

MIESIĘCZNIK
POŁOCKI.

Т о м I.
Р о к 1818.

«Вестник Полоцкого государственного университета» продолжает традиции первого в Беларуси литературно-научного журнала «Месячник Полоцкий».



ВЕСНИК ПОЛОЦКАГА ДЗЯРЖАУНАГА УНІВЕРСІТЭТА
Серыя С. Фундаментальныя навукі

У серыі С навукова-тэарэтычнага часопіса друкуюцца артыкулы, якія прайшлі рэцэнзаванне, змяшчаюць новыя навуковыя вынікі ў галіне інфарматыкі і матэматыкі, фізікі.

ВЕСТНИК ПОЛОЦКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия С. Фундаментальные науки

В серии С научно-теоретического журнала публикуются статьи, прошедшие рецензирование, содержащие новые научные результаты в области информатики и математики, физики.

HERALD OF POLOTSK STATE UNIVERSITY
Series C. Fundamental sciences

Series C includes reviewed articles which contain novelty in research and its results in computer science and mathematics, physics.

Журнал входит в Российский индекс научного цитирования.

Адрес редакции:

Полоцкий государственный университет, ул. Блохина, 29, г. Новополоцк, 211440, Беларусь
тел. + 375 (214) 53 34 58, e-mail: vestnik@psu.by

Отв. за выпуск: В.А. Груздев, Д.О. Глухов, В.К. Железняк, А.А. Козлов.

Редактор О.П. Михайлова.

Подписано к печати 28.03.2019. Бумага офсетная 65 г/м². Формат 60×84¹/₈. Ризография.

Усл. печ. л. 20,22. Уч.-изд. л. 24,38. Тираж 100 экз. Заказ 671.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 621.391.82

МЕТОД АДАПТИВНОГО МАСКИРОВАНИЯ ВИДЕОКАДРА МАСКИРУЕМЫМ СИГНАЛОМ

д-р техн. наук, проф. В.К. ЖЕЛЕЗНЯК, Е.Р. АДАМОВСКИЙ
(Полоцкий государственный университет)

Предложен метод формирования адаптивного маскирующего видеокadra на основе произвольного маскируемого видеосигнала и хаотической импульсной последовательности. Обоснование преимущества метода за счет свойства адаптивности. Анализ метода в сравнении с существующими методами маскирования видеoinформации.

Ключевые слова: *маскирующий сигнал, маскируемый сигнал, видеосигнал, метод маскирования, хаотическая импульсная последовательность, канал утечки информации.*

Введение. Монитор компьютера при выводе изображения излучает электромагнитный сигнал, формируемый видеокартой. Доступ к данному сигналу на программном уровне позволяет в реальном времени формировать адаптивный маскирующий видеокادر, который может излучаться дополнительной радиоаппаратурой, находящейся в непосредственной близости с монитором, и маскировать путем зашумления его электромагнитное излучение. При этом не оказывается влияние на оптический диапазон излучения и не затрудняется доступ оператора к средству вычислительной техники (СВТ).

Активные методы маскирования являются худшими с точки зрения электромагнитной совместимости и радиоинтерференции, поскольку создают дополнительное излучение, способное превысить установленные нормы [1, 2]. Для решения этой проблемы ставится задача снижения избыточности маскирующего излучения при сохранении уровня защищенности видеосигнала. Предлагается метод маскирования видеoinформации, использующий маскируемый кадр как основу для генерации маскирующего кадра, что придает последнему свойство адаптивности.

В работе [3] сделан вывод, что маскирующий сигнал, учитывающий и повторяющий распределение спектральных составляющих маскируемого сигнала, наиболее эффективно его маскирует. В качестве маскирующего сигнала предложен сигнал хаотической импульсной последовательности (ХИП). Амплитуды спектральных составляющих видеосигнала и ХИП экспоненциально спадают с ростом частоты. Это характерно для всех сигналов импульсной природы (рисунок 1). Предлагаемое устройство генерации хаотической импульсной последовательности использует в качестве исходного сигнала белый шум с регулировкой распределения амплитуд составляющих в низкочастотной (НЧ), среднечастотной (СЧ) и высокочастотной (ВЧ) областях спектра сигнала [4].

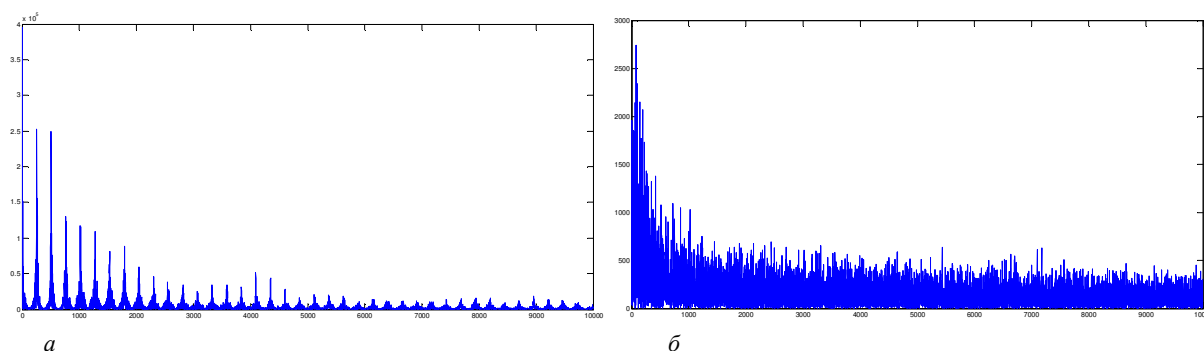


Рисунок 1. – Спектры сигналов:
a – видеосигнал; *б* – ХИП

Для исключения ухудшения отношения сигнал/шум (ОСШ) при маскировании видеосигнала в канале утечки информации (КУИ) хаотическая импульсная последовательность может быть сформирована синхронно с маскируемым видеокадром и оставаться статической при условии, что маскируемый видеокادر также является статическим.

Рассматриваемое устройство позволяет грубо настраивать распределение мощности спектра хаотической импульсной последовательности, поэтому маскирующий сигнал можно адаптировать для различных мониторов, отличающихся значениями строчной и кадровой частот. Для более точной настройки предлагается метод формирования маскирующего сигнала, использующий данные о маскируемом видеокадре и хаотической импульсной последовательности.

Описание метода. Суть предложенного метода в том, что на основе спектра маскируемого видеокадра и спектра ХИП строится спектр маскирующего сигнала. Метод учитывает точное распределение мощности спектра по частотам строк, содержащимся в видеосигнале, и на основе этого строится адаптивный маскирующий видеокадр при использовании ХИП. Это энергетически более выгодно, чем использование неадаптивного маскирующего кадра, поскольку позволяет избежать избыточности в распределении спектральных составляющих. Одновременно устраняется возможная недостаточность мощности маскирующего сигнала во всем диапазоне частот видеосигнала.

Использование сигнала хаотической импульсной последовательности предпочтительнее использования белого шума в качестве опорного сигнала, поскольку хаотическая импульсная последовательность изначально эффективнее маскирует видеосигнал, что позволяет не допускать утечки информации на этапе формирования адаптивного маскирующего сигнала.

Видеосигнал, формируемый видеокартой, является последовательностью цифровых данных, предназначенных для устройства вывода видеоинформации, которую можно получить программно или аппаратно из видеокарты. Полученный видеосигнал – дискретный набор данных s . Над сигналом s требуется произвести операцию дискретного преобразования Фурье (ДПФ):

$$S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (1)$$

где N – количество значений сигнала;
 k – индекс частоты.

В результате операции ДПФ формируется дискретный сигнал S , являющийся спектральным представлением видеосигнала. Особенность спектра видеосигнала заключается в сосредоточении спектральных составляющих около частот, кратных строчной частоте видеосигнала. При этом амплитуда строчных частот экспоненциально падает с ростом частоты.

Следующий шаг – получение огибающей спектра видеосигнала по формуле

$$d_i = \max M_i, \quad (2)$$

где d – набор отсчетов, соответствующих амплитудам строчных частот;

d_i – i -й отсчет, полученный разбиением спектра на равные диапазоны $M \subset S$, размерность которых соответствует строчной частоте видеосигнала, и выделением максимального элемента из множества.

Значения сигнала d содержит коэффициенты, отражающие распределение спектральной мощности маскируемого видеосигнала.

Для получения случайного сигнала h требуется источник ХИП, в качестве которого может выступать любое известное устройство, формирующее хаотическую импульсную последовательность. Над сигналом h проводится операция ДПФ согласно формуле (1), результатом которой является сигнал H .

Сигнал H разбивается на диапазоны M_i аналогично последовательности S . Затем подобным образом согласно формуле (2) выделяются коэффициенты g_i на основе огибающей спектра ХИП. Проводится проверка несоответствий массивов d и g с получением поправочных коэффициентов k .

$$k_i = d_i / g_i. \quad (3)$$

Поправочные коэффициенты k_i указывают на коэффициент усиления спектральных составляющих хаотической импульсной последовательности в i -м диапазоне. Каждый диапазон умножается на соответствующий ему коэффициент из последовательности k . Результат операции – сигнал F – модулированный спектр случайного сигнала.

$$F = \sum_i^L M_i k_i, \quad (4)$$

где L – количество диапазонов.

На данном этапе распределение составляющих модулированного спектра остается сходным с распределением составляющих спектра хаотической импульсной последовательности. Но при этом форма модулированного спектра скорректирована таким образом, при котором огибающая спектра маскирующего сигнала повторяет форму огибающей спектра маскируемого сигнала (рисунок 2).

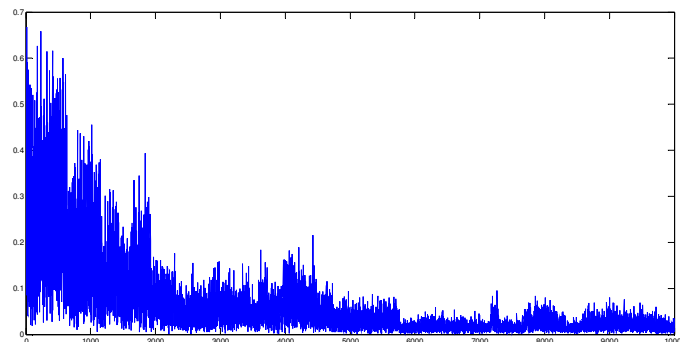


Рисунок 2. – Модулированный спектр маскирующего сигнала

Последовательность отсчетов F требуется подвергнуть операции обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ) для получения конечного маскирующего сигнала f .

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (5)$$

Полученный сигнал f синхронно излучается в канал утечки информации вместе с маскируемым сигналом s , где образуется их аддитивная смесь x , затрудняющая восстановление излученного маскируемого видеосигнала в случае его перехвата.

$$x_j = \sum f_j + s_j. \quad (6)$$

Эффективность маскирования видеосигнала сигналом ХИП исследуется в статьях [3, 5], в которых подтверждено преимущество маскирования видеосигнала хаотической импульсной последовательностью перед маскированием видеосигнала белым шумом.

Маскирующий сигнал f , полученный путем модуляции спектра белого шума сигналом огибающей спектра маскируемого видеосигнала, имеет тот же характер распределения спектральной мощности, что и ХИП: сосредоточение спектральной мощности в НЧ-диапазоне и экспоненциальный спад спектральной мощности в ВЧ-диапазоне.

Отличие маскирующего сигнала f и ХИП заключается в способе их формирования. Источником ХИП является случайный сигнал, а способ формирования – многоступенчатое квантование при ограниченной возможности настройки. Источником сигнала для формирования маскирующего сигнала f служат маскируемый и случайный сигналы, способ формирования – модуляция спектра случайного сигнала огибающей спектра маскируемого. Следствие использования маскируемого сигнала при формировании маскирующего сигнала – появление адаптивного свойства последнего. Свойство заключается в распределении спектральной мощности маскирующего сигнала, с определенной точностью повторяющей распределение спектральной мощности маскируемого сигнала, что приводит к устранению избыточности мощности маскирующего сигнала в НЧ-диапазоне и недостаточности в ВЧ-области. Это означает, что можно уменьшить коэффициент усиления маскирующего сигнала для его излучения без потери эффективности маскирования.

Для проверки эффективности предложенного метода предлагается сравнить ОСШ для замаскированного сигнала адаптивным маскирующим сигналом f и ХИП, равной средней мощности P_{cp}

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T s^2 dt. \quad (7)$$

Проверка производится на тестовых кадрах при коэффициенте усиления маскирующего сигнала $k = 50$ с различной частотой следования импульсов, образующих крупноплановые (рисунок 3, а) и мелкодетальные элементы (рисунок 3, б). Использование тестовых кадров обусловлено тем, что реальные изображения содержат оба типа элементов [6], но из-за сложной внутренней структуры не могут служить четким ориентиром в оценке степени защищенности изображения.

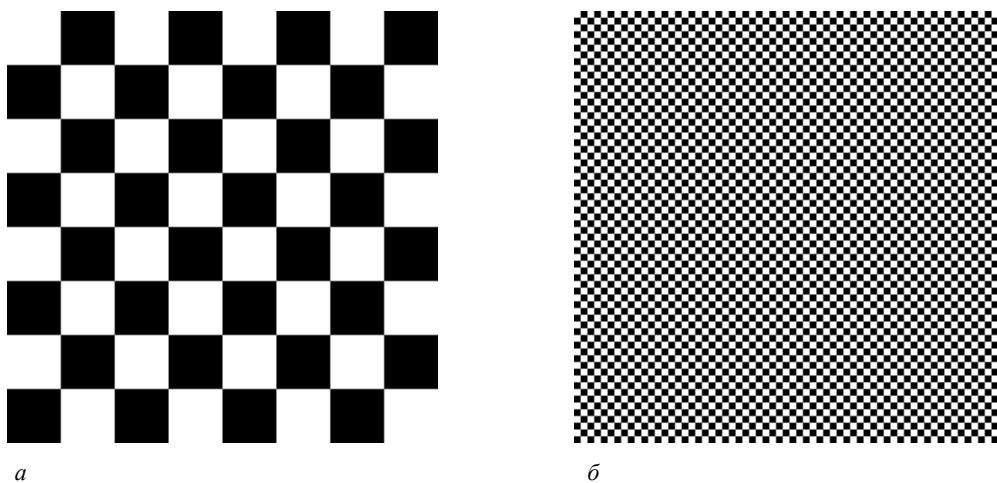


Рисунок 3. – Тестовые кадры:
a – с крупноплановыми объектами $f_{\text{имп}} = f_{\text{стр}} * 4$;
б – с мелкодетальными объектами $f_{\text{имп}} = f_{\text{стр}} * 32$

Результаты маскирования показаны на рисунках 4 и 5.

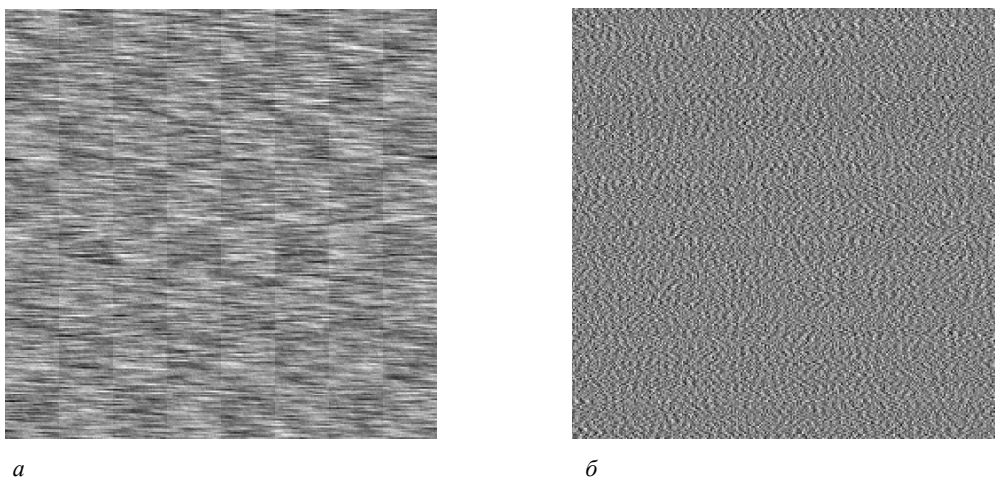


Рисунок 4. – Тестовые кадры, замаскированные адаптивной ХИП:
a – с крупноплановыми объектами; *б* – с мелкодетальными объектами

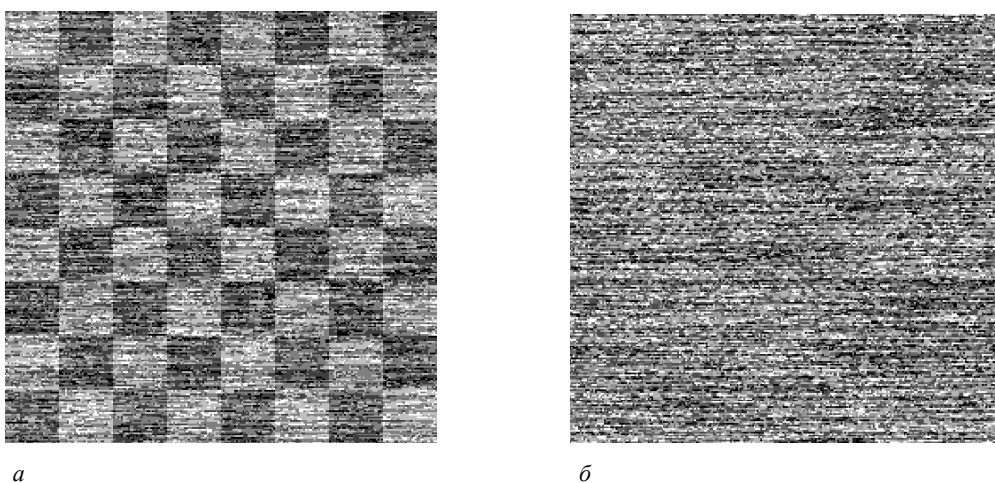


Рисунок 5. – Тестовые кадры, замаскированные ХИП:
a – с крупноплановыми объектами; *б* – с мелкодетальными объектами

Анализ рисунков 4, а и 5, а выявил, что адаптивный маскирующий сигнал f визуально лучше маскирует структуру крупных объектов, чем ХИП, создавая крупноплановые помехи, разрушающие контуры фигур.

Рисунки 4, б и 5, б свидетельствуют о том, что мелкодетальную информацию оба маскирующих сигнала маскируют в равной степени, поскольку мощности высокочастотных составляющих спектра ХИП достаточно для маскирования ВЧ-диапазона видеосигнала.

Структура маскирующего кадра f не является одинаковой для разных маскируемых кадров, образуя крупномасштабные помехи при наличии на изображении крупных объектов, в отличие от ХИП, и не образуя их при отсутствии больших объектов в видеокadre. Следовательно, адаптивный маскирующий сигнал f имеет преимущество перед ХИП, поскольку способен адаптивно подстраиваться под маскируемый сигнал путем коррекции собственного спектра.

Вывод. Алгоритм реализован на языке программирования MatLab. В среде MatLab было произведено сравнение маскирования тестовых сигналов, получены графики и численные значения.

Предложен метод маскирования видеосигнала маскирующим адаптивным видеокadre, построенным на основе спектра маскируемого сигнала с применением хаотической импульсной последовательности. Проведено сравнение адаптивного маскирующего кадра с хаотической импульсной последовательностью применительно к маскированию тестовых видеокadre. Результат сравнения – качественная оценка, визуально более сильное разрушение крупноплановых объектов на тестовых кадрах адаптивной ХИП. На основе полученных данных сделано заключение, что адаптивный маскирующий сигнал имеет ряд преимуществ перед белым шумом и ХИП – свойство адаптивности и обеспечение более высокого уровня защищенности видеосигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. van Eck, W. Electromagnetic Radiation from Video Display Units: An Eaves-dropping Risk? / Wim van Eck // Computers & Security. – 1985. – Vol. 4. – P. 269 – 286.
2. Об утверждении санитарных норм и правил «Требования к электромагнитным излучениям радиочастотного диапазона при их воздействии на человека» [Электронный ресурс] : постановление М-ва здравоохранения Респ. Беларусь, 05.03.2015 г. № 23 // Светлогорский зональный ЦГЭ. – Режим доступа: http://www.svetlge.by/wp-content/uploads/2015/01/post_mz-rb_23-05.03.2015.pdf.
3. Барков, А.В. Экспериментальное исследование метода адаптивного маскирования видеосигнала от утечки по техническим каналам / А.В. Барков, В.К. Железняк // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2014. – № 4. – С. 18–23.
4. Генератор маскирующих сигналов : пат. 18525 Респ. Беларусь : МПК H03K 3/84, H04K 3/00 (2012) / В. К. Железняк, Д. С. Рябенко ; дата публ.: 30.08.13.
5. Барков, А.В. Формирование маскирующей помехи для защиты видеосигнала от утечки по техническим каналам / А.В. Барков, В.К. Железняк // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2012. – № 12. – С. 40–45.
6. Адамовский, Е.Р. Тестовые кадры для оценки защищенности цветных и черно-белых видеоизображений в технических каналах утечки информации / Е.Р. Адамовский, В.К. Железняк // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 79.

Поступила 20.03.2019

METHOD OF ADAPTIVE VIDEO FRAME MASKING USING MASKED SIGNAL

V. ZHELEZNYAK, E. ADAMOVSKIY

The method of forming an adaptive masking video frame based on an arbitrary masked image. Justification of the advantages of the method due to the property of adaptability. Analysis of the method in comparison with existing methods of video masking.

Keywords: *masking signal, masked signal, video signal, masking method, chaotic pulse sequence, technical leak channels.*

УДК 681.32

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЖАТИЯ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЗЕМЛИ НА ОСНОВЕ БЛОЧНОГО АДАПТИВНОГО КВАНТОВАНИЯ

*канд. техн. наук, доц. Р.П. БОГУШ, И.Ю. ЗАХАРОВА,
канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет);
канд. техн. наук Н.М. НАУМОВИЧ
(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники)*

Для сжатия радиолокационных данных на основе блочного адаптивного квантования рассматривается получение пороговых значений методом решения системы нелинейных уравнений относительно координат углов ступенчатой функции, заменяющей плотность нормального распределения. В системе уравнений нормальное распределение присутствует как в явном виде, так и под знаком интеграла, нижний и верхний пределы которого неизвестны. Для экспериментов в качестве входных данных использовались значения отраженного сигнала радиолокатора с синтезом апертуры ERS-1, отсчеты которого представлены в виде синфазной и квадратурной компонент. Приведены результаты фокусировки с геометрической коррекцией восстановленных после сжатия и представленных в стандартном формате данных. Рассчитаны основные показатели качества работы квантователя.

Ключевые слова: синтезированная апертура, радиолокационное изображение, блочное адаптивное квантование.

Введение. В настоящее время в системах дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) на основе радиолокаторов с синтезированной апертурой (РСА) антенны передаваемый поток данных достигает 4 Гб/с и выше [1, 2]. В большинстве случаев информация обладает избыточностью, благодаря чему возможно применение алгоритмов сжатия, причем их эффективность будет значительно выше, если учитывать особенности обрабатываемых данных. Известно, что значения компонент принимаемого сигнала радиолокатором с синтезированной апертурой имеют нормальное распределение с нулевым средним, поэтому для подобных сигналов используются алгоритмы блочного адаптивного квантования с пороговыми значениями для нормального типа распределения. Такие требования приводят к достаточно высоким требованиям при разработке квантователя, способного полностью использовать эффективную скорость передачи данных РСА, обеспечивая наилучшую производительность, а также совместимого с аппаратными ограничениями и обеспечивающего некоторую гибкость в отношении распределения скорости передачи по битам на выборку. В связи с чем одной из задач является синтез алгоритма квантования функции плотности нормального распределения на множестве ступенчатых функций на заданном интервале, свободного от ограничений по количеству уровней. Для определения эффективности полученных таким образом пороговых уровней необходимо выполнить моделирование сжатия на реальных радиолокационных данных и определить качественные характеристики квантователя.

Целью работы является моделирование сжатия комплексных радиолокационных данных дистанционного зондирования Земли на основе блочного адаптивного квантования с использованием уровней квантования и восстановления, сформированных с использованием алгоритма получения пороговых значений в виде системы нелинейных уравнений относительно координат углов ступенчатой функции, заменяющей плотность нормального распределения.

1. Сжатие и восстановление комплексных радиолокационных данных

Алгоритм блочного адаптивного квантования основан на том, что динамический диапазон уровней мощности сигнала (от 0 до 255 или от -128 до +127) в выделенном блоке данных намного меньше, чем у всего набора данных [3, 4]. В качестве первого шага предлагается разделить необработанные данные на блоки небольшого размера по отношению ко всему набору входных данных. Минимальный размер блока выбирается таким образом, чтобы обеспечить нормальное распределение статистики внутри него, а максимальный размер ограничен мощностью сигнала, которая должна оставаться постоянной для него [5]. Для радиолокационных данных ДЗЗ одним из наиболее часто используемых является блок размером 128 отсчетов, который обеспечивает выполнение заданных условий. Алгоритм на основе блочного адаптивного квантования использует уровни Макса – Ллойда, удовлетворяющие критерию минимальной среднеквадратической ошибки.

Пороговые уровни квантования и восстановления при использовании квантователя с уровнями Макса – Ллойда связаны со среднеквадратическим значением уровня сигнала σ , поэтому для каждого блока вычисляется

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2},$$

где N – количество отсчетов сигнала в блоке;

x_i – значение уровня отсчета дискретного сигнала.

Определение значений оптимальных порогов квантования для минимизации ошибки выполняется согласно выражению

$$T_k = C_k \cdot \sigma,$$

где C_k – пороговое значение для квантователя, $k \in 1 \dots K$, K – количество уровней.

С использованием вычисленных оптимальных порогов квантования выполняется неравномерное эффективное кодирование входных отсчетов сигнала. Результат представляется в виде записей кодовых слов и величин стандартного отклонения для каждого блока данных.

Восстановление сжатых данных может быть выполнено в процессе их приема и распаковки. На первом шаге при восстановлении сжатых данных для каждого блока осуществляется извлечение из пакета среднеквадратическим значением уровня сигнала и определение оптимальных уровней восстановления:

$$R_k = D_k \cdot \sigma,$$

где D_k – пороговое значение для восстановления сигнала при использовании блочного адаптивного квантования.

2. Квантование функции плотности нормального распределения в метрике квадратичного отклонения

Определение. Пусть $m \in N$. Функция $f_m : [a, b] \rightarrow R(a < b)$ называется m -кусочно-постоянной на $[a, b]$, если $\exists x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1}$ такие, что

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < b = x_m,$$

$$f_m(x) = y_i = \text{const} \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i), \quad f_m(x_i) = y_i, \quad f_m(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad y_i \neq y_{i+1}, \quad \forall i = \overline{1, m-1}.$$

Множество m -ступенчатых функций (m – уровни функции) $f_m : [a, b] \rightarrow R(a < b)$ обозначим как $S_m[a, b]$.

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$, $f \in C^2[a, b]$, $f'(x) < 0$, $\forall x \in [a, b]$, $m \in N$. Для минимизации ошибки квантования требуется в пространстве m -ступенчатых функций найти наилучшее приближение $h_m : [a, b] \rightarrow R$ функции $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ в метрике квадратичного отклонения такое, что $\text{dist} = \|f - h_m\|_{C_{[a,b]}^2} = \min_{f_m \in S_m[a,b]} \|f - f_m\|_{C_{[a,b]}^2}$. С учетом этого расстояние оценивается как

$$\text{dist} = \|f - h_m\|_{C_{[a,b]}^2} = \sqrt{\int_a^b (f(x) - h_m(x))^2 dx} = \min_{f_m \in S_m[a,b]} \sqrt{\int_a^b (f(x) - f_m(x))^2 dx} = \min_{f_m \in S_m[a,b]} \|f - f_m\|_{C_{[a,b]}^2}.$$

Пусть ступенчатая функция $h_m(x) = y_k$ равна константе на отрезке $x \in (x_{k-1}, x_k)$, $k = \overline{1, m}$, при этом функция ошибки $G(x_1, \dots, x_{m-1}, y_1, y_m) = \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - y_k)^2 dx$ описывает квадрат отклонения данной функции $h_m : [a, b] \rightarrow R$ от функции нормального распределения $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$. Необходимое условие экстремума функции $G(x_1, \dots, x_{m-1}, y_1, y_m)$ описывается системой уравнений

$$\frac{\partial G(x_1, \dots, x_{m-1}, y_1, y_m)}{\partial x_i} = G'_{x_i} = 0, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad G'_{y_i} = 0, \quad i = \overline{1, m},$$

из которой следует

$$\begin{cases} f(x_i) = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1}), i = \overline{1, m-1} \\ \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx = y_j(x_j - x_{j-1}), j = \overline{1, m} \\ x_0 = \text{const}, x_m = \text{const}. \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) имеет $2m - 1$ уравнений и $2m - 1$ неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, y_1, y_2, \dots, y_m$.

При квантовании необходимо приблизить функцию плотности нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

ступенчатыми функциями таким образом, чтобы ошибка этого приближения была

минимально возможной. Условия $f \in C^2[a, b], f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$ гарантируют существование и единственность решения системы (1) для произвольного натурального m , а также наличие локального минимума для этого решения (1).

Учитывая экспоненциальное убывание плотности нормального распределения к нулю, в качестве правого края отрезка установлено значение равное 3, а в качестве левого края отрезка принималось нулевое значение.

Для решения указанной задачи разработан алгоритм решения системы (1) в предположении, что последний уровень принимает нулевое значение. Пусть $A = 3$ – параметр задачи (правый фиксированный конец отрезка $[0, A]$) Таким образом, имеем m ненулевых уровней и последний – $(m+1)$ -й – нулевой уровень, ($2m$ переменных и $2m$ уравнений):

$$\begin{cases} f(x_i) = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1}), i = \overline{1, m-1} \\ f(x_m) = \frac{1}{2}y_m, y_m > 0, y_{m+1} = y(A) = 0 \\ \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx = y_j(x_j - x_{j-1}), j = \overline{1, m} \\ x_0 = \text{const} = 0, x_m < A. \end{cases} \quad (2)$$

И если m -й уровень ненулевой, получим другие граничные условия:

$$\begin{cases} f(x_i) = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1}), i = \overline{1, m-1} \\ \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx = y_j(x_j - x_{j-1}), j = \overline{1, m} \\ x_0 = \text{const} = 0, x_m = \text{const} = A, y_m > 0 \end{cases} \quad (3)$$

и система содержит $2m - 1$ уравнений и $2m - 1$ неизвестных.

В работе при вычислении интегралов применен алгоритм для составной интегральной квадратурной формулы с 12-м порядком погрешности, когда исходный отрезок интегрирования делится на число частей кратное десяти (11 узлов равномерной сетки на каждой части). C_i, x_i, r – соответственно веса, узлы и невязка квадратурной формулы

$$\int_a^b f(z)dz = \sum_{i=0}^n \overline{C}_i f(x_i) + r(f). \quad (4)$$

Интегрируя степенные координатные функции z^{2s} на каноническом отрезке $[-1,1]$, $n_0 = 10$ – число частей, на которое делится отрезок $[-1,1]$, учитывая симметрию весов относительно центрального узла $z = 0$, получим

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 dz = 2 = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{n_0/2} C_k \\ \int_{-1}^1 z^{2s} dz = 2 / (2s + 1) = 2 \sum_{k=1}^{n_0/2} C_k (2k / n_0)^{2s}, s = \overline{1, n_0 / 2}. \end{cases} \quad (5)$$

Для канонического отрезка $[-1,1]$ запишем квадратурную формулу (4) в эквивалентном виде:

$$\int_{-1}^1 f(z) dz = \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^{n_0} C_i f(x_i) = 5h \sum_{i=0}^{10} C_i f(x_i), \frac{hn_0}{2} = 1, x_i = -1 + ih, i = \overline{0, n_0}, \quad (6)$$

где h – шаг интегрирования;

$n_0 = 10$ – число отрезков, на которое делится канонический отрезок $[-1,1]$ и каждая часть из k в составной формуле исходного отрезка $[a, b]$.

Определенный интеграл на отрезке $[a, b]$ отличается от формулы (6) на отрезке $[-1,1]$ длиной интервала в $k = n / n_0 = \frac{b-a}{2}$ раз. Применяя замену переменных

$$x = \frac{b+a}{2} + \left(\frac{b-a}{2}\right)z, a \leq x \leq b, -1 \leq z \leq 1, dx = \left(\frac{b-a}{2}\right) dz = k dz$$

преобразуем формулу (4) к следующему виду:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f(z) \left(\frac{b-a}{2}\right) dz = \frac{hn_0}{2} \sum_{i=0}^{n_0-k} C_i f(x_i), h = \frac{b-a}{n}, hn = b-a, x_i = a + ih, i = \overline{0, n}. \quad (7)$$

Разбивая канонический отрезок $[-1,1]$ $n_0 = 10$ равных частей (из соображений удобства разбиения), используя симметрию весовых коэффициентов, можно получить решение системы уравнений (5) ($n_0 = 10$), в которой 6 неизвестных коэффициентов ($C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$) являются решением системы $n_0 / 2 + 1 = 6$ линейных неоднородных уравнений с 11 алгебраическим порядком точности.

Изучив данные таблицы 1, видно, что алгебраический порядок точности системы уравнений (5) при $n_0 = 10$ равен 11, а порядок погрешности квадратурной формулы

$$\int_{-1}^1 f(z) dz = 5h \sum_{i=0}^{10} C_i f(x_i), 5h = 1, \sum_{i=0}^{10} C_i = 2, x_i = -1 + ih, i = \overline{0, 10}$$

равен 12 (C_i определяются с помощью формулы (7)).

Таблица 1. – Сравнение интеграла от координатной степенной функции и квадратурной интегральной формулы

Точное значение интеграла	Численное значение интеграла
a(0)=2.0000000000000000	b(0)=2.0000000000000004
a(1)=0.0000000000000000	b(1)=0.0000000000000000
a(2)=0.6666666666666666	b(2)=0.6666666666666669
a(3)=0.0000000000000000	b(3)=-0.0000000000000000
a(4)=0.4000000000000000	b(4)=0.4000000000000001
a(5)=0.0000000000000000	b(5)=-0.0000000000000000
a(6)=0.2857142857142857	b(6)=0.2857142857142858
a(7)=0.0000000000000000	b(7)=0.0000000000000000
a(8)=0.2222222222222222	b(8)=0.2222222222222223
a(9)=0.0000000000000000	b(9)=-0.0000000000000000
a(10)=0.1818181818181818	b(10)=0.1818181818181819
a(11)=0.0000000000000000	b(11)=-.0000000000000000
a(12)=0.1538461538461539	b(12)=0.1554621683809524

Для $n = kn_0 = 10 \cdot k$ ($n_0 = 10$) из выражения (6) получим составную формулу:

$$\int_a^b f(x)dx = 5h \sum_{i=0}^{n_0 \cdot k = n} \overline{C}_i f(x_i), h = \frac{b-a}{n}, x_i = a + ih, i = \overline{0, n}, \quad (8)$$

в которой весовые коэффициенты \overline{C}_i определяются с помощью составной формулы

$$\overline{C}_i = \begin{cases} \frac{16067}{299376} = C_5, i = 0 \vee i = n \\ \frac{26575}{74844} = C_4, i \equiv 1 \pmod{10} \vee i \equiv 9 \pmod{10} \\ \frac{-16175}{99792} = C_3, i \equiv 2 \pmod{10} \vee i \equiv 8 \pmod{10} \\ \frac{5675}{6237} = C_2, i \equiv 3 \pmod{10} \vee i \equiv 7 \pmod{10} \\ \frac{-4825}{5544} = C_1, i \equiv 4 \pmod{10} \vee i \equiv 6 \pmod{10} \\ \frac{17807}{12474} = C_0, i \equiv 5 \pmod{10} \\ \frac{16067}{149688} = 2C_5, i \equiv 0 \pmod{10} \wedge i > 0 \wedge i < n. \end{cases} \quad (9)$$

Отметим, что при уменьшении шага интегрирования в два раза погрешность невязки в формуле (8) уменьшается в 2^{12} раз [9, 10].

Положительные уровни квантования и восстановления (отрицательные уровни симметричны относительно оси ординат) по представленной методике для трех значений разрядности квантователя представлены в таблице 2.

Таблица 2. – Рассчитанные уровни квантования и восстановления по представленной методике

Разрядность квантователя					
$k = 3$		$k = 4$		$k = 5$	
Ck	Dk	Ck	Dk	Ck	Dk
0	0.4932	0	0.3160	0	0.1979
0.78	0.9867	0.5244	0.6320	0.3492	0.3925
1.2314	1.466	0.7706	0.8889	0.5017	0.5410
1.7057	1.9454	1.0064	1.1457	0.6435	0.6894
		1.2424	1.4149	0.7686	0.8272
		1.4868	1.6842	0.8910	0.9650
		1.7941	2.0212	1.0099	1.1018
		2.1458	2.3582	1.1290	1.2385
				1.2516	1.3809
				1.3765	1.5233
				1.5125	1.6786
				1.6540	1.8338
				1.8204	2.0131
				1.9995	2.1925
				2.2463	2.4196
				2.5360	2.6468

Используя данный подход можно определить значения уровней практически для любой разрядности квантователя.

3. Результаты моделирования

Сжатие и восстановление данных на основе блочного адаптивного квантования с последующей записью их в стандартный формат и с дальнейшей фокусировкой реализованы с использованием программного пакета MatLab. Для экспериментов в качестве входных значений использовались данные РСА

ERS-1 с 8-битными синфазной и квадратурной составляющими. Для фокусировки и формирования радиолокационного изображения с геометрической коррекцией использовался алгоритм, реализованный в пакете MatLab, из [6].

На рисунке 1, *a* представлено сфокусированное радиолокационное изображение без предварительной обработки, на рисунках 1, *б* – *з* показаны результирующие изображения, полученные после квантования и восстановления данных.

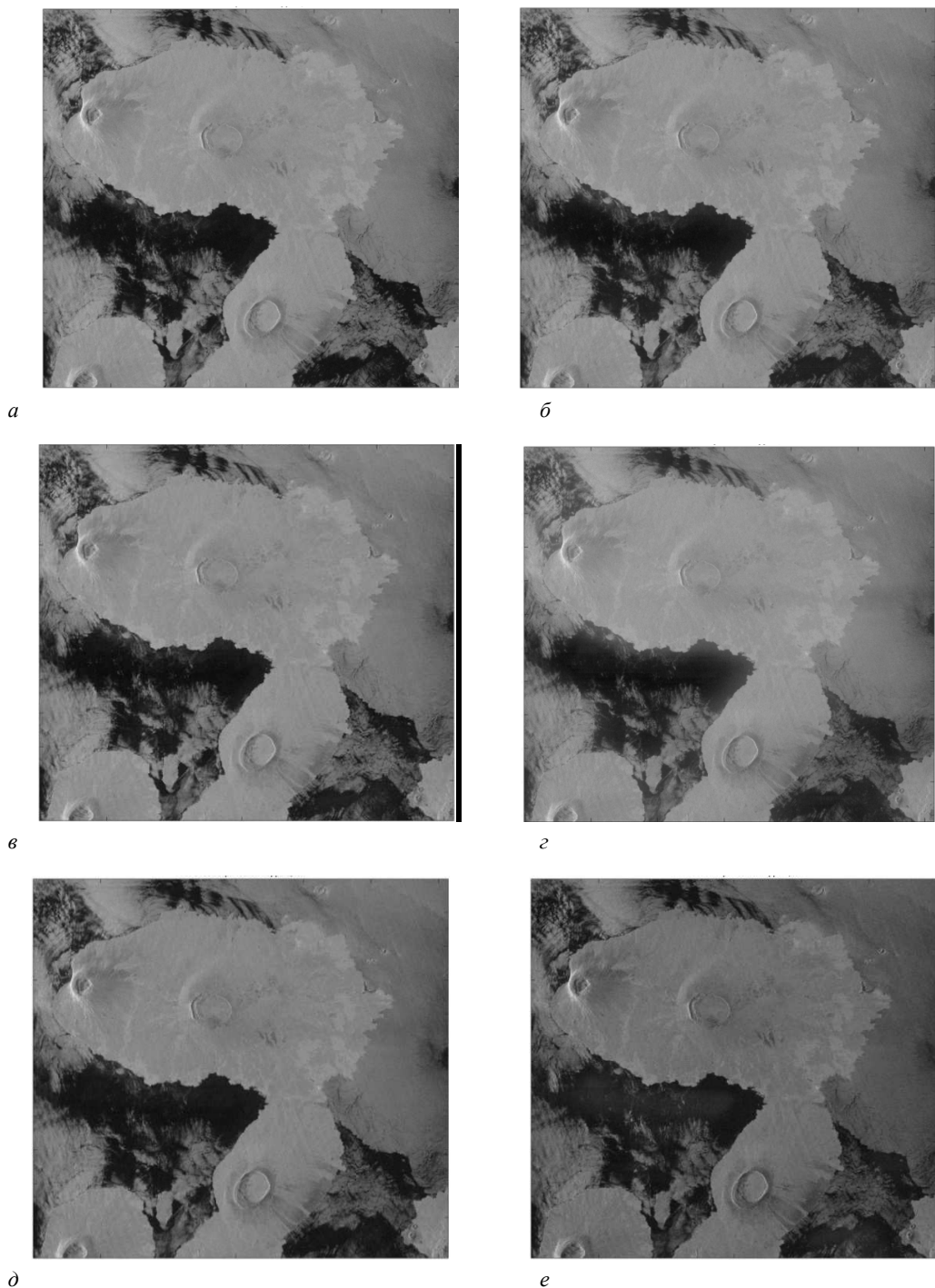
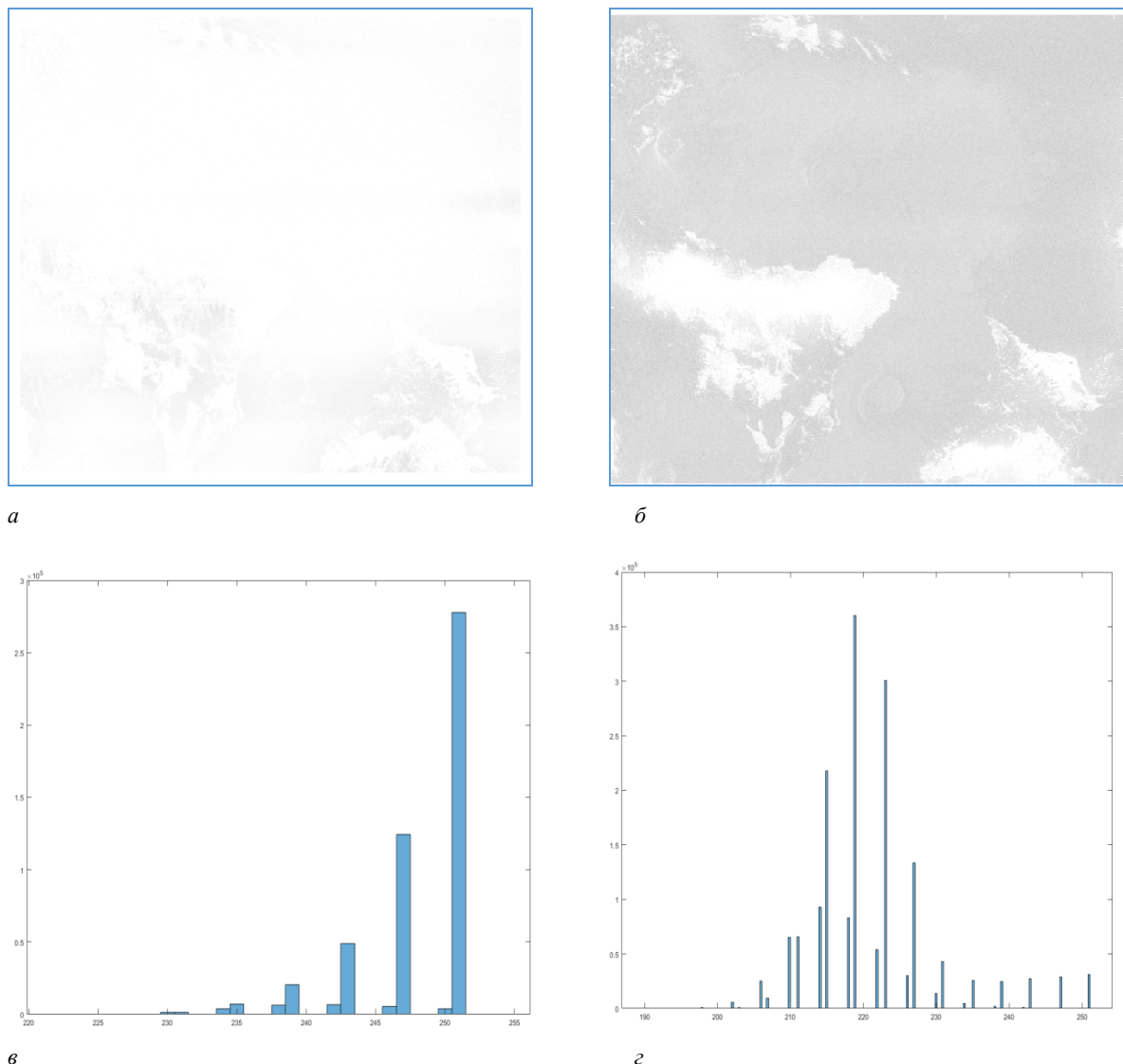


Рисунок 1. – Радиолокационные изображения PCA ERS-1:
a – без предварительной обработки; *б* – обработанное при разрядности квантователя $k = 5$;
в – обработанное при разрядности квантователя $k = 4$; *г* – обработанное при разрядности квантователя $k = 3$;
д – обработанное при разрядности квантователя $k = 4$ на основе уровней из [7];
е – обработанное при разрядности квантователя $k = 3$ на основе уровней из [7]

Для визуальной оценки изменений, вызванных квантованием, на рисунке 2 показаны негативные разностные изображения, которые были получены путем вычитания сфокусированного изображения без обработки из сфокусированных изображений со сжатием.



**Рисунок 2. – Негативные разностные изображения и их гистограммы для $k = 3$:
а, в – при использовании рассчитанных уровней; б, з – при использовании уровней из [7]**

Для оценки качества работы квантователя может быть использовано отношение сигнал/шум (Signal To Quantization Noise Ratio – SQNR), которое вычисляется как [8]:

$$SQNR = 10 \lg \left(\frac{\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} s_{ij}}{\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} (s_{ij} - \tilde{s}_{ij})^2} \right),$$

где s_{ij} – уровень яркости пикселя необработанного изображения;

\tilde{s}_{ij} – уровень яркости пикселя восстановленного после сжатия изображения;

M – количество строк в матрице данных;

N – количество столбцов в матрице данных.

Для оценки схожести изображений может быть использовано значение корреляции для исходного и полученного после сжатия и восстановления данных изображений [11]:

$$COR = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} (s_{ij} - \bar{s})(\tilde{s}_{ij} - \bar{\tilde{s}})}{\sqrt{\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} (s_{ij} - \bar{s})^2} \sqrt{\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} (\tilde{s}_{ij} - \bar{\tilde{s}})^2}},$$

где $\bar{s} = \frac{1}{MN} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} s_{ij}$;

$$\bar{\tilde{s}} = \frac{1}{MN} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{s}_{ij} .$$

В таблице 3 приведены значения для рассчитанных уровней квантования и для уровней квантования представленных в [7].

Таблица 3. – Результаты экспериментов по оценке качественных характеристик сжатия

Разрядность квантователя	$SQNR_1$, дБ	$SQNR_2$, дБ	COR_1	COR_2
$k = 3$	16.4472	14.9621	0.9962	0.9851
$k = 4$	19.6901	20.0387	0.9980	0.9971
$k = 5$	21.5484	–	0.9994	–

Примечание. В индексе: 1 – для полученных уровней; 2 – для уровней из [7].

Анализ результатов моделирования показывает, что разработанный подход расчета уровней квантования и восстановления для адаптивного блочного квантования корректен и позволяет получать значения уровней практически для любой требуемой разрядности квантователя. Опираясь на данные таблицы 3, отметим, что существует возможность обеспечения улучшения качества восстановленных данных.

Заключение. Рассмотрена методика получения пороговых значений квантования и восстановления для алгоритма сжатия данных на основе блочного адаптивного квантования. Представлены результаты моделирования в пакете MatLab для сжатия комплексных данных PCA ERS-1 с использованием полученных уровней обработки для различной разрядности квантователя. Приведены сфокусированные изображения с геометрической коррекцией для сжатых данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нестеров, И.М. Влияние сжатия данных на качество радиолокационных изображений / И.М. Нестеров // Журнал радиоэлектроники. – 2016. – № 8.
2. Коберниченко, В.Г. Радиоэлектронные системы дистанционного зондирования Земли : учеб. пособие / В.Г. Коберниченко ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2016. – 220 с.
3. Benz, U.A Comparison of Several Algorithms for SAR Raw Data Compression / U. Benz, K. Strodl, A. Moreira // IEEE Transactions on geoscience and remote sensing. – 1995. – V. 33. – № 5. – P. 1266–1276.
4. Agrawal, N. SAR signal processing algorithms / N. Agrawal, K. Venugopalan // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. – 2009. – Vol. 4. – № 9. – P. 40–45.
5. Peshkova, S. Analysis of Complex SAR RAW Data Compression [Electronic resource] / S. Peshkova, S. Vnotchenko // SAO/NASA Astrophysics Data System (ADS). – Mode of access: http://adsbit.harvard.edu/cgi-bin/nph-article_query?bibcode=2000ESASP.450D..19F&db_key=AST&page_ind=555&plate_select=NO&data_type=GIF&type=SCREEN_GIF&classic=YES. – Date of access: 14.01.19.
6. Моделирование алгоритма формирования радиолокационного изображения на основе представленных в формате CEOS необработанных данных дистанционного зондирования Земли / Р.П. Богуш [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 13–21.
7. Technical Note: Envisat ASAR Data Decoding [Electronic resource]. – Mode of access: <https://earth.esa.int/documents/10174/1592412/ENVTEC145F.pdf>. – Date of access: 20.01.19.
8. Сэлмон, Д. Сжатие данных, изображений и звука / Д. Сэлмон. – М. : Техносфера, 2004. – 368 с.

9. Пастухов, Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.
10. Пастухов, Ю.Ф. Тензор обобщенной энергии / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, С.В. Чернов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 78–100.
11. Мальцев, С.В. Обработка сигналов и изображений средствами векторно-матричных вычислений / С.В. Мальцев, С.В. Абламейко, Р.П. Богуш. – Новополоцк : ПГУ, 2011. – 212 с.

Поступила 12.03.2019

SIMULATION OF EARTH REMOTE SENSING DATA COMPRESSION BASED ON BLOCK ADAPTIVE QUANTIZATION

**R. BOHUSH, I. ZAKHARAVA, Y. PASTUHOV,
D. PASTUHOV, N. NAUMOVICH**

In order to compress data using the algorithm based on block adaptive quantization, a technique for obtaining threshold values and approximation errors for a different number of quantization levels is considered. The approach is based on using a system of nonlinear equations with respect to the coordinates of the angles of the step function, replacing the density of the normal distribution. As the initial data, the values of the reflected ERS-1 signal with In-phase and Quadrature phase components were used. The results of focusing with geometric correction of the data recovered after compression are presented. The main quality indicators of the quantizer are calculated.

Keywords: synthetic aperture radar, radar image, compression, block adaptive quantization.

УДК 534; 53.08:681.3

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛА С ЛИНЕЙНО-ЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ВИГНЕРА ДЛЯ ОЦЕНКИ РАЗБОРЧИВОСТИ РЕЧИ

*д-р техн. наук, проф. В.К. ЖЕЛЕЗНЯК, канд. техн. наук К.Я. РАХАНОВ
(Полоцкий государственный университет)*

Приводится формализованный алгоритм цифровой обработки сигнала с линейно-частотной модуляцией частотно-временным преобразованием Вигнера для оценки разборчивости речи, включающий обобщенный алгоритм оценки защищенности и принятых мер защиты объекта информатизации (ОИ), алгоритм снижения порогового эффекта сигнала с линейной частотной модуляцией и алгоритм оценки разборчивости речи. В работе представлена оценка эффективности предложенного алгоритма по времени выполнения. Предлагается способ снижения времени выполнения алгоритма за счет введения коэффициента снижения количества полос разбиения частотно-временной области. Сравниваются теоретические и практические результаты выполнения алгоритмов.

Ключевые слова: оценка разборчивости речи, частотно-временное преобразование Вигнера, канал утечки информации, разрешающая способность, сигнал с линейно-частотной модуляцией.

Введение. Совершенствование методов оценки разборчивости речи определяется измерительным сигналом и методами их обработки в каналах утечки информации. Значительная неравномерность амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) каналов утечки информации (КУИ) обуславливает методическую погрешность при использовании гармонического сигнала в полосах равной разборчивости. Применение сигнала линейной частотной модуляции (ЛЧМ), предложенного в работах [1–4] обуславливает решение этой научной задачи. Предложенный метод базируется на преимуществах ЛЧМ-сигнала в надпороговой области при устранении основного его недостатка – порогового эффекта. Частотно-временное представление сигнальной энергии функцией Вигнера позволило учесть тонкую структуру ЛЧМ-сигнала. Дополнение к корреляционной теории разборчивости речи, разработанной для метода гармонического сигнала, позволяет значительно снизить методические (теоретические) погрешности, обусловленные рядом факторов, искажающих акустический сигнал в замкнутом объеме.

Принципиальное различие в построении приемников для гармонического и сигнала с ЛЧМ обусловило необходимость разработки нового алгоритма цифровой обработки и формирования стимулирующего сигнала. Программно-аппаратный комплекс (ПАК) для ЛЧМ-сигнала включает наряду с аппаратными средствами специальный программный компонент, назначение которого состоит в имитации функционирования ряда аппаратных средств [4]. Функциями ПАК являются автоматизированное управление и генерация стимулирующих сигналов, адаптивная цифровая их обработка, вычисление и представление результатов оценки защищенности каналов утечки речевой информации (КУРИ). Основные требования, предъявляемые к программному компоненту, – адекватность функционирования, быстрдействие, минимальный объем занимаемой оперативной памяти.

Для оценки разборчивости речи методом сигнала с ЛЧМ предложено максимальный объем функций вынести в специальный программный компонент. Это упрощает аппаратную реализацию ПАК и, как следствие, снижает его стоимость. Кроме того, специальный программный компонент с максимальным количеством интегрированных функций (управления, синхронизации, генерации сигнала, фильтрации, оценки показателей и т.д.) повышает надежность, масштабируемость, устойчивость, адаптивность всего ПАК.

1. Обобщенный алгоритм оценки разборчивости речи. С учетом положительных решений обработки гармонического сигнала, реализованной в изделиях «К6-6», ФИЛИН-А и в пособии [5], разработан обобщенный принцип оценки защищенности и принятых мер защиты ОИ методом обработки ЛЧМ-сигнала частотно-временным преобразованием Вигнера. На базе этого принципа разработаны способ и устройство оценки разборчивости речи [1, 2].

Принцип оценки защищенности и принятых мер защиты ОИ заключается в последовательном выполнении следующих этапов:

- 1.1) исследуются возможные КУРИ на ОИ и анализируются предъявленные требования к их защищенности;
- 1.2) определяются возможные КУРИ, в которых существует потенциальная возможность извлечения речевой информации;
- 1.3) по каждому КУРИ задаются необходимые нормативные величины показателя защищенности W_0 , которые зависят от степени защищенности, особенностей КУРИ, источников излучения, среды пространства и средств извлечения информации, места и времени эксплуатации ОИ;

1.4) проводится снижение порогового эффекта ЛЧМ-сигнала методом синхронного накопления спектральных составляющих с автоматическим принятием решения о достижении порога чувствительности;

1.5) осуществляется оценка величины показателя W_i методом ЛЧМ-сигнала с учетом влияния воздействующих внешних факторов с отображением и документированием полученных результатов;

1.6) вычисляется разборчивость речи W_i для принятия решения о степени защищенности КУИ на основании нормативных значений величины разборчивости речи W_0 , ($W_0 > W_i$ либо $W_0 < W_i$;) . В случае $W_i > W_0$ применяются схемно-конструктивные и организационные меры для выполнения требований защищенности согласно общим принципам защиты информации. Осуществляется повторение процедуры оценки величины нормативного показателя (этап 4).

При достижении требуемой величины нормативного показателя (на основании принятого решения о защищенности) КУРИ признается защищенным, что позволяет перейти к следующему каналу (этап 2).

Выбор минимальной величины нормативного показателя (этап 3) и принятие решения о защищенности (этап 6) осуществляется оператором (специалистом по защите информации) на основании полученных ПАК показателей защищенности (разборчивости речи) ОИ и предъявляемых требований к степени защищенности. Функции по оценке величины показателя защищенности в КУИ (этап 5) обеспечивают методом широкополосного ЛЧМ-сигнала программно-аппаратным компонентом.

На рисунке 1 представлен принцип обобщенной оценки методом ЛЧМ-сигнала защищенности и принятых мер защиты ОИ, реализованный с помощью алгоритма.

Обобщенный алгоритм формализует и делит обработку ЛЧМ-сигнала на дискретные модули (снижение порогового эффекта и оценка разборчивости речи), что позволяет выполнить его автоматизацию с помощью ПАК. Обработка ЛЧМ-сигнала представлена дискретными алгоритмами снижения порогового эффекта ЛЧМ-сигнала и оценки разборчивости речи, которые в составе обобщенного алгоритма оценки защищенности и принятых мер защиты ОИ реализуют приемник ЛЧМ-сигнала.

2. Снижение порогового эффекта. Положительные свойства ЛЧМ-сигнала в шумах высокого уровня проявляются при достижении отношения сигнал/шум больше нуля [4]. Выполнение этого условия осуществляется за счет применения синхронного накопления спектральных составляющих ЛЧМ-сигнала, реализуемого следующими операциями¹:

2.1) программный компонент инициализирует приемо-передающий тракт ПАК (приемо-передающего устройства, акустической системы, регистрирующего устройства, измерительного аналого-цифрового преобразователя (АЦП), принимающего смесь ЛЧМ-сигнала с шумом цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) формирования стимулирующего сигнала);

2.2) на основании достоверных сведений, характеризующих отсутствие сигнала, рассчитывают величину порога чувствительности G_0 , которая каждый спектр входной реализации делит на наличие или отсутствие в шумах надпорогового ЛЧМ-сигнала;

2.3) осуществляют цифровую генерацию стимулирующего ЛЧМ-сигнала с последующим преобразованием его в аналоговую форму посредством ЦАП и излучают акустической системой;

2.4) синхронно с излучением стимулирующего ЛЧМ-сигнала посредством ЦАП выполняют захват данных с измерительного АЦП, которые представляют смесь ЛЧМ-сигнала с шумом в цифровой форме;

2.5) вычисляют спектр дискретной смеси ЛЧМ-сигнала с шумом быстрым преобразованием Фурье, которое имеет быстродействие $O(N \cdot \log(N))$ для любого N – простого или составного. В случае если длина преобразования N является составным числом, используется алгоритм Cooley – Tukey, сводящий преобразование Фурье к более коротким преобразованиям с простым множителем N . Преобразования короткой длины ($N \leq 5$) вычисляются с использованием коротких преобразований, а длинные преобразования, соответствующие простому N или крупным простым множителям составного N , вычисляются с использованием алгоритма Блюштейна (Bluestein);

2.6) производят синхронное накопление и нормирование спектральных составляющих спектра смеси ЛЧМ-сигнала с шумом;

2.7) рассчитывают порог принятия решения G_p по критерию максимального правдоподобия [6];

2.8) проверяют достижение величиной порога принятия решения накопленной смеси ЛЧМ-сигнала с шумом G_p величины порога чувствительности G_0 . Если $G_p < G_0$, процедуру накопления повторяют (осуществляют переход к операции 2.3);

2.9) если уровень порога принятия решения G_p достиг необходимой величины ($G_p > G_0$), выполняют обратное быстрое преобразование Фурье.

¹ Нумерация пунктов дана в соответствии с рисунком 2.

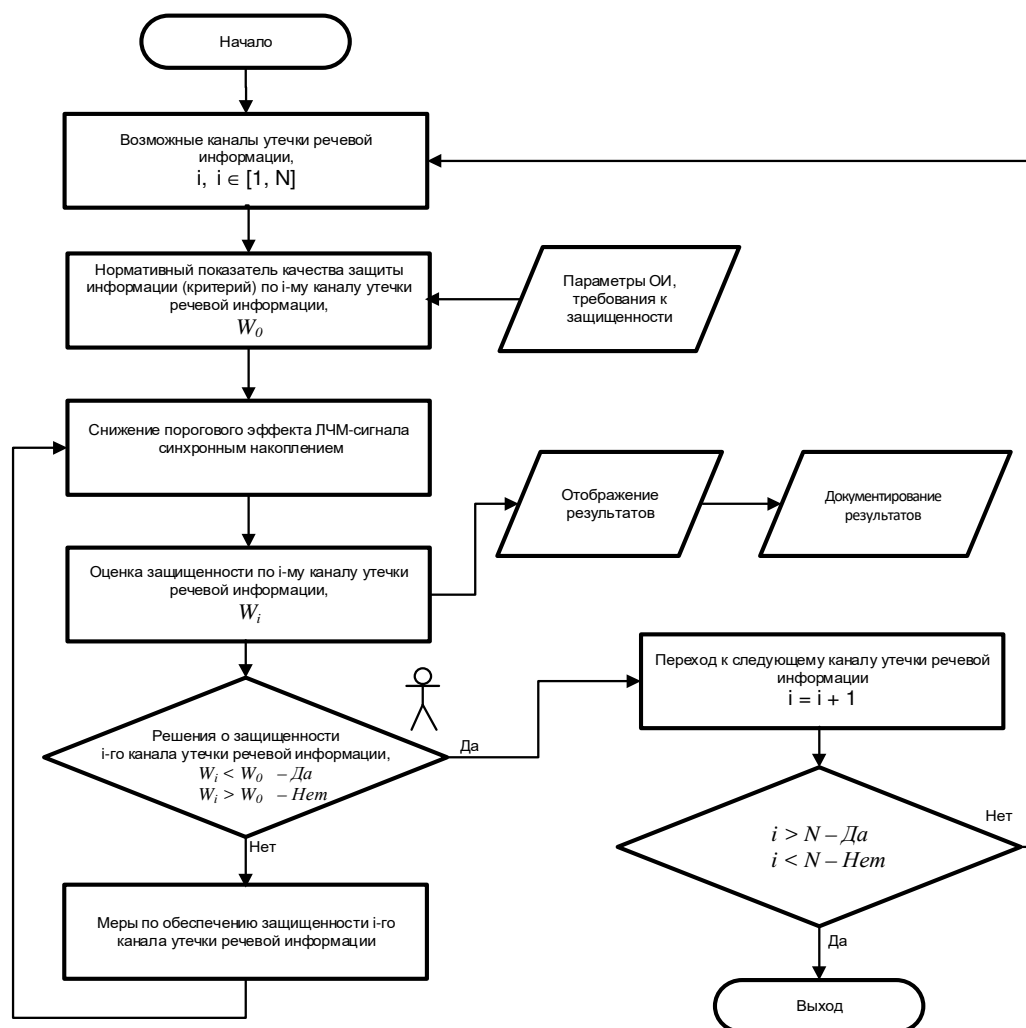


Рисунок 1. – Обобщенный алгоритм оценки защищенности и принятых мер защиты объекта информатизации

Снижение порогового эффекта ЛЧМ-сигнала представлено на рисунке 2 в виде алгоритма. Результатом выполнения алгоритма снижения порогового эффекта является надпороговый сигнал с ЛЧМ с присущими ему положительными свойствами. Цель дальнейшей обработки ЛЧМ-сигнала – величина разборчивости речи.

3. Оценка разборчивости речи. Применение частотно-временного представления сигнальной энергии функций Вигнера позволяет оценивать интенсивность физических полей за пределами ОИ надпорогового ЛЧМ-сигнала. По результатам оценивания на базе корреляционной теории разборчивости речи [5] определяется информационный критерий защищенности – разборчивость речи.

Расчет разборчивости речи методом ЛЧМ-сигнала включает следующие операции²:

3.1) программный компонент обеспечивает инициализацию приемо-передающего тракта ПАК (приемо-передающего устройства, акустической системы, регистрирующего устройства, измерительного АЦП, принимающего смесь ЛЧМ-сигнала с шумом, ЦАП формирования стимулирующего сигнала);

3.2) осуществляют цифровую генерацию стимулирующего ЛЧМ-сигнала с последующим преобразованием его в аналоговую форму посредством ЦАП и излучением акустической системой;

3.3) производят снижение порогового эффекта ЛЧМ-сигнала методом синхронного накопления спектральных составляющих. Накопление осуществляется за счет P -кратного повторения стимулирующего ЛЧМ-сигнала;

3.4) получают частотно-временное разложение сигнальной энергии без получения его спектра – формирование тонкой структуры ЛЧМ-сигнала с количеством составляющих M ;

² Нумерация пунктов дана в соответствии с рисунком 3.

3.5) вычисляют мощность сигнала в j -й полосе P_{C_j} , где $j \in [1; M]$, с помощью оптимального корреляционного приемника [7]. Согласованная частота оптимального корреляционного приемника определяется в зависимости от исследуемой j -й полосы;

3.6) вычисляют мощность сигнала с шумом в j -й полосе $P_{C+Ш_j}$;

3.7) определяют отношение сигнал/шум на выходе преобразования $Q_{вых_j}$;

3.8) на основании отношения сигнал/шум на выходе преобразования $Q_{вых_j}$ и количества накопленний P получают отношение сигнал/шум на входе приемника $Q_{вх_j}$ согласно обратной функции чувствительности;

3.9) вычисляется парциальный коэффициент разборчивости речи в j -й полосе согласно корреляционной теории разборчивости речи [5];

3.10) усредняют коэффициент разборчивости речи в полосе равной разборчивости, что значительно снижает методическую погрешность при количестве полос M ;

3.11) переходят к следующей полосе равной разборчивости с перестройкой излучающей и принимающей части ПАК;

3.12) производят повторный расчет интегрального коэффициента разборчивости следующей полосы равной разборчивости (этап 3.2) либо переходят к этапу 3.13;

3.13) после анализа коэффициентов разборчивости в каждой полосе равной разборчивости рассчитывают коэффициент разборчивости для всей полосы [8];

3.14) вычисляют слоговую и словесную разборчивость в исследуемом КУИ. Программно-аппаратный комплекс отображает и документирует результаты в генерализованном виде.

Расчет разборчивости речи методом ЛЧМ-сигнала в виде алгоритма представлен на рисунке 3.

Обработка ЛЧМ-сигнала для оценки величины разборчивости речи, включающая пункты 3.3 – 3.14, осуществляется в цифровом виде программным компонентом. Эта часть обработки является наиболее емкой по вычислительным ресурсам, поэтому необходимо рассмотреть ее эффективность.

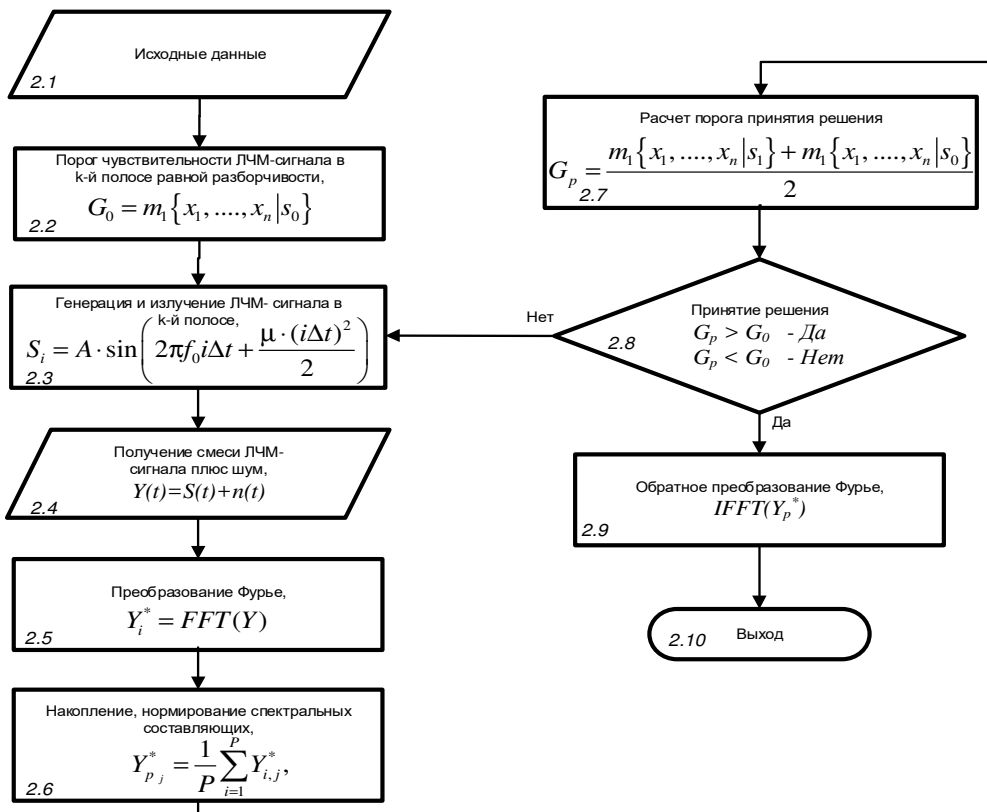


Рисунок 2. – Алгоритм снижения порогового эффекта ЛЧМ-сигнала

4. Эффективность цифровой обработки. Совокупная эффективность представленного алгоритма оценки разборчивости речи методом ЛЧМ-сигнала (см. рисунок 3) включает временную эффективность и пространственную. Временная эффективность является показателем скорости выполнения обработки. Пространственная эффективность показывает, сколько дополнительной оперативной памяти нужно для выполнения обработки.

В настоящее время требования к дополнительному объему оперативной памяти, необходимой для работы программного компонента, стали не так важны, как раньше. Здесь следует учесть, что существует значительная разница между быстрой основной памятью, относительно медленной вторичной памятью и кеш-памятью. Однако в основном внимание следует сосредоточить на временной эффективности.

Для анализа временной эффективности обработки можно воспользоваться временем между предъявлением программному компоненту входных данных и появлением результатов на выходе. Общепринятой единицей такой оценки является время (секунды, миллисекунды и т.д.). Однако у такого подхода существуют явные недостатки, поскольку результаты измерения будут зависеть от посторонних факторов [9]:

- быстродействия конкретного компьютера;
- тщательности реализации обработки в виде программы;
- типа компилятора;
- точности хронометрирования реального времени выполнения программы.

В данном случае для анализа эффективности целесообразно использовать подсчет количества выполнения базовых (основных) операций, которые вносят наибольший вклад в общее время выполнения обработки. Такой подход не зависит от посторонних факторов. Время выполнения программной реализации цифровой обработки $T(n)$ на конкретной ПЭВМ можно представить по следующей формуле [10]:

$$T(n) \approx c_{op}C(n), \quad (1)$$

где c_{op} – время выполнения основной операции на ПЭВМ;

$C(n)$ – количество выполняемых базовых операций в зависимости от размера входных данных n .

Количество базовых операций $C(n)$ в представленном алгоритме снижения порогового эффекта (см. рисунок 2) зависит не только от размера входных данных n , но и от количества накоплений P , за которые сигнал с ЛЧМ достигнет надпороговой области. Согласно алгоритму количество накоплений P – динамическая величина, которая зависит от помеховой обстановки. Однако между повторениями накопления (см. рисунок 3, пункты 3.4 – 3.7) присутствует излучение ЛЧМ-сигнала акустической системой (см. рисунок 3, пункт 3.13). Излучение акустического сигнала обуславливает временную задержку перед выполнением цифровой обработки, равную длительности ЛЧМ-сигнала, которая превышает 2 с. Таким образом, количество базовых операций $C(n)$ не зависит от количества накоплений P в случае $C_i(n) < T_C$, где T_C – продолжительность ЛЧМ-сигнала. Следовательно, количество базовых операций алгоритма снижения порогового эффекта можно оценить за один проход цикла накопления:

$$C(n) = n(2\log(n) + 13). \quad (2)$$

Порядок роста количества основных операций функции (2), зависящий от размера входных данных, является практически линейным, что доказывает эффективность представленного алгоритма по времени выполнения операции. Реализация алгоритма снижения порогового эффекта ЛЧМ-сигнала в виде программного компонента в среде Microsoft Visual Studio 2008 на языке C# подтверждает данные результаты.

Наиболее интересными с точки зрения оптимизации по времени являются операции 3.4 – 3.8 (см. рисунок 3). На их выполнение затрачиваются значительные вычислительные ресурсы.

Представим количество выполняемых базовых операций в зависимости от размера входных данных n по операциям 3.4 – 3.8 (см. рисунок 3):

3.4) количество базовых операций для частотно-временного представления сигнальной энергии функцией Вигнера $C_4(n)$:

$$C_4(n) = 5nM + 2n\log(n) + 3n,$$

где $j \in [1; M]$;

$M = n/2$ – количество полос, на которые разбивается спектр ЛЧМ-сигнала k -й полосы равной разборчивости;

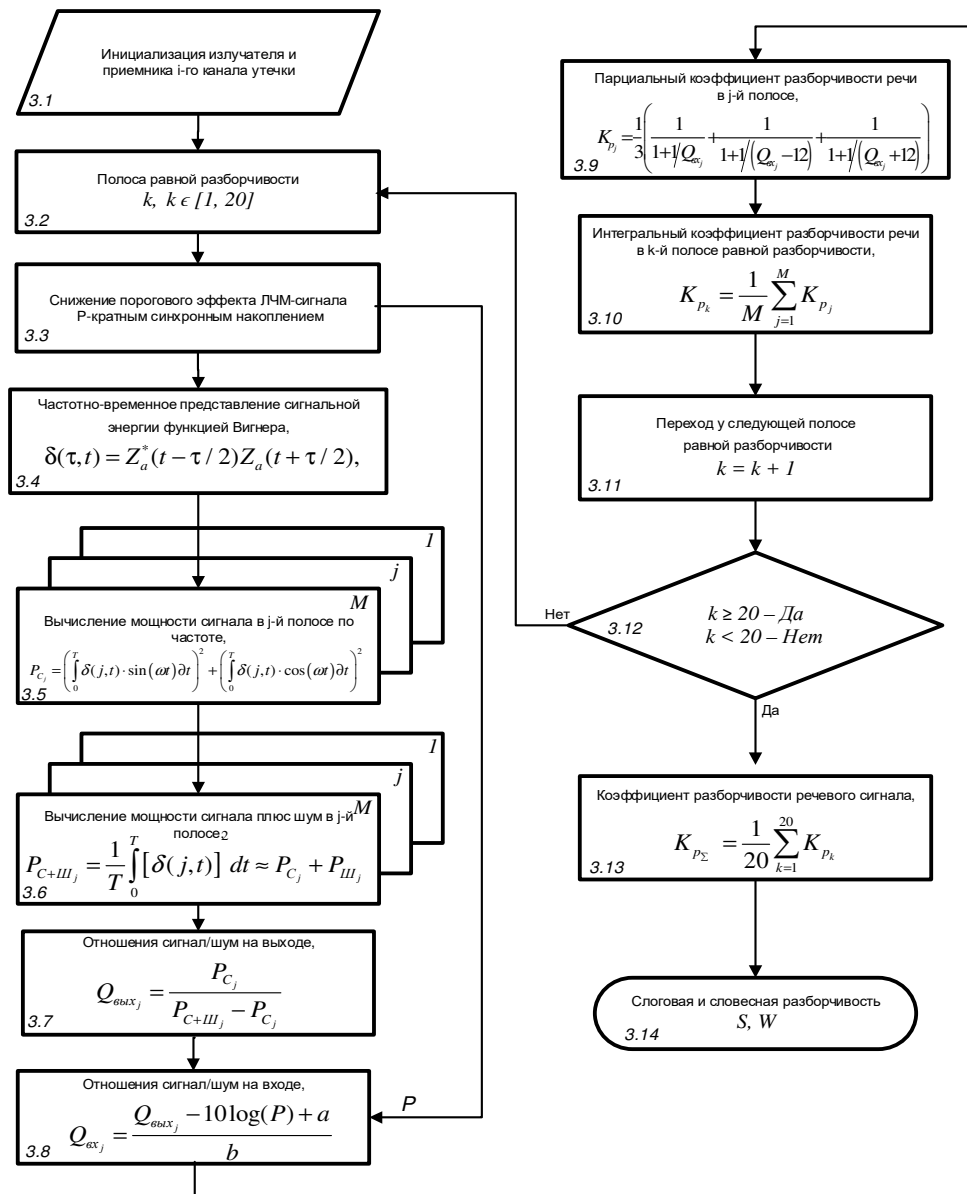


Рисунок 3. – Алгоритм оценки разборчивости речи

3.5) количество базовых операций при вычислении мощности сигнала в j-x полосах:

$$C_5(n) = M(8n + 3);$$

3.6) количество базовых операций при вычислении мощности смеси ЛЧМ-сигнала плюс шум $C_6(n)$:

$$C_6(n) = M(3n / 2);$$

3.7) количество базовых операций при вычислении отношения сигнал/шум выхода $C_7(n)$:

$$C_7(n) = 2M;$$

3.8) количество базовых операций при вычислении отношения сигнал/шум входа $C_8(n)$:

$$C_8(n) = 5M.$$

Таким образом, итоговое количество базовых операций $C(n)$ описывается выражением

$$\begin{aligned} C(n) &= C_4(n) + C_5(n) + C_6(n) + C_7(n) + C_8(n) = \\ &= 14,5nM + 2n \log(n) + 3n + 10M. \end{aligned} \quad (3)$$

Частота дискретизации f_d должна иметь максимально возможное значение, что позволяет снизить методическую погрешность [4]. Согласно параметрам применяемого внешнего модуля АЦП E14-440D $f_d = 2 \cdot 10^5$ Гц. Также учитывая продолжительность ЛЧМ-сигнала, которая составляет 2 с, можно оценить максимальный размер входных данных $n = 4 \cdot 10^5$. Исходя из выражения (3) итоговое количество базовых операций составит $C(n) = 1,16 \cdot 10^{12}$.

Для вычисления на ПЭВМ, имеющей производительность, например, $3,18 \cdot 10^9$ флоп/с (Intel® Core™ Duo U2400) [11], на основании выражения (1) получим время выполнения алгоритма $T(n)$

$$T(n) = \frac{1}{3,18 \cdot 10^9} \cdot 1,16 \cdot 10^{12} = 364,782 \text{ с.}$$

Такая продолжительность выполнения алгоритма является приемлемой для практического использования ПАК при исследовании ОИ, так как позволяет детально установить факторы, обуславливающие КУРИ. Использование только метода ЛЧМ-сигнала резко повысит точность их оценки. Такая оценка, проведенная неавтоматизированным методом с помощью локальной измерительной схемы, построенной на средствах измерения общего назначения, требует затрат времени более чем на 3 порядка больше по сравнению с автоматизированным методом. Локальная измерительная схема не позволяет оценить погрешность измерения.

Не составляет труда уменьшить время выполнения обработки за счет снижения количества временных составляющих j в функции Вигнера $\delta(j, t)$ этапа 3.5. Это сокращает количество полос разбиения с $M = n/2$ до $M = n/2\rho$, где ρ – коэффициент снижения количества полос разбиения, $\rho \in [1; n/2]$. Например, при $\rho = 1$ количество полос разбиения ЛЧМ-сигнала составит $M = n/2$, а при $\rho = n/2$ – $M = 1$.

Коэффициент снижения количества полос разбиения обуславливает снижение вычислительных затрат согласно выражению (3), но также снижает информативность тонкой структуры ЛЧМ-сигнала.

Для примера на рисунке 4, а представлено расчетное время выполнения алгоритма процессором Intel® Core™ Duo U2400 в зависимости от размера входных данных n и коэффициента снижения количества полос разбиения ρ .

Из рисунка 4, а следует, что снижение количества полос разбиения по временной составляющей в 2 раза дает выигрыш в эффективности вычислений более чем в 2 раза; снижение количества полос разбиения в 10 раз обеспечивает выигрыш более чем в 9 раз. Представленная оценка является приближенной, однако она позволяет судить о характере увеличения временной эффективности алгоритма.

Полученное время выполнения алгоритма показывает высокую эффективность обработки по сравнению со временем расчета классической функции Вигнера с размером входных данных $n = 4 \cdot 10^5$, имеющей количество базовых операций $C(n) = 2n^3(7 + \log(n)) = 1,6 \cdot 10^{18}$ (с учетом применения быстрого преобразования Фурье).

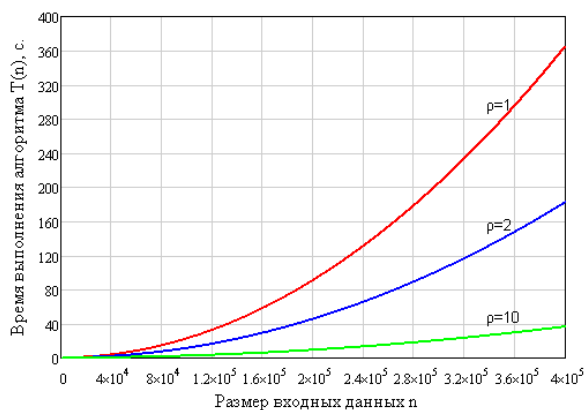
Время расчета классической функции Вигнера для процессора Intel® Core™ Duo U2400 составляет $T(n) = 1/3,18 \cdot 10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{18} = 5 \cdot 10^8$ с (порядка 15-ти лет). Это говорит о том, что практическое использование классической функции Вигнера весьма затруднительно.

