i p_i^k(x, \dot{x}, \dots, x) \stackrel{(2n-k)}{=} \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} \stackrel{(n)}{-} p_i^{k-1}(x, \dot{x}, \dots, x) \stackrel{(2n-k+1)}{\cdot}.$$

Доказательство. Пусть $\bar{x}_\tau^i = S_\tau^i(x)$ $i = \overline{1, m}$, $S_\tau: (x) \rightarrow (\bar{x}) = S_\tau(x)$ – невырожденное преобразование координат (в окрестности каждой точки $x \in X_m$, $(U_1(x), \varphi_1)$, $(U_2(x), \varphi_2)$, $x \in U_1 \cap U_2$, $S = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1^{-1}: \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^m$, где $(U_1(x), \varphi_1)$, $(U_2(x), \varphi_2)$ – локальные карты многообразия X_m) в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей $(2n - 1)$ -порядка $T^{2n-1} X_m$, то есть

$$\det\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right) \neq 0, \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Тогда оно индуцирует невырожденное преобразование слоевых координат:

$$\overset{i}{x}(x, \dot{x}) = D_t \overset{i}{x}_\tau = \frac{\partial S_\tau^i}{\partial x^k} \cdot \overset{k}{x} = D_t S_\tau^i(x),$$

$$\overset{i}{\ddot{x}}(x, \dot{x}, \ddot{x}) = D_t^2 \overset{i}{x}_\tau = \frac{\partial^2 S_\tau^i}{\partial x^k \partial x^l} \cdot \overset{k}{x} \cdot \overset{l}{x} + \frac{\partial S_\tau^i}{\partial x^k} \cdot \overset{k}{\ddot{x}} = D_t^2 S_\tau^i(x)$$

$$\overset{i}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{x}}(x, \dot{x}, \ddot{x}, \overset{\cdot\cdot\cdot}{x}) = D_t^3 \overset{i}{x}_\tau = \frac{\partial^3 S_\tau^i}{\partial x^k \partial x^l \partial x^j} \cdot \overset{k}{x} \cdot \overset{l}{x} \cdot \overset{j}{x} + 3 \frac{\partial^2 S_\tau^i}{\partial x^k \partial x^l} \cdot \overset{k}{x} \cdot \overset{l}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{x}} + \frac{\partial S_\tau^i}{\partial x^k} \cdot \overset{k}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\ddot{x}}} = D_t^3 S_\tau^i(x)$$

$$\overset{i}{\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{x}}(x, \dot{x}, \ddot{x}, \overset{\cdot\cdot\cdot}{x}, \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{x}) = D_t^4 \overset{i}{x}_\tau = \frac{\partial^4 S_\tau^i}{\partial x^k \partial x^l \partial x^j \partial x^n} \cdot \overset{k}{x} \cdot \overset{l}{x} \cdot \overset{j}{x} \cdot \overset{n}{x} + 6 \frac{\partial^3 S_\tau^i}{\partial x^k \partial x^l \partial x^j} \cdot \overset{k}{x} \cdot \overset{l}{x} \cdot \overset{j}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{x}} + 4 \frac{\partial^2 S_\tau^i}{\partial x^k \partial x^l} \cdot \overset{k}{x} \cdot \overset{l}{\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{x}} + \frac{\partial S_\tau^i}{\partial x^k} \cdot \overset{k}{\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\ddot{x}}}} = D_t^4 S_\tau^i(x)$$

и т. д.