Дальнейшая реализация предложенного алгоритма в среде Microsoft Visual Studio 2008 на языке C# позволила более точно оценить время выполнения обработки программным компонентом на практике.

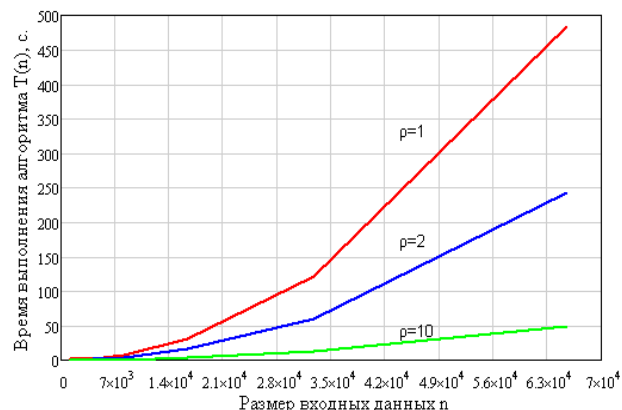
На рисунке 4, б представлено время выполнения обработки процессором AMD Sempron™ 2800+.

Полученное время выполнения обработки позволяет утверждать, что предложенная цифровая обработка пригодна для использования в ПАК с коэффициентом снижения количества полос разбиения $\rho > 10$, который может меняться в зависимости от производительности используемого процессора.

Так, при частоте дискретизации $f_d = 2 \cdot 10^5$ коэффициент снижения количества полос разбиения $\rho = 10$ снижает информативность тонкой структуры ЛЧМ-сигнала с $M = 10^5$ до $M = 10^4$, что незначительно отражается на методической погрешности.



а – Расчетное время выполнения алгоритма процессором Intel® Core™ Duo U2400



б – Практическое время выполнения алгоритма процессором AMD Sempron™ 2800+

Рисунок 4. – Время выполнения алгоритма с коэффициентом снижения количества полос разбиения $\rho = 1, 2, 10$

Кроме того, производительность обработки может быть увеличена посредством факторов, изложенных в работе [12]:

- векторных модулей процессоров, в которых массивы данных обрабатывают практически параллельно, что делает их в несколько раз более быстрыми, чем при работе в скалярном режиме (SIMD-машины).

Примерами векторных процессоров являются Intel-совместимые процессоры, поддерживающие наборы инструкций MMX, SSE;

- параллельного выполнения нескольких независимых срезов временных составляющих с применением MIMD-машин.

Количество полос разбиения с учетом возможностей дискретной формы преобразования Вигнера определяется следующим образом [3, 4]:

$$M_{\max} = \frac{f_d \cdot T}{4} = 100000.$$

Максимальная разрешающая способность на средней частоте представлена выражением

$$\eta_{\max} = \frac{f_{cp}}{M_{\max}}.$$

Разрешающую способность на средней частоте с учетом коэффициентов снижения количества полос разбиения ρ определим по формуле:

$$\eta = \frac{f_{cp} \cdot \rho}{M_{\max}}.$$

Анализ сигнала в количестве полос M_{\max} является неоправданно большим и затруднительным. Оптимальным количеством полос для каждой полосы равной разборчивости является $M = 125$, где коэффициент снижения количества полос разбиения $\rho = 800$.

В таблице приведены разрешающие способности ЛЧМ-сигнала в полосах равной разборчивости. Практическое время выполнения обработки с коэффициентом снижения количества полос разбиения $\rho = 800$ типовым процессором AMD Sempron™ 2800+ составляет порядка 20 с.

Таблица. – Разрешающие способности ЛЧМ-сигнала в полосах равной разборчивости

Номер полосы	Границы полосы $f_1 - f_0$, Гц	Средняя частота f_{cp} , Гц	Максимальная разрешающая способность η_{max} , Гц	Разрешающая способность η , Гц
1	100 – 420	250	0,0025	2
2	420 – 570	500	0,005	4
3	570 – 710	650	0,0065	5,2
4	710 – 865	800	0,008	6,4
5	865 – 1030	950	0,0095	7,6
6	1030 – 1220	1125	0,01125	9
7	1220 – 1410	1300	0,013	10,4
8	1410 – 1600	1500	0,015	12
9	1600 – 1780	1700	0,017	13,6
10	1780 – 1960	1875	0,01875	15
11	1960 – 2140	2050	0,0205	16,4
12	2140 – 2320	2225	0,02225	17,8
13	2320 – 2550	2425	0,02425	19,4
14	2550 – 2900	2725	0,02725	21,8
15	2900 – 3300	3100	0,031	24,8
16	3300 – 3660	3500	0,035	28
17	3660 – 4050	3850	0,0385	30,8
18	4050 – 5010	4550	0,0455	36,4
19	5010 – 7250	6150	0,0615	49,2
20	7250 – 10000	8600	0,086	68,8

Выводы:

1. Представлен формализованный алгоритм цифровой обработки ЛЧМ-сигнала частотно-временным преобразованием Вигнера для оценки разборчивости речи, включающий обобщенный алгоритм оценки защищенности и принятых мер защиты ОИ, алгоритм снижения порогового эффекта ЛЧМ-сигнала и алгоритм оценки разборчивости речи.

2. Получены максимальные разрешающие способности (от 0,00025 до 0,086 Гц) во всем диапазоне частот полос равной разборчивости, показывающие превосходство метода ЛЧМ-сигнала перед методом гармонического сигнала, который использует средние частоты полос равной разборчивости (с шириной полосы от 0,025 до 1 Гц).

3. Увеличена производительность алгоритма оценки разборчивости речи методом ЛЧМ-сигнала за счет применения коэффициента снижения количества полос разбиения, что значительно сокращает время вычисления до 20 с при реализации разрешающей способности от 2 до 69 Гц во всем диапазоне полос равной разборчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Способ определения максимальной разборчивости речи : пат. 15204 Респ. Беларусь : МПК G 10L 15/00 / В.К. Железняк, К.Я. Раханов ; дата публ. 30.12.2011.
2. Устройство для определения разборчивости речи : пат. 15314 Респ. Беларусь : МПК G 10L 15/00, H 04R 29/00 / В.К. Железняк, К.Я. Раханов ; дата публ. 28.02.2012.
3. Раханов, К.Я. Широкополосная линейно-частотная модуляция сигнала для оценки разборчивости речи в каналах утечки информации // К.Я. Раханов, В.К. Железняк // Известия национальной академии наук Беларуси: серия физико-технических наук ; редкол.: П.А. Вицязь (гл. ред.) [и др.]. – Минск : Белорусская наука, 2014. – С. 88–95.
4. Раханов, К.Я. Синтез программно-аппаратной системы оценки разборчивости речи методом ЛЧМ-сигнала : результаты эксперимента // К.Я. Раханов // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия С, Фундаментальные науки. – 2012. – № 12. – С. 20–26.
5. Железняк, В.К. Защита информации от утечки по техническим каналам : учеб. пособие / В.К. Железняк. – СПб. : ГУАП, 2006. – 188 с.
6. Обнаружение сигналов ВЧ-диапазона перемножением спектров фрагментов их реализаций / К.Я. Раханов [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия С, Фундаментальные науки. – 2010. – № 9. – С. 29 – 34.

7. Помехоустойчивость информационных радиосистем управления : учеб. пособие / А.Г. Охонский [и др.] ; под ред. А.Г. Охонского. – М. : Мир – книги, 1993. – 216 с.
8. Продеус, А.Н. О некоторых особенностях развития объективных методов измерений разборчивости речи / А.Н. Продеус // Электроника и связь. Темат. вып. «Электроника и нанотехнологии» – 2010. – № 2. – С. 217–223.
9. Цилькер, Б.Я. Организация ЭВМ и систем : учебник для вузов / Б.Я. Цилькер, С.А. Орлов. – М. : Питер, 2004. – 668 с.
10. Левитин, А. Алгоритмы: введение в разработку и анализ / А. Левитин ; пер. с англ. – М. : Издат. дом «Вильямс», 2006. – 576 с.
11. Характеристики процессоров Intel® в соответствии с экспортными требованиями [Электронный ресурс] // Intel Corporation, 2011. – Режим доступа: <http://www.intel.com/support/ru/processors/sb/CS-023143.htm#8>. – Дата доступа: 26.10.2018.
12. Долматов, А.В. Основы развивающего образования: теория, методы, технологии креативной педагогики / А.В. Долматов. – СПб. : ВУС, 1998. – 196 с.

Поступила 12.03.2019

DIGITAL TREATMENT OF A SIGNAL WITH LINEAR-FREQUENCY MODULATION OF FREQUENCY-TEMPORARY TRANSFORMATION OF WIGNER TO ESTIMATE THE CURABILITY OF SPEECH

V. ZHELEZNYAK, K. RAHANOV

A formalized digital signal processing algorithm with linear-frequency modulation of the Wigner time-frequency transform for evaluating speech intelligibility is presented, including a generalized algorithm for evaluating security and adopted measures of informatization object (OI) protection, an algorithm for reducing the threshold effect of a signal with linear frequency modulation, and an algorithm for evaluating speech intelligibility. The paper presents an estimate of the efficiency of the proposed algorithm in terms of execution time. A method is proposed for reducing the execution time of an algorithm by introducing a reduction coefficient for the number of frequency-time domain partitioning bands. Theoretical and practical results of algorithm execution are compared.

Keywords: *speech intelligibility assessment, Wigner time-frequency transform, information leakage channel, resolution, linear frequency modulated signal.*

УДК 004.6

ПЕРСПЕКТИВЫ И ТЕНДЕНЦИИ РАЗВИТИЯ КОНЦЕПЦИИ БОЛЬШИХ ДАННЫХ В СОВРЕМЕННОЙ ИТ ИНДУСТРИИ

С.Г. СУРТО

(Полоцкий государственный университет)

Рассмотрены определение термина «большие данные», характерные особенности этой технологии и области применения. Изучены способы работы с большими данными, проанализированы существующие способы реализации концепции больших данных, на основании чего были выявлены потенциальные области для дальнейших исследований.

Ключевые слова: *большие данные, анализ, статистика, структурированные данные, структурированные данные.*

Введение. В учреждениях здравоохранения пациенты не имеют произвольного доступа к своей истории болезни. Такие данные могут быть получены только при посещении врача. С помощью мобильных устройств люди могут создавать свои собственные базы данных. Приложения помогают следить за частотой пульса, гаджеты – отслеживать физическую активность и сохранять все накопленные данные. Пользователи могут извлекать эти данные и рассчитывать на профессиональную помощь специалистов в их обработке (интерпретации). В этой связи революция в области больших данных важна в плане оценки перспективности и прибыльности тех или иных случаев. Например, юристы смогут оперативнее находить лучшие аргументы в делах и рассчитывать стоимость услуг исходя из большого объема статистических данных. Используя искусственный интеллект, можно эффективно работать с большими и сложными массивами данных. Они не только улучшают обучение, этот инструмент позволяет руководству образовательных учреждений лучше понимать студентов и их действия. Активность студентов может отслеживаться и сохраняться в виде баз данных, анализ которых может подсказать преподавателю на чем заострять внимание на занятиях. Эта сфера имеет, пожалуй, наибольший потенциал для эффективного использования больших данных. В розничных инвестициях опытные люди больше не полагаются на брокеров, они принимают решения на основе доверенных компаний, обрабатывающих данные.

Современные тенденции в развитии концепции больших данных можно сформулировать следующим образом.

1. Быстрое увеличение объемов данных. Рост объемов данных актуализировал проблему оперативной аналитики полученной информации с целью извлечения полезных сведений. Организации должны перерабатывать терабайты сырых данных во что-то полезное.

2. Широкое использование Hadoop. Все больше организаций используют Hadoop и другие хранилища данных. С его помощью организации могут обрабатывать большие объемы данных, используя продвинутую аналитику для нахождения ценной информации и выработки выгодных решений.

3. Прогнозирующая аналитика. Точное предсказание будущего поведения и событий для увеличения прибыли.

4. Большой фокус на анализ данных на основе облачных технологий. Перенос анализа данных в облако ускоряет принятие современных технологий по обработке данных. Уменьшается стоимость обслуживания и оперирования в связи с тем, что данные обрабатываются в облаке.

5. Виртуализация данных. Этот процесс позволяет увидеть скрытое в огромных объемах данных, манипулировать информацией независимо от того, как данные отформатированы или где расположены.

6. Конвергенция IoT (Internet of Things), облака, больших данных и кибербезопасности. Конвергенция технологий управления данными, таких как качество данных, подготовка данных, аналитика, интеграция данных и др., привела к повышению роли кибербезопасности, поскольку все больше используются умные устройства, обмен данными и машинное обучение.

1. Сущность концепции больших данных

Понимание термина «большие данные». Большие данные (англ. big data, ['big 'deɪtə]) – обозначение структурированных и неструктурированных данных огромных объемов и значительного многообразия, эффективно обрабатываемых горизонтально масштабируемыми (англ. scale-out) программными инструментами, появившимися в конце 2000-х годов и альтернативных традиционным системам управления базами данных и решениям класса Business Intelligence [12].

Под Big Data можно понимать именно методы обработки данных, позволяющие обрабатывать информацию параллельно, распределяя ее между различными вычислительными ресурсами, а не объем самих данных. Эти методы можно применить как к огромным массивам данных, так и к небольшим.

Несколько примеров того, что может быть источником данных, для которых необходимы методы работы с большими данными:

- логи поведения пользователей в интернете;
- GPS-сигналы от автомобилей для транспортной компании;
- данные, снимаемые с датчиков в большом адронном коллайдере;
- информация о транзакциях всех клиентов банка.

Принципы работы с большими данными. Исходя из определения Big Data, можно сформулировать основные принципы работы с такими данными:

1. **Горизонтальная масштабируемость.** Поскольку объемы данных постоянно растут (особенно при способе хранения, характерном для больших данных), то логично, что системы для хранения должны легко расширяться простым добавлением новых единиц хранения (например, компьютеров) в кластер.

2. **Отказоустойчивость.** Объем хранимых данных теоретически не ограничен, поэтому количество компьютеров, участвующих в распределенной сети, обеспечивающей хранение и доступ к данным, может быть огромным (пример: Hadoop-кластер Yahoo имеет более 42 000 машин). Это неизбежно ведет к периодическим отказам оборудования. Методы работы с большими данными должны учитывать эту особенность и обеспечивать бесперебойный доступ к данным в таких условиях.

3. **Локальность данных.** В распределенных системах данные распределены по большому количеству источников. В случае нахождения данных на одном сервере, а обработки – на другом, время их передачи может превысит время самого процесса обработки. При этом одним из лучших вариантов решения является обработка данных на той же системе, на которой они хранятся.

Сообщество разработчиков открытого кода создало за последние годы немало технологий для больших данных. Среди них можно выделить пять категорий.

1. **Системы пакетных вычислений.** Обладают высокой производительностью, но и большой задержкой. Могут выполнять вычисления практически любого объема, однако это может занять много времени (час, день). Пример такой системы – Hadoop, состоящий из двух проектов: Hadoop distributed file system (HDFS) и Hadoop MapReduce – горизонтально масштабируемый каркас вычислений, интегрируемый с HDFS.

2. **Каркасы сериализации.** Представляют инструменты и библиотеки, позволяющие переносить объекты данных между системами, работающими на различных языках программирования. Иначе говоря, объект сериализуется из исходных кодов на одном языке, а потом десериализуется в объект на другом языке. Примеры каркасов сериализации – Apache Thrift, Protocol Buffers, Avro.

3. **Базы данных типа NoSQL с произвольным доступом.** За последние годы было создано довольно много распределенных нереляционных баз данных (NoSQL): Cassandra, HBase, MongoDB, Riak, CouchDB и др.

4. **Система обмена сообщениями и постановки их в очередь.** Позволяют обмениваться сообщениями между процессами, при этом процесс обмена является отказоустойчивым и асинхронным. Например, Apache Kafka.

5. **Система вычислений в реальном времени.** Отличительные особенности таких систем – это высокая производительность, малая задержка, способность обрабатывать поток данных. Не могут выполнять операции, на которые способны системы пакетной обработки, но способны очень быстро обрабатывать сообщения.

Хранение необработанных данных. Информационная система отвечает на вопросы об информации, приобретенной в прошлом, при этом заранее неизвестно на какие вопросы придется отвечать. В связи с этим большое значение приобретает вопрос сохранения необработанных (сырых) данных. Сохраняя данные в как можно более необработанном виде, можно максимально увеличить возможность получать новые представления данных. При этом чем более необработанными оказываются данные, тем больше места они занимают при хранении [5]. Технологии больших данных специально предназначены для работы с петабайтами и даже эксабайтами данных, позволяя сохранять данные распределенным, масштабируемым способом.

Неизменяемость данных. Еще одним важным аспектом является неизменяемость данных. Это свойство нехарактерно для реляционных баз данных, но в случае больших данных ситуация иная. Неизменяемость данных дает как минимум два огромных, в условиях большого объема информации, преимущества:

1. **Устойчивость к отказам, связанным с человеческим фактором.** В случае с изменяемыми данными неверное обновление данных ведет к их потере, при использовании концепции неизменяемых данных это не ведет к потерям, т.к. все предыдущие записи (версии) этих данных будут сохранены.

2. **Простота.** В моделях изменчивости данных подразумевается, что данные индексируются для извлечения и обновления конкретных записей. В моделях же неизменяемости данных есть только возможность дополнять массив новыми данными. Для этого не требуется индексация. Пример, как может выглядеть модель для больших данных предложен в таблице, где представлены сведения о месте жительства людей, идентифицируемых по `User_id`

Таблица. – Данные места жительства

User_id	Location	Timestamp
1	Витебск, РБ	29.03.2003 08:24:15
2	Полоцк, РБ	15.04.2003 09:08:23
3	Брест, РБ	05.07.2004 15:21:11
1	Минск, РБ	14.01.2005 17:35:21

Человек идентифицируемый по `User_id = 1` в 2003 году жил в Витебске, а в 2005 переехал в Минск, при этом запись об этом просто добавилась в таблицу с новым `timestamp` (таблица). Такая схема хранения данных позволяет хранить несколько записей для одного человека, сохраняя всю историю изменений.

Главное следствие неизменяемости данных состоит в том, что каждый фрагмент данных оказывается истинным всегда. Однажды став истинным, фрагмент должен оставаться таковым навсегда. Без этого свойства неизменяемость данных не имеет смысла, в таблице показано как фрагмент данных сделать истинным вечно, обозначив его отметкой времени.

В общем массив данных постоянно растет в результате ввода новых неизменяемых данных, но имеются особые случаи, когда данные приходится удалять.

– **Сборка «мусора».** Удаляются фрагменты данных, имеющих малую ценность. С помощью сборки мусора можно контролировать рост главного массива данных. Например, можно реализовать правило, предусматривающее сохранение только одного места жительства на каждого человека в год.

– **Нормативы.** Государственные нормативные документы, которые требуют очистки содержимого баз данных при определенных условиях.

Несмотря на то, что данные вечно истинны, можно предпочесть вообще «забыть» об информации, потому что это придется сделать или потому что она не представляет достаточной ценности по сравнению с затратами на ее хранение.

Парадигма MapReduce. MapReduce – это модель распределенной обработки данных, предложенная компанией Google для обработки больших объемов данных на компьютерных кластерах [5].

MapReduce предполагает, что данные организованы в виде определенных записей. Обработка данных происходит в 3 стадии:

1. **Стадия Map.** На этой стадии данные преобразуются при помощи функции `map()`, определенной пользователем. Работа этой стадии заключается в преобразовке и фильтрации данных. Функция `map()`, примененная к одной входной записи, выдает одно или множество пар ключ–значение. Что будет находится в ключе и в значении – решать пользователю, но ключ – очень важная вещь, так как данные с одним ключом в будущем попадут в один экземпляр функции `reduce`.

2. **Стадия Shuffle.** На этой стадии вывод функции `map` «разбирается по корзинам» – каждая корзина соответствует одному ключу вывода стадии `map`. В дальнейшем эти корзины послужат входом для `reduce`.

3. **Стадия Reduce.** Каждая «корзина» со значениями, сформированная на стадии `shuffle`, попадает на вход функции `reduce()`. Функция `reduce` задается пользователем и вычисляет финальный результат для отдельной «корзины». Множество всех значений, возвращенных функцией `reduce()`, является финальным результатом MapReduce-задачи.

Несколько дополнительных фактов про MapReduce:

1) Все потоки вычисления `map` и `reduce` работают независимо и могут работать параллельно, в том числе на разных машинах кластера, т.е. горизонтально масштабируемы.

2) `Shuffle` представляет из себя параллельную сортировку, поэтому также может работать на разных машинах кластера, обеспечивая горизонтальное масштабирование.

3) Функция `map`, как правило, применяется на той же машине, на которой хранятся данные, – это позволяет снизить задержки, связанные с передачей данных по сети (принцип локальности данных).

4) **MapReduce** – это всегда полное сканирование данных, никаких индексов нет. Это означает, что MapReduce неэффективен, когда ответ требуется очень быстро, с другой стороны, для задач, требующих сканирования полного массива данных, производительность максимальная.

В качестве примера задачи, эффективно решаемой при помощи MapReduce, можно привести классическую задачу Word count (подсчет слов).

К примеру, нужно подсчитать количество повторений слов в предложении «*Cats could not speak, could not at all.*»

Стадия **map** на выходе даст такой результат в виде пар ключ–значение:

{Cats: 1, could: 1, not: 1, speak: 1, could: 1, not: 1, at: 1, all: 1}.

Далее, **Shuffle**, получая исходные данные с выхода **map**, преобразует их в следующий вид:

{Cats: (1), could:(1, 1), not: (1,1), speak:(1), at:(1), all:(1)}.

После этой стадии убираются дубликаторы ключей, размер данных существенно уменьшается.

На последней стадии **Reduce** получают удобно подготовленные данные и остается подсчитать количество элементов в поле «значение» для каждого ключа, в результате получится

{Cats: (1), could:(2), not: (2), speak:(1), at:(1), all:(1)}. Что и будет решением задачи.

2. Реализация концепции

Hadoop. Изначально Hadoop был, в первую очередь, инструментом для хранения данных и запуска MapReduce-задач, сейчас же Hadoop представляет собой большой стек технологий, так или иначе связанных с обработкой больших данных (не только при помощи MapReduce) [3].

Основными (core) компонентами Hadoop являются:

- 1) Hadoop Distributed File System (HDFS) – распределенная файловая система, позволяющая хранить информацию практически неограниченного объема;
- 2) Hadoop YARN – фреймворк для управления ресурсами кластера и менеджмента задач, в том числе включает фреймворк MapReduce;
- 3) Hadoop common.

Существует большое количество проектов, непосредственно связанных с Hadoop, но не входящих в Hadoop core:

- 1) Hive – инструмент для SQL-like запросов над большими данными (превращает SQL-запросы в серию MapReduce-задач);
- 2) Pig – язык программирования для анализа данных на высоком уровне. Одна строчка кода на этом языке может превратиться в последовательность MapReduce-задач;
- 3) Hbase – колоночная база данных, реализующая парадигму BigTable;
- 4) Cassandra – высокопроизводительная распределенная key-value база данных;
- 5) ZooKeeper – сервис для распределенного хранения конфигурации и синхронизации изменений этой конфигурации;
- 6) Mahout – библиотека и движок машинного обучения на больших данных.

Отдельно стоит отметить проект Apache Spark, представляющий собой движок для распределенной обработки данных. Apache Spark обычно использует компоненты Hadoop, такие как HDFS и YARN, для своей работы, при этом сам проект в последнее время стал популярнее, чем Hadoop.

3. Методы исследований

Семантические структуры и причинные модели больших данных для принятия решений.

В настоящее время проблема обработки больших данных относится к числу наиболее актуальных в области информационных технологий, и она же порождает наиболее трудные проблемы алгоритмического характера, связанные с обеспечением точности, устойчивости и вычислительной эффективности процессов их обработки. Эти проблемы обусловлены тем, что большинство традиционных методов интеллектуального анализа данных напрямую не могут быть применены для анализа больших данных либо вследствие вычислительной неустойчивости, либо вследствие вычислительной сложности. Не менее трудные проблемы обусловлены гетерогенным характером больших данных: они могут содержать атрибуты разных типов и неструктурированные данные, например, тексты на естественном языке [11].

Одно из важных требований к методам обработки больших данных – это семантически ясная интерпретация результатов. В современных моделях знаний это обеспечивается средствами онтологии, однако ее построение для больших данных также является проблемой: ввиду огромного количества потенциальных понятий ручная разработка онтологии становится непомерно трудоемкой, а потому требует максимальной автоматизации, а в ряде классов приложений – полной автоматизации [11].

Одним из решений является разработка алгоритмов обучения и принятия решений в задачах классификации на основе семантических и причинных моделей больших данных. Применяются алгоритмы поиска множества причинных зависимостей в больших данных. Такие алгоритмы используют семантическую модель данных.

Анализ экспериментальных результатов показал, что с точки зрения поиска причинных связей в данных наиболее перспективными являются коэффициент регрессии, мера Клозгена, убеждение и фактор уверенности [11]. К наилучшим из них относятся две меры, а именно: коэффициент регрессии

$$R(A, B) = \frac{(p_{AB} - p_A \cdot p_B)}{p_A \cdot (1 - p_A)} \quad (1)$$

и мера Клозгена

$$K(A, B) = \sqrt{p_B} \cdot (p_{BA} - p_B) \cdot \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) A и B – это атрибуты данных булевого типа, интерпретируемые как случайные события, представленные выборкой больших данных; p – выборочные вероятности атрибутов (случайных событий), указанных в нижнем индексе p [11].

Программный алгоритм оптимизации размещения данных при многоуровневом хранении на основе эвристического подхода. Широко распространенным подходом к решению оптимизационных задач, которое не может быть найдено за полиномиальное время, является использование эвристических алгоритмов. К их основным преимуществам относятся высокая скорость выполнения и допустимый уровень качества найденного решения [10].

Алгоритм Greedy относится к семейству «жадных», основной особенностью которого является решение задачи выбором наиболее важных элементов с точки зрения определенного в алгоритме критерия. Он использует понятия задач и их интегрального показателя важности для реализации приоритетных особенностей в ходе его выполнения. В начале работы алгоритма вычисляется значение стоимости, ассоциируемое для всех задач на основе необходимых для ее выполнения файлов. Стоимость задачи складывается из значений стоимости всех файлов, необходимых для выполнения данной задачи. Стоимость файла рассчитывается как отношение суммы важности задач, к которым он относится, к числу файлов задачи [10]:

$$f_{icost} = \sum_{k=0}^l \frac{c_k}{T_{ksum}},$$

где c_k – важность k задачи;

l – задачи, к которым относится файл i ;

T_{ksum} – сумма всех файлов в задаче k .

Затем производится сортировка всех задач по их стоимости. Файлы внутри каждой задачи также сортируются по стоимости. Таким образом получается список файлов, которые отсортированы по двум критериям: принадлежности к задачам по их стоимости и собственному значению стоимости. Алгоритм производит обработку списка файлов в очередности, полученной при помощи двухуровневой сортировки. За счет этого в первую очередь будут обрабатываться самые весомые для функции оценки оптимальности файлы в самых важных задачах.

Данный алгоритм позволяет достаточно быстро выработать решение допустимого качества, т.е. с положительным приростом к производительности. Однако вследствие сложной специфики задачи и односторонней эвристической логики алгоритма результат поиска решений близок к оптимальному только в достаточно простых случаях и далек от оптимального в сложных задачах.

Заключение. По результатам анализа развития больших данных можно сделать вывод о некоторых трудностях. Системы хранения для больших данных оптимизированы для хранения неизменяемых данных и плохо подходят для процедур случайной выборки. Алгоритмы пакетной обработки неоптимально работают с анализом потока новых данных. Кластеризация баз данных, как правило, требует больших усилий в настройке поскольку кластерная организация выполняет сложную задачу по обеспечению надежности хранения и доступности данных в условиях возможных сбоев отдельных узлов. Все эти узкие места являются потенциальной темой для исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schmarzo, B. Big Data: Understanding How Data Powers Big Business / B. Schmarzo. – М. : Wiley, 2013. – 240 с.
2. Frank, J.O. Big Data Analytics: Turning Big Data into Big Money (Wiley and SAS Business Series) / J.O. Frank – М. : Гостехиздат, 2012. – 176 с.

3. Prajapati, V. Big Data Analytics with R and Hadoop / V. Prajapati. – M., 2013. – 238 с.
4. Mayer-Schonberger, V. Big Data: Revolution That Will Transform How We Live, Work and Think / V. Mayer-Schonberger, K. Cukier. – Canada : Eamon Dolan/Houghton Mifflin Harcourt, 2013. – 242 p.
5. Dean, J. MapReduce: Simplified Data Processing on Large Clusters / J. Dean, S. Ghemawat // In Sixth Symposium on Operating System Design and Implementation (OSDI'04), San-Francisco, CA, December, 2004.
6. Lammel, R. Google's MapReduce Programming Model – Revisited / R. Lammel // Science of Computer Programming. – Amsterdam, 2018. – 30 p.
7. Ghemawat, S. The Google file system / Sanjay Ghemawat, Howard Gobioff, Shun-Tak Leung // SOSP '03 Proceedings of the nineteenth ACM symposium on Operating systems principles, Bolton Landing, NY, USA, October 19–22, 2003. – Bolton Landing, 2003. – P. 29–43.
8. Zikopoulos, P. Understanding Big Data: Analytics for Enterprise Class Hadoop and Streaming Data / P. Zikopoulos, C. Eaton. – New York : McGraw-Hill Osborne Media, 2012. – 166 p.
9. Gorodetsky, V. Data-driven Semantic Concept Analysis for User Profile Learning in 3G Recommender Systems / V. Gorodetsky, O. Tushkanova // 2015 IEEE/WIC/ACM International Conference on Web Intelligence and Intelligent Agent Technology (WI-IAT) : Conference. – Singapore, 2015. – P. 92–97.
10. Hybrid Evolutionary Workflow Scheduling Algorithm for Dynamic Heterogeneous Distributed Computational Environment / D. Nasonov [et al.] // International Joint Conference SOCO'14-CISIS'14-ICEUTE'14, Bilbao, Spain, June 25th-27th, 2014. – С. 83–92.
11. Тушканова, О.Н. Сравнительный анализ численных мер оценки ассоциативных и причинных связей в больших данных / О.Н. Тушканова // Перспективные системы и задачи управления : материалы 10-й Всероссийской научно-практической конференции, Домбай, 6–10 апр. 2015 г., / ЮФУ. – Домбай, 2015. – Т. 2. – С. 54–65.
12. Atre, S. Business Intelligence Roadmap: The Complete Project Lifecycle for Decision-Support Applications / Shaku Atre, Larissa T. Moss. – Boston : Addison-Wesley Professional, 2003. – 576 p.

Поступила 24.02.2019

PROSPECTS AND TENDENCIES OF DEVELOPMENT OF THE BIG DATA CONCEPT IN MODERN IT INDUSTRY

S. SURTO

Big data in 2019 continue to gain popularity. The structured or raw, big data represent huge information massifs which at due processing can be a source of a bigger information. Volumes of the stored data in different spheres and also growth rates of speed of accumulation say that the relevance of methods of storage and information processing of large volumes will only grow. The traditional industries have also not avoided influence of the growing volume of data which need to be processed.

Keywords: *big data, analysis, statistic, structured data, unstructured data.*

УДК 699.844:004.94

**ПРИМЕНЕНИЕ СТЕКЛЯННЫХ ТРУБОК НА ОКОННЫХ ОГРАЖДЕНИЯХ
ДЛЯ УВЕЛИЧЕНИЯ ЗАЩИЩЕННОСТИ РЕЧЕВОЙ ИНФОРМАЦИИ***д-р техн. наук, проф. В.К. ЖЕЛЕЗНЯК, канд. тех. наук К.Я. РАХАНОВ, А.В. КАЗЮТИН
(Полоцкий государственный университет)*

Предлагается и обосновывается способ увеличения защищенности речевой информации путем крепления стеклянных трубок (ребер жесткости) на оконное ограждение. Приводится методика оценки изменения резонансов оконного ограждения с установленными ребрами жесткости. С помощью разработанной лабораторной установки выполнено исследование оконного ограждения без и с установленными ребрами жесткости, согласно схем размещения. Рассчитаны показатели изменения максимального резонанса оконного ограждения при установленных ребрах жесткости. Определены схемы с наибольшим и наименьшим показателями уровня ослабления общего максимального резонанса, показан эффект смещения резонансов по частоте при установленных ребрах жесткости.

Ключевые слова: защищенность речевой информации, исследование резонанса, оконное ограждение, разборчивость речи.

Введение. Изоляция воздушного шума помещения является важнейшей его характеристикой с точки зрения защиты от утечки речевой информации. Из всех элементов ограждающих конструкций оконные ограждения наиболее уязвимы к ослаблению звуковых частот. В работе [1] приводится оценка звукоизоляции воздушного шума оконными ограждениями за счет изменения расчета толщины стекол и увеличения воздушного промежутка между ними, обосновывается применение стекол с различными толщиной и промежутками между ними для наибольшей защищенности речевой информации. Однако на практике изменение толщины стекол и расстояний между ними не всегда возможно.

Для уменьшения звукового уровня использование звукоизоляции более эффективно, чем использование звукопоглощения внутри помещения [2]. Так, в исследовании металлических конструкций, например в работе [3], для увеличения жесткости оконных ограждений рекомендуют изменять геометрические параметры оконного ограждения – форму сечения. При расчете металлических конструкций главным практическим средством увеличения жесткости является маневрирование геометрическими параметрами системы, а не характеристикой металлов, которая определяется лишь полностью атомно-кристаллической решеткой основного компонента.

Наиболее простой способ уменьшения деформаций металлических конструкций заключается в уменьшении уровня напряжений (усилении конструкции). Однако этот путь не всегда рационален, так как он сопряжен со значительным увеличением массы конструкции. В случае изгиба рациональным способом уменьшения деформаций является выбор наиболее оптимальной формы сечений, условий нагружения, типа и расстановки опор.

По аналогии с металлическими конструкциями в данной работе предлагается установка ребер жесткости на оконное ограждение, что изменяет форму сечения оконного ограждения и является более рациональной альтернативой изменению толщины стекол и расстояний между ними.

Ребра жесткости оконного ограждения. Ребра жесткости могут применяться без замены оконного ограждения. Ребра жесткости представляют собой прозрачные стеклянные трубки, изготовленные из кварцевого песка и некоторых других материалов, которые не нарушают интерьер и экстерьер. На рисунке 1 представлен поперечный разрез ребра жесткости для оконного ограждения с установленной стеклянной трубкой. Крепление ребер жесткости обеспечивается плотным прилеганием к стеклу оконного ограждения и нанесением клеящего состава вдоль места прилегания ребра к оконному ограждению.

Размещение стеклянных трубок на оконном ограждении может выполняться различными способами (схемами ребер жесткости). Схема ребер жесткости – это способ расположения стеклянных трубок на стекле оконного ограждения. Некоторые возможные схемы ребер жесткости, над которыми проводились исследования, представлены на рисунке 2.

Оконное ограждение схематично обозначено квадратом, внутри которого прямыми линиями изображена одна из схем ребер жесткости, вибропреобразователь изображен точкой в центре квадрата.

В зависимости от используемой схемы ребер жесткости изменяется максимальный резонанс оконного ограждения. Оценку изменения максимального резонанса предлагается выполнять на лабораторной установке с помощью методики, представленной ниже.

Методика исследования резонансов. Уровень защищенности речевой информации в работах [1, 4, 5] принято описывать с помощью информационного показателя – разборчивости речи. Для оценки разборчивости частотный речевой диапазон (100 – 10000 Гц) разбивают на равноартикуляционные полосы, вносящие одинаковый вклад в разборчивость речи [4].

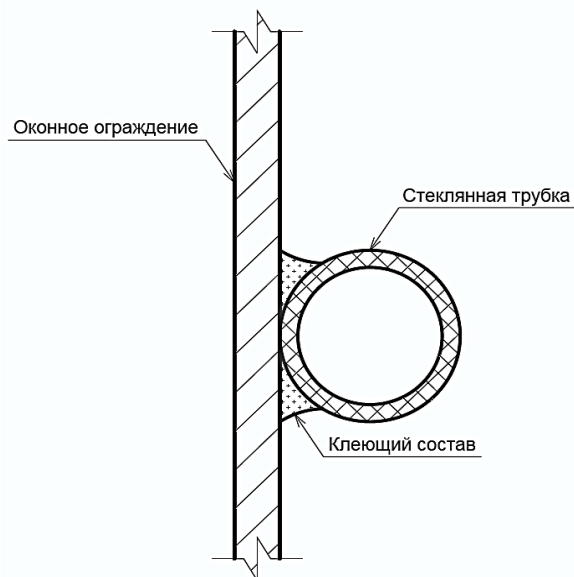


Рисунок 1. – Поперечный разрез ребра жесткости, установленного на оконном ограждении

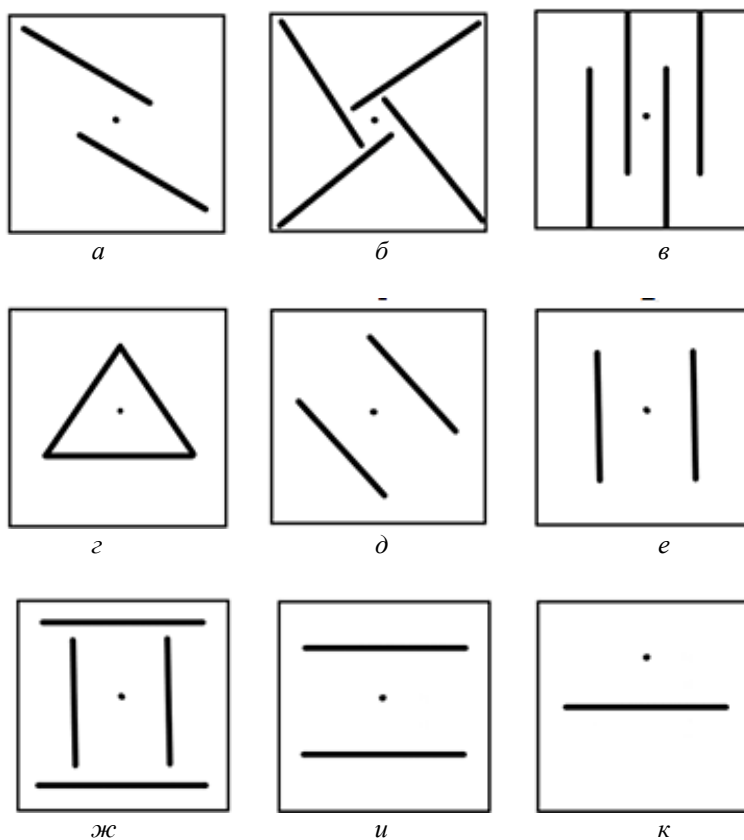


Рисунок 2. – Схемы ребер жесткости:

a – параллельные сдвинутые; *б* – мельница; *в* – четыре сдвинутых; *г* – треугольник; *д* – две параллельные наклонные; *е* – параллельные вертикальные; *ж* – две вертикальные и две горизонтальные; *и* – параллельные горизонтальные; *к* – одиночная

Максимальный резонанс оконного ограждения – это самый мощный резонанс в полосе равной разборчивости речи. Чем меньше уровень максимального резонанса, тем больше защищена речевая информация в полосе.

Уровень изменения максимального резонанса оконного ограждения без установленных ребер жесткости по отношению к тому же оконному ограждению с установленными ребрами жесткости определяют по следующей методике.

1. Измерение максимальной амплитуды резонанса в полосах для стекла без установленных ребер жесткости U_{Ri0} , здесь в индексе i – номер полосы; 0 – оконное ограждение без установленных ребер жесткости. Величина амплитуды резонанса показывает, на какое значение в полосе частот, колебательная система ослабляет или усиливает звук.

2. Расчет показателя максимального резонанса по сумме максимальных амплитуд резонансов для оконного ограждения без установленных ребер жесткости Σ_{R0} :

$$\Sigma_{R0} = \sum_{i=20}^{20} U_{Ri0}. \quad (1)$$

3. Производятся измерения в каждой из 20-ти равноартикуляционных полос. Для всех конфигураций ребер жесткости фиксируется максимальная амплитуда резонанса U_{Rin} , где i – номер полосы; n – номер конфигурации ребер жесткости. В результате получаем матрицу размером $i \times n$.

4. Выполняется расчет показателя максимального резонанса для оконного ограждения с установленными ребрами жесткости с помощью суммы максимальных амплитуд резонансов Σ_{Rn} :

$$\Sigma_{Rn} = U_{R1n} + U_{R2n} + \dots + U_{R19n} + U_{R20n} = \sum_{i=1}^{20} U_{Rin}, \quad (2)$$

где i – номер полосы;

n – номер конфигурации ребер жесткости;

U_{Rin} – напряжение резонанса в полосе;

5. Изменение показателя δ_n максимального резонанса оконного ограждения с установленными ребрами жесткости к оконному ограждению без них, выраженное в децибелах

$$\delta_n = 20 \lg \frac{\Sigma_{Rn}}{\Sigma_{R0}}. \quad (3)$$

6. По полученным значениям δ_n определяется конфигурация с максимальным и минимальным показателем изменения максимального резонанса оконного ограждения.

Применение методики исследования резонансов и проведение эксперимента невозможно без создания лабораторной установки.

Лабораторная установка. Лабораторная установка представляет собой совокупность приборов и устройств, а также оконное ограждение (стеклопакет). Блок схема установки представлена на рисунке 3.

От источника гармонических колебаний 1 подаются сигналы с различными частотами, имеющими напряжение $U = 1,1$ В. Сигналы усиливаются с помощью усилителя мощности звуковых частот 2 до $U = 9,5$ В и излучаются через акустическую систему. Акустическая система 3 с двумя электродинамическими головками с плоскими сотовыми диафрагмами 25ГДШ-2М располагается на расстоянии 1 м от оконного ограждения. Каждая электродинамическая головка и ящик экранированы.

Каждое отдельное стекло оконного ограждения 4, на которое падают звуковые волны, следует рассматривать как тонкую пластину, получающую под внешним воздействием деформации изгиба. Защемление оконного ограждения выполнено по периметру согласно варианту 9, представленному в работе [6] и обеспечивает максимальное ослабление звукового сигнала. Толщина каждого стекла 3 мм, расстояние между стеклами 10 мм, размер стеклопакета оконного ограждения составляет $400 \times 150 \times 200$.

Уровень звукового давления на оконное ограждение, регистрирует вибропреобразователь AP2029-10 5 внутри выделенного помещения, подключенный через согласующее устройство AG01 6 к аналогово-цифровому преобразователю (АЦП) E14-440 7. АЦП, в свою очередь, передает оцифрованные сигналы

на ПЭВМ 8, на котором установлено программное обеспечение (ПО) для отображения сигналов LGraph 2. С помощью LGraph 2 визуально регистрируется максимальная амплитуда резонанса, в пределах каждой из 20 полос равной разборчивости речи, для всех конфигураций ребер жесткости.

Согласующее устройство AG01 6 обеспечивает разделение постоянной составляющей источника питания и переменной составляющей измеряемого сигнала вибропреобразователя со встроенным преобразителем. Основные характеристики вибропреобразователя представлены в таблице 1.

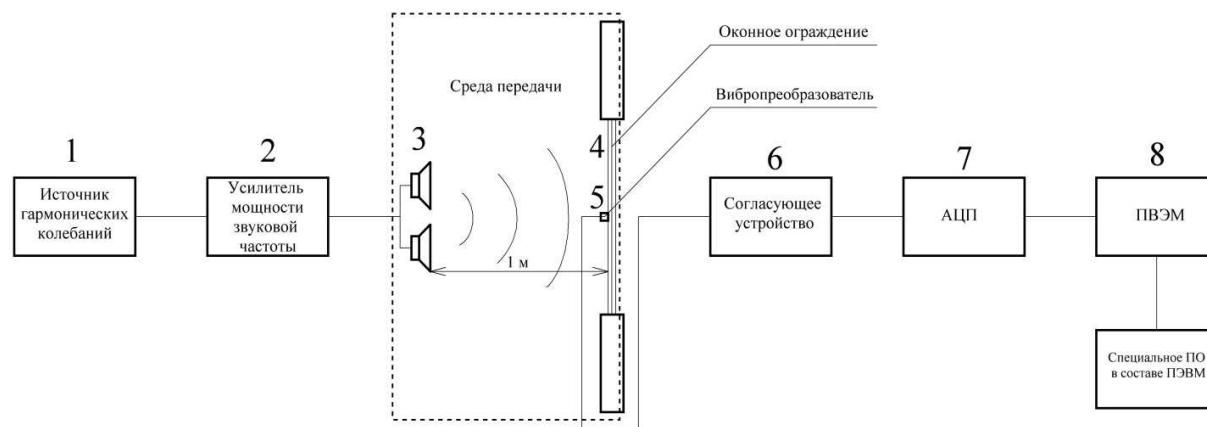


Рисунок 3. – Блок схема установки:

- 1 – источник гармонических колебаний; 2 – усилитель мощности звуковой частоты;
- 3 – акустическая система из 2-х динамиков; 4 – оконное ограждение (стеклопакет);
- 5 – вибропреобразователь; 6 – согласующее устройство; 7 – аналогово-цифровой преобразователь;
- 8 – персональная электронно-вычислительная машина типа ноутбук

Таблица 1. – Основные характеристики вибропреобразователя AP2029-10

Наименование характеристики	Размерность	Значение
Рабочий диапазон температур	°С	– 40 ... +125
Рабочий диапазон частот (неравномерность ±1дБ)	Гц	0,5 ... 20 000
Частота установочного резонанса в осевом направлении	кГц	60
Уровень шума, СКЗ (1 Гц – 10 кГц)	м/с ²	< 0,002

Полученные результаты. Эксперимент выполнялся в лаборатории при температуре окружающего воздуха +18 С°. Измерения проводились в диапазоне частот от 100 до 10 000 Гц. Полученное значение изменения максимального резонанса для оконного ограждения без установленных ребер жесткости составило $\sum_{R0} = 0,1117$ В.

В таблице 2 представлены показатели максимального резонанса оконного ограждения с установленными ребрами жесткости и изменение показателей максимального резонанса с установленными ребрами жесткости, выраженные в децибелах.

Таблица 2. – Показатели максимального резонанса оконного ограждения с установленными ребрами жесткости и изменение показателей максимального резонанса с установленными ребрами жесткости

Показатели изменения резонансов	Схемы ребер жесткости (рисунок 2)									
	а	б	в	г	д	е	ж	и	к	
Показатели максимального резонанса оконного ограждения с установленными ребрами жесткости \sum_{Rn} , В	0,121	0,101	0,099	0,100	0,099	0,113	0,097	0,100	0,103	
Изменение показателей максимального резонанса с установленными ребрами жесткости δ_n , дБ	0,730	–0,823	–1,048	–0,917	–1,022	0,138	–1,145	–0,935	–0,637	

Изучив данные таблицы 2, можно отметить, что максимальным изменением резонансов обладает схема *ж* (см. рисунок 2), схемы *а* и *е*, наоборот, усиливают интенсивность звуковой волны из-за возникающих резонансов. Наилучшее увеличение защищенности речевой информации показало расположение ребер жесткости на схеме *ж*, по сравнению с оконным ограждением без них.

Для примера, на рисунке 4 представлены АЧХ схем с самыми высокими показателями изменения максимальных резонансов, использующих 4 и 2 ребра жесткости: *д*, *ж* и оконного ограждения без установленных на нем ребер жесткости.

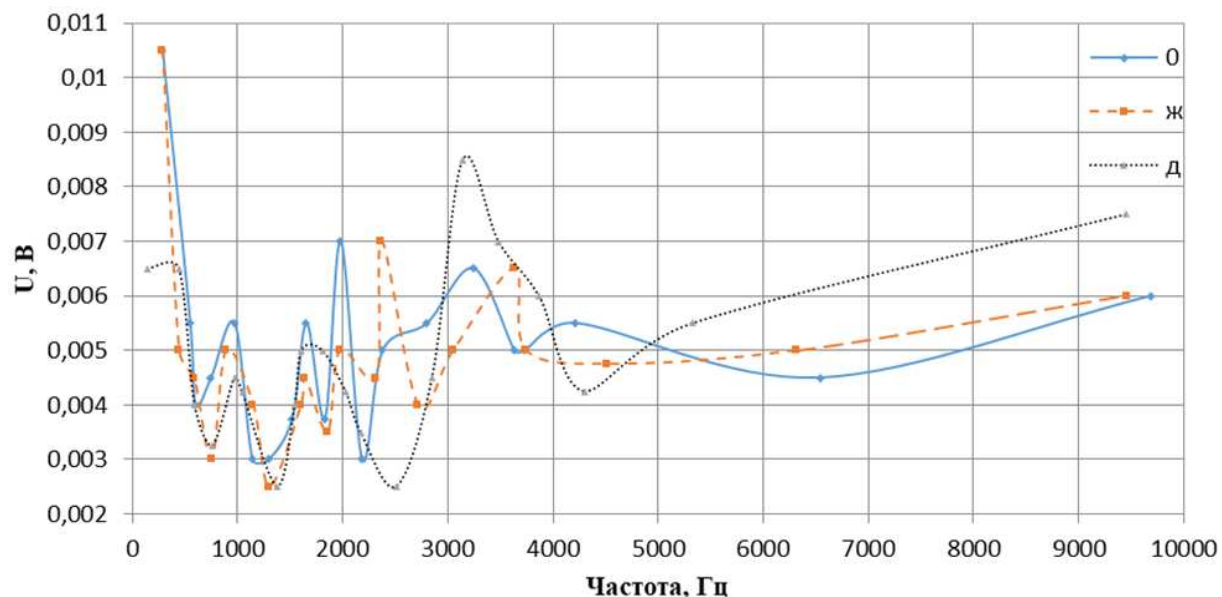


Рисунок 4. – Зависимость изменения максимального резонанса от частоты для оконного ограждения:

0 – оконное ограждение без установленных ребер жесткости; ж – схема ребер жесткости, две вертикальные и две горизонтальные; д – схема ребер жесткости, две параллельные наклонные

Зависимость изменения максимального резонанса δ'_i для оконного ограждения с установленными ребрами жесткости, выраженная в децибелах, рассчитывается по формуле (4)

$$\delta'_i = 20 \lg \frac{U_{Rin}}{U_{Ri0}}, \text{ дБ.} \quad (4)$$

Проанализировав графики, полученные расчетным путем (рисунок 5), можно сделать вывод, что при установленных ребрах жесткости происходит изменение максимальных резонансов и их частот в зависимости от используемой схемы, относительно оконного ограждения без установленных ребер жесткости. Кроме того, полученные графики зависимости отображают, насколько изменился уровень максимального резонанса с установленными ребрами жесткости, выраженный в децибелах.

Положительные значения графиков по оси ординат отражают увеличение максимального резонанса, т.е. уменьшение защищенности; отрицательные значения – уменьшение максимального резонанса или увеличение защищенности речевой информации. В идеальном случае схемы установления ребер жесткости должны строиться так, чтобы рассчитанные по ним графики находились в отрицательных значениях оси ординат для всех частот. Отсутствие изменения максимальных резонансов проложит график по оси ординат.

Для представленных значений на графиках явно прослеживается изменение частот максимальных резонансов при установленных ребрах жесткости. И также прослеживается изменение резонансов для большинства полос в диапазоне от –6 до 3,5 дБ.

На рисунке 4 график отображает смещение резонансов для схем *ж* и *д* по частоте. Так, при применении схемы *ж* резонанс на частоте 3240 Гц оконного ограждения без установленных ребер жесткости сместился на частоту 3048 Гц, и значит, уровень защищенности речевой информации увеличился. А схе-

ма д в этой полосе частот показывает уменьшение уровня защищенности речевой информации и смещение резонанса по частоте с 3240 на 3146 Гц. В общем, по всем полосам схемы ж и д показали увеличение уровня защищенности речевой информации.

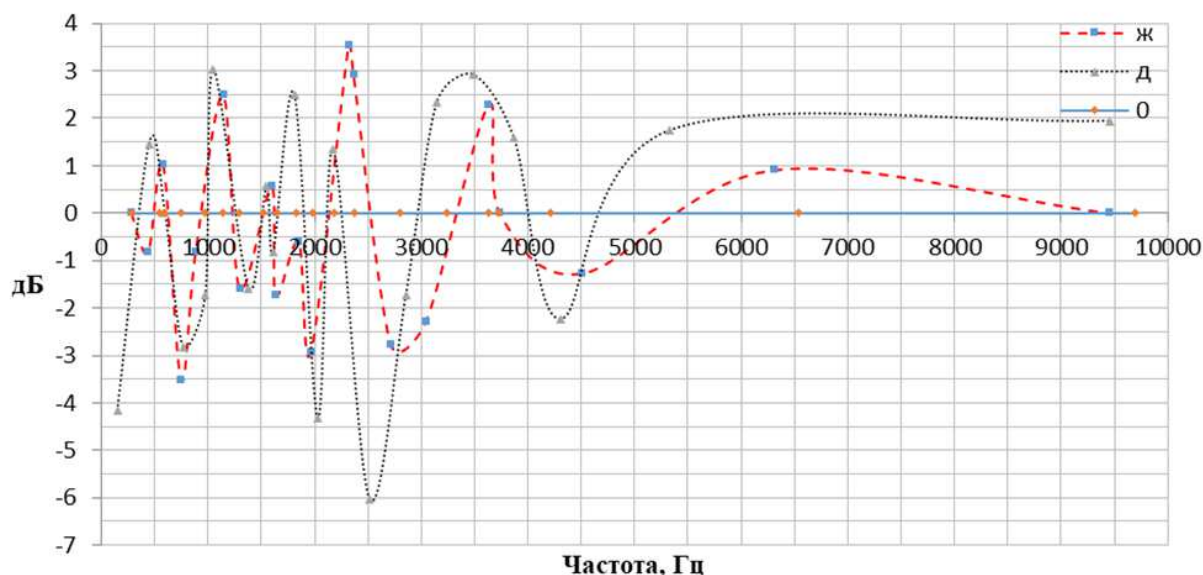


Рисунок 5. – Зависимость изменения максимального резонанса с установленными ребрами жесткости от частоты:

0 – оконное ограждение без установленных ребер жесткости; Ж – схема ребер жесткости, две вертикальные и две горизонтальные; Д – схема ребер жесткости, две параллельные наклонные

Вывод. В работе предлагается и обосновывается способ увеличения защищенности речевой информации путем крепления стеклянных трубок (ребер жесткости) на оконное ограждение. Крепление ребер жесткости допускается в различных схемах. Некоторые из возможных схем, исследуемых в работе, показали уменьшение общего максимального резонанса оконных ограждений, что увеличивает защищенность речевой информации.

С помощью разработанной лабораторной установки выполнено исследование оконного ограждения. Рассчитаны изменения общего максимального резонанса при установленных ребрах жесткости.

В результате выявлено, что:

1. Схема ребер жесткости ж (две вертикальные и две горизонтальные стеклянные трубки) обладает наибольшим показателем уровня ослабления общего максимального резонанса и показывает увеличение уровня защищенности речевой информации, по сравнению с оконным ограждением без ребер жесткости.

2. При использовании ребер жесткости, кроме изменения уровня максимального резонанса, наблюдается эффект смещения звуковых резонансов по частоте. Смещение звуковых частот резонансов зависит от используемой схемы ребер жесткости. Таким образом, путем подбора наиболее оптимальных схем ребер жесткости для оконного ограждения, возможно устранение или снижение резонансов оконного ограждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Железняк, В.К. Математическая модель формирования параметров звукоослабления оконным ограждением помещений / В.К. Железняк, К.Я. Раханов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2008. – № 9. – С. 141–146.
2. Клюкин, И.И. Борьба с шумом и звуковой вибрацией на судах / И.И. Клюкин, И.И. Клюкин. – М. : Судостроение, 1971. – 416 с.
3. Жесткость конструкций [Электронный ресурс] // Факторы, определяющие жесткость конструкций. – 2019. – Режим доступа: <https://inzhenner-info.ru/razdely/konstruirovanie/zhestkost-konstruktsij/factory-opredelyayushchie-zhestkost-konstruktsij.html>. – Дата доступа: 10.02.2019.

4. Железняк, В.К. Защита информации от утечки по техническим каналам : учебное пособие / В.К. Железняк. – СПб. : ГУАП, 2006. – 188 с.
5. Железняк, В.К. Оценка разборчивости речи взаимной корреляцией сигнала линейной частотной модуляции в каналах утечки информации / В.К. Железняк, К.Я. Раханов, И.Б. Бураченко // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 22–27.
6. Карпушин, В.Б. Виброшумы радиоаппаратуры / В.Б. Карпушин, Б.В. Карпушин. – М. : Сов. радио, 1977. – 320 с.

Поступила 26.03.2019

APPLICATION OF GLASS TUBES ON WINDOW FENCES FOR INCREASING THE PROTECTION OF SPEECH INFORMATION

V. ZHELEZNYAK, K. RAHANOV, A. KAZUTIN

The paper proposes and justifies a way to increase the security of speech information by attaching glass tubes (stiffeners) to a window fence. A method for estimating changes in the resonances of a window fence with fixed stiffeners is given. With the help of the developed laboratory installation, the study of window barriers without and with installed stiffeners was carried out, according to the layout patterns. Calculated indicators of changes in the maximum resonance of the window fencing with installed stiffeners. The schemes with the highest and lowest levels of attenuation of the total maximum resonance are determined, the effect of resonance shifting in frequency is shown with stiffening ribs set.

Keywords: voice information security, resonance research, window fencing, speech intelligibility.

УДК 004.934.2

АКУСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕЧИ ЛИЦ С ДИСФОНИЕЙ

С.М. ГОРОШКО, канд. техн. наук, доц. С.Н. ПЕТРОВ

(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники)

Показана возможность при использовании акустического анализа извлекать параметры речи, которые могут быть использованы для диагностики голосовых патологий. Предлагается методика распознавания речи с использованием мел-частотных кепстральных коэффициентов. Выявление расстройств голосового аппарата предлагается свести к решению задачи кластерного анализа, в которой для количественной оценки сходства или различия между классифицируемыми объектами используется Евклидово расстояние между полученным вектором признаков речевого сигнала и вектором признаков набора тестовых данных. Методика позволяет определить различие между здоровым человеком и человеком с нарушением речевой функции и может быть использована для разработки устройств, предназначенных для диагностики дисфонии у лиц голосоречевых профессий.

Ключевые слова: выявление патологии речи, распознавание речи, дисфония, мел-частотные кепстральные коэффициенты, дискретное преобразование Фурье, Евклидово расстояние.

Введение. В настоящее время возросло число лиц голосоречевых профессий. Таким людям в своей профессиональной деятельности необходимо обладать голосом достаточной силы и интонационной выразительности для достижения убедительности, так как смысл высказывания во многом определяется не только лексикой, но и интонацией. Акустические характеристики голоса оказывают значительное влияние на интонацию, артикуляцию и дикцию.

Речь – это сложный психофизический процесс, результат работы мышц, связок, дыхания, центральной и периферической нервной системы. Нарушения голосовой функции объединяют под общим названием «дисфония». Подобные нарушения могут носить врожденный или приобретенный характер в результате травм, операций, нервно-психических, инфекционных или иных заболеваний. Большинство заболеваний гортани и патологии голосовых связок вызывают значительные изменения в речи. Также известно, что на голос в значительной степени влияет текущее психофизическое состояние человека [1].

Хроническая дисфония возникает при органических повреждениях голосовых связок, таких как полип, отек Рейнке и т.д., а также при раке горла, неврологических расстройствах и хроническом раздражении, вызванном курением.

В число традиционных процедур для осмотра гортани с клиническими или исследовательскими целями входят гибкая и жесткая фиброскопическая ларингоскопия (обследование с помощью волоконно-оптического инструмента), видеостробоскопия (стробовое освещение гортани, полезное для визуализации движений), электромиография (косвенное наблюдение за функциональным состоянием гортани) и видеофлуороскопия (рентгенографическая техника, при которой пациент глотает радиоактивное непрозрачное вещество для оценки функции глотания). Все они имеют инвазивный характер.

В последние годы возрос интерес к акустическому анализу голоса как альтернативному средству диагностики. Этот тип анализа обладает преимуществами перед существующими методами обследования из-за его неинвазивного характера, а также возможности предоставить количественные данные о клиническом состоянии функций гортани и голосового тракта с соответствующими результатами временного анализа. В частности, акустический анализ находит широкое применение для обследования детей с задержкой или нарушениями речевого развития.

Получение вектора признаков на основе мел-частотных кепстральных коэффициентов. Основная суть данной методики заключается в получении основных характеристик речевого сигнала и отбрасывании индивидуальных особенностей произношения слов диктором. Преимущество кепстральных коэффициентов (Mel-frequency cepstral coefficients – MFCC) перед другими методами заключается в простоте реализации при достаточно высоком качестве распознавания речи. Мел – психофизическая единица высоты звука [2]. Данная оценка по высоте определена эмпирически, методом статистической обработки больших сведений о восприятии звука человеком. Высота звука логарифмически зависит от частоты звука. Использование мел-шкалы хорошо работает для чистого тона, при наличии посторонних шумов эффективность данной оценки сильно падает.

У каждого человека основные частоты и частоты формант индивидуальны, поэтому необходимо найти параметр, который учитывал бы эту особенность. Используя метод связывания с гармониками, можно избавиться от любых фиксированных значений анализируемых полос частот и наблюдать изменения характеристик речи в динамике [3]. Однако есть сложность в описании параметров каждой фор-

манты отдельно, поскольку они не всегда явно выражены. Поэтому основным параметром в методах анализа сигнала должна считаться основная частота голоса человека. Отношение интегрального спектра высокочастотной полосы к спектру полосы низкой частоты с привязкой к гармоникам является наиболее эффективным методом определения речевых патологий. Изучение результатов проведенных исследований показало целесообразность использования предложенного метода для анализа нарушений речи [4].

Для этого использовался речевой сигнал, полученный у диктора с использованием микрофона. Блок-схема алгоритма обработки речевого сигнала представлена на рисунке 1.

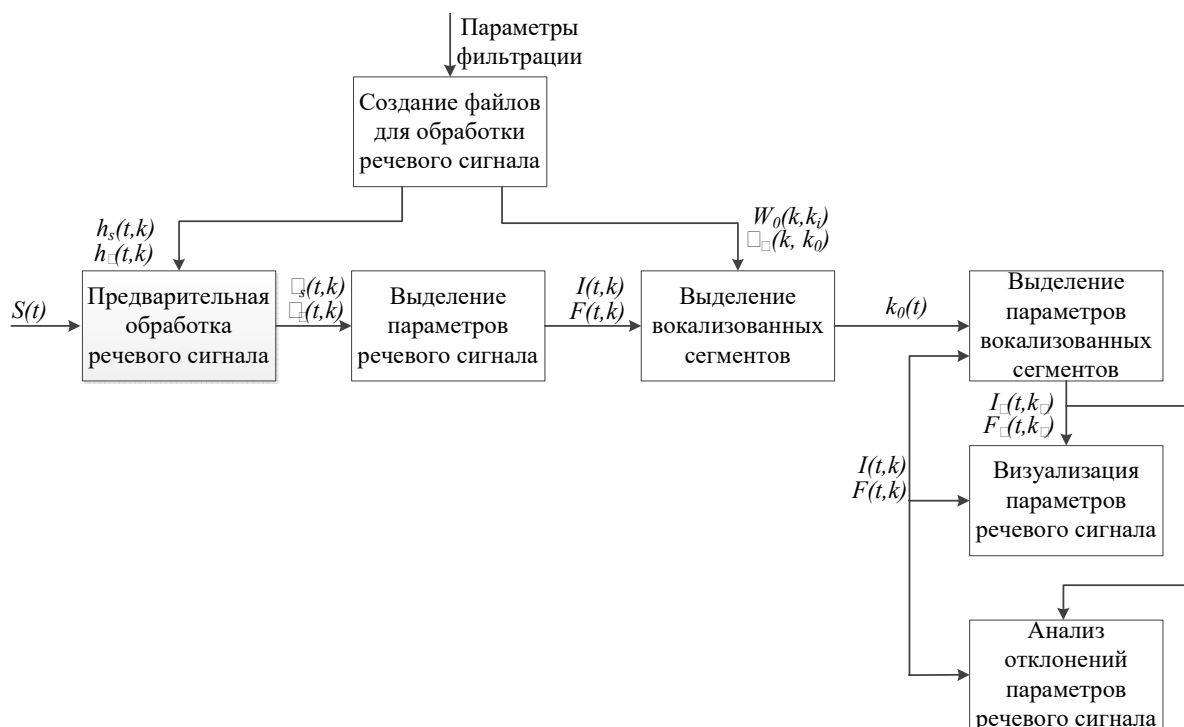


Рисунок 1. – Блок-схема алгоритма обработки речевого сигнала

Речевой сигнал имеет конечную длительность и не является периодическим, поэтому необходимо разбить этот сигнал на сегменты (кадры) конечной длины, спектры которых остаются относительно неизменными в течение выбранного периода времени. Обычно за такой период принимается длительность 5–100 мс. Разбиение исходного сигнала на кадры заданной длительности делается с половинным перекрытием для борьбы с искажениями, которые могут быть вызваны расположенными рядом кадрами, либо без перекрытия, что значительно экономит вычислительные ресурсы. В пределах полученного кадра входной сигнал можно считать стационарным. С точки зрения динамики речи самые быстрые изменения могут происходить всего за несколько миллисекунд, тогда как некоторые гласные звуки остаются относительно стабильными в течение 100–200 мс. Часто используются кадры длиной 10–25 мс [5].

В данной работе использовались кадры длительностью 10 мс с половинным наложением (5 мс).

Кроме того, вследствие конечной длительности и непериодического характера речевого сигнала из-за разрывов на концах временного ряда при применении преобразования Фурье проявляется эффект утечки. Эффект спектральной утечки затрудняет корректное выделение гармонических составляющих, близких друг к другу по частоте, из-за конечной ширины главного лепестка, а также вносит искажения в далеко расположенные частоты, мешая точному измерению амплитуды отдельных частот в связи с наличием боковых лепестков.

Для снижения влияния эффекта утечки на конечный результат применялась весовая функция Хэмминга, что позволило минимизировать максимумы боковых лепестков:

$$w(n) = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (1)$$

где N – длина кадра.

Далее для каждого кадра вычислось дискретное преобразование Фурье (ДПФ). ДПФ взвешенного сигнала имеет вид

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n w_n \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} kn\right), \quad (2)$$

где k – частоты.

$$f_k = \frac{F_s}{N} k, \quad (3)$$

где F_s – частота дискретизации сигнала.

Следующим шагом вычисляем периодограмму – оценку спектральной плотности мощности (СПМ)

$$P_i(k) = \frac{|Y_i(k)|^2}{N}. \quad (4)$$

Полученное представление сигнала в частотной области разбивают на диапазоны с помощью набора (банка) из 26 треугольных фильтров. Границы фильтров рассчитывают в шкале мел. Переход от частотной шкалы к мел-шкале осуществляется по формуле

$$M(f) = 1127 \ln\left(1 + \frac{f}{700}\right), \quad (5)$$

где $M(f)$ – частота в мелах.

Переход обратно к частотной шкале осуществляется по формуле

$$F(m) = 700 \left(\exp\left(\frac{m}{1125}\right) - 1 \right). \quad (6)$$

Фильтры умножаются на периодограмму кадра и вычисляется энергия для каждого фильтра (по 26 для каждого кадра). Полученные энергии логарифмируются:

$$e_m = \ln\left(\sum_{k=0}^N |X_k|^2 H_{m,k}\right), \quad m = 0, \dots, N_{FB} - 1, \quad (7)$$

где N_{FB} – количество фильтров;

$H_{m,k}$ – весовые коэффициенты полученных фильтров.

На заключительном этапе расчета MFCC применяется дискретное косинусное преобразование. На выходе получаем многомерный вектор признаков сигнала, которые и являются мел-частотными кепстральными коэффициентами:

$$c_i = \sum_{m=0}^{N_{FB}-1} e_m \cos\left(\frac{\pi i(m+0,5)}{N_{FB}}\right), \quad i = 1, \dots, N_{MFCC}. \quad (8)$$

Коэффициент c_0 не используется, так как представляет собой энергию сигнала.

Методика проведения эксперимента. В качестве эталонных использовались фразы, приведенные в приложение Д ГОСТ Р 50840-95. Тестовые фразы были записаны с использованием микрофона AKG P120, подключенного к аудиоинтерфейсу Focusrite Scarlett 2i2. Данные сохранялись и обрабатывались на персональном компьютере. Чтение осуществлялось дикторами ровным голосом, четко, но без подчеркивания отдельных звуков с постоянным уровнем речи. На протяжении чтения всей таблицы дикторами выдерживался постоянный ритм речи [6]. Предполагается создание нескольких тестовых баз. Одна из них создается из записей лиц без патологий речи, другая (или другие) создается из записей людей с дисфонией.

Далее проводится сравнение акустических параметров исходных тестовых фраз и параметров фраз, полученных при произношении лицом, проходящим диагностику. Во время проведения диагностики, дикторам было предложено прочитать в общей сложности 80 различных фраз, в которых представлены наиболее значимые гласные в виде ударных фонем. При этом возможно оценить работу голосовых складок.

Задачу выявления расстройств голосового аппарата предлагается свести к задаче кластерного анализа, при которой для количественной оценки сходства или различия между классифицируемыми объектами используется понятие метрики. В качестве такой метрики использовалось Евклидово расстояние между полученным вектором признаков речевого сигнала и вектором признаков сигнала набора тестовых данных. Евклидово расстояние рассчитывается по формуле

$$D_e(a, b) = \sum_{i=1}^N \sqrt{(b_i^2 - a_i^2)}, \quad (9)$$

где D_e – расстояние между объектами b и a ;

a_i – значение i -свойства объекта a ;

b_i – значение i -свойства объекта b .

Необходимо провести кластеризацию признаков с одним или несколькими центрами для здоровых людей и людей с дисфонией. В результате чего получим 2 кластера. Вычислить значения вектора для лица, проходящего обследование. Найти расстояние от этого вектора до центров тестовых кластеров. В зависимости от того, к какому из кластеров окажется ближе полученный «диагностический» вектор, принимается решение наличия и об отсутствии расстройства речевой функции.

Реализация обработки данных средствами пакета MatLab 2017.

Для чтения звуковых файлов в среде разработки Matlab предусмотрена функция `[sig, fs, b] = wavread('filename.wav')`. Функция `wavread` загружает звуковой файл и возвращает выбранные данные: `sig` – звуковой сигнал со значениями от -1 до 1 , `fs` – частота дискретизации, `b` – количество бит на одну выборку.

Разбиение записанного речевого сигнала на фреймы производится с использованием функции `enframe(sig, win, inc)`, где `win` – оконная функция (Хэмминга), `inc` – смещение, а также для умножения на оконную функцию (формула 1).

Расчет преобразования Фурье в действительной области в среде Matlab производится функцией `rfft(sig)`, где `sig` – умноженный на оконную функцию сигнал.

Функция `melbank(p, n, fs, flow, fhigh, w)` создает набор мел-фильтров, где `p` – количество фильтров, `n` – длина преобразования Фурье, `fs` – частота дискретизации, `flow/fhigh` – нижняя/верхняя границы фильтров, `w` – тип фильтров.

Функция `gdct(x)` реализует дискретное косинусное преобразование.

Функция `melcepst(s, fs, w, nc, p, n, inc, flow, fhigh)` возвращает мел-кепстральные коэффициенты, используя вышеназванные функции [7].

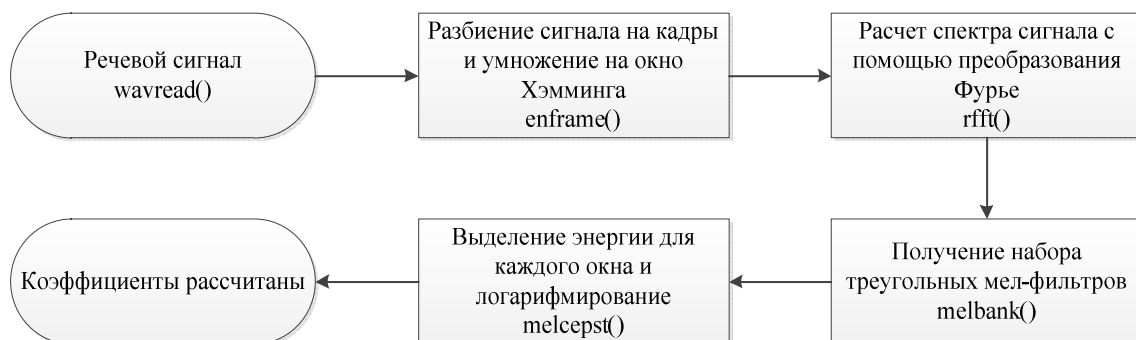
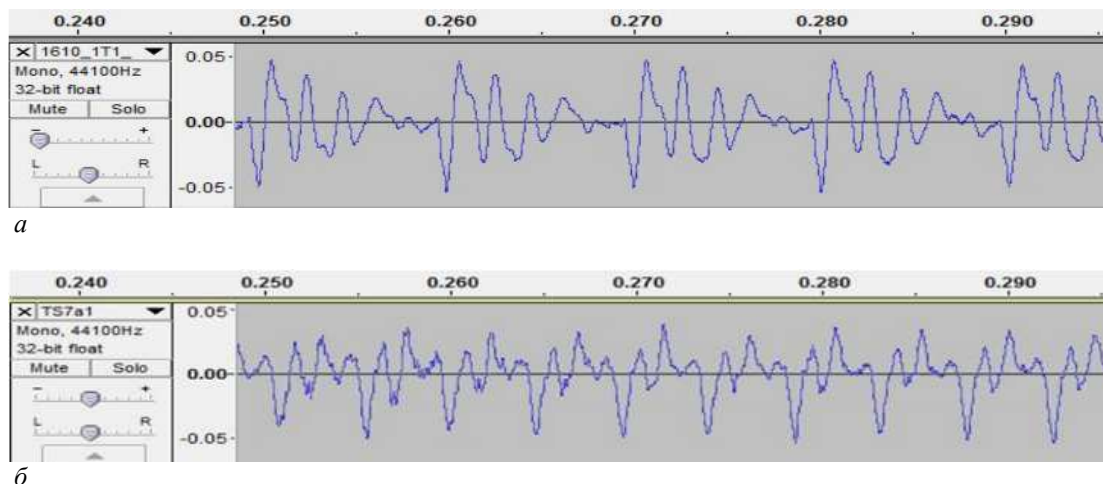


Рисунок 2. – Алгоритм вычисления мел-частотных кепстральных коэффициентов в Matlab 2017

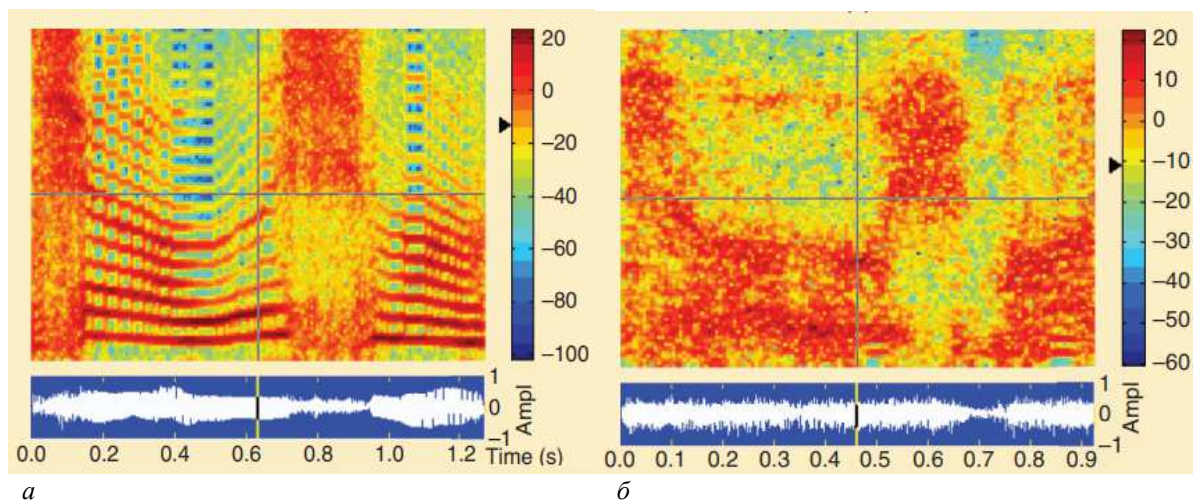
Акустические характеристики речи при дисфонии. На рисунке 3 приведены фрагменты звукозаписи речи здорового человека (a) и человека с дисфонией (b). Запись голоса выполнялась в тихой комнате с микрофоном, расположенным на расстоянии 10 см ото рта. Проведение записи происходило с частотой дискретизации 44,1 кГц.

В качестве дикторов были приглашены преподаватели БГУИР, в том числе имеющие в анамнезе диагноз дисфонии.



**Рисунок 3. – Фрагмент звукозаписи речевого сигнала:
а – здоровый человек; б – человек с дисфонией**

Такой голос имеет более низкую амплитуду и по своим характеристикам напоминает шепот. Речь с дисфонией отличается от нормальной по звучанию тональностью и формантной структурой. На рисунке 4 приведены спектрограммы здорового человека и человека с дисфонией.



**Рисунок 4. – Спектрограмма речи:
а – здорового человека; б – человека с дисфонией**

На рисунке 4 отчетливо видно, что в сравнении с нормальной речью в вокализованных фонемах человека с дисфонией не наблюдается период основного тона. В дополнение к этому вокализованные фонемы отличаются от озвученных фонем нормальной речи с точки зрения формантного искажения. Ширина полосы дисфонических фонем больше, а их формантные частоты выше. Однако в невокализованных фонемах дисфонической речи не наблюдается значительных формантных искажений. Сравнивая дисфоническую речь с нормальной с точки зрения характеристик тональности, озвучивания и формантного искажения, было установлено, что для невокализованных фонем дисфонической речи не должно быть никаких изменений.

Заключение. В данной работе представлена система ранней диагностики лиц с дисфонией. В ее основу положены обнаружение и сравнение мел-частотных кепстральных коэффициентов речи, а также кластерный анализ. Методика позволяет дополнить традиционные инвазивные методы. В дальнейшем может быть расширена для диагностики большого числа нарушений речи, например, таких как дизарт-

рия, определения степени тяжести заболеваний или вида расстройств (гипотонусная, гипертонусная или гипо-гипертонусная дисфония).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фомина, М.В. Профилактика и лечение нарушений голоса у лиц голосоречевых профессий : метод. указания / М.В. Фомина. – Оренбург : ГОУ ОГУ, 2004. – 19 с.
2. Воробьева, С.А. Выделение границ фоновым речевым сигналом с помощью мел-частотных спектральных коэффициентов / С.А. Воробьева // Молодой ученый. – 2017. – № 13. – С. 2–6.
3. Малинин, П.В. Иерархический подход в задаче идентификации личности по голосу с помощью проекционных методов классификации многомерных данных / П.В. Малинин, В.В. Поляков // Доклады Томского гос. ун-та систем управления и радиоэлектроники. – 2010. – № 1/1.
4. Первушин, Е.А. Обзор основных методов распознавания дикторов / Е.А. Первушин // Математические структуры и моделирование. – 2011. – Вып. 24.
5. Сорокин, В.Н. Распознавание личности по голосу: аналитический обзор / В.Н. Сорокин, В.В. Вьюгин, А.А. Тананькин // Информационные процессы. – 2012. – Т. 12, №1.
6. Передача речи по трактам связи. Методы оценки качества, разборчивости, узнаваемости : ГОСТ Р 50840-95. – М. : Госстандарт России.
7. Смит С. Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и научных работников / С. Смит. – М. : Додэка-XXI, 2012. – 720 с.

Поступила 27.02.2019

ACOUSTICAL ANALYSIS OF THE SPEECH OF PERSONS WITH DYSPHONIA

S. GOROSHCKO, S. PETROV

The possibility of using acoustic analysis to extract speech parameters that can be used for the diagnosis of voice disability is shown. The method of speech recognition using Mel-frequency cepstral coefficients is proposed. Detection of voice disorders is reduced to solving a cluster analysis problem, in which the Euclidean distance between the received speech feature vector and the feature vector of the test data set is used to quantify the similarities or differences between the classified objects. The technique allows to determine the difference between a healthy person and a person with impaired speech function and can be used to develop devices designed to diagnose dysphonia in persons of voice-speech professions.

Keywords: *detection of speech pathology, speech recognition, dysphonia, mel-frequency cepstral coefficients, discrete Fourier transform, Euclidean distance.*

УДК 004.622:004.514

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА ФИЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

С.Ю. ЗМИТРОВИЧ, канд. физ.-мат. наук, доц. С.А. ВАБИЩЕВИЧ,
канд. техн. наук, Д.Н. ШАБАНОВ
(Полоцкий государственный университет)

Представлена разработанная система измерений физических величин *PhyZModule*, включающая в себя микроконтроллерное устройство и программное обеспечение, позволяющее обрабатывать полученные экспериментальные данные и представлять их в виде графической информации. Показано, что на основании измерений температуры с использованием указанной системы, возможно проводить исследование коэффициента теплопроводности материалов с достаточной степенью достоверности.

Ключевые слова: микроконтроллер, датчики, измерение, теплопроводность.