Обозначим $\bar{x} = \bar{x}(x)$, $\overset{\cdot}{\bar{x}} = \overset{\cdot}{\bar{x}}(x, \dot{x})$, $\overset{\cdot\cdot}{\bar{x}} = \overset{\cdot\cdot}{\bar{x}}(x, \dot{x}, \ddot{x})$, а также преобразование импульсов:

$$\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{p_i^k}(\bar{x}, \overset{\cdot}{\bar{x}}, \dots, \overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{x}}) = p_i^k(x(x), \overset{\cdot}{x}(x, \dot{x}), \dots, \overset{\cdot\cdot\cdot}{x}(x, \dot{x}, \ddot{x}), \dots, \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{x}(x, \dot{x}, \ddot{x}, \overset{\cdot\cdot\cdot}{x})).$$

Определение 5. Пусть $\bar{x}^i = S^i(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $i = \overline{1, m}$, $S : (x) \rightarrow (\bar{x} = S(x))$ – невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей $(2n-1)$ -порядка $T^{2n-1}X_m$. Кроме того, $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ – невырожденная функция Лагранжа, $F_L : T^{2n-1}X_m \rightarrow T^{2n-1}X_m$ – преобразование Остроградского, индуцированное функцией Лагранжа $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$, тогда отображение

$$G(L, \bar{x}(x)) : (\overset{i}{x}, \overset{i}{\dot{x}}, \overset{i}{\ddot{x}}, \dots, \overset{i}{x}^{(n-1)}, p_i^n, p_i^{n-1}, \dots, p_i^1) \rightarrow (\overset{i}{\bar{x}}, \overset{i}{\overset{\cdot}{\bar{x}}}, \overset{i}{\overset{\cdot\cdot}{\bar{x}}}, \dots, \overset{i}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{x}}}, p_i^n, p_i^{n-1}, \dots, p_i^1)$$

называется преобразованием координат-импульсов, индуцированным функцией Лагранжа $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$, и преобразованием координат $\bar{x}(x)$.

Теорема 4. Пусть $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ – невырожденная функция Лагранжа, $S : (x) \rightarrow (\bar{x} = S(x))$, – невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей $(2n-1)$ -порядка $T^{2n-1}X_m$, тогда индуцированное преобразование координат-импульсов также невырождено.

Лемма 3. Пусть $\bar{x}^i = S^i(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $i = \overline{1, m}$, $S : (x) \rightarrow (\bar{x})$ – невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей $(2n-1)$ -порядка $T^{2n-1}X_m$, тогда

$$\frac{\partial^{(l)i} \overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{x}}(x, \dot{x}, \dots, \overset{\cdot\cdot\cdot}{x})}{\partial \overset{(s)j}{x}} = \begin{cases} C_l^s \cdot D_t^{l-s} \left(\frac{\partial \overset{i}{\bar{x}}}{\partial \overset{j}{x}} \right), & C_l^s = \frac{l!}{s!(l-s)!}, \quad l! = \prod_{k=1}^l k, \quad l \geq s, \\ 0, & l < s. \end{cases}$$

Определение 6. Однопараметрическая группа преобразований

$$S : \mathfrak{X} \times X_m \rightarrow X_m \quad S_\tau : X_m \rightarrow X_m, \forall \tau \in \mathfrak{X}$$

сохраняет лагранжиан $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{X}$, если

$$\frac{dL(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x), \dots, D_t^{(n)} S_\tau(x))}{d\tau} = 0, \forall x \in X_m,$$

где D_t^k – оператор k -кратного полного дифференцирования по переменной t .

Утверждение 2. Имеет место следующая теорема [11].

Теорема 5. Пусть $S : \mathfrak{X} \times X_m \rightarrow X_m$, $S_\tau : X_m \rightarrow X_m$, $\forall \tau \in \mathfrak{X}$, сохраняет лагранжиан $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{X}$. Тогда на экстремальных этого лагранжиана имеет место закон сохранения импульса первого порядка

$$p_i^1(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-1)}) = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right), \quad i = \overline{1, m},$$

вдоль поля $X^i(x) = \frac{dS_\tau^i(x)}{d\tau} \Big|_{\tau=0}$, $i = \overline{1, m}$,

$$D_t(X^i \cdot p_i^1) = D_t \left(\sum_{i=0}^m X_i(x) \cdot \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right) \right) = 0.$$

Отсюда, как частный случай, при $n = 1$ получаем результат сохранения импульса первого порядка [1, с. 294].