Введение. В настоящее время в различных отраслях промышленности часто возникает потребность в получении материалов с заданными свойствами, что влечет за собой необходимость определения физических характеристик материалов на различных этапах производства. Актуальными задачами при этом являются автоматизация процесса проведения измерений различных физических параметров с последующей обработкой экспериментальных данных, представление результатов в наглядной форме, повышение достоверности проведенных измерений и расчетов.

Измерение физических величин может происходить с использованием различных приборов, включая датчиковую аппаратуру [1]. Информация, поступающая от датчиков, зачастую имеет аналоговую форму, что в электронике представлено в виде напряжения, которое, в свою очередь, обрабатывается микроконтроллерным устройством (МК) и передается на компьютер пользователя (ПК).

Цель настоящей работы – проектирование системного модуля, который дает возможность на основании показаний датчиков аналоговых величин определять температуру, визуализировать характер ее изменения от времени в графической форме и рассчитывать теплопроводность материала. При этом основная задача состояла в разработке программного обеспечения (ПО) с возможностью обмена данными с микроконтроллерным устройством и построения графиков на основе проделанных измерений с последующим импортом данных в другие программные среды.

Система проведения измерений «PhyZModule». Графическое представление системы изображено на рисунке 1. В нее входят два основных элемента: микроконтроллерное устройство, проводящее все измерения и программное обеспечение, отображающее изменение определяемых величин. Измерения показаний датчиков производились по мостовой схеме [2].

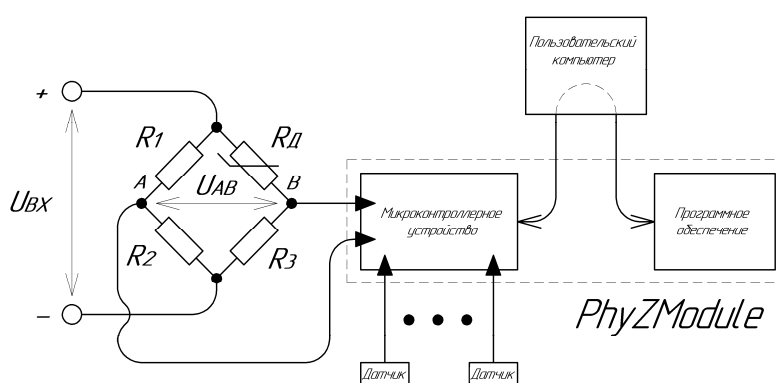


Рисунок 1. – Графическое представление системы «PhyZModule»

Микроконтроллерное устройство проводит измерения, используя собственный модуль аналого-цифрового преобразователя (АЦП), который позволяет конвертировать аналоговую величину в цифровой код. Программное обеспечение является инициатором обмена данными между ПК и МК посредством виртуального COM-порта на базе USB.

На рисунке 2 представлен интерфейс разработанного программного обеспечения для осуществления измерения физических величин. Разработка интерфейса программы осуществлялась в среде «Embarcadero RAD Studio 10.3».

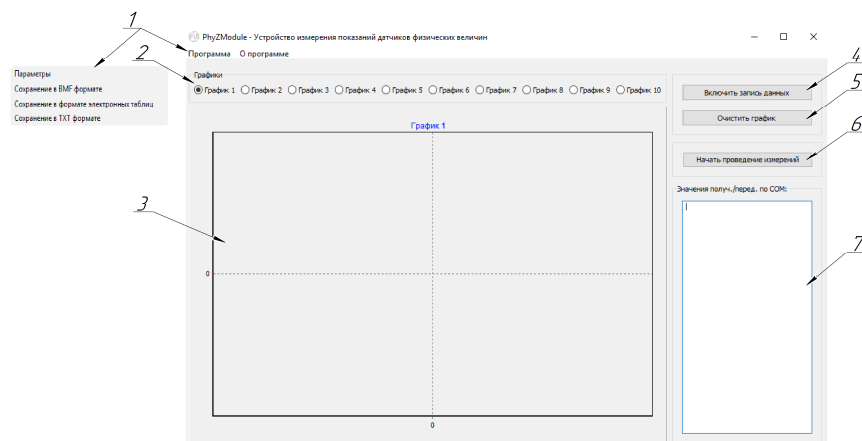
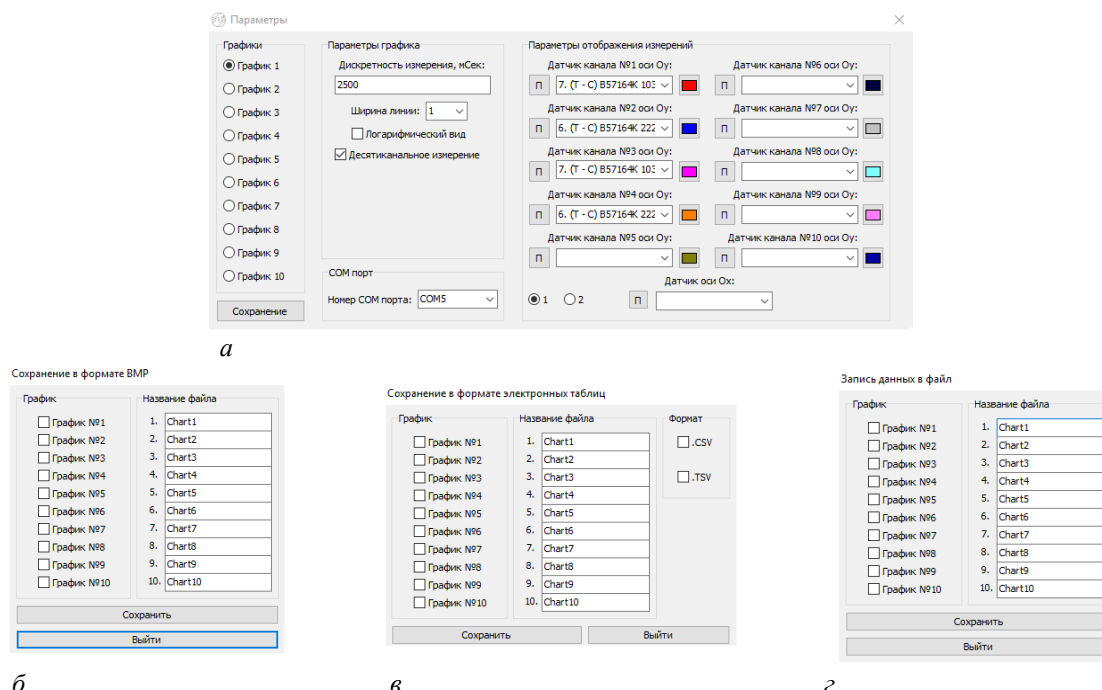


Рисунок 2. – Главное окно программы

Основным полем интерфейса является поле графиков 3, количество которых может достигать десяти. Данное поле используется для отображения всех настроенных для него измерений. Переключение между полями графиков происходит через изменение состояния переключателя 2. Кнопка 4 «Включить запись данных» предназначена для подтверждения использования выбранного поля графиков 3, после чего все измерения будут отображаться на нем. Кнопка 5 «Очистить график» используется при необходимости очистки поля графиков 3. Кнопка 6 «Начать проведение измерений» применяется для того, чтобы инициировать обмен данными между ПО и МК. После ее нажатия появится кнопка «Закончить проведение измерений», которая прекращает передачу данных. Меню 1 позволяет пользователю узнать основную информацию о программе в пункте «О программе», а также зайти в подменю программы в пункте «Программа», где существует возможность выбора формата сохранения и настроек параметров программы (рисунок 3).

Для каждого из графиков существует возможность изменения параметров: дискретности отображения; использования десятиканального измерения; цвета линии; ширины линии; логарифмического вида, использования датчика и выбора АЦП порта для канала. Произвести изменения можно пройдя по пути «Программа–Параметры», рисунок 3, а. Приложение позволяет выводить измеренную информацию в четырех форматах: *txt*; *bmp*; *tsv*, *csv*.

Рисунок 3. – Окно: а – параметров графиков; б – сохранения в *bmp* формате; в – сохранения в форматах *tsv* и *csv*; г – сохранения в *txt* формате

Использование таких форматов, как *tsv* и *csv*, является универсальным выбором, позволяющим исследователю абстрагироваться от принятия решений об использовании определенного программного обеспечения для построения электронных таблиц и проведения дальнейших действий с выведенными данными. Данные форматы импортируются практически во все офисные пакеты, например, в такие как «Microsoft Excel», «WPS SpreadSheets».

Определения тепловых свойств материалов. В качестве примера практического использования измерительной системы «PhyZModule» рассмотрен процесс определения тепловых свойств материалов. В работе проводились теплофизические измерения, которые позволили получить данные о температуре одновременно с нескольких датчиков; рассчитать основные параметры материала (коэффициент теплопроводности, теплоемкость, коэффициент температуропроводности) [3].

На рисунке 4 представлена схема установки по изучению тепловых свойств материалов. Установка представляет собой камеру, состоящую из двойной стенки: внутренняя стенка изготовлена из материала с известными параметрами 6, наружная – с неизвестными 7. На стенках закреплены датчики температуры 1 – 3 и 5. Внутри камеры находится инфракрасный обогреватель 4.

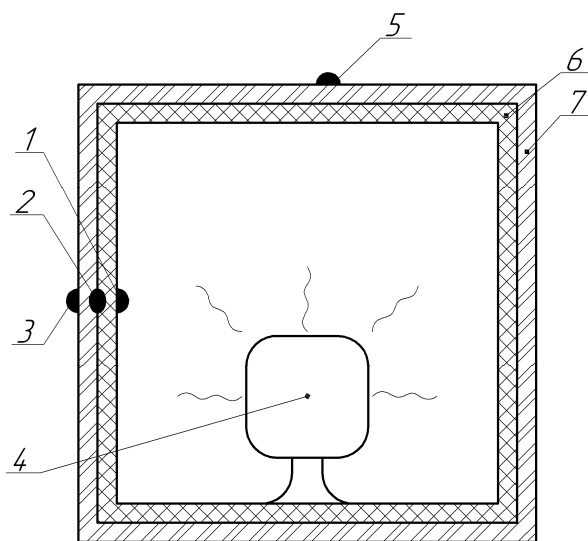


Рисунок 4. – Схема измерительной установки

Эксперимент по определению теплоизоляционных свойств материала заключался в следующем:

- 1) производили нагревание внутреннего объема установки до определенной температуры;
- 2) после отключения нагревателя осуществляли замеры температуры внутри и снаружи установки с заданным временным интервалом. Для этого использовались датчики на основе термистора с отрицательным температурным коэффициентом В57164-К 222-Ј, размещенные как представлено на рисунке 4: 1 – внутри установки; 2 – между стенками; 3 – снаружи на боковой стенке; 5 – снаружи на верхней стенке.

Для определения коэффициента теплопроводности использовался известный способ «вспомогательной стенки» [4]. Два слоя материала размещаются на источнике тепла, один из материалов с известным коэффициентом теплопроводности λ_1 , для второго материала коэффициент теплопроводности определяется по формуле

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{t_1 - t_2}{t_2 - t_3},$$

где d_1 – толщина материала с известным коэффициентом теплопроводности (в эксперименте использовался пенополистирол, с коэффициентом теплопроводности $\lambda_1 = 0,035$ Вт/(м·К);

t_1 – температура внутренней поверхности первого слоя;

t_2 – температура между слоями стенки;

t_3 – температура наружной поверхности второго слоя;

d_2 – толщина слоя, коэффициент теплопроводности которого определяется.

На рисунках 5 и 6 представлены зависимости показаний датчиков температуры от времени наблюдения, полученные с использованием системы «PhyZModule», и рассчитанного коэффициента теплопроводности исследуемого материала. После включения инфракрасного нагревателя в камере темпе-

ратура, показываемая датчиком 1, достигала значения 50–60°C за несколько минут. Затем обогреватель выключали. Система фиксировала изменение температуры датчиков в течение 30 мин (см. рисунок 5).

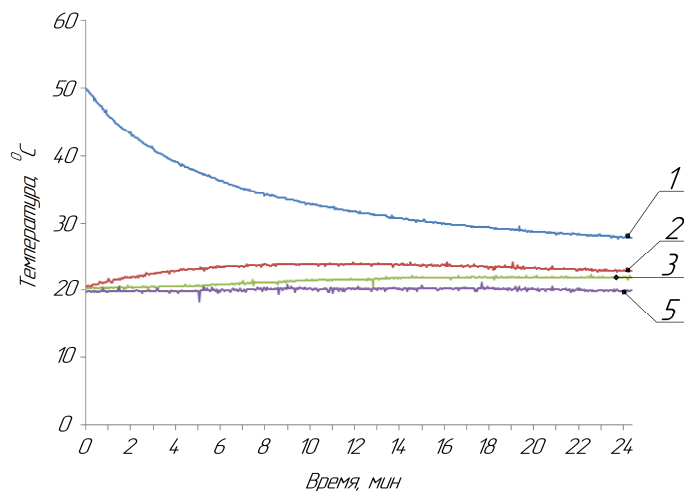


Рисунок 5. – Зависимость показаний датчиков температуры от времени в теплофизической установке. Номера кривых соответствуют номерам датчиков

Из полученной зависимости рассчитанного коэффициента теплопроводности от времени наблюдения (см. рисунок 6) видно, что показания датчиков выходили на стационарный уровень через 10–14 мин после отключения нагревателя, что было учтено при проведении эксперимента по определению коэффициента теплопроводности.

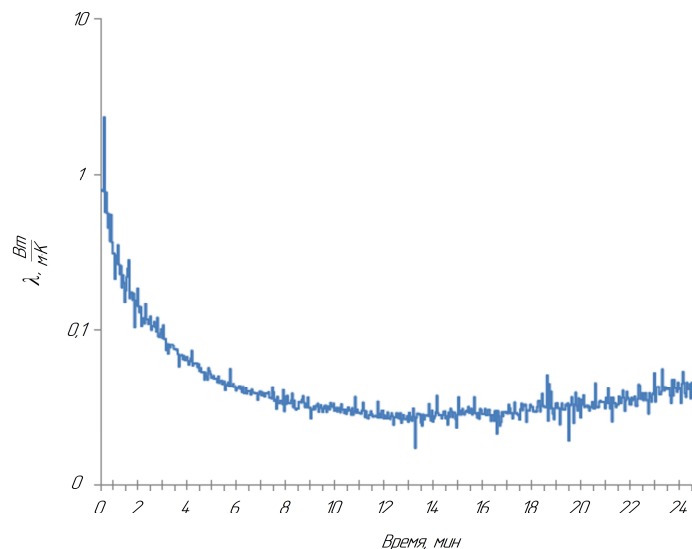


Рисунок 6. – Зависимость рассчитанного коэффициента теплопроводности от времени наблюдения

Представленные на рисунке 6 данные свидетельствуют о том, что рассчитанное значение λ_2 снижается с течением времени. Указанный процесс носит нестационарный характер. Истинное значение λ_2 можно определить в случае, когда градиент температуры является постоянной величиной, что, по данным эксперимента, имело место через 10–14 мин после выключения нагревателя, когда λ_2 достигло минимального значения. Рассчитанный в настоящей работе коэффициент теплопроводности равен 0,019 Вт/(м·К). В качестве материала с неизвестными характеристиками выступил пенополиуретан с табличным значением $\lambda_2 = 0,020$ Вт/(м·К). Погрешность в измерении составила величину не более 5%, что свидетельствует о достаточно высокой достоверности экспериментальных данных, полученных при измерениях с использованием системы PhyZModule. Таким образом, установлено, что представленная в работе методика пригодна для оценки тепловых характеристик материалов (коэффициент теплопроводности).

Заключение. Разработанная система PhyZModule, включающая в себя измеряющее микроконтроллерное устройство и программное обеспечение к нему, способствует повышению степени автоматизации процесса измерения физических характеристик материалов. Возможность получения большого количества графической информации, наглядность ее представления, использование различных форматов вывода информации делают разработанную систему универсальной для проведения физических измерений. Указанная система может быть использована для организации образовательного процесса по физике и иным дисциплинам естественнонаучного и инженерно-технического профиля. Представленные в работе результаты по применению системы PhyZModule для проведения теплофизических измерений и расчета коэффициента теплопроводности материала свидетельствуют о возможности и эффективности ее использования в научно-исследовательской деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Змитрович, С.Ю. Обработка аналоговых сигналов датчиковой аппаратуры [Электронный ресурс] / С.Ю. Змитрович, С.А. Вабищевич // Информационно-коммуникационные технологии: достижения, проблемы, инновации (ИКТ-2018) : электронный сборник статей I международной научно-практической конференции, посвященной 50-летию Полоцкого государственного университета, Новополоцк, 14–15 июня 2018 г. / Полоцкий государственный университет. – Новополоцк, 2018. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – С. 272–275.
2. Денисенко, В.В. Компьютерное управление технологическим процессом, экспериментом, оборудованием [Электронный ресурс] / В.В. Денисенко. – М. : Горячая линия – Телеком, 2013. – 607 с. – Режим доступа: <https://lib-bkm.ru/12906>.
3. Фокин, К.Ф. Строительная теплотехника ограждающих частей зданий / под ред. Ю.А. Табунщикова, В.Г. Гагарина. – 5-е изд. – М. : АВОК-ПРЕСС, 2006. – 256 с.
4. Анисимов, М.В. Экспериментальное определение коэффициента теплопроводности сверхтонких жидких композиционных теплоизолирующих покрытий / М.В. Анисимов, В.С. Рекунов // Известия Томского политехнического университета. – 2015. – Т. 326, № 9: Инжиниринг георесурсов. – С. 15–22.

Поступила 26.03.2019

AUTOMATED PHYSICAL MEASUREMENT SYSTEM

S. ZMITROVICH, S. VABISHCHEVICH, D. SHABANOV

The developed system for measuring physical quantities PhyZModule, which includes a microcontroller device and software, allows to process the experimental data and present them in the form of graphical information. It is shown that, on the basis of temperature measurements carried out using this system, it is possible to conduct a study of the thermal conductivity of materials with a sufficient degree of reliability.

Keywords: *microcontroller, sensors, measurement, thermal conductivity.*

УДК 004.94:666.97.035

**АЛГОРИТМ И ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА МОДЕЛИРОВАНИЯ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОЙ ОБРАБОТКИ БЕТОННЫХ ИЗДЕЛИЙ****А.М. НИЯКОВСКИЙ***(Полоцкий государственный университет);***Ю.В. ЯЦКЕВИЧ***(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники);***А.Н. ЧИЧКО***(Белорусский национальный технический университет)*

На основании разработанной теплофизической модели предложен алгоритм компьютерного моделирования процесса ускоренной гидратации бетонных изделий. Алгоритм использует уравнение теплопроводности в трехмерной постановке, учитывающей распределенный источник внутренних тепловыделений, и позволяет выполнять расчеты и визуализацию нестационарных полей температуры и коэффициента гидратации при твердении бетонных изделий в теплотехнологических установках. Алгоритм предназначен для разработки энергосберегающих режимов тепловой обработки бетонных изделий, имеющих сложную 3D-геометрию и неоднородную композитную структуру.

Ключевые слова: *компьютерное моделирование, программный комплекс, математическое моделирование, кинетика гидратации цемента, температурные поля, трехмерное уравнение теплопроводности, нестационарная теплопроводность, энергосбережение, теплотехнологии.*

Введение. В климатических условиях Республики Беларусь значительная часть промышленно изготавливаемых бетонных и железобетонных изделий подвергается тепловлажностной обработке (ТВО) в теплотехнологических установках ускоренной гидратации. В связи с чем вопросы разработки энергосберегающих режимов их функционирования становятся особенно актуальными, их отысканию и исследованию посвящено множество научно-исследовательских работ, которые в контексте проблемы, рассматриваемой в данной статье, могут быть объединены в несколько методологических подходов.

Подход, основанный на эмпирических зависимостях. Данный эмпирический подход [1–3], сформировался в рамках науки о бетоне и строительного материаловедения и заключается в экспериментальном подборе режимов ТВО и проектировании оптимальных составов бетонных смесей с последующим обобщением полученных простых факторных зависимостей в виде графиков, таблиц и аппроксимирующих уравнений. Метод оперирует средними по объему обрабатываемого изделия теплофизическими характеристиками материалов, температурой и степенью гидратации и не принимает в расчет начальные, граничные и краевые условия в пределах теплотехнологической установки для проведения ТВО.

Комплексный подход, базирующийся на методах системного анализа широкого спектра технологических параметров. Данный подход использует метод многофакторного проектирования режимов ТВО [4–7] и заключается в получении «математической модели» [4], отражающей влияние различных технологических факторов в их взаимосвязи на требуемые целевые характеристики обрабатываемого изделия, такие как прочность и степень гидратации. Зависимость этих целевых характеристик от отдельных факторов задана уравнениями, полученными экспериментальным путем и обработанными с учетом имеющихся материаловедческих представлений о процессе твердения бетона. В системе уравнений, определяющих такую математическую модель, могут учитываться некоторые теплотехнические параметры, например, теплообмен с окружающей средой [4, 6]. Однако такая модель по-прежнему оперирует интегральными характеристиками и не учитывает особенности нестационарного процесса нагрева и охлаждения бетонного изделия в теплотехнологической установке ускоренной гидратации, поскольку не использует аналитический аппарат математической физики.

Подход, основанный на аналитических методах. Аналитический подход заключается в использовании фундаментальных уравнений математической физики, адаптированных к задачам твердения бетона в условиях подвода теплоты, описывающих нестационарную теплопроводность при наличии внутренних тепловыделений [8–11]. Использование данного метода ограничено трудностями отыскания аналитических решений для тел сложной геометрии при трехмерной постановке задачи в условиях переменных теплофизических свойств нагреваемых материалов и оборудования [9].

Подход, основанный на численных методах. Данный подход заключается в применении численных методов математического 3D-моделирования и базируется на достижениях первых трех методологических подходов. Он позволяет находить численные решения задач нестационарной теплопроводности

с учетом всех конструкционных, технологических и теплотехнических факторов, определяющих процессы, протекающие в теплотехнологических установках ускоренной гидратации бетона [11–17].

Целью исследования является разработка основанных на нестационарном трехмерном уравнении теплопроводности, учитывающем источник внутренних тепловыделений, новых алгоритмов компьютерного моделирования энергосберегающих режимов ТВО бетона, позволяющих выполнять численные расчеты процессов нагрева и гидратации для бетонных изделий произвольной 3D-геометрии, обладающих сложной композитной структурой.

Теплофизическая модель процесса гидратации. Для достижения цели работы на основе дифференциального уравнения теплопроводности в трехмерной постановке разработана теплофизическая модель процессов нагрева и гидратации бетона. В модели путем дополнительного включения модельной функции, зависящей от температуры, учтен экзотермический характер реакций, протекающих при гидратации активной части цементного клинкера.

Разработанная теплофизическая модель процесса включает систему граничных и начальных условий, различающихся в зависимости от вида, структуры бетонного изделия и способа его тепловой обработки в теплотехнологических установках. В дополнении к граничным условиям при решении уравнения теплопроводности использовались модельные функции температуры от времени тепловой обработки, с помощью которых задавали температуру нагреваемой среды. В работе использовали табулированные функции температуры как модельные, так и экспериментально измеренные в различных областях бетонного изделия, при проведении экспериментальных исследований на предприятии «Завод КПД» ОАО «Строительно-монтажный трест № 16, г. Новополюцк».

В качестве основного уравнения для расчета распределения температуры в пространстве бетонного тела в течение времени ТВО при нагреве и гидратации бетона использовалось уравнение теплопроводности, учитывающее экзотермический характер реакции гидратации цемента, которое в указанной постановке имеет вид

$$\frac{\partial T(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{c_b \rho_b} \left(\frac{\partial \left(\lambda_b(H(x, y, z, \tau), T(x, y, z, \tau)) \frac{\partial T(x, y, z, \tau)}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\lambda_b(H(x, y, z, \tau), T(x, y, z, \tau)) \frac{\partial T(x, y, z, \tau)}{\partial y} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\lambda_b(H(x, y, z, \tau), T(x, y, z, \tau)) \frac{\partial T(x, y, z, \tau)}{\partial z} \right)}{\partial z} + \rho_c P_q(Q(x, y, z, \tau), T(x, y, z, \tau)) \right), \quad (1)$$

где τ – время, с;

x, y, z – декартовы координаты (ось Y направлена вертикально), м;

$T(x, y, z, \tau)$ – температура бетона в точке, имеющей координаты (x, y, z) , в момент времени τ , °С;

ρ_b – плотность бетона, кг/м³;

ρ_c – удельный расход цемента в бетоне, кг/м³;

c_b – удельная теплоемкость бетона, Дж/(кг·К);

$Q(x, y, z, \tau)$ – удельная теплота, выделившаяся при гидратации цемента в точке с координатами (x, y, z) на момент времени τ ;

$H(x, y, z, \tau) = Q(x, y, z, \tau) / Q_{\max}$ – коэффициент (степень) гидратации цемента, где Q_{\max} – удельная теплота полной гидратации цемента, Дж/кг;

$\lambda_b(H, T)$ – теплопроводность бетона, зависящая от степени его гидратации и температуры, Вт/(м·К);

$P_q(Q, T)$ – удельная мощность тепловыделения при гидратации цемента (Вт/кг), которая определяется по формуле

$$P_q(Q, T) = \frac{\partial Q(T, \tau_{\text{прив}}(Q, T))}{\partial \tau}, \quad (2)$$

где Q – удельная теплота, выделившаяся при гидратации цемента к рассматриваемому моменту времени, Дж/кг;

$Q(T, \tau)$ – функция тепловыделения цемента, Дж/кг;
 $\tau_{\text{прив}}(Q, T)$ – приведенное время гидратации цемента, с, которое определяется как функция обратная $Q(T, \tau)$ при фиксированном значении $T(\tau_{\text{прив}}(Q, T) = Q^{-1}(T, Q))$.

Более подробно основные положения, описывающие разработанную и используемую в данной статье теплофизическую модель, ее граничные условия, а также сведения о функциях тепловыделения и приведенном времени гидратации, изложены в ранее опубликованных работах автора с соавторами [19, 20].

На рисунке 1 на примере сечения модельного изделия кубической формы, подвергаемого ТВО на стенде горизонтального формования, показаны расчетные области модели, включающие пространство твердеющего бетона (Ω_1), пространство опалубки (Ω_2), пространство тепловой среды (Ω_3), области нагревателей (Ω_4). Каждая из перечисленных областей характеризовалась теплопроводностью, плотностью и удельной теплоемкостью материалов, включенных в расчет. Обрабатываемое изделие по бокам ограничено металлической формой, нижней гранью лежит на обогреваемом жидким теплоносителем столе, а сверху укрыто теплоизолирующим съемным рулонным покрытием.

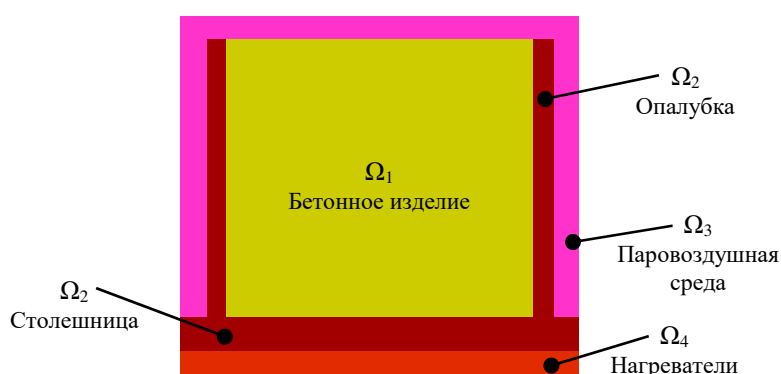


Рисунок 1. – Схематичная область расчетного моделируемого пространства

Начальные условия для расчетной модели

$$\begin{cases} T(x, y, z, 0) = 20^\circ \text{C}, \text{ для } (x, y, z) \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \\ Q(x, y, z, 0) = 0 \text{ Дж/кг}, \text{ для } (x, y, z) \in \Omega_1. \end{cases} \quad (3)$$

Конечно-разностные формулы для компьютерной модели. Сущность метода моделирования, использованного в работе, состоит в разбиении всего 3-мерного пространства модели на элементы прямоугольной (кубической) формы (рисунок 2). Каждый элемент имеет параметры, описывающие физическое состояние среды (теплоемкость, плотность, теплопроводность, температуру, степень гидратации). Все элементы расчетного пространства образуют взаимосвязанную пространственную 3D-систему, состояние и параметры которой пересчитываются на каждом шаге моделирования процесса нагрева и гидратации с учетом начальных и граничных условий. Каждый такт моделирования соответствует дискретному моменту времени, которое изменяется с шагом Δt . Состояние каждого элемента изменяется на каждом такте моделирования в зависимости от его текущего состояния и состояния соседних элементов на предыдущем такте моделирования. Формула, по которой вычисляется новое значение параметра элемента (в частности, температуры, коэффициента гидратации), является конечно-разностной аппроксимацией численного решения дифференциального уравнения теплопроводности.

На рисунке 2 выделены элементы расчетного пространства, использованные для расчета распределения температур и коэффициента гидратации на основе конечно-разностных аппроксимаций.

Так, для сеточных элементов группы (1, 2) температура и степень гидратации вычислялись по формулам (4), (5), для элементов группы (3) – по формуле (6), для элементов группы (4) – по формуле (7), для элементов группы (5) – по формуле (8), для элементов группы (6) – по формуле (9), для элементов группы (7) – по формуле (10).

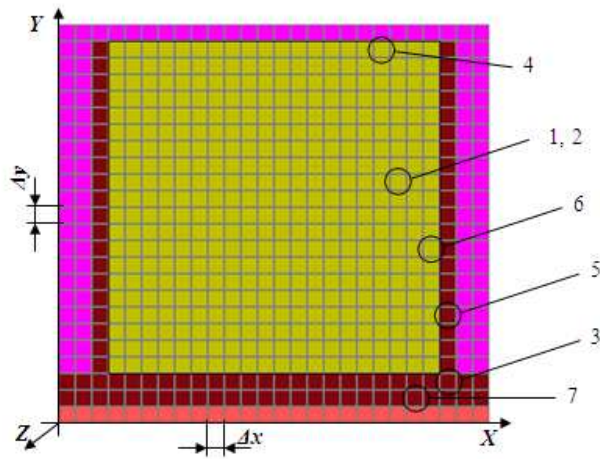


Рисунок 2. – Схема разбиения моделируемого расчетного пространства на группы дискретных элементов $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 5$ мм

На основе уравнения (1) была составлена конечно-разностная схема для численного расчета изменения температуры в дискретных элементах пространства Ω_1 твердеющего бетона. Для сеточных элементов группы (1, 2) (рисунок 2) использовалась следующая формула для расчета температуры:

$$\begin{aligned}
 T(x, y, z, \tau + \Delta\tau) = & T(x, y, z, \tau) + \\
 & + \frac{\Delta\tau}{c_b \rho_b} \left[\left[\lambda_b \left(\frac{H(x + \Delta x, y, z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x + \Delta x, y, z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x + \Delta x, y, z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta x} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \lambda_b \left(\frac{H(x - \Delta x, y, z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x - \Delta x, y, z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x - \Delta x, y, z, \tau)}{\Delta x} \right] / \Delta x + \right. \\
 & + \left[\lambda_b \left(\frac{H(x, y + \Delta y, z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x, y + \Delta y, z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x, y + \Delta y, z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta y} - \right. \\
 & \left. - \lambda_b \left(\frac{H(x, y - \Delta y, z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x, y - \Delta y, z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x - \Delta y, y, z, \tau)}{\Delta y} \right] / \Delta y + \\
 & + \left[\lambda_b \left(\frac{H(x, y, z + \Delta z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x, y, z + \Delta z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x, y, z + \Delta z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta z} - \right. \\
 & \left. - \lambda_b \left(\frac{H(x, y, z - \Delta z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x, y, z - \Delta z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x, y, z - \Delta z, \tau)}{\Delta z} \right] / \Delta z + \quad (4) \\
 & + \rho_c P_c (Q(x, y, z, \tau), T(x, y, z, \tau)),
 \end{aligned}$$

где $\Delta\tau$ – шаг дискретизации по времени, с;

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – шаги дискретизации по пространству, м.

Остальные величины, входящие в уравнение (4), расшифрованы ранее.

Расчет распределения тепловыделений и соответствующих им коэффициентов (степени) гидратации цемента производился по формулам:

$$\begin{aligned}
 Q(x, y, z, \tau + \Delta\tau) = & Q(x, y, z, \tau) + P_q(Q(x, y, z, \tau), T(x, y, z, \tau))\Delta\tau \\
 H(x, y, z, \tau + \Delta\tau) = & \frac{Q(x, y, z, \tau + \Delta\tau)}{Q_{\max}}. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Расчет изменения температуры в дискретных элементах пространства Ω_2 стальной опалубки и конструкции оборудования, исключая граничные элементы (элемент 3), вычислялся по формуле

$$\begin{aligned}
T(x, y, z, \tau + \Delta\tau) = & T(x, y, z, \tau) + \\
& + \frac{\Delta\tau \cdot \lambda_{st}}{c_{st}\rho_{st}} \left(\left[\frac{T(x + \Delta x, y, z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta x} - \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x - \Delta x, y, z, \tau)}{\Delta x} \right] / \Delta x + \right. \\
& + \left[\frac{T(x, y + \Delta y, z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta y} - \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x, y - \Delta y, z, \tau)}{\Delta y} \right] / \Delta y + \\
& \left. + \left[\frac{T(x, y, z + \Delta z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta z} - \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x, y, z - \Delta z, \tau)}{\Delta z} \right] / \Delta z \right), \quad (6)
\end{aligned}$$

где c_{st} – удельная теплоемкость стали (475 Дж/кг·К);

ρ_{st} – плотность стали (7850 кг/м³);

λ_{st} – теплопроводность стали (44,5 Вт/(м·К)).

Расчет изменения температуры бетона на границе с греющей средой ($\Omega_1 - \Omega_3$) (верхняя горизонтальная поверхность бетона, элемент 4) вычислялся по формуле

$$\begin{aligned}
T(x, y, z, \tau + \Delta\tau) = & T(x, y, z, \tau) + \\
& + \frac{\Delta t}{c_b \rho_b} \left(\left[\lambda_b \left(\frac{H(x + \Delta x, y, z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x + \Delta x, y, z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x + \Delta x, y, z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta x} - \right. \right. \\
& - \left. \left. \lambda_b \left(\frac{H(x - \Delta x, y, z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x - \Delta x, y, z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x - \Delta x, y, z, \tau)}{\Delta x} \right] / \Delta x + \right. \\
& + \left[\alpha_{up} (T_{env}(t) - T(x, y, z, \tau)) - \right. \\
& - \left. \lambda_b \left(\frac{H(x, y - \Delta y, z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x, y - \Delta y, z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x - \Delta y, y, z, \tau)}{\Delta y} \right] / \Delta y + \\
& + \left[\lambda_b \left(\frac{H(x, y, z + \Delta z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x, y, z + \Delta z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x, y, z + \Delta z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta z} - \right. \\
& - \left. \lambda_b \left(\frac{H(x, y, z - \Delta z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x, y, z - \Delta z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x, y, z - \Delta z, \tau)}{\Delta z} \right] / \Delta z + \quad (7) \\
& \left. + \rho_c P_c (Q(x, y, z, \tau), T(x, y, z, \tau)) \right),
\end{aligned}$$

где (x, y, z) , $(x + \Delta x, y, z)$, $(x - \Delta x, y, z)$, $(x, y - \Delta y, z)$, $(x, y, z + \Delta z)$, $(x, y, z - \Delta z)$ – координаты середин конечно-разностных элементов в пространстве бетона;

$(x, y + \Delta y, z)$ – координаты середины конечно-разностного элемента в пространстве паровоздушной среды;

$T_{env}(\tau)$ – функция изменения температуры паровоздушной среды от времени ($T(x, y + \Delta y, z) = T_{env}(\tau)$);

α_{up} – коэффициент теплоотдачи ($\alpha_{up} = 5$ Вт/(м²·К)).

Расчет изменения температуры опалубки на границе с паровоздушной средой ($\Omega_2 - \Omega_3$) с одной стороны и бетоном ($\Omega_2 - \Omega_3$) – с другой для вертикальной боковой поверхности в направлении координатной оси X (элемент 5) проводился по формуле

$$\begin{aligned}
T(x, y, z, \tau + \Delta\tau) = & T(x, y, z, \tau) + \\
& + \frac{\Delta\tau}{c_{st}\rho_{st}} \left(\left[\alpha_{sd} (T_{env}(\tau) - T(x, y, z, \tau)) - \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x - \Delta x, y, z, \tau)}{(1/\lambda_b (H(x - \Delta x, y, z, \tau), T(x - \Delta x, y, z, \tau)) + 1/\lambda_{st}) \Delta x / 2} \right] / \Delta x + \right. \\
& + \lambda_{st} \left[\frac{T(x, y + \Delta y, z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta y} - \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x - \Delta y, y, z, \tau)}{\Delta y} \right] / \Delta y + \\
& \left. + \lambda_{st} \left[\frac{T(x, y, z + \Delta z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta z} - \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x, y, z - \Delta z, \tau)}{\Delta z} \right] / \Delta z \right), \quad (8)
\end{aligned}$$

где $(x, y, z), (x - \Delta x, y, z), (x, y + \Delta y, z), (x, y - \Delta y, z), (x, y, z + \Delta z), (x, y, z - \Delta z)$ – координаты середин конечно-разностных элементов в пространстве опалубки;

$(x + \Delta x, y, z)$ – координаты середины конечно-разностного элемента в пространстве паровоздушной среды;

$T_{em}(\tau)$ – функция изменения температуры паровоздушной среды от времени ($T(x + \Delta x, y, z) = T_{em}(\tau)$);

α_{sd} – коэффициент теплоотдачи ($\alpha_{sd} = 7 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$).

Расчет изменения температуры бетона на границе с опалубкой ($\Omega_1 - \Omega_2$) для вертикальной боковой поверхности в направлении координатной оси X (элемент 6) проведен по формуле

$$\begin{aligned}
 T(x, y, z, \tau + \Delta\tau) = & T(x, y, z, \tau) + \\
 & + \frac{\Delta\tau}{c_b \rho_b} \left[\left(\frac{T(x + \Delta x, y, z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{(1/\lambda_b (H(x + \Delta x, y, z, \tau), T(x + \Delta x, y, z, \tau)) + 1/\lambda_{st}) \Delta x / 2} - \right. \right. \\
 & - \lambda_b \left(\frac{H(x - \Delta x, y, z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x - \Delta x, y, z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x - \Delta x, y, z, \tau)}{\Delta x} \left. \right] / \Delta x + \\
 & + \left[\lambda_b \left(\frac{H(x, y + \Delta y, z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x, y + \Delta y, z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x, y + \Delta y, z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta y} - \right. \\
 & - \lambda_b \left(\frac{H(x, y - \Delta y, z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x, y - \Delta y, z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x - \Delta y, y, z, \tau)}{\Delta y} \left. \right] / \Delta y + \\
 & + \left[\lambda_b \left(\frac{H(x, y, z + \Delta z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x, y, z + \Delta z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x, y, z + \Delta z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta z} - \right. \\
 & - \lambda_b \left(\frac{H(x, y, z - \Delta z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x, y, z - \Delta z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x, y, z - \Delta z, \tau)}{\Delta z} \left. \right] / \Delta z + \\
 & + \rho_c P_c (Q(x, y, z, \tau), T(x, y, z, \tau)), \quad (9)
 \end{aligned}$$

где $(x, y, z), (x - \Delta x, y, z), (x, y + \Delta y, z), (x, y - \Delta y, z), (x, y, z + \Delta z), (x, y, z - \Delta z)$ – координаты середин конечно-разностных элементов в пространстве бетона;

$(x + \Delta x, y, z)$ – координаты середины конечно-разностного элемента в пространстве опалубки.

Расчет изменения температуры стола (тот же материал, что и опалубка) на границе с нагревателем ($\Omega_2 - \Omega_4$) (элемент 7) проведен по формуле

$$\begin{aligned}
 T(x, y, z, \tau + \Delta\tau) = & T(x, y, z, \tau) + \\
 & + \frac{\Delta\tau}{c_{st} \rho_{st}} \left[\left[\lambda_{st} \frac{T(x + \Delta x, y, z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta x} - \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x - \Delta x, y, z, \tau)}{\Delta x} \right] / \Delta x + \right. \\
 & + \left[\lambda_{st} \frac{T(x, y + \Delta y, z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta y} - \alpha_w (T(x, y, z, \tau) - T_w(\tau)) \right] / \Delta y + \\
 & \left. + \lambda_{st} \left[\frac{T(x, y, z + \Delta z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta z} - \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x, y, z - \Delta z, \tau)}{\Delta z} \right] / \Delta z \right], \quad (10)
 \end{aligned}$$

где $(x, y, z), (x + \Delta x, y, z), (x - \Delta x, y, z), (x, y + \Delta y, z), (x, y, z + \Delta z), (x, y, z - \Delta z)$ – координаты середин конечно-разностных элементов в пространстве опалубки;

$(x, y - \Delta y, z)$ – координаты середины конечно-разностного элемента в пространстве нагревателя;

α_w – коэффициент теплоотдачи, соответствующий конвективному теплообмену между водяным теплоносителем и греющей стенкой (был принят $\alpha_w = 250 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$).

В конечно-разностной модели использовалось множество элементов, которые являются граничными одновременно по нескольким направлениям и с разными типами границ. Например, верхний угло-

вой элемент бетонного куба верхней гранью граничит с паровоздушной средой, а двумя боковыми гранями – с опалубкой. Конечно-разностная схема расчета этих элементов представляет собой соответствующие комбинации фрагментов итерационных уравнений, приведенных в [19, 20], и их аналогов по направлениям Y и Z .

Описанные выше частные случаи конечно-разностных формул расчета температур для различных элементов модели были обобщены. Итоговая формула расчета изменения температуры в произвольных элементах пространства твердеющего бетона (Ω_1), включая граничные элементы, имеет вид

$$T(x, y, z, \tau + \Delta\tau) = T(x, y, z, \tau) + \frac{\Delta\tau}{c_b \rho_b} \left(\frac{\Psi_{+\Delta x} - \Psi_{-\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\Psi_{+\Delta y} - \Psi_{-\Delta y}}{\Delta y} + \frac{\Psi_{+\Delta z} - \Psi_{-\Delta z}}{\Delta z} + \rho_c P_c (Q(x, y, z, \tau), T(x, y, z, \tau)) \right), \quad (11)$$

где

$$\Psi_{+\Delta x} = \begin{cases} \lambda_b \left(\frac{H(x + \Delta x, y, z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x + \Delta x, y, z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x + \Delta x, y, z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta x} \Big|_{(x + \Delta x, y, z, \tau) \in \Omega_1} \\ \frac{T(x + \Delta x, y, z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\left(1/\lambda_b (H(x, y, z, \tau), T(x, y, z, \tau)) + 1/\lambda_{st} \right) \Delta x / 2} \Big|_{(x + \Delta x, y, z, \tau) \in \Omega_2}, \end{cases}$$

$$\Psi_{-\Delta x} = \begin{cases} \lambda_b \left(\frac{H(x - \Delta x, y, z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x - \Delta x, y, z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x - \Delta x, y, z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta x} \Big|_{(x - \Delta x, y, z, \tau) \in \Omega_1} \\ \frac{T(x - \Delta x, y, z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\left(1/\lambda_b (H(x, y, z, \tau), T(x, y, z, \tau)) + 1/\lambda_{st} \right) \Delta x / 2} \Big|_{(x - \Delta x, y, z, \tau) \in \Omega_2}, \end{cases}$$

$$\Psi_{+\Delta y} = \begin{cases} \lambda_b \left(\frac{H(x, y + \Delta y, z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x, y + \Delta y, z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x, y + \Delta y, z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta y} \Big|_{(x, y + \Delta y, z, \tau) \in \Omega_1} \\ \alpha_{up} (T_{env}(t) - T(x, y, z, \tau)) \Big|_{(x, y + \Delta y, z, \tau) \in \Omega_3}, \end{cases}$$

$$\Psi_{-\Delta y} = \begin{cases} \lambda_b \left(\frac{H(x, y - \Delta y, z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x, y - \Delta y, z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x, y - \Delta y, z, \tau)}{\Delta y} \Big|_{(x, y - \Delta y, z, \tau) \in \Omega_1} \\ \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x, y - \Delta y, z, \tau)}{\left(1/\lambda_b (H(x, y, z, \tau), T(x, y, z, \tau)) + 1/\lambda_{st} \right) \Delta y / 2} \Big|_{(x, y - \Delta y, z, \tau) \in \Omega_2}, \end{cases}$$

$$\Psi_{+\Delta z} = \begin{cases} \lambda_b \left(\frac{H(x, y, z + \Delta z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x, y, z + \Delta z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x, y, z + \Delta z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta z} \Big|_{(x, y, z + \Delta z, \tau) \in \Omega_1} \\ \frac{T(x, y, z + \Delta z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\left(1/\lambda_b (H(x, y, z, \tau), T(x, y, z, \tau)) + 1/\lambda_{st} \right) \Delta z / 2} \Big|_{(x, y, z + \Delta z, \tau) \in \Omega_2}, \end{cases}$$

$$\Psi_{-\Delta z} = \begin{cases} \lambda_b \left(\frac{H(x, y, z - \Delta z, \tau) + H(x, y, z, \tau)}{2}, \frac{T(x, y, z - \Delta z, \tau) + T(x, y, z, \tau)}{2} \right) \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x, y, z - \Delta z, \tau)}{\Delta z} \Big|_{(x, y, z - \Delta z, \tau) \in \Omega_1} \\ \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x, y, z - \Delta z, \tau)}{\left(1/\lambda_b (H(x, y, z, \tau), T(x, y, z, \tau)) + 1/\lambda_{st} \right) \Delta z / 2} \Big|_{(x, y, z - \Delta z, \tau) \in \Omega_2}. \end{cases}$$

Итоговая формула расчета изменения температуры в элементах пространства опалубки (Ω_2), включая граничные элементы, имеет вид

$$T(x, y, z, \tau + \Delta\tau) = T(x, y, z, \tau) + \frac{\Delta\tau}{c_{st}\rho_{st}} \left(\frac{Y_{+\Delta x} - Y_{-\Delta x}}{\Delta x} + \frac{Y_{+\Delta y} - Y_{-\Delta y}}{\Delta y} + \frac{Y_{+\Delta z} - Y_{-\Delta z}}{\Delta z} \right), \quad (12)$$

где

$$Y_{+\Delta x} = \begin{cases} \lambda_{st} \frac{T(x + \Delta x, y, z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta x} \Big|_{(x+\Delta x, y, z, \tau) \in \Omega_2} \\ \frac{T(x + \Delta x, y, z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\left(1/\lambda_b (H(x + \Delta x, y, z, \tau), T(x + \Delta x, y, z, \tau)) + 1/\lambda_{st}\right) \Delta x / 2} \Big|_{(x+\Delta x, y, z, \tau) \in \Omega_1} \\ \alpha_{sd} (T_{env}(\tau) - T(x, y, z, \tau)) \Big|_{(x+\Delta x, y, z, \tau) \in \Omega_3}, \end{cases}$$

$$Y_{-\Delta x} = \begin{cases} \lambda_{st} \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x - \Delta x, y, z, \tau)}{\Delta x} \Big|_{(x-\Delta x, y, z, \tau) \in \Omega_2} \\ \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x - \Delta x, y, z, \tau)}{\left(1/\lambda_b (H(x - \Delta x, y, z, \tau), T(x - \Delta x, y, z, \tau)) + 1/\lambda_{st}\right) \Delta x / 2} \Big|_{(x-\Delta x, y, z, \tau) \in \Omega_1} \\ \alpha_{sd} (T(x, y, z, \tau) - T_{env}(\tau)) \Big|_{(x-\Delta x, y, z, \tau) \in \Omega_3}, \end{cases}$$

$$Y_{+\Delta y} = \begin{cases} \lambda_{st} \frac{T(x, y + \Delta y, z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta y} \Big|_{(x, y+\Delta y, z, \tau) \in \Omega_2} \\ \frac{T(x, y + \Delta y, z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\left(1/\lambda_b (H(x, y + \Delta y, z, \tau), T(x, y + \Delta y, z, \tau)) + 1/\lambda_{st}\right) \Delta y / 2} \Big|_{(x, y+\Delta y, z, \tau) \in \Omega_1} \\ \alpha_{up} (T_{env}(\tau) - T(x, y, z, \tau)) \Big|_{(x, y+\Delta y, z, \tau) \in \Omega_3}, \end{cases}$$

$$Y_{-\Delta y} = \begin{cases} \lambda_{st} \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x, y - \Delta y, z, \tau)}{\Delta y} \Big|_{(x, y-\Delta y, z, \tau) \in \Omega_2} \\ \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x, y - \Delta y, z, \tau)}{\left(1/\lambda_b (H(x, y - \Delta y, z, \tau), T(x, y - \Delta y, z, \tau)) + 1/\lambda_{st}\right) \Delta y / 2} \Big|_{(x, y-\Delta y, z, \tau) \in \Omega_1} \\ \alpha_w (T(x, y, z, \tau) - T_w(\tau)) \Big|_{(x, y-\Delta y, z, \tau) \in \Omega_4}, \end{cases}$$

$$Y_{+\Delta z} = \begin{cases} \lambda_{st} \frac{T(x, y, z + \Delta z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\Delta z} \Big|_{(x, y, z+\Delta z, \tau) \in \Omega_2} \\ \frac{T(x, y, z + \Delta z, \tau) - T(x, y, z, \tau)}{\left(1/\lambda_b (H(x, y, z + \Delta z, \tau), T(x, y, z + \Delta z, \tau)) + 1/\lambda_{st}\right) \Delta z / 2} \Big|_{(x, y, z+\Delta z, \tau) \in \Omega_1} \\ \alpha_{sd} (T_{env}(\tau) - T(x, y, z, \tau)) \Big|_{(x, y, z+\Delta z, \tau) \in \Omega_3}, \end{cases}$$

$$Y_{-\Delta z} = \begin{cases} \lambda_{st} \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x, y, z - \Delta z, \tau)}{\Delta z} \Big|_{(x, y, z - \Delta z, \tau) \in \Omega_2} \\ \frac{T(x, y, z, \tau) - T(x, y, z - \Delta z, \tau)}{(1/\lambda_b (H(x, y, z - \Delta z, \tau), T(x, y, z - \Delta z, \tau)) + 1/\lambda_{st}) \Delta z / 2} \Big|_{(x, y, z - \Delta z, \tau) \in \Omega_1} \\ \alpha_{sd} (T(x, y, z, \tau) - T_{env}(\tau)) \Big|_{(x, y, z - \Delta z, \tau) \in \Omega_3} \end{cases}$$

Алгоритм расчета процессов нагрева и гидратации. На основе вышеперечисленных формул была разработана САЕ (система автоматизированного моделирования) для расчета эволюции процесса гидратации бетонных изделий, написанная на языке C++, которая условно названа «ПроЭнергоБетон-1» (Процессы энергосбережения бетона).

Программа может быть предложена для использования в условиях промышленного производства и позволяет рассчитать и визуализировать пространственное распределение температуры и степени (коэффициента) гидратации в бетонном изделии произвольной геометрии для заданного времени тепловой обработки с целью разработки энергосберегающих режимов ТВО. Класс решаемых с ее помощью задач может быть расширен путем модификации теплофизической модели и внесения в программу связанных с этим изменений.

В программе использован следующий укрупненный алгоритм моделирования процесса распределения температуры и степени гидратации:

Шаг 1. Разбить все моделируемое пространство (прямоугольное) на элементы с размерами Δx , Δy , Δz , т.е. создать трехмерный массив M , элементов с размерностью I (по X), J (по Y), K (по Z).

Шаг 2. Задать начальные значения (формула (3)) параметров согласно соответствующим областям Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , Ω_4 для момента времени $\tau = 0$.

Шаг 3. Создать новый массив $M_{\tau + \Delta\tau}$ элементов с такой же размерностью, как M_{τ} [I, J, K].

Шаг 4. Такт моделирования:

Шаг 4.1. Проход по всем элементам массива $M_{\tau}[i, j, k]$, где $i = 0 \dots I$, $j = 0 \dots J$, $k = 0 \dots K$, и вычисление массива значений T , Q , H по формулам (4)–(12) в зависимости от принадлежности элемента области Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , Ω_4 . Новые значения присваивать соответствующим элементам массива $M_{\tau + \Delta\tau}[i, j, k]$;

Шаг 4.2. Перенести полученные значения параметров из массива $M_{\tau + \Delta\tau}[i, j, k]$ в массив $M_{\tau}[i, j, k]$ (или поменять массивы местами);

Шаг 4.3. Итерационное изменение значения времени $\tau = \tau + \Delta\tau$;

Шаг 5. Повторять процесс моделирования (шаг 4) пока τ не будет равно длительности цикла термообработки.

На рисунках 4–7 представлены фрагменты визуализации в трех проекциях численного моделирования распределений температуры и коэффициента (степени) гидратации в центральном сечении модельного кубического изделия, полученные с помощью разработанного алгоритма для различных интервалов времени, прошедших с момента начала ТВО.

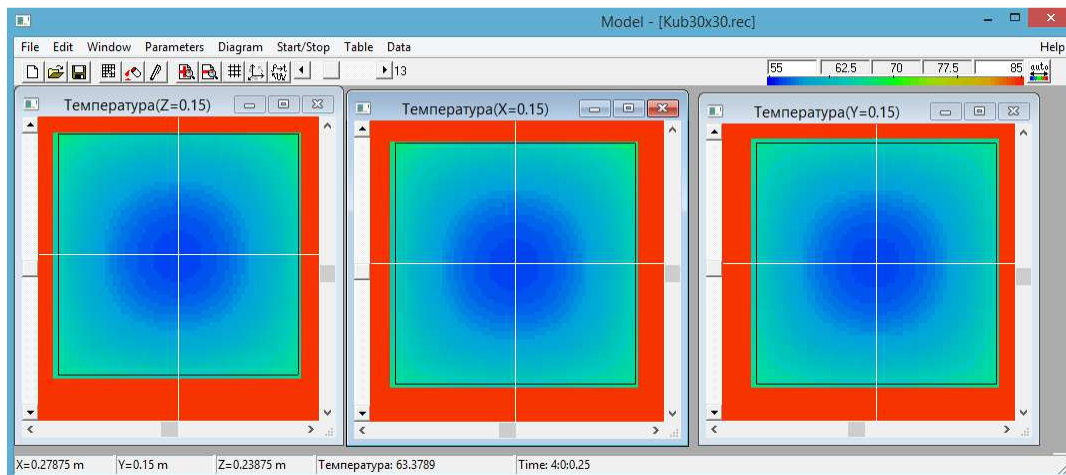


Рисунок 4. – Фрагмент численного моделирования распределения температур в изделии размером $0,3 \times 0,3 \times 0,3$ м в трех проекциях на момент времени тепловой обработки $\tau = 4$ ч

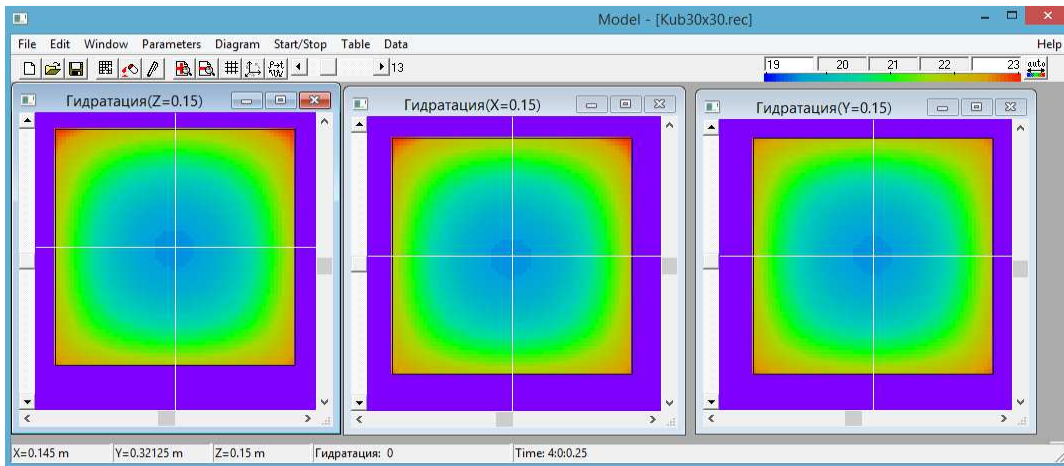


Рисунок 5. – Фрагмент численного моделирования распределения коэффициента гидратации в изделии размером 0,3×0,3×0,3м в трех проекциях на момент времени тепловой обработки $\tau = 4$ ч

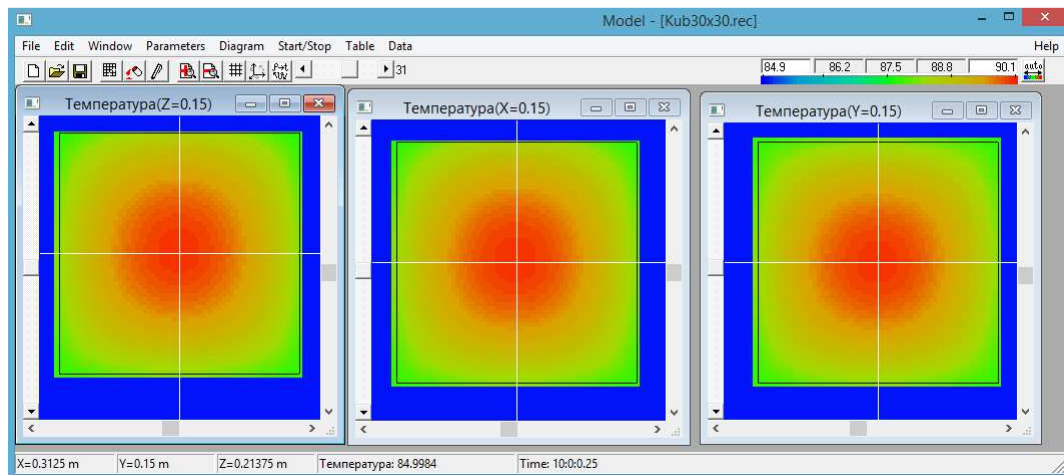


Рисунок 6. – Фрагмент численного моделирования распределения температур в изделии размером 0,3×0,3×0,3м в трех проекциях на момент времени тепловой обработки $\tau = 10$ ч

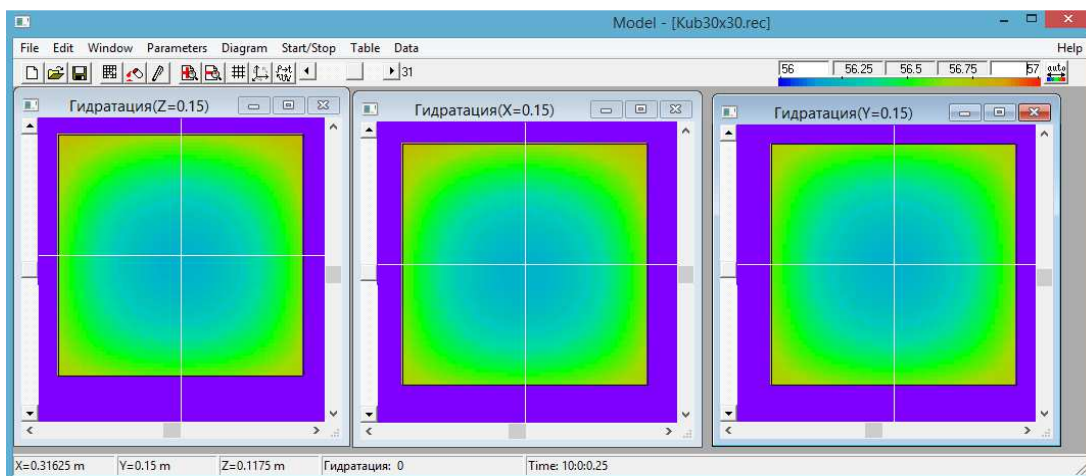


Рисунок 7. – Фрагмент численного моделирования распределения коэффициента гидратации в изделии размером 0,3×0,3×0,3м в трех проекциях на момент времени тепловой обработки $\tau = 10$ ч

Заклучение и выводы. На основании предложенной авторами теплофизической модели процесса гидратации бетонного изделия [19, 20], опирающейся на неравновесное уравнение теплопроводности, дополненном функцией источника гидратации, при различных вариантах начальных и граничных условий, характеризующих условия тепловой обработки в промышленных теплотехнологических установках, с учетом подходов, намеченных в [18], разработан алгоритм компьютерного моделирования процессов ускоренной гидратации.

Выполнена проверка устойчивости полученной модели, определены пределы изменения шага моделирования по времени при заданном шаге моделирования в пространстве. На примере модельного кубического изделия показаны предоставляемые разработанным алгоритмом возможности расчета и визуализации процессов нагрева и твердения бетона при различной продолжительности его тепловой обработки.

Полученные результаты дают возможность производить дискретную оптимизацию режимов тепловой обработки бетонных изделий и разработку энергосберегающих технологий их производства, а также могут быть использованы при проектировании новых и совершенствовании существующих теплотехнологических установок для ускоренной гидратации бетонных изделий любой 3D-геометрии и композиционной структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малинина, Л.А. Снижение энергетических затрат при производстве сборного железобетона за счет рационального выбора цементов, назначения эффективных режимов термообработки бетона и учета экзотермии / Л.А. Малинина // Тез. докл. Всесоюз. научно-практического семинара по экономии энергии при производстве сборных железобетонных конструкций и изделий / Госстрой СССР. – М., 1984. – С. 53–58.
2. Теоретико-практические аспекты эффективности добавок-ускорителей твердения бетона / Э.И. Батыновский [и др.] // Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров : сб. науч. ст. / ГрГУ им. Я. Купалы. – Гродно, 2010. – С. 278–283.
3. Дворкин, Л.И. Критерий рационального использования тепловой энергии в производстве бетона и железобетонных изделий / Л.И. Дворкин, О.Л. Дворкин // Технология бетонов. – 2014. – № 2. – С. 32–35.
4. Бабицкий, В.В. Прогнозирование характеристик твердеющего тяжелого бетона / В.В. Бабицкий, С.Д. Семенов, М.С. Бибик // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди : зб. наук. праць. – Рівне, 2009. – Вип. 18. – С. 3–12.
5. Бибик, М.С. К возможности проектирования режима тепловой обработки бетона в ямных пропарочных камерах / М.С. Бибик, Н.В. Суходоева, В.В. Бабицкий // Строительная наука и техника. – 2009. – № 2. – С. 58–63.
6. Бибик, М.С. Об энергосберегающих режимах тепловой обработки бетонных и железобетонных изделий / М.С. Бибик, В.В. Бабицкий // Строительная наука и техника. – 2010. – № 4. – С. 55–59.
7. Ушеров-Маршак, А.В. Информационная технология бетона ускоренного твердения / А.В. Ушеров-Маршак, А.Г. Синякин // Бетон и железобетон. – 1994. – № 6. – С. 2–4.
8. Лыков, А.В. Теория тепло- и массопереноса / А.В. Лыков, Ю.А. Михайлов. – М. ; Л. : Госэнергоиздат, 1963. – 536 с.
9. Дмитрович, А.Д. Тепло- и массообмен при твердении бетона в паровой среде / А.Д. Дмитрович. – М. : Стройиздат, 1967. – 243 с.
10. Марьямов, Н.Б. Тепловая обработка изделий на заводах сборного железобетона (процессы и установки) / Н.Б. Марьямов. – М. : Стройиздат, 1970. – 272 с.
11. Федосов, С.В. Применение методов математической физики для моделирования массо- и энергопереноса в технологических процессах строительной индустрии / С.В. Федосов, А.М. Ибрагимов, А.В. Гушин // Строительные материалы. – 2008. – № 4. – С. 65–67.
12. Ge, Zh. Predicting temperature and strength development of the field concrete : Retrospective Theses and Dissertations [Electronic resource] / Zhi Ge // Iowa State University. – 2005. – Mode of access: <https://lib.dr.iastate.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=2729&context=rtd>. – Date of access: 14.12.2018.
13. Моделирование прогресса стеновых панелей при термической обработке / С.В. Федосов [и др.] // Строительные материалы. – 2007. – № 2. – С. 86–87.
14. Аксенчик, К.В. Исследование тепло- и массообмена в бетонных плитах, подвергаемых тепловой обработке / К.В. Аксенчик, Н.И. Шестаков // Вестник Череповецкого государственного университета. – 2010. – № 4. – С. 63–67.

15. Zákoutsky, J. Effect of temperature on the early-stage hydration characteristics of Portland cement: A large-volume calorimetric study / J. Zákoutsky, V. Tydlitát, R. Cherny // Construction and Building Materials. – 2012. – № 36. – P. 969–976.
16. Modelling of heat of hydration for thick concrete constructions – a note / Bennet Kuriakose [et al.] // Journal of Structural Engineering. – 2015. – Vol. 42, No. 4, October – November. – P. 348–357.
17. Фролов, С.В. Математическое моделирование процесса тепловлажностной обработки бетонных и железобетонных изделий / С.В. Фролов, А.В. Лагутин // Инженерно-физический журнал. – 2002. – Т. 75. – № 3.
18. Чичко, А.Н. Компьютерные системы моделирования физических процессов / А.Н. Чичко // Вестник БНТУ. – 2003. – № 2. – С. 42–48.
19. Повышение энергетической эффективности теплотехнологического оборудования для производства бетонных изделий на основе численного моделирования нестационарных процессов / А.М. Нияковский [и др.] // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энерг. объединений СНГ. – 2019. – Т. 62. – С. 177–191.
20. Верификация нестационарной математической модели твердения бетона в теплотехнологических установках / А.М. Нияковский [и др.] // Наука и техника. – 2019. – Т. 18. – № 2. – С. 137–145.

Поступила 28.03.2019

ALGORITHM AND NUMERICAL SCHEME FOR THE SIMULATION OF UNSTEADY PROCESSES OF HEAT TREATMENT OF CONCRETE PRODUCTS

A. NIYAKOVSKI, Y. YATSKEVICH, A. CHYCHKO

On the basis of the developed thermophysical model a computer simulation algorithm of the concrete products' accelerated hydration process is proposed. The algorithm uses the heat equation in a three-dimensional formulation, taking into account the distributed source of internal heat emissions, and allows to perform calculation and visualization of non-stationary fields of temperature and the hydration coefficient during the hardening of concrete products in thermal technological installations. The algorithm is designed for the development of the concrete products' heat treatment energy-saving modes with complex 3D-geometry and heterogeneous composite structure.

Keywords: computer modeling, software package, mathematical modeling, kinetics of cement hydration, temperature fields, three-dimensional equation of thermal conductivity, non-stationary thermal conductivity, energy saving, heat technologies.

УДК 004.8+378

**ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СЕМАНТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
ДЛЯ ОБНОВЛЕНИЯ ТЕРМИНОЛОГИИ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ**

канд. техн. наук, проф. В.И. БАТЮШКО
(Международное научно-техническое общество ученых технического образования);
канд. техн. наук, доц. Н.М. БОБОВИЧ
(Академия МВД Республики Беларусь);
канд. филол. наук, доц. С.И. ЛЕБЕДИНСКИЙ
(Белорусский государственный университет)

Предложен один из возможных подходов к наполнению содержания новых и обновляемых образовательных стандартов и программ, научно-исследовательских работ и научных проектов верифицированным смыслом на основе «модели тезауруса определения термина» на примере термина «информация». Проведенное моделирование тезауруса термина позволяет усилить роль языка в понимании, освоении, передаче информации и знаний, а также накопить, обогатить и распространить передовой опыт (компетенции), совершенствовать координацию работ в области научной терминологии.

Ключевые слова: информация, тезаурус, образовательный стандарт, семантическая модель, искусственный интеллект.

Введение. В соответствии с Законом Республики Беларусь «Об образовании» от 29 октября 1991 г. № 1202-ХІІ и постановлением Совета Министров Республики Беларусь «О государственной комплексной программе развития образования и воспитания в Беларуси на период до 2000 года» от 15 ноября 1993 г. № 783, разработана Концепция стандартизации в сфере образования Республики Беларусь (1996 г.) [1], на основе которой в нашей стране создана Система образовательных стандартов, включающая термины и их определения.

Действующие образовательные стандарты имеют статус «технического нормативного правового акта», являются инструментом государственной политики в сфере образования Республики Беларусь, признаются в рамках Союзного государства, ЕАЭС и Болонского процесса.

Современный период совершенствования системы образования Республики Беларусь характеризуется:

- обновлением национальных стандартов высшего образования [5] с учетом глобальных тенденций развития высшего образования [3], достижений белорусских ученых в исследовании глобализации мировой экономики и интернационализации высшей школы [4];
- проектированием образовательных стандартов и программ нового поколения (поколение 3+), ориентированных на реализацию стратегии «Наука и технологии: 2018–2040».

В связи с этим представляется актуальной проблема создания терминологии по новым научным и учебным дисциплинам в области информационно-коммуникационных технологий, искусственного интеллекта и защиты информации, а также информационно-лингвистическом сопровождении создания и развития кластерных структур в различных отраслях профессиональной деятельности. Как следствие, нуждается также в обновлении существующий терминологический аппарат и его гармонизация с международными и межгосударственными стандартами (ГОСТ 704-2010, ИСО 9000-2015), требованиями ЮНЕСКО, Болонского процесса, Российскими образовательными стандартами (ФГОС).

В статье приведены результаты исследований по наполнению содержания новых и обновляемых образовательных стандартов и программ, научно-исследовательских работ и научных проектов верифицированным смыслом на основе «модели тезауруса определения термина» на примере термина «информация».

Основная часть. В основу проведенного исследования положены следующие допущения и ограничения:

1. Информация, в широком смысле, рассматривается как ресурс и товар.
2. Модель тезауруса термина имеет технический нормативный характер.
3. Передача и обмен знаниями в образовательном и научно-исследовательском процессе рассматриваются как информационный поток, проходящий фильтрационную обработку.
4. Метод тезауруса термина задается как алгоритмическая модель.
5. Объекты в реальном мире идентифицируются свойствами и абстрагируются в понятия, а свойства – в характеристики, определяющие понятия (рисунок 1).

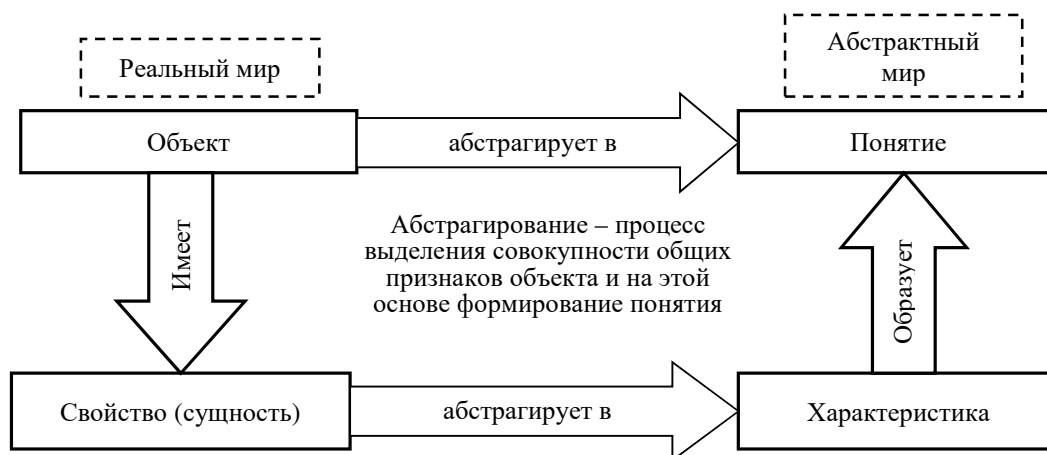


Рисунок 1. – Опорное кольцо зависимости «объект-свойство-характеристика-понятие» (ГОСТ ИСО 704-2010, ИСО 9000-2015)

На первом этапе исследования проведен анализ существующих информационных моделей тезауруса в различных сферах профессиональной деятельности [3, 6, 7] и построена общая структурная матрица тезауруса (таблица 1), которая используется на последующих этапах исследования как аналог предлагаемой модели тезауруса термина.

Таблица 1. – Общая структурная матрица тезауруса термина

Этапы	Комментарий	Научная основа
Вход	Выбор источников данных, сбор и подготовка данных к обработке	История Статистика
1. Физическая фильтрация	<i>Цель</i> – численное ограничение данных, связанных с пропускной способностью канала восприятия и человеческим фактором. <i>Цель</i> достигается путем статистического (синтаксического) анализа данных (определений понятий, ответов на вопросы). Отсеивается та часть данных, которые не удовлетворяют установленным требованиям (например, дефектные определения: закольцованные, отрицательные, неточные). Этап имеет физико-психологический смысл. Педагогический пример: результат обучения – «представления, знания».	Синтактика: теория вероятностей, математическая статистики, психология, педагогика, информатика, лингвистика, историческая лингвистика
2. Семантическая фильтрация (Тезаурус)	<i>Цель</i> – отбор воспринимаемых слов и их определений в соответствии с семантическим значением. Осуществляется посредством прохождения данных через семантический фильтр (тезаурус). Содержит семантический треугольник. Этап отражает психосемантический аспект обработки данных. Воспринимаются только понятые слова и их определения. Бессмысленные данные отсеиваются. Педагогический пример: результат обучения – «понимание».	Семантика Информатика Психология Социология Педагогика Лингвистика
3. Прагматическая фильтрация (отражает практический аспект). Имеет практический (здоровый) смысл	<i>Цель</i> – отбор информации, полезной для решения практических задач. Процесс осуществляется путем прохождения данных через прагматический фильтр. На этом этапе отбирается только полезная информация, исключая ненужную, избыточную и чуждую. Педагогический пример: результат обучения – «умения».	Прагматика Экономика Педагогика Кибернетика Лингвотипология Компьютерная лингвистика Онтология
Выход	Обратная связь < управление (менеджмент) > Использование информации как ресурса и товара. Типология, кластеризация, классификация (ОКРБ)	Кибернетика Инфоэкономика Лингвотипология

На втором этапе исследования в соответствии с общей структурной матрицей тезауруса термина разработана соответствующая алгоритмическая модель, состоящая из следующих 7 блоков (рисунок 2).



Рисунок 2. – Алгоритмическая модель

Разработанная модель позволила:

- 1) установить исток и происхождение термина, изменение его объёма и смысла в процессе развития, а также реализацию принципа историзма и преемственности в научном исследовании;
- 2) выяснить однозначность смысла термина по его корню и основанию;
- 3) установить всесторонние (горизонтальные и вертикальные) семантические связи ядра структуры и периферии термина;
- 4) определить посредством классификации полноту смысла термина;
- 5) сформировать кластерную структуру определения каждого термина;
- 7) сформулировать обобщенное определение терминов;
- 8) наполнить определение каждого термина смыслом, соответствующим современным историко-этимологическим, логическим, лингвистическим и синергетическим требованиям;
- 9) проектировать обобщенное определение;
- 10) перевести определение термина на белорусский и английский языки, что доказывает возможность разработки трёхязычного русско-белорусско-английского тезауруса.

Апробация семантической модели тезауруса проводилась с использованием термина «информация». Семантическая модель тезауруса термина «информация» приведена в таблице 2.

Таблица 2. – Семантическая модель тезауруса термина «информация»

Код	Параметры Обозначения	Название термина: Информация / Інфармацыя / Information Цели, результаты анализа термина и синтеза его определения
1	2	3
1 Историко-этимологический анализ термина <i>Цель</i> – установление истока (начала) и происхождения термина		
1.1	История появления термина <i>Ист.</i>	Страны, начавшие применять термин: Англия – XIV – XV вв. (Английское право); США – 1948 г., работы Н. Винера и К. Шеннона по теории информации; Россия – начало XVII – XVIII (эпоха Петра I), возобновление – середина XX в. <i>Источник:</i> Ю.В. Волков (2016) [2]; Беларусь – бел. науч. терминология (1922); информатика 1960–1970 гг. <i>Источник:</i> М.К. Буза (1994)
1.2	Этимология <i>Этим.</i> [...].	[< пол. informacja < лат. informati – «представление; разъяснение; изложение», << informare – «придавать вид; формировать; организовывать; обучать; воспитывать», << formare – «формировать; организовывать; устраивать», << forma – «форма, вид; устройство; организация; образ»]. <i>Источник:</i> В.В. Морковкин (2016)
2 Морфологический анализ термина <i>Цель</i> – выявление значения термина по корню слова		
2.1	Морфология <i>Морф.</i> (...)	«Информация» по частям слова: «ин» – в + «форма» – образ, вид + «ци» – функция движения; внутренняя форма движения
2.2	Родственные слова	Информатика, информатизация, информирование, информатор, информационный, информативный, информировать и др.

Окончание таблицы 2

1	2	3			
3		Семантический анализ термина <i>Цель – установление семантических связей структуры (ядра) термина</i>			
3.1	Смысл/значение <i>См.</i>	Вид, форма, учение; мысль, образ, знание; отражение разнообразия, мера упорядочения, определенность, вероятность и др.			
3.2	Синонимы <i>Син.</i>	Весть, информирование, оповещение, материал, данные, сведения, сообщение, новость, справка, уведомление, извещение и др.			
3.3	Антонимы <i>Ант.</i>	Дезинформация			
3.4	Гиперонимы <i>Гип.</i>	Знание, гипертекст, и др.			
3.5	Гипонимы <i>Гипо.</i>	Данные, понятие, термин, факт			
3.6	Устойчивые словосочетания Фразеологизмы	Информационное общество, информационный ресурс, информационная технология, информационная война, средства массовой информации и др. «Информация – это разность тезаурусов» (Ю.А. Шрейдер, 1971)			
4		Классификационный анализ термина <i>Цель – установление полноты определения термина</i>			
4.1	Способ кодирования	Информация: символьная (буквы, цифры, знаки и др.), текстовая (комбинация символов), графическая (изобразительная), звуковая			
4.2	Способ передачи и восприятия	Информация: визуальная, аудиальная, числовая, чувственная, органооптическая (запаховая), генетическая и др.			
4.3	Сферы деятельности	Информация: научная, образовательная, экономическая, военная, управленческая, правовая, культурная, международная и др.			
5		Частотный анализ смыслов существующих определений термина <i>Цель – вывод общего определения термина</i>			
	Частотный спектр смысла в определениях, %	Сведения	Знание	Форма движения	
		Сообщения	Понятие	Взаимодействие	
		Данные	Значение	Отражение	
		50	50	-	-
5.1	Нормативные определения	Информация – сведения о лицах, предметах, фактах, событиях, явлениях и процессах независимо от формы их представления (Закон РБ, 2008, №455-3)			
5.2	Определения в энцикл. и словарях	67	15	18	-
		Информация – совокупность знаний о фактических данных и зависимостях между ними. (М.К. Буза, 1994)			
5.3	Научные, учебные определения	45	20	35	-
		Информация – отражённое разнообразие в любых объектах (процессах) живой и неживой природы (У.Р. Эшби, 1961; А.Д. Урсул, 1968)			
6		Проектирование нового определения термина			
6.1	Обобщённое определение	Информация – отражение разнообразия результата коммуникации и/или взаимодействия объектов в определённой форме			
6.2	Альтернативное определение	Информация – сведения, независимые от формы их представления			
6.3	Экспертное определение	Дается экспертами			
6.4	Легитимация определения	Осуществляется одновременно с утверждением нормативного документа			
7		Перевод определения термина на иные естественные языки			
7.1	Перевод на белорусский язык	Інфармацыя – адлюстраванне выніка камунікацыі і/ці ўзаемадзейнення аб'ектаў у вызначанай форме			
7.2	Перевод на английский язык	Information – reflection of the result of communication and / or interaction of objects in the some form			

Заключение. Проведенные исследования позволяют сделать следующие общие выводы.

1. Разработанная модель тезауруса термина позволяет усилить роль языка в понимании, освоении, передаче информации и знаний, а также накопить, обогатить и распространить передовой опыт (компетенции), совершенствовать координацию работ в области научной терминологии.

2. Апробированная в процессе разработки определения термина «информация» модель может служить основанием для внедрения её в практику проектирования образовательных стандартов и образовательных программ, разработку научных проектов.

3. Заимствованная из математической логики конъюнктивно-дизъюнктивная нормальная форма (союзная связка) «и/или» позволяет реализовать в определениях сложных терминов принцип необходимого разнообразия.

4. Широкое определение термина дает возможность охватить всё многообразие версий и смыслов, вкладываемых в него различными исследователями, привлекает альтернативные варианты, позволяющие принимать компромиссные решения на основе консенсуса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Общие концептуальные подходы к разработке стандартов образования / В.И. Батюшко [и др.] // Высшая школа. – 1996. – № 1. – С. 36–44.
2. Волков, Ю.В. Информация – термин юридический : монография / Ю.В. Волков. – Екатеринбург : УГЮУ, 2016.
3. Гайсёнок, В.А. Отраслевые кластеры как фактор развития системы высшего образования / В.А. Гайсёнок, И.В. Титович // Высшая школа. – 2018. – № 2. – С. 8–10.
4. Глобализация мировой экономики и интернационализация высшей школы: современные взаимосвязи и прогнозы интегрирования взаимодействия / М.И. Демчук [и др.] ; под общ. ред. М.И. Демчука. – Минск : РИВШ, 2013.
5. Обновление национальных стандартов высшего образования – проблемы и задачи / М.А. Журавков [и др.] // Высшая школа. – 2016. – № 4.
6. Харин, Ю.С. Математические основы теории информации : учеб. пособие / Ю.С. Харин, И.А. Бодягин, Е.В. Вечерко. – Минск : БГУ, 2018.
7. Лопатников, Л.И. Экономико-математический словарь. Словарь современной экономической науки / Л.И. Лопатников ; под ред. Г.Б. Клейнера. – 5-е изд. – М. : Дело, 2003.

Поступила 07.03.2019

ON THE USE OF THE SEMANTIC MODEL TO UPDATE THE TERMINOLOGY IN THE FIELD OF EDUCATION AND SCIENCE

V. BATUCHKO, N. BOBOVICH, C. LEBEDINSKIY

The article proposes one of the possible approaches to filling the content of new and updated educational standards and programs, research works and research projects with verified meaning based on the “thesaurus definition model of the term” using the term “information” as an example. The modeling of the term thesaurus allows us to strengthen the role of language in understanding, mastering, transmitting information and knowledge, as well as accumulate, enrich and disseminate advanced experience (competences), and improve the coordination of work in the field of scientific terminology.

Keywords: *information, thesaurus, educational standard, semantic model, artificial intelligence.*

ФИЗИКА

УДК 544.58: 661.12

ДОЛГОЖИВУЩИЕ β -ИЗЛУЧАЮЩИЕ РАДИОНУКЛИДЫ
ПРИ ПРОИЗВОДСТВЕ РАДИОФАРМПРЕПАРАТОВ НА ОСНОВЕ ^{18}F

канд. физ.-мат. наук Д.И. БРИНКЕВИЧ, канд. хим. наук, доц. С.Д. БРИНКЕВИЧ
(Белорусский государственный университет);
канд. физ.-мат. наук, доц. С.А. ВАБИЩЕВИЧ
(Полоцкий государственный университет);
В.О. КРОТ, А.Я. МАЛИБОРСКИЙ
(Республиканский научно-практический центр онкологии
и медицинской радиологии им. Н.Н. Александрова)

Исследовано накопление долгоживущих β -излучающих радионуклидов в обогащенной ^{18}O воде при производстве радиофармпрепаратов на основе ^{18}F с использованием циклотрона IVA Cyclone 18/9 НС. Обнаружена линейная корреляция активности ^3H с наработанной на циклотроне активностью ^{18}F . При длительностях облучения, превышающих период полураспада ^{18}F ($t_{1/2} = 110$ мин), отношение активностей трития и ^{18}F возрастает, что обусловлено распадом части наработанного ^{18}F во время облучения. Основная доля ^3H (около 95 %) остается в регенерированной воде. 1,6 % от наработанной активности трития уносится из зоны синтеза с газами и парами воды, что составляет около $4,10^{-8}$ от наработанной на циклотроне активности ^{18}F . Содержащие тритий отходы (регенерированная вода во флаконах) при утилизации могут рассматриваться как отходы очень низкого уровня активности. При увеличении накопленной мишенью дозы свыше 2500 мкА·ч усиливаются процессы коррозии/эрозии материалов мишени, что приводит к резкому росту концентрации нежелательных радионуклидов в регенерированной воде, картриджах сорбционной очистки и готовой лекарственной форме. Концентрация трития при этом существенно не возрастает. В β -спектрах регенерированной воды [^{18}O]H₂O и готового радиофармпрепарата [^{18}F]NaF кроме максимума, обусловленного тритием, появляется ряд максимумов как в низко- так и в высокоэнергетической части спектра. Полученные результаты имеют важное значение для оптимизации методов обращения с радиоактивными отходами при производстве радиофармпрепаратов на основе ^{18}F с использованием циклотрона IVA Cyclone 18/9 НС и, как следствие, минимизации дозовых нагрузок персонала.

Ключевые слова: радиофармпрепараты, радионуклиды, тритий, обогащенная ^{18}O вода, протонное облучение.

Введение. Позитронно-эмиссионная томография (ПЭТ) является динамично развивающимся методом ранней диагностики онкологических, неврологических и кардиологических заболеваний, в котором используется внутривенное введение радиофармацевтических препаратов (РФП) на основе позитрон-излучающих короткоживущих радионуклидов с периодом полураспада $t_{1/2}$ от 10 до 120 мин [1–3]. Применение короткоживущих радионуклидов позволяет значительно снизить дозовую нагрузку на пациента, поскольку к окончанию исследования основная доля радиоактивной метки уже распадается. С другой стороны, для персонала использование короткоживущих изотопов предопределяет необходимость работы с высокими активностями γ -излучающих радионуклидов непосредственно за несколько десятков минут до введения радиоактивного препарата [4, 5].

Наиболее распространенным радионуклидом для ПЭТ-диагностики является ^{18}F , который получают по (p,n) реакции при облучении протонами с энергией 9–20 МэВ обогащенной по ^{18}O (до 95–97 %) воды (H₂¹⁸O). При этом также протекают реакции $^{18}\text{O}(p,d)^{17}\text{O}$ и $^{18}\text{O}(p,t)^{16}\text{O}$ с пороговыми энергиями 6,14 и 3,91 МэВ соответственно [6]. Единственным радиоактивным продуктом этих реакций становится тритий. Тритий является чисто β -излучающим радионуклидом с $E_{\beta \text{ max}} = 18,58$ кэВ. Он распадается по схеме $^3\text{H} \rightarrow ^3\text{He}^+ + e^-$. Пробег излучаемых при этом электронов составляет ~ 6 мм в воздухе и ~ 5 мкм в воде. Период полураспада трития – 12,5 года. γ -излучение при его распаде не наблюдается, поэтому он не может быть детектирован промышленными γ -дозиметрами.

Излучение ^3H полностью задерживается кожным покровом и для персонала он может представлять опасность только при нахождении внутри человека. Поступая в организм в виде тритиевой воды $^3\text{H}_2\text{O}$, тритий способен замещать атомы водорода биологически активных молекул [7]. В результате радиоактивного распада ^3H превращается в стабильный гелий ^3He , что приводит к потере биологической активности молекулы. Кроме того, испускаемые при распаде трития электроны обуславливают радиолит (нарушение структуры) нескольких десятков молекул из ближайшего окружения.

Еще одной проблемой на радиохимических предприятиях является загрязнение оборудования тритием [8]. Тритий как изотоп водорода, имея малый атомный радиус, легко диффундирует практически во всех конструкционных материалах (металлах, полимерах, стеклах) и растворяется в них. Это может приводить к загрязнению наружных поверхностей емкостей с тритиевой водой и последующему выходу трития в атмосферу. Дезактивация узлов и емкостей, контактирующих с тритием, погружением в травильные и штатные десорбирующие растворы не дает удовлетворительных результатов [8].

Указанные обстоятельства обуславливают необходимость контроля содержания трития в промежуточных продуктах, отходах производства и конечном радиофармпрепарате. Кроме того, требуется мониторинг рабочих помещений ПЭТ-центра с целью оценки доз, получаемых как персоналом, так и пациентами, а также улучшения методов рециркуляции [6].

Цель настоящей работы – выявление закономерностей в распределении β -излучающих радионуклидов между регенерированной водой, картриджами сорбционной очистки и готовой лекарственной формой в процессе производства радиофармпрепаратов на основе ^{18}F для минимизации дозовых нагрузок пациентов и производственного персонала.

Материалы и методы измерений. Нарботку радионуклида ^{18}F осуществляли на ускорителе Cyclone 18/9 HC (IBA, Бельгия) при облучении протонами с энергий 18 МэВ воды, обогащенной по ^{18}O до 98 % (Центр молекулярных исследований, Россия). Использовали ниобиевую мишень объемом 3,2 мл с входным окном из сплава Navar толщиной 25 мкм. Синтез [^{18}F] фтордезоксиглюкозы (ФДГ) осуществляли на кассетных модулях синтеза Synthera (IBA, Бельгия) по методике, изложенной в [9]. Синтез [^{18}F] фторхолина выполняли на микрореакторном модуле синтеза радиофармацевтических препаратов Synthra RN plus (Synthra GmbH, Германия) по методике, изложенной в [10].

Контроль содержания β -излучающих радионуклидов проводился с использованием автоматического жидкостного сцинтилляционного спектрометра с TDCR регистрацией HIDEX 300 SL. Энергетический диапазон составил 0 – 2 МэВ по β -частицам, интервал – 0,182 кэВ/канал, эффективность – более 26% (для трития), более 95% (для ^{14}C). Средний фон для β -частиц – 9 имп/мин. Использован жидкий сцинтиллятор на основе толуола. Пробы объемом 1 мл разводились в 10 мл жидкого сцинтиллятора. Время измерения β -спектра – 1000 с.

Идентификацию γ -излучающих радионуклидов и определение их активности выполняли с использованием спектрометра на особо чистом германии: детекторная система GEM40-83/DSPEC jr 2.0; энергетический диапазон 14,5 – 2911,4 кэВ; разрешение 0,182 кэВ/канал. Измерения активности образцов проводили на калибраторе активности Isomed 2010 (MED Nuklear – Medizintechnik Dresden GmbH, Германия). Из-за высокой активности картриджа измерения проводили не менее чем через сутки после синтеза.

Нарботка трития при облучении H_2^{18}O и производстве РФП на основе ^{18}F . Наблюдается линейная корреляция активности ^3H с нарабатанной на циклотроне активностью ^{18}F . Соотношение активностей трития и ^{18}F в облученной H_2^{18}O воде $A_{\text{H}_3}/A_{\text{F18}}$ не зависит от тока на мишени. Оно определяется в основном энергией протонов и варьируется от $A_{\text{H}_3}/A_{\text{F18}} = 2,6 \cdot 10^{-6}$ при энергии протонов на мишени 9,6 МэВ [6] до $A_{\text{H}_3}/A_{\text{F18}} = 1,1 \cdot 10^{-6}$ при 16,5 МэВ [11]. При длительностях облучения, превышающих период полураспада ^{18}F ($t_{1/2} = 110$ мин), отношение $A_{\text{H}_3}/A_{\text{F18}}$ несколько возрастает, что обусловлено распадом части нарабатанного ^{18}F . Так, по нашим экспериментальным данным при длительности облучения ≥ 110 мин и энергии протонов на мишени 16,5 МэВ отношение $A_{\text{H}_3}/A_{\text{F18}}$ возрастает в 2 раза до значений $\sim 2,2 \cdot 10^{-6}$. Близкие значения $A_{\text{H}_3}/A_{\text{F18}} = 2,3 \cdot 10^{-6}$ получены авторами [12] в производственных условиях, идентичных нашим.

Моделирование методом Monte Carlo дает значения активности трития на 40 % более высокие, чем полученные экспериментально, что, по мнению авторов [11], обусловлено осаждением радионуклида на стенках мишени и капиллярах линии трансфера облученной воды от циклотрона в модуль синтеза.

Следует отметить, что в процессе облучения водной мишени тритий может нарабатываться не только по реакции $^{18}\text{O}(p,t)^{16}\text{O}$. Он образуется также при ядерных реакциях протонов с атомами входного окна (Fe, Co, Ni) и тела мишени. Сечения этих реакций невелики ($\leq 10^{-3}$ барн) [13]. Образовавшийся в результате этих реакций ^3H накапливается в металлических компонентах мишени, а вероятность его попадания в облучаемую H_2^{18}O (и затем в камеру синтеза) крайне мала. Так, согласно [11] только от 10^{-2} до 10^{-4} % γ -излучающих радионуклидов ^{51}Cr , ^{56}Co , ^{57}Co , ^{58}Co , ^{52}Mn , ^{54}Mn и ^{57}Ni вымываются вследствие коррозии/эрозии из входного окна и тела мишени в облучаемую воду.

Другим механизмом накопления трития в конструкционных материалах мишени является диффузия его из остатков облученной воды на стенках мишени. Материал тела мишени Nb легко поглощает водород с образованием твердого раствора водорода и гидрида NbH, представляющего собой серый кристаллический порошок. Отметим, что серый налет на поверхности ниобиевых мишеней визуально наблюдается при длительном облучении (более 2000 мкА·ч) [14]. Активно поглощают водород Fe, Co, Ni, входящие в состав входного окна мишени. При поглощении водорода конструкционными металлами последние резко меняют свои свойства. Это характерно, например, для сплавов никеля и железа, в кото-

рых в присутствии водорода резко ухудшаются прочностные свойства – падает ударная вязкость, увеличивается хрупкость [15]. Это может приводить к преждевременной деформации или даже разрыву входного окна мишени. Поэтому целесообразно периодически проводить промывку мишени для удаления остатков облученной воды, обогащенной тритием.

В результате радиоактивного распада трития образуется гелий, который со временем накапливается в объеме конструкционных материалов, что приводит к деградации их физико-химических свойств (старению). Так, например, при наличии He в металлах (в частности, никеле, ниобии и т.д.) они подвергаются охрупчиванию [8].

Распределение трития в процессе синтеза ^{18}F -фтордезоксиглюкозы было исследовано в работе [6]. Основная доля ^3H (около 95 %) остается в воде, пропущенной через ионообменную смолу (так называемой *recovery*). Остатки (5 %) смываются с ионообменной смолы ацетонитрилом, две трети которых (3,2%) попадает в отходы, а треть (1,6 % от наработанной активности трития) уносится из зоны синтеза с газами и парами воды, образующимися при синтезе. Это составляет около $4,10^{-8}$ от наработанной на циклотроне активности ^{18}F . Обычно в одном производственном цикле наработка ^{18}F составляет от 150 до 300 ГБк. Следует ожидать, что за 1 синтез с газообразными веществами улетучивается 6 – 15 кБк трития. При 250 синтезах за год с газообразными отходами будет выбрасываться около 3 МБк ^3H . Это ниже безопасного уровня, установленного нормами МАГАТЭ (International Basic Safety Standard's level, IAEA, 1996).

При синтезе холина объем газообразных выбросов может быть несколько выше (~ в 2 раза), но он не будет превосходить 3 – 4 % от активности трития, что эквивалентно $\sim 1 \cdot 10^{-7}$ от активности ^{18}F , наработанной на циклотроне. Это обусловлено тем, что для синтеза всех РФП на основе ^{18}F характерно наличие анионообменного картриджа, на котором происходит осаждение этого элемента.

Оценка прироста концентрации трития вследствие сброса газовых потоков при производстве радиофармпрепаратов (ФДГ) и определение дозы, получаемой вследствие этого населением, были выполнены в работе [16]. Газообразные выбросы из горячих лабораторий перед попаданием в атмосферу проходили через фильтры из древесного угля. Мониторинг трития вели три различные станции, расположенные вокруг производства. Положение станций определялось с учетом топологии региона, метеоданных и расположения жилых зданий. Одна из станций была контрольной для выявления фона согласно метеоусловиям. Содержание ^3H определялось методом электролитического обогащения с последующим подсчетом жидким сцинтилляторным детектором. Сравнение проводилось по 2 периодам: с 2000 по 2007 гг. (до начала работы циклотрона) и с 2008 по 2011 гг. (после начала получения активности). Обнаружено увеличение средней активности трития после ввода циклотрона в 3 – 4 раза – с $\sim 0,30$ Бк/л до 0,80 – 1,02 Бк/л. Накопленная населением вследствие этого доза за год оценена как 0,08 мЗв/год. Отмечается, что эта доза ниже лимита, установленного национальным бразильским регулятором CNEN (1988), которая составляет 0,3 мЗв/год.

В воде после промывки мишени содержание трития по данным различных исследователей сильно различается. Так, по данным [12] удельная активность ^3H в промывочной воде составляет 1,4 Бк/мл, в то же время авторы [17] дают существенно более высокое значение – 92 Бк/мл. Причина такого расхождения не совсем ясна, но возможно сказывается различный дизайн мишени, ее объем (1,3 и 2,4 мл), материал (Nb и Ti), режим продувки мишени, количество производственных циклов перед промывкой мишени. Содержание трития в отходах производства ФДГ (раствор ацетонитрила) по данным [6] составляет 1,46 Бк/мл.

Активность ^3H такова, что согласно требованиям МАГАТЭ (International Basic Safety Standards for Protection against Ionizing Radiation and for the Safety of Radiation Sources, IAEA, 1996) содержащие тритий отходы (регенерированная вода во флаконах) могут быть исключены из регуляторного контроля и при утилизации могут рассматриваться как отходы очень низкого уровня активности.

Тритий кроме облученной H_2^{18}O воды детектируется также в воде, прошедшей через анионообменный картридж (*recovery*), в отходах (растворе ацетонитрила), а также в воде, которой промывалась мишень [6, 12, 16–18]. В большинстве радиофармпрепаратов (кроме NaF) тритий практически не содержится. Большинство авторов оценивают его концентрацию как близкую к пределу разрешения использовавшейся методики измерения [6, 12, 16, 17]. Максимальное содержание трития в ФДГ было отмечено авторами [Kohler] и составляло $0,269 \pm 0,016$ Бк/мл, что почти на 5 порядков величины ниже содержания трития в облученной воде. Содержание ^3H в РФП ^{18}F -NaF было значительно выше (~ на 3 порядка), чем в ФДГ, и составляло 0,56 кБк/мл [18]. Для сравнения: содержание трития в коммерчески поставляемой H_2^{18}O воде по данным [5, 6, 12] составляет от $2,2 \cdot 10^{-3}$ до 0,4 Бк/мл.

Содержание трития в регенерированной воде, прошедшей через анионообменный картридж и собираемой с рутинного производства некоторыми производителями для повторного использования, у разных исследователей варьируется в широких пределах (от 30 до 180 кБк/мл [5, 6, 12, 16–18]) в зависимости от условий облучения – энергии протонного пучка, величины ионного тока, длительности облучения и т.д. Оно прямо пропорционально длительности облучения и величине ионного тока. В производственных усло-

виях Республики Беларусь для циклотрона Cyclone 18/9 с энергией 18 МэВ при ионном токе 70–80 мкА и длительности облучения 80–140 мин удельная активность ^3H , по нашим данным, составляла 130–200 кБк/мл. На рисунке 1 представлены спектры калибровочных растворов (^3H , ^{14}C , $^{90}\text{Sr} + ^{90}\text{Y}$), что позволило сопоставить результаты измерения методом жидкостной сцинтилляционной β -спектрометрии спектра регенерированной воды $^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ после облучения чистой (накопленная мишенью доза менее 500 мкА·ч) мишени. Проведенное исследование выявило высокое содержание трития в регенерированной воде $^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$. Удельные активности трития составили: в регенерированной воде из модуля SynthraRN Plus – около 130 кБк/г; для модуля Synthera – от 194 до 215 кБк/г (таблица 1). Необходимо отметить, что значения измеренных удельных активностей данного нуклида до и после очистки регенерированной воды методом дистилляции [4] отличались в пределах погрешности методики измерения.

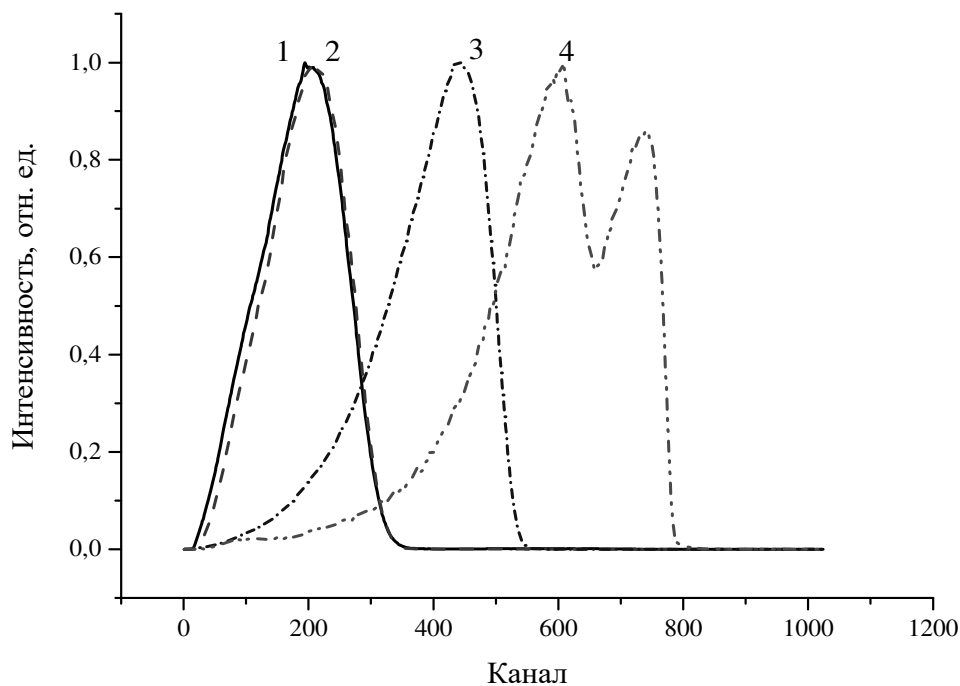


Рисунок 1. – β -Спектр регенерированной воды $^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$:
1 – анализируемый образец; 2 – эталон ^3H ; 3 – эталон ^{14}C ; 4 – эталон $^{90}\text{Sr} + ^{90}\text{Y}$

Характерно, что на фоне трития не удалось идентифицировать другие β -излучающие радионуклиды, которые должны присутствовать в регенерированной воде $^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ как минимум до дистилляции. Вероятнее всего, это обусловлено тем, что ожидаемая β -активность радиоизотопов кобальта как минимум на три порядка ниже, чем трития.

Таблица 1. – Содержание трития в регенерате воды $^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$

	Образец	Масса пробы, г	Удельная активность, Бк/г
SynthraRN Plus	До очистки	0,54374	131155
	(I фр дистиллята)	0,52285	128283
	(II фр дистиллята)	0,53342	138390
Synthera	До очистки	0,62400	214978
	(II фр дистиллята)	0,52727	194286

На спектрах регенерата $^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ наблюдается смещение в низкоэнергетическую область (на ~ 5 %) максимума пика трития по сравнению с калибровочным раствором (см. рисунок 1). При этом сильному сдвигу подверглось низкоэнергетическое крыло пика при практически неизменном высокоэнергетическом крыле, что проявляется как уширение пика на ~ 10 % для модуля SynthraRN Plus и на 7 % – для Synthera. Дистилляция приводит к смещению максимума сцинтилляционной полосы трития в высокоэнергетическую область, практически не изменяя при этом ширину линий (таблица 2). Отметим, что для эталона трития в обычной воде $^{16}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ максимум сцинтилляционной полосы трития соответствовал 205 каналу, а ее ширина на полувысоте составляла 155 каналов.

Таблица 2. – Номер канала максимума и ширина на полувысоте (в каналах) сцинтилляционной полосы трития

Модуль	Параметры полосы	Регенерат	I фракция	II фракция
SynthraRN Plus	максимум	194	207	208
	полуширина	165	165	164
Synthera	максимум	195	-	211
	полуширина	170	-	167

Возможно несколько причин такого изменения формы сцинтилляционных пиков трития. Наши экспериментальные данные указывают на то, что доминирующее влияние на положение максимума полосы трития оказывают радионуклиды металлов. Образование Оже-электронов при β -распаде нуклидов, а также выбивание низкоэнергетических электронов γ -квантами и рентгеновским излучением при прохождении через воду может приводить к смещению максимума трития в регенерате $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ по сравнению с дистиллятом $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$. Необходимо отметить, что смещение максимума пика трития в низкоэнергетическую область наблюдается только до очистки, и в двух фракциях дистиллята воды $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ с модуля Synthra RN Plus максимумы пика трития имеют близкие значения. Поэтому описанный в литературе [19] эффект растворителей, заключающийся в снижении энергии возбуждения молекул жидкого сцинтиллятора и, следовательно, энергии испускаемых ими фотонов, в данном случае проявляется слабо. Уширение пика трития в воде $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ как до, так и после дистилляции, по нашему мнению, может быть связано с изотопным эффектом кислорода ^{18}O .

Согласно СаНиП Республики Беларусь [20] регенерированная вода $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$, очищенная приведенным в настоящей работе методом, относится к жидким радиоактивным отходам, поскольку активность ^3H в ней многократно превышает 0,5 Бк/г. Указанное обстоятельство исключает возможность повторного использования очищенной воды $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ для производства РФП для ПЭТ-диагностики. Наличие трития также создает трудности для использования регенерата воды $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ в качестве сырья для обогащения по изотопу кислорода ^{18}O как центрифужным, так и дистилляционным методами, поскольку одновременно с накоплением тяжелых изотопов кислорода (^{18}O и ^{17}O) будет увеличиваться и активность ^3H . Вышеизложенное указывает на необходимость разработки технологии очистки килограммовых количеств регенерата $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ от трития в условиях ПЭТ производства.

Сцинтилляционная спектрометрия конечного продукта и отходов производства РФП при облучении мишеней с большой ранее накопленной дозой. Материалы мишени ускорителя в ходе наработки $[^{18}\text{F}]$ фторида под воздействием высокоэнергетических протонов и нейтронов подвергаются сильной активации. В условиях облучения вода под давлением 25 – 30 атм. выщелачивает продукты активации из тела и окна мишени, вследствие чего происходит загрязнение радионуклидными примесями раствора $[^{18}\text{F}]$ фторида. Это в последующем может приводить к попаданию указанных радионуклидов в готовый радиофармпрепарат и образованию твердых и жидких радиоактивных отходов [4, 5, 9–11, 21]. При увеличении накопленной мишенью дозы свыше 2500 мкА·ч усиливаются процессы коррозии/эрозии материалов мишени и, соответственно, растет эффективность выщелачивания радионуклидов. Это приводит к резкому росту концентрации γ -излучающих радионуклидов в регенерированной воде, картриджах сорбционной очистки и готовой лекарственной форме [22]. Ранее контроль содержания β -излучающих радионуклидов при облучении мишеней с большой накопленной дозой (свыше 2500 мкА·ч) методом сцинтилляционной спектроскопии не проводился.

На рисунках 2–4 приведены β -спектры регенерированной воды $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ и готового РФП $[^{18}\text{F}]\text{NaF}$ при использовании мишени с накопленной дозой около 5000 мкА·ч. Они кардинально отличаются от аналогичного спектра после облучения «чистой» мишени с накопленной дозой менее 500 мкА·ч (см. рисунок 1). Кроме максимума, обусловленного тритием, на спектрах наблюдается еще ряд максимумов как в низко-, так и в высокоэнергетической части спектра. Причем хранение в течение 3 месяцев приводит к существенной трансформации спектров – резко снижается интенсивность низкоэнергетического крыла спектра регенерированной воды, исчезает максимум в области 300 канала, в то время как интенсивность высокоэнергетического крыла (от 450 до 700 канала) снижается не столь кардинально. Это указывает на присутствие ряда β -излучающих нуклидов с разной энергией испускаемых электронов и периодом полураспада. Их суммарная активность в первые несколько недель после синтеза значительно превышает активность ^3H . Сильное излучение в низкоэнергетической области β -спектров регенерированной воды $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ при облучении «грязной» мишени увеличивает погрешность измерения концентрации трития. Содержание ^3H в облученной воде методом сцинтилляционной спектрометрии достаточно достоверно можно оценить только после длительного (около 3 месяцев) хранения.

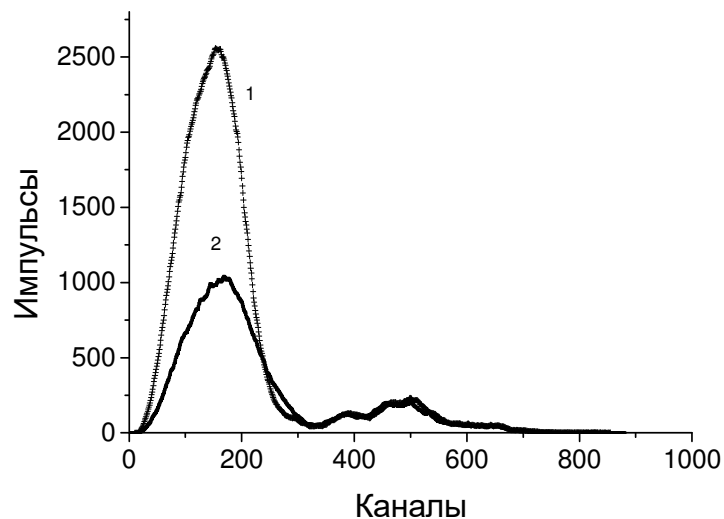


Рисунок 2. – β -спектры радиофармпрепарата $[^{18}\text{F}]\text{NaF}$, измеренные через 2 дня (1) и 3 месяца (2) после синтеза

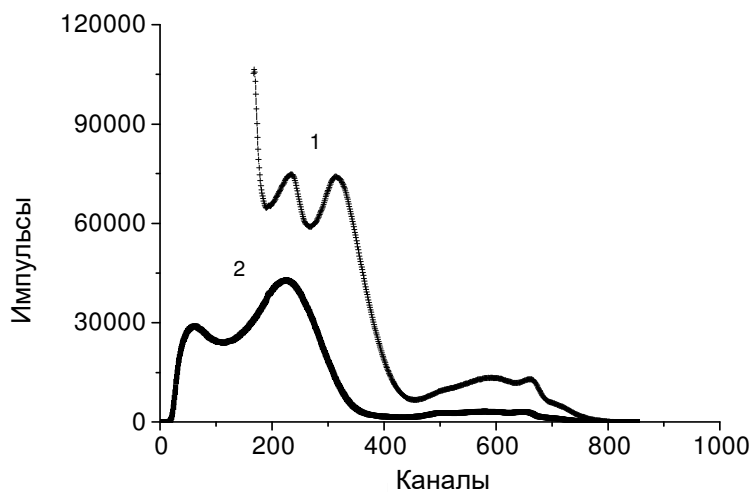


Рисунок 3. – β -спектры регенерированной $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$, измеренные через 2 дня (1) и 3 месяца (2) после синтеза. Облучение на мишени № 5

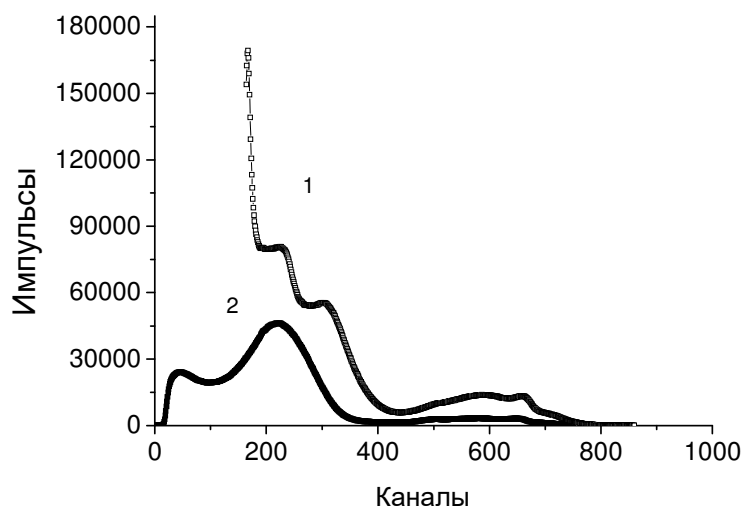


Рисунок 4. – β -спектры регенерированной $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$, измеренные через 2 дня (1) и 3 месяца (2) после синтеза. Облучение на мишени № 1

Отметим, что в готовых радиофармпрепаратах [¹⁸F]метилхолине и [¹⁸F]ФДГ содержание трития и других β-излучающих радионуклидов было ниже предела обнаружения использовавшейся методики даже при использовании мишени с накопленной дозой свыше 7000 мкА·ч. Это обусловлено высокой степенью очистки указанных препаратов от нежелательных радионуклидов в процессе синтеза [10, 22, 23].

Как отмечалось выше, появление сигнала в низкоэнергетичной области, вероятнее всего, обусловлено Оже-электронами, а также выбивание низкоэнергетических электронов γ-квантами и рентгеновским излучением при прохождении через воду. Оже-электроны образуются при распаде радионуклидов в процессе К-захвата. Низкоэнергетичное излучение доминирует в спектрах регенерированной воды (рисунки 3 и 4) и мало заметно в спектре РФП [¹⁸F]NaF (см. рисунок 2). Оно резко снижается после хранения в течение 3 месяцев (кривые 2 на рисунках 2–4). При хранении также исчезает полоса в области 300 канала. Это указывает на то, что низкоэнергетичное крыло спектра определяется в основном радионуклидами с относительно малым (несколько дней) периодом полураспада. Высокоэнергетичное крыло спектров трансформируется в значительно меньшей степени. Отметим, что форма спектров (соотношение интенсивностей максимумов) изменяется при переходе на облучение другой мишени (ср. рисунки 3 и 4) с большей накопленной дозой.

Для анализа полученных экспериментальных данных нами были привлечены ранее полученные экспериментальные данные по исследованию γ-излучающих радионуклидов при облучении мишеней с большой накопленной дозой. Наблюдавшиеся нами методом γ-спектроскопии при облучении водной ниобиевой мишени с входным окном из сплава NaVag на циклотроне ИВА Cyclone 18/9 долгоживущие радионуклиды (ДРН) представлены в таблице 3. В ней приведены возможные реакции образования; наиболее интенсивные линии γ-излучения, по которым проводилась идентификация радионуклида, а также период полураспада и схема распада ДРН. Видно, что все они являются β-излучателями: распадаются посредством К-захвата или испускают позитроны (β⁺-распад), реже электроны (β⁻-распад).

Таблица 3. – Основные характеристики идентифицированных долгоживущих радионуклидов, образующихся при облучении ниобиевой мишени с входным NaVag-окном на циклотроне Cyclone 18/9 (ИВА, Бельгия)

ДРН	Возможная реакция получения	Тип и энергия излучения изотопа (кэВ)	Период полураспада
1	2	3	4
⁵⁵ Co	⁵⁸ Ni(p, α) ⁵⁵ Co	γ, 931,3; 477,2; 1408,4; 1316,4; 3253,41 β ⁺	17,5 ч ⁵⁵ Co→ ⁵⁵ Fe→ ⁵⁵ Mn
⁵⁶ Co	⁵⁶ Fe(p,n) ⁵⁶ Co; 5,44 МэВ	γ, 846,77; 1238,28; 2598,45; 1771,36; 3253,41 КЗ β ⁺ (83%)	77,27 сут ⁵⁶ Co→ ⁵⁶ Fe
⁵⁷ Co	⁵⁶ Fe(p,γ) ⁵⁷ Co ⁵⁷ Fe(p,n) ⁵⁷ Co ⁵⁸ Ni(p,2p) ⁵⁷ Co ⁵⁸ Ni(n, d) ⁵⁷ Co; 6,05 МэВ ⁵⁸ Ni(p,np) ⁵⁷ Co; 8,31 МэВ ⁶⁰ Ni(n, α) ⁵⁷ Co; 0,27 МэВ	γ, 122,06; 136,47; 14,41; 692,03 КЗ	271,8 сут ⁵⁷ Co→ ⁵⁷ Fe
⁵⁸ Co	⁵⁷ Fe(p,γ) ⁵⁸ Co ⁵⁸ Fe(p,n) ⁵⁸ Co; 3,14 МэВ ⁵⁸ Ni(n,p) ⁵⁸ Co; 0 МэВ ⁵⁹ Co(n,2n) ⁵⁸ Co	γ, 810,76; 863,96; 1674,73 КЗ β ⁺ (14,5%)	70,92 сут ⁵⁸ Co→ ⁵⁸ Fe
⁵¹ Cr	⁵⁰ Cr(n,γ) ⁵¹ Cr ⁵⁴ Fe(n, α) ⁵¹ Cr ⁵² Cr (p, np) ⁵¹ Cr; 12,3 МэВ	γ, 320,08 КЗ	27,7 сут ⁵¹ Cr→ ⁵¹ V
⁵² Mn	⁵² Cr(p, n) ⁵² Mn; 5,6 МэВ	γ, 744,23; 935,54; 1333,65; 1434,07. КЗ	5,59 сут ⁵² Mn→ ⁵² Cr
⁵⁴ Mn	⁵³ Cr(p,γ) ⁵⁴ Mn ⁵⁴ Cr(p, n) ⁵⁴ Mn ⁵⁸ Ni(n,pα) ⁵⁴ Mn; 6,42 МэВ	γ, 834,85 КЗ	312,3 сут ⁵⁴ Mn→ ⁵⁴ Cr
⁵⁷ Ni	⁵⁸ Ni(p,pn) ⁵⁷ Ni; 12,43 МэВ ⁵⁸ Ni(p,2n) ⁵⁷ Ni; 12,41 МэВ	γ, 1757,55; 127,2; 1919,5; 1377,6 КЗ β ⁺ (53%)	35,6 ч ⁵⁷ Ni→ ⁵⁷ Co→ ⁵⁷ Fe
⁷ Be	⁷ Li (p, n) ⁷ Be ¹⁰ B (p,α) ⁷ Be ¹¹ B (p,nα) ⁷ Be	γ, 477,60 КЗ	53,29 сут ⁷ Be→ ⁷ Li

Окончание таблицы 3

1	2	3	4
^{65}Zn	$^{65}\text{Cu}(p,n)^{65}\text{Zn}$ $^{64}\text{Zn}(n,\gamma)^{65}\text{Zn}$	γ , 1115,55 КЗ	244,3 сут $^{65}\text{Zn} \rightarrow ^{65}\text{Cu}$
^{92m}Nb	$^{93}\text{Nb}(n,2n)^{92m}\text{Nb}$; 8,9 МэВ	γ , 934,46; 912,73; 1847,27 КЗ β^+	10,15 сут $^{92m}\text{Nb} \rightarrow ^{92}\text{Zr}$
^{95}Nb	$^{98}\text{Mo}(p,\alpha)^{95}\text{Nb}$ $^{95}\text{Mo}(n,p)^{95}\text{Nb}$	γ , 204,12; 561,67; 765,8 β^-	34,98 сут $^{95}\text{Nb} \rightarrow ^{95}\text{Mo}$
^{95m}Nb	$^{98}\text{Mo}(p,\alpha)^{95}\text{Nb}$ $^{95}\text{Mo}(n,p)^{95}\text{Nb}$	γ ; 204,12; 582,08; 786,2; 820,62 ИП (94,4%) β^- (5,6%)	86,6 ч
^{96}Nb	$^{96}\text{Mo}(n,p)^{96}\text{Nb}$	γ ; 778,2; 568,8; 459,88; 849,93 β^-	23,35 ч $^{96}\text{Nb} \rightarrow ^{96}\text{Mo}$
^{95}Tc	$^{94}\text{Mo}(p,\gamma)^{95}\text{Tc}$; $^{95}\text{Mo}(p,n)^{95}\text{Tc}$; 2,5МэВ	γ , 765,79; 947,67; 1073,7; 869,6 КЗ	20,0 ч $^{95}\text{Tc} \rightarrow ^{95}\text{Mo}$
^{95m}Tc	$^{94}\text{Mo}(p,\gamma)^{95}\text{Tc}$; $^{95}\text{Mo}(p,n)^{95}\text{Tc}$; 2,5МэВ	γ ; 204,12; 582,1; 786,2; 835,15; 1036,3 КЗ (96,1%), ИП (3,9%),	61 сут $^{95m}\text{Tc} \rightarrow ^{95}\text{Mo}$
^{96}Tc	$^{95}\text{Mo}(p,\gamma)^{96}\text{Tc}$; $^{96}\text{Mo}(p,n)^{96}\text{Tc}$; 3,8МэВ	γ , 778,22; 812,58; 849,93; 1126,97 КЗ	4,28 сут $^{96}\text{Tc} \rightarrow ^{96}\text{Mo}$
^{181}Re	$^{182}\text{W}(p,2n)^{181}\text{Re}$; 10,65МэВ	γ , 365,6; 360,7; 639,3; 953,42 КЗ?	19,9 ч $^{181}\text{Re} \rightarrow ^{181}\text{W} \rightarrow ^{181}\text{Ta}$
^{182}Re	$^{182}\text{W}(p,n)^{182}\text{Re}$;	γ , 1221,4; 229,3; 67,75; 1121,3 КЗ?	64 ч $^{182}\text{Re} \rightarrow ^{182}\text{W}$
^{182}Re	$^{182}\text{W}(p,n)^{182}\text{Re}$;	γ , 1189,05; 67,75; 1121,3; 1221,4 КЗ?	12,7 ч $^{182}\text{Re} \rightarrow ^{182}\text{W}$
^{183}Re	$^{182}\text{W}(p,\gamma)^{183}\text{Re}$ $^{183}\text{W}(p,n)^{183}\text{Re}$	γ , 46,48; 162,32; 291,72; 208,80 КЗ	70,0 сут $^{183}\text{Re} \rightarrow ^{183}\text{W}$
^{184}Re	$^{183}\text{W}(p,\gamma)^{184}\text{Re}$	γ , 111,21; 792,07; 894,76; 903,28 КЗ	38,0 сут $^{184}\text{Re} \rightarrow ^{184}\text{W}$
^{184m}Re	$^{183}\text{W}(p,\gamma)^{184m}\text{Re}$	γ , 161,27; 216,55; 252,85; 920,93 КЗ (24,6%) ИП (75,4%)	169 сут $^{184}\text{Re} \rightarrow ^{184}\text{W}$
^{182}Ta	$^{182}\text{W}(n,p)^{182}\text{Ta}$	γ , 1189,05; 67,75; 1121,3; 1221,4 β^-	114,4 дня $^{182}\text{Ta} \rightarrow ^{182}\text{W}$
^{183}Ta	$^{183}\text{W}(n,p)^{183}\text{Ta}$	γ , 107,93; 246,06; 353,99; 161,35 β^-	5 сут $^{183}\text{Ta} \rightarrow ^{183}\text{W}$

Примечание. КЗ – захват электрона с К-оболочки (К-захват); ИП – изомерный переход.

Доминирующими радионуклидами в измеренных на третьи сутки после синтеза γ -спектрах образцов регенерированной воды, β -спектры которой представлены на рисунках 3 и 4, являются изотопы кобальта (^{55}Co , ^{56}Co , ^{57}Co , ^{58}Co), марганца ^{52}Mn и никеля ^{57}Ni , с активностью на момент окончания синтеза фармпрепарата $\sim (5-10) \cdot 10^4$ Бк/мл каждый [23]. Кроме того, наблюдались изотопы ^{181}Re , ^{95}Tc , ^{96}Tc , ^{51}Cr и ^{54}Mn с удельной активностью в диапазоне 50 – 2000 Бк/мл на момент окончания синтеза. Радионуклиды ^{52}Mn , ^{57}Ni , ^{181}Re , ^{95}Tc , ^{96}Tc являются короткоживущими (период полураспада менее недели) и распадаются путем К-захвата. Вероятнее всего, указанные радионуклиды ответственны за низкоэнергетичную часть β -спектров регенерированной воды. Радионуклиды ^{56}Co , ^{57}Co , ^{58}Co и ^{54}Mn с периодом полураспада $t_{1/2} \geq 70$ сут определяют вид высокоэнергетичной области β -спектров регенерированной воды и РФП $[^{18}\text{F}]\text{NaF}$.

Заключение. Наблюдается линейная корреляция активности ^3H с нарабатанной на циклотроне активностью ^{18}F . При длительностях облучения, превышающих период полураспада ^{18}F ($t_{1/2} = 110$ мин), отношение активностей трития и ^{18}F возрастает, что обусловлено распадом части нарабатанного ^{18}F во время облучения. Основная доля ^3H (около 95 %) остается в регенерированной воде. 1,6 % от нарабатанной активности трития уносится из зоны синтеза с газами и парами воды, образующимися при синтезе, что составляет около $4 \cdot 10^{-8}$ от нарабатанной на циклотроне активности ^{18}F . Содержащие тритий отходы (регенерированная вода во флаконах) при утилизации могут рассматриваться как отходы очень низкого уровня активности. При увеличении накопленной мишенью дозы свыше 2500 мкА·ч усиливаются процессы коррозии/эрозии материалов мишени, что приводит к резкому росту концентрации нежелательных радионуклидов в регенерированной воде, картриджах сорбционной очистки и готовой лекарственной форме. Концентрация трития при этом существенно не возрастает. β -спектры регенерированной воды $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ и готового РФП $[^{18}\text{F}]\text{NaF}$ кардинально отличаются от аналогичного спектра после облучения

«чистой» мишени с накопленной дозой менее 500 мкА·ч. Кроме максимума, обусловленного тритием, на спектрах наблюдается еще ряд максимумов как в низко-, так и в высокоэнергетической части спектра. Причем хранение в течение 3 месяцев приводит к существенной трансформации спектров – резко снижается интенсивность низкоэнергетического крыла спектра регенерированной воды, исчезает максимум в области 300 канала, в то время как интенсивность высокоэнергетического крыла (от 450 до 700 канала) снижается не столь кардинально. Содержание ^3H в облученной воде методом сцинтилляционной спектрометрии достаточно достоверно можно оценить только после длительного (около 3 месяцев) хранения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Позитронно-эмиссионная томография. Ч. 1 : Характеристика метода. Получение радиофармпрепаратов / С.Д. Бринкевич [и др.] // Медико-биологические проблемы жизнедеятельности. – 2013. – № 2. – С. 129–137.
2. Кодина, Г.Е. Методы получения радиофармацевтических препаратов и радионуклидных генераторов для ядерной медицины / Г.Е. Кодина, Р.Н. Красикова. – М. : МЭИ, 2014. – 282 с.
3. Peller, P. PET-CT and PET-MRT in Oncology: A Practical Guide (Medical Radiology) / P. Peller, R. Subramaniam, A. Guermazi // Springer Science & Business Media. – 2012. – 470 p.
4. Обращение с водными радиоактивными отходами при производстве радиофармпрепаратов на основе ^{18}F / В.О. Крот [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 128–134.
5. Radionuclide impurities in proton-irradiated ^{18}O for the production of ^{18}F : Activities and distribution in the ^{18}F FDG synthesis process / L. Bowden [et al.] // Applied Radiation and Isotopes. – 2009. – V. 67. – P. 248–255.
6. Tritium in ^{18}O water containing ^{18}F fluoride for ^{18}F FDG synthesis / S. Ito [et al.] // Applied Radiation and Isotopes. – 2004. – V. 61. – P. 1179–1183.
7. Бондарева, Л.Г. Накопление трития организмами по экологическим пищевым цепочкам / Л.Г. Бондарева // Радиохимия – 2018 : сб. тезисов IX Рос. конф., 17–21 сент. 2018 г., СПб. – СПб., 2018. – С. 208.
8. Кузнецова, Н.А. О вопросах дезактивации оборудования от трития / Н.А. Кузнецова, М.В. Ерофеева // Радиохимия – 2018 : сб. тезисов IX Рос. конф., 17–21 сент. 2018 г., СПб. – СПб., 2018. – С. 410.
9. Очистка ^{18}F фторида от долгоживущих радионуклидов при производстве ^{18}F фтордезоксиглюкозы / А.А. Иванюкович [и др.] // Медицинская физика. – 2018. – № 4(80). – С. 59–65.
10. Долгоживущие радионуклиды при производстве ^{18}F фторхолина для ПЭТ-диагностики / П.В. Тылец [и др.] // Известия НАН Беларуси. Серия химических наук. – 2018. – № 3. – С. 359–368.
11. Monte Carlo simulation and radiometric characterization of proton irradiated ^{18}O for the treatment of the waste streams originated from ^{18}F FDG synthesis process / R. Remetti [et al.] // Applied Radiation and Isotopes. – 2011. – V. 69. – P. 1046–1051.
12. Quantification of the activity of tritium produced during the routine synthesis of ^{18}F fluorodeoxyglucose for positron emission tomography / C. Marshall [et al.] // J. Radiological Protection. – 2014. – V. 34. – P. 435–444.
13. Evaluated Nuclear. – Mode of access: <https://www-nds.iaea.org/exfor/endl.htm>.
14. Niobium sputtered Havar foil for the high-power production of reactive ^{18}F fluoride by proton irradiation of ^{18}O targets / J.S. Wilson [et al.] // Applied Radiation and Isotopes. – 2008. – V. 66. – P. 565–570.
15. Физико-химические свойства элементов : справочник / под ред. Г.В. Самсонова. – Киев, 1965. – С. 655–668.
16. Assessment of atmospheric tritium concentration levels due to the normal operation of a radiopharmaceutical production unit (UPPR) / C.M. Peixoto, V.M.F. Jacomino, V.S. Dias // 2011 Intern. Nuclear Atlantic Conf. – INAC 2011 ; Belo Horizonte, MG, Brazil, 24–28 Oct. 2011. – 7 p.
17. Measurement of the induced radionuclides in production of radiopharmaceuticals for positron emission tomography (PET) / S. Mochizuki [et al.] // J. Nuclear Science and Technology. – 2006. – V. 43, № 4. – P. 348–353.
18. Radionuclide impurities in ^{18}F F⁻ and ^{18}F FDG for positron emission tomography / M. Kohler [et al.] // Applied Radiation and Isotopes. – 2013. – V. 81. – P. 268–271.
19. Райхардт, К. Растворители и эффекты среды в органической химии / К. Райхардт. – М. : Мир, 1991. – 763 с.
20. Требования к обеспечению радиационной безопасности персонала и населения при обращении с радиоактивными отходами : Санитарные нормы и правила : утв. постановлением М-ва здравоохранения Респ. Беларусь № 142 от 31.12.2015.

21. Примесные радионуклиды в производстве радиофармпрепаратов на основе ^{18}F / С.А. Добровольский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 64–72.
22. Долгоживущие радионуклиды в производстве 2- ^{18}F фтордезоксиглюкозы / Д.И. Бринкевич [и др.] // Медицинская физика. – 2018. – № 1. – С. 80–88.
23. Long-lived radionuclides in the production of ^{18}F -labeled radiopharmaceuticals / V.O. Krot [et al.] // 13th Int. Symposium on the Synthesis and Application of Isotopically Labelled Compounds, Prague, Czech Republic, 3-7 June 2018. – Prague, 2018. – P. 43.

Поступила 25.03.2019

LONG-LIVING β -RADIATING RADIONUCLIDES IN THE MANUFACTURE OF RADIOPHARMATIC DRUGS BASED ON ^{18}F

D. BRINKEVICH, S. BRINKEVICH, S. VABISHCHEVICH, V. KROT, A. MALIBORSKI

The accumulation of long-lived β -emitting radionuclides in ^{18}O -enriched water in the production of radiopharmaceuticals based on ^{18}F using the IBA Cyclone 18/9 HC cyclotron was studied. There is a linear correlation of ^3H activity with ^{18}F activity accumulated on the cyclotron. With durations of exposure exceeding the half-life of ^{18}F ($t_{1/2} = 110$ min), the ratio of the activities of tritium and ^{18}F increases. It is due to the decay of the ^{18}F during irradiation. The main share of ^3H (about 95%) remains in the regenerated water. 1,6% of the accumulated tritium activity is carried away from the synthesis zone with gases and water vapor. It is about $4 \cdot 10^{-8}$ from the ^{18}F activity accumulated on the cyclotron. Waste containing tritium (regenerated water in vials) can be considered as a very low level activity waste. With an increase in the accumulated target dose above 2500 $\mu\text{A}\cdot\text{h}$, the corrosion/erosion of the target materials increases. It leads to a sharp increase in the concentration of unwanted radionuclides in the regenerated water, sorption purification cartridges and the finished dosage form. The concentration of tritium does not increase significantly, Series of maxima appear in the low- and high-energy part of the spectrum (in addition to the maximum due to tritium) in the β -spectra of regenerated water [^{18}O] H_2O and finished RFP [^{18}F] NaF . The results obtained are important for optimizing the methods of radioactive waste management in the production of radiopharmaceuticals based on ^{18}F with using the IBA Cyclone 18/9 HC cyclotron and, as a result, minimizing personnel dose rates.

Keywords: radiopharmaceuticals, radionuclides, tritium, enriched ^{18}O water, proton irradiation.

УДК 621.371: 550.837.6

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ
В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ НАД УГЛЕВОДОРОДАМИ***канд. техн. наук, доц. В.Ф. ЯНУШКЕВИЧ
(Полоцкий государственный университет);**Е.Ю. ЗАЯЦ**(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники)*

Приведены результаты экспериментального взаимодействия электромагнитных волн в режиме радиоимпульсных сигналов со средой над углеводородными залежами. Теоретически определены резонансные частоты изменения коэффициента отражения от анизотропной среды над залежью в режиме радиоимпульсных сигналов для вертикальной и горизонтальной поляризаций электромагнитных волн. Проведено экспериментальное подтверждение резонансного поведения коэффициента отражения на частотах 93 МГц для вертикальной и 115 МГц для горизонтальной поляризаций электромагнитных волн в режиме радиоимпульсных сигналов. Предложен способ для определения характеристик среды над залежью при распространении электромагнитных волн с правой и левой круговыми поляризациями, что повышает информативность методов оконтуривания и выделения углеводородных залежей. Установлены значения модулирующей частоты для повышения уровня однозначного определения границ залежи. Применено комплексирование методов, направленных на определение углеводородных залежей, сочетание которых с глубинными методами приведет к экономическому выигрышу при повышении точности определения границ.

Ключевые слова: радиоимпульсный сигнал, анизотропная среда, углеводородная залежь, коэффициент отражения.

Введение. Методы поиска и обнаружения углеводородных залежей (УВЗ) основаны на анализе электрофизических и электрохимических процессов в анизотропных средах (АС) над залежами углеводородов и оптимизации частотных, поляризационных, амплитудных, модуляционных и других параметров зондирующих сигналов с учетом специфических характеристик УВЗ. Актуальность рассматриваемых в настоящей работе задач заключается в усовершенствовании существующих электромагнитных методов георазведки и разработке новых методов поиска, идентификации месторождений нефти и газа (углеводородов), являющихся стратегическим видом полезных ископаемых. Сходство исследуемой среды над залежью нефти и газа с плазмоподобным образованием позволяет использовать для изучения взаимодействия электромагнитных волн (ЭМВ) с УВЗ существующие решения при изучении плазмы и плазмоподобных сред. Установлено, что наиболее оптимальным для исследования сред над УВЗ является квазигидродинамический подход с использованием многочастичных электронно-ионных токов и феноменологически заданных частот столкновений ввиду отсутствия необходимости учета точных пространственно-временных перемещений частиц [1].

Результаты анализа взаимодействия ЭМВ с УВЗ и его экспериментального исследования представлены во многих работах. В статье [2] выведен тензор диэлектрической проницаемости анизотропной среды над залежью в режиме гармонических сигналов. Обнаружение углеводородов осуществляется с помощью радиоволновых измерительных комплексов [3] по изменению поверхностного импеданса среды над залежами [4, 5].

Точность определения границ УВЗ может быть улучшена на основе исследования сложных ионных соединений полупроводникового характера, образующихся над углеводородами [6], используя методы резонансного зондирования [7]. Результаты исследований в ближней зоне используются для обнаружения неоднородных сред [8], методы электрорезонансного зондирования [9] широко применяются на практике. Для реализации новых методов георазведки представляет интерес анализ процесса взаимодействия радиоимпульсных ЭМВ с АС, образующимися над залежами и скоплениями углеводородов. В работе [10] проведен анализ поверхностного импеданса среды над УВЗ с учетом влияния всех ниже расположенных слоев на верхний слой.

Основой многих методов георазведки углеводородов могут стать результаты исследования затухания радиоимпульсных сигналов в среде над залежью [11]. Способ поиска УВЗ [12] позволяет обнаруживать месторождения нефти и газа по измерениям величины напряженности электрического поля отраженных радиоимпульсных сигналов на глубинах до 200 м. Особенности методов и устройств поиска УВЗ приведены в работах [13–18]. Целью настоящей работы является качественное повышение уровня достоверности поиска и идентификации УВЗ обоснованием выбора характеристик ЭМВ при использовании радиоимпульсных сигналов, позволяющих измерять величины напряженности электрического поля отраженных сигналов на глубинах до 500 м.

В данной работе исследуется этап, который включает в себя определение границ АС над углеводородами по воздействию зондирующего радиоимпульсного сигнала на исследуемый геопрофиль. Он основывается на результатах определения коэффициента отражения для ЭМВ с вертикальной и горизонтальной поляризациями и коэффициента эллиптичности ЭМВ с правой и левой круговой поляризациями. Модификация импульсного метода с применением модуляции основана на определении резонансных частот по разработанной методике, что повысит уровень определения границ залежи. С целью достижения однозначного решения поставленных задач на практике при поиске УВЗ используют комплексирование методов. Новизна исследований, приведенных в данной статье заключается в том, что полученные результаты способствуют определению анизотропных сред по измерению отличий сигналов на основе полученных величин отраженных сигналов. Это позволит повысить производительность геологоразведочных работ.

Теоретическое обоснование взаимодействия АС над УВЗ с радиоимпульсными сигналами.

Качественное повышение уровня достоверности поиска и идентификации углеводородов достигается применением оптимальных режимов зондирования ЭМВ при взаимодействии импульсных сигналов со средой над УВЗ. Рассмотрим процесс взаимодействия ЭМВ с УВЗ в режиме импульсного сигнала вида

$$S(f) = \frac{U \cdot \tau_u}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0) \cdot \tau_u}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0) \cdot \tau_u}{2}} + \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0) \cdot \tau_u}{2}}{\frac{(\omega + \omega_0) \cdot \tau_u}{2}}, \quad (1)$$

где $\frac{U \cdot \tau_u}{2} = 1$ – амплитуда, τ_u – длительность радиоимпульса;

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ – частота;

ω_0 – несущая частота;

Процесс взаимодействия ЭМВ с локальным включением на трассе распространения радиоволн можно представить в виде режима наклонного падения плоской волны с вертикальной поляризацией в среде с параметрами ϵ_0 , μ_0 , δ_0 на безграничную поверхность с анизотропным импедансом. Данная ЭМВ возбуждается с помощью переносного передатчика, перемещаемого вдоль исследуемого профиля.

Компоненты тензора диэлектрической проницаемости среды над УВЗ имеют вид [13]:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \epsilon_r \cdot F \left(1 + \frac{n\Omega_1}{w}\right) + \sum_{i=1}^2 \left\{ \begin{aligned} &\frac{F \cdot w_{ni}^2}{w} \cdot \frac{(w + n\Omega_1) \cdot [w_{\Gamma i}^2 - (w + n\Omega_1)^2 - v_i^2]}{[v_i^2 + w_{\Gamma i}^2 - (w + n\Omega_1)^2]^2 + 4(w + n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} - \\ &- jF \left[\frac{w_{ni}^2}{w} \cdot v_i \cdot \frac{(w + n\Omega_1)^2 + v_i^2 + w_{\Gamma i}^2}{[v_i^2 + w_{\Gamma i}^2 - (w + n\Omega_1)^2]^2 + 4(w + n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} + \frac{\delta_r F}{w\epsilon_0} \right] \end{aligned} \right\}, \\ \dot{\epsilon}_2 &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \begin{aligned} &\frac{w_{ni}^2}{w} \cdot F \cdot w_{\Gamma i} \cdot \frac{v_i^2 + w_{\Gamma i}^2 - (w + n\Omega_1)^2}{[v_i^2 + w_{\Gamma i}^2 - (w + n\Omega_1)^2]^2 + 4(w + n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} - \\ &- 2j \frac{w_{ni}^2}{w} \cdot F \cdot w_{\Gamma i} \cdot v_i \cdot \frac{w + n\Omega_1}{[v_i^2 + w_{\Gamma i}^2 - (w + n\Omega_1)^2]^2 + 4(w + n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} \end{aligned} \right\}, \\ \dot{\epsilon}_3 &= \sum_{i=1}^2 \left\{ F \left(1 + \frac{n\Omega_1}{w}\right) \cdot \left[\epsilon_r - \frac{w_{ni}^2}{w} \cdot \frac{1}{(w + n\Omega_1)^2 + v_i^2} \right] - j \left[\frac{w_{ni}^2}{w} \cdot F \cdot v_i \cdot \frac{1}{(w + n\Omega_1)^2 + v_i^2} + \frac{\delta_2 F}{w\epsilon_0} \right] \right\}. \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Здесь $F = \frac{\tau}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi \cdot n \cdot F_1 \cdot \tau)}{\pi \cdot n \cdot F_1 \cdot \tau}$,

T , F_1 , n – период, частота импульса и номер гармоники, $\Omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot F_1$,

$i = 1$ для электронов, $i = 2$ для ионов;
 w_{Gi} – гиротропная частота,

$$w_{Gi} = \frac{q_i \mu_0 H_0}{m_i};$$

$w_{ni} = q_i \left(\frac{N_i}{m_i \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}}$ – плазменная частота,

δ_r – удельная проводимость среды.

Представляет интерес анализ частотных характеристик комбинационных составляющих

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_R(\omega) &= \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 = \text{Re} \epsilon_R + j \text{Im} \epsilon_R \\ \dot{\epsilon}_L(\omega) &= \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2 = \text{Re} \epsilon_L + j \text{Im} \epsilon_L. \end{aligned} \tag{3}$$

В выражениях (3) присутствуют элементы матрицы:

$$\dot{\epsilon} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1 & -j\dot{\epsilon}_2 & 0 \\ j\dot{\epsilon}_2 & \dot{\epsilon}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_3 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Информация о свойствах АС заложена в компонентах тензора (4) $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3$, подлежащих исследованию в различных режимах взаимодействия среды с ЭМВ. Расчет компонентов тензоров диэлектрической проницаемости осуществлен на основании экспериментально полученных параметров среды над залежами углеводородов [2]: удельная электрическая проводимость $\delta_r = 10^{-5}$ См/м; концентрация частиц $N_e = N_n = (10^{15} - 10^{17}) \text{ м}^{-3}$; частота столкновения частиц $\nu = 2 \cdot \pi \cdot 10^9$ рад / с. Значение n выбрано равным 5. Диэлектрическая проницаемость среды исследовалась в диапазоне от 1 до 25. Методика исследований заключается в облучении исследуемого профиля электромагнитной волной на фиксированной частоте, приеме отраженного сигнала. Измеряют напряженность электрического поля отраженного сигнала в точках измерения исследуемого профиля и по аномальным значениям напряженности электрического поля отраженного сигнала определяют границу углеводородной залежи.

Результаты исследований. В данной работе были проведены экспериментальные исследования месторождений Могилевской области на основе определения резонансных частот взаимодействия, определенных по выражениям (2). На рисунке 1 приведено изменение коэффициента отражения для вертикальной (93 МГц) и горизонтальной поляризации (115 МГц) ЭМВ.

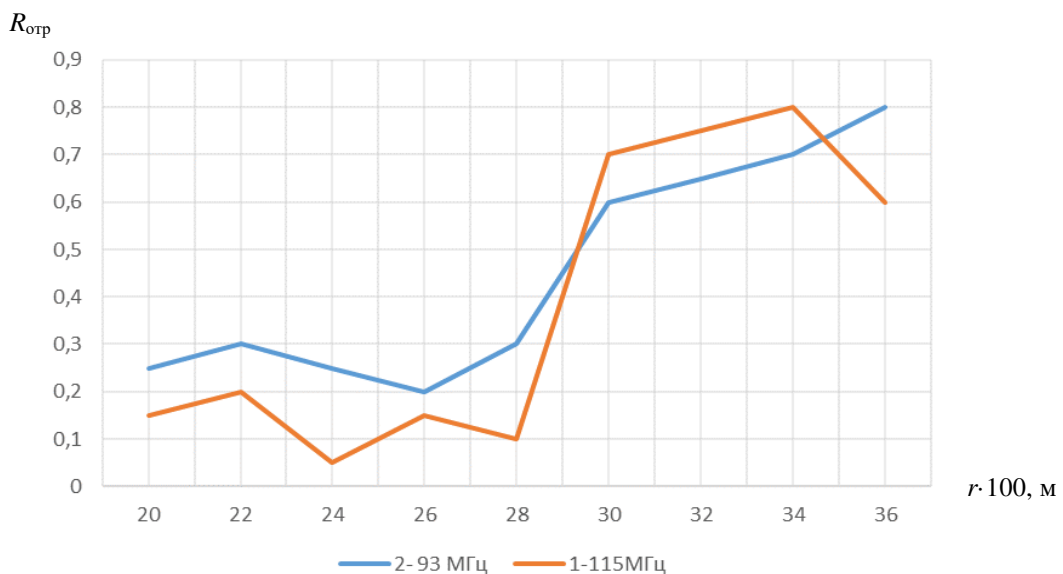


Рисунок 1. – Экспериментальная зависимость коэффициента отражения от расстояния вдоль геопрофиля на частотах 93 и 115 МГц

Установлено, что на границе залежи (пикет 29) происходит уменьшение коэффициента отражения.

Для анализа искажений амплитудно-временных параметров импульсного сигнала используется модуляция (рисунок 2) и дополнительное усиление в усилителе мощности. Модификация импульсного метода с применением модуляции основана на определении резонансных частот по разработанной методике, а в качестве модулирующей нужно использовать частоту в диапазоне 1–10 МГц, соответствующую электронному циклотронному резонансу, что повысит уровень однозначного определения границ залежи. Экспериментальные исследования показывают, что применение частоты 2 МГц дает наибольшую точность измерений.

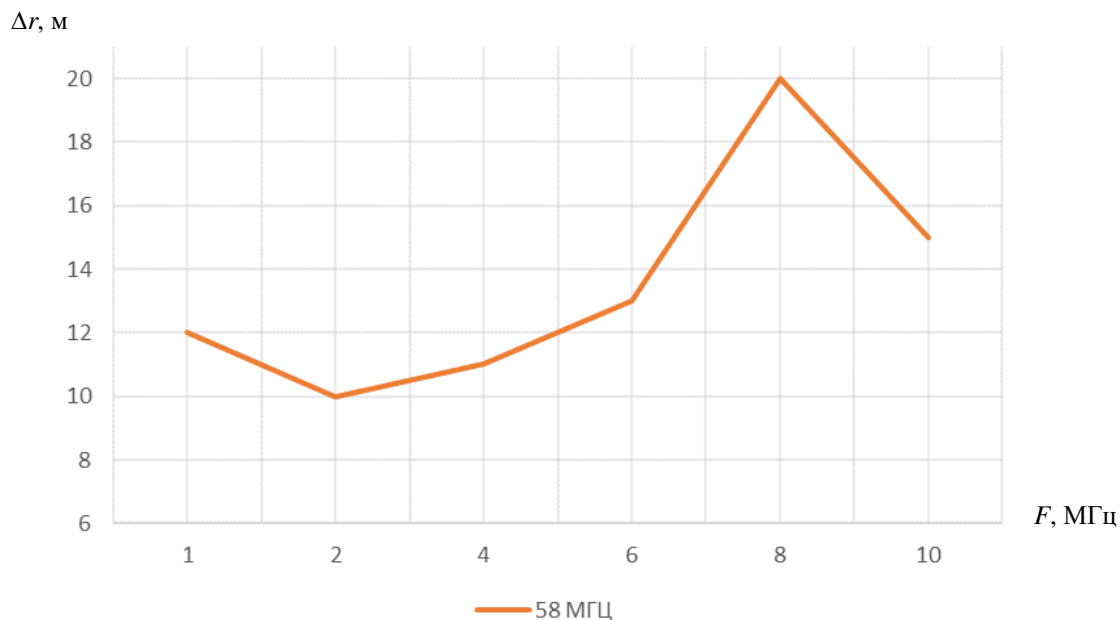


Рисунок 2. – Определение точности выделения границ в зависимости от модулирующей частоты

На рисунке 3 приведено изменение коэффициента эллиптичности для правой поляризации ЭМВ, причем на границе контура отмечено его уменьшение до величины 0,92.

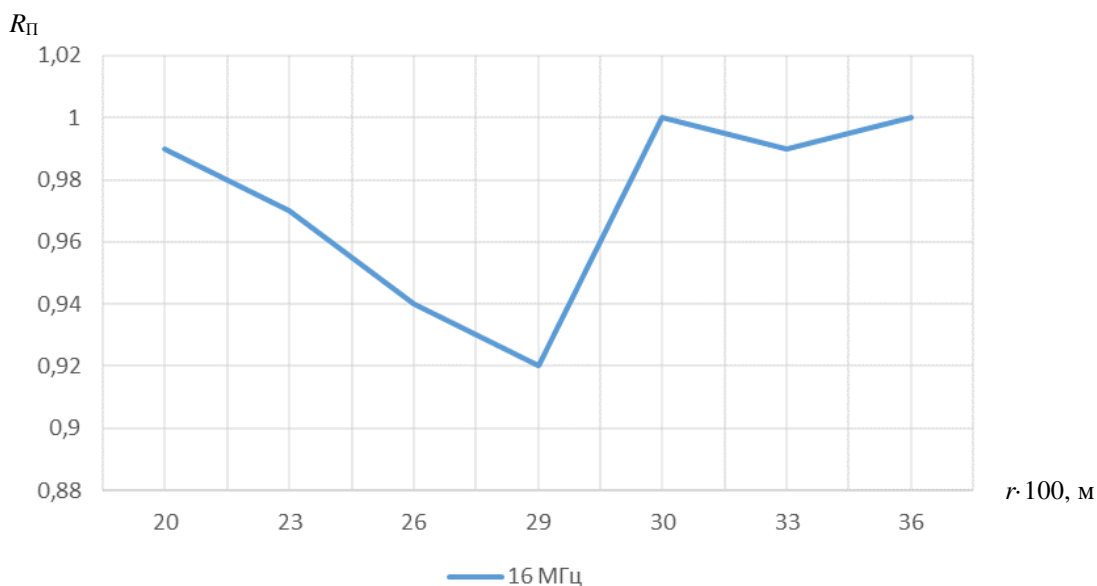


Рисунок 3. – Зависимость коэффициента эллиптичности для правой поляризации ЭМВ

На рисунке 4 приведено изменение коэффициента эллиптичности для левой поляризации ЭМВ, причем на границе контура отмечено его уменьшение до величины 0,96.

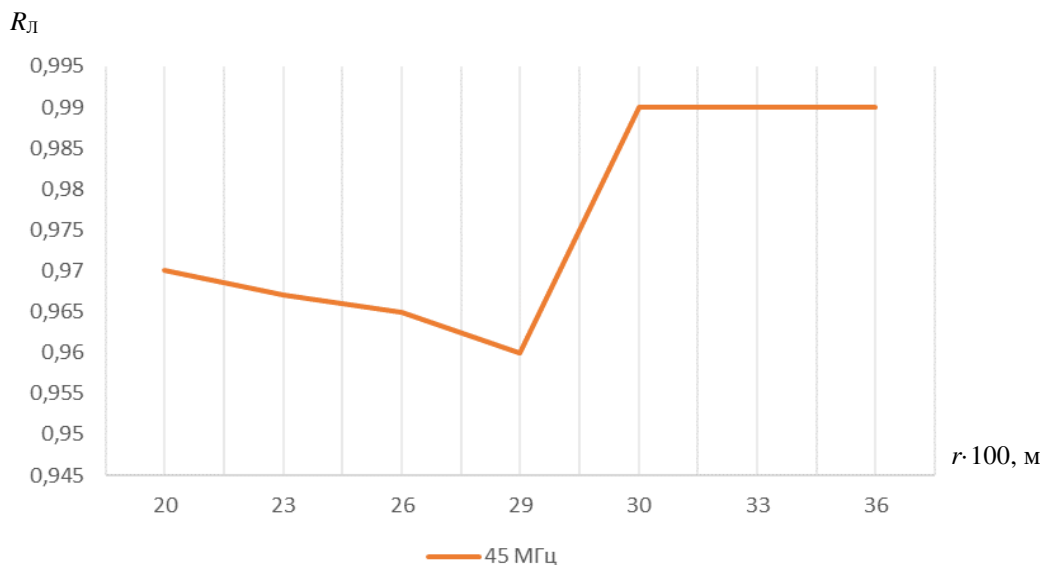


Рисунок 4. – Зависимость коэффициента эллиптичности для левой поляризации ЭМВ

Разработка и модификация методов электроразведки, а в частности, импульсных методов направлена на получение информации о физических полях, создаваемых исследуемой средой. Данная задача усложняется большой глубиной залегания изучаемых сред и отсутствием корректной геофизической информации. Еще одним из недостатков данного вида методов является многозначность полученных в ходе полевых работ данных, это связано в первую очередь с природой регистрации аномалий. В большинстве случаев измерения проводятся путем определения значений косвенных признаков наличия исследуемой среды.

С целью достижения однозначного решения поставленных задач на практике при поиске УВЗ используют комплексирование методов (комплекс геофизических методов) (рисунок 5). Выбор конкретного комплекса в первую очередь зависит от поставленных конкретных задач и необходимой точности измерений.

При выборе комплекса геофизических методов необходимо придерживаться определенных условий:

- следует опираться на разработанную в ходе решения инженерно-геологических задач физико-геологическую модель исследуемой среды. Физико-геологическая модель – это система абстрактных возмущающих сред вызываемых ими аномальных эффектов, аппроксимирующих геологический объект и с необходимой для моделирования детальностью отражающих его структуру, размеры, форму, петрофизические свойства и соответствующее им объемное распределение физических полей. На основе данной модели выбирается основной метод ведения поиска, данный метод должен быть относительно дешевым, мобильным, высокопроизводительным.

- на основе анализа поставленных задач оцениваются производительность и информативность каждого метода в отдельности и в комбинации, а также экономические затраты с целью выбора наиболее эффективного распределения средств и достижения высокого результата исследований.

В настоящее время почти все месторождения УВЗ, залегающие относительно на небольших глубинах, являются разработанными и введенными в эксплуатацию, поэтому комплексирование методов, направленных на определении границ, с глубинными методами являются экономически выгодными.

Применение импульсных сигналов в сочетании с гармоническими позволило бы повысить объективность и объемность полученных в ходе геофизических съемок результатов, что позволит уменьшить стоимость и увеличить производительность работ, а также уменьшить время интерпретации полученных данных. Преимуществами такого метода по сравнению с существующими аналогами являются:

- повышение точности определения границ залежи за счет получения отраженного импульсного сигнала от залежи;
- возможность вариации параметров импульсного сигнала, способствующей однозначности определения границ залежей;
- повышения разрешающей способности определения местоположения залежей за счет использования импульсного сигнала;
- повышение производительности работ (сокращение времени) поиска углеводородов;
- выбор конкретных частот при ведении разведки.

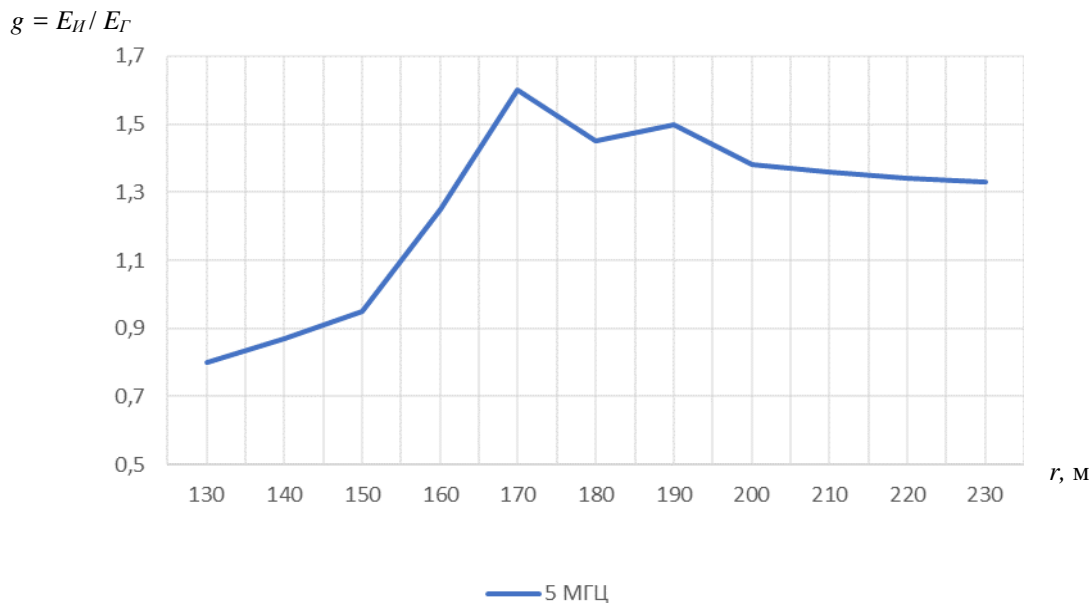


Рисунок 5. – Метод альтернативных частот с использованием гармонического сигнала

Если в качестве основного метода при проведении геофизической съемки использовать метод альтернативных частот с применением гармонического сигнала, а в качестве дополнительного выбрать импульсный метод поиска и оконтуривания УВЗ, то полученные данные будут отображать информацию о исследуемой среде с уточнением глубины залегания.

Заключение. Проведены экспериментальные исследования взаимодействия анизотропного слоя над углеводородами с ЭМВ в режиме радиоимпульсных сигналов. Результаты исследования могут быть использованы в поисковой геофизике. При этом следует отметить:

- резонансные изменения коэффициента отражения на частотах 93 МГц для вертикальной и 115 МГц для горизонтальной поляризации ЭМВ в режиме радиоимпульсных сигналов могут быть использованы для определения границ залежей;

- исследования могут быть применены для определения характеристик среды над залежью при распространении ЭМВ с правой и левой круговыми поляризациями, что повышает информативность методов оконтуривания и выделения УВЗ;

- качестве модулирующей нужно использовать частоту в диапазоне 1–10 МГц, соответствующей электронному циклотронному резонансу, что повысит уровень однозначного определения границ залежи;

- комплексирование методов, направленных на определении УВЗ, с глубинными методами приведет к экономическому выигрышу при повышении точности определения границ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гололобов, Д.В. Взаимодействие электромагнитных волн и углеводородных залежей / Д.В. Гололобов. – Минск : Бестпринт, 2009. – 185 с.
2. Москвичёв, В.Н. Исследование взаимодействия электромагнитных волн с углеводородной залежью / В.Н. Москвичёв // Радиотехника и электроника. – Минск : Выш. шк., 1989. – Вып. 18. – С. 91–96.
3. Поиск и разведка углеводородов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.companypetroservice.com>. – Дата доступа: 10.01.2017.
4. Гололобов, Д.В. Поверхностный импеданс среды над углеводородными залежами в режиме частотно-модулированных сигналов / Д.В. Гололобов, С.В. Калинин, В.Ф. Янушкевич // Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.-тэхн. навук. – 2010. – № 4. – С. 98–101.
5. Гололобов, Д.В. Импедансные граничные условия анизотропной среды для амплитудно-модулированного сигнала / Д.В. Гололобов, С.В. Калинин, В.Ф. Янушкевич // Докл. БГУИР. – Минск, 2010. – № 6 (52). – С. 13–17.
6. Asch, T. Mapping and monitoring electrical resistivity with surface and surface electrode arrays / T. Asch, Morrison // Geophysics. – 1989. – P. 235–244.
7. Moskvichew, V.N. Interaction of electromagnetic waves (EMW) with anisotropic inclusion in communication line / V.N. Moskvichew // 9th Microw. Conf. NICON – 91, Rydzyna, May 20–22, 1991. – Vol. 1. – P. 240–244.

8. Gaikovich, K.P. Methods and Applications of Near-Field Subsurface Diagnostics / K.P. Gaikovich // 20th International Conference on Transparent Optical Networks (ICTON), Bucharest, Romania, 18 Nov. 2018. – V. 1–4.
9. Levashov, S.P. Electric-resonance sounding method and its application for, geological-geophysical and engineering-geological investigations [Electric resource] / S.P. Levashov // 66nd EAGE Conference and Technical Exhibition, Paris, France, 7–10 June 2003. – 1 CD-ROM Abstracts volume.
10. Adamovskiy, E. Simulation of electromagnetic waves interaction with hydrocarbon deposits / E. Adamovskiy, V. Yanushkevich // 8 Junior researchers conference European and national dimension in research : in 3 p. / PSU. – Novopolotsk, 2016. – P. 3 : Technology. – P. 179–183.
11. Взаимодействие электромагнитных волн с анизотропными средами над углеводородными залежами в режиме радиоимпульсных сигналов / В.Ф. Янушкевич [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 45–50.
12. Иванова, К.И. Способ геоэлектроразведки углеводородной залежи с использованием радиоимпульсных сигналов. Фундаментальные и прикладные исследования в современном мире / К.И. Иванова, В.Ф. Янушкевич // Материалы XV Международной НТК, СПб., 4 окт. 2016 г. – СПб., 2016. – Т. 1. – С. 107–111.
13. Гололобов, Д.В. Радиотехнические системы поиска и идентификации углеводородных залежей в режиме двухчастотного взаимодействия / Д.В. Гололобов, В.Ф. Янушкевич // Весці НАН Беларусі. Серия физ.-техн. навук. – 2002. – № 1. – С. 49–54.
14. Гололобов, Д.В. Поиск месторождений углеводородных залежей радиоволновым методом / Д.В. Гололобов, В.Ф. Янушкевич // Приборы. Справочный журн. – М. : Научтехмаш, 1999. – № 10. – С. 25–27.
15. Янушкевич, В.Ф. Моделирование двухчастотного взаимодействия электромагнитных волн с углеводородной залежью / В.Ф. Янушкевич // Приборы. Справочный журн. – 1999. – № 10. – С. 27–29.
16. Гололобов, Д.В. Фазовые методы идентификации углеводородных залежей / Д.В. Гололобов, В.Ф. Янушкевич, А.О. Рак // Инженерный вестник. – 2005. – № 1 (20). – С. 16–18.
17. Янушкевич, В.Ф. Электромагнитные методы поиска и идентификации углеводородных залежей / В.Ф. Янушкевич. – Новополоцк, ПГУ, 2017. – 232 с.
18. Янушкевич, В.Ф. Методы и устройства обнаружения электрически неоднородных сред / В.Ф. Янушкевич, Е.Ю. Заяц // LAP LAMBERT Academic Publishing RU. – Beau Bassin, Mauritius, 2017. – 141 с.