Теорема 6. Если однопараметрическая группа преобразований S_τ сохраняет лагранжиан L , то имеет место закон сохранения компоненты импульса вдоль поля:

$$\frac{d}{dt} \left(X^i \frac{\partial L}{\partial x^i} \right) = \frac{d}{dt} (X^i p_i) = 0,$$

где X^i – векторное поле, определяемое однопараметрической группой преобразований

$$X(x) = \frac{d}{d\tau} S_\tau(x) \Big|_{\tau=0}.$$

Выводы.

1. Исследован закон преобразования импульсов произвольного порядка при замене координат в базе X_m расслоения $T^n X_m$, они преобразуются как тензоры типа (0,1) (ковекторы):

$$\overline{p_i^k}(\overline{x}, \overline{\dot{x}}, \dots, \overline{x^{(2n-k)}}) = \sum_{j=1}^n p_j^k(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)}) \cdot \frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j} = p_j^k(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)}) \cdot \frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j},$$

где $k = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m}$,

что позволяет называть функции $p_i^k(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)})$, $i = \overline{1, m}$, тензором импульса k -го порядка, $k = \overline{1, n}$, в расслоении скоростей $T^{2n-1} X_m$.

2. Доказан закон сохранения импульса первого порядка:

$$p_i^1(x, x, \dots, x) = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)^{(n)}, \quad i = \overline{1, m},$$

вдоль поля $X^i(x) = \frac{dS_\tau^i(x)}{d\tau} \Big|_{\tau=0}, \quad i = \overline{1, m},$

$$D_t(X^i \cdot p_i^1) = D_t \left(\sum_{i=0}^m X_i(x) \cdot \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)^{(n)} \right) = 0,$$

где $S : \mathfrak{R} \times X_m \rightarrow X_m$ $S_\tau : X_m \rightarrow X_m, \forall \tau \in \mathfrak{R}$ – однопараметрическая группа преобразований, сохраняющая лагранжиан $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$.

Авторы благодарят профессора Евтушика Леонида Евгеньевича, специалиста по дифференциальной геометрии, за разработку постановки задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин, В.А. Современная геометрия. Методы и приложения / В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М. : УРСС, 1994.
2. Рашевский, П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов, А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд, В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
5. Годбийон, К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика / К. Годбийон. – М. : Мир, 1973.
6. Дирак, П. Обобщенная гамильтонова динамика / П. Дирак // Вариационные принципы механики : сб. – М. : Физматгиз, 1959.
7. Дирак, П. Принципы квантовой механики / П. Дирак. – М. : Мир, 1979.
8. Дирак П. Лекции по квантовой механике / П. Дирак. – М. : Мир, 1968.
9. Трофимов, В.В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В.В. Трофимов, А.Т. Фоменко. – М. : Факториал, 1995.
10. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981.
11. Пастухов, Ю.Ф. Исследование решения обратной вариационной задачи : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.04 (геометрия и топология) / Ю.Ф. Пастухов. – М., 1996. – 9с.

Поступила 21.09.2015

INVARIANTS IN STRATIFICATIONS OF SPEEDS OF ANY ORDER

Y. PASTUHOV, D. PASTUHOV, O. GOLUBEVA

In work synthesis of transformation of Ostrogradsky in velocity stratification of any odd order induced by non degenerate Lagrange function. The law of transformation of impulses of any order when replacing coordinates in base of stratification is investigated. They will be transformed as tensors of type (0,1) (covector). The property which is analog of known result in classical mechanics is generalized – on extremals of this lagranzhian law of conservation of momentum of the first order takes place