Поступила 12.02.2019

DISTRIBUTION OF RADIO IMPULSE SIGNALS IN ANISOTROPIC ENVIRONMENTS ON HYDROCARBONS

V. YANUSHKEVICH, E. ZAYATS

The article presents the results of experimental interaction of electromagnetic waves in the mode of radio pulse signals with the medium above hydrocarbon deposits. The resonant frequencies of a change in the reflection coefficient from an anisotropic medium over a deposit in the mode of radio pulse signals for vertical and horizontal polarizations of electromagnetic waves are theoretically determined. Experimental confirmation of the resonant behavior of the reflection coefficient at 93 MHz for vertical and 115 MHz for the horizontal polarizations of electromagnetic waves in the radio pulse mode was carried out. Studies can be applied to determine the characteristics of the environment above the reservoir during the propagation of electromagnetic waves with right and left circular polarizations, which increases the informativeness of contouring methods and the allocation of hydrocarbon deposits. The values of the modulating frequency are set to increase the level of hydrocarbon deposits, unambiguous determination of the boundaries of the deposit. The complexing of methods aimed at determining, the combination of which with the deep-seated methods will lead to economic gains with an increase in the accuracy of determining the boundaries.

Keywords: radio pulse signal, anisotropic medium, hydrocarbon deposit, reflection coefficient.

УДК 537.8.029.6:621.37.029.6

НАНОСТРУКТУРНЫЕ УГЛЕРОДНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЙ В СВЧ ДИАПАЗОНЕ

О.В. ТАНАНА

(Полоцкий государственный университет)

Разработаны методики измерения электрофизических характеристик углеродных наноматериалов в СВЧ диапазоне. Исследованные материалы превосходят все существующие и применяемые в настоящее время в радиотехнике радиопоглощающие материалы по всем электрофизическим характеристикам в несколько раз. Результаты экспериментального исследования электрофизических характеристик образцов УНМ позволяют рекомендовать их для практического применения в сверхвысокочастотном диапазоне длин волн в качестве облегченных композиционных материалов для высокоэффективных электромагнитных экранов, проводящих и отражающих электромагнитное излучение структур в устройствах обработки и передачи СВЧ сигналов и других приложениях.

Ключевые слова: сверхвысокие частоты (СВЧ), электромагнитные волны, поглощение электромагнитных волн, наноуглеродные материалы.

Введение. Возрастающий круг прикладных возможностей углеродных наноматериалов (УНМ) определяет актуальность системной характеристики их электродинамических свойств на основе корректных методик и схем измерений, что позволит разрабатывать физико-технологические методы получения материала с заданными электродинамическими параметрами и устанавливать новые закономерности целенаправленного управления этими параметрами в реальной продукции [1–7]. Прикладные возможности нанокompозитов на основе УНМ в значительной степени обусловлены тем, что их материальные характеристики могут кардинально отличаться от материальных характеристик составляющих их компонент. УНМ и композиты на их основе могут использоваться при создании пассивных и активных элементов сверхвысокочастотной (СВЧ) техники (согласующие и поглощающие системы, фильтры, волноведущие тракты, направленные ответвители и т.д.), для формирования элементов различных гибридных систем, например гетеромагнитных микро- и наносистем.

Параметры характеристики УНМ. В настоящее время все основные исследования направлены на решение центральной проблемы электродинамики композитов – определение параметров материала через структурные факторы и материальные параметры компонент. Для изучения взаимодействия УНМ с электромагнитным излучением в широком диапазоне частот, в частности эффективности экранирования, а также в связи с актуальностью освоения терагерцового диапазона и развитием наноразмерных технологий, востребованным становится характеристика создаваемых УНМ. К основным электрофизическим параметрам, характеризующим радиоматериалы с точки зрения практического использования их в СВЧ-диапазоне, относятся коэффициент отражения $\Gamma(\omega)$ (reflection factor) и ослабление $A(\omega)$ (attenuation) электромагнитной волны.

Существует также система S -параметров, которые являются элементами волновой матрицы рассеяния рассматриваемого элемента волноведущего тракта, представленного в виде четырехполюсника

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где S_{11} – комплексный коэффициент отражения входа исследуемого объекта, нагруженного на согласованную нагрузку;

S_{22} – комплексный коэффициент отражения выхода исследуемого объекта при согласовании его со стороны генератора;

S_{21} – комплексный коэффициент передачи в прямом направлении;

S_{12} – комплексный коэффициент передачи в обратном направлении.

Измерение S -параметров отличается от измерения амплитудных величин тем, что при измерении S -параметров должны учитываться фазочастотные характеристики измеряемого объекта. Система S -параметров используется, как правило, при расчете комплексированных СВЧ-устройств, состоящих из последовательности четырехполюсников, и позволяет прогнозировать характеристики устройства в целом. Измерение S -параметров выполняется с помощью векторных анализаторов цепей.

Методы характеристики УНМ. Исследование электродинамических характеристик УНМ основано на решении электродинамических задач и выполнении измерений в СВЧ-диапазоне. При измерении (характеризации) электродинамических характеристик УНМ использовались волноводный и антенный методы.

Волноводный метод характеристики ослабления УНМ. Волноводный метод позволяет измерять ослабление электромагнитной волны $A(\omega)$ УНМ. В основу построения схемы измерения положен принцип раздельного детектирования сигналов падающей и прошедшей волн в волноведущем тракте [8]. Измеряется мощность волны, падающей на исследуемый УНМ, и мощность волны, прошедшей через исследуемый УНМ. Отношение прошедшей и падающей мощности определяет ослабление исследуемого УНМ

$$A(\omega) = 10 \lg \frac{P_{\text{прош}}}{P_{\text{пад}}} . \quad (2)$$

Погрешность определения ослабления при калибровке в рабочем диапазоне частот измерителя КСВН и ослабления в децибелах не превышает величины, определяемой по формуле

$$\Delta A = \pm(0,05 A_x + 0,5) , \quad (3)$$

где A_x – измеряемое ослабление, дБ.

Погрешность измерения ослабления при калибровке на фиксированной частоте измерителя КСВН и ослабления в децибелах не превышает величины, определяемой по формуле

$$\Delta A = \pm(0,05 A_x + 0,35) . \quad (4)$$

Для измерения ослабления $A(\omega)$ порошковых образцов УНМ используется волноводная измерительная секция, в которую помещается измеряемый УНМ [9, 10]. Входное и выходное сечения секции закрывались плоскими слоями фторопласта толщиной 0,1 мм. Выбор фторопласта в качестве материала обусловлен его малыми потерями (ослабление $\leq 0,1 \dots 0,2$ дБ). Исследуемый УНМ уплотнялся на специально созданном стенде. Уплотнение необходимо для исключения погрешностей, связанных с флуктуациями плотности УНМ внутри образца и при переходе от одного образца к другому. После этого измерительная секция устанавливается между волноводными фланцами измерительной системы перпендикулярно оси волновода. Такое расположение измерительной секции соответствует максимальному ослаблению УНМ.

Измерение ослабления исследуемого УНМ производится с использованием согласованной нагрузки. Это позволяет исключить неопределенность определения ослабления для УНМ с малым ослаблением, которая появляется в случае кратности толщины измеряемого УНМ четверти длины волны электромагнитного излучения в наноматериале (четвертьволновым поглотителям резонансного типа свойственно явление самопоглощения электромагнитных волн). При измерении ослабления пленочных образцов УНМ образец плотно зажимался между фланцами волноведущей системы нормально к оси волновода, что соответствует наиболее «жестким условиям» (максимальному ослаблению) в случае использования плоскопараллельных образцов.

Антенный метод характеристики коэффициента отражения УНМ. Антенный метод позволяет измерять коэффициент отражения электромагнитной волны $\Gamma(\omega)$ УНМ, распределенных на большой площади. Этот метод, как правило, используется при измерении коэффициента отражения радиопоглощающих покрытий (РПП). В основу построения схемы измерения положен принцип раздельного детектирования сигналов падающей и отраженной волн в волноведущем тракте. Измеряется мощность волны, падающей на исследуемый образец, и мощность волны, отраженной от исследуемого образца. Отношение отраженной и падающей мощности определяет коэффициент отражения исследуемого образца:

$$\Gamma(\omega) = 10 \lg \frac{P_{\text{отр}}}{P_{\text{пад}}} . \quad (5)$$

Результаты экспериментальных исследований УНМ. Порошки УНМ. Исследуемый материал, наноструктурированный углерод марок НСУ-4 и НСУ-5 [11], представляет собой совокупность образований из углерода, состоящих из углеродных нановолокон (УНВ) диаметром 50...80 нм (около 50%), аморфного углерода (около 30%), многостенных углеродных нанотрубок (УНТ) (около 15%) и соединений металла (3...5%).

Измерения электродинамических характеристик порошков УНМ проводились в диапазоне частот 26...78 ГГц. На рисунке 1 приведены характеристики коэффициента отражения различных фракций исследуемого УНМ.

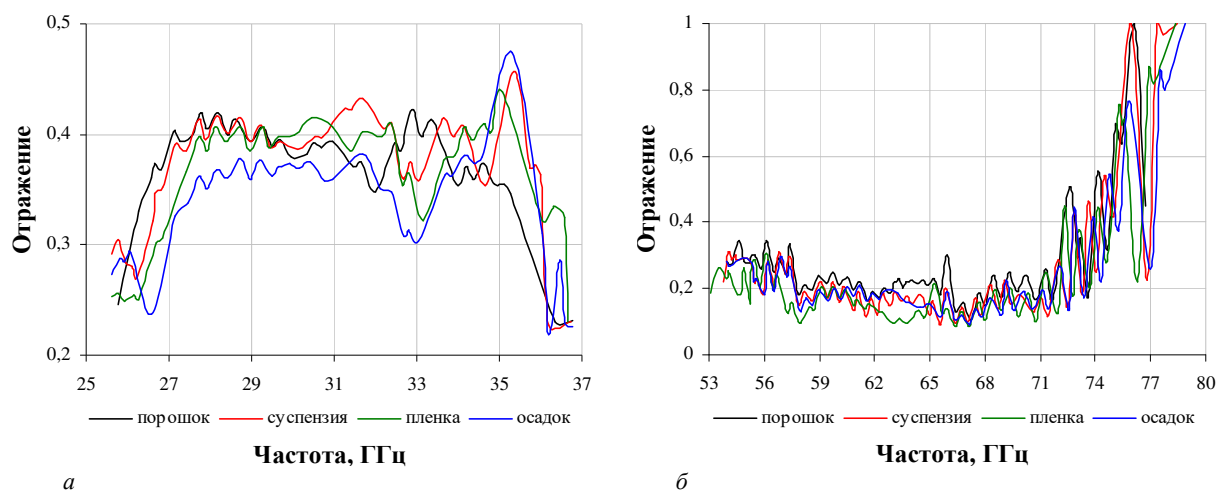


Рисунок 1. – Коэффициент отражения различных фракций исследуемого УНМ в частотных диапазонах 26–37 ГГц (а) и 53–79 ГГц (б)

Образцы УНМ (порошки, суспензия, пленка, осадок) характеризуются стабильно высоким ослаблением от 45 до 60 дБ в миллиметровом диапазоне длин волн [12]. Результаты этих исследований позволили, во-первых, получить хорошую воспроизводимость УНМ по электродинамическим характеристикам, во-вторых, создать в диапазонах частот 8–12 ГГц и 26–37,5 ГГц однослойные радиопоглощающие покрытия с коэффициентом поглощения –27...–33 дБ, многослойные РПП с коэффициентом поглощения –30...–34 дБ (рисунок 2), тканые радиопоглощающие материалы (РПМ) (рисунок 3) с коэффициентом поглощения –23...–26 дБ. Толщина покрытия в диапазоне 8...12 ГГц составляет 3 мм, в диапазоне 26...37,5 ГГц – 1 мм. Вес – 4,2 кг/м².

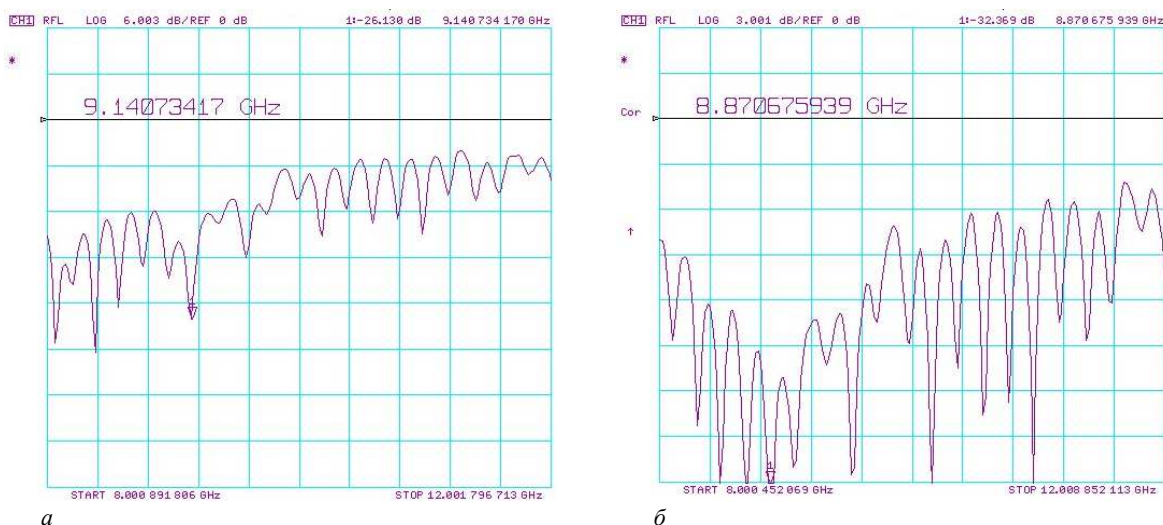
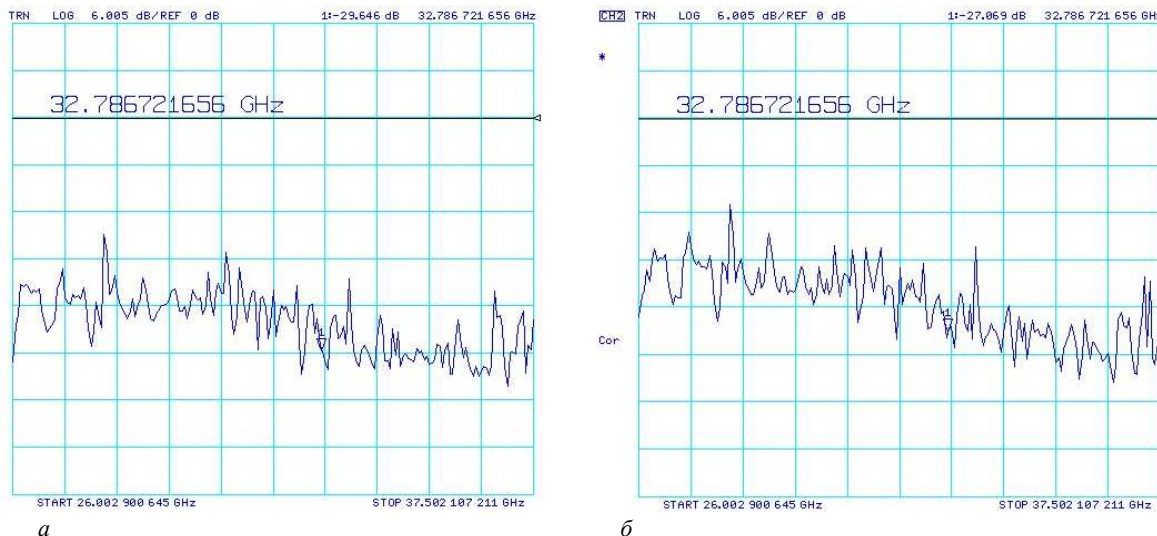


Рисунок 2. – Коэффициент отражения РПП в диапазоне частот 8...12 ГГц: а – однослойное РПП; б – многослойное РПП

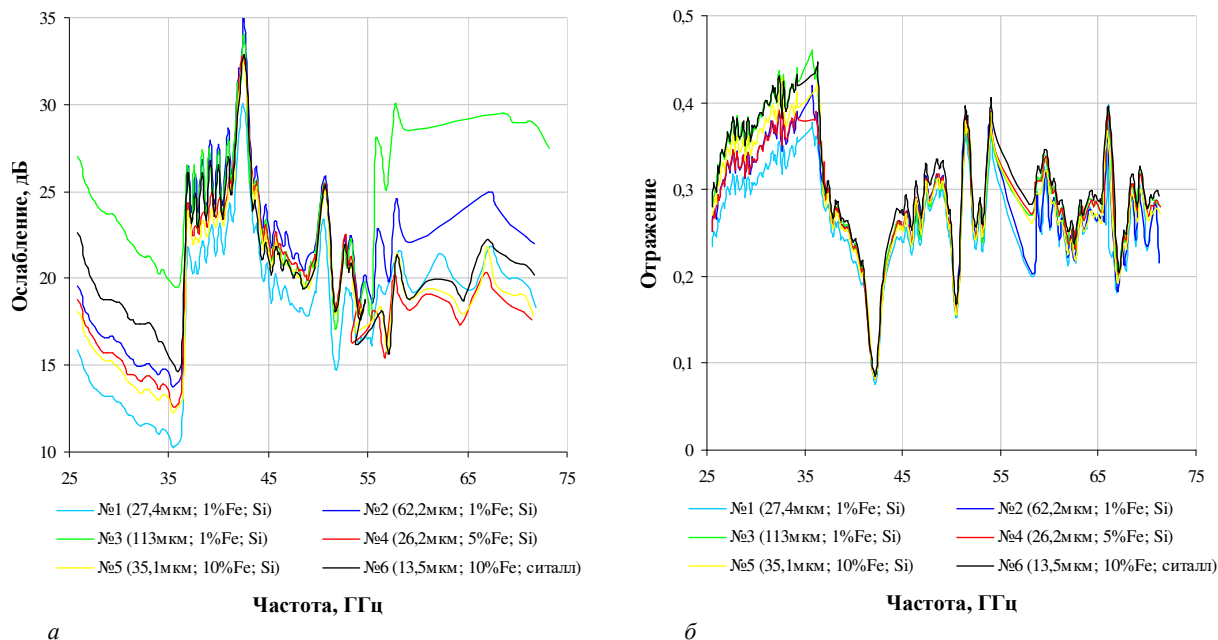


**Рисунок 3. – Ослабление тканых РПМ в диапазоне частот 26...37,5 ГГц:
а – односторонний РПМ; б – двухсторонний РПМ**

По электродинамическим, физико-механическим и эксплуатационным параметрам, разработанные РПП и РПМ могут быть отнесены к новому поколению РПП на основе УНМ.

Массивы магнитно-функционализированных УНТ (МФУНТ). Исследуемый материал, синтезированный в БГУИР, представляет собой периодические вертикально ориентированные массивы УНТ. Для исследований использовали образцы массивов вертикально ориентированных МФУНТ. Массивы вертикально ориентированных плотно упакованных УНТ формировались на Si или ситалловых подложках. Высота массивов составляла от 2 до 100 мкм.

Измерения электродинамических характеристик массивов МФУНТ проводились в диапазоне частот 26...78 ГГц [13]. Результаты измерений представлены на рисунке 4.



**Рисунок 4. – Характеристики массивов МФУНТ в диапазоне частот 26...78 ГГц
(различное содержание ферроцена, высоты массивов и материала подложки):
а – ослабление; б – коэффициент отражения**

Массивы МФУНТ характеризуются высоким значением коэффициента отражения (0,2...0,5) и обладают высокой эффективностью поглощения электромагнитных волн в 6 мм диапазоне длин волн (до

30 дБ). Анализ зависимостей коэффициента отражения от частоты для массивов МФУНТ позволяет сделать предположение об изменении условий распространения электромагнитной волны на границе раздела, поскольку массивы представляют собой «пористый» материал с большой удельной площадью поверхности, как самих трубок, так и наполнителя, и большой удельной площадью границ раздела между ними. Это может означать, что в таких массивах может присутствовать механизм многократного отражения электромагнитных волн.

Совместно с коллегами из лаборатории интегрированных микро- и наносистем БГУИР была создана полимерная матрица с массивами скрайбированных МФУНТ для опытных образцов УНТ СВЧ-устройств, позволяющая реализовать механическую прочность и климатическую устойчивость данных массивов при практическом использовании в СВЧ технике. В качестве полимера для матрицы носителя был выбран полиэтилен высокого давления в силу своей технологичности и распространенности. Основная идея заключается в перемешивании мелкодисперсного полиэтилена высокого давления (с размерами гранул, сопоставимыми с линейными размерами УНТ) с порошком из УНТ и дальнейшим сплавлением – прессованием полученной массы.

Изучение микроструктуры матрицы при помощи просвечивающего электронного микроскопа позволяет сделать заключение об относительной равномерности УНТ в полимере, что подтверждается резонансными методами измерения электродинамических параметров синтезированного композита. Измерение комплексной диэлектрической проницаемости резонансным методом было проведено для 10 экспериментальных образцов. Полученные результаты показывают хорошую воспроизводимость параметров, что является существенным фактором для разрабатываемой технологии и продукции. На рисунке 5 представлены графики измерения коэффициента отражения образцов скрайбированных МФУНТ для различных величин процентного содержания магнитного наполнителя.

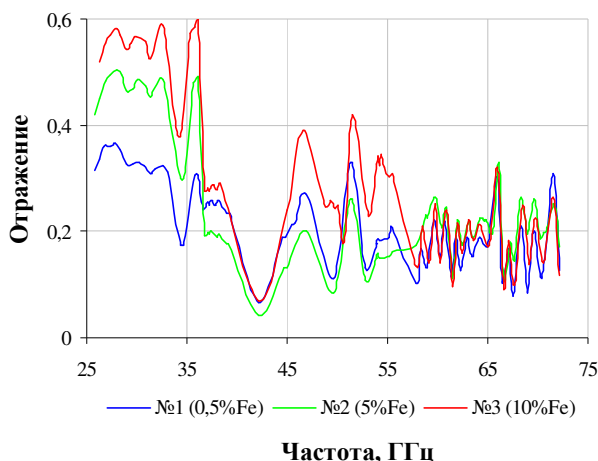


Рисунок 5. – Коэффициент отражения образцов скрайбированных МФУНТ для различных величин процентного содержания магнитного наполнителя

Особенности технологии создания массивов МФУНТ позволяют осуществлять их направленный рост, формировать структуры с заданной геометрией на различных подложках, изменять электрические и магнитные свойства и могут быть перспективны для разработки различных гибридных систем СВЧ-техники.

Создание РПМ на основе УНМ. Выполнены исследования по созданию тканых РПМ с использованием наноструктурированного углерода марок НСУ-4 и НСУ-5 [11]. На первом этапе был получен УНМ с ослаблением не менее 40 дБ в диапазоне 8...12 ГГц. По результатам характеристики исходного материала (методы характеристики УНМ изложены выше) были решены задачи его воспроизводимости и получения требуемых параметров.

На втором этапе создавались специальные образцы в виде плоских шайб для определения электрофизических свойств РПМ. На боковые поверхности шайб наносились металлизированные слои и с помощью измерителя (анализатора) диэлектрических свойств материалов Agilent E4991A определялись значения действительной, мнимой и полной (по модулю) составляющих относительной диэлектрической проницаемости, созданных композиций в полосе частот от 1 до 3 ГГц. Измеренные значения дей-

ствительной и мнимой составляющих относительной диэлектрической проницаемости РПМ приведены на рисунке 6.

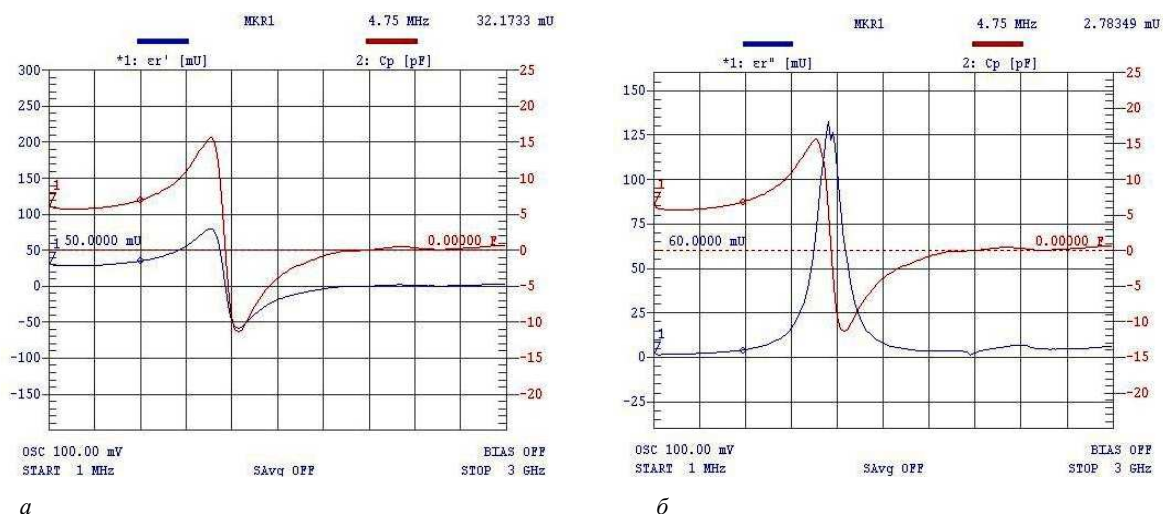


Рисунок 6. – Действительная ϵ' (а) и мнимая ϵ'' (б) составляющие относительной диэлектрической проницаемости РПМ

На третьем этапе по измеренным значениям электрофизических свойств ($\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$) созданных РПМ были рассчитаны коэффициенты отражения $\Gamma(\omega)$ и ослабление $A(\omega)$ образцов РПМ с заданной толщиной d :

$$\Gamma(\omega) = \frac{\Gamma_{12} + \Gamma_{23}e^{-j2b}}{1 + \Gamma_{12}\Gamma_{23}e^{-j2b}}, \quad A(\omega) = \frac{(1 - \Gamma_{12}^2)e^{-jb}}{1 - \Gamma_{12}^2e^{-j2b}}, \quad (6)$$

где Γ_{12} – коэффициент отражения от первой границы воздух-образец;
 Γ_{23} – коэффициент отражения от второй границы образец-воздух;

$$b = \frac{2\pi d}{\lambda} \epsilon^2, \quad \lambda - \text{длина электромагнитной волны.}$$

На четвертом, заключительном, этапе были измерены коэффициенты отражения $\Gamma(\omega)$ и ослабление $A(\omega)$ образцов тканых РПМ в диапазоне частот 8...12 ГГц. Использовался векторный анализатор цепей Agilent 8722 ET: при измерении коэффициента отражения использовался режим измерения S_{11} параметра, при измерении ослабления – режим измерения S_{21} параметра.

В результате проведенных исследований установлено, что ослабление и диэлектрическая проницаемость РПМ растут с увеличением процентного содержания УНМ в связующем. Получено наибольшее ослабление в пределах от -25 до -27 дБ в диапазоне частот 8...12 ГГц, что соответствует поглощению электромагнитной энергии 98%. Значения коэффициента отражения $\Gamma(\omega)$ и ослабления $A(\omega)$, полученные расчетным путем, совпали с экспериментально полученными с погрешностью не более чем 5%. Представленные результаты являются убедительным подтверждением правильности предложенного системного подхода при создании конечного продукта.

Заключение. По результатам выполненных исследований можно сделать следующие выводы:

- выполнена систематизация методов характеристики УНМ в СВЧ диапазоне;
- разработан резонансный метод характеристики диэлектрической проницаемости УНМ на основе высокочастотных широкодиапазонных резонаторов в диапазоне частот от 25,95 до 78 ГГц;
- получены воспроизводимые УНМ с заданным ослаблением $A(\omega)$, которые могут использоваться при создании пассивных и активных элементов СВЧ-техники (согласующие и поглощающие системы);
- получены воспроизводимые полимерные матрицы с массивами скрайбированных МФУНТ, с заданным ослаблением $A(\omega)$ и $\Gamma(\omega)$, которые могут использоваться при создании пассивных и активных элементов СВЧ-техники (волноведущие тракты, фильтры, направленные ответвители);

- характеристика в СВЧ-диапазоне массивов МФУНТ позволяет получать материалы с заданными электродинамическими параметрами путем формирования структуры с заданной геометрией на различных подложках с различными наполнителями для разработки гибридных систем СВЧ-техники;
- разработана методика синтеза РПП и РПМ на основе УНМ, объединяющая расчетные методы и методы характеристики УНМ и синтезируемых РПП и РПМ в СВЧ диапазоне;
- синтезированы перспективные РПП и РПМ на основе УНМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Harris, P.J.F. Carbon Nanotubes and Related Structures: New Materials for the Twenty-First Century / Peter John Frederick Harris // Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999. – 277 p.
2. Popov, V.N. Vibrational and related properties of carbon nanotubes. / V.N. Popov, P. Lambin // Carbon Nanotubes: From Basic Research to Nanotechnology. – Springer : Netherlands, 2006. – P. 69–88.
3. Елецкий, А.В. Углеродные нанотрубки / А.В. Елецкий // УФН. – 1997. – Т. 167, № 9. – С. 945–972.
4. Раков, Э.Г. Методы получения углеродных нанотрубок / Э.Г. Раков // Успехи химии. – 2000. – Т. 69, № 1. – С. 41–59.
5. Использование углеродных нанотрубок в тестовых структурах для калибровки зондов атомно-силовых микроскопов / И.И. Бобринецкий [и др.] // Углерод: фундаментальные проблемы науки, материаловедение, технология : V междунар. конф. – М., 2006. – С. 75.
6. Carbon nanotube chemical ethanol vapour growth methods for application in electronics and nanomechanics / I.I. Bobrinetskiy [et al.] // in Book of Abstracts 8th Biennial International Workshop Fullerenes and Atomic Clusters. – St. Petersburg, 2007. – P. 202.
7. Бобринецкий, И.И. Первые макеты функциональных элементов углеродной наноэлектроники / И.И. Бобринецкий, А.Н. Булатов, В.К. Неволин // Нанотехника. – 2006. – № 2 (6). – С. 9–13.
8. Альтман, Д. Устройства сверх высоких частот / Д. Альтман. – М. : Мир, 1968. – 488 с.
9. Electromagnetic wave absorption and reflection by carbon nanotube composites / V. Karpovich [et al.] // The sixth international Kharkov symposium on physics and engineering of microwaves, millimeter and submillimeter waves and workshop on terahertz technologies : Symposium Proceedings, Kharkov, June 25–30, 2007 / Institute of Radio-Physics and Electronics of NAS of Ukraine ; ed.: A. Kostenko, A. Usikov. – Kharkov, 2007. – Vol. 2. – P. 825–827.
10. Irregular-Waveguide elements coupling high-Q resonators with single-mode waveguides / G.Ya. Slepyan [et al.] // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2008. – Vol. 53, № 2. – P. 184–189.
11. Углерод наноструктурированный. Технические условия : СТБ 1873-2008. – Введ. 01.11.2008. – Минск : Госстандарт, 2008. – 12 с.
12. Радиопоглощающие свойства углеродных наноматериалов / С.А. Жданок [и др.] // Нанотехника. – 2011. – № 2. – С. 72–75.
13. Электромагнитные характеристики наноуглеродных композитных материалов в СВЧ-диапазоне / В.А. Лабунов [и др.] // Фуллерены и наноструктуры в конденсированных средах : сб. науч. ст. / НАН Беларуси, Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова. – Минск, 2011. – С. 14–22.

Поступила 28.03.2019

NANOSTRUCTURED CARBON MATERIALS FOR PRACTICAL APPLICATIONS IN MICROWAVES RANGE

O.V. TANANA

Techniques have been developed for measuring the electrophysical characteristics of carbon nanomaterials in the microwave range. The materials studied surpass all existing and used at present radio-absorbing materials in radio engineering in all electrophysical characteristics by several times. The results of an experimental study of the electrophysical characteristics of carbon nanomaterial samples make it possible to recommend them for practical use in the microwave range of wavelengths as lightweight composite materials for highly efficient electromagnetic shields, conducting and reflecting electromagnetic radiation structures in devices processing and transmitting microwave signals and other applications.

Keywords: microwaves, electromagnetic waves, electromagnetic wave absorption, nanocarbon materials.

УДК 621.371: 550.837.6

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ СИГНАЛОВ С НЕОДНОРОДНЫМИ ПРИРОДНЫМИ ОБРАЗОВАНИЯМИ

*канд. техн. наук, доц. В. Ф. ЯНУШКЕВИЧ
(Полоцкий государственный университет);
Е. Ю. ЗАЯЦ*

(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники)

Приведены результаты взаимодействия гармонического, двухчастотного, модулированного сигналов с неоднородными природными образованиями. Рассчитаны амплитудный и фазовый спектры для двухчастотного, амплитудно-модулированного, частотно-модулированного и радиоимпульсного сигналов. Установлены закономерности изменения амплитуды и уровня боковых лепестков в спектре отраженного сигнала. Даны рекомендации по применению различных режимов взаимодействия сигналов с неоднородными природными образованиями. Приведено обоснование комплексного использования методов поиска и идентификации углеводородных залежей.

***Ключевые слова:** радиоимпульсный сигнал, анизотропная среда, углеводородная залежь, амплитудный и фазовый спектр.*

Введение. В георазведке углеводородных залежей (УВЗ) вопросы поиска и обнаружения имеют первостепенное значение [1–4]. Существующие геофизические методы, направленные на выделение углеводородных залежей, обладают рядом недостатков – высокая стоимость, сложность выполнения работ, недостаточная эффективность. Поиск новых решений лежит в области сокращения времени аттестации исследуемой поверхности и улучшения качественных показателей эффективности.

Разработка новых методов импульсной электроразведки на основе трансформации спектральных характеристик отраженного сигнала направлена на повышение точности определения границ залежи, возможность повышения глубинности методов поиска УВЗ, улучшение разрешающей способности определения местоположения залежей.

Взаимодействие гармонических сигналов, включая модулированные, со средой над УВЗ достаточно полно исследовано, применение же импульсного сигнала для решения задач поиска и оконтуривания залежей на основе взаимодействия импульсного сигнала с неоднородной средой не имеет теоретического обоснования.

Взаимодействие различных типов сигналов с неоднородными природными образованиями.

В качестве исследуемого выступает образование над углеводородной залежью (УВЗ) – неоднородное природное образование (НПО). Неоднородное природное образование – это разновидность анизотропных сред с наличием свободных носителей электрического заряда, создающих при своем движении в неоднородности электрические и магнитные поля, которые искажают внешние поля и влияют на характер движения самих носителей заряда.

Анизотропное образование – образование, физические свойства (диэлектрическая, магнитная проницаемости) которого зависят от направления электрического, магнитного полей.

С целью обоснования целесообразности применения импульсного сигнала при поиске и идентификации НПО проведено моделирование процесса взаимодействия с ним гармонического, модулированного и импульсного сигнала. Кроме того, был проанализирован тензор диэлектрической проницаемости данных видов сигналов при взаимодействии с НПО [5, 6].

Спектральная характеристика отраженной волны при воздействии НПО на зондирующий сигнал оценивается выражением

$$S_{\text{отпр}} = S(\omega) \cdot R_i(\omega) \cdot \exp(j(\varphi(\omega)) + \varphi_i) = S_{\text{отпр}}(\omega) \cdot j\varphi_{\text{отпр}}(\omega),$$

где $S(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) зондирующего сигнала;

$S_{\text{отпр}}(\omega)$ – АЧХ отраженного сигнала;

$R_i(\omega)$ – коэффициент отражения;

$\varphi(\omega)$ – фазочастотная характеристика (ФЧХ) зондирующего сигнала;

$\varphi_{\text{отпр}}(\omega)$ – ФЧХ отраженного сигнала.

Установлено, что при взаимодействии гармонического сигнала амплитудный и фазовый спектр трансформируется минимально, следовательно, применение гармонических методов, основанных на

изменении спектральных характеристик отраженной волны, для поиска НПО нецелесообразно. Однако при рассмотрении бигармонического сигнала в режиме мощного низкочастотного (НЧ) и высокочастотного (ВЧ) сигнала показало значительное изменение фазового и минимальное амплитудного спектров (рисунок 1).

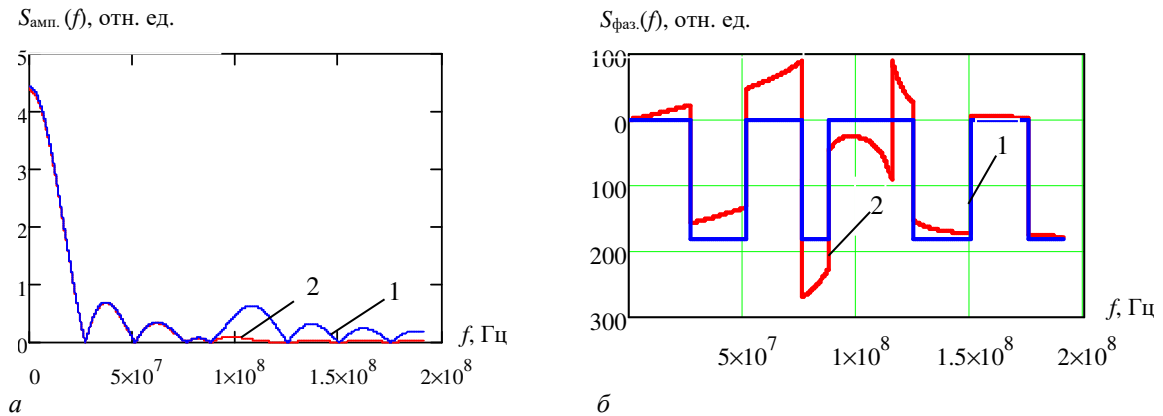


Рисунок 1. – Расчетная зависимость амплитудного (а) и фазового спектра (б):
1 – зондирующего бигармонического НЧ-сигнала; 2 – отраженного бигармонического НЧ-сигнала от НПО

При исследовании тензора диэлектрической проницаемости [7, 8] также можно сказать об отличии однотонального и двутонального режимов взаимодействия с НПО, а именно присутствие в выражениях для тензора величины $\tilde{\omega}_1$, ω_2 , k_E , k_ω , которые определяют параметры этих сигналов. Использование двухчастотных сигналов позволяет повысить информативность методов поиска. Основная гармоника радиоимпульса имеет не нулевую частоту, а частоту заполнения f_0 . А его ширина определяется длительностью радиоимпульса. Амплитудный спектр отраженного сигнала характеризуется изменением уровня максимума и искажением боковых лепестков [9]. Вместе с тем существенно отличаются компоненты тензора диэлектрической проницаемости между режимом мощного НЧ- и ВЧ-сигнала [10].

При взаимодействии амплитудно-модулированного (АМ) сигнала (рисунок 2) наблюдаются изменения амплитуды и уровня боковых лепестков в амплитудном спектре, а в фазовом спектре существует провал в диапазоне частот $8 \cdot 10^7 - 1,2 \cdot 10^8$ Гц до -90° . В тензоре диэлектрической проницаемости характерным является зависимость его компонентов от коэффициента амплитудной модуляции k_m , а также от модулирующей Ω и несущей ω частот АМ-сигнала [11–13].

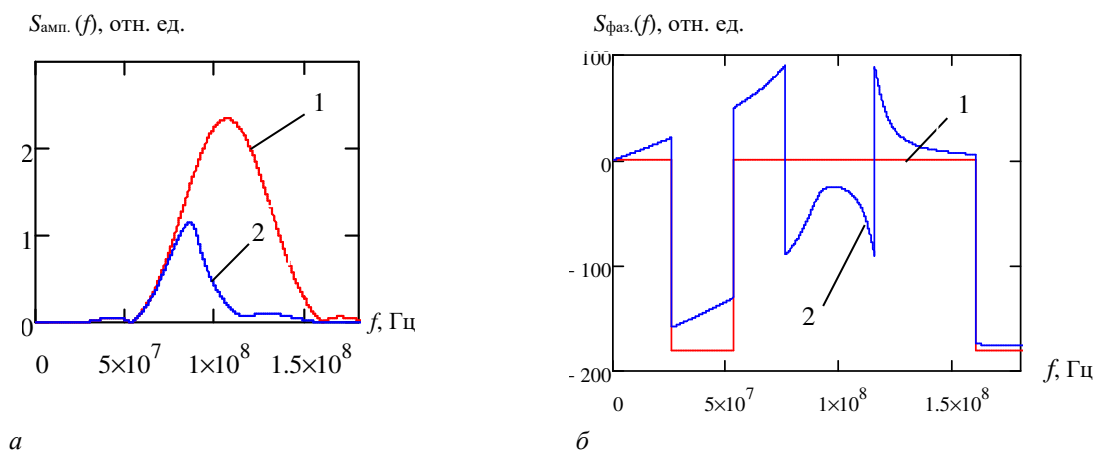
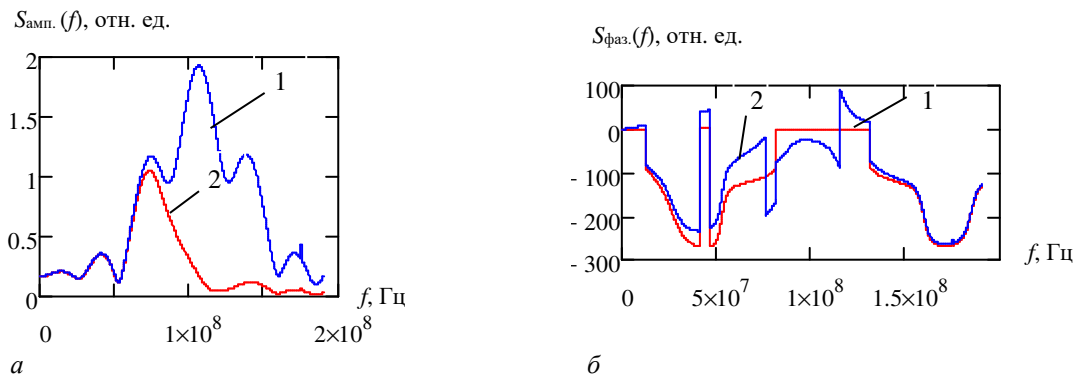


Рисунок 2. – Расчетная зависимость амплитудного (а) и фазового спектра (б):
1 – зондирующего АМ-сигнала; 2 – отраженного АМ-сигнала от НПО

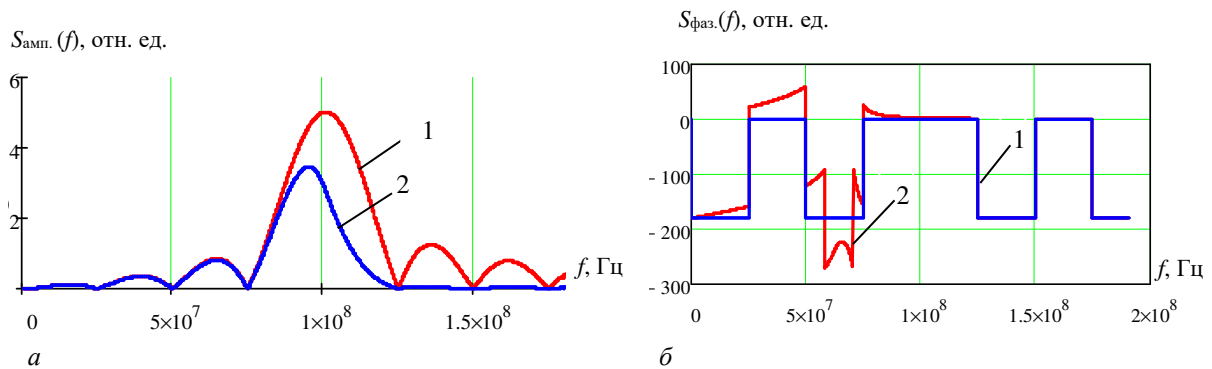
При взаимодействии с частотно-модулированным (ЧМ) сигналом (рисунок 3) амплитудный спектр отраженного сигнала характеризуется уменьшением амплитуды и изменением уровня боковых лепестков.



**Рисунок 3. – Расчетная зависимость амплитудного (а) и фазового спектра (б):
1 – зондирующего ЧМ-сигнала; 2 – отраженного ЧМ-сигнала от ЭНПС**

Как и при амплитудно-модулированном сигнале на фазовом спектре появляется резкий скачок фазы в интервале от $8 \cdot 10^7$ Гц до $1 \cdot 10^8$ Гц. Для ЧМ-сигнала мнимые части компонентов ϵ_1 и ϵ_3 зависят от параметра частоты.

При рассмотрении импульсного сигнала проведено моделирование процесса взаимодействия ЭМВ в режиме видеоимпульса и радиоимпульса (рисунок 4). При изучении в режиме видеоимпульса установлено, что компоненты тензора диэлектрической проницаемости среды над электрически неоднородной природной средой при различном соотношении амплитуд и частот имеют существенные отличия. Так, для режима видеоимпульса существенен вклад параметров частоты F_1 в мнимые составляющие $\dot{\epsilon}_1$ и $\dot{\epsilon}_3$.



**Рисунок 4. – Расчетная зависимость амплитудного (а) и фазового спектра (б)
1 – зондирующего радиоимпульса, 2 – отраженного радиоимпульса от НПО**

Основная гармоника радиоимпульса имеет не нулевую частоту, а частоту заполнения f_0 . А его ширина определяется длительностью радиоимпульса. Амплитудный спектр отраженного сигнала характеризуется изменением уровня максимума и искажением боковых лепестков.

Фазовый спектр имеет ступенчатую форму, максимально фаза искажается в диапазоне $5 \cdot 10^7 - 1 \cdot 10^8$ Гц с резкими изменениями от -260° до 40° . Компоненты тензора диэлектрической проницаемости содержат информацию об отклике исследуемой среды на взаимодействие радиоимпульса. Отличием радиоимпульса от видеоимпульса является присутствие частоты ω в мнимых составляющих $\dot{\epsilon}_1$ и $\dot{\epsilon}_3$ [14].

Разработка комплексного подхода в обнаружении природных неоднородных образований. Выбор метода электроразведки определяет методику проведения натуральных испытаний, точность определения границ и уровень идентификации НПО. Современные методы электромагнитной разведки требуют комплексного подхода для организации геологоразведочных работ. Разработка требований к электромагнитным методам при поиске, оконтуривании и идентификации залежей нефти и газа – важнейшая задача радиокомплексирования. Оптимизация характеристик зондирующих сигналов и радиотехнических систем поиска будет способствовать успешному решению задач георазведки. Метод использования модулированных сигналов обладает хорошими характеристиками. Методика измерений основана на

расширении функциональных зависимостей компонентов тензоров от режимов модуляции, что позволяет повысить информативность разрабатываемых способов поиска УВЗ. Применение режима мощного низкочастотного сигнала предоставляет большие возможности для методов радиокомплексирования, поскольку вариация диэлектрической проницаемости осуществляется в более широком диапазоне по сравнению с режимом мощного высокочастотного сигнала. Использование радиоимпульсного метода зондирования УВЗ позволяет повысить точность определения границ и однозначность выявления скопленных углеводородов при использовании эффекта нелинейного взаимодействия сигналов в условиях анизотропии. Предлагаемый метод дает возможность выбора конкретных частот при ведении разведки, позволяет существенно снизить массу и габариты устройств геоэлектроразведки. При этом достигается повышение мобильности устройств разведки, сопровождающееся повышением производительности работ при поисках углеводородов. Для разработки методов поиска важную роль играет выбор физических моделей углеводородов, рассматривающих физико-химические процессы в самой залежи и в околозалежном пространстве, влияние углеводородов на электрические свойства вмещающих пород над УВЗ, состав кристаллического скелета и термодинамические условия залегания (давление и температура).

Количественные проявления этих процессов зависят от физико-геологических свойств пород-коллекторов: гранулометрического и минералогического состава пород, структурно-текстурных особенностей скелета, характера пористости и проницаемости, вида цементирующего вещества и механических свойств скелета, количества пластовой воды в порах и ее минерализации и т.д., что предполагает конкретизацию электродинамических моделей УВЗ для повышения эффективности комплексного применения методов георазведки.

Заключение. Проведено сравнение параметров различных сигналов (гармонического, двухчастотного, модулированного) при взаимодействии с электрически неоднородной природной средой. Установлено, что применение бигармонических сигналов в методах, основанных на изменении амплитудного спектра отраженного сигнала, для поиска НПО нецелесообразно. Однако в фазовых методах бигармонический сигнал в режиме мощного низкочастотного и высокочастотного сигнала могут применяться из-за значительного изменения фазового спектра. При взаимодействии АМ-сигнала и ЧМ-сигнала с НПО наблюдались изменения амплитуды и уровня боковых лепестков в амплитудном спектре, а в фазовом спектре отмечены провалы, что позволит применять амплитудно-модулированные и частотно-модулированные сигналы в методах по выделению УВЗ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Норман, Д.Х. Технология, разведка и добыча нефти / Дж. Хайн Норман. – М. : Олимп-Бизгис, 2010. – 752 с.
2. Hordt, A. Analysis of time-lapse TEM data for nuclearground gas storage monitoring / A. Hordt, K. Vozoff // 60th EAGE Goth and Tech Exhit., Leipzig, Germany, 8–12 June 1998. – Leipzig, 1998. – P. 10–16.
3. Korephanov, V. Magnetotelluric sounding at sea bottom methodology and instrumentation / V. Korephanov, F. Dudkin // 61th EAGE Conf. and techn. Exil., Helsinki, Finland, 1–4 may 1999. – Helsinki, 1999. – P. 143.
4. Янушкевич, В.Ф. Электромагнитные методы поиска и идентификации углеводородных залежей / В.Ф. Янушкевич. – Новополоцк : ПГУ, 2017. – 232 с.
5. Заяц, Е.Ю. Глубинность исследований при импульсном методе поиска и оконтуривания УВЗ / Е.Ю. Заяц, В.Ф. Янушкевич // Современные проблемы радиотехники и телекоммуникаций. РТ-2015 : материалы 11-й Междунар. молодежной науч.-техн. конф., Севастополь, Украина, 16–20 нояб. 2015 г. – Севастополь, 2015. – С. 34.
6. Заяц, Е.Ю. Расчет минимально измеряемой толщины слоя для импульсного метода поиска и оконтуривания УВЗ / Е.Ю. Заяц, В.Ф. Янушкевич, С.В. Калинин // Современные проблемы радиотехники и телекоммуникаций. РТ-2015 : материалы 11-й Междунар. молодежной науч.-техн. конф., Севастополь, Украина, 16–20 ноябр. 2015 г. – Севастополь, 2015. – С. 36.
7. Гололобов, Д.В. Поверхностный импеданс анизотропной среды при двухчастотном взаимодействии ЭМВ / Д.В. Гололобов, В.Ф. Янушкевич // Известия Белорусской инженерной академии. – 2001. – № 11(1). – С. 101–104.
8. Отражательные характеристики среды над углеводородной залежью при двухчастотном взаимодействии / Д.В. Гололобов [и др.] // Проблемы проектирования и производства радиоэлектронных средств : тез. докл. Междунар. науч.-техн. конф., Новополоцк, 2004 / Полоц. гос. ун-т, 2004. – Т. 2. – С. 226–229.
9. Гололобов, Д.В. Радиотехнические системы поиска и идентификации углеводородных залежей в режиме двухчастотного взаимодействия / Д.В. Гололобов, В.Ф. Янушкевич // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2002. – № 1. – С. 49–54.

10. Взаимодействие электромагнитных волн и углеводородных залежей / под ред. Д.В. Гололобова. – Минск : Бестпринт, 2009. – С. 50–121.
11. Гололобов, Д.В. Анатомическое и экспериментальное исследование взаимодействия электромагнитных волн с углеводородными залежами / Д.В. Гололобов, В.Н. Москвичев, Ю.Н. Стадник // Геология нефти и газа. – 1995. – № 3. – С. 26–30.
12. Гололобов, Д.В. Взаимодействие АМ-сигнала с углеводородной залежью / Д.В. Гололобов, В.Ф. Янушкевич // Современные проблемы радиотехники, электроники и связи : тез. докл. науч.-техн. конф., посвященной 100-летию радио, Минск, 1995 г. / Бел. гос. ун-т информатики и радиоэлектроники. – Минск, 1995. – С. 6–7.
13. Заяц, Е.Ю. Воздействие модулированных сигналов на углеводородную залежь / Е.Ю. Заяц, В.Ф. Янушкевич, С.В. Калинин // Докл. БГУИР. – 2015. – № 3 (89). – С. 112–116.
14. Взаимодействие радиоимпульса с анизотропной средой / Д.Л. Василенко [и др.] // Современные проблемы проектирования и производства РЭС : тез. докл. 4-й Междунар. науч.-техн. конф., Новополоцк, 2006 г. / Полоцк. гос. ун-т. – Новополоцк, 2006. – Т. 2. – С. 77–80.
15. Никитин, А. А. Комплексирование геофизических методов : учебник для вузов / А.А. Никитин, В.К. Хмелевской. – Тверь : ГЕРС, 2004. – 294 с.

Поступила 22.03.2019

THE INTERACTION OF VARIOUS TYPES OF SIGNALS WITH HETEROGENEOUS NATURAL FORMATIONS

V. YANUSHKEVICH, E. ZAYATS

The article presents the results of harmonic, two-frequency, modulated signal interaction with heterogeneous natural formations. The amplitude and phase spectra were calculated for two-frequency, amplitude-modulated, frequency-modulated, and radio-pulse signals. The laws of variation of the amplitude and level of side lobes in the spectrum of the reflected signal are established. Recommendations on the use of various modes of interaction of signals with heterogeneous natural formations are given. The rationale for the integrated use of methods for the search and identification of hydrocarbon deposits is given.

Keywords: radio pulse signal, anisotropic medium, hydrocarbon deposit, amplitude and phase spectrum.

УДК 537

**МОРФОЛОГИЯ И ДИСПЕРСНОСТЬ ПОРОШКОВ МАГНЕТИТА,
ПОЛУЧЕННЫХ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ УЛЬТРАЗВУКА**

д-р физ.-мат. наук, проф. В.Н. ШУТ, С.Е. МОЗЖАРОВ
(ГНУ «Институт технической акустики НАН Беларуси, Витебск»);
В.Ф. КУКСЕВИЧ
(Витебский государственный технологический университет)

Описана методика получения порошков магнетита химическим и сонохимическим (при воздействии ультразвука) методами. Интенсивное перемешивание, сопровождающее ультразвуковую кавитацию и образование большого количества зародышей, позволяет провести реакцию за короткое время, что способствует монодисперсности полученного продукта. Исследованы дисперсность и морфология порошков магнетита. Показано, что воздействие ультразвука позволяет получить порошки магнетита округлой формы со средним размером частиц ~ 25 нм.

Ключевые слова: *ультразвуковое воздействие, наночастицы магнетита, монодисперсность, морфология поверхности.*

Введение. Магнитные наночастицы имеют очень широкий спектр практических применений: магнитные уплотнители и магнитные чернила для банковских чеков, магнитные носители информации и многочисленные биомедицинские приложения [1]. При этом для каждого конкретного применения магнитные наночастицы должны иметь разные свойства. В большинстве приложений магнитные материалы работают лучше всего, если их размер ниже некоторого критического значения, зависящего от состава материала (10–20 нм). При таких размерах магнетики переходят в однодоменное состояние и проявляют суперпарамагнитное поведение. Магнитный момент таких частиц может случайным образом менять направление под влиянием температуры, и при отсутствии внешнего магнитного поля средняя намагниченность равна нулю. Эта особенность делает суперпарамагнитные наночастицы очень привлекательными для широкого спектра биомедицинских применений, поскольку уменьшается риск образования агломератов при комнатной температуре. Тем не менее неизбежна проблема, связанная с внутренней нестабильностью частиц малого размера в течение длительного периода времени. Ультрамелкодисперсные частицы имеют тенденцию образовывать агломераты, чтобы уменьшить поверхностную энергию. Более того, «голые» металлические наночастицы химически высокоактивны и легко окисляются на воздухе, что обычно приводит к потере магнетизма и диспергируемости. Поэтому для многих приложений крайне важно разработать стратегии защиты для химической стабилизации магнитных наночастиц против деградации во время или после синтеза. Дополнительно: для биомедицинских применений *in vivo* магнитные наночастицы должны быть нетоксичными и неиммуногенными. Основными областями биомедицинского назначения магнитных наночастиц являются диагностика и инструменты исследований (биосенсоры, MRI, маркеры биомолекул, биосепарация и пробоподготовка, исследования молекулярного взаимодействия), а также адресное терапевтическое воздействие (целевая доставка терапевтических молекул, управляемая локальная гипертермия опухолей) [2–5].

В настоящее время синтезирован широкий спектр магнитных наночастиц на основе металлов Co, Fe, Ni, оксидов железа, ферритов $MgFe_2O_4$, $CoFe_2O_4$, $MnFe_2O_4$, $LiFe_5O_8$, а также CoPt, FePt, MnAl, $SmCo_5$, $Fe_{14}Nd_2B$ [6–9]. Оксидные частицы обладают более слабыми магнитными свойствами, чем наночастицы на основе металлов, однако они более устойчивы к окислению, обладают низкой токсичностью и хорошей биосовместимостью. Наиболее широкое применение в биомедицине получили суперпарамагнитные наночастицы оксида железа (Superparamagnetic iron oxide nanoparticles – SPION), что обусловлено их низкой токсичностью и стабильностью магнитных характеристик. SPION представляют собой небольшие синтетические частицы γ - Fe_2O_3 (маггемит), Fe_3O_4 (магнетит) или α - Fe_2O_3 (гемматит) с размерами от 10 до 100 нм. Кроме того, смешанные оксиды железа с ионами переходных металлов, такими как медь, кобальт, никель и марганец, также обладают суперпарамагнитными свойствами, и попадают в категорию SPIONs. Суперпарамагнитные порошки оксида железа являются единственными клинически одобренными наночастицами оксидов металлов и наиболее широко используемыми SPION в различных биомедицинских применениях [10–12].

Наиболее распространенный способ получения наночастиц магнетита – жидкофазный метод химической конденсации, предложенный Элмором [13] и модернизированный Массартом [14], в основе которого лежит процесс осаждения солей двух- и трехвалентного железа концентрированным водным раствором щелочи. Несмотря на длительную историю применения, наночастицы магнетита сохраняют

огромный потенциал для использования в различных областях науки, техники и медицине. Разработка методов получения магнитных порошков является наиболее важной проблемой, поскольку от способа синтеза зависят форма и размер наночастиц, распределение по размерам, морфология поверхности, доля структурных дефектов или примесей, распределение дефектов внутри кристаллитов. В совокупности все это определяет магнитные свойства и магнитное поведение материалов. В настоящее время наноструктурные материалы все более интенсивно получают с помощью методов, основанных на ультразвуковых (УЗ) эффектах, возникающих в жидких средах [15]. Воздействие УЗ излучения связано в первую очередь с развитием такого эффекта, как акустическая кавитация, возникающего в среде при распространении ультразвука и представляющего собой эффективное средство превращения энергии звуковой волны низкой плотности в энергию высокой плотности, связанную с пульсациями и захлопыванием кавитационных пузырьков [16].

В настоящей работе приведены результаты исследований влияния ультразвуковой обработки на дисперсность и морфологию порошков магнетита и показана возможность их применения для разделения клеток крови.

Методика эксперимента. Известно, что при использовании хлоридов железа (II и III) для получения магнитной жидкости на основе Fe_3O_4 , в процессе осаждения на поверхности магнетита адсорбируются ионы $(\text{FeCl})^+$, $(\text{FeCl})^{2+}$, $(\text{FeClOH})^+$, ухудшающие магнитные свойства [17]. Некоторые исследователи для получения магнетита высокой чистоты с улучшенными свойствами исключают Cl^- -ионы из исходного раствора или же пытаются уменьшить их содержание, используя для осаждения $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ и $\text{FeCl}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ [18]. Подобный подход использовали и мы. Для этого 0,278 г. $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ и 0,540 г. $\text{FeCl}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ с молярным соотношением (1:2) растворяли в 50 мл бидистиллированной воды при комнатной температуре. Полученный раствор разделяли на две части по 25 мл. В одну часть при перемешивании одновременно вливали 10 мл 1 % раствора аммиака. Выпавший осадок отделяли с помощью магнита, многократно промывали водным раствором этилового спирта и высушивали в вакууме. Стакан со второй частью раствора солей железа термостатировали, опускали в него ультразвуковой диспергатор и при интенсивной кавитации с помощью шприца медленно, в течение 5 мин, вводили 10 мл 1 % раствора аммиака. Полученный осадок также отделяли с помощью магнита, многократно промывали водным раствором этилового спирта и высушивали в вакууме.

Микроскопические исследования полученных порошков проводились на сканирующем электронном микроскопе высокого разрешения "Mira" фирмы "Tescan" (Чехия). Для анализа размеров частиц использовался прибор ANALYSETTE 22 MicroTec plus фирмы «FRITZSCH».

Результаты и обсуждение. На рисунке 1, а показаны результаты гранулометрического анализа магнетита, полученного при воздействии ультразвука. Среднеарифметический диаметр частиц полученного магнетита составлял 490 нм. Для сравнения, на рисунке 1, б приведены результаты гранулометрического анализа магнетита, полученного без ультразвука – среднеарифметический диаметр 4,7 мкм. Метод лазерного сканирования не дает представления о морфологии частиц. Образовавшиеся конгломераты считаются за частицу крупных размеров. Соответственно, измеренный средний размер частиц получается большим, чем при микроскопическом анализе, результаты которого представлены ниже.

На рисунке 2 приведены СЭМ-фотографии порошков магнетита, полученных без применения ультразвука и с использованием УЗ колебаний.

Сравнив СЭМ-фотографий отметим, что ультразвук оказывает очень сильное влияние на дисперсность и морфологию полученного порошка. Обычно реакции осаждения проходят в два этапа – образование зародыша (ядра) и затем его рост. Для того чтобы получить однородные по размерам частицы (достигнуть монодисперсности) в таком процессе, эти две стадии должны быть отделенными друг от друга и, кроме того, следует избегать зародышеобразования в процессе роста кристаллитов. При возникновении кавитации каждый захлопывающийся пузырек представляет собой источник, генерирующий какое-то количество центров кристаллизации [19]. Интенсивное перемешивание, сопровождающее кавитацию, и образование большого количества зародышей, позволяет провести реакцию за короткое время, что способствует монодисперсности полученного продукта. Средний размер частиц магнетита, полученного в условиях воздействия ультразвука составлял 20–25 нм. Вторая характерная особенность материалов, полученных при УЗ воздействии, – округлая форма частиц (отсутствие острых углов). Известно, что при многократном воздействии импульсных нагрузок и замыкании кавитационных пузырьков на поверхности уже образовавшихся частиц, имеющих неровности, микротрещины и сростки, происходит отщепление выступающих участков материала. Кроме того, имеет место измельчение за счет соударения частиц порошка при их беспорядочном движении под действием ультразвука. При этом скорость измельчения увеличивается за счет увеличения числа соударений кристаллитов друг о друга. В результате происходит диспергация частиц и сглаживание их поверхности. Этот момент очень важен в контексте

применения магнетита при адресном терапевтическом воздействии. Например, для терапевтического лечения опухолей управляемой локальной гипертермией – методом, основанном на разогреве магнитных материалов, введенных в зону опухоли, электромагнитными полями. В этом случае необходимо, с одной стороны, локализовать наночастицы в заданной области, а с другой – равномерно распределить их. И этим требованиям соответствуют материалы, синтезированные при наложении ультразвуковых колебаний, поскольку имеют нанометрические размеры и форму близкую к сферической.

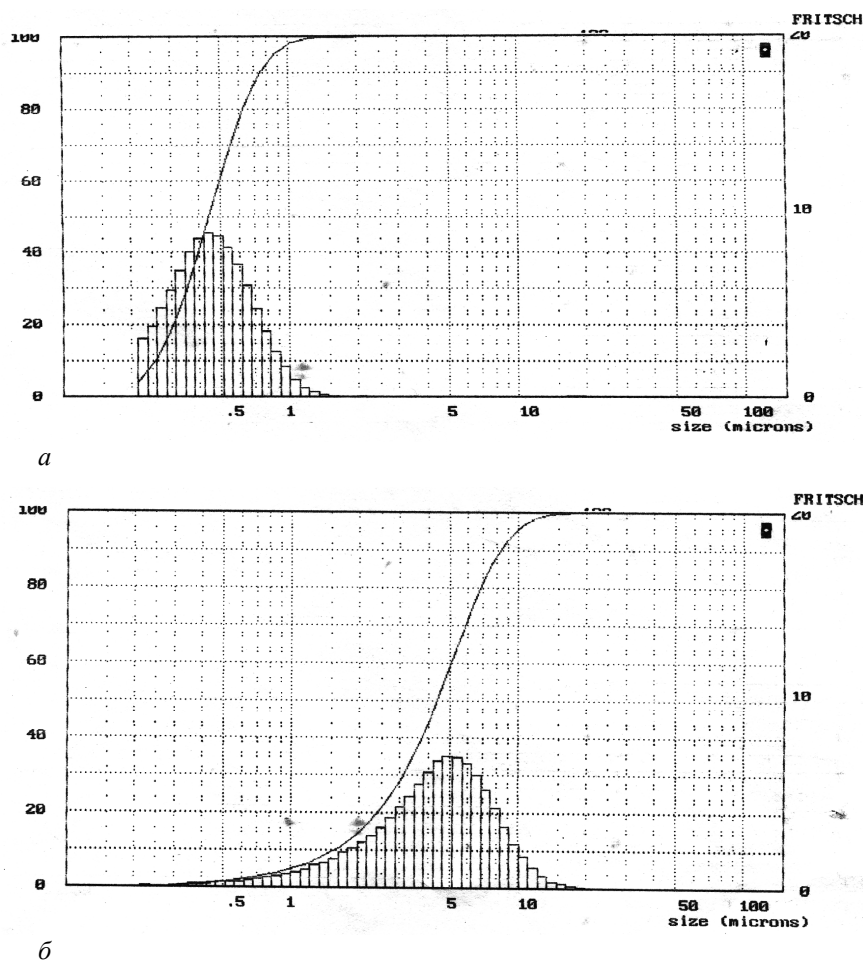
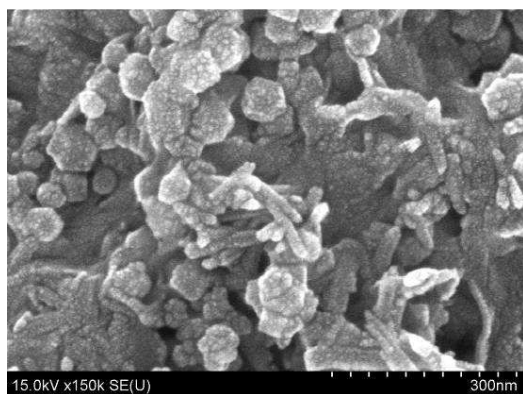
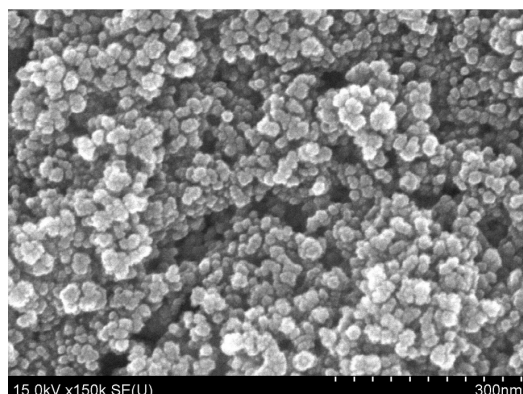


Рисунок 1. – Графики Fritsch-анализа порошка магнетита, полученного при воздействии ультразвука (а) и без ультразвука (б)



а



б

Рисунок 2. – Морфология порошков магнетита, полученных без применения ультразвука (а) и с использованием УЗ колебаний (б)

Для применений *in vivo* частицы высокодисперсных магнитных материалов должны быть покрыты биосовместимым полимером для защиты от биоразложения и предотвращения их коагуляции. Это можно сделать как в процессе получения, так и при переводе частиц в коллоидное состояние в дисперсионной среде.

Применяемые покрытия можно разделить на органические (сурфактанты и полимеры) и неорганические (кремнезем, углерод, благородные металлы). Наиболее распространенными органическими покрытиями наночастиц являются декстран, полиэтиленгликоль (ПЭГ), крахмал, поливиниловый спирт, гепарин, высшие карбоновые кислоты, в том числе лимонная кислота [4, 5, 8, 20, 21]. Помимо защиты от агрегации, окисления, кислотной и щелочной коррозии покрытие может играть роль спейсера для присоединения фармацевтических агентов или биомолекул к магнитному носителю. Благодаря покрытию можно модифицировать поверхность наночастиц различными функциональными группами: азидо-, амино-, карбоксильными, сульфгидрильными, гидроксильными, имидными и другими, что позволяет ковалентно связывать наночастицы с биомолекулами или лекарственными средствами. Дополнительной важной функцией покрытия наночастиц является повышение их биосовместимости. Поливиниловый спирт (ПВС) можно использовать для стабилизации наночастиц благодаря его биоразлагаемости и гидрофильным свойствам [22]. Однако гидрофильная природа ПВС может снизить его эффективность, и необходим сшивающий агент для предотвращения деградации связи наночастица-полимер. Для этого довольно часто используется глутаровый альдегид [23, 24].

Магнетит для магнитной сепарации из цельной крови лейкоцитов готовили также с использованием ультразвука. По методике, описанной выше, с использованием ультразвука, осаждением получали оксид железа. Не промывая и не выключая ультразвука в суспензию по каплям добавляли 10 мл 7 % раствора ПВС и 150 мкл 25 % глутарового альдегида. Модификация проводилась в течение 10 мин. Порошок осаждался в магнитном поле, многократно промывался водным раствором этилового спирта и сушился под вакуумом.

Перед применением порошок выдерживался в 25% водном растворе глутарового альдегида в течение одного часа при 40 °С и pH = 2. Активированные частицы отмывались в воде. К 10 % суспензии частиц добавляли раствор моноклональных антител CD4 клон S3.5, изотип mIgG_{2a}, Mouse Anti-Human с pH = 7,2 в концентрации 0,3 г/л, перемешивали на вортексе IKA Genius 3 через каждые 15 мин в течение первых 3 ч и инкубировали при 4 °С в течение суток. Затем частицы снова отмывали дистиллированной водой.

Готовые ферромагнитные частицы с моноклональными антителами использовали для магнитной сепарации из цельной крови CD4 лейкоцитов. Степень очистки лейкоцитов составляла 87–92 %.

Заключение. Описана методика получения порошков магнетита химическим и сонохимическим (при воздействии ультразвука) методами. Интенсивное перемешивание, сопровождающее ультразвуковую кавитацию и образование большого количества зародышей, позволяет провести реакцию за короткое время, что способствует монодисперсности полученного продукта. Исследованы дисперсность и морфология порошков магнетита. Показано, что воздействие ультразвука позволяет получить порошки магнетита со средним размером частиц ~ 25 нм. Вторая характерная особенность материалов, полученных при ультразвуковом воздействии, – округлая форма частиц (отсутствие острых углов). Проведены эксперименты по использованию порошков магнетита для сепарации из цельной крови CD4 лейкоцитов. Степень очистки лейкоцитов составляла 87–92%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Использование магнитных наночастиц в биомедицине / А.Г. Першина [и др.] // Бюллетень сибирской медицины. – 2008. – № 2. – С.70–78.
2. Biological applications of magnetic nanoparticles / M. Colombo [et al.] // Chem. Soc. Rev. – 2012. – Vol. 41, № 11. – P. 4306–4334.
3. Lu, A.-H. Magnetic Nanoparticles: Synthesis, Protection, Functionalization, and Application, Reviews / An-Hui Lu, E. L. Salabas, Ferdi Schuth // Angew. Chem. Int. Ed. – 2007. – № 46.– P. 1222–1244.
4. Medical Application of Functionalized Magnetic Nanoparticles / Akira Ito [et al.] // Journal of bioscience and bioengineering. – 2005. –Vol. 100, № 1. – P. 1–11.
5. Bonnemain, B. Superparamagnetic Agents in Magnetic Resonance Imaging: Physicochemical Characteristics and Clinical Applications, a Review / B. Bonnemain // Journal of Drug Targeting. – 1998. – Vol. 6, № 3. – P. 167–174.
6. Баранов, Д.А. Магнитные наночастицы: достижения и проблемы химического синтеза / Д.А. Баранов, С.П. Губин // Радиоэлектроника, Наносистемы, Информационные технологии. – 2009. – Т. 1, № 1–2. – С. 129 – 146.

7. Berryl, C.C. Functionalisation of magnetic nanoparticles for applications in biomedicine - Topical review / Catrine C. Berryl, Adam S. G. Curtis // J. Phys. D: Appl. Phys. – 36. – 2003. – R198–R206.
8. Applications of magnetic nanoparticles in biomedicine - Topical review // Q.A. Pankhurst [et al.] // J. Phys. D: Appl. Phys. – 36. – 2003. – R167–R181.
9. The preparation of magnetic nanoparticles for applications in biomedicine / P. Tartaj [et al.] // J. Phys. D: Appl. Phys. – 36. – 2003. – R182–R197.
10. Mohapatra, M. Synthesis and applications of nano-structured iron oxides/hydroxides – a review / M. Mohapatra, S. Anand // International Journal of Engineering, Science and Technology. – 2010. – Vol. 2, № 8. – P. 127–146.
11. Нанокompозиты медико-биологического назначения на основе ультрадисперсного магнетита / А.П. Шпак [и др.] // Физикохимия наноматериалов и супрамолекулярных структур. – Киев : Наук. Думка. – 2007. – Т. 1. – С. 45–87.
12. Structure and magnetic properties of iron oxide nanopowders / N. V. Lukashova [et al.] // Metal Science and Heat Treatment. – January, 2013. – Vol. 54, Nos. 9–10. – P. 550–554.
13. Elmore, W.C. Ferromagnetic Colloid for Studying Magnetic Structures / W.C. Elmore // Phys. Rev. – 1938. – V. 54. – P. 309–310.
14. Massart, R. Preparation of Aqueous Magnetic Liquids in Alkaline and Acidic Media / R. Massart // IEEE Transactions on magnetics. – March, 1981. – V. MAG-17, № 2. – С. 1247–1248.
15. Mason, T.J. Applied Sonochemistry: Use of Power Ultrasound in Chemistry and Processing / T.J. Mason, J.P. Lorimer. – Wiley, 2002. – 314 p.
16. Leighton, T.G. The Acoustic Bubble / T.G. Leighton. – London : Academic Press, 1994. – 611 p.
17. Блум, Э.Я. Магнитные жидкости / Э.Я. Блум, М.М. Майоров, А.О. Цеберс. – Рига : Зинатне, 1989. – С. 347.
18. Synthesis and characterisation of rod-like magnetic nanoparticles / Vlasta Zavišova [et al.] // NANOCON-2010, 12–14.10.2010, Olomouc, Czech Republic, EU.
19. Толочко, Н.К. Закономерности ультразвуковой кристаллизации растворов / Н.К. Толочко, С.Е. Мозжаров // *Вестник Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта*. – 2005. – № 2 (36). – С. 118–121.
20. Synthesis of magnetite (Fe₃O₄) nanoparticles without surfactants at room temperature / I. Martinez-Mera [et al.] // Materials Letters – 61. – 2007. – P. 4447–4451.
21. Bruce, Ian J. Surface Modification of Magnetic Nanoparticles with Alkoxysilanes and Their Application in Magnetic Bioseparations // Ian J. Bruce, Tapas Sen // Langmuir. – 2005. – 21. – P. 7029–7035.
22. Muppalaneni, S. Polyvinyl Alcohol in Medicine and Pharmacy: a Perspective / Srinath Muppalaneni, Hossein Omidian // J Develop Drugs. – 2013. – V. 2, Is. 3. – P. 1–5.
23. Synthesis and Characterization of Fe₃O₄ Nanoparticles using Polyvinyl Alcohol (PVA) as Capping Agent and Glutaraldehyde (GA) as Crosslinker / Lale Budi Hutami Rahayu [et al.] // International Conference on Chemistry and Material Science (IC2MS) // 2017 IOP Publishing IOP Conf. Series : Materials Science and Engineering 299. – 2018.
24. Kim, S.Y. Preparation and characterization of polyvinyl alcohol-grafted Fe₃O₄ magnetic nanoparticles through glutaraldehyde [Electronic resource] / Su Yeon Kim, B. Ramaraj and K. R. Yoona // Surf. Interface Anal. – 2012. – Published online in Wiley Online Library. – Mode of access: wileyonlinelibrary.com/journal/sia.

Поступила 28.03.2019

MORPHOLOGY AND DISPERSION OF MAGNETITE POWDERS PREPARED BY SONOCHEMICAL METHODS

V. SHUT, S. MOZZHAROV, V. KUKSEVICH

The technique for producing magnetite powders by chemical and sonochemical methods is described. Intensive mixing accompanying ultrasonic cavitation and the formation of a large number of nucleuses allows to conduct the reaction in a short time. This contributes to the monodispersity of the obtained product. The dispersion and morphology of magnetite powders are investigated. It is shown that the ultrasound effect allows to obtain round-shaped magnetite powders with an average particle size of ~ 25 nm.

Keywords: ultrasonic action, magnetite nanoparticles, monodispersity, surface morphology.

УДК 535.42

**ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ОБМЕН МЕЖДУ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ ПУЧКАМИ
В ФОТОРЕФРАКТИВНОМ КРИСТАЛЛЕ SBN***канд. физ.-мат. наук, доц. В.В. ДАВЫДОВСКАЯ**(Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина)*

Установлены особенности взаимодействия двумерных световых пучков в фоторефрактивном кристалле SBN, помещенном во внешнее постоянное электрическое поле, в зависимости от расположения световых пучков друг относительно друга, а также относительно вектора напряженности внешнего электрического поля. Найдены условия для осуществления энергетического обмена между синфазными двумерными световыми пучками при их взаимодействии в фоторефрактивном кристалле SBN, помещенном во внешнее электрическое поле, приложенное вдоль оптической оси кристалла.

Ключевые слова: *фоторефрактивный кристалл, внешнее электрическое поле, двумерные световые пучки, супергауссов профиль, оптическая ось кристалла, оптимальные условия, энергетический обмен.*

Введение. При исследовании распространения и взаимодействия световых пучков часто используют фоторефрактивные материалы, так как они обладают подходящими для этого электрооптическими свойствами. К настоящему времени уже известно большое количество различных фоторефрактивных материалов [1, 2], однако поиск новых более перспективных сред не прекращается. К наиболее изучаемым фоторефрактивным материалам можно отнести фоторефрактивные кристаллы, в частности, кристаллы средних сингоний, к которым относится сегнетоэлектрический кристалл ниобата бария-стронция (SBN) класса симметрии 4mm [2]. Благодаря таким особенностям кристалла, как высокие значения диэлектрической проницаемости и электрооптических коэффициентов, он часто используется в динамической голографии и при создании волноводных структур [3].

Несмотря на то, что кристаллы ниобата бария-стронция впервые были синтезированы еще в 1960 году [4], интерес к ним не ослабевает и сейчас. Проводятся исследования различных световых явлений в этих кристаллах [5–11], а также активно продолжают изучаться их физические свойства [12–16].

При исследовании взаимодействия световых пучков в нелинейных средах одной из важных задач является энергетический обмен между пучками. Явление энергообмена может иметь различные приложения, в частности оно используется в задачах адаптивной интерферометрии. Известно, что результат взаимодействия двух световых пучков напрямую зависит от их относительной фазы на входе в кристалл. Если два пучка синфазны (разность фаз равна нулю), то они притягиваются, если находятся в противофазе (разность фаз равна π), то отталкиваются. Особенно интересным является промежуточный случай, когда наблюдается сильный энергетический обмен между пучками, который может приводить даже к исчезновению одного из пучков [17].

В ряде научных работ при исследовании взаимодействия световых пучков в различных нелинейных средах задается соответствующая разность фаз между пучками на входе в среду для получения притяжения, отталкивания, а также энергетического обмена между световыми пучками [18–22].

Теория. В данной статье описан способ осуществления энергетического обмена между двумерными световыми пучками без задания начальной разности фаз между ними.

Так, при взаимодействии двумерных супергауссовых световых пучков в фоторефрактивном кристалле SBN, помещенном во внешнее электрическое поле, приложенное вдоль оптической оси кристалла, возможно наблюдать энергетический обмен между взаимодействующими пучками.

Следует отметить, что для подробного теоретического анализа данного явления необходимо учитывать как дрейфовый, так и диффузионный механизмы перемещения электронов в кристалле.

При исследовании распространения и взаимодействия световых пучков в фоторефрактивном кристалле SBN и определении электростатического потенциала в ряде научных работ используется приближение, при котором пренебрегается вкладом диффузионного механизма перемещения электронов в фоторефрактивном кристалле по сравнению с вкладом дрейфового механизма [5]. В отдельных работах [8–10] учитывается и диффузионная составляющая в выражении для потенциала внутреннего электрического поля, однако рассматриваются пучки только с гауссовым профилем интенсивности и считается, что вклад диффузионного механизма перемещения электронов приводит лишь к смещению пучков относительно вектора напряженности внешнего электрического поля и появлению асимметричности в профиле световых пучков на выходе из фоторефрактивного кристалла.

Для описания распространения системы двумерных световых пучков, линейно поляризованных параллельно оптической оси кристалла (необыкновенная волна), в фоторефрактивном кристалле SBN, принадлежащем классу симметрии 4mm, было использовано уравнение [23–25], полученное в паракси-

альном приближении на базе уравнений Максвелла и основных уравнений фоторефрактивного эффекта и применимое в стационарном режиме [26]

$$i \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_e} \left(\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0 n_e^3}{2} (\vec{A} \hat{r} \vec{E}) = 0, \quad (1)$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi + \vec{E}_0, \quad (2)$$

где $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$ – векторная составляющая светового поля, соответствующая необыкновенной волне;
 k_0 – модуль волнового вектора светового пучка в вакууме;
 n_e – показатель преломления необыкновенной волны в невозмущенном кристалле;
 \hat{r} – электрооптический тензор третьего ранга для кристалла, имеющий эффективную компоненту $r_{33} = 235$ пВ/м, [27];

$I = (n_e / 2\eta_0) \vec{A} \cdot \vec{A}^* / I_d$ – относительная интенсивность светового поля, $\eta_0 = (\mu_0/\epsilon_0)$, I_d – темновая интенсивность, включающая фоновую засветку;

\vec{E}_0 – внешнее электрическое поле, приложенное к кристаллу в направлении рабочей оси OX декартовой системы координат XYZ , (рисунок 1), E_0 является проекцией вектора \vec{E}_0 на ось OX , \vec{E}_0 – электрическое поле внутри кристалла, включающее электрическое поле, индуцированное светом;

φ – переопределенный электрический потенциал, который связан с потенциалом поля пространственного заряда ϕ соотношением

$$\phi = \varphi + E_0 x, \quad (3)$$

тогда уравнение для переопределенного электростатического потенциала φ можно записать в виде [28, 29]

$$\nabla^2 \varphi + \nabla [\ln(1+I)] \nabla \varphi - E_0 \frac{\partial}{\partial x} \ln(1+I) - \frac{k_B T}{e} \left[\nabla^2 [\ln(1+I)] + [\nabla \ln(1+I)]^2 \right] = 0. \quad (4)$$

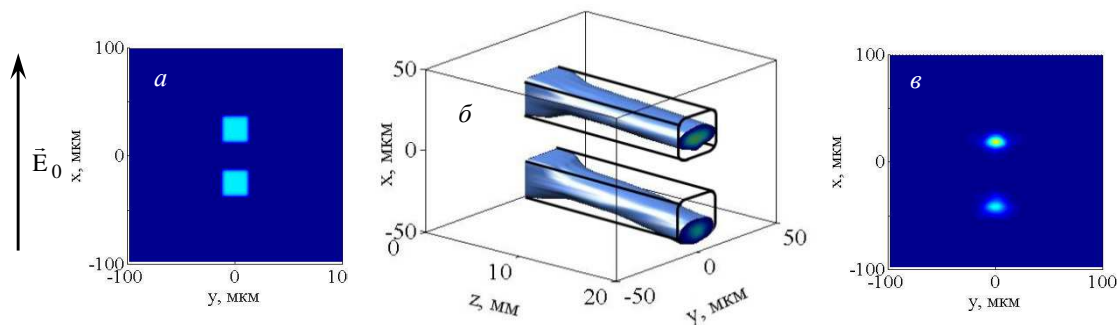


Рисунок 1. – Взаимодействие двух прямоугольных двумерных световых пучков, поперечные сечения которых на входе в кристалл расположены вдоль прямой, параллельной вектору напряжённости внешнего электрического поля, приложенного к фоторефрактивному кристаллу SBN, с учетом диффузионного слагаемого поля пространственного заряда и входным расстоянием между пучками, равным размеру пучка: *a* – двумерные супергауссовы пучки на входе в кристалл; *b* – трехмерная модель распределения светового поля по толщине кристалла; *c* – результат теоретического моделирования пучков на выходе из кристалла

Для вычисления формы пучков на выходе мы использовали схему Дугласа и метод Дьяконова для решения дифференциальных уравнений в частных производных для двух или более пространственных переменных [30, 31].

Относительная интенсивность квадратного супергауссова пучка на входе в кристалл описывалась выражением [32–35]

$$I = I_{\max} \exp \left[\frac{-(x^N + y^N)}{2 \cdot r_0^N} \right], \quad (5)$$

где N – порядок супергауссова пучка; r_0 – характерный размер пучка.

Численное моделирование взаимодействия двумерных гауссовых световых пучков в фоторефрактивном кристалле SBN. Для теоретического моделирования были использованы следующие параметры: $n_e = 2,33$, $\lambda = 0,6314$ мкм, $T = 295$ К, внешнее электрическое поле $E_0 = 3$ кВ/см, длина кристалла составляет 20 мм, полуширина входных пучков – 12,5 мкм, расстояние между центрами пучков – 50 мкм.

При взаимодействии световых пучков, поперечные сечения которых на входе в фоторефрактивный кристалл SBN расположены вдоль прямой, параллельной вектору напряжённости внешнего электрического поля, приложенного вдоль оптической оси кристалла (рисунок 1), возможно осуществление энергетического обмена между двумерными пучками без задания входной разности фаз между ними.

При взаимодействии двух пучков в фоторефрактивном кристалле SBN перекачка энергии от одного пучка к другому наблюдается только на расстоянии между пучками на входе в кристалл сравнимом с размером самих взаимодействующих пучков. Так, при увеличении входного расстояния между пучками в два раза энергетический обмен уже не наблюдается (рисунок 2).

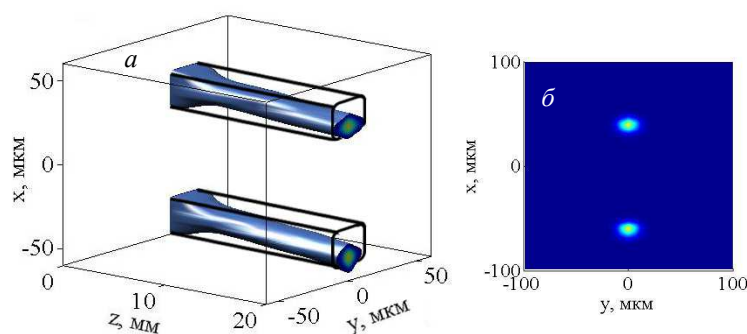


Рисунок 2. – Взаимодействие двух прямоугольных двумерных световых пучков, поперечные сечения которых на входе в кристалл расположены вдоль прямой, параллельной вектору напряжённости внешнего электрического поля, приложенного к фоторефрактивному кристаллу SBN, с учетом диффузионного слагаемого поля пространственного заряда и входным расстоянием между пучками равным удвоенному размеру пучка:

***a* – трехмерная модель распределения светового поля по толщине кристалла;
б – результат теоретического моделирования пучков на выходе из кристалла**

Энергетический обмен между взаимодействующими пучками ответственен за различие относительных интенсивностей световых пучков на выходе из кристалла (рисунок 3, *a*), при увеличении расстояния между пучками вдвое это различие уже отсутствует (рисунок 3, *б*).

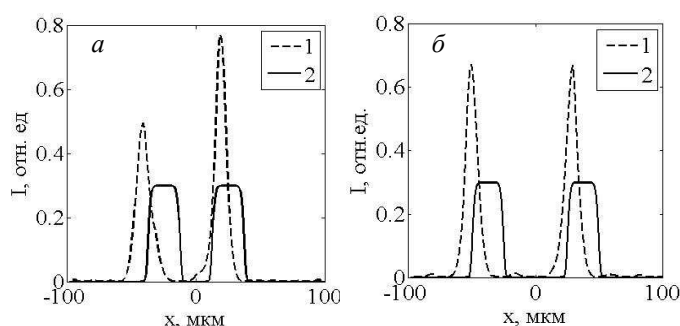


Рисунок 3. – Профиль световых пучков на выходе из кристалла: 1 – профили световых пучков на выходе из кристалла, рассчитанные с учётом диффузионного слагаемого поля пространственного заряда (*a*) и без его учёта (*б*), 2 – профили супергауссовых световых пучков квадратного сечения на входе в кристалл

Следует отметить, что правильное качественное объяснение асимметрии интенсивности и положения пучков (рисунок 1), входящих в кристалл параллельно вектору внешнего электрического поля, может быть дано только при одновременном учёте диффузионного и дрейфового механизма перемещения электронов в фоторефрактивном кристалле, в случае, рассмотренном на рисунке 1, без учета диффузионного механизма асимметрия не наблюдается (рисунок 4), пучки отталкиваются (рисунок 4, *a, б*) и на выходе из кристалла имеют одинаковую интенсивность (рисунок 4, *в*).

При распространении световых пучков в кристалле в нем формируется пространственно неоднородное распределение заряда, а следовательно, и электрического поля (рисунок 5, *a*), а так как кристаллу SBN свойственен электрооптический эффект, то действием света в кристалле обуславливается неоднородное распределение показателя преломления (рисунок 5, *в*) [2].

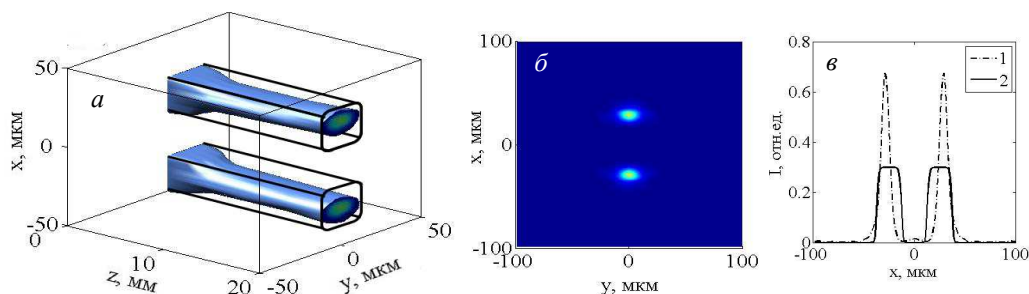


Рисунок 4. – Взаимодействие двух прямоугольных двумерных световых пучков, поперечные сечения которых на входе в кристалл расположены вдоль прямой, параллельной вектору напряжённости внешнего электрического поля, приложенного к фоторефрактивному кристаллу SBN без учета диффузионного слагаемого поля пространственного заряда и входным расстоянием между пучками, равным размеру пучка: *a* – трехмерная модель распределения светового поля по толщине кристалла; *б* – результат теоретического моделирования пучков на выходе из кристалла; *в* – профили световых пучков на выходе из кристалла

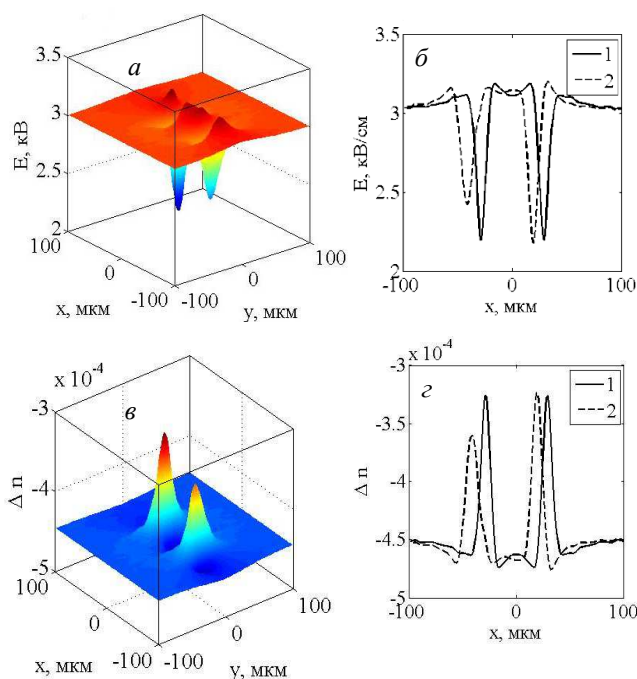


Рисунок 5. – Пространственное распределение электрического поля (*a*) и изменение показателя преломления (*в*) в фоторефрактивном кристалле SBN. (*б*)-(г): 1 – кривые, рассчитанные без учета диффузии сечения электрического поля и изменения показателя преломления, на выходе из кристалла плоскостью, параллельной *XOZ* и проходящей через максимум; 2 – кривые, рассчитанные с учетом диффузии сечения электрического поля и изменения показателя преломления, на выходе из кристалла плоскостью, параллельной *XOZ* и проходящей через максимум

Если рассмотреть сечение распределения показателя преломления, рассчитанного без учета диффузии (рисунок 5, г, кривая 1), то можно видеть, что в области взаимодействия световых пучков происходит большее изменение показателя преломления, что способствует созданию условий, более близких к полному внутреннему отражению. При рассмотрении соответствующих профилей световых пучков в области взаимодействия наблюдается более крутой спад профиля, так как в этой области происходит большее внутренне отражение, вследствие чего пучки начинают отталкиваться (рисунок 4, *a, б*). При учете диффузии можно видеть, что в пространственном распределении поля (рисунок 5, б, кривая 2) и показателя преломления (рисунок 5, г,

кривая 2) появляется асимметрия, что в дальнейшем приводит к созданию различных условий распространения для верхнего и нижнего световых пучков.

Диффузионный механизм перемещения зарядов приводит к смещению световых пучков против направления вектора напряженности внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу SBN вдоль направления внешнего электрического поля. Однако для верхнего пучка это смещение компенсирует его отклонение в направлении внешнего электрического поля за счет отталкивания взаимодействующих световых пучков. Для нижнего пучка эти два смещения суммируются, и он отклоняется больше верхнего (рисунок 1, б). Поэтому пучки проходят в кристалле различный оптический путь, который приводит к появлению разности фаз между взаимодействующими пучками (рисунки 6, а и 6, б, поверхность 1) и, как следствие, к появлению энергетического обмена между пучками, что проявляется в перекачке энергии от нижнего пучка к верхнему (рисунок 3, а, кривая 1). Без учета диффузионного слагаемого поля пространственного заряда разность фаз между взаимодействующими пучками не возникает (рисунок 6, б, поверхность 2).

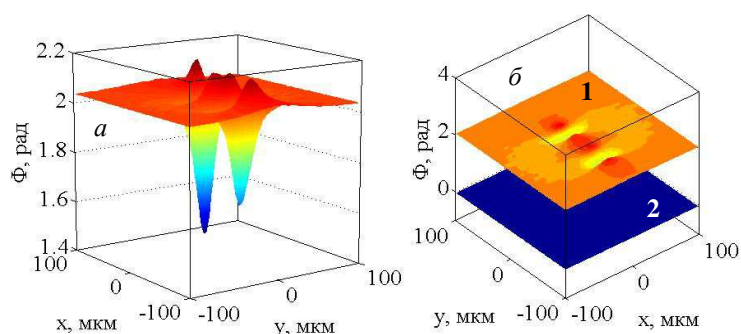


Рисунок 6. – Распределение относительной фазы между взаимодействующими пучками: а – с учетом диффузии на выходе из кристалла; б – с учетом диффузии (поверхность 1), без учета диффузии (поверхность 2)

Пучки с поперечными сечениями, расположенными вдоль линии, перпендикулярной напряжённости внешнего электрического поля, взаимно «притягиваются», и возможно их объединение в один пучок, который смещается в направлении, противоположном направлению напряжённости внешнего электрического поля (рисунок 7, a_1 - a_2). При увеличении входного расстояния между пучками в два раза объединения не происходит, оба пучка продолжают распространяться самостоятельно и смещаются в направлении, противоположном направлению напряжённости внешнего электрического поля (рисунок 7, b_1 - b_2).

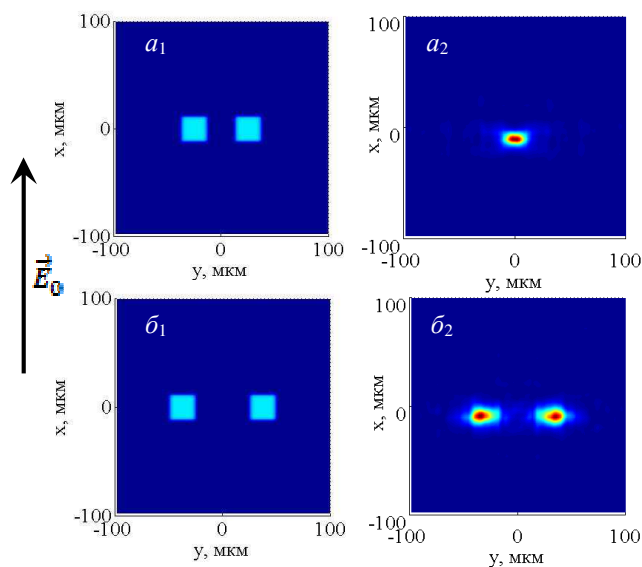


Рисунок 7. – Взаимодействие двух прямоугольных двумерных световых пучков, поперечные сечения которых на входе в кристалл расположены вдоль прямой, перпендикулярной вектору напряжённости внешнего электрического поля, приложенного к фоторефрактивному кристаллу SBN, с учетом диффузионного слагаемого

поля пространственного заряда и входным расстоянием между пучками, равным размеру пучка (a_1) и равным удвоенному размеру пучка (b_1); a_2 – трехмерная модель распределения светового поля по толщине кристалла; b_2 – результат теоретического моделирования пучков на выходе из кристалла

При распространении таких световых пучков в фоторефрактивном кристалле дрейфовый и диффузионный механизмы приводят к одинаковому смещению световых пучков, разность фаз между световыми пучками не проявляется. В области взаимодействия световых пучков происходит рост показателя преломления (рисунок 8, a_1 - a_2), который в итоге притягивает оба пучка. При начальном расстоянии между пучками на входе в кристалл SBN, равном ширине пучков, происходит их полное объединение (рисунок 7, a_1 - a_2), при входном расстоянии, равном удвоенной ширине пучков, в результате притяжения пучки сближаются, однако каждый из них продолжает распространяться самостоятельно (рисунок 7, b_1 - b_2).

Следует отметить, что вдоль оси OX , происходит большее изменение показателя преломления (рисунок 8, a_2 , b_2 , кривая 1), чем вдоль оси OY (рисунок 8, a_2 , b_2 , кривая 2), поэтому на выходе из кристалла пучки приобретают эллиптическую форму, вытянутую вдоль оси OY .

Асимметрия в изменении показателя преломления в фоторефрактивном кристалле SBN (рисунок 8, a_1 - a_2), которая в дальнейшем приводит к смещению световых пучков в направлении, противоположном направлению внешнего электрического поля, приложенного к фоторефрактивному кристаллу SBN вдоль его оптической оси, наблюдается только при учете диффузионного слагаемого поля пространственного заряда; без его учета такая асимметрия не наблюдается (рисунок 8, b_1 - b_2).

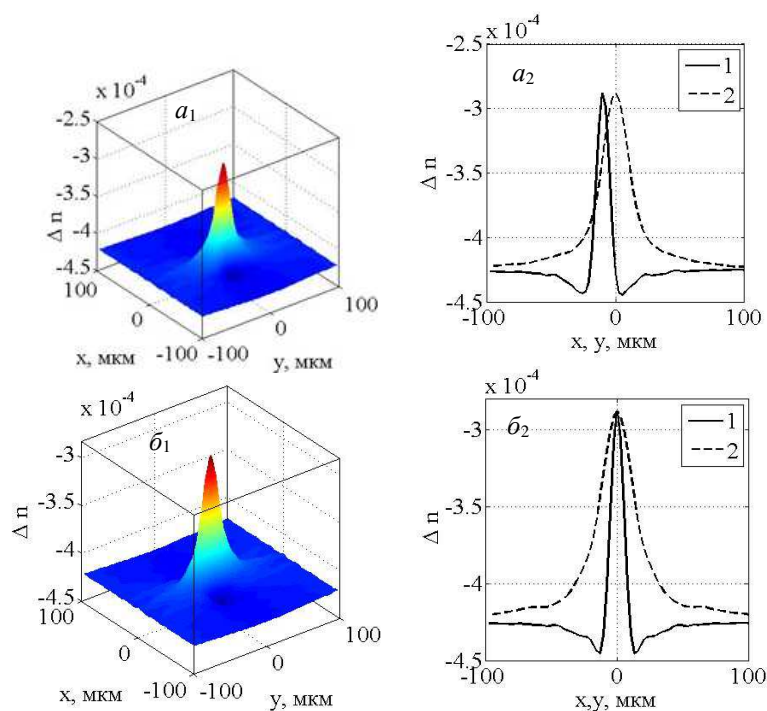


Рисунок 8. – Изменение показателя преломления в фоторефрактивном кристалле SBN, рассчитанное с учетом диффузии (a_1) и без нее (b_1); (a_2)-(b_2): 1 – кривые, рассчитанные с учетом диффузии и без нее, сечения изменения показателя преломления, на выходе из кристалла плоскостью, параллельной XOZ и проходящей через максимум; 2 – кривые, рассчитанные с учетом диффузии и без нее, сечения изменения показателя преломления, на выходе из кристалла плоскостью, параллельной YOZ и проходящей через максимум

Заключение. Исходя из теоретических расчетов можно отметить невозможность объяснить перекачку энергии между пучками, располагающимися вдоль внешнего электрического поля, которая наблюдалась в условиях эксперимента, не принимая во внимание в уравнении для потенциала слагаемое, содержащее параметр $k_B T$.

Отмечено, что при более чем двукратном превышении расстояния между осями световых пучков над характерным размером каждого из двух пучков одинакового поперечного сечения взаимодействие ослабляется, асимметрии пучков не наблюдается, и на выходе из кристалла их максимальная относительная интенсивность практически одинакова.

Все теоретические результаты, полученные в данной работе, хорошо согласуются с экспериментальными результатами, изложенными в [36] и могут быть использованы при определении:

- оптимальных параметров кристалла SBN;
- направления внешнего электрического поля и значения его напряженности;
- размеров и взаимного расположения двумерных световых пучков с целью осуществления энергетического обмена между ними, а также достижения их квазисолитонного распространения, которое может быть использовано при проектировании оптических волноводных устройств, осуществляющих каналирование световых потоков, передачу и обработку информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Solymar, L. The physics and applications of photorefractive materials / L. Solymar, D.J. Webb, A. Grunnet-Jepsen. – Oxford : Clarendon Press, 1996. – 494 p.
2. Петров, М.П. Фоторефрактивные кристаллы в когерентной оптике / М.П. Петров, С.И. Степанов, А.В. Хоменко. – СПб. : Наука, 1992. – 320 с.
3. Cuniot-Ponsard, M. Strontium Barium Niobate Thin Films for Dielectric and Electro-Optic Applications. *Ferroelectrics - Material Aspects* / M. Cuniot-Ponsard. – InTech. –2011. – P. 498–518.
4. Francombe, M.H. The relation between structure and ferroelectricity in lead barium and strontium niobates / M.H. Francombe / *Acta Cryst.* – 1960. – Vol. 13. – Pt. 2. – P. 131–140.
5. Stoyanov, L. Initiating self-focusing of beams carrying spatial phase singularities /L. Stoyanov, G. Maleshkov, I. Stefanov, A. Dreischuh / *JOSA B.* – 2014. – Vol. 31. – P. 1159–1164.
6. Keshavarz, A. Propagation of Incoherently Coupled Soliton Pairs in Photorefractive Crystals and their Self-Deflection / A. Keshavarz, Z. Abbasib, M. Hatamia / *International Journal of Optics and Photonics.* – 2012. – Vol. 6, No. 1. – P. 13–20.
7. Measuring the relation between pulse front tilt angle and beam size for ultrashort pulses / N. Dimitrov [et al.] / *Bulgarian Journal of Physics.* – 2016. – Vol. 43. – P. 21–29.
8. Soliton formation by decelerating interacting Airy beams / F. Diebel [et al.] / *Optics Express.* – 2015. – Vol. 23, Is.19 – P. 24351–24361.
9. Observation of spatially oscillating solitons in photonic lattices / F Diebel [et al.] / *New J. Phys.* – 2016. – Vol. 18. – P. 053038:8.
10. Photorefractive writing and probing of anisotropic linear and non-linear lattices / R. Allio [et al.] / *Journal of Optics*– 2015. – Vol. 17, No.2 – P. 049601:10.
11. Stimulated Raman scattering of 18 picosecond laser pulses in strontium barium niobate crystal / T.T. Basiev [et al.] / *Laser Phys. Lett.* – 2012. – Vol. 9, No.7 – P. 519–523.
12. Investigations on Fe-doped strontium barium niobate, single phase ferroelectric and magnetodielectric compounds / S.H Kshirsagar [et al.] / *Journal of advanced dielectrics.* – 2015. – Vol. 5. – No. 1. – P. 1550001:8.
13. Effect of Ni doping on ferroelectric, dielectric and magneto dielectric properties of strontium barium niobate ceramics / S. H. Kshirsagar [et al.] / *Indian Journal of Pure & Applied Physics.* – 2015. – Vol. 53. – P. 119–124.
14. Electronic and Optical Properties of Strontium Barium Niobate Single Crystals / B. Andriyevsky [et al.] / *Ferroelectrics.* – 2012. – Vol. 426. – P. 194–205.
15. Двухфотонное межзонное поглощение в кристаллах ниобата бария-стронция / П.Г. Зверев [и др.] / *Квантовая электроника.* – 2012. – Т. 42, № 7. – С. 595–599.
16. Ferroelectric and dielectric characterization studies on relaxor-and ferroelectric-like strontium-barium niobates / K. Matyjasek [et al.] / *Condensed Matte Physic.* – 2013. – Vol. 16., No. 3 – P. 31701:1.
17. Calvo M.L. *Optical Waveguides: From Theory to Applied Technologies 1st Edition* / M.L. Calvo, V. Lakshminarayanan. – CRC Press, 2007. – 424 p.
18. Coherence Controlled Soliton Interactions / T-S. Ku [et al.] / *Phys Rev Lett.* – 2005. – Vol. 94, No.6 – P. 063904:4.
19. Interactions of incoherent localized beams in a photorefractive medium / Y. Zhang [et al.] / *JOSA B.* – 2014. – Vol. 31, Is.10 – P. 2258–2262.
20. Взаимодействие экранирующих солитонов в кубических оптически активных фоторефрактивных кристаллах / В. В. Шепелевич [и др.] // *Квантовая электроника.* – 2005. – Т.35, № 3. – С. 351–355.
21. Counterpropagating optical beams and solitons / M.S. Petrovihc [et al.] / *Laser Photonics Rev.* – 2011. – Vol. 5, No.10 – P. 214–233.
22. Shen, M. Control on the anomalous interactions of Airy beams in nematic liquid crystals / M. Shen, W. Li, R.-K. Lee / *Optics Express.* – 2016. – Vol. 24, Is.8 – P. 8501–8511.
23. Zozulya, A.A. Propagation of an optical beam in a photorefractive medium in the presence of a photogalvanic nonlinearity or an externally applied electric field // A.A. Zozulya, D.Z. Anderson // *Phys. Rev. A.* – 1995. – Vol. 51. – P. 1520–1532.

24. Interaction of spatial photorefractive solitons / W. Królikowski [et al.] // *Quantum Semiclass. Opt.* – 1998. – Vol. 10. – P. 823–837.
25. Stepken, A. Anisotropic interaction of three-dimensional spatial screening solitons / A. Stepken, F. Kaiser, M.R. Belić // *J. Opt. Soc. Am. B.* – 2000. – Vol. 17. – P. 68–77.
26. Holographic storage in electrooptic crystals / N.V. Kukhtarev [et al.] // *Ferroelectrics.* – 1979. – Vol. 22, № 3–4. – P. 961–964.
27. Analysis of transverse Anderson localization in refractive index structures with customized random potential / M. Boguslawski [et al.] // *Optics Express.* – 2013. – Vol. 21, Is.26 – P. 31713–31724.
28. Królikowski, W. Photorefractive Solitons / W. Królikowski, B. Luther-Davies, C. Denz // *IEEE Journal of Quantum Electron.* – 2003. – Vol. 39, № 1. – P. 3–12.
29. Królikowski, W. Photorefractive materials and solitons / W. Królikowski, B. Luther-Davies, Y. Kivshar // *Opt. Electron. Rev.* – 2001. – Vol. 9, № 3. – P. 287–292.
30. Mitchel, A.R. *Computational Methods in Partial Differential Equations* / A.R. Mitchel. – New York: Wiley, 1969. – 255 p.
31. Lizhong, S. Modified finite-difference beam-propagation method based on the Douglas scheme / S. Lizhong, G.L. Yip // *Opt. Lett.* – 1993. – Vol. 18, № 15. – P. 1229–1231.
32. Interferometric measurements of the photoinduced refractive index profiles in photorefractive $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ / G.S. Garcia Quirino [et al.] // *Opt. Commun.* – 1996. – Vol. 123. – P. 597–602.
33. Roychoudhuri, C. *The Nature of Light: What is a Photon? (Optical Science and Engineering)* / C. Roychoudhuri, A.F. Kracklauer, K. Creath. – Taylor & Francis Inc. : CRC Press, 2008.
34. Design and Evaluation of Light Spread Function for Area-Adaptive LCD System / Y.-K. Cheng [et al.] // *J. Display Technol.* – 2009. – Vol. 5, № 2 – P. 66–71.
35. Dickey, F.M. *Laser beam shaping theory and techniques* / F.M. Dickey, S.C. Holswade. – New York : Marcel Dekker Inc., 2000. – 428 p.
36. Interaction of two-dimensional rectangular light beams in a photorefractive SBN crystal / D. Khmelnskiy [et al.] // *Ferroelectrics.* – 2009. – Vol. 390. – P. 116–127.

Поступила 18.03.2019

ENERGY EXCHANGE BETWEEN INTERACTION BEAMS IN PHOTOREFRACTIVE SBN CRYSTAL

V. DAVYDOVSKAYA

The features of the interaction of two-dimensional light beams in a SBN photorefractive crystal placed in an external constant electric field are established, depending on the location of the light beams relative to each other, as well as on the intensity vector of the external electric field. The conditions for energy exchange between in-phase two-dimensional light beams were found during their interaction in an SBN photorefractive crystal placed in an external electric field applied along the optical axis of the crystal.

Keywords: *photorefractive crystal, external electric field, two-dimensional light beams, super-Gaussian profile, optical axis of the crystal, optimal conditions, energy exchange.*

УДК 537.623

СВОЙСТВА КЕРАМИКИ $(\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x)\text{Fe}_2\text{O}_4$ СО СЛОИСТОЙ СТРУКТУРОЙ

*д-р физ.-мат. наук, проф. В.Н. ШУТ, канд. физ.-мат. наук, доц. С.Р. СЫРЦОВ,
В.Л. ТРУБЛОВСКИЙ*

(ГНУ «Институт технической акустики НАН Беларуси», Витебск);

Д.В. ЖИГУЛИН

(ООО «ИНТЕГРАЛ», Минск)

По толстопленочной технологии изготовлены образцы однородной ($x = 0; 0,1; 0,2$) и многослойной керамики со «встречным» градиентом состава ($x = 0,2 \rightarrow 0 \rightarrow 0,2$) на основе твердых растворов никель-цинковых ферритов $(\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x)\text{Fe}_2\text{O}_4$. Использование двухступенчатого режима спекания позволило обеспечить синтез керамики и сохранить закономерно-неоднородное распределение химических элементов по толщине градиентных образцов. Исследованы особенности намагничивания многослойных структур при двух вариантах приложения внешнего магнитного поля: параллельно и перпендикулярно плоскости образца. Результирующая петля гистерезиса для многослойного градиентного образца может быть получена «суммированием» петель однородных слоев структуры.

Ключевые слова: *керамические композиты, микроструктура, магнитные свойства.*

Введение. Ферроики – это класс материалов, обладающих фазовым переходом, при котором происходит изменение симметрии кристаллических твердых тел. При магнитном фазовом переходе возникает спонтанная намагниченность, при сегнетоэлектрическом – спонтанная электрическая поляризация. Благодаря своим уникальным свойствам ферроики находят широкое применение в различных областях науки и техники [1]. Для модификации свойств полярных материалов и адаптации к конкретным приложениям их легируют различными примесями. В этом плане перспективным подходом является создание структур с градиентом состава, когда примеси распределены в объеме материала не однородно, а по некоторому закону. Наибольший прогресс в этой области достигнут при формировании сегнетоэлектрических структур с градиентом состава (compositionally graded ferroelectrics) [2–4]. Объем исследований по другим типам ферроиков (в частности, магнитным) существенно меньше. Представляет интерес использование градиентных материалов в мультиферроиках – веществах, в которых сосуществование магнитной и сегнетоэлектрической подсистем приводит к появлению магнитоэлектрического (МЭ) эффекта [5, 6]. Теоретически предсказано, что МЭ константы в слоистых композитах (со связностью 2-2) значительно возрастают при использовании структур с градиентом состава (свойств) в качестве сегнетоэлектрической и (или) магнитной компоненты [7]. Поэтому создание и исследование градиентных магнитных материалов представляется весьма актуальным. В работе [8] представлены результаты исследования многослойной керамики на основе феррита $(\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x)\text{Fe}_2\text{O}_4$ со «стандартным» градиентом состава (плавное изменение состава по толщине образцов), полученных по толстопленочной технологии (методом шликерного литья). Процесс изготовления таких образцов имеет некоторые технологические трудности. Соседние слои имеют разное соотношение Ni/Zn. Соответственно отличаются температуры усадки и спекания слоев. Поэтому сложно подобрать оптимальные режимы спекания. Зачастую имеет место деформация образцов. Это снижает их практическую привлекательность при использовании в качестве магнитной подсистемы МЭ элементов, поскольку свойства композиционных мультиферроиков зависят не только от состава и типа связанности, но и от качества контакта между сегнетоэлектриком и магнетиком (на границе сегнетоэлектрик-магнетик).

Поэтому представляет интерес исследовать возможность получения градиентных магнитных слоев с другими типами пространственного изменения состава, позволяющих избежать указанных недостатков. Целью данной работы является получение керамики на основе никель-цинковых ферритов $(\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x)\text{Fe}_2\text{O}_4$ со «встречным» градиентом состава ($x = 0,2 \rightarrow 0 \rightarrow 0,2$) и изучение их магнитных характеристик.

Образцы и методы эксперимента. Порошки никель-цинковых ферритов были синтезированы с использованием оксидов ZnO и Fe_2O_3 марки «ЧДА» и NiO квалификации «Ч». Смешивание и помол компонентов осуществлены в шаровой мельнице в присутствии жидкой среды (этиловый спирт) в течение 1 ч. Синтез проводился на воздухе в два этапа. На первом этапе синтез осуществлялся при температуре 1020°C в течение 2 ч. Далее проводился повторный помол и спекание при температуре 1020°C в течение 1 ч. В таких условиях были синтезированы порошки $(\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x)\text{Fe}_2\text{O}_4$ трех составов: $x = 0; 0,1; 0,2$.

Из приготовленных порошков методом шликерного литья получали пленки толщиной ~ 25 мкм [9]. Однородные структуры (с фиксированной концентрацией цинка) собирались из пленок одинакового состава. Для изготовления структур с градиентом состава ($x = 0,2 \rightarrow 0 \rightarrow 0,2$) совместно прессовались пленки различных составов $(\text{Ni}_{0,8}\text{Zn}_{0,2})\text{Fe}_2\text{O}_4 + (\text{Ni}_{0,9}\text{Zn}_{0,1})\text{Fe}_2\text{O}_4 + \text{NiFe}_2\text{O}_4 + (\text{Ni}_{0,9}\text{Zn}_{0,1})\text{Fe}_2\text{O}_4 + (\text{Ni}_{0,8}\text{Zn}_{0,2})\text{Fe}_2\text{O}_4$ – по два слоя каждого состава (рисунок 1).

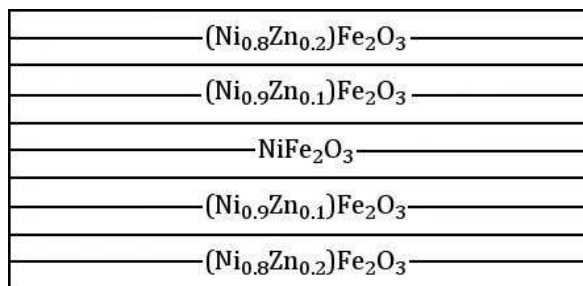


Рисунок 1. – Схема структуры со «встречным» градиентом ($x = 0,2 \rightarrow 0 \rightarrow 0,2$)

В работе [8] при изготовлении образцов со «стандартным» градиентом состава по толщине ($x = 0 \rightarrow 0,2$) нам приходилось спрессовывать по три пленки каждого состава. Это необходимая мера, поскольку образцы, изготовленные путем прессования по одной или по две пленки каждого состава, при спекании заметно деформировались (хотя и сохраняли целостность). Из пакетов вырубались заготовки размерами 5,5×4,0 мм. Для уменьшения диффузионных процессов на границах слоев с различным составом был применен двухступенчатый режим спекания образцов [10]. На первом этапе температура повышалась до максимального значения 1270°C (скорость нагрева составляла 350°C/ч), затем снижалась до 1100°C, при которой осуществлялась выдержка в течение 3 ч. Окончательная толщина многослойных образцов составляла ~ 260 мкм. Полученные керамические образцы не имели видимых деформационных искажений.

Рентгеноструктурные исследования выполнены при температуре ~ 300 К с использованием $\text{CuK}\alpha$ -излучения в режиме съемки дифракционного рассеяния по точкам. Время набора информации в точке составляло $\Delta t = 3$ с, шаг сканирования по углу $\Delta 2\theta = 0,03^\circ$. Исследования микроструктуры и распределения химических элементов выполнены на сканирующем электронном микроскопе высокого разрешения S-4800 (Hitachi).

Зависимости удельной намагниченности от величины индукции магнитного поля $\sigma = f(B)$ изучены при помощи автоматизированного вибрационного магнитометра фирмы Cryogenic Limited. Исследования проводились при двух вариантах приложения внешнего магнитного поля: параллельно и перпендикулярно плоскости образца.

Результаты эксперимента и их обсуждение. Рентгеноструктурные исследования однородных образцов показали, что используемая технология синтеза позволяет получать однофазные структуры в диапазоне концентрации замещения никеля цинком $x = 0-0,2$. Результаты дифракционного анализа керамики составов NiFe_2O_4 и $(\text{Ni}_{0,8}\text{Zn}_{0,2})\text{Fe}_2\text{O}_4$ представлены на рисунке 2. Видно, что дифракционные пики смещаются в сторону меньших углов при изменении концентрации Zn от $x = 0$ до $x = 0,2$. Это указывает на увеличение объема ячейки при увеличении концентрации цинка и согласуется с влиянием размерного фактора для твердых растворов замещения, когда радиус иона замещения цинка ($r(\text{Zn}^{2+}) = 0,74 \text{ \AA}$) больше, чем у замещаемого иона никеля ($r(\text{Ni}^{2+}) = 0,69 \text{ \AA}$ (при координационном числе 6) [11]. Параметр элементарной ячейки увеличивается от значения $a = 8,34 \text{ \AA}$ (для $x = 0$) до $8,40 \text{ \AA}$ (при $x = 0,2$).

Рентгеноструктурный анализ градиентных структур показал, что положения дифракционных рефлексов (и параметры элементарных ячеек), полученные с поверхностей образцов, близки к значениям для соответствующих однородных материалов ($a = 8,41 \text{ \AA}$).

Исследование распределения элементов по толщине материалов $(\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x)\text{Fe}_2\text{O}_4$ с ($x = 0,2 \rightarrow 0 \rightarrow 0,2$) подтверждают наличие градиента состава (рисунок 3). Концентрация никеля возрастает в направлении от края (10,9 мол.%) к центру (13 мол.%) образца; содержание цинка, наоборот, минимально в центральной области. При этом в центральной области концентрация цинка отлична от нуля (составляет ~ 0,3 мол.%). Т.е. цинк диффундирует на глубину более 20 мкм от границы слоев. Таким образом, используемый двухстадийный режим спекания позволяет достичь компромисса: обеспечить синтез керамики и сохранить при этом закономерно неоднородное распределение химических элементов.

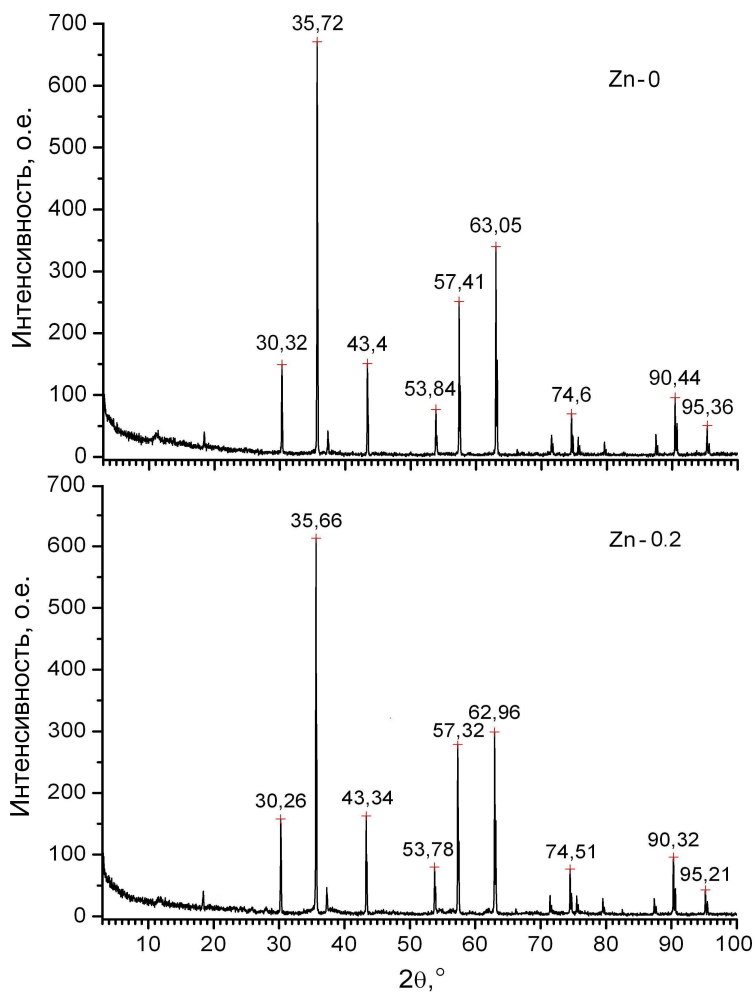


Рисунок 2. – Дифрактограммы однородной керамики NiFe_2O_4 и $(\text{Ni}_{0,8}\text{Zn}_{0,2})\text{Fe}_2\text{O}_4$

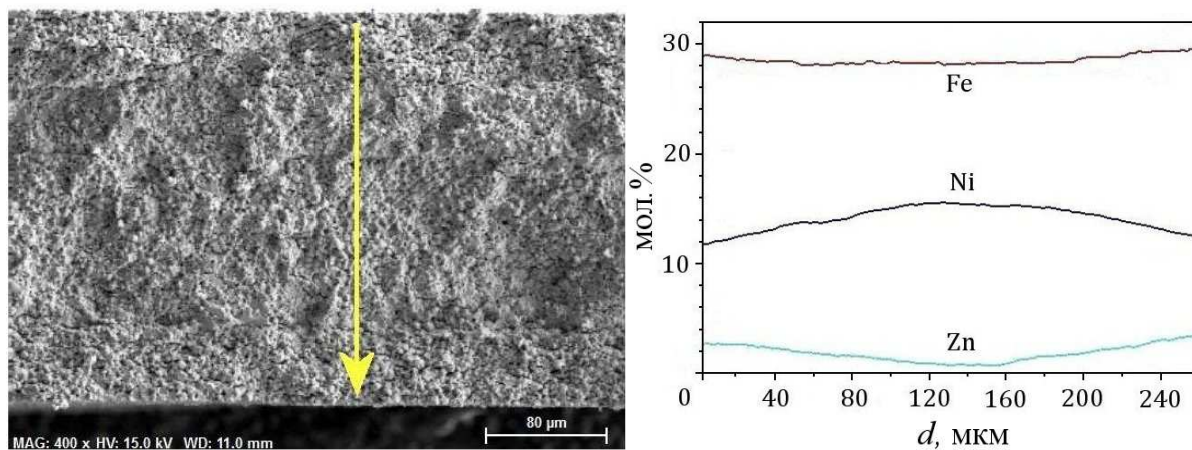


Рисунок 3. – Фотография торца (стрелкой указана линия, вдоль которой проводились измерения) и распределение элементов по толщине градиентной керамики $(\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x)\text{Fe}_2\text{O}_4$ ($x = 0,2 \rightarrow 0 \rightarrow 0,2$)

Зависимости удельной намагниченности от величины индукции магнитного поля $\sigma = f(B)$ изучены при комнатных температурах в геометрии параллельного и перпендикулярного направления магнитного поля относительно плоскости пленок (рисунок 4).

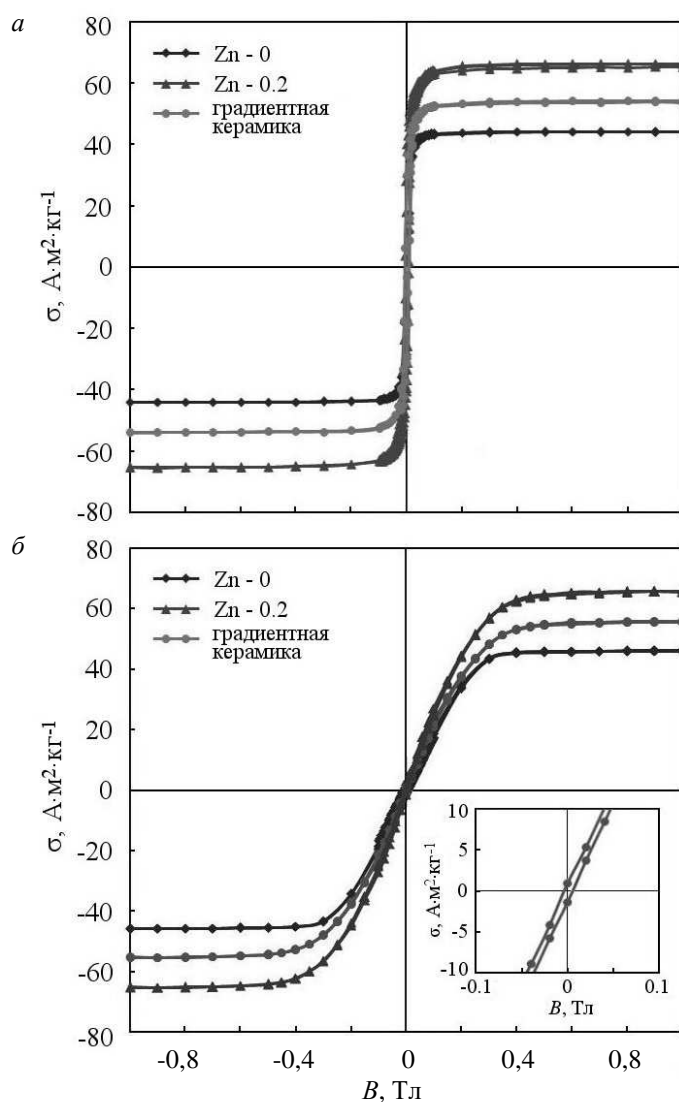


Рисунок 4. – Петли магнитного гистерезиса однородных образцов $(\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x)\text{Fe}_2\text{O}_4$ ($x = 0, 0,2$) и градиентной керамики: *a* – магнитное поле параллельно поверхности, *б* – магнитное поле перпендикулярно поверхности

В однородных образцах удельная намагниченность увеличивается от $\sigma = 46 \text{ A} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$ (при $x = 0$) до $\sigma = 57 \text{ A} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$ (при $x = 0,2$). Феррит никеля является ферримагнетиком. Ферримагнитные свойства феррита никеля определяются сверхобменными А-О-В взаимодействиями между катионами, находящимися в тетрагональной (А) и октаэдрической (В) позициях шпинельной структуры. Магнитные моменты ионов направлены антипараллельно в этих подрешетках. Внедрение немагнитных ионов цинка на А-позиции приводит к вытеснению ионов Fe^{3+} в октаэдрические В-позиции ($(\text{Fe}_{1-x}^{3+} \text{Zn}_x^{2+})(\text{Fe}_{1+x}^{3+} \text{Ni}_{1-x}^{2+})\text{O}_4$) и соответственно к увеличению разности намагниченности подрешеток. Таким образом, величина общей намагниченности феррита возрастает по мере увеличения концентрации цинка до значения $x = 0,4$, при которой происходит снижение уровня обменного взаимодействия между ионами А и В подрешеток [1]. Значения намагниченности в состоянии насыщения при различных геометриях эксперимента практически одинаковы. При этом существенно увеличивается напряженность магнитного поля (~ 10 раз), необходимая для достижения насыщения в случае приложения поля перпендикулярно плоскости пленки. Это обусловлено влиянием размагничивающего фактора при данной геометрии эксперимента (толщина образцов существенно меньше размеров поверхности).

Петли магнитного гистерезиса градиентных материалов являются симметричными по обеим осям. Искажений в виде перетяжек также не наблюдается. Значение намагниченности близко к соответствующему

шему значению для образцов с $x = 0,1$ ($\sigma = 56 \text{ А} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-1}$). Ранее нами было показано, что интегральная петля магнитного гистерезиса многослойной структуры ($x = 0 \rightarrow 0,2$) может быть получена «суммированием» ординат петель магнитного гистерезиса отдельных слоев керамики. Для аппроксимации петель гистерезиса использовались выражения, применяемые при анализе процессов поляризации сегнетоэлектрических систем [8, 12].

$$\sigma = \pm \sigma_s \operatorname{th} \left(\frac{\pm B - B_c}{2\delta} \right), \quad (1)$$

где σ_s — намагниченность насыщения;
 σ_r — остаточная намагниченность;
 B_c — индукция магнитного поля (верхний знак соответствует восходящей ветви петли, нижний знак — нисходящей).

Значение параметра δ определяется соотношением

$$\delta = \sigma_s \left[\ln \left(\frac{1 + \frac{\sigma_r}{\sigma_s}}{1 - \frac{\sigma_r}{\sigma_s}} \right) \right]^{-1}. \quad (2)$$

Использование приведенных выше выражений при моделировании поведения магнитных характеристик структур со «встречным» градиентом также хорошо согласуется с экспериментом. Т.е. такое «суммирование» дает хороший результат и не зависит от последовательности чередования слоев различного состава (типа градиента состава).

При геометрии эксперимента, когда внешнее поле коллинеарно градиенту величины намагниченности (или градиенту состава) — $\mathbf{H} \parallel \nabla \sigma$, теоретически предсказана возможность формирования внутреннего магнитного поля \mathbf{H}_{int} , приводящего к сдвигу петли гистерезиса [13]. Согласно соотношению

$\mathbf{H}_{int} = - \int \frac{dM}{dz} dz$, при созданной в исследуемых образцах величине градиента намагниченности

$\frac{d\sigma}{dz} \approx 90 \frac{\text{А} \cdot \text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{мм}}$, горизонтальный сдвиг петли должен быть значительным ($\sim 0,1 \text{ Т}$). Однако в пределах

погрешности эксперимента сдвига петли гистерезиса (ни по оси удельной намагниченности σ , ни по оси магнитной индукции B), свидетельствующего о наличии в градиентных материалах внутреннего поля, нами обнаружено не было. Т.е. эффект возникновения внутренних полей, наблюдаемый в тонкопленочных градиентных структурах [13], в объемных материалах не реализуется. Причины такого расхождения эксперимента с теорией проанализированы в работе [8] и могут быть связаны с формированием полидоменной структуры в объемных материалах, что препятствует возникновению внутреннего магнитного поля.

Заключение. По толстопленочной технологии получены образцы однородной ($x = 0; 0,1; 0,2$) и многослойной керамики со «встречным» градиентом состава ($x = 0,2 \rightarrow 0 \rightarrow 0,2$) на основе твердых растворов никель-цинковых ферритов $(\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x)\text{Fe}_2\text{O}_4$. Показано, что применение двухступенчатого режима спекания позволяет обеспечить синтез однофазной керамики и сохранить при этом закономерно неоднородное распределение химических элементов по толщине градиентных образцов. После высокотемпературной термообработки в градиентных материалах концентрация никеля возрастала в направлении от края (10,9 мол.%) к центру (13 мол.%) образца; содержание цинка, наоборот, минимально в центральной области.

Исследованы особенности намагничивания полученных многослойных структур при двух вариантах приложения внешнего магнитного поля: параллельно и перпендикулярно плоскости образца. В однородных образцах удельная намагниченность увеличивается от $\sigma = 46 \text{ А} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-1}$ (при $x = 0$) до $\sigma = 57 \text{ А} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-1}$ (при $x = 0,2$). Результирующая петля гистерезиса для многослойного градиентного образца получается «суммированием» петель однородных слоев структуры. Внутренних полей, приводящих к сдвигу и искажению магнитных петель гистерезиса, в исследуемых материалах обнаружено не было. Используемый в работе метод получения градиентных структур может быть эффективен при изготовлении магнитных материалов с модифицированными характеристиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Moulson, A.J. *Electroceramics* / A.J. Moulson, J.M. Herbert. — New York : Wiley, 2003. — 557 p.

2. Misirlioglu, I.B. Compositionally graded ferroelectrics as wide band gap semiconductors: Electrical domain structures and the origin of low dielectric loss / I.B. Misirlioglu, S.P. Alpay // *Acta Materialia*. – Vol. 122. – 2017. – P. 266–276.
3. Шут, В.Н. Поляризационные характеристики градиентных толстых пленок $Ba_{1-x}Sr_xTiO_3$ / В.Н. Шут, С.Р. Сырцов, В.Л. Трубловский // *ФТТ*. – 2011. – Т. 53, № 9. – С. 1761–1767.
4. Dielectric properties of compositionally graded $Ba_{1-x}La_xTi_{1-x/4}O_3$ thick films / P. Ren [et al.] // *Ceramics International*. – 2017. – Vol. 43, № 6. – P. 5347–5350.
5. Recent Progress in Multiferroic Magnetolectric Composites: from Bulk to Thin Films / J. Ma [et al.] // *Adv. Mater.* – 2011. – Vol. 23. – P. 1062–1087.
6. Srinivasan, G. Magnetolectric Composites / G. Srinivasan // *Annu. Rev. Mater. Res.* – 2010. – Vol. 40. – P. 153–178.
7. Petrov, V.M. Enhancement of magnetolectric coupling in functionally graded ferroelectric and ferromagnetic bilayers / V.M. Petrov, G. Srinivasan // *Phys. Rev. B*. – 2008. – Vol. 78, № 18. – P. 184421-8.
8. Кристаллическая структура и магнитные свойства керамики $(Ni_{1-x}Zn_x)Fe_2O_4$ с градиентом состава / В.Н. Шут [и др.] // *Физика твердого тела*. – 2016. – Т. 58, № 10. – С. 1907–1912.
9. Compositionally Graded BST Ceramics Prepared by Tape Casting / V.N. Shut [et al.] // *Ferroelectrics*. – 2009. – Vol. 386. – P. 125–132.
10. Microstructure Evolution and Dielectric Properties of Ultrafine Grained BaTiO₃-based Ceramics by Two-step Sintering / Z. Tian [et al.] // *J. Am. Ceram. Soc.* – 2011. – Vol. 94, № 4. – P. 1119–1124.
11. Shannon, R.D. Revised Effective Ionic Radii and Systematic Studies of Interatomic Distances in Halides and Chalcogenides / R.D. Shannon // *Acta Crystallogr. A*. – 1976. – Vol. 32. – P. 751–767.
12. Берман, Л.С. Структурные дефекты на границе раздела сегнетоэлектрик-полупроводник / Л.С. Берман, И.Е. Титков // *ФТП*. – 2004. – Т. 38, № 6. – С. 710–715.
13. Magnetization-graded ferromagnets: The magnetic analogs of semiconductor junction elements / J.V. Mantese [et al.] // *Appl. Phys. Lett.* – 2005. – Vol. 87. – P. 082503-3.

Поступила 28.03.2019

PROPERTIES OF $(Ni_{1-x}Zn_x)Fe_2O_4$ CERAMICS WITH LAYERED STRUCTURE

V. SHUT, S. SYRISOV, V. TRUBLOVSKY, D. ZHIGULIN

Using the thick-film technology, the samples of homogeneous ($x = 0; 0,1; 0,2$) and multilayer ceramics with “oncoming” compositional gradient ($x = 0,2 \rightarrow 0 \rightarrow 0,2$) based on solid solutions of nickel – zinc ferrites $(Ni_{1-x}Zn_x)Fe_2O_4$ have been obtained. The features of the magnetization of multilayer structures were investigated with two variants of application of external magnetic field (parallel and perpendicular to the sample plane). The resulting hysteresis loop for multilayer gradient sample can be obtained by “summing up” the loops of homogeneous layers of the structure.

Keywords: ceramic composites, microstructure, magnetic properties.

МАТЕМАТИКА

УДК 511.8

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ ВО МНОЖЕСТВЕ ПОЛУКВАТЕРНИОНОВ

канд. физ.-мат. наук, доц. А.А. КОЗЛОВ,
 К.С. СУРАВНЕВА, Н.Д. ЖАЛЕЙКО
 (Полоцкий государственный университет)

Предложено определение преобразования подобия для полукватернионов и доказано, что, вообще говоря, это преобразование (так же, как и в случае кватернионов [2, с. 29]) изменяет вид преобразуемого гиперкомплексного числа. Получена формула преобразования подобия полукватернионов и некоторые следствия, из нее вытекающие. В дальнейшем планируется установить геометрический смысл этого преобразования.

Ключевые слова: полукватернионы, гиперкомплексные числа, преобразование подобия.

Введение. На сегодняшний день теория гиперкомплексных чисел представляет собой не только достаточно стройную фундаментальную математическую теорию, но и действенный аппарат для решения многих прикладных задач. Так, например, дуальные числа позволяют математически, с определенной степенью точности, описать физическое пространство-время [1], кватернионы используются в вопросах управления космическим аппаратом [2, 3], при решении задач компьютерного моделирования 3D-объектов [4] и др.

Сама теория гиперкомплексных чисел появилась как обобщение теории действительных чисел. Первым таким обобщением стало множество комплексных чисел, т.е. чисел вида $z = a + bi$, где a, b – действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Необходимость введения этой числовой совокупности была обусловлена тем, что во множестве действительных чисел не каждое алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами имело решение. Во введенном же множестве комплексных чисел, как выяснилось, всякое алгебраическое уравнение n -й степени с комплексными коэффициентами обладает ровно n корнями с учетом их кратностей. Это так называемая основная теорема алгебры [7]. Другим распространением понятия «действительное число» [8, с. 20–23] стало введение множества дуальных чисел, т.е. чисел вида $a + bi$, в которых a, b – действительные числа, а мнимая единица $i^2 = 0$, причем $i \notin R$ (здесь и всюду далее R обозначает совокупность действительных чисел). Такое множество, как выяснилось совсем недавно, позволяет достаточно точно математически смоделировать физическое пространство-время [1].

Дальнейшее распространение теории комплексных чисел нашло свое отражение во введенном В. Гамильтоном в 1843 г. понятии кватерниона [8, с. 28]

$$q = a + bi + cj + dk,$$

где a, b, c, d – действительные числа;

$i, j, k \notin R$ – базисные (кватернионные) единицы, для которых выполняются соотношения:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad ik = -j, \quad kj = -i, \quad ji = -k.$$

Такие числа, а также последующие их обобщения, и стали в дальнейшем носить название *гиперкомплексные числа*. Позднее оказалось, что кватернионы являются не просто отдельным теоретическим объектом математики, но хорошим алгебраическим средством для описания вращений в трех- и четырехмерном векторном пространстве [2, 4], которые, в свою очередь, широко используются [9, 10] в электродинамике, квантовой и теоретической физиках, теории управления [2], компьютерном моделировании 3D-объектов [4] и других областях знаний.

Иным обобщением множества комплексных чисел явилось введенное в 1997 г. Б. Розенфельдом в работе «Геометрия групп Ли» [5] понятие полукватерниона как обобщения комплексного числа, являющееся своего рода синтезом дуальных и комплексных чисел. Позднее, в 2013 г., иранскими математиками Х. Мортазашлом и М. Джафари были определены [6] арифметические операции во множестве полукватернионов и изучены свойства этих операций, а также получены решения отдельных классов уравнений над полукватернионами.

Определение 1 [5]. Действительным полукватернионом (или просто полукватернионом) назовем формальное выражение

$$q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k, \quad (1)$$

в котором a_0, a_1, a_2, a_3 – действительные числа; $i, j, k \notin \mathbb{R}$ – кватернионные (базисные) единицы, для которых выполняются соотношения:

$$i^2 = -1, \quad j^2 = k^2 = 0, \quad ij = k, \quad ji = -k, \quad ik = -j, \quad ki = j, \quad jk = 0, \quad kj = 0.$$

Множество всех полукватернионов обозначим через H_s .

Определение 2 [6]. Суммой полукватернионов $q_1 = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ и $q_2 = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$ будем называть полукватернион $q = q_1q_2 \in H_s$, определяемый равенством

$$q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k. \quad (2)$$

Определение 3. [6] Произведением полукватернионов $q_1 = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ и $q_2 = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$ назовем полукватернион $q = q_1q_2 \in H_s$, определяемый следующим равенством:

$$q = (a_0b_0 - a_1b_1) + (a_0b_1 + a_1b_0)i + (a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1)j + (a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)k. \quad (3)$$

Операцию произведения полукватернионов можно представить [6] в матрично-векторной форме, т.е. в виде произведения матрицы с элементами (некоторыми коэффициентами первого полукватерниона) на вектор, элементами которого являются числа, стоящие при действительной и мнимых единицах второго сомножителя

$$q = q_1q_2 = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Последнее представление, а также операции над полукватернионами, было предложено иранскими математиками Х. Мортазашлом и М. Джафари в статье [6], в которой кроме того были введены определения нормы и сопряженного полукватерниона и установлены нижеприведенные теоремы 1 и 2.

Теорема 1 [6]. Операция произведения замкнута во множестве полукватернионов и обладает свойствами ассоциативности, некоммутативности и дистрибутивности относительно операции сложения полукватернионов.

Пример 1. Пусть даны полукватернионы

$$q_1 = 4 - 6i + 5j - 3k \quad \text{и} \quad q_2 = -2 + 6i + 9j + k.$$

Тогда их произведением будет полукватернион

$$q_1q_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 4 & 6 \\ -3 & -5 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 36 \\ 14 \\ -74 \end{pmatrix} = 28 + 36i + 14j - 74k.$$

Определение 4. [6] Сопряженным полукватернионом для $a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ назовем полукватернион

$$\bar{q} = a_0 - (a_1i + a_2j + a_3k) \in H_s. \quad (5)$$

Пример 1 (продолжение). Сопряженным для полукватерниона q_1 является полукватернион

$$\bar{q}_1 = 4 + 6i - 5j + 3k. \quad (6)$$

Определение 5. [6] *Нормой полукватерниона* $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ назовем действительное число, равное

$$N_q = q \cdot \bar{q} = a_0^2 + a_1^2. \quad (7)$$

Пример 1 (продолжение). Норма полукватерниона q_1 равна

$$N_{q_1} = 4^2 + (-6)^2 = 52. \quad (8)$$

Определение 6. [6] *Обратным для полукватерниона* $q \in H_s$ назовем полукватернион $q^{-1} \in H_s$, вычисляемый по формуле

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N_q}, \quad (9)$$

где $N_t \neq 0$.

Пример 1 (продолжение). В силу **определения 6** с учетом формул (6) и (8) обратным для полукватерниона q_1 является полукватернион

$$q_1^{-1} = \frac{1}{52}(4 + 6i - 5j + 3k).$$

Теорема 2 [6]. *При всяких* $q, q_1, q_2 \in H_s$ *и* $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *для операции сопряжения полукватернионов имеют место следующие свойства:*

$$1) \bar{\bar{q}} = q; \quad 2) \overline{c_1q_1 + c_2q_2} = c_1\bar{q}_1 + c_2\bar{q}_2; \quad 3) N_{cq} = c^2N_q; \quad 4) N_{q_1q_2} = N_{q_1} \cdot N_{q_2}; \quad 5) N_{\bar{q}} = N_q.$$

Основная часть. В настоящей работе введено преобразование подобия для множества полукватернионов и доказано, что в общем случае оно, как и для случая кватернионов, изменяет вид преобразуемого гиперкомплексного числа. Кроме того, предложены формула вычисления преобразования подобия полукватернионов и некоторые следствия, из нее вытекающие.

Определение 7. *Левым (правым) преобразованием подобия* $\Pi_t^l(q)$ ($\Pi_t^r(q)$) *полукватерниона* q *с помощью полукватерниона* t , *для которого* $N_t \neq 0$, *назовем следующее преобразование*

$$\Pi_t^l(q) = t(qt^{-1}) \quad (\Pi_t^r(q) = (tq)t^{-1}). \quad (10)$$

Замечание 1. В силу **теоремы 1** операция умножения полукватернионов является замкнутой во множестве полукватернионов, поэтому справедливо включение

$$\Pi_t^l(q) \in H_s \quad (\Pi_t^r(q) \in H_s).$$

Кроме того, ввиду той же теоремы операция умножения полукватернионов ассоциативна, а значит, левое и правое преобразование подобия совпадают, т.е. для любых $q \in H_s$ и $t \in H_s$, где $N_t \neq 0$, имеют место равенства

$$\Pi_t^l(q) = t(qt^{-1}) = (tq)t^{-1} = \Pi_t^r(q).$$

Таким образом, скобки в формуле (10) не играют никакой роли и, следовательно, можно говорить в целом о преобразовании подобия на множестве полукватернионов. Итак,

Определение 8. *Преобразованием подобия* $\Pi_t(q)$ *полукватерниона* q *с помощью полукватерниона* t , *где* $N_t \neq 0$, *будем называть преобразование вида*

$$\Pi_t(q) = tqt^{-1}. \quad (11)$$

Теорема 2 (формула преобразования подобия). Пусть даны $q \in H_s$ и $t \in H_s$, где $N_t \neq 0$. Тогда формула для преобразования подобия $\Pi_t(q)$ полукватерниона q с помощью полукватерниона t имеет вид

$$\Pi_t(q) = tqt^{-1} = q + \frac{2}{N_t} \begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & b_1 & -b_0 \\ a_3 & b_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Доказательство. Пусть даны произвольные полукватернионы $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ и $t = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$, причем $N_t \neq 0$. Тогда в силу **определения 6** для полукватерниона t найдется ему обратный, для которого верны равенства

$$t^{-1} = \frac{\bar{t}}{N_t} = \frac{1}{b_0^2 + b_1^2} (b_0 - b_1i - b_2j - b_3k). \quad (13)$$

Найдем вначале произведение qt^{-1} , а затем полученное выражение умножим слева на число t . При нахождении этих произведений будем пользоваться матрично-векторным представлением умножения полукватернионов (4), а также формулой (13). Имеем равенства

$$qt^{-1} = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{b_0}{b_0^2 + b_1^2} \\ -\frac{b_1}{b_0^2 + b_1^2} \\ -\frac{b_2}{b_0^2 + b_1^2} \\ -\frac{b_3}{b_0^2 + b_1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_0b_0}{b_0^2 + b_1^2} + \frac{a_1b_1}{b_0^2 + b_1^2} \\ \frac{a_1b_0}{b_0^2 + b_1^2} - \frac{a_0b_1}{b_0^2 + b_1^2} \\ \frac{a_2b_0}{b_0^2 + b_1^2} - \frac{a_3b_1}{b_0^2 + b_1^2} - \frac{a_0b_2}{b_0^2 + b_1^2} + \frac{a_1b_3}{b_0^2 + b_1^2} \\ \frac{a_3b_0}{b_0^2 + b_1^2} + \frac{a_2b_1}{b_0^2 + b_1^2} - \frac{a_1b_2}{b_0^2 + b_1^2} - \frac{a_0b_3}{b_0^2 + b_1^2} \end{bmatrix}$$

и, далее

$$t(qt^{-1}) = \begin{bmatrix} b_0 & -b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & b_0 & -b_1 \\ b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a_0b_0}{b_0^2 + b_1^2} + \frac{a_1b_1}{b_0^2 + b_1^2} \\ \frac{a_1b_0}{b_0^2 + b_1^2} - \frac{a_0b_1}{b_0^2 + b_1^2} \\ \frac{a_2b_0}{b_0^2 + b_1^2} - \frac{a_3b_1}{b_0^2 + b_1^2} - \frac{a_0b_2}{b_0^2 + b_1^2} + \frac{a_1b_3}{b_0^2 + b_1^2} \\ \frac{a_3b_0}{b_0^2 + b_1^2} + \frac{a_2b_1}{b_0^2 + b_1^2} - \frac{a_1b_2}{b_0^2 + b_1^2} - \frac{a_0b_3}{b_0^2 + b_1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \frac{a_2b_0^2 + (2a_1b_3 - 2a_3b_1)b_0 + 2a_1b_1b_2 - a_2b_1^2}{b_0^2 + b_1^2} \\ \frac{a_3b_0^2 + (-2a_1b_2 + 2a_2b_1)b_0 + 2a_1b_1b_3 - a_3b_1^2}{b_0^2 + b_1^2} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, преобразование подобия $\Pi_t(q)$ полукватерниона q с помощью полукватерниона t имеет вид

$$\Pi_t(q) = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \frac{a_2b_0^2 + (2a_1b_3 - 2a_3b_1)b_0 + 2a_1b_1b_2 - a_2b_1^2}{b_0^2 + b_1^2} \\ \frac{a_3b_0^2 + (-2a_1b_2 + 2a_2b_1)b_0 + 2a_1b_1b_3 - a_3b_1^2}{b_0^2 + b_1^2} \end{bmatrix}.$$

Отсюда с учетом равенства $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ следуют соотношения

$$\begin{aligned} \Pi_t(q) &= \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a_2b_0^2 + (2a_1b_3 - 2a_3b_1)b_0 + 2a_1b_1b_2 - a_2b_1^2}{b_0^2 + b_1^2} - a_2 \\ \frac{a_3b_0^2 + (-2a_1b_2 + 2a_2b_1)b_0 + 2a_1b_1b_3 - a_3b_1^2}{b_0^2 + b_1^2} - a_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(2a_1b_3 - 2a_3b_1)b_0 + 2a_1b_1b_2 - 2a_2b_1^2}{b_0^2 + b_1^2} \\ \frac{(-2a_1b_2 + 2a_2b_1)b_0 + 2a_1b_1b_3 - 2a_3b_1^2}{b_0^2 + b_1^2} \end{bmatrix} = \\ &= q + \frac{2}{b_0^2 + b_1^2} \left((a_1b_3b_0 - a_3b_1b_0 + a_1b_1b_2 - a_2b_1^2)j + (-a_1b_2b_0 + a_2b_0b_1 + a_1b_1b_3 - a_3b_1^2)k \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Преобразуем выражение, стоящее в скобках в последней формуле, используя известное свойство разложения определителя

$$\begin{aligned} &(a_1b_0b_3 - a_3b_0b_1 + a_1b_1b_2 - a_2b_1^2)j + (-a_1b_0b_2 + a_2b_0b_1 + a_1b_1b_3 - a_3b_1^2)k = \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & -b_0 \\ a_3 & b_3 & b_1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & -b_1 \\ a_3 & b_3 & -b_0 \end{vmatrix} k = \begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & b_1 & -b_0 \\ a_3 & b_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда отсюда и из формулы (14) с учетом равенства $N_t = b_0^2 + b_1^2 \neq 0$ получим требуемое соотношение (12).

Теорема 2 доказана.

Замечание 2. В силу формулы (12) и **определения 1** легко видеть, что при преобразовании подобия изменяется лишь часть полукватерниона при базисных единицах, квадрат которых равен нулю.

Пример 2. Рассмотрим преобразование подобия полукватерниона $q = 1 + 2i - 3j + 4k$ с помощью полукватерниона $t = 2 - i + 7j - 5k$, для которого очевидно справедливо неравенство $N_t = 2^2 + (-1)^2 = 5 \neq 0$.

Из формул (8) и (9) следует, что обратным для полукватерниона t является полукватернион

$$t^{-1} = \frac{\bar{t}}{N_t} = \frac{1}{5}(2 + i - 7j + 5k).$$

Найдем преобразование подобия $\Pi_t(q)$, для чего вычислим вначале произведение qt^{-1} , а затем полученное выражение умножим слева на число $t = 2 - i + 7j - 5k$. При вычислении указанных произведений будем использовать матрично-векторную запись произведения полукватернионов (4). Получим равенства

$$qt^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{19}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ и, далее, } t(qt^{-1}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & -5 & 2 & 1 \\ -5 & -7 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{19}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{61}{5} \\ -\frac{12}{5} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, преобразование подобия полукватерниона $q = 1 + 2i - 3j + 4k$ с помощью полукватерниона $t = 2 - i + 7j - 5k$ равно

$$\Pi_t(q) = 1 + 2i - \frac{61}{5}j - \frac{12}{5}k. \quad (15)$$

Воспользуемся теперь для рассматриваемых полукватернионов указанной в **теореме 2** формулой (12). Тогда, используя вначале разложение определителя по первой строке, а далее – правило вычисления определителя третьего порядка, получим соотношения

$$\begin{aligned} \Pi_t(q) &= q + \frac{2}{N_t} \begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & b_1 & -b_0 \\ a_3 & b_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} = (1 + 2i - 3j + 4k) + \frac{2}{5} \begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & -2 \\ 4 & -5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= (1 + 2i - 3j + 4k) + \frac{2}{5} \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ j & -3 & 7 & -2 \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 7 & -1 \end{vmatrix} \right) = \\ &= 1 + 2i + \left(-3 + \frac{2}{5}(-14 + 0 + 8 - 0 + 3 - 20) \right) j + \left(4 - \frac{2}{5}(28 + 0 + 4 - 0 - 6 - 10) \right) k = \\ &= 1 + 2i + \left(-3 + \frac{2}{5} \cdot (-23) \right) j + \left(4 - \frac{2}{5} \cdot 16 \right) k = 1 + 2i - \frac{61}{5}j - \frac{12}{5}k. \end{aligned} \quad (16)$$

Равенство правых частей соотношений (15) и (16) подтверждает справедливость полученной в **теореме 2** формулы для вычисления преобразования подобия полукватернионов.

Поскольку очевидно, что совокупность полукватернионов включает в себя множество действительных, а также комплексных чисел, то рассмотрим следующие частные случаи преобразования подобия, которые описаны в нижеприведенных следствиях 1–5.

Следствие 1. Пусть $q \in \mathbb{R}$ и $t \in H_s$, где $N_t \neq 0$. Тогда имеет место равенство $\Pi_t(q) = q$.

Доказательство. Возьмем любые числа $t = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k \in H_s$, где $N_t \neq 0$, и $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in \mathbb{R}$. Тогда очевидно, что справедливы равенства $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ и выполняется **теорема 2**, на основании которой имеем формулу

$$\Pi_t(q) = tqt^{-1} = q + \frac{2}{N_t} \begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & -b_0 \\ 0 & b_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Поскольку определитель с нулевым столбцом равен нулю, то выполняется требуемое равенство $\Pi_t(q) = q$. **Следствие 1** доказано.

Следствие 2. Пусть $q \in \mathbb{C}$ и $t \in \mathbb{C}$, где $N_t \neq 0$. Тогда справедливо равенство $\Pi_t(q) = q$.

Доказательство. Зафиксируем любые числа $t = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k \in \mathbb{C}$, где $N_t \neq 0$, и $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in \mathbb{C}$. Тогда имеют место равенства $a_2 = a_3 = 0$ и $b_2 = b_3 = 0$. Отсюда, ввиду справедливости для зафиксированных чисел **теоремы 2**, выполняется равенство

$$\Pi_t(q) = tq^{-1} = q + \frac{2}{N_t} \begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & -b_0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Поскольку в определителе, стоящем в формуле (17), первый и второй столбцы пропорциональны, то он равен нулю. Отсюда и из равенства (17) вытекает требуемое соотношение $\Pi_t(q) = q$. **Следствие 2** доказано.

Замечание 3. **Следствие 2** описывает известный и легко устанавливаемый факт о том, что на множестве комплексных чисел преобразование подобия не изменяет преобразуемое комплексное число.

Следствие 3. Для любых чисел $q \in H_s$ и $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ выполняется соотношение $\Pi_t(q) = q$.

Доказательство. Возьмем произвольные числа $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in H_s$ и $t = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда справедливы соотношения

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0 \text{ и } N_t = b_0^2 + b_1^2 = b_0^2 \neq 0. \quad (18)$$

Следовательно, для выбранных чисел q и t имеет место **теорема 2**, пользуясь которой, а также первым соотношением в формуле (18), установим равенство

$$\Pi_t(q) = tq^{-1} = q + \frac{2}{N_t} \begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & -b_0 \\ a_3 & 0 & b_0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Поскольку определитель с нулевым столбцом равен нулю, то в силу последней формулы выполняется требуемое равенство $\Pi_t(q) = q \in H_s$. **Следствие 3** доказано.

Следствие 4. Для произвольных чисел $q \in \mathbb{C}$ и $t \in H_s$, где $N_t \neq 0$, справедливо равенство

$$\Pi_t(q) = q + \frac{2a_1}{b_0^2 + b_1^2} ((b_1b_2 + b_0b_3)j + (b_1b_3 - b_0b_2)k) \in H_s. \quad (19)$$

Доказательство. Возьмем любые числа $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in \mathbb{C}$ и $t = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k \in H_s$, где $N_t = b_0^2 + b_1^2 \neq 0$.

Тогда выполняются соотношения

$$a_2 = a_3 = 0 \text{ и } b_0 \neq 0 \text{ или } b_1 \neq 0. \quad (20)$$

Очевидно, что выбранные числа удовлетворяют **теореме 2**. Тогда на основании этой теоремы, а также первой из формул (20) имеет место равенство

$$\Pi_t(q) = tq^{-1} = q + \frac{2}{N_t} \begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & -b_0 \\ 0 & b_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}. \quad (21)$$

Разлагая определитель в равенстве (21) по первому столбцу, а далее – по первой строке, получим равенства

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & -b_0 \\ 0 & b_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} = -a_1 \begin{vmatrix} 0 & j & k \\ b_2 & b_1 & -b_0 \\ b_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} = -a_1 \left(-j \begin{vmatrix} b_2 & -b_0 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} b_2 & b_1 \\ b_3 & b_0 \end{vmatrix} \right) = \\ = a_1(b_1b_2 + b_0b_3)j + a_1(b_1b_3 - b_0b_2)k.$$

Отсюда и из формулы (21) с учетом равенства $N_t = b_0^2 + b_1^2$, вынося a_1 за скобки, получим требуемую формулу (19). При этом отметим, что в силу справедливости хотя бы одного из неравенств (20) верны соотношения $\mathbb{C} \ni q \neq \Pi_t(q) \in H_s$. **Следствие 4** доказано.

Замечание 4. Следствие 4 показывает, что преобразование подобия комплексного числа с помощью полукватерниона в результате дает число, являющееся полукватернионом.

Следствие 5. При всяких числах $q \in H_s$ и $t \in \mathbb{C}$, для которого $N_t \neq 0$, выполняется равенство

$$\Pi_t(q) = q + \frac{2b_1}{b_0^2 + b_1^2} \left(-(a_3b_0 + a_2b_1)j + (a_2b_0 - a_3b_1)k \right) \in H_s. \quad (22)$$

Доказательство. Пусть $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in H_s$ и $t = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k \in \mathbb{C}$, где $N_t \neq 0$. Тогда справедливы равенства $b_2 = b_3 = 0$ и существует число $t^{-1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому выполняется теорема 2, а значит, с учетом последних равенств имеет место соотношение

$$\Pi_t(q) = tq t^{-1} = q + \frac{2}{N_t} \begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & b_1 & -b_0 \\ a_3 & 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}. \quad (23)$$

Разложим определитель из формулы (23) вначале по второму столбцу, а затем полученный определитель третьего порядка – по первой строке. Имеем равенства

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & b_1 & -b_0 \\ a_3 & 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} = b_1 \begin{vmatrix} 0 & j & k \\ a_2 & b_1 & -b_0 \\ a_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} = b_1 \left(-j \begin{vmatrix} a_2 & -b_0 \\ a_3 & b_1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ a_3 & b_0 \end{vmatrix} \right) = \\ = b_1 \left(-(a_3b_0 + a_2b_1)j + (a_2b_0 - a_3b_1)k \right).$$

Отсюда и из формулы (23) с учетом равенства $N_t = b_0^2 + b_1^2$ следует требуемое соотношение

$$\Pi_t(q) = q + \frac{2b_1}{b_0^2 + b_1^2} \left(-(a_3b_0 + a_2b_1)j + (a_2b_0 - a_3b_1)k \right) \in H_s.$$

Следствие 5 доказано.

Замечание 5. Следствие 5 показывает, что при преобразовании подобия полукватерниона даже при помощи комплексного числа вид преобразуемого числа, вообще говоря, не сохраняется (изменяются коэффициенты при мнимых единицах j и k).

Заключение. В настоящей работе для множества полукватернионов введено понятие преобразования подобия и изучены отдельные ее свойства, предложен достаточно простой явный вид формулы нахождения преобразованного кватерниона. Полученные результаты в дальнейшем будут использованы при изучении геометрического смысла введенного преобразования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов, Д.Г. Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной / Д.Г. Павлов, С.С. Кокарев // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2010. – Т. 7. – № 2 (14). – С. 11–37.
2. Бранец, В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. – М. : Наука, 1973. – 320 с.
3. Петров, А.М. Кватернионное представление вихревых движений / А.М. Петров. – М. : Компания «СПУТНИК», 2006. – 32 с.
4. Дегтярев, М.Ю. Алгоритмы моделирования поверхностей с применением методов ориентации твердого тела: автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.13.12 / М.Ю. Дегтярев. – СПб., 2006. – 18 л.
5. Rosenfeld, B. Geometry of Lie groups / B. Rosenfeld. — Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1997. – 336 p.
6. Mortazaasl, H. A study on semi-quaternions algebra in semi-Euclidean 4-space / H. Mortazaasl, M. Jafari // Mathematical Sciences And Applications E-Notes. – 2013. – Vol. 1. – № 2. – P. 20–27.
7. Тихомиров, В. М. Десять доказательств основной теоремы алгебры / В.М. Тихомиров, В.В. Успенский // Математическое просвещение. — МЦНМО, 1997. — № 1. — С. 50—70.
8. Яглом, И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии / И. М. Яглом. — М. : Физматлит, 1963. — 192 с.
9. Пенроуз, Р. Спиноры и пространство-время" (в 2-х тт.) / Р. Пенроуз, В. Риндлер. — М. : Мир, 1987, 1988 — 528 с., 572 с.
10. Кубышкин, Е.И. "Нелинейная алгебра пространства-времени" / Е.И. Кубышкин. — М. : Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2009. — 304 с.