$p_i^1(x, x, \dots, x) = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)^{(n)}$ across field $X^i(x) = \frac{dS_\tau^i(x)}{d\tau} \Big|_{\tau=0}, \quad i = \overline{1, m},$ S_τ – one parametric group of the transformations, $S : \mathfrak{R} \times X_m \rightarrow X_m$ $S_\tau : X_m \rightarrow X_m, \forall \tau \in \mathfrak{R}$ conserve the lagranzhian $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R} :$

$$D_t(X^i \cdot p_i^1) = D_t \left(\sum_{i=1}^m X_i(x) \cdot \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)^{(n)} \right) = 0.$$

СОДЕРЖАНИЕ

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

<i>Глухов Д.О., Богуш Р.П., Глухова Т.М.</i> Формальный язык описания генератора трехмерного ландшафта на основе композиций гармонических функций	2
<i>Железняк В.К., Бураченко И.Б.</i> Оценка нормативного показателя защищенности речевого сигнала сложным сигналом с большой базой	10
<i>Чертков В.М., Богуш Р.П., Андрощук А.В.</i> Нерекурсивная фильтрация изображений с использованием программируемых логических интегральных схем архитектуры FPGA	15
<i>Железняк В.К., Раханов К.Я., Бураченко И.Б.</i> Оценка разборчивости речи взаимной корреляцией сигнала линейной частотной модуляции в каналах утечки информации	22
<i>Оськин А.Ф., Болботунов А.А.</i> Программный комплекс для анализа и прогнозирования годичного радиального прироста деревьев	28
<i>Железняк В.К., Чернова И.С.</i> Оценка модели оптико-электронного канала утечки речевой информации	33
<i>Деканова М.В.</i> Экспертное ранжирование важности частных критериев оптимальности расписания в условиях неопределенности	40
<i>Русецкий И.С., Руголь Д.Г., Петрович О.Н.</i> Алгоритм управления источниками питания системы формирования пучка заряженных частиц с расширенными функциональными и сервисными возможностями	46

ФИЗИКА

<i>Шут В.Н., Сырцов С.Р., Романов В.А., Лалетин В.М., Лобановский Л.С.</i> Магнитная керамика $(\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x)\text{Fe}_2\text{O}_4$ с градиентом состава	50
<i>Шматок Е.В., Остриков О.М.</i> Особенности распределения напряжений в сплаве Ni_2MnGa в системе «полубесконечная трещина нормального отрыва – линзовидный механический двойник»	54
<i>Молодечкин М.О., Богуш В.А., Молодечкина Т.В.</i> Особенности формирования и экранирующие свойства композиционных материалов на основе диоксида титана	61
<i>Вабищевич С.А., Вабищевич Н.В., Бринкевич Д.И., Просолович В.С., Янковский Ю.Н.</i> Исследование прочностных свойств пленок фоторезиста на кремнии методом склерометрии	67
<i>Солодуха В.А., Ланин В.Л., Соловьёв Я.А.</i> Повышение устойчивости структур диодов Шоттки с охранном кольцом к разрядам статического электричества	72
<i>Бумай Ю.А., Бобученко Д.С., Васьков О.С., Вабищевич С.А., Ластовский С.Б., Трофимов Ю.В., Цвирко В.И.</i> Оптические и электрические свойства облученных быстрыми электронами светодиодов на основе гетероструктур	82
<i>Барановский О.К., Зеневич А.О., Горбадей О.Ю.</i> Влияние послеимпульсных явлений на коэффициент шума лавинного фотоприемника в режиме счета фотонов	90
<i>Янушкевич В.Ф., Кременя К.И., Заяц Е.Ю.</i> Моделирование взаимодействия амплитудно-модулированных сигналов с анизотропной средой плазмоподобного типа	97

МАТЕМАТИКА

<i>Герц А.Ю., Зеленкевич А.А., Гурьева Н.А., Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф.</i> Согласование порядков аппроксимации дифференциального и граничного операторов в краевой задаче для уравнений в частных производных	102
<i>Скоромник О.В.</i> Решение интегральных уравнений первого рода с вырожденной гипергеометрической функцией и нормированной функцией Бесселя в ядрах в классе интегрируемых функций	110
<i>Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф., Голубева О.В.</i> Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка	117