Поступила 27.03.2019

THE SIMILARITY TRANSFORMATION IN THE SET OF SEMI-QUATERNIONS

A. KOZLOV, K. SURAVNEVA, N. ZHALEIKO

In this paper, the definition of a similarity transformation for semi-quaternion's is proposed and it is proved that, generally speaking, this transformation (as in the case of quaternion's [2, p. 29]) changes the form of the hypercomplex number being transformed. A formula is obtained for the transformation of the similarity of semi-quaternion's and some consequences that follow from it. In the future we plan to establish the geometric meaning of this transformation.

Keywords: semi-quaternion, hypercomplex numbers, similarity transformation.

УДК 514.765+512.812.4

АВТОПОДОБИЯ И АВТОИЗОМЕТРИИ ОДНОЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ VI ТИПА БИАНКИ

канд. физ.-мат. наук, доц. **М.Н. ПОДОКСЕНОВ, Ф. С. ГАДЖИЕВА**
(Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Беларусь)

Рассматривается четырехмерная алгебра Ли \mathcal{G} , являющаяся прямой суммой трехмерной алгебры Ли группы Гейзенберга и одномерной алгебры Ли. Предполагается, что эта алгебра Ли снабжена лоренцевым скалярным произведением сигнатуры $(+, +, +, -)$. Рассматривается вопрос: в каком случае алгебра Ли \mathcal{G} допускает однопараметрическую группу преобразований подобия, являющихся одновременно автоморфизмами алгебры Ли. Рассмотрено пять возможных случаев задания лоренцева скалярного произведения и в трех из них такая однопараметрическая группа существует. Выписаны формулы, по которым действует эта однопараметрическая группа преобразований, и матрица Грама канонического базиса. Доказано, что при любом возможном способе задания лоренцева скалярного произведения алгебра Ли \mathcal{G} допускает однопараметрическую группу изометрий, являющихся автоморфизмами алгебры Ли.

Ключевые слова: алгебра Ли, автоморфизм, лоренцево скалярное произведение, подобие.

Введение. Пусть \mathcal{G} – алгебра Ли, в которой задано евклидово или лоренцево скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Преобразование $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ называется автоморфизмом, если оно сохраняет операцию скобки Ли, т.е. выполняется

$$[fX, fY] = f([X, Y]) \quad \forall X, Y \in \mathcal{G}.$$

Это преобразование называется подобием с коэффициентом e^μ , если

$$\langle fX, fY \rangle = e^{2\mu} \langle X, Y \rangle \quad \forall X, Y \in \mathcal{G}.$$

В случае $\mu = 0$ преобразование f называется изометрией.

Преобразование алгебры Ли, являющееся одновременно подобием и автоморфизмом, будем называть *гомотетическим автоморфизмом* или *автоподобием* алгебры Ли. Преобразование, которое является одновременно автоморфизмом и изометрией, будем называть *автоизометрией*.

В работе [1] показано, что решение задачи о существовании автоподобий для однородных пространств групп Ли, снабженных левоинвариантной метрикой, тесно связано с решением задачи о существовании автоподобий для алгебр Ли, снабженных скалярным произведением векторов. Алгебра Ли, снабженная невырожденным скалярным произведением, допускает однопараметрическую группу автоподобий тогда и только тогда, когда соответствующая ей связная односвязная экспоненциальная группа Ли, снабженная левоинвариантной метрикой, является самоподобным многообразием (необходимые определения можно найти в работе [2]).

Все автоподобия и автоизометрии для трехмерной алгебры Ли \mathcal{H}_3 трехмерной группы Ли Гейзенберга \mathcal{H}_3 были найдены в работе А.О. Кравченко [3]. Эти результаты были в дальнейшем использованы научным руководителем в работе [1], где были найдены все автоподобия и автоизометрии для однородного многообразия трехмерной группы Гейзенберга, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой. Все автоподобия и автоизометрии для трехмерных разрешимых алгебр Ли были найдены в работе [4].

Матричное представление алгебры Ли $\mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{R}$. В данной работе мы рассматриваем четырехмерную алгебру Ли $\mathcal{G} = \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{R}$, которая относится к подтипу VI₃ по классификации Бианки. Она состоит из матриц вида

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x^2 & x^1 & 0 \\ 0 & 0 & x^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

с обычными операциями сложения и коммутатора матриц.

В алгебре Ли \mathcal{G} можно выбрать базис (E_1, E_2, E_3, E_4) , состоящий из матриц

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Тогда операция скобки будет задаваться одним равенством

$$[E_2, E_3] = E_1,$$

а остальные скобки Ли равны нулевому вектору. Алгебра Ли \mathcal{G} содержит двумерный центр \mathcal{L} , который является линейной оболочкой векторов E_1 и E_4 , а также одномерный центр $Z = \mathbf{R}E_1$, который равен $\mathcal{G}^{(2)} = [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$.

Произвольный базис (V_1, V_2, V_3, V_4) в \mathcal{G} , относительно которого коммутационные соотношения задаются одним равенством $[V_2, V_3] = V_1$, будем называть каноническим. В любом каноническом базисе верно, что $\mathcal{L} = \langle V_1, V_4 \rangle$ и $Z = \mathbf{R}V_1$.

Основные результаты. Доказательство существования автоподобий для алгебры Ли \mathcal{G} не является сложной задачей. Достаточно ввести лоренцево скалярное произведение так, что идеалы \mathcal{H}_s и \mathcal{R} ортогональны, и на \mathcal{H}_s индуцируется такое лоренцево скалярное произведение, при котором она допускает автоподобия.

Сложнее выяснить, существует ли еще какое-либо лоренцево скалярное произведение, при котором \mathcal{G} допускает автоподобия. Это связано тем, что вложения \mathcal{H}_s и \mathcal{R} в \mathcal{G} не являются единственными.

Теорема. Пусть на алгебре Ли $\mathcal{G} = \mathcal{H}_s \oplus \mathcal{R}$ задано лоренцево скалярное произведение сигнатуры $(+, +, +, -)$. Тогда эта алгебра Ли допускает автоподобия в следующих трех случаях.

Условие	Матрица Грама в каноническом базисе	Матрица, задающая однопараметрическую группу автоподобий
1. На двумерном центре \mathcal{L} индуцируется знаконеопределенное скалярное произведение и идеал Z изотропен	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{2\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \cos t & -e^{\mu t} \sin t & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \sin t & e^{\mu t} \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}.$
2. На двумерном центре \mathcal{L} индуцируется вырожденное скалярное произведение и идеал Z изотропен	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{3\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\mu t} \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}.$
3. На двумерном центре \mathcal{L} индуцируется вырожденное скалярное произведение и идеал Z неизотропен	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\mu t} \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}.$

Лемма. Пусть (V_1, V_2, V_3, V_4) – канонический базис в алгебре Ли $\mathcal{G} = \mathcal{H}_s \oplus \mathcal{R}$. Тогда полная группа автоморфизмов определяется матрицами вида

$$\begin{pmatrix} \delta & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $a_{44} \neq 0$ и $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Доказательство леммы. Любой автоморфизм $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ должен оставлять инвариантным двумерный центр \mathcal{L} и производную алгебры Ли $Z = \mathcal{G}^{(2)}$, поэтому ограничение f на \mathcal{L} задается матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} \\ 0 & a_{44} \end{pmatrix}, a_{11} \cdot a_{44} \neq 0.$$

Следовательно, автоморфизм f действует по формулам

$$\begin{cases} V_1' = a_{11} V_1, \\ V_2' = a_{12} V_1 + a_{22} V_2 + a_{32} V_3 + a_{42} V_4, \\ V_3' = a_{13} V_1 + a_{23} V_2 + a_{33} V_3 + a_{43} V_4, \\ V_4' = a_{14} V_1 + a_{44} V_4. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{aligned} [V_2', V_3'] &= [a_{12} V_1 + a_{22} V_2 + a_{32} V_3 + a_{42} V_4, a_{13} V_1 + a_{23} V_2 + a_{33} V_3 + a_{43} V_4] = \\ &= a_{22} a_{33} [V_2, V_3] + a_{32} a_{23} [V_3, V_2] = (a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}) [V_2, V_3] = \delta V_1. \end{aligned}$$

Преобразование будет автоморфизмом тогда и только тогда, когда в результате этой операции получится вектор V_1' . Следовательно, $V_1' = \delta V_1$. Равенство всех остальных скобок Ли базисных векторов нулевому вектору сохраняется. ■

Заметим, что общий вид матрицы автоморфизма не изменится, если мы умножим базисный вектор V_1 на любое ненулевое число. То есть если в базисе (V_1, V_2, V_3, V_4) операция скобки задается одним равенством $[V_2, V_3] = \lambda V_1$, $\lambda \neq 0$, то все автоморфизмы алгебры Ли будут задаваться матрицами вида (3).

Доказательство теоремы. Пусть на алгебре Ли $\mathcal{G} = \mathcal{H}\mathcal{S} \oplus \mathcal{R}$ задано лоренцево скалярное произведение. Вектор, скалярный квадрат которого равен -1 , будем называть единичным.

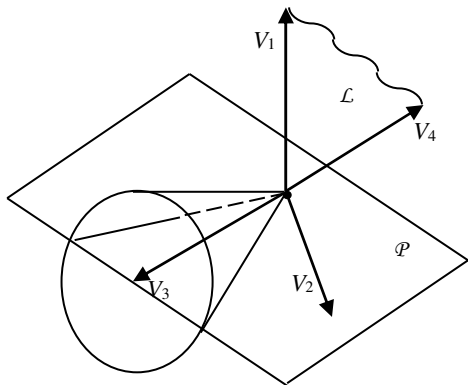


Рисунок 1

I случай. Пусть на двумерном центре \mathcal{L} индуцируется евклидово скалярное произведение. Обозначим $\mathcal{P} = \mathcal{L}^\perp$ – ортогональное дополнение к \mathcal{L} (рисунок 1). Тогда на \mathcal{P} индуцируется лоренцево скалярное произведение. Выберем в \mathcal{P} ортонормированный базис (V_2, V_3) и обозначим $V_1 = [V_2, V_3]$. Затем выберем единичный вектор $V_4 \in \mathcal{L}$ ортогональный V_1 .

Любое автоподобие $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ должно оставлять инвариантным центр \mathcal{L} , а значит, должно оставлять инвариантным подпространство \mathcal{P} . Тогда ограничение f на \mathcal{P} задается в базисе (V_2, V_3) одной из следующих матриц:

$$\pm e^{\mu t} \begin{pmatrix} \text{ch } t & \text{sh } t \\ \text{sh } t & \text{ch } t \end{pmatrix}, \pm e^{\mu t} \begin{pmatrix} -\text{ch } t & \text{sh } t \\ -\text{sh } t & \text{ch } t \end{pmatrix}.$$

Определители этих матриц равны $\pm e^{2\mu t}$. Следовательно, если f – автоморфизм, то

$$V_1' = f(V_1) = \pm e^{2\mu t} V_1.$$

Тогда $\langle V_1', V_1' \rangle = e^{4\mu t}$. Это означает, что f не является подобием. Однако в случае $\mu = 0$ мы получим однопараметрическую группу автоизометрий, действие которой задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{ch } t & \text{sh } t & 0 \\ 0 & \text{sh } t & \text{ch } t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}.$$

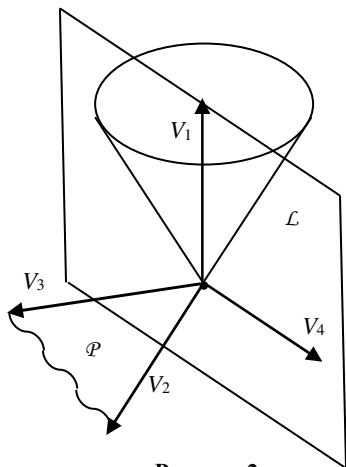


Рисунок 2

II случай. Пусть на двумерном центре \mathcal{L} индуцируется лоренцево скалярное произведение и идеал \mathcal{Z} неизотропен. Обозначим $\mathcal{P} = \mathcal{L}^\perp$ – ортогональное дополнение к \mathcal{L} (рисунок 2). Тогда на \mathcal{P} индуцируется евклидово скалярное произведение. Выберем в \mathcal{P} ортонормированный базис (V_2, V_3) и обозначим $V_1 = [V_2, V_3]$. Затем выберем единичный вектор $V_4 \in \mathcal{L}$ ортогональный V_1 .

Так же как и в случае I, автоподобие $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ должно оставлять инвариантным центр \mathcal{L} , а значит, должно оставлять инвариантным подпространство \mathcal{P} . Тогда ограничение f на \mathcal{P} задается в базисе (V_2, V_3) одной из следующих матриц:

$$e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}. \quad (4)$$

Определители этих матриц равны $e^{2\mu t}$ и $-e^{2\mu t}$. Следовательно, если f – автоморфизм, то

$$V_1' = f(V_1) = \pm e^{2\mu t} V_1.$$

Тогда $\langle V_1', V_1' \rangle = e^{4\mu t}$. Это означает, что f не является подобием. Однако в случае $\mu = 0$ мы получим однопараметрическую группу автоизометрий, действие которой задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}.$$

Заметим, что в данном рассуждении не имеет значения какой из векторов (V_1 или V_4) является временноподобным, а какой – пространственноподобным (т.е. на рисунке 2 векторы V_1 и V_4 можно поменять местами).

III случай. Пусть на двумерном центре \mathcal{L} индуцируется лоренцево скалярное произведение и идеал \mathcal{Z} изотропен. Обозначим $\mathcal{P} = \mathcal{L}^\perp$ – ортогональное дополнение к \mathcal{L} (рисунок 2). Тогда на \mathcal{P} индуцируется евклидово скалярное произведение. Выберем в \mathcal{P} ортонормированный базис (V_2, V_3) и обозначим $V_1 = [V_2, V_3]$. Затем выберем вектор $V_4 \in \mathcal{L}$, такой что $\langle V_1, V_4 \rangle = 1$.

В этом базисе матрица Грама имеет вид

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ограничение f на \mathcal{P} задается в базисе (V_2, V_3) одной из матриц (4). Поэтому должно выполняться $V_1' = f(V_1) = \pm e^{2\mu t} V_1$.

Если при этом $V_4' = f(V_4) = \pm V_4$, то $\langle V_1', V_4' \rangle = e^{2\mu t}$. Итак, мы нашли, что преобразование $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, которое задается в выбранном каноническом базисе (V_1, V_2, V_3, V_4) одной из следующих матриц:

$$\begin{pmatrix} e^{2\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \cos t & -e^{\mu t} \sin t & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \sin t & e^{\mu t} \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{2\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \cos t & e^{\mu t} \sin t & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \sin t & -e^{\mu t} \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}, \tag{5}$$

является автоподобием рассматриваемой алгебры Ли.

Однопараметрическую группу образуют только преобразования, которые задаются первой из матриц (5). При этом в случае $\mu = 0$ мы получим однопараметрическую группу автоизометрий.

IV случай. Пусть на двумерном центре \mathcal{L} индуцируется вырожденное скалярное произведение и идеал \mathcal{Z} изотропен.

Предположим сначала, что $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ имеет еще одно инвариантное изотропное направление \mathcal{J} . Выберем вектор $V_2 \in \mathcal{J}$, затем выберем единичный вектор $V_4 \in \mathcal{L}$, ортогональный сразу двум одномерным подпространствам \mathcal{J} и \mathcal{Z} (рисунок 4). После этого выберем единичный вектор V_3 , ортогональный \mathcal{Z} , V_2 и V_4 .

Обозначим $V_1 = [V_2, V_3]$. Одновременное умножение векторов V_1 и V_2 на любое ненулевое число не меняет операцию скобки, поэтому мы можем добиться, что $\langle V_1, V_2 \rangle = 1$. В выбранном базисе (V_1, V_2, V_3, V_4) матрица Грама имеет вид

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

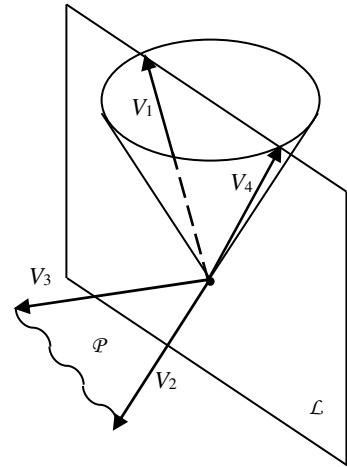


Рисунок 3

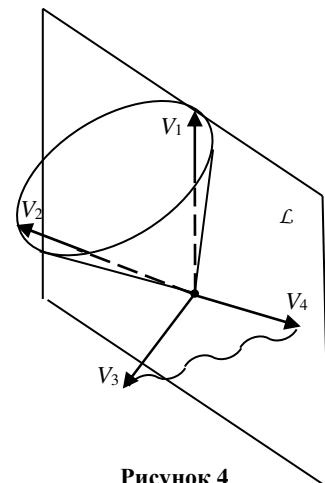


Рисунок 4

Все базисные векторы являются собственными для преобразования f . Значит матрица этого преобразования имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\mu t} \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$$

(мы обозначили коэффициент подобия как $e^{2\mu t}$, с тем чтобы избежать дробных значений в результате). Наше преобразование будет автоморфизмом, если $\alpha = e^{2\mu t} \beta$, и оно будет подобием, если $\alpha \beta = e^{4\mu t}$. Решая последние два уравнения вместе, находим, что $\alpha = e^{3\mu t}$, $\beta = e^{\mu t}$. Итак, в рассмотренном случае алгебра Ли \mathcal{G} допускает автоподобия, которые задаются в выбранном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} e^{3\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\mu t} \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}.$$

Предположим теперь, что подобие $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ не имеет второго изотропного собственного вектора. Тогда, согласно [5], можно выбрать базис (V_1, V_2, V_3, V_4) , такой как на рисунке 4, и матрица Грама будет иметь вид (6). При этом в базисе (V_1, V_4, V_2, V_3) подобие f будет задаваться матрицей

$$e^{\mu t} \begin{pmatrix} 1 & t & -t^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Переходя к нашему порядку нумерации векторов получаем матрицу

$$e^{\mu t} \begin{pmatrix} 1 & -t^2/2 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -t & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Условие $a_{11} = \delta$ выполняется только при $\mu = 0$. Таким образом, в данном случае алгебра Ли допускает автоизометрии, но не допускает автоподобий.

V случай. Пусть на двумерном центре \mathcal{L} индуцируется вырожденное скалярное произведение и идеал \mathcal{Z} неизотропен.

Центр \mathcal{L} содержит единственное изотропное направление, и оно должно быть инвариантным относительно действия подобия $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$; мы выберем вектор V_4 , принадлежащий этому направлению. Ортогональное дополнение $\mathcal{H} = \mathcal{Z}^\perp$ тоже является инвариантным, и на нем индуцируется лоренцево скалярное произведение. Это подпространство содержит в себе вектор V_4 .

Рассмотрим ограничение f на подпространство \mathcal{H} . Предположим, что $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ имеет еще одно инвариантное изотропное направление \mathcal{J} . Выберем вектор $V_2 \in \mathcal{J}$, затем выберем единичный вектор $V_3 \in \mathcal{H}$, ортогональный сразу V_4 и V_2 . После этого умножим V_2 на число так, чтобы вектор $V_1 = [V_2, V_3]$ был единичным, а вектор V_4 умножим на такое число, чтобы выполнялось $\langle V_2, V_4 \rangle = 1$. Для того чтобы проиллюстрировать выбор базиса, на рисунке 4 достаточно поменять местами векторы V_1 и V_4 .

В выбранном базисе (V_1, V_2, V_3, V_4) матрица Грама имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Все базисные векторы являются собственными для преобразования f . Поэтому матрица этого преобразования имеет вид

$$\begin{pmatrix} e^{\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Условие $a_{11} = \delta$ выполняется только при $\alpha = 1$. Тогда f является подобием, если $\beta = e^{2\mu t}$.

Итак, в рассмотренном случае алгебра Ли \mathcal{G} допускает автоподобия, которые задаются в выбранном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} e^{\mu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\mu t} \end{pmatrix}.$$

Предположим, теперь что $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ имеет только одно инвариантное изотропное направление. Тогда, согласно [5], можно выбрать базис (V_2, V_3, V_4) в \mathcal{H} , так что матрица Грама имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а подобие $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ задается матрицей

$$e^{\mu t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, подобие $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ задается относительно базиса (V_1, V_2, V_3, V_4) матрицей

$$e^{\mu t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & -t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Условие $a_{11} = \delta$ выполняется только при $\mu = 0$. Таким образом, в данном случае алгебра Ли допускает автоизометрии, но не допускает автоподобий. ■

Попутно мы доказали следующее утверждение.

Следствие. Алгебра Ли $\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{R}$, снабженная лоренцевым скалярным произведением, всегда допускает однопараметрическую группу автоизометрий. Матрицы, задающие эту подгруппу, в каждом из пяти возможных случаев, и матрицы Грама канонического базиса приведены в следующей таблице.

Условие	Матрица Грама в каноническом базисе	Матрица, задающая однопараметрическую группу изометрий
1. На двумерном центре \mathcal{L} индуцируется положительно определенное скалярное произведение	$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \varepsilon > 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t & 0 \\ 0 & \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$
2. На двумерном центре \mathcal{L} индуцируется знаконеопределенное скалярное произведение и идеал \mathcal{Z} неизотропен	$\begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \varepsilon > 0$, или $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \varepsilon > 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$
3. На двумерном центре \mathcal{L} индуцируется знаконеопределенное скалярное произведение и идеал \mathcal{Z} изотропен	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$
4. На двумерном центре \mathcal{L} индуцируется вырожденное скалярное произведение и идеал \mathcal{Z} изотропен	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -t^2/2 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -t & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$
5. На двумерном центре \mathcal{L} индуцируется вырожденное скалярное произведение и идеал \mathcal{Z} неизотропен	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & -t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$

Заключение. В данном исследовании мы нашли, что четырехмерная алгебра Ли $\mathcal{G} = \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{R}$, снабженная лоренцевым скалярным произведением, допускает автоподобия в трех различных случаях. Это доказывает, что существует три самоподобных однородных лоренцевых многообразия группы Ли $\mathcal{H}_3 \times \mathcal{R}$, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой. Результаты этого исследования могут быть применены для построения таких однородных многообразий и для того, чтобы получить в явном виде формулы, по которым действуют однопараметрические группы гомотетий этих многообразий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подоксёнов, М.Н. Подобия и изометрии однородного многообразия группы Гейзенберга, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой / М.Н. Подоксёнов // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта ім. П.М. Машэрава. – 2011. – № 5. – С. 10–15.
2. Подоксёнов, М.Н. Самоподобные однородные двумерное и трехмерное лоренцевы многообразия / М.Н. Подоксёнов // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта ім. П.М. Машэрава. – 2018. – № 2 (99). – С. 14–19.
3. Кравченко, А.О. Гомотетические автоморфизмы трехмерной нильпотентной алгебры Ли / А.О. Кравченко // X (55) Региональная научно-практическая конференция преподавателей, научных сотрудников, аспирантов и студентов университета, посвященная 90-летию со дня рождения П.М. Машерова : сб. ст. / УО «ВГУ им. П.М. Машерова». – Витебск, 2008. – С. 16–17.
4. Подоксёнов, М.Н. Гомотетические автоморфизмы трехмерных алгебр Ли / М.Н. Подоксёнов // Ученые записки УО «ВГУ им. П.М. Машерова» : сб. науч. тр. / ВГУ им. П.М. Машерова. – Витебск, 2009. – Т. 8. – С. 203–211.
5. Alekseevski, D. Self-similar Lorentzian manifolds / D. Alekseevski // Ann. of Global Anal. Geom. – 1985. – Vol. 3, No.1. – С. 59–84.

Поступила 15.03.2019

AUTOSIMILARITIES AND AUTOISOMETRIC TRANSFORMATIONS OF ONE FOUR-DIMENSIONAL LIE ALGEBRA OF THE VI BIANCHI TYPE

M. PODOKSENOV, F. GADHIEVA

We consider four-dimensional Lie algebra \mathcal{G} , which is a direct sum of three-dimensional Lie algebra of Heisenberg group and one-dimensional Lie algebra. We suppose, that this algebra is supplied by Lorentzian scalar product of the signature $(+, +, +, -)$. The following problem is considered: in which cases Lie algebra \mathcal{G} admits one-parameter group of similarities, which are automorphisms of Lie algebra. Five possible cases of establishing Lorentzian scalar product are considered. In three cases such one-parameter group exists. Formulas describing action of this one-parameter group and the Gram matrix of the canonical basis are specified. Also it is proved, that in each case of establishing Lorentzian scalar product Lie algebra \mathcal{G} admits one-parameter group of isometric transformations, which are automorphisms of Lie algebra.

Keywords: Lie algebra, automorphism, Lorentzian scalar product, similarity transformation.

УДК 517.983

**ДВУМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ
С G-ФУНКЦИЕЙ МЕЙЕРА В ЯДРЕ В ПРОСТРАНСТВЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ**

**М.В. ПАПКОВИЧ, канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. СКОРОМНИК
(Полоцкий государственный университет)**

Изучено двумерное интегральное преобразование с G-функцией Мейера в ядре в пространствах суммируемых функций по области $R_+^2 = R_+^1 \times R_+^1$. Построена $\mathcal{L}_{\sqrt{\cdot}, 2}$ -теория рассматриваемого интегрального преобразования. Даны условия ограниченности и взаимной однозначности оператора такого преобразования из одних пространств $\mathcal{L}_{\sqrt{\cdot}, 2}$ в другие, доказан аналог формулы интегрирования по частям, установлены различные интегральные представления для рассматриваемого преобразования. Представленные результаты обобщают полученные ранее для соответствующего одномерного преобразования.

Ключевые слова: двумерное интегральное G-преобразование, G-функция Мейера, двумерное преобразование Меллина, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.

1. Введение.

Рассматривается интегральное преобразование

$$(G f)(x) = \int_0^\infty G_{p,q}^{m,n} \left[xt \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] f(t) dt \quad (x > 0), \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, x_2) \in R^2$; $t = (t_1, t_2) \in R^2$ – векторы, R^2 – двумерное Евклидово пространство;

$x \cdot t = \sum_{k=1}^2 x_k t_k$ – их скалярное произведение, в частности $x \cdot 1 = \sum_{k=1}^2 x_k$ для $1 = (1, 1)$; $x > t$ означает

$x_1 > t_1, x_2 > t_2$ и аналогично для знаков $\geq, <, \leq$; $\int_0^\infty := \int_0^\infty \int_0^\infty$;

$N = \{1, 2, \dots\}$ – пространство натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^2 = N_0 \times N_0$,

$R_+^2 = R_+^1 \times R_+^1 = \{x \in R^2, x > 0\}$ [1, §28.4];

$m = (m_1, m_2) \in N_0^2$ и $m_1 = m_2$; $n = (n_1, n_2) \in N_0^2$ и $n_1 = n_2$;

$p = (p_1, p_2) \in N_0^2$ и $p_1 = p_2$; $q = (q_1, q_2) \in N_0^2$ и $q_1 = q_2$; ($0 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p$);

$\mathbf{a}_i = (a_{i_1}, a_{i_2}), 1 \leq i \leq p, a_{i_1}, a_{i_2} \in C (1 \leq i_1 \leq p_1, 1 \leq i_2 \leq p_2)$;

$\mathbf{b}_j = (b_{j_1}, b_{j_2}), 1 \leq j \leq q, b_{j_1}, b_{j_2} \in C (1 \leq j_1 \leq q_1, 1 \leq j_2 \leq q_2)$;

$k = (k_1, k_2) \in N = N \times N (k_1 \in N, k_2 \in N)$ – индекс с $k! = k_1! k_2!$ и $|k| = k_1 + k_2$; $D^k = \frac{\partial^{|k|}}{(\partial x_1)^{k_1} (\partial x_2)^{k_2}}$;

$dt = dt_1 \cdot dt_2$; $f(t) = f(t_1, t_2)$; $G_{p,q}^{m,n} \left[xt \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right]$ – функция вида

$$G_{p,q}^{m,n} \left[xt \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] = \prod_{k=1}^2 G_{p_k, q_k}^{m_k, n_k} \left[x_k t_k \left| \begin{matrix} (a_{i_k})_{1, p_k} \\ (b_{j_k})_{1, q_k} \end{matrix} \right. \right], \tag{1.2}$$

представляющая собой произведение G-функций Мейера $G_{p,q}^{m,n} [z]$ [2, глава 6].

Настоящая работа посвящена изучению преобразования (1.1) в весовых пространствах $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$, $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ($v_1 = v_2$), $\bar{2} = (2, 2)$, интегрируемых функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2)$ на \mathbb{R}_+^2 , для которых $\|f\|_{\bar{v}, \bar{2}} < \infty$, где

$$\|f\|_{\bar{v}, \bar{2}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_2^{v_2 \cdot 2 - 1} \left[\int_{\mathbb{R}_+^1} x_1^{v_1 \cdot 2 - 1} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 \right] dx_2 \right\}^{1/2} < \infty.$$

Даются условия ограниченности и взаимной однозначности оператора преобразования (1.1) из одних пространств $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ в другие. Доказывается аналог формулы интегрирования по частям, установлены различные интегральные представления для рассматриваемого преобразования. Полученные результаты обобщают полученные ранее для соответствующего одномерного G -преобразования [2, гл. 6].

2. Предварительные сведения. Для целых неотрицательных значений m, n, p, q ($0 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p$), комплексных $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ ($1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q$) G -функцией Мейера называется функция, определяемая интегралом Меллина – Барнса:

$$G_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a)_p \\ (b)_q \end{matrix} \right. \right] = G_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] = G_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathcal{G}_{p,q}^{m,n}(s) z^{-s} ds, \quad z \neq 0, \quad (2.1)$$

где

$$\mathcal{G}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] = \mathcal{G}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a)_p \\ (b)_q \end{matrix} \middle| s \right] = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - s)}{\prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i + s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s)}. \quad (2.2)$$

Здесь L – специально выбранный бесконечный контур, оставляющий полюса $s = -b_j - k$ ($j = 1, 2, \dots, m; k = 0, 1, 2, \dots$) слева, полюса $s = 1 - a_j + k$ ($j = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots$) – справа, а пустые произведения, если таковые имеются, считаются равными единице. Более подробно с теорией G -функции (2.1) можно ознакомиться в [2, гл. 6].

G -преобразованием называют интегральное преобразование [2, формула (6.1.1)]

$$(Gf)(x) = \int_0^\infty G_{p,q}^{m,n} \left[xt \left| \begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] f(t) dt, \quad (2.3)$$

содержащее G -функцию Мейера (2.1) в ядре.

Введем пространство $\mathcal{L}_{v,r}$ измеримых по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначных функций f на $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, для которых $\|f\|_{v,r} < \infty$, где

$$\|f\|_{v,r} = \left(\int_0^\infty |t^v f(t)|^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (1 \leq r < \infty, v \in \mathbb{R}), \quad (2.4)$$

Заметим, что

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{v,r}} = \|f\|_{L_r(\mathbb{R}_+^1, t^{v-1})}, \quad (1 \leq r < \infty, v \in \mathbb{R}).$$

Для функции $f \in \mathcal{L}_{v,r}$ ($1 \leq r \leq 2$) преобразование Меллина $\mathfrak{M}f$ определяется равенством [2, 3]

$$(\mathfrak{M}f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^\tau) e^{s\tau} d\tau \quad (s = v + it; v, t \in \mathbb{R}). \quad (2.5)$$

Если $f \in \mathcal{L}_{v,r} \cap \mathcal{L}_{v,1}$, $\text{Re}(s) = v$, то (2.5) совпадает с обычным преобразованием Меллина:

$$(\mathfrak{M}f)(s) = f^*(s) = \int_0^{+\infty} f(t)t^{s-1} dt. \quad (2.6)$$

Двумерное преобразование Меллина функции $f(x) = f(x_1, x_2)$, $x_1 > 0, x_2 > 0$, определяется формулой [3, формула (1.4.42)]

$$(\mathfrak{M}f)(\mathbf{s}) = f^*(\mathbf{s}) = \int_{R_{++}^2} f(t) t^{s-1} dt, \quad (2.7)$$

$$R_{++}^2 = \left\{ \mathbf{t} = (t_1, t_2) \in R^2 : t_j > 0 (j=1,2) \right\}, \quad \mathbf{s} = (s_1, s_2), s_j \in C (j=1,2).$$

Обратное преобразование Меллина для $x = (x_1, x_2) \in R_{++}^2$ дается формулой [3, формула (1.4.43)]

$$(\mathfrak{M}^{-1}g)(x) = \mathfrak{M}^{-1}[g(\mathbf{s})](x) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \int_{\gamma_2 - i\infty}^{\gamma_2 + i\infty} x^{-\mathbf{s}} g(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad \gamma_j = \text{Re}(s_j) (j=1,2). \quad (2.8)$$

Формула преобразования Меллина от G -преобразования (2.3) для «достаточно хороших» функций f имеет вид [1, формула (6.1.2)]

$$(\mathfrak{M} Gf)(s) = \mathcal{G}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M}f)(1-s), \quad (2.9)$$

где $\mathcal{G}_{p,q}^{m,n}(s)$ дается (2.2).

Нам понадобятся следующие постоянные, определяемые через параметры G -функции (2.1) [1, формулы (6.1.5) – (6.1.11)]:

$$\alpha = \begin{cases} -\min_{1 \leq j \leq m} [\text{Re}(b_j)], & m > 0, \\ -\infty, & m = 0, \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} 1 - \max_{1 \leq i \leq n} [\text{Re}(a_i)], & n > 0, \\ \infty, & n = 0; \end{cases} \quad (2.10)$$

$$a^* = 2(m+n) - p - q; \quad (2.11)$$

$$\Delta = q - p; \quad (2.12)$$

$$a_1^* = m + n - p; \quad a_2^* = m + n - q; \quad (2.13)$$

$$\mu = \sum_{j=1}^q b_j - \sum_{i=1}^p a_i + \frac{p-q}{2}. \quad (2.14)$$

Назовем *исключительным множеством* \mathcal{E}_G для функции $\mathcal{G}(s)$, определенной в (2.2), множество вещественных чисел v таких, что $\alpha < 1 - v < \beta$ и $\mathcal{G}(s)$ имеет нули на прямой $\text{Re}(s) = 1 - v$.

3. $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ -теория G -преобразования

Введем функцию

$$\bar{\mathcal{G}}_{p,q}^{m,n}(\mathbf{s}) \equiv \bar{\mathcal{G}}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| \mathbf{s} \right] = \prod_{k=1}^2 \mathcal{G}_{p_k, q_k}^{m_k, n_k} \left[\begin{matrix} (a_{i_k})_{1, p_k} \\ (b_{j_k})_{1, q_k} \end{matrix} \middle| s_k \right], \quad (3.1)$$

где $\mathcal{G}_{p_k, q_k}^{m_k, n_k} \left[\begin{matrix} (a_{i_k})_{1, p_k} \\ (b_{j_k})_{1, q_k} \end{matrix} \middle| s_k \right]$, $k = 1, 2$, – функция вида (2.2).

Исключительным множеством $\mathcal{E}_{\bar{v}}$ функции $\bar{\mathcal{G}}_{p,q}^{m,n}(s)$ назовем множество векторов $\bar{v} = (v_1, v_2) \in R^2$ ($v_1 = v_2$) таких, что $\alpha_1 < 1 - v_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < 1 - v_2 < \beta_2$, и функции вида (2.2) $\mathcal{G}_{p_1, q_1}^{m_1, n_1}(s_1)$, $\mathcal{G}_{p_2, q_2}^{m_2, n_2}(s_2)$ имеют нули на прямых $\text{Re}(s_1) = 1 - v_1$, $\text{Re}(s_2) = 1 - v_2$, соответственно.

Применяем двумерное преобразование Меллина (2.7) к G -преобразованию (1.1) и учитывая (2.9), получаем следующую формулу для “достаточно хороших” функций f :

$$(\mathfrak{M} G f)(s) = \bar{\mathcal{G}}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M} f)(1-s), \tag{3.2}$$

где $\bar{\mathcal{G}}_{p,q}^{m,n}(s)$ дается (3.1).

Для формулировки утверждений, представляющих $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ -теорию G -преобразования (1.1) нам понадобятся следующие двумерные аналоги постоянных (2.10) – (2.14):

$$\alpha_1 = \begin{cases} -\min_{1 \leq j_1 \leq m_1} [\text{Re}(b_{j_1})], & m_1 > 0, \\ -\infty, & m_1 = 0, \end{cases}, \beta_1 = \begin{cases} 1 - \max_{1 \leq i_1 \leq n_1} [\text{Re}(a_{i_1})], & n_1 > 0, \\ \infty, & n_1 = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} -\min_{1 \leq j_2 \leq m_2} [\text{Re}(b_{j_2})], & m_2 > 0, \\ -\infty, & m_2 = 0, \end{cases}, \beta_2 = \begin{cases} 1 - \max_{1 \leq i_2 \leq n_2} [\text{Re}(a_{i_2})], & n_2 > 0, \\ \infty, & n_2 = 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$a_1^* = 2(m_1 + n_1) - p_1 - q_1, a_2^* = 2(m_2 - n_2) - p_2 - q_2; \tag{3.5}$$

$$\Delta_1 = q_1 - p_1, \Delta_2 = q_2 - p_2; \tag{3.6}$$

$$\mu_1 = \sum_{j=1}^{q_1} b_{j_1} - \sum_{i=1}^{p_1} a_{i_1} + \frac{p_1 - q_1}{2}, \mu_2 = \sum_{j=1}^{q_2} b_{j_2} - \sum_{i=1}^{p_2} a_{i_2} + \frac{p_2 - q_2}{2}. \tag{3.7}$$

Обозначим через $[X, Y]$ множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y .

Из [2, теоремы 3.6 и 3.7, теоремы 6.1 и 6.2, замечания 6.1.1 и 6.2.1], представления (3.2) и непосредственной проверки получаем $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ -теорию G -преобразования (1.1).

Теорема 1. *Допустим, что*

$$\alpha_1 < 1 - v_1 < \beta_1, \alpha_2 < 1 - v_2 < \beta_2, v_1 = v_2 \tag{3.8}$$

и выполняется любое из условий:

$$a_1^* > 0, a_2^* > 0 \tag{3.9}$$

или

$$a_1^* = 0, a_2^* = 0, \Delta_1 [1 - v_1] + \text{Re}(\mu_1) \leq 0, \Delta_2 [1 - v_2] + \text{Re}(\mu_2) \leq 0. \tag{3.10}$$

Тогда верны следующие утверждения:

a) существует взаимно однозначное преобразование $G \in [\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}, \mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{2}}]$ такое, что равенство (3.2) выполняется для $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ и $\text{Re}(s) = 1 - \bar{v}$.

Если $a_1^ = 0, a_2^* = 0, \Delta_1 [1 - v_1] + \text{Re}(\mu_1) = 0, \Delta_2 [1 - v_2] + \text{Re}(\mu_2) = 0$ и $\bar{v} \notin \mathcal{E}_{\bar{v}}$, то G биективно отображает $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ на $\mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{2}}$;*

b) если $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ и $g \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$, то имеет место формула

$$\int_0^{\infty} f(x)(Gg)(x)dx = \int_0^{\infty} (Gf)(x)g(x)dx; \quad (3.11)$$

c) пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_1) \in C^2$ и $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$. Если $\text{Re}(\bar{\lambda}) > -\bar{v}$, то преобразование (1.1) представимо в виде

$$(Gf)(x) = x^{-\bar{\lambda}} \frac{d}{dx} x^{\bar{\lambda}+1} \int_0^{\infty} G_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[xt \left| \begin{matrix} -\bar{\lambda}, (\mathbf{a}_i)_{1, p} \\ (\mathbf{b}_j)_{1, q}, -\bar{\lambda}-1 \end{matrix} \right. \right] f(t) dt, \quad (3.12)$$

а при $\text{Re}(\bar{\lambda}) < -\bar{v}$ дается формулой

$$(Gf)(x) = -x^{-\bar{\lambda}} \frac{d}{dx} x^{\bar{\lambda}+1} \int_0^{\infty} G_{p+1, q+1}^{m+1, n} \left[xt \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1, p}, -\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda}-1, (\mathbf{b}_j)_{1, q} \end{matrix} \right. \right] f(t) dt; \quad (3.13)$$

d) преобразование Gf не зависит от \bar{v} в том смысле, что если \bar{v} и \bar{v} удовлетворяют (3.8) и выполняются условия (3.9) или (3.10), и если преобразования Gf и $\tilde{G}f$ определяются в пространствах $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ и $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ равенством (3.2), то $Gf = \tilde{G}f$ для $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}} \cap \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$;

e) если $a_1^* > 0, a_2^* > 0$ или если $a_1^* = 0, a_2^* = 0, \Delta_1[1-v_1] + \text{Re}(\mu_1) < 0, \Delta_2[1-v_2] + \text{Re}(\mu_2) < 0$, то для $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ преобразование Gf дается формулой (1.1).

Замечание 1. Пусть $\alpha_1 < \beta_1, \alpha_2 < \beta_2$ и пусть выполняется одно из следующих условий:

a) $a_1^* > 0, a_2^* > 0$;

b) $a_1^* = 0, a_2^* = 0, \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$ и $\alpha_1 < -\frac{\text{Re}(\mu_1)}{\Delta_1}, \alpha_2 < -\frac{\text{Re}(\mu_2)}{\Delta_2}$;

c) $a_1^* = 0, a_2^* = 0, \Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0$ и $\beta_1 > -\frac{\text{Re}(\mu_1)}{\Delta_1}, \beta_2 > -\frac{\text{Re}(\mu_2)}{\Delta_2}$;

d) $a_1^* = 0, a_2^* = 0, \Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0$ и $\text{Re}(\mu_1) \leq 0, \text{Re}(\mu_2) \leq 0$.

Тогда G -преобразование определено в $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ с $\alpha_1 < v_1 < \beta_1, \alpha_1 < v_2 < \beta_1, v_1 = v_2$.

Теорема 2. Пусть

$$\alpha_1 < 1-v_1 < \beta_1, \alpha_2 < 1-v_2 < \beta_2, v_1 = v_2$$

и выполняется любое из условий:

a) $a_1^* > 0, a_2^* > 0$;

b) $a_1^* = 0, a_2^* = 0, \Delta_1(1-v_1) + \text{Re}(\mu_1) < 0, \Delta_2(1-v_2) + \text{Re}(\mu_2) < 0$.

Тогда для $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ и $x > 0$ $(Gf)(x)$ дается формулой (1.1).

Замечание 2. Пусть $\alpha_1 < \beta_1, \alpha_2 < \beta_2$ и пусть выполняется одно из следующих условий:

a) $a_1^* > 0, a_2^* > 0$;

b) $a_1^* = 0, a_2^* = 0, \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$ и $\alpha_1 < -\frac{\text{Re}(\mu_1)+1}{\Delta_1}, \alpha_2 < -\frac{\text{Re}(\mu_2)+1}{\Delta_2}$;

$$c) a_1^* = 0, a_2^* = 0, \Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0 \text{ и } \beta_1 > -\frac{\operatorname{Re}(\mu_1)+1}{\Delta_1}, \beta_2 > -\frac{\operatorname{Re}(\mu_2)+1}{\Delta_2};$$

$$d) a_1^* = 0, a_2^* = 0, \Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0 \text{ и } \operatorname{Re}(\mu_1) \leq 0, \operatorname{Re}(\mu_2) \leq 0.$$

Тогда G -преобразование может определяться формулой (1.1) в $\mathfrak{L}_{\sqrt{\nu}, \bar{2}}$ с $\alpha_1 < \nu_1 < \beta_1, \alpha_1 < \nu_2 < \beta_1,$

$$\nu_1 = \nu_2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688с.
2. Kilbas, A.A. H-Transforms. Theory and Applications / A.A. Kilbas, M.H. Saigo. – London [etc.] : Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
3. Kilbas, A.A. Theory and applications of fractional differential equations. North – Holland Mathematics Studies 204 / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. – Amsterdam : Elsevier.xv, 2006. – 523 p.

Поступила 27.03.2019

TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL TRANSFORM WITH THE MEIJER G-FUNCTION IN THE KERNEL IN THE SPACE OF SUMMABLE FUNCTIONS

M. PAPKOVICH, O. SKOROMNIK

Two-dimensional integral transform with the Meijer G-function in the kernel in the space of summable functions on a domain $R_+^2 = R_+^1 \times R_+^1$ was studied. $\mathfrak{L}_{\sqrt{\nu}, \bar{2}}$ -theory of a considered integral transformation was constructed. Conditions for the boundedness and one-to-one operator of such a transformation from one $\mathfrak{L}_{\sqrt{\nu}, \bar{2}}$ -space to another were given, an analogue of the integration formula in parts was proved, various integral representations for the transformation under consideration were established. The results generalize the well know findings for corresponding one-dimensional integral transform.

Keywords: *two-dimensional integral G-transform, Meijer G-function, two-dimensional Mellin transform, the space of integrable functions, fractional integrals and derivatives.*

УДК 514

**СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ГАМИЛЬТОНА
В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ СО СТАРШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ****канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет)**

Рассмотрены свойства функций Гамильтона и Лагранжа в координатно-импульсном и расслоенном пространстве скоростей. Основным полученным результатом является утверждение – в случае локальной невырожденности матрицы Гессе от функции Гамильтона по импульсам максимального порядка (матрицы Гессе от функции Лагранжа по скоростям максимального порядка) указанные матрицы Гессе взаимно обратны. Получен ряд вспомогательных результатов, например, о квазилинейной форме временной производной порядка k от обобщенной координаты по скоростям расслоенного пространства порядка k для невырожденной замены координат. Получены неожиданные тождества в координатно-импульсном пространстве q - r для частной производной между координатами расслоенного пространства (координата-координата, импульс-импульс). Получены формулы, связывающие частные производные в координатно-импульсном пространстве q - r для функций Лагранжа и Гамильтона по одним и тем же переменным.

Ключевые слова: функция Гамильтона, вариационная задача, расслоенное пространство скоростей, уравнения Эйлера – Лагранжа, гладкие многообразия, тензор обобщенного импульса, невырожденный гессиан.

Введение. У.Р. Гамильтон в 1835 году получил новую форму уравнений движения механических систем – канонические уравнения Гамильтона. В 1848 году М.В. Остроградский распространил принцип Гамильтона на случай систем с нестационарными голономными связями, после чего распространилось название принцип Гамильтона – Остроградского. Полученная система канонических уравнений содержит вдвое больше дифференциальных уравнений, чем у Лагранжа, но зато все они первого порядка, (у Лагранжа – второго).

Академик В.И. Арнольд следующим образом охарактеризовал возможности, открывшиеся после появления гамильтоновой механики: Гамильтонова точка зрения позволяет исследовать до конца ряда задач механики, не поддающихся решению иными средствами (например, задачу о притяжении двумя неподвижными центрами и задачи о геодезических на трехосном эллипсоиде). Еще большее значение гамильтонова точка зрения имеет для приближенных методов теории возмущений (небесная механика), для понимания общего характера движения в сложных механических системах (эргодическая теория, статистическая механика) и в связи с другими разделами математической физики (оптика, квантовая механика и т.п.).

Подход Гамильтона оказался высоко эффективным во многих математических моделях физики. На этом плодотворном подходе основан, например, многотомный учебный курс «Теоретическая физика» Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица. Первоначально вариационный принцип Гамильтона был сформулирован для задач механики, но при некоторых естественных предположениях из него выводятся уравнения Максвелла электромагнитного поля. С появлением теории относительности оказалось, что этот принцип строго выполняется и в релятивистской динамике. Его эвристическая сила существенно помогла разработке квантовой механики, а при создании общей теории относительности Д. Гильберт успешно применил гамильтонов принцип для вывода уравнений гравитационного поля (1915).

Вариационное исчисление является одним из старейших и богатых содержанием и приложениями разделов математического анализа. Вариационные задачи (например, изопериметрические) рассматривались и в древности, но исследовались геометрическими методами. Началом зарождения вариационного исчисления можно считать работу Ферма 1662 г., в которой аналитическими методами исследована задача о распространении света из одной оптической среды в другую и о преломлении света на границе двух сред. Далее аналогичные (но более общие) вариационные задачи исследовались Ньютоном (задача о наименьшей поверхности вращения, 1685 г.), Д. Бернулли (задача о брахистохроме) и др.

Теоретико-групповая точка зрения Ф. Клейна, изложенная в его «Эрлангенской программе» (1872), то есть: геометрия – учение об инвариантах групп преобразований, в применении к дифференциальной геометрии была развита Э. Картаном, который построил теорию пространств проективной связности и аффинной связности.

Основная задача дифференциальной геометрии состоит в нахождении и описании дифференциальных инвариантов геометрических структур. Необходимым аппаратом здесь является исчисление струй. Это понятие интенсивно использовалось в теории геометрических структур высшего порядка

в работах В.В. Вагнера, Г.Ф. Лаптева, Л.Е. Евтушика, М.О. Рахулы, а в последнее время в теории особенностей гладких отображений М. Голубицким, В. Гийеминым и геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений А.М. Виноградовым, В.В. Лычагиным. Представленная работа является продолжением работ авторов [9, 10, 13, 16–20].

Определения и постановка задачи. Введем обозначения для дифференциально-геометрических структур, используемых в работе: X_m – гладкое многообразие размерности m ; $T^n X_m$ – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m ; $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ – невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$ [9].

Пусть $H(q, p): \mathfrak{R}^{2mn} \rightarrow \mathfrak{R}$ – функция Гамильтона с $2mn$ независимыми переменными $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1 = \overline{1, m}, l1 = \overline{1, n}, j2 = \overline{1, m}, l2 = \overline{1, n}$,

где $p = \overline{p} = (p_1^{j1}, p_2^{j1}, \dots, p_n^{j1}) = (p_1^1 p_1^2 \dots p_1^m, p_2^1 p_2^2 \dots p_2^m, \dots, p_n^1, \dots, p_n^m) = (p_{l1}^{j1})$ $j1 = \overline{1, m}$ $l1 = \overline{1, n}$;

$q = \overline{q} = (q_1^{j2}, q_2^{j2}, \dots, q_n^{j2}) = (q_1^1 q_1^2 \dots q_1^m, q_2^1 q_2^2 \dots q_2^m, \dots, q_n^1, \dots, q_n^m) = (q_{l2}^{j2})$ $j2 = \overline{1, m}$ $l2 = \overline{1, n}$.

Далее, $L(p, q) = -H(p, q) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^m p_n^j \cdot \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j}$ – функция Лагранжа, двойственная

к функции Гамильтона.

Определение 1. Система функций $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$,

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_l^i \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right), \quad k = \overline{0, n}, i = \overline{1, m},$$

называется обобщенным импульсом ранга n для функции $L: T^P X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ в локальных координатах (x) базы X_m расслоения $T^P X_m$, где $L(x, x, \dots, x)^{(p)}$ – локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^P X_m$.

Функция $p_{k,n}^i$ – k -я компонента обобщенного импульса P_n ранга n по i -й координате или импульс порядка k (k -импульс) по i -й координате обобщенного импульса P_n ранга n .

Постановка задачи. Исследуем свойства функции Гамильтона $H(q, p): \mathfrak{R}^{2mn} \rightarrow \mathfrak{R}$ $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1 = \overline{1, m}, l1 = \overline{1, n}, j2 = \overline{1, m}, l2 = \overline{1, n}$ и функции Лагранжа, двойственной

к функции Гамильтона $L(q, p) = -H(q, p) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^m p_n^j \cdot \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j}$, а также связи между этими

функциями $H(q, p): \mathfrak{R}^{2mn} \rightarrow \mathfrak{R}$, $L(p, q)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\overline{x}^i = S^i(x_1, x_2, \dots, x_m)$, здесь $S: (x) \rightarrow (\overline{x})$ – гладкое невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^P X_m$, $p \geq \max(s, l)$, $i = \overline{1, m}$, тогда

$$D_t^k x^i(\overline{x}) = x^{(k)i}(\overline{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j} \overset{(k)j}{x} + f(\overline{x}, \overline{x}, \dots, \overline{x}) \overset{(k-1)}{x} \quad k \geq 1, \tag{1}$$

где $f(\overline{x}, \overline{x}, \dots, \overline{x}) \overset{(k-1)}{x}$ – некоторая гладкая функция, аргументы которой $\overline{x}, \overline{x}, \dots, \overline{x} \overset{(k-1)}{x}$, $\overline{x} = (\overset{(s)1}{x}, \dots, \overset{(s)m}{x})$,

$\overset{(s)j}{x} = D_t^s \overline{x}^j$, $s = \overline{0, k-1}$.

Доказательство проведем методом математической индукции. База индукции $k = 1$, тогда

$$D_t^1 x^i(\bar{x}) = x^{(1)i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \stackrel{(1)j}{x} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \stackrel{\bullet j}{x}.$$

Доказано.

Рассмотрим утверждение **теоремы 1** для $k = 2$

$$\begin{aligned} D_t^2 x^i(\bar{x}) &= x^{(2)i}(\bar{x}) = D_t^1 \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \stackrel{(1)j}{x} \right) = \sum_{j=1}^m D_t^1 \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \stackrel{\bullet j}{x} + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} D_t^1 \stackrel{\bullet j}{x} = \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j} \stackrel{\bullet l \bullet j}{x x} + \\ &+ \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \stackrel{\bullet \bullet j}{x} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \stackrel{\bullet \bullet j}{x} + f(\bar{x}, \bar{x}), \quad f(\bar{x}, \bar{x}) = \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j} \stackrel{\bullet l \bullet j}{x x}. \end{aligned}$$

Доказано для $k = 2$.

Индуктивный переход.

Пусть $D_t^k x^i(\bar{x}) = x^{(k)i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \stackrel{(k)j}{x} + f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \stackrel{(k-1)}{x}$. Тогда

$$\begin{aligned} D_t^{k+1} x^i(\bar{x}) &= D_t^1 x^{(k)i}(\bar{x}) = D_t \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \stackrel{(k)j}{x} + f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \stackrel{(k-1)}{x} \right) = \sum_{j=1}^m D_t \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \stackrel{(k)j}{x} \right) + D_t \left(f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \stackrel{(k-1)}{x} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^m D_t \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \stackrel{(k)j}{x} + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} D_t \left(\stackrel{(k)j}{x} \right) + D_t \left(f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \stackrel{(k-1)}{x} \right). \end{aligned} \tag{2}$$

Поскольку $D_t \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) = \sum_{l=1}^m \frac{\partial}{\partial \bar{x}^l} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \stackrel{\bullet l}{x} = \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j} \stackrel{\bullet l}{x}$ и $D_t \left(\stackrel{(k)j}{x} \right) = \stackrel{(k+1)j}{x}$, то сумма (2) равна

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^m D_t \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right) \stackrel{(k)j}{x} + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} D_t \left(\stackrel{(k)j}{x} \right) + D_t \left(f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \stackrel{(k-1)}{x} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j} \stackrel{\bullet l}{x} \right) \stackrel{(k)j}{x} + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \stackrel{(k+1)j}{x} + \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \stackrel{(s+1)j}{x}}{\partial \bar{x}^j} \stackrel{(k-1)}{x} = \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \stackrel{(k+1)j}{x} + f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \stackrel{(k)}{x}, \quad 0+1 \leq s+1 \leq k-1+1 = k. \end{aligned} \tag{3}$$

В формуле (3) сгруппируем члены $\sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \stackrel{(k+1)j}{x} + f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \stackrel{(k)}{x}$, $0+1 \leq s+1 \leq k-1+1 = k$, где

$$f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \stackrel{(k)}{x} = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j} \stackrel{\bullet l}{x} \right) \stackrel{(k)j}{x} + \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \stackrel{(s+1)j}{x}}{\partial \bar{x}^j} \stackrel{(k-1)}{x}.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $x^i = S^i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$, $S: (\bar{x}) \rightarrow (x)$ – гладкое невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m$, $p \geq \max(s, l)$, $i = \overline{1, m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \stackrel{(p)j}{x} = \begin{cases} C_k^p \cdot D_t^{k-p} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right), & C_k^p = \frac{k!}{p!(k-p)!}, \quad k! = \prod_{j=1}^k j, \quad k \geq p \\ 0, & k < p. \end{cases}$$

Доказательство. При $k < p$ по **Теореме 1** имеем

$$x^{(k)i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) = x^{(k)i}(\bar{x}) = \sum_{l=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^{-l}} x^{(k)l} + f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \quad k \geq 1, \text{ поэтому}$$

$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial x^{(p)j}} = \frac{\partial}{\partial x^{(p)j}} \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^{-l}} x^{(k)l} + f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \right) = 0.$$

При $k \geq p$ доказательство проведем методом математической индукции. База индукции $k = p$.

Тогда по **Теореме 1** имеем
$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial x^{(p)j}} = \frac{\partial}{\partial x^{(p)j}} \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^{-l}} x^{(k)l} + f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^{-l}} \frac{\partial x^{(k)l}}{\partial x^{(p)j}} \right) + \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial x^{(p)j}} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^{-l}} \delta_j^l = \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^{-j}}, \quad \delta_j^l = \begin{cases} 1, & j = l \\ 0, & j \neq l \end{cases} \text{ - символ Кронекера.}$$

База индукции доказана.

Индуктивный переход: пусть утверждение **теоремы 2** справедливо при $k \geq p$.

Введем функции $F_k^i(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) = x^{(k)i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$, $x = D_t(x^{(k)i}) = D_t F_k^i = \sum_{l=1}^m \sum_{s=0}^k \frac{\partial F_k^i}{\partial x^{(s)l}} x^{(s+1)l}$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^{(k+1)i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial x^{(p)j}} &= \frac{\partial}{\partial x^{(p)j}} \left(\sum_{l=1}^m \sum_{s=0}^k \frac{\partial F_k^i}{\partial x^{(s)l}} x^{(s+1)l} \right) = \sum_{l=1}^m \sum_{s=0}^k \left(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial x^{(p)j} \partial x^{(s)l}} x^{(s+1)l} + \frac{\partial F_k^i}{\partial x^{(s)l}} \frac{\partial x^{(s+1)l}}{\partial x^{(p)j}} \right) = \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{s=0}^k \left(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial x^{(p)j} \partial x^{(s)l}} x^{(s+1)l} \right) + \frac{\partial F_k^i}{\partial x^{(s)l}} \delta_p^{s+1} \delta_j^l = \sum_{l=1}^m \sum_{s=0}^k \left(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial x^{(s)l} \partial x^{(p)j}} x^{(s+1)l} \right) + \frac{\partial F_k^i}{\partial x^{(p-1)j}}. \end{aligned} \quad (4)$$

По предположению индукции
$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial x^{(p)j}} = \frac{\partial F_k^i}{\partial x^{(p)j}} = C_k^p D_t^{k-p} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^{-j}} \right).$$
 Значит, сумма (4) равна

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m \sum_{s=0}^k \left(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial x^{(s)l} \partial x^{(p)j}} x^{(s+1)l} \right) + \frac{\partial F_k^i}{\partial x^{(p-1)j}} &= C_k^p \left(\sum_{l=1}^m \sum_{s=0}^k \frac{\partial}{\partial x^{(s)l}} (D_t^{k-p} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^{-j}} \right)) D_t^{(s)l} \right) + C_k^{p-1} D_t^{k-(p-1)} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^{-j}} \right) = \\ &= C_k^p \left(\sum_{l=1}^m \sum_{s=0}^{k-p} \frac{\partial}{\partial x^{(s)l}} (D_t^{k-p} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^{-j}} \right))(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) D_t^{(s)l} \right) + C_k^{p-1} D_t^{k-(p-1)} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^{-j}} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Известно, что

$$C_k^p + C_k^{p-1} = \frac{k!}{p!(k-p)!} + \frac{k!}{(p-1)!(k-(p-1))!} = \frac{k!}{p!(k-p)!} \left(1 + \frac{p}{k-p+1} \right) = \frac{(k+1)!}{p!(k-p+1)!} = C_{k+1}^p. \quad (6)$$

Тогда

$$D_t^{k-p} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^{-j}} \right)(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) = \sum_{l=1}^m \sum_{s=0}^{k-p} \frac{\partial}{\partial x^{(s)l}} (D_t^{k-p} \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^{-j}} \right))(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) D_t^{(s)l}. \quad (7)$$

Учитывая формулы (6) и (7), получим выражение для суммы (5):

$$C_k^p \left(\sum_{l=1}^m \sum_{s=0}^{k-p} \frac{\partial}{\partial x^{(s)l}} (D_t^{k-p} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^j}) (x, \bar{x}, \dots, \frac{\partial}{\partial x} \dots)) D_t \frac{\partial}{\partial x} \right) + C_k^{p-1} D_t^{k-(p-1)} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^j}) =$$

$$= C_k^p D_t (D_t^{k-p} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^j})) + C_k^{p-1} D_t^{k-(p-1)} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^j}) = (C_k^p + C_k^{p-1}) D_t^{k+1-p} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^j}) = C_{k+1}^p D_t^{k+1-p} (\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial x^j}).$$

Теорема 2 доказана.

Пусть $H(q, p)$ – функция Гамильтона зависит от $2mn$ независимых переменных $(q_{j_2}^{j_2}, p_{l_1}^{j_1})$, $j_1 = \overline{1, m}, l_1 = \overline{1, n}, j_2 = \overline{1, m}, l_2 = \overline{1, n}$, при этом нижние индексы меняются от 1 до n , верхние индексы меняются от 1 до m

$$p = \overline{p} = (p_1^{j_1}, p_2^{j_1}, \dots, p_n^{j_1}) = (p_1^1 p_1^2 \dots p_1^m, p_2^1 p_2^2 \dots p_2^m, \dots, p_n^1, \dots, p_n^m) = (p_{l_1}^{j_1}), \quad j_1 = \overline{1, m}, \quad l_1 = \overline{1, n};$$

$$q = \overline{q} = (q_1^{j_2}, q_2^{j_2}, \dots, q_n^{j_2}) = (q_1^1 q_1^2 \dots q_1^m, q_2^1 q_2^2 \dots q_2^m, \dots, q_n^1, \dots, q_n^m) = (q_{l_2}^{j_2}), \quad j_2 = \overline{1, m}, \quad l_2 = \overline{1, n}.$$

Теорема 3. Пусть $s, k = \overline{1, n}, i, j = \overline{1, m}$. Тогда

$$1) \quad \frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i} = \begin{cases} (1 - \delta_s^1) \delta_j^i \delta_s^{k+1}, & s = 1, k = \overline{1, n}, i, j = \overline{1, m} \\ (1 - \delta_s^1) \delta_j^i \delta_s^{k+1}, & 2 \leq s \leq n, k = \overline{1, n}, i, j = \overline{1, m} \end{cases} = \delta_j^i \delta_s^{k+1} (1 - \delta_s^1), \quad s, k = \overline{1, n}, i, j = \overline{1, m}; \quad (8)$$

$$2) \quad \frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i} = \frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i} = 0, \quad s, k = \overline{1, n}, i, j = \overline{1, m}; \quad (9)$$

$$3) \quad \frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i} = \delta_i^j \delta_s^k, \quad (10)$$

где $\delta_{\beta}^{\alpha} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$ – символ Кронекера.

Доказательство. Прибавим 1 к обеим частям двойного неравенства $1 \leq k \leq n-1 \Rightarrow 2 \leq k+1 \leq n, 1 \leq s \leq n$, поэтому при $s = 1$

$$\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i} = 0 = 1 - 1 = 1 - \delta_s^1 = (1 - \delta_s^1) \delta_j^i \delta_s^{k+1}, \quad i, j = \overline{1, m},$$

где $\delta_s^1 = \begin{cases} 1, & s = 1 \\ 0, & s \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & s = 1 \\ 0, & s \geq 2 \end{cases}$ – символ Кронекера.

То есть при $s = 1$ проверена справедливость формулы (7),

где $\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \delta_s^{k+1} = \begin{cases} 1, & s = k+1 \\ 0, & s \neq k+1 \end{cases}$ – символ Кронекера.

При $2 \leq s \leq n \quad \frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i} = \begin{cases} 1, & (i = j) \wedge (s = k+1) \\ 0, & (i \neq j) \vee (s \neq k+1) \end{cases} = \delta_j^i \delta_s^{k+1} = \delta_j^i \delta_s^{k+1} (1 - \delta_s^1), \quad i, j = \overline{1, m} \text{ или}$

$$\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i} = \begin{cases} (1 - \delta_s^1) \delta_j^i \delta_s^{k+1}, & s = 1, k = \overline{1, n}, i, j = \overline{1, m} \\ (1 - \delta_s^1) \delta_j^i \delta_s^{k+1}, & 2 \leq s \leq n, k = \overline{1, n}, i, j = \overline{1, m} \end{cases} = \delta_j^i \delta_s^{k+1} (1 - \delta_s^1), \quad s, k = \overline{1, n}, i, j = \overline{1, m}.$$

Вторая и третья части теоремы очевидны:

$$\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i} = \frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i} = 0, \quad s, k = \overline{1, n}, \quad i, j = \overline{1, m}, \quad \text{так как переменные } p, q \text{ независимы;}$$

$$\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i} = \begin{cases} 1, & (i = j) \wedge (k = s) \\ 0, & (i \neq j) \vee (k \neq s) \end{cases} = \delta_i^j \delta_s^k, \quad \text{условие во второй строке очевидно является отрицанием усло-$$

вия в первой: $\overline{(i = j) \wedge (k = s)} = \overline{(i = j)} \vee \overline{(k = s)} = (i \neq j) \vee (k \neq s)$.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть (q, p) – $2mn$ независимых переменных $(q_{j_2}^{j_2}, p_{l_1}^{j_1})$ $j_1 = \overline{1, m}, \quad l_1 = \overline{1, n}, \quad j_2 = \overline{1, m}, \quad l_2 = \overline{1, n}$. Тогда при $s = \overline{1, n}, \quad i, j = \overline{1, m}$ и произвольных $p_k^j \in \mathfrak{X}$ выполнено соотношение

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m (p_k^j (1 - \delta_s^1) \delta_j^i \delta_s^{k+1} = (1 - \delta_s^1) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m p_k^j \delta_j^i \delta_s^{k+1} = p_{s-1}^i (1 - \delta_s^1) = p_{s-1}^i (1 - \delta_s^1) (1 - \delta_n^1), \quad (11)$$

где $\delta_s^1 = \begin{cases} 1, & s = 1 \\ 0, & s \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & s = 1 \\ 0, & s \geq 2 \end{cases}$ – символ Кронекера;

$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера;

$\delta_s^{k+1} = \begin{cases} 1, & s = k + 1 \\ 0, & s \neq k + 1 \end{cases}$ – символ Кронекера.

Доказательство. Так как $(1 - \delta_s^1)$ не зависит от индексов суммирования k, j , то

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m (p_k^j (1 - \delta_s^1) \delta_j^i \delta_s^{k+1} = (1 - \delta_s^1) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m p_k^j \delta_j^i \delta_s^{k+1}.$$

При $s = 1$ $(1 - \delta_s^1) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow (1 - \delta_s^1) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m p_k^j \delta_j^i \delta_s^{k+1} = 0$ $p_{s-1}^i (1 - \delta_s^1) = p_{s-1}^i \cdot 0 = 0$ и утверждение

теоремы 4 выполнено.

При $n \geq s \geq 2 \Rightarrow s - 1 \geq 1$ $\delta_s^1 = 0, \quad 1 - \delta_s^1 = 1 - 0 = 1 \Rightarrow p_{s-1}^i (1 - \delta_s^1) = p_{s-1}^i$ – правая часть;

$$p_k^j \delta_j^i \delta_s^{k+1} = \begin{cases} p_{k=s-1}^{j=i} = p_{s-1}^i, & (j = i) \wedge (k + 1 = s) \\ 0, & (j \neq i) \vee (k + 1 \neq s) \end{cases} \Rightarrow (1 - \delta_s^1) p_{s-1}^i = (1 - 0) p_{s-1}^i = p_{s-1}^i \quad \text{– левая часть}$$

утверждения.

При $n = 1 \Rightarrow s = 1$ ($s = \overline{1, n}$) $\Rightarrow \delta_n^1 = \delta_s^1 = 1$, поэтому

$$p_{s-1}^i (1 - \delta_s^1) (1 - \delta_n^1) = p_{i-1}^i (1 - \delta_1^1) (1 - \delta_1^1) = 0 = p_{i-1}^i (1 - \delta_1^1).$$

При $n > 1 \Rightarrow \delta_n^1 = 0 \Rightarrow (1 - \delta_n^1) = (1 - 0) = 1 \Rightarrow p_{s-1}^i (1 - \delta_s^1) = p_{s-1}^i (1 - \delta_s^1) (1 - \delta_n^1)$.

Формула (11) проверена. **Теорема 4** доказана.

Рассмотрим функцию $L(p, q) = -H(p, q) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^m p_n^j \cdot \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j}$.

Теорема 5. Пусть $L(p, q) = -H(p, q) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^m p_n^j \cdot \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j}$, тогда имеют место следующие равенства:

$$1. \quad \frac{\partial L(q, p)}{\partial q_s^i} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_s^i} + p_{s-1}^i (1 - \delta_n^1)(1 - \delta_s^1) + \sum_{j=1}^m p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i}, \quad (12)$$

$$2. \quad \frac{\partial L(q, p)}{\partial p_s^i} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial p_s^i} + (1 - \delta_n^1)(1 - \delta_n^s) q_{s+1}^i + \delta_n^s \frac{\partial H}{\partial p_n^i} + \sum_{j=1}^m p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_s^i}, \quad (13)$$

где $\delta_{\beta}^{\alpha} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$ – символ Кронекера.

Доказательство: $\frac{\partial L(q, p)}{\partial q_s^i} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_s^i} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i} q_{k+1}^j + p_k^j \frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i} \right) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i} \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} + p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i} \right).$

По **теореме 3**, $\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i} = \frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i} = 0$, так как переменные p, q независимы, перепишем равенства:

$$\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i} = \begin{cases} (1 - \delta_s^1) \delta_j^i \delta_s^{k+1}, & s = 1, k = \overline{1, n}, i, j = \overline{1, m} \\ (1 - \delta_s^1) \delta_j^i \delta_s^{k+1}, & 2 \leq s \leq n, k = \overline{1, n}, i, j = \overline{1, m} \end{cases} = \delta_j^i \delta_s^{k+1} (1 - \delta_s^1), \quad s, k = \overline{1, n}, i, j = \overline{1, m},$$

поэтому $\frac{\partial L(q, p)}{\partial q_s^i} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_s^i} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i} q_{k+1}^j + p_k^j \frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i} \right) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i} \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} + p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i} \right).$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(q, p)}{\partial q_s^i} &= -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_s^i} + (1 - \delta_n^1) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i} q_{k+1}^j + p_k^j \frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i} \right) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i} \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} + p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i} \right) = \\ &= -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_s^i} + (1 - \delta_n^1) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m \left(p_k^j \frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i} \right) + \sum_{j=1}^m \left(p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i} \right) = \\ &= -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_s^i} + (1 - \delta_n^1) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m \left(p_k^j (1 - \delta_s^1) \delta_j^i \delta_s^{k+1} \right) + \sum_{j=1}^m p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i} = \\ &= -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_s^i} + (1 - \delta_n^1)(1 - \delta_s^1) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m p_k^j \delta_j^i \delta_s^{k+1} + \sum_{j=1}^m p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i} = \\ &= -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_s^i} + (1 - \delta_n^1)(1 - \delta_s^1) p_{s-1}^i + \sum_{j=1}^m p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i}. \end{aligned}$$

По **теореме 4**, $\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m \left(p_k^j (1 - \delta_s^1) \delta_j^i \delta_s^{k+1} \right) = (1 - \delta_s^1) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m p_k^j \delta_j^i \delta_s^{k+1} = p_{s-1}^i (1 - \delta_s^1)$, поэтому

$$-\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_s^i} + (1 - \delta_n^1)(1 - \delta_s^1) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m p_k^j \delta_j^i \delta_s^{k+1} + \sum_{j=1}^m p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_s^i} + p_{s-1}^i (1 - \delta_n^1)(1 - \delta_s^1) + \sum_{j=1}^m p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_s^i}.$$

Формула (12) проверена. Первая часть **теоремы 5** доказана.

$$L(p, q) = -H(p, q) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^m p_n^j \cdot \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} = -H(p, q) + (1 - \delta_n^1) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^m p_n^j \cdot \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j}.$$

$$\frac{\partial L(q, p)}{\partial p_s^i} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial p_s^i} + (1 - \delta_n^1) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i} q_{k+1}^j + p_k^j \frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial p_s^i} \right) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial p_n^j}{\partial p_s^i} \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} + p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_s^i} \right).$$

$$\text{Так как } \frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i} = \begin{cases} 1, (s=k) \wedge (i=j), s, k = \overline{1, n}, i, j = \overline{1, m} \\ 0, (s \neq k) \vee (i \neq j), s, k = \overline{1, n}, i, j = \overline{1, m} \end{cases} = \delta_i^j \delta_s^k \text{ и } \frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial p_s^i} = 0, \text{ то}$$

$$-\frac{\partial H(q, p)}{\partial p_s^i} + (1 - \delta_n^1) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i} q_{k+1}^j + p_k^j \frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial p_s^i} \right) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial p_n^j}{\partial p_s^i} \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} + p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_s^i} \right) =$$

$$-\frac{\partial H(q, p)}{\partial p_s^i} + (1 - \delta_n^1) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m (\delta_i^j \delta_s^k q_{k+1}^j) + \sum_{j=1}^m (\delta_i^j \delta_s^n \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} + p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_s^i}) =$$

$$= -\frac{\partial H(q, p)}{\partial p_s^i} + (1 - \delta_n^1)(1 - \delta_n^s) q_{s+1}^j + \delta_n^s \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^i} + \sum_{j=1}^m p_n^j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_s^i}.$$

Формула (13) проверена. **Теорема 5** доказана.

Теорема 6. Пусть $f(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)}$ – локальная запись гладкой функции $f: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{X}$ в локальных координатах в базе X_m расслоения $T^n X_m$. Тогда

$$D_t^p f(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)}}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p)j} + a(x, x, \dots, x)^{\bullet (k+p-1)}, p \geq 1.$$

Доказательство проведем по индукции по индексу p . База индукции $p = 1$.

$$D_t^1 f(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)} = D_t f(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)} = \sum_{s=0}^k \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)}}{\partial x^{(s)j}} x^{(s+1)j} =$$

$$= \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)}}{\partial x^{(s)j}} x^{(s+1)j} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)}}{\partial x^{(k)j}} x^{(k+1)j}.$$

При $s \leq k-1 \Rightarrow s+1 \leq k$, поэтому $\frac{\partial f(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)}}{\partial x^{(s)j}}$, $x^{(s+1)j}$ и произведение $\frac{\partial f(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)}}{\partial x^{(s)j}} x^{(s+1)j}$ зависят от производных порядка не выше k , значит и вся сумма

$$a(x, x, \dots, x)^{\bullet (k+1-1)} = a(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)} = \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)}}{\partial x^{(s)j}} x^{(s+1)j}$$

также зависит от производных порядка не выше k . Значит,

$$D_t^1 f(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)} = \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)}}{\partial x^{(s)j}} x^{(s+1)j} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)}}{\partial x^{(k)j}} x^{(k+1)j} = a(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)}}{\partial x^{(k)j}} x^{(k+1)j}.$$

База индукции проверена.

Индуктивный переход: пусть утверждение верно для p , то есть

$$D_t^p f(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)}}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p)j} + a(x, x, \dots, x)^{\bullet (k+p-1)}.$$

Докажем, что оно верно для $p+1$, то есть имеет место равенство:

$$D_t^{p+1} f(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)}}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p+1)j} + a(x, x, \dots, x)^{\bullet (k+p+1-1)} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x)^{\bullet (k)}}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p+1)j} + a(x, x, \dots, x)^{\bullet (k+p)}.$$

По предположению индукции имеем

$$\begin{aligned} D_t^{p+1} f(x, x, \dots, x) &= D_t(D_t^p f(x, x, \dots, x)) = D_t\left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p)j} + a(x, x, \dots, x)\right) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^m D_t \frac{\partial f(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p)j} + \frac{\partial f(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k)j}} D_t(x^{(k+p)j})\right) + D_t a(x, x, \dots, x) = \\ &= \sum_{j=1}^m D_t \frac{\partial f(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p)j} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p+1)j} + D_t a(x, x, \dots, x). \end{aligned}$$

Максимальный порядок производных в каждом члене суммы $\sum_{j=1}^m D_t \frac{\partial f(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p)j}$ равен

$\max(k+1, k+p) = k+p$, так как $p \geq 1$. По доказанному утверждению при $p=1$ максимальный порядок производных в $D_t \frac{\partial f(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k)j}}$ равен $k+1$, а максимальный порядок производных в $D_t a(x, x, \dots, x)$

равен $k+p-1+1 = k+p$. Значит, $\overline{a(x, x, \dots, x)} = \sum_{j=1}^m D_t \frac{\partial f(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p)j} + D_t a(x, x, \dots, x)$ зависит от производных порядка не выше $k+p$. Следовательно получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m D_t \frac{\partial f(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p)j} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p+1)j} + D_t a(x, x, \dots, x) &= \\ = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k)j}} \cdot x^{(k+p+1)j} + a(x, x, \dots, x). \end{aligned}$$

Теорема 6 доказана.

Теорема 7 (линейность обобщенного импульса по старшим производным). Пусть $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$ – импульс ранга n для функции $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ в локальных координатах (x) базы X_m расслоения $T^p X_m$. Обозначим $b(n, p, k)$ – максимальный порядок скорости в аргументах обобщенного импульса; $b(n, p, k) = \max(2 \min(p, n) - k, p)$, $\max v = 2 \min(n, p) - k$, $\min v = \min(n, p)$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, x, \dots, x) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)^{(p)},$$

где $k = \overline{0, \min v - 1}$, $i = \overline{1, m}$ – компоненты импульса ранга n .

Тогда

$$p_k^i(n) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(\min v)j} \partial x^{(\min v)i}} x^{(\max v)j} + g_i(x, x, \dots, x), \quad i = \overline{1, m}. \quad (14)$$

Доказательство. По **теореме 6** максимальная степень координат по t , которые войдут в производную $D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)^{(p)}$ по порядкам скоростей при выполнении дифференцирования, равна

$\max(l+k+l = 2l+k) = \max(2l+k)$ при условии, что $l \leq n-k$, $l+k \leq p \Leftrightarrow l \leq p-k \Rightarrow l \leq n-k$, $l \leq p-k \Leftrightarrow l \leq \min(n-k, p-k) = \min(n, p) - k$, $\max_{l \leq \min(n, p) - k} (2l+k) = 2(\min(n, p) - k) + k = 2 \min(n, p) - k = \max v$.

Значит, значение наибольшего порядка скорости, которое войдет в выражение

$$\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_l^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)^{(p)}, \text{ равно } \max(p, \max_{l \leq \min(n, p) - k} (2l + k)) = \max(p, 2 \min(n, p) - k) = b(n, p, k).$$

При условии $\max v = 2 \min(n, p) - k > p$ выражение (14) будет линейно по скоростям старшего порядка.

Теорема 7 доказана.

Замечание. Ясно, что $\max v = 2 \min(n, p) - k \geq \min v = \min(n, p)$ при $k \leq \min(n, p)$ и $\max v = 2 \min(n, p) - k > \min v = \min(n, p)$ при $k < \min(n, p)$.

Условие $k \leq n$ следует из определения импульса ранга n , а при $k > p$ компоненты импульса

$$p_{k,n}^i(x, x, \dots, x) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_l^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)^{(p)} \equiv 0 \text{ (тривиальны), поэтому условие } k \leq n, k \leq p \Leftrightarrow k \leq \min(n, p)$$

определяет нетривиальные компоненты импульса ранга n .

Теорема 8. При $p = n$ $\max v = 2 \min(n, p) - k = 2 \min(n, n) - k = 2n - k$, $\min v = \min(n, p) = \min(n, n) = n$, $b(n, p = n, k) = \max(2 \min(p = n, n) - k, p) = \max(2 \min(n, n) - k, n) = \max(2n - k, n) = 2n - k$, так как

$$k \leq \min(n, p) = \min(n, n) = n, p_k^i(n) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n-k)j} + g_i(x, x, \dots, x^{(2n-k-1)}), i = \overline{1, m} \text{ при } 0 \leq k \leq n - 1$$

$2n - k \geq n + 1 > n$ и выражение

$$p_k^i(n) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n-k)j} + g_i(x, x, \dots, x^{(2n-k-1)}), i = \overline{1, m} \tag{15}$$

линейно зависят от скоростей старшего порядка $x^{(2n-k)j}$.

Формула (15) доказана. **Теорема 8** доказана.

Теорема 9. Пусть $\det \left(\frac{\partial^2 L(X^n)}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} \right) \neq 0$ в точке $\pi_n^{2n-k} X_0^{2n-k} = X_0^n = (x_0, x_0, x_0, \dots, x_0)^{(n)}$, $X_0^{2n-k} = (x_0, x_0, x_0, \dots, x_0)^{(2n-k)}$, $0 \leq k \leq n - 1$, $\pi_n^{2n-k} : T^{2n-k} X_m \rightarrow T^n X_m$ – каноническая проекция. Тогда существует окрестность $U(X_0^{2n-k})$ точки X_0^{2n-k} , такая что в ее окрестности выполнены условия:

$$1) \det \left(\frac{\partial p_k^i(n)(X^{2n-k})}{\partial x^{(2n-k)j}} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 L(X^n)}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} \right) \neq 0 \quad X^n = \pi_n^{2n-k}(X^{2n-k}); \tag{16}$$

$$2) x^{(2n-k)j} = x^{(2n-k)j}(x, x, \dots, x^{(2n-k-1)}, p_k^i(n)). \tag{17}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_k^i(n)}{\partial x^{(2n-k)j}} &= \frac{\partial}{\partial x^{(2n-k)j}} \left(\sum_{s=1}^m \frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n-k)s} + g_i(x, x, \dots, x^{(2n-k-1)}) \right) = \\ &= \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x^{(2n-k)j}} \left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n-k)s} \right) + \frac{\partial}{\partial x^{(2n-k)j}} (g_i(x, x, \dots, x^{(2n-k-1)})) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{s=1}^m \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} \right)^{(2n-k)s} x + \sum_{s=1}^m \frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)s} \partial x^{(n)i}} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \right)^{(2n-k)s} + \sum_{s=1}^m \frac{\partial}{\partial x} (g_i(x, x, \dots, x)^{\bullet (2n-k-1)}) = \\
 &= \sum_{s=1}^m \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} \right)^{(2n-k)s} x = \sum_{s=1}^m \frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)s} \partial x^{(n)i}} \delta_j^s = \frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}}
 \end{aligned}$$

где $\delta_j^s = \begin{cases} 1, & s = j \\ 0, & s \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера.

Так как при $0 \leq k \leq n-1 \Rightarrow 2n-k \geq n+1 > n$, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} \right) \equiv 0 \Rightarrow \sum_{s=1}^m \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} \right)^{(2n-k)s} x = 0.$$

Поскольку $2n-k \geq 2n-k-1$ при любых целых n и k , следовательно $\frac{\partial}{\partial x} (g_i(x, x, \dots, x)^{\bullet (2n-k-1)}) = 0$.

Первое равенство в формуле (16) доказано, первая часть **теоремы 9** доказана. В силу условий первой части **теоремы 9** (формула (16) имеем

$$\det \left(\frac{\partial p_k^i(n)}{\partial x} \right) (X_0^{2n-k}) = \det \left(\frac{\partial^2 L(X_0^n)}{\partial x^{(n)i} \partial x^{(n)j}} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 L(\pi_n^{2n-k}(X_0^{2n-k}))}{\partial x^{(n)i} \partial x^{(n)j}} \right) \neq 0,$$

то из гладкости функций $\pi_n^{2n-k} : T^{2n-k} X_m \rightarrow T^n X_m$, $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ и гладкости композиции $L \circ \pi_n^{2n-k} : T^{2n-k} X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ следует, что существует окрестность $U(X_0^{2n-k})$, точки X_0^{2n-k} , такая что $\det \left(\frac{\partial^2 L(\pi_n^{2n-k}(X^{2n-k}))}{\partial x^{(n)i} \partial x^{(n)i}} \right) \neq 0 \forall X^{2n-k} \in U(X_0^{2n-k})$, $X^{2n-k} = (x, x, \dots, x)^{\bullet (2n-k)}$, по теореме о неявной

функции в окрестности $U(X_0^{2n-k})$ точки X_0^{2n-k} $x^{(2n-k)j} = x^{(2n-k)j} (x, x, \dots, x)^{\bullet (2n-k-1)}, p_k^i(n)$.

Формула (17) и **теорема 9** доказана.

Замечание. В теореме 8 условие $0 \leq k \leq n-1$ было существенно, так как из неравенства $0 \leq k \leq n-1 \Rightarrow 2n-k \geq n+1 > n$ следует равенство 0:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} \right) \equiv 0 \Rightarrow \sum_{s=1}^m \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} \right)^{(2n-k)s} x = 0.$$

Для $k = n$ этого утверждать уже нельзя. Но тем не менее, аналогичное утверждение справедливо и для $k = n$.

Теорема 10. Пусть $H : \mathfrak{R}^{2mn} \rightarrow \mathfrak{R}$ – функция $2mn$ независимых переменных $(q_{l_2}^{j_2}, p_{l_1}^{j_1})$ $j_1 = \overline{1, m}$, $l_1 = \overline{1, n}$, $j_2 = \overline{1, m}$, $l_2 = \overline{1, n}$ и выполняется условие

$$\det \left(\frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p_n^i \partial p_n^i} \right) \neq 0, i, j = \overline{1, m} \text{ в окрестности } U(q_0, p_0) \text{ точки } (q_0, p_0).$$

Тогда

1) замена переменных $p_n^i \rightarrow x^{(n)i} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^i}$, $i = \overline{1, m}$ является невырожденной в окрестности точ-

ки (q_0, p_0) и справедливо

$$\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j} = \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i}; \tag{18}$$

2) локально существует обратная замена

$$p_n^i = p_n^i(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, x^{(n)}); \tag{19}$$

3) имеет место формула свертки

$$\sum_{s=1}^m \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \cdot \frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)j}} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \text{ – символ Кронекера.} \tag{20}$$

Доказательство. $x^{(n)i} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^i} \Rightarrow \frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j} = \frac{\partial}{\partial p_n^j} \left(\frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^i} \right) = \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i}$

Выражение (18) проверено.

Так как $\det\left(\frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i}\right) \neq 0$, то по теореме об обратной функции существует обратная замена

$$p_n^i = p_n^i(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, x^{(n)}), \tag{21}$$

и значит, первые 2 части утверждения доказаны.

Продифференцируем соотношения

$$x^{n(i)}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, x^{(n)})) \equiv x^{n(i)}, \quad i, l, j = \overline{1, m}.$$

Учитывая, что $\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^l} = \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p_n^l \partial p_n^i}; \frac{\partial x^{n(i)}}{\partial q_s^l} = 0 \quad s = \overline{1, n}; \frac{\partial p_s^l}{x^{n(j)}} = 0 \quad s = \overline{1, n-1},$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^{n(i)}}{x^{n(j)}} &= \delta_j^i = \sum_{s=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{\partial x^{n(i)}}{\partial q_s^l} \frac{\partial q_s^l}{x^{n(j)}} + \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{l=1}^m \frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_s^l} \frac{\partial p_s^l}{x^{n(j)}} + \sum_{l=1}^m \frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_n^l} \frac{\partial p_n^l}{x^{n(j)}} = \\ &= \sum_{l=1}^m \frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_n^l} \frac{\partial p_n^l}{x^{n(j)}} = \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p_n^l \partial p_n^i} \frac{\partial p_n^l}{x^{n(j)}}. \end{aligned}$$

Что доказывает формулу (20) и **теорему 10**.

Теорема 11. Пусть $H(q, p)$ – функция $H: \mathfrak{R}^{2mn} \rightarrow \mathfrak{R}$ $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1 = \overline{1, m}, \quad l1 = \overline{1, n}, \quad j2 = \overline{1, m}, \quad l2 = \overline{1, n}$. И пусть функция Гамильтона в уравнении связи

$$L(p, q) = -H(p, q) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^m p_n^j \cdot \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} \text{ невырождена } \det\left(\frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p_n^i \partial p_n^j}\right) \neq 0, \quad i, j = \overline{1, m}, \text{ где}$$

$U(q_0, p_0)$ – окрестность точки (q_0, p_0) .

Тогда справедливы следующие результаты:

1) формула замена переменных – это переход от

$$p_n^i \rightarrow x^{(n)i} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^i}, \quad i = \overline{1, m}, \tag{22}$$

является невырожденным в окрестности точки (q_0, p_0) ;

2) локально существует обратная замена

$$p_n^i = p_n^i(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, x^{(n)}); \tag{23}$$

3) $\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} L(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, x^{(n)})) = p_n^i. \tag{24}$

Доказательство. По **теореме 10**, первые 2 части **теоремы 11** доказаны:

$$x^{(n)i} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^i} \Rightarrow \frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j} = \frac{\partial}{\partial p_n^j} \left(\frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^i} \right) = \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i}.$$

Так как $\det \left(\frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i} \right) \neq 0$, благодаря теореме об обратной функции существует обратная замена переменных $p_n^i = p_n^i(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, x^{(n)})$.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} L(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, x^{(n)})) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} \left(-H(q, p) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^m p_n^j \cdot \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} \right) = \\ & = -\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} H(q, p) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} (p_k^j q_{k+1}^j) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} (p_n^j \cdot \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j}) = \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_k^j} \frac{\partial q_k^j}{\partial x^{(n)i}} - \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_k^j} \frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_k^j \right) q_{k+1}^j + p_k^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} q_{k+1}^j \right) + \sum_{j=1}^m \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j \right) \cdot \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} + p_n^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} \right) \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Учтем тождества $\frac{\partial q_k^j}{\partial x^{(n)i}} = 0; k = \overline{1, n}; \frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_k^j = 0; k = \overline{1, n-1}; \frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} q_{k+1}^j = 0$, поэтому формулу (26) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_k^j} \frac{\partial q_k^j}{\partial x^{(n)i}} - \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_k^j} \frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_k^j \right) q_{k+1}^j + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m p_k^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} q_{k+1}^j \right) + \sum_{j=1}^m \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j \right) \cdot \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} + p_n^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} \right) \right) = \\ & = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m -\frac{\partial H(q, p)}{\partial p_k^j} \frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{j=1}^m \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j \right) \cdot \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} + p_n^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} \right) \right). \end{aligned} \quad (27)$$

С учетом **теоремы 3** $\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} = \frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} \cdot \delta_n^k = \begin{cases} \frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}, & k = n \\ 0, & k < n \end{cases}, \delta_n^k = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$ – символ Кронекера (28)

(переменные $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, x^{(n)}$ независимы), тогда выражение (27) запишем в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m -\frac{\partial H(q, p)}{\partial p_k^j} \frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{j=1}^m \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j \right) \cdot \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} + p_n^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} \right) \right) = \\ & = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m -\frac{\partial H(q, p)}{\partial p_k^j} \frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} \delta_n^k + \sum_{j=1}^m \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j \right) \cdot \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} + p_n^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} \right) \right) = \\ & = \sum_{j=1}^m -\frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} \frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{j=1}^m \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j \right) \cdot \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} + p_n^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} \right) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^m -\frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} \frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j \right) \cdot \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} + \sum_{j=1}^m p_n^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} \right) = \\
&= \sum_{j=1}^m \left(-\frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} \frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} + \frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} \cdot \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} \right) + \sum_{j=1}^m p_n^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} \right) = \sum_{j=1}^m p_n^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} \right), \quad (29)
\end{aligned}$$

так как $\sum_{j=1}^m \left(-\frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} \frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} + \frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} \cdot \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} \right) = \sum_{j=1}^m \left(-\frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} + \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} \right) \frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} = 0$.

Преобразуем выражение (29), получим

$$\sum_{j=1}^m p_n^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n^j} \right) = \sum_{j=1}^m p_n^j \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_k^l} \frac{\partial q_k^l}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_k^l} \frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}} \right). \quad (30)$$

Зная, что $\frac{\partial q_k^l}{\partial x^{(n)i}} = 0$, $k = \overline{1, n}$, $i, l = \overline{1, m}$ и по формуле (27) $\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}} = \frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}} \delta_n^l$, где $\delta_n^l = \begin{cases} 1, & l = n \\ 0, & l \neq n \end{cases}$ – сим-

вол Кронекера, то выражение (30) можно преобразовать:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m p_n^j \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial q_k^l} \frac{\partial q_k^l}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_k^l} \frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}} \right) &= \sum_{j=1}^m p_n^j \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_k^l} \frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}} = \\
&= \sum_{j=1}^m p_n^j \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_k^l} \frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}} \delta_n^l = \sum_{j=1}^m p_n^j \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_n^l} \frac{\partial p_n^l}{\partial x^{(n)i}}. \quad (31)
\end{aligned}$$

По пункту 3 теоремы 10, $\sum_{s=1}^m \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \cdot \frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)j}} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера, перепишем

формулу (31) следующим образом:

$$\sum_{j=1}^m p_n^j \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_n^l} \frac{\partial p_n^l}{\partial x^{(n)i}} = \sum_{j=1}^m p_n^j \delta_i^j = \sum_{j=1, j \neq i}^m p_n^j \delta_i^j + p_n^{j=i} \delta_i^{j=i} = 0 + p_n^i \cdot 1 = p_n^i.$$

Теорема 11 доказана.

Теорема 12. Пусть

1) $H(q, p)$ – функция $H: \mathfrak{R}^{2mn} \rightarrow \mathfrak{R}$ $2mn$ независимых переменных (q_{j2}^j, p_{l1}^{j1}) $j1 = \overline{1, m}$, $l1 = \overline{1, n}$, $j2 = \overline{1, m}$, $l2 = \overline{1, n}$. Введем сокращенные обозначения

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_n), \quad P_{n-1} = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}), \quad p_n = p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)});$$

2) $\det \left(\frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p_k^i \partial p_k^i} \right) \neq 0$, $i, j = \overline{1, m}$ окрестности $U(q_0, p_0)$ точки (q_0, p_0) .

Тогда

$$\begin{aligned}
1) \sum_{s=1}^m \frac{\partial^2 H(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \frac{\partial^2 L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial x^{(n)s} \partial x^{(n)j}} &= \\
&= \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \text{– символ Кронекера} \quad (32)
\end{aligned}$$

(матрицы $\frac{\partial^2 H(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial p_n^i \partial p_n^s}$ и $\frac{\partial^2 L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial x^{(n)s} \partial x^{(n)j}}$ – взаимно-обратные);

$$2) \frac{\partial^2 H(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial x^{(n)s} \partial x^{(n)j}} \neq 0. \quad (33)$$

Доказательство. По пункту 2 **теоремы 10**, $p_n^i = p_n^i(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, x^{(n)}) = p_n^i(q, P_{n-1}, x^{(n)})$.

Значит, $L(q, p) = L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))$, $H(q, p) = H(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))$.

По **теореме 11** $\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)})) = p_n^i$, следовательно

$$\frac{\partial}{\partial x^{(n)j}} \left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)})) \right) = \frac{\partial^2 L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} = \frac{\partial p_n^i(q, P_{n-1}, x^{(n)})}{\partial x^{(n)j}}. \quad (34)$$

Равенство (34) – это аналог матрицы Якоби $\frac{\partial p_n^i(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)j}}$ – локальной записи импульсов n -го порядка по старшим скоростям порядка n для функции Лагранжа $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{X}$, и оно может быть получено по-другому:

$$\begin{aligned} p_k^i(n)(x, \dots, x) &= p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) \quad k = \overline{0, n}, i = \overline{1, m} \Rightarrow \\ \Rightarrow p_n^i(n) &= p_{k=n}^i(n)(x, \dots, x) = p_n^i(n)(x, \dots, x) = (-1)^{l=0} D_t^{l=0} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(0+n)i}} \right) = \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(n)j}} = \frac{\partial}{\partial x^{(n)j}} \left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}}. \end{aligned}$$

По третьему пункту **теоремы 10**, имеем

$$\sum_{s=1}^m \frac{\partial^2 H(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \cdot \frac{\partial p_n^s(q, P_{n-1}, x^{(n)})}{\partial x^{(n)j}} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \text{ – символ Кронекера.} \quad (35)$$

Подставим $\frac{\partial p_n^s(q, P_{n-1}, x^{(n)})}{\partial x^{(n)j}} = \frac{\partial^2 L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)s}} = \frac{\partial^2 L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial x^{(n)s} \partial x^{(n)j}}$ (прямое следствие из выражения (34) в (35):

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^m \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \cdot \frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)j}} = \\ &= \sum_{s=1}^m \frac{\partial^2 H(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \cdot \frac{\partial^2 L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial x^{(n)s} \partial x^{(n)j}} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \text{ – символ Кронекера.} \quad (36) \end{aligned}$$

Вторая часть теоремы

$$\frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p_n^i \partial p_n^s} = \frac{\partial^2 H(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial p_n^i \partial p_n^s} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 L(q, P_{n-1}, p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))}{\partial x^{(n)s} \partial x^{(n)j}} \neq 0$$

следует из равенства (36).

Теорема 12 доказана.

Заключение. В работе получены основные результаты:

1. Оператор k кратного дифференцирования расслоения скоростей по времени (старых координат, выраженных через новые) квазилинеен относительно k -го дифференцирования по времени новых координат и якобиану перехода (теорема 1).
2. Получена формула первой частной производной порядка k от расслоения скоростей в старых координатах по скоростям в новых координатах порядка p . Показано, что она пропорциональна производной по времени от якобиана перехода порядка $k-p$ (теорема 2).
3. Выявлена связь частных производных первого порядка обобщенных координат по координатам и импульсов по обобщенным импульсам и с произвольными нижними и верхними индексами. Рассматриваемые производные можно выразить через функции дельта Кронекера (теорема 3).

4. Теорема 4 – формула свертки обобщенных импульсов в двойной сумме по верхнему и нижнему индексам.

5. В теореме 5 показано, что частные производные по обобщенным координатам с индексами (i,s) в функциях Гамильтона и Лагранжа пропорциональны с точностью до слагаемого по сопряженной координате (нижний индекс для производной по координате понижается на 1, для производной по импульсу нижний индекс – повышается на 1), а также с точностью до суммы со вторыми частными производными функции Гамильтона и умноженные на обобщенный импульс максимального порядка.

6. В теореме 6 доказано, что формула временной производной порядка p от гладкой функции с аргументом старшей скорости порядка k выражается квазилинейно через скорость максимального порядка $k + p$.

7. Теорема 7 – формула связи обобщенного импульса с индексами (i,k) со вторыми частными производными функции Лагранжа по скоростям минимального порядка, умноженными на скорость максимального порядка в расслоенном пространстве скоростей.

8. Теорема 8 – частный случай теоремы 7 (порядок временной производной равен рангу обобщенного импульса).

9. В теореме 9 показана эквивалентность частной временной производной порядка $2n - k$ от обобщенного импульса $p_k^i(n)$ по координате расслоенного пространства скоростей и гессиана от функции Лагранжа по координатам расслоенного пространства с максимальным порядком n производных по времени (локально невырожденного). И в силу теоремы о неявной функции можно выразить координату расслоенного пространства скоростей с временной производной максимального порядка через обобщенный импульс.

10. В случае невырожденности гессиана от функции Гамильтона по импульсам (старшего порядка n) его можно выразить через частную производную скорости порядка n по обобщенным импульсам порядка n (максимален).

11. В случае локальной невырожденности гессиана от функции Гамильтона по импульсам старшего порядка n существует равенство частной производной первого порядка от Лагранжиана по скорости порядка n расслоенного пространства обобщенному импульсу того же порядка. Аналогично, скорость порядка n равна частной производной функции Гамильтона по обобщенному импульсу порядка n .

12. Матрица Гессе для функции Гамильтона по импульсу старшего порядка n и матрица Гессе от функции Лагранжа по скоростям порядка n являются взаимно обратными, то есть их свертка по индексу пространственной переменной равна символу Кронекера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин, В.А. Современная геометрия. Методы и приложения / В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М. : УРСС, 1994.
2. Рашевский, П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов, А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд, В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
5. Козлов, А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1319–1335.
6. Козлов, А.А. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 621–627.
7. Козлов, А.А. О глобальном управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2006. – № 3. – С. 63–64.
8. Галеев, Э.М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М. : Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.
9. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / С.Г. Ехилевский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.
10. Закон преобразования обобщенного импульса / С.Г. Ехилевский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.
11. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии»: ВИНТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.

12. Трофимов, В.В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В.В. Трофимов А.Т. Фоменко. – М. : Факториал, 1995.
13. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, С.В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 117–123.
14. Вакуленко, С.П. К вопросу о нелинейных волнах в стержнях / С.П. Вакуленко А.К. Волосова, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2018. – Т. 16, № 3 (76). – С. 6–17.
15. Пастухов, Ю.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.
16. Пастухов, Ю.Ф. Тензор обобщенной энергии / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 78–100.
17. Пастухов, Ю.Ф. Группы преобразований, сохраняющие вариационную задачу со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 194–209.
18. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк, 2018. – Режим доступа: <http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/22094>. – Дата доступа: 15.06.2018.
19. Пастухов Ю.Ф. “ Необходимые условия в обратной вариационной задаче ”. Фундаментальная и прикладная математика. 7:1(2001), 285–288.
20. Пастухов, Ю.Ф. Лагранжевы сечения / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 75–99.

Поступила 12.03.2019

PROPERTIES OF THE HAMILTON FUNCTION IN VARIATION TASKS WITH HIGHER DERIVATIVE DERIVATIVES

Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV

The Considered characteristic function Hamilton and Lagranzha in coordinate-pulsed and stratified space of the velocities. The Main got by result is a statement - in the event of local absence of degeneracy of the matrix Gesse from function Hamilton on pulse of the maximum order (the matrixes Gesse from function Lagranzha on velocity of the maximum order) specified matrixes Gesse mutually inverse. It Is Received row auxiliary result, for instance, about quasi linear form of the time derived order k from generalised coordinates on velocity stratified space of the order k for change the coordinates with nonzero finder Yakobi. Unexpected identity are Received in coordinate-pulsed space q-p for quotient derived between coordinate is stratified space (the coordinate-coordinate, pulse-pulse). They Are Received formulas, linking quotient derived in coordinate-pulsed space q-p for function Lagranzha and Hamilton on one and same variable.

Keywords: function Hamilton, variational problem, stratified space of the velocities, equations Eylera – Lagranzha, smooth of the variety, tensor of the generalised pulse, nonzero finder of the matrix Gesse.

УДК 517.6: 517.958

МИНИМАЛЬНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ С ШЕСТЫМ ПОРЯДКОМ ПОГРЕШНОСТИ

канд. физ-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет);

Н.К. ВОЛОСОВА

(Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана)

Предложен алгоритм решения общей неоднородной краевой задачи Дирихле для трехмерного уравнения Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности и с минимальным 27-точечным шаблоном. Численно проверена устойчивость алгоритма к разрывам первого рода граничных условий на гранях параллелепипеда. Получено разложение невязки задачи в общем виде для неравномерной сетки через производные четного порядка от решения и правой части уравнения и четного порядка по каждой из трех переменных. Написана программа на основе построенного алгоритма и принципа сжатых отображений для явной формулы простой итерации. Решен точно тестовый пример и проведено сравнение его решения с численным решением, которое подтверждает шестой порядок погрешности для формул полученного алгоритма.

Ключевые слова: трехмерное уравнение Пуассона на параллелепипеде, неоднородно-краевая задача Дирихле, принцип сжатых отображений, уравнения математической физики.

Введение. Рассмотрим неоднородную краевую задачу для трехмерного уравнения Пуассона в параллелепипеде с краевыми условиями Дирихле. Известны разностные схемы для уравнения Пуассона с погрешностью второго порядка в двумерной области А.А. Самарского [1] с погрешностью четвертого порядка на равномерной сетке К.Н. Волкова [2], также схемы большего порядка на прямоугольнике и на равномерной сетке [4]. Во всех случаях для тестирования алгоритма необходимы примеры с точными аналитическими решениями [3]. Однако, как показано в работе [1, с. 57], для схем второго порядка в задаче уравнения Пуассона на прямоугольнике удастся достичь равномерно непрерывной нормы погрешности $3 \cdot 10^{-3}$ при делении его сторон на 160 частей. Отметим работу [11] с формулами для трехмерного лапласиана.

В данной работе предложен простой алгоритм решения трехмерного уравнения Пуассона на параллелепипеде с использованием минимального симметричного шаблона для аппроксимации (27 узлов) и достижения равномерно непрерывной нормы погрешности 10^{-9} при делении ребра параллелепипеда на 60 частей и с аппроксимацией шестым порядком погрешности. Сложность трехмерной задачи, по сравнению с двумерной задачей, заключается в быстром росте количества вычислений и в увеличении общего числа узлов. Например, 10 000 узлов на прямоугольнике и 1 000 000 узлов в параллелепипеде. По сравнению с работой [4], в которой использовались два шаблона, граничный и внутренний на прямоугольнике с восьмым порядком погрешности, в данной работе использование одного универсального шаблона позволяет экономить число и время вычислений в $n^3(3^3 + 5^3) / 3^3 = 5,6n^3$ число раз за счет выбора одного шаблона, но с шестым порядком погрешности. Кроме того, нужно учитывать, что использование двойного шаблона увеличивает число вычислений в 2-3 раза в каждом узле и уменьшает быстродействие. В работе использована модифицированная формула бинома Ньютона – тринома Ньютона (по аналогии с биномом – прим. авт.).

Полученный алгоритм численного решения трехмерной задачи для уравнения Пуассона может быть применен в различных областях механики [5], кристаллографии, стеганографии [6, 7], для численных задач математической физики, содержащих трехмерный оператор Лапласа, например, волновое уравнение [11, 14–17].

Постановка задачи. Рассмотрим неоднородную краевую задачу для трехмерного уравнения Пуассона в параллелепипеде для достаточно гладкого решения $u(x, y, z)$ как функции трех переменных:

$$\begin{cases} (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f(x, y, z), & x \in (a, b), y \in (c, d), z \in (e, r) \\ u(a, y, z) = \mu_1(y, z), u(b, y, z) = \mu_2(y, z), & (y, z) \in [c, d] \times [e, r] \\ u(x, c, z) = \mu_3(x, z), u(x, d, z) = \mu_4(x, z), & (x, z) \in [a, b] \times [e, r] \\ u(x, y, e) = \mu_5(x, y), u(x, y, r) = \mu_6(x, y), & (x, y) \in [a, b] \times [c, d]. \end{cases} \quad (1)$$

В задаче (1) $f(x, y, z)$ – неоднородная правая часть уравнения Пуассона в параллелепипеде: $[a, b] \times [c, d] \times [e, r]$, $\mu_1(y, z)$, $\mu_2(y, z)$, $\mu_3(x, z)$, $\mu_4(x, z)$, $\mu_5(x, y)$, $\mu_6(x, y)$ – неоднородные краевые условия, (x, y, z) – координаты точки. Обозначим внутреннее и граничное множества задачи (1)

$$\Omega = (a, b) \times (c, d) \times (e, r), \partial\Omega = [c, d] \times [e, r] (x = a, b) \cup [a, b] \times [e, r] (y = c, d) \cup [a, b] \times [c, d] (z = e, r).$$

В классической постановке задач математической физики необходимо требовать непрерывности граничных условий на пересечении их областей определения, т.е. непрерывность краевых условий на 12 ребрах параллелепипеда, например,

$$\mu_1(0, z) = \mu_3(0, z), \forall z \in [e, r].$$

Рассмотрим аппроксимацию задачи (1) на шаблоне, содержащем минимальное количество узлов и покрывающим всю область параллелепипеда. Ясно, что на 27-точечном шаблоне, который содержит коробка со сторонами $2h_1, 2h_2, 2h_3$, и решается поставленная задача с минимальным числом узлов в нем. Такой шаблон является универсальным, как на границе рассматриваемого параллелепипеда, так и внутри данной области, и покрывает параллелепипед объема $(b-a)(d-c)(r-e)$ кирпичиками с объемом $8h_1h_2h_3$ (рисунок).

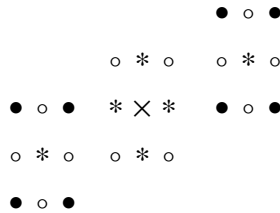


Рисунок. – Классификация 27 узлов куба (параллелепипеда) по расстоянию от центра и свойствам симметрии для 1, 6, 12, 8 узлов

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть решение задачи (1) принадлежит классу функций $u(x, y, z) \in C^{2p}(\Omega)$, тогда для суммы узловых значений решения в шести центральных узлах граней куба (параллелепипеда) справедлива формула разложения в ряд Тейлора с центром в узле (m, n, k) :

$$u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k} + u_{m,n-1,k} + u_{m,n+1,k} + u_{m,n,k-1} + u_{m,n,k+1} = 6u_{m,n,k} + 2 \sum_{l=1}^p \frac{1}{(2l)!} \left(h_1^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}} + h_2^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2l}} + h_3^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial z^{2l}} \right) + O\left(h_1^{2p+2} + h_2^{2p+2} + h_3^{2p+2}\right). \quad (2)$$

Доказательство. Объединяя попарно противоположные узлы на каждой координатной оси относительно центра (m, n, k) , учитывая, что в силу симметрии сохраняются только частные производные четной степени по соответствующей координате, получим

$$\begin{aligned} & u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k} + u_{m,n-1,k} + u_{m,n+1,k} + u_{m,n,k-1} + u_{m,n,k+1} = \\ & = (u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k}) + (u_{m,n-1,k} + u_{m,n+1,k}) + (u_{m,n,k-1} + u_{m,n,k+1}) = \\ & = 2u_{m,n,k} + 2 \sum_{l=1}^p \frac{1}{(2l)!} \left(h_1^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}} \right) + O\left(h_1^{2p+2}\right) + 2u_{m,n,k} + 2 \sum_{l=1}^p \frac{1}{(2l)!} \left(h_2^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2l}} \right) + O\left(h_2^{2p+2}\right) + \\ & \quad + 2u_{m,n,k} + 2 \sum_{l=1}^p \frac{1}{(2l)!} \left(h_3^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial z^{2l}} \right) + O\left(h_3^{2p+2}\right) = \\ & = 6u_{m,n,k} + 2 \sum_{l=1}^p \frac{1}{(2l)!} \left(h_1^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}} + h_2^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2l}} + h_3^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial z^{2l}} \right) + O\left(h_1^{2p+2} + h_2^{2p+2} + h_3^{2p+2}\right). \end{aligned}$$

Что и завершает доказательство формулы (2) **Леммы 1**. В частности, для равномерной сетки получим из выражения (2) формулу (3)

$$\begin{aligned} & u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k} + u_{m,n-1,k} + u_{m,n+1,k} + u_{m,n,k-1} + u_{m,n,k+1} = \\ & = 6u_{m,n,k} + 2 \sum_{l=1}^p \frac{h^{2l}}{(2l)!} \left(\frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}} + \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2l}} + \frac{\partial^{2l} u}{\partial z^{2l}} \right) + O(h^{2p+2}). \end{aligned} \quad (3)$$

Лемма 2. Пусть решение задачи (1) принадлежит классу функций $u(x, y, z) \in C^{2p}(\Omega)$, тогда для суммы узловых значений решения в 12 узлах – серединах ребер куба (параллелепипеда) справедлива формула разложения в ряд Тейлора с центром в узле с индексами (m, n, k)

$$\begin{aligned} & u_{m-1,n+1,k} + u_{m-1,n,k+1} + u_{m-1,n-1,k} + u_{m-1,n,k-1} + u_{m+1,n+1,k} + u_{m+1,n,k+1} + \\ & + u_{m+1,n-1,k} + u_{m+1,n,k-1} + u_{m,n-1,k-1} + u_{m,n-1,k+1} + u_{m,n+1,k-1} + u_{m,n+1,k+1} = \\ & = 12u_{m,n,k} + 4 \sum_{l=1}^p \sum_{s=0}^l \frac{1}{(2s)!(2l-2s)!} \left(h_1^{2s} h_2^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}} + h_1^{2s} h_3^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial z^{2l-2s}} + h_2^{2s} h_3^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2s} \partial z^{2l-2s}} \right) + \\ & + O \left(\sum_{i=0}^{p+1} \left(h_1^{2p+2-2i} h_2^{2i} + h_2^{2p+2-2i} h_3^{2i} + h_3^{2p+2-2i} h_1^{2i} \right) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Доказательство. Сгруппируем в формуле (4) суммы 3 четверок узлов, расположенных в плоскостях параллельных граням куба (параллелепипеда) и проходящих через центральный узел с индексами (m, n, k) . Для каждой четверки узлов разложим в ряд Тейлора сумму четырёх узловых значений, например, в узлах плоскости Oxy получим разложение по формуле бинома Ньютона:

$$\begin{aligned} A & = u_{m-1,n-1,k} + u_{m-1,n+1,k} + u_{m+1,n-1,k} + u_{m+1,n+1,k} = \\ & = 4u_{m,n,k} + \sum_{l=1}^{2p} \sum_{s=0}^l \frac{C_l^s}{l!} \left(\frac{\partial^l u}{\partial x^s \partial y^{l-s}} (-h_1)^s (-h_2)^{l-s} + \frac{\partial^l u}{\partial x^s \partial y^{l-s}} (-h_1)^s (h_2)^{l-s} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^l u}{\partial x^s \partial y^{l-s}} (h_1)^s (-h_2)^{l-s} + \frac{\partial^l u}{\partial x^s \partial y^{l-s}} (h_1)^s (h_2)^{l-s} \right) + O \left(\sum_{i=0}^{2p+1} \left(h_1^{2p+1-i} h_2^i \right) \right) = \\ & = 4u_{m,n,k} + \sum_{l=1}^{2p} \sum_{s=0}^l \frac{C_l^s}{l!} (h_1)^s (h_2)^{l-s} \frac{\partial^l u}{\partial x^s \partial y^{l-s}} \left((-1)^{s+l-s} + (-1)^s + (-1)^{l-s} + 1 \right). \end{aligned}$$

Имеем далее

$$\begin{aligned} & (-1)^{s+l-s} + (-1)^s + (-1)^{l-s} + 1 = (-1)^l \left(1 + (-1)^{-s} \right) + (-1)^s + 1 = \left((-1)^s + 1 \right) \left(1 + (-1)^l \right) = \\ & = \begin{cases} 4, s = 2s_1 \wedge l = 2l_1 \\ 0, s = 2s_1 + 1 \vee l = 2l_1 + 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

и $(s_1 \rightarrow s, l_1 \rightarrow l)$ получим $A = 4u_{m,n,k} + 4 \sum_{l=1}^p \sum_{s=0}^l \frac{C_{2l}^{2s}}{(2l)!} h_1^{2s} h_2^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}} + O \left(\sum_{i=0}^{p+1} \left(h_1^{2p+2-2i} h_2^{2i} \right) \right)$.

Поскольку $\frac{C_{2l}^{2s}}{(2l)!} = \frac{(2l)!}{(2l)!(2s)!(2l-2s)!} = \frac{1}{(2s)!(2l-2s)!}$, то последняя формула примет вид

$$\begin{aligned} & u_{m-1,n-1,k} + u_{m-1,n+1,k} + u_{m+1,n-1,k} + u_{m+1,n+1,k} = \\ & = 4u_{m,n,k} + 4 \sum_{l=1}^p \sum_{s=0}^l \frac{h_1^{2s} h_2^{2l-2s}}{(2s)!(2l-2s)!} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}} + O \left(\sum_{i=0}^{p+1} \left(h_1^{2p+2-2i} h_2^{2i} \right) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Две четверки узлов и суммы узловых значений решения в соответствующих узлах в плоскостях Oxz , Oyz имеют ту же симметрию и формулы разложения аналогично формуле (6), тогда, меняя циклически индексы и складывая все 12 узловых значений, получим

$$\begin{aligned}
 & 4u_{m,n,k} + 4 \sum_{l=1}^p \sum_{s=0}^l \frac{h_1^{2s} h_2^{2l-2s}}{(2s)!(2l-2s)!} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}} + 4u_{m,n,k} + 4 \sum_{l=1}^p \sum_{s=0}^l \frac{h_1^{2s} h_3^{2l-2s}}{(2s)!(2l-2s)!} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial z^{2l-2s}} + \\
 & + 4u_{m,n,k} + 4 \sum_{l=1}^p \sum_{s=0}^l \frac{h_2^{2s} h_3^{2l-2s}}{(2s)!(2l-2s)!} \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2s} \partial z^{2l-2s}} + O\left(\sum_{i=0}^{p+1} \left(h_1^{2p+2-2i} h_2^{2i} + h_2^{2p+2-2i} h_3^{2i} + h_3^{2p+2-2i} h_1^{2i}\right)\right) = \\
 & = 12u_{m,n,k} + 4 \sum_{l=1}^p \sum_{s=0}^l \frac{1}{(2s)!(2l-2s)!} \left(h_1^{2s} h_2^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}} + h_1^{2s} h_3^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial z^{2l-2s}} + h_2^{2s} h_3^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2s} \partial z^{2l-2s}} \right) + \\
 & + O\left(\sum_{i=0}^{p+1} \left(h_1^{2p+2-2i} h_2^{2i} + h_2^{2p+2-2i} h_3^{2i} + h_3^{2p+2-2i} h_1^{2i}\right)\right).
 \end{aligned}$$

Лемма 2 и формула (4) доказаны.

В частности, для равномерной сетки получим формулу

$$\begin{aligned}
 & u_{m-1,n+1,k} + u_{m-1,n,k+1} + u_{m-1,n-1,k} + u_{m-1,n,k-1} + u_{m+1,n+1,k} + u_{m+1,n,k+1} + \\
 & + u_{m+1,n-1,k} + u_{m+1,n,k-1} + u_{m,n-1,k-1} + u_{m,n-1,k+1} + u_{m,n+1,k-1} + u_{m,n+1,k+1} = \\
 & = 12u_{m,n,k} + 4 \sum_{l=1}^p h^{2l} \sum_{s=0}^l \frac{1}{(2s)!(2l-2s)!} \left(\frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}} + \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial z^{2l-2s}} + \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2s} \partial z^{2l-2s}} \right) + O(h^{2p+2}). \tag{7}
 \end{aligned}$$

Рассмотрим модифицированную формулу Ньютона

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq n \\ 0 \leq k_2 \leq n \\ 0 \leq k_3 \leq n \\ k_1+k_2+k_3=n}} C_n^{k_1,k_2,k_3} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3}, \quad C_n^{k_1,k_2,k_3} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}. \tag{8}$$

Доказательство формулы (8). Введем переменные

$k_1 = j_0^i \in [0, i]$, $k_2 = i - j_0^i \in [i, 0]$, $k_3 = n - i$, $k_1 + k_2 + k_3 = j + i - j + n - i = n$, поскольку $i \in [0, n]$, то области изменения переменных $k_1 \in [0, n]$, $k_2 \in [n, 0]$, $k_3 = n - i \in [n, 0]$, тогда имеем

$$\begin{aligned}
 & (a+b+c)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i (a+b)^i c^{n-i} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i C_n^i C_i^j a^j b^{i-j} c^{n-i} = \\
 & = \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq n \\ 0 \leq k_2 \leq n \\ 0 \leq k_3 \leq n \\ k_1+k_2+k_3=n}} \frac{n!}{i!(n-i)! j!(i-j)!} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3} = \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq n \\ 0 \leq k_2 \leq n \\ 0 \leq k_3 \leq n \\ k_1+k_2+k_3=n}} \frac{n!}{j!(i-j)!(n-i)!} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3} = \\
 & = \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq n \\ 0 \leq k_2 \leq n \\ 0 \leq k_3 \leq n \\ k_1+k_2+k_3=n}} C_n^{k_1,k_2,k_3} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3}, \quad C_n^{k_1,k_2,k_3} = \frac{n!}{j!(i-j)!(n-i)!} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}.
 \end{aligned}$$

Формула (8) доказана.

Лемма 3. Пусть решение задачи (1) принадлежит классу функций $u(x, y, z) \in C^{2p}(\Omega)$, тогда для суммы узловых значений решения в 8 вершинах куба (параллелепипеда) справедлива формула разложения в ряд Тейлора с центром в узле с индексами (m, n, k)

$$u_{m-1,n-1,k-1} + u_{m-1,n-1,k+1} + u_{m-1,n+1,k-1} + u_{m-1,n+1,k+1} + u_{m+1,n-1,k-1} + u_{m+1,n-1,k+1} + u_{m+1,n+1,k-1} + u_{m+1,n+1,k+1} =$$

$$= 8u_{m,n,k} + 8 \sum_{l=1}^p \sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq l \\ 0 \leq s_2 \leq l \\ 0 \leq s_3 \leq l \\ s_1+s_2+s_3=l}} \frac{h_1^{2s_1} h_2^{2s_2} h_3^{2s_3}}{(2s_1)!(2s_2)!(2s_3)!} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s_1} \partial y^{2s_2} \partial z^{2s_3}} + O \left(\sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq l+1 \\ 0 \leq s_2 \leq l+1 \\ 0 \leq s_3 \leq l+1 \\ s_1+s_2+s_3=l+1}} h_1^{2s_1} h_2^{2s_2} h_3^{2s_3} \right). \quad (9)$$

Доказательство. Разложим в формуле (9) сумму 8 узловых значений в ряд Тейлора в точках, совпадающих с вершинами куба (параллелепипеда) относительно центрального узла с индексами (m, n, k) . Воспользуемся модифицированной формулой бинома Ньютона (8)

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq n \\ 0 \leq s_2 \leq n \\ 0 \leq s_3 \leq n \\ s_1+s_2+s_3=n}} C_n^{s_1, s_2, s_3} a^{s_1} b^{s_2} c^{s_3}, n \in N, \quad C_n^{s_1, s_2, s_3} = \frac{n!}{s_1! s_2! s_3!}, s_1 + s_2 + s_3 = n.$$

Подставляя восемь раз формулу (8) в левую часть (9), учитывая $\frac{C_n^{s_1, s_2, s_3}}{n!} = \frac{n!}{n! s_1! s_2! s_3!} = \frac{1}{s_1! s_2! s_3!}, s_1 + s_2 + s_3 = n$, получим относительно центрального узла с индексами (m, n, k)

$$\begin{aligned} & u_{m-1, n-1, k-1} + u_{m-1, n-1, k+1} + u_{m-1, n+1, k-1} + u_{m-1, n+1, k+1} + u_{m+1, n-1, k-1} + u_{m+1, n-1, k+1} + u_{m+1, n+1, k-1} + u_{m+1, n+1, k+1} = \\ & = 8u_{m,n,k} + \sum_{l=1}^{2p} \sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq l \\ 0 \leq s_2 \leq l \\ 0 \leq s_3 \leq l \\ s_1+s_2+s_3=l}} \frac{C_l^{s_1, s_2, s_3}}{l!} h_1^{s_1} h_2^{s_2} h_3^{s_3} \frac{\partial^l u}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2} \partial z^{s_3}} \left((-1)^{s_1+s_2+s_3} + (-1)^{s_1+s_2} + (-1)^{s_1+s_3} + (-1)^{s_1} + \right. \\ & \left. + (-1)^{s_2+s_3} + (-1)^{s_2} + (-1)^{s_3} + 1 \right) + O \left(\sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq 2p+1 \\ 0 \leq s_2 \leq 2p+1 \\ 0 \leq s_3 \leq 2p+1 \\ s_1+s_2+s_3=2p+1}} h_1^{s_1} h_2^{s_2} h_3^{s_3} \right). \end{aligned}$$

Кроме того, преобразуем сумму

$$\begin{aligned} & (-1)^{s_1+s_2+s_3} + (-1)^{s_1+s_2} + (-1)^{s_1+s_3} + (-1)^{s_1} + (-1)^{s_2+s_3} + (-1)^{s_2} + (-1)^{s_3} + 1 = \\ & = (-1)^{s_1} \left((-1)^{s_2} + 1 \right) + (-1)^{s_3} \left((-1)^{s_2} + 1 \right) + (-1)^{s_1+s_3} \left((-1)^{s_2} + 1 \right) + (-1)^{s_2} + 1 = \left((-1)^{s_2} + 1 \right) \left((-1)^{s_1} + (-1)^{s_3} + (-1)^{s_1+s_3} + 1 \right) = \\ & = \left((-1)^{s_2} + 1 \right) \left((-1)^{s_1} \left(1 + (-1)^{s_3} \right) + 1 + (-1)^{s_3} \right) = \left((-1)^{s_2} + 1 \right) \left((-1)^{s_3} + 1 \right) \left((-1)^{s_1} + 1 \right) = \\ & = \begin{cases} 8, s_1 = 2s_1' \wedge s_2 = 2s_2' \wedge s_3 = 2s_3' \\ 0, s_1 = 2s_1' + 1 \vee s_2 = 2s_2' + 1 \vee s_3 = 2s_3' + 1. \end{cases} \quad (10) \end{aligned}$$

то, упрощая множитель в двойной сумме используя формулу (10) и возвращаясь к переменным, $l = s_1 + s_2 + s_3 = 2(s_1' + s_2' + s_3') = 2l', s_1' \rightarrow s_1, s_2' \rightarrow s_2, s_3' \rightarrow s_3, l' \rightarrow l$, получим

$$\sum_{l=1}^{2p} \sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq l \\ 0 \leq s_2 \leq l \\ 0 \leq s_3 \leq l \\ s_1+s_2+s_3=l}} \frac{C_l^{s_1, s_2, s_3}}{l!} h_1^{s_1} h_2^{s_2} h_3^{s_3} \frac{\partial^l u}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2} \partial z^{s_3}} \left((-1)^{s_1+s_2+s_3} + (-1)^{s_1+s_2} + (-1)^{s_1+s_3} + (-1)^{s_1} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + (-1)^{s_2+s_3} + (-1)^{s_2} + (-1)^{s_3} + 1) + O \left(\sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq 2p+1 \\ 0 \leq s_2 \leq 2p+1 \\ 0 \leq s_3 \leq 2p+1 \\ s_1+s_2+s_3=2p+1}} h_1^{s_1} h_2^{s_2} h_3^{s_3} \right) = \\
 & = 8 \sum_{l=1}^p \sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq l \\ 0 \leq s_2 \leq l \\ 0 \leq s_3 \leq l \\ s_1+s_2+s_3=l}} \frac{h_1^{2s_1} h_2^{2s_2} h_3^{2s_3}}{(2s_1)!(2s_2)!(2s_3)!} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s_1} \partial y^{2s_2} \partial z^{2s_3}} + O \left(\sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq p+1 \\ 0 \leq s_2 \leq p+1 \\ 0 \leq s_3 \leq p+1 \\ s_1+s_2+s_3=p+1}} h_1^{2s_1} h_2^{2s_2} h_3^{2s_3} \right). \quad (11)
 \end{aligned}$$

Добавляя к выражению (11) $8u_{m,n,k}$, получим формулу (9). **Лемма 3** доказана.

В частности, на равномерной сетке формула (9) переходит в формулу (12)

$$\begin{aligned}
 & u_{m-1,n-1,k-1} + u_{m-1,n-1,k+1} + u_{m-1,n+1,k-1} + u_{m-1,n+1,k+1} + u_{m+1,n-1,k-1} + u_{m+1,n-1,k+1} + u_{m+1,n+1,k-1} + u_{m+1,n+1,k+1} = \\
 & = 8u_{m,n,k} + 8 \sum_{l=1}^p h^{2l} \sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq l \\ 0 \leq s_2 \leq l \\ 0 \leq s_3 \leq l \\ s_1+s_2+s_3=l}} \frac{1}{(2s_1)!(2s_2)!(2s_3)!} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s_1} \partial y^{2s_2} \partial z^{2s_3}} + O(h^{2p+2}). \quad (12)
 \end{aligned}$$

Замечание 1. В формуле (12) суммирование происходит по 4 индексам s_1, s_2, s_3, l , однако в силу уравнения связи $s_1 + s_2 + s_3 = l$ независимыми остаются только 3 переменных, то есть данная формула представляет тройную сумму по узлам параллелепипеда.

Лемма 4. Пусть решение уравнения Пуассона (1) принадлежит классу функций $u(x, y, z) \in C^4(\Omega)$ и неоднородная правая часть уравнения $f(x, y, z) \in C^2(\Omega)$, и пусть наложена связь на коэффициенты в линейной комбинации производных четвертого порядка от решения уравнения Пуассона: *Сумма коэффициентов для несмешанных частных производных равна половине суммы коэффициентов от смешанных производных в линейной комбинации*, тогда этого достаточно для преобразования линейной комбинации в сумму частных производных второго порядка от правой части уравнения Пуассона.

Доказательство. Используя уравнение Пуассона, найдём его вторые частные производные от правой части

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z) \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = u_x^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \\ f_{yy} = u_{(2)x}^{(4)} + u_y^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \\ f_{zz} = u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} + u_z^{(4)}, \end{cases} \quad (13)$$

где символ $u_{(2)x}^{(4)}$ обозначает частную производную 4 порядка: 2 порядка по переменной x и 2 порядка по y .

Тогда для линейной комбинации вторых производных получим с учетом формулы (13)

$$\begin{aligned}
 Af_{xx} + Bf_{yy} + Cf_{zz} &= A \left(u_x^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \right) + B \left(u_{(2)x}^{(4)} + u_y^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \right) + C \left(u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} + u_z^{(4)} \right) = \\
 &= Au_x^{(4)} + Bu_y^{(4)} + Cu_z^{(4)} + u_{(2)x}^{(4)} (A+B) + u_{(2)y}^{(4)} (A+C) + u_{(2)z}^{(4)} (B+C). \quad (14)
 \end{aligned}$$

Из последней формулы следует, что $(A)+(B)+(C) = \frac{1}{2}((A+B)+(A+C)+(B+C))$, то есть сумма коэффициентов при несмешанных частных производных равна половине суммы коэффициентов при смешанных производных в линейной комбинации производных 4 порядка от решения уравнения Пуассона. **Лемма 4** доказана.

Как было показано в **Леммах 1–3** аппроксимация трех различных сумм узловых значений решения на 27-точечном шаблоне содержит частные производные от решения только четного порядка, а следовательно, и производные четного порядка от правой части. Следовательно, линейная комбинация производных четвертого порядка и четного порядка по каждой из координат является общим видом разложения в ряд Тейлора для слагаемых 4-й степени по шагам сетки, т.е. утверждение **Леммы 4** учитывает общий случай разложения в ряд Тейлора суммы узловых значений для 27-точечного шаблона.

Лемма 5. Пусть решение задачи (1) принадлежит классу функций $u(x, y, z) \in C^6(\Omega)$ и неоднородная правая часть уравнения $f(x, y, z) \in C^4(\Omega)$, и пусть наложена связь на коэффициенты в линейной комбинации производных шестого порядка от решения уравнения Пуассона: *Сумма коэффициентов для несмешанных частных производных и коэффициента при симметричной смешанной производной* $u_{(2)x}^{(6)}$
 $u_{(2)y}^{(6)}$
 $u_{(2)z}^{(6)}$

равна половине суммы коэффициентов от несимметричных смешанных производных шестого порядка. Тогда этого достаточно для преобразования линейной комбинации в сумму частных производных четвертого порядка от правой части уравнения Пуассона.

Доказательство. Используя уравнение Пуассона, найдём его четвертые частные производные от правой части

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z) \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \\ f_{yy} = u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \\ f_{zz} = u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x^{(4)} = u_x^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(4)z}^{(6)} \\ f_{(2)x}^{(4)} = u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(2)z}^{(6)} \\ f_{(2)x}^{(4)} = u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(2)z}^{(6)} \\ f_y^{(4)} = u_{(2)x}^{(6)} + u_y^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} \\ f_{(2)y}^{(4)} = u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} \\ f_z^{(4)} = u_{(2)x}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} + u_z^{(6)}. \end{cases} \quad (15)$$

Тогда для линейной комбинации четвертых производных от правой части уравнения Пуассона получим

$$\begin{aligned} Af_x^{(4)} + Bf_{(2)x}^{(4)} + Cf_{(2)x}^{(4)} + Df_y^{(4)} + Ef_{(2)y}^{(4)} + Ff_z^{(4)} &= A \left(u_x^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(4)z}^{(6)} \right) + B \left(u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(2)z}^{(6)} \right) + \\ &+ C \left(u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(2)z}^{(6)} \right) + D \left(u_{(2)x}^{(6)} + u_y^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} \right) + E \left(u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} \right) + F \left(u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)z}^{(6)} + u_z^{(6)} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= Au_x^{(6)} + Du_y^{(6)} + Fu_z^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)}(A+B) + u_{(4)y}^{(6)}(D+B) + u_{(4)z}^{(6)}(C+F) + u_{(2)x}^{(6)}(C+A) + \\
 &\quad + u_{(2)y}^{(6)}(E+F) + u_{(2)z}^{(6)}(D+E) + u_{(2)x}^{(6)}(B+C+E). \tag{16}
 \end{aligned}$$

Из последней формулы следует, что

$$(A)+(D)+(F)+(B+C+E) = \frac{1}{2}((A+B)+(D+B)+(C+F)+(C+A)+(E+F)+(D+E)),$$

то есть сумма коэффициентов для несмешанных частных производных и коэффициента при симметричной смешанной производной $u_{(2)x}^{(6)}$ равна половине суммы коэффициентов от несимметричных

смешанных производных шестого порядка линейной комбинации от решения уравнения Пуассона. **Лемма 5** доказана.

Как было показано в **Леммах 1–3** аппроксимация трех различных сумм узловых значений решения на 27-точечном шаблоне содержит частные производные от решения только четного порядка. Поэтому линейная комбинация производных шестого порядка и четного порядка по каждой из координат является общим видом разложения в ряд Тейлора для слагаемых при шестой степени шага сетки. Следовательно, утверждение **Леммы 5** учитывает общий случай разложения суммы узловых значений функций для 27-точечного шаблона.

Теорема 1. Пусть решение задачи (1) принадлежит классу функций $u(x, y, z) \in C^6(\Omega)$ и неоднородная правая часть уравнения $f(x, y, z) \in C^4(\Omega)$, тогда симметричный 27-точечный шаблон на равномерной сетке обеспечивает аппроксимацию 3 мерного уравнения Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности $O(h^6)$. Более того, невозможно получить порядок невязки 27-точечным шаблоном выше шестого. Имеет место разностное уравнение для трёхмерного уравнения Пуассона:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{h^2} \left(-\frac{64}{15}u_{mnk} + \frac{7}{15}(u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k} + u_{m,n-1,k} + u_{m,n+1,k} + u_{m,n,k-1} + u_{m,n,k+1}) + \frac{1}{10}(u_{m-1,n-1,k} + u_{m-1,n,k-1} + \right. \\
 &\quad \left. + u_{m-1,n+1,k} + u_{m-1,n,k+1} + u_{m,n-1,k-1} + u_{m,n+1,k-1} + u_{m,n-1,k+1} + u_{m,n+1,k+1} + u_{m+1,n-1,k} + u_{m+1,n,k-1} + u_{m+1,n+1,k} + u_{m+1,n,k+1}) \right) + \\
 &\quad \left. + \frac{1}{30}(u_{m-1,n-1,k-1} + u_{m-1,n-1,k+1} + u_{m-1,n+1,k-1} + u_{m-1,n+1,k+1} + u_{m+1,n-1,k-1} + u_{m+1,n-1,k+1} + u_{m+1,n+1,k-1} + u_{m+1,n+1,k+1}) \right) = \\
 &= f_{mnk} + \frac{h^2}{12}(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) + \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} \right) + \frac{h^4}{90} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial z^2} \right) + O(h^6). \tag{17}
 \end{aligned}$$

Замечание 2. Правая часть формулы (17) за вычетом f_{mnk} равна невязке уравнения Пуассона и в двухмерном случае для прямоугольника переходит в формулу

$$\frac{h^2}{12}(f_{xx} + f_{yy}) + \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right) + \frac{h^4}{90} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + O(h^6) \quad [4, \text{с. 73}].$$

Доказательство. Заметим, что в силу уравнения Пуассона

$$\Delta u(x, y, z) \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z)$$

операции в правой и левой частях этого уравнения принадлежат одинаковому классу гладкости, и поскольку $f(x, y, z) \in C^4(\Omega)$, то решение имеет класс гладкости на две единицы больше, чем правая часть уравнения $u(x, y, z) \in C^6(\Omega)$.

Оператор Лапласа, как и уравнение Пуассона, является линейным оператором относительно неизвестной функции, поэтому возможно аппроксимировать лапласиан квадратурной формулой линейной относительно узловых значения, используя все 27 узлов шаблона u_{mnk} :

$$\begin{aligned} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = & \frac{1}{h^2} \left(C_0 u_{mnk} + C_1 \left(u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k} + u_{m,n-1,k} + u_{m,n+1,k} + u_{m,n,k-1} + u_{m,n,k+1} \right) + \right. \\ & + C_2 \left(u_{m-1,n+1,k} + u_{m-1,n,k+1} + u_{m-1,n-1,k} + u_{m-1,n,k-1} + u_{m,n-1,k-1} + u_{m,n-1,k+1} + u_{m,n+1,k-1} + u_{m,n+1,k+1} + \right. \\ & \left. \left. + u_{m+1,n-1,k} + u_{m+1,n,k-1} + u_{m+1,n+1,k} + u_{m+1,n,k+1} \right) + C_3 \left(u_{m-1,n-1,k-1} + u_{m-1,n-1,k+1} + u_{m-1,n+1,k-1} + u_{m-1,n+1,k+1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + u_{m+1,n-1,k-1} + u_{m+1,n-1,k+1} + u_{m+1,n+1,k-1} + u_{m+1,n+1,k+1} \right) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Подставим в формулу (18) разложения из Лемм 1–3, т.е. формулы (3), (7), (12) с разложением по степени шага $h_1 = h_2 = h_3 = h$, $2p = 6$ включительно, и сгруппируем скобками слагаемые с равной степенью по h ($u_{(2)x}^{(6)}$ – для краткости будем обозначать, например, частную производную функции $u(x_m, y_n, z_k)$ шесто-

го порядка и по всем координатам x, y, z второго порядка в узле с координатами x_m, y_n, z_k):

$$\begin{aligned} \Delta u = & \frac{1}{h^2} \left(C_0 u_{mnk} + C_1 \left(6u_{mnk} + h^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{h^4}{12} (u_x^{(4)} + u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) + \frac{h^6}{360} (u_x^{(6)} + u_y^{(6)} + u_z^{(6)}) + O(h^8) \right) + \right. \\ & + C_2 \left(12u_{mnk} + 4 \left(h^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + h^4 \left(\frac{1}{24} (u_x^{(4)} + u_y^{(4)}) + \frac{1}{4} u_{(2)x}^{(4)} + \frac{1}{24} (u_x^{(4)} + u_z^{(4)}) + \frac{1}{4} u_{(2)x}^{(4)} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{24} (u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) + \frac{1}{4} u_{(2)y}^{(4)} \right) + h^6 \left(\frac{1}{720} (u_x^{(6)} + u_y^{(6)}) + \frac{1}{48} \left(u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} \right) + \frac{1}{720} (u_x^{(6)} + u_z^{(6)}) + \frac{1}{48} \left(u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{720} (u_y^{(6)} + u_z^{(6)}) + \frac{1}{48} \left(u_{(2)y}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} \right) \right) + O(h^8) \right) + C_3 \left(8u_{mnk} + 8 \left(\frac{h^2}{2} (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{h^4}{24} (u_x^{(4)} + u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{h^4}{4} \left(u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} \right) + \frac{h^6}{720} (u_x^{(6)} + u_y^{(6)} + u_z^{(6)}) + \frac{h^6}{48} \left(u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{h^6}{8} u_{(2)x}^{(6)} + O(h^8) \right) + O(h^8) \right) = \frac{1}{h^2} \left(C_0 u_{mnk} + C_1 \left(6u_{mnk} + h^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{h^4}{12} (u_x^{(4)} + u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{h^6}{360} (u_x^{(6)} + u_y^{(6)} + u_z^{(6)}) + O(h^8) \right) + C_2 \left(12u_{mnk} + 4h^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{h^4}{3} (u_x^{(4)} + u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) + \right. \\ & \left. + h^4 \left(\frac{u_{(2)x}^{(4)}}{(2)y} + \frac{u_{(2)x}^{(4)}}{(2)z} + \frac{u_{(2)y}^{(4)}}{(2)z} \right) + h^6 \left(\frac{1}{90} (u_x^{(6)} + u_y^{(6)} + u_z^{(6)}) + \frac{1}{12} \left(\frac{u_{(2)x}^{(6)}}{(4)y} + \frac{u_{(4)x}^{(6)}}{(2)y} + \frac{u_{(2)x}^{(6)}}{(4)z} + \frac{u_{(4)x}^{(6)}}{(2)z} + \frac{u_{(2)y}^{(6)}}{(4)z} + \frac{u_{(4)y}^{(6)}}{(2)z} \right) + O(h^8) \right) + \right. \\ & \left. + C_3 \left(8u_{mnk} + 4h^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{h^4}{3} (u_x^{(4)} + u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) + 2h^4 \left(\frac{u_{(2)x}^{(4)}}{(2)y} + \frac{u_{(2)x}^{(4)}}{(2)z} + \frac{u_{(2)y}^{(4)}}{(2)z} \right) + \frac{h^6}{90} (u_x^{(6)} + u_y^{(6)} + u_z^{(6)}) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{h^6}{6} \left(\frac{u_{(2)x}^{(6)}}{(4)y} + \frac{u_{(4)x}^{(6)}}{(2)y} + \frac{u_{(2)x}^{(6)}}{(4)z} + \frac{u_{(4)x}^{(6)}}{(2)z} + \frac{u_{(2)y}^{(6)}}{(4)z} + \frac{u_{(4)y}^{(6)}}{(2)z} \right) + h^6 u_{(2)x}^{(6)} + O(h^8) \right) = \frac{u_{mnk}}{h^2} (C_0 + 6C_1 + 12C_2 + 8C_3) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})(C_1 + 4C_2 + 4C_3) + h^2 \left((u_x^{(4)} + u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) \left(\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{3} + \frac{C_3}{3} \right) + \left(u_{(2)y}^{(4)} + u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \right) (C_2 + 2C_3) \right) + \\
 & + h^4 \left((u_x^{(6)} + u_y^{(6)} + u_z^{(6)}) \left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{90} + \frac{C_3}{90} \right) + \left(u_{(4)y}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} \right) \left(\frac{C_2}{12} + \frac{C_3}{6} \right) + u_{(2)x}^{(6)} C_3 + O(h^6) \right). \quad (19)
 \end{aligned}$$

Из формулы (19) следует, что $\frac{|u_{mnk}|}{h^2} |C_0 + 6C_1 + 12C_2 + 8C_3| \underset{u_{mnk} \neq 0}{\underset{h \rightarrow 0}{<}} +\infty \Leftrightarrow C_0 + 6C_1 + 12C_2 + 8C_3 = 0$,

то есть получаем первое уравнение связи для слагаемых при h^{-2}

В задаче аппроксимации трехмерного лапласиана $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f \Leftrightarrow C_1 + 4C_2 + 4C_3 = 1$ – получаем второе уравнение связи для слагаемых при h^0 .

Согласно **Лемме 4** запишем третье уравнение связи для слагаемых при h^2

$$3 \left(\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{3} + \frac{C_3}{3} \right) = \frac{1}{2} 3(C_2 + 2C_3) \Leftrightarrow C_1 = 2C_2 + 8C_3.$$

Согласно **Лемме 5** – четвертое (последнее) уравнение связи при h^4

$$3 \left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{90} + \frac{C_3}{90} \right) + C_3 = \frac{1}{2} 6 \left(\frac{C_2}{12} + \frac{C_3}{6} \right) \Leftrightarrow C_1 = 26C_2 - 64C_3.$$

Полученная система линейных уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} C_0 + 6C_1 + 12C_2 + 8C_3 = 0 \\ C_1 + 4C_2 + 4C_3 = 1 \\ C_1 = 2C_2 + 8C_3 \\ C_1 = 26C_2 - 64C_3 \end{cases} \Leftrightarrow C_0 = -\frac{64}{15}, C_1 = \frac{7}{15}, C_2 = \frac{1}{10}, C_3 = \frac{1}{30}, \quad (20)$$

поэтому первое слагаемое в формуле (19) $\frac{u_{mnk}}{h^2} (C_0 + 6C_1 + 12C_2 + 8C_3) = 0$, в силу уравнения Пуассона

второе слагаемое в формуле (19) с учетом системы (20) $(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})(C_1 + 4C_2 + 4C_3) = f$, используя **Лемму 4**, получим третье слагаемое в (19):

$$\begin{aligned}
 & h^2 \left((u_x^{(4)} + u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) \left(\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{3} + \frac{C_3}{3} \right) + \left(u_{(2)y}^{(4)} + u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \right) (C_2 + 2C_3) \right) = h^2 (Af_{xx} + Bf_{yy} + Cf_{zz}) = \\
 & = \frac{h^2}{12} (f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}), \text{ так как} \\
 & A = B = C = \frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{3} + \frac{C_3}{3} = \frac{7}{180} + \frac{1}{30} + \frac{1}{90} = \frac{15}{180} = \frac{1}{12}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Используя **Лемму 5**, получим четвертое слагаемое в (19):

$$\begin{aligned}
 & h^4 \left((u_x^{(6)} + u_y^{(6)} + u_z^{(6)}) \left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{90} + \frac{C_3}{90} \right) + \left(u_{(4)y}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} \right) \left(\frac{C_2}{12} + \frac{C_3}{6} \right) + u_{(2)x}^{(6)} C_3 \right) = \\
 & = h^4 \left(Af_x^{(4)} + Bf_{(2)x}^{(4)} + Cf_{(2)x}^{(4)} + Df_y^{(4)} + Ef_{(2)y}^{(4)} + Ff_y^{(4)} \right) = \frac{h^4}{360} (f_x^{(4)} + f_y^{(4)} + f_z^{(4)}) + \frac{h^4}{90} \left(f_{(2)x}^{(4)} + f_{(2)x}^{(4)} + f_{(2)y}^{(4)} \right), \quad (22)
 \end{aligned}$$

так как $A = D = F = \frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{90} + \frac{C_3}{90} = \frac{7}{5400} + \frac{1}{900} + \frac{1}{2700} = \frac{7+6+2}{5400} = \frac{1}{360}$ и $B = C = E$, $B + C + E = C_3$,

$$B = C = E = \frac{C_3}{3} = \frac{1}{90}.$$

Подставляя в левую часть формулы (19) найденные коэффициенты из выражения (20) – $C_0 = -\frac{64}{15}$, $C_1 = \frac{7}{15}$, $C_2 = \frac{1}{10}$, $C_3 = \frac{1}{30}$, а в правую часть (19) (невязка аппроксимации трехмерного уравнения Пуассона представляет третье и четвертое слагаемые в правой части (19)) – преобразованные слагаемые через функцию $f(x, y, z)$ – (21), (22), получим следующую формулу:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} \left(-\frac{64}{15} u_{mnk} + \frac{7}{15} (u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k} + u_{m,n-1,k} + u_{m,n+1,k} + u_{m,n,k-1} + u_{m,n,k+1}) + \frac{1}{10} (u_{m-1,n-1,k} + u_{m-1,n,k-1} + \right. \\ & + u_{m-1,n+1,k} + u_{m-1,n,k+1} + u_{m,n-1,k-1} + u_{m,n+1,k-1} + u_{m,n-1,k+1} + u_{m,n+1,k+1} + u_{m+1,n-1,k} + u_{m+1,n,k-1} + u_{m+1,n+1,k} + u_{m+1,n,k+1}) \left. + \right. \\ & \left. + \frac{1}{30} (u_{m-1,n-1,k-1} + u_{m-1,n-1,k+1} + u_{m-1,n+1,k-1} + u_{m-1,n+1,k+1} + u_{m+1,n-1,k-1} + u_{m+1,n-1,k+1} + u_{m+1,n+1,k-1} + u_{m+1,n+1,k+1}) \right) = \\ & = f_{mnk} + \frac{h^2}{12} (f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) + \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} \right) + \frac{h^4}{90} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial z^2} \right) + O(h^6), \quad (23) \end{aligned}$$

которая совпадает с формулой (17). Из формулы (23) следует, что аппроксимация трехмерного уравнения Пуассона на параллелепипеде 27-точечным симметричным шаблоном имеет шестой порядок погрешности. Всего неизвестных коэффициентов в шаблоне (18) четыре. Тогда добавление условий в систему уравнений (20), аналогично условиям связи в Леммах 4, 5, приведет к несовместности линейной системы уравнений, в которой число неизвестных 4, а число уравнений не менее 5. Другими словами, 27-точечным шаблоном аппроксимировать трехмерное уравнение Пуассона с 8 порядком погрешности невозможно.

Теорема 1 доказана.

Из формулы (23) выразим центральное узловое значение с индексами (m, n, k) и получим формулу простой итерации:

$$\begin{aligned} u_{mnk}^{s+1} &= \left(\frac{15}{64} \right) \left(\frac{7}{15} (u_{m-1,n,k}^s + u_{m+1,n,k}^s + u_{m,n-1,k}^s + u_{m,n+1,k}^s + u_{m,n,k-1}^s + u_{m,n,k+1}^s) + \right. \\ & + \frac{1}{10} (u_{m-1,n-1,k}^s + u_{m-1,n,k-1}^s + u_{m-1,n+1,k}^s + u_{m-1,n,k+1}^s + u_{m,n-1,k-1}^s + u_{m,n+1,k-1}^s + u_{m,n-1,k+1}^s + u_{m,n+1,k+1}^s + \\ & + u_{m+1,n-1,k}^s + u_{m+1,n,k-1}^s + u_{m+1,n+1,k}^s + u_{m+1,n,k+1}^s) + \frac{1}{30} (u_{m-1,n-1,k-1}^s + u_{m-1,n-1,k+1}^s + u_{m-1,n+1,k-1}^s + u_{m-1,n+1,k+1}^s + \\ & + u_{m+1,n-1,k-1}^s + u_{m+1,n-1,k+1}^s + u_{m+1,n+1,k-1}^s + u_{m+1,n+1,k+1}^s) - \frac{h^4}{12} (f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) - \frac{h^6}{360} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} \right) - \\ & - \frac{h^6}{90} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial z^2} \right) + O(h^6) = \frac{7}{64} (u_{m-1,n,k}^s + u_{m+1,n,k}^s + u_{m,n-1,k}^s + u_{m,n+1,k}^s + u_{m,n,k-1}^s + u_{m,n,k+1}^s) + \\ & + \frac{3}{128} (u_{m-1,n-1,k}^s + u_{m-1,n,k-1}^s + u_{m-1,n+1,k}^s + u_{m-1,n,k+1}^s + u_{m,n-1,k-1}^s + u_{m,n+1,k-1}^s + u_{m,n-1,k+1}^s + u_{m,n+1,k+1}^s + \\ & + u_{m+1,n-1,k}^s + u_{m+1,n,k-1}^s + u_{m+1,n+1,k}^s + u_{m+1,n,k+1}^s) + \frac{1}{128} (u_{m-1,n-1,k-1}^s + u_{m-1,n-1,k+1}^s + u_{m-1,n+1,k-1}^s + u_{m-1,n+1,k+1}^s + \\ & + u_{m+1,n-1,k-1}^s + u_{m+1,n-1,k+1}^s + u_{m+1,n+1,k-1}^s + u_{m+1,n+1,k+1}^s) - \frac{15}{64} h^2 f_{mnk} - \frac{5h^4}{256} (f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) - \\ & - \frac{h^6}{1536} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} \right) - \frac{h^6}{384} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial z^2} \right) + O(h^8). \quad (24) \end{aligned}$$

В формуле простой итерации (24) верхний индекс s обозначает номер итерации, в левой части (24) индекс итерации $s = 1$ на единицу больше, чем индексы итерации s у всех узловых значений в правой части формулы (24). В формуле (24) значения функции $f(x,y,z)$ и ее частные производные вычисляются в узле с индексами (m, n, k) . Формулу простой итерации (24) можно записать в виде

$$u_{mnk}^{s+1} = G(u_{mnk}^s, f_{mnk}) + O(h^8), \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad m = \overline{1, n_1 - 1}, \quad n = \overline{1, n_2 - 1}, \quad k = \overline{1, n_3 - 1}, \quad (25)$$

где функция $G(u_{mnk}^s, f_{mnk})$ полностью совпадает с правой частью формулы (24).

По аналогии с оператором $G(u_{mnk}^s, f_{mnk})$ в формуле (25), рассмотрим итерационную последовательность (26) со сжимающим коэффициентом $0 < q < 1$, индуцируем следующий вспомогательный оператор $G(qu_{mnk}^s, f_{mnk})$, если в ее правой части провести замену $u_{mnk}^s \rightarrow qu_{mnk}^s$:

$$u_{mnk}^{s+1} = G(qu_{mnk}^s, f_{mnk}) + O(h^8), \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad m = \overline{1, n_1 - 1}, \quad n = \overline{1, n_2 - 1}, \quad k = \overline{1, n_3 - 1}. \quad (26)$$

Введем функцию нормы в пространстве сеточных функций $u_{m,n,k} \in R^{(n_1+1)} \times R^{(n_2+1)} \times R^{(n_3+1)}$

$$\delta^s = \|u^{s \text{ num}} - u^{s \text{ exact}}\|_C^{n_1, n_2, n_3} = \max_{\substack{0 \leq m \leq n_1 \\ 0 \leq n \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |u_{m,n,k}^{s \text{ num}} - (u_{m,n,k})^{s \text{ exact}}|, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \text{ совпадающей с метрической функцией}$$

ей в пространстве $u_{mnk}^s \in R^{(n_1+1)} \times R^{(n_2+1)} \times R^{(n_3+1)}$, определяемой формулой $\rho(u^{s \text{ num}}, u^{s \text{ exact}}) = \|u^{s \text{ num}} - u^{s \text{ exact}}\|$ (А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин) [8, с. 139], где $u_{m,n,k}^{s \text{ num}}$, $(u^{s \text{ exact}})_{m,n,k}$ означает соответственно численное решение задачи (27) в узле (m, n, k) на итерационном шаге (s) и след [9, с. 102] точного решения задачи (1) на узел сетки (m, n, k) .

Описание численного алгоритма

Введем на параллелепипеде для задачи (1) равномерную сетку с равным шагом $h_1 = \frac{b-a}{n_1} = h_2 = \frac{d-c}{n_2} = h_3 = \frac{r-e}{n_3} = h$:

$$\overline{\Omega} = [a, b] \times [c, d] \times [e, r], \quad \omega_{n_1, n_2, n_3} = \{x_m = a + hm, \quad m = \overline{0, n_1}, \quad y_n = c + hn, \quad n = \overline{0, n_2}, \quad z_k = e + hk, \quad k = \overline{0, n_3}\}.$$

Для сеточной функции u_{mnk}^{s+1} запишем систему разностных уравнений, соответствующих задаче в частных производных (1):

$$\begin{cases} u_{m,n,k}^{s+1} = G(qu_{m,n,k}^s, f_{m,n,k}) + O(h^8) \text{ (24)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad m = \overline{1, n_1 - 1}, \quad n = \overline{1, n_2 - 1}, \quad k = \overline{1, n_3 - 1} \\ u_{0,n,k}^{s+1} = \mu_{1,0,n,k}, \quad u_{n_1,n,k}^{s+1} = \mu_{2,n_1,n,k}, \quad n = \overline{0, n_2}, \quad k = \overline{0, n_3}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \\ u_{m,0,k}^{s+1} = \mu_{3,m,0,k}, \quad u_{m,n_2,k}^{s+1} = \mu_{4,m,n_2,k}, \quad m = \overline{0, n_1}, \quad k = \overline{0, n_3}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \\ u_{m,n,0}^{s+1} = \mu_{5,m,n,0}, \quad u_{m,n,n_3}^{s+1} = \mu_{6,m,n,n_3}, \quad m = \overline{0, n_1}, \quad n = \overline{0, n_2}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (27)$$

Замечание 3. В разностной задаче (27) $q \rightarrow 1$, иначе изменяются коэффициенты точной аппроксимации (20). Достаточно, чтобы $q = 1 - 10^{-15}$, т.е. q может отличаться от 1 на число, которое в 10 раз больше машинной ошибки округления.

В системе разностных уравнений (27) первое уравнение совпадает с записью формулы (26). За начальное решение итерационного процесса можно выбрать функцию, определяемую граничными условиями [2, с. 428]:

$$u_{m,n,k}^0 = \frac{1}{6} (\mu_{1,0,n,k} + \mu_{2,n_1,n,k} + \mu_{3,m,0,k} + \mu_{4,m,n_2,k} + \mu_{5,m,n,0} + \mu_{6,m,n,n_3}), \quad m = \overline{1, n_1 - 1}, \quad n = \overline{1, n_2 - 1}, \quad k = \overline{1, n_3 - 1}. \quad (28)$$

Из формулы (28) видно, что начальное численное решение непрерывно зависит от всех 6 краевых функций как их линейная комбинация, и в классической постановке задачи (1) не может быть разрывов первого рода для начального приближения решения и всех значений индексов (m, n, k) .

Теорема 2 (об устойчивости итерационных формул (23), (26)). Итерационная последовательность (26) $u_{mnk}^{s+1} = G(qu_{mnk}^s, f_{mnk}) + O(h^8)$ является сжимающим отображением в метрическом пространстве $u_{mnk}^s \in R^{(n_1+1)} \times R^{(n_2+1)} \times R^{(n_3+1)}$, то есть для любой итерационной последовательности численных решений (26) существует единственное предельное значение $\lim_{\substack{s \rightarrow +\infty \\ q \rightarrow 1-0 \\ h \rightarrow 0}} u_{mnk}^s$, равное точному решению задачи (1),

удовлетворяющее разложению (23):

$$\lim_{\substack{s \rightarrow +\infty \\ q \rightarrow 1-0 \\ h \rightarrow 0}} u_{mnk}^s = \lim_{h \rightarrow 0} \left(u^{exact} \right)_{mnk}, \forall m = \overline{0, n_1}, n = \overline{0, n_2}, k = \overline{0, n_3}, \lim_{h \rightarrow 0} \left(u^{exact} \right)_{mnk} = G \left(\lim_{h \rightarrow 0} \left(u^{exact} \right)_{mnk}, \lim_{h \rightarrow 0} f_{mnk} \right).$$

Доказательство. Покажем, что итерационная последовательность (26) является сжимающим отображением.

Обозначим $\delta_{m,n,k}^s = y_{m,n,k}^s - x_{m,n,k}^s, \forall m = \overline{0, n_1}, n = \overline{0, n_2}, k = \overline{0, n_3}$.

Рассмотрим 2 произвольные сеточные функции и получим:

$$\begin{aligned} \forall x_{mnk}^{s+1}, y_{mnk}^{s+1} \in R^{(n_1+1)} \times R^{(n_2+1)} \times R^{(n_3+1)} : \rho(x_{mnk}^{s+1}, y_{mnk}^{s+1}) &= \rho(G(x_{mnk}^s, f_{mnk}), G(y_{mnk}^s, f_{mnk})) \Leftrightarrow |x_{m,n,k}^{s+1} - y_{m,n,k}^{s+1}| = \\ &= \left| G(x_{mnk}^s, f_{mnk}) - G(y_{mnk}^s, f_{mnk}) \right| \stackrel{(24)}{\leq} \left(\frac{7q}{64} |\delta_{m-1,n,k}^s + \delta_{m+1,n,k}^s + \delta_{m,n-1,k}^s + \delta_{m,n+1,k}^s + \delta_{m,n,k-1}^s + \delta_{m,n,k+1}^s| + \right. \\ &+ \frac{3q}{128} |\delta_{m-1,n-1,k}^s + \delta_{m-1,n,k-1}^s + \delta_{m-1,n+1,k}^s + \delta_{m-1,n,k+1}^s + \delta_{m,n-1,k-1}^s + \delta_{m,n+1,k-1}^s + \delta_{m,n-1,k+1}^s + \delta_{m,n+1,k+1}^s + \\ &+ \delta_{m+1,n-1,k}^s + \delta_{m+1,n,k-1}^s + \delta_{m+1,n+1,k}^s + \delta_{m+1,n,k+1}^s| + \frac{q}{128} |\delta_{m-1,n-1,k-1}^s + \delta_{m-1,n-1,k+1}^s + \delta_{m-1,n+1,k-1}^s + \\ &+ \delta_{m-1,n+1,k+1}^s + \delta_{m+1,n-1,k-1}^s + \delta_{m+1,n-1,k+1}^s + \delta_{m+1,n+1,k-1}^s + \delta_{m+1,n+1,k+1}^s| \Big) \leq \max_{\substack{0 \leq n \leq n_1 \\ 0 \leq m \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |\delta_{m,n,k}^s| \times \\ &\times \left(\frac{7q \cdot 6}{64} + \frac{3q \cdot 12}{128} + \frac{q \cdot 8}{128} \right) = q \left(\frac{84 + 36 + 8}{128} \right) \cdot \max_{\substack{0 \leq n \leq n_1 \\ 0 \leq m \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |\delta_{m,n,k}^{s+1}| = q \max_{\substack{0 \leq n \leq n_1 \\ 0 \leq m \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |\delta_{m,n,k}^s| = q\rho(x_{mnk}^s, y_{mnk}^s), 0 < q < 1, \end{aligned}$$

что равносильно

$$\max_{\substack{0 \leq n \leq n_1 \\ 0 \leq m \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |\delta_{m,n,k}^{s+1}| \leq q \max_{\substack{0 \leq n \leq n_1 \\ 0 \leq m \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |\delta_{m,n,k}^s| \quad (29)$$

при достаточно малом шаге h , то есть $\rho(x_{mnk}^{s+1}, y_{mnk}^{s+1}) \leq q\rho(x_{mnk}^s, y_{mnk}^s)$.

Применяя определение 1 [8, с. 74] по А.Н. Колмогорову, получим, что последовательность (26) является сжимающей и сходится к единственному пределу, который обозначим u_{mnk}^* (теорема – принцип сжимающих отображений [8, с. 75])

$$\lim_{s \rightarrow \infty} u_{mnk}^s \equiv u_{mnk}^* : u_{mnk}^* = G(qu_{mnk}^*, f_{mnk}) + O(h^8). \quad (30)$$

Но точное решение удовлетворяет формулам (23), (25), из которых получим предельный переход $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} (u^{exact})_{mnk} = G \left(\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} (u^{exact})_{mnk}, \lim_{h \rightarrow 0} f_{mnk} \right)$, где оператор $G(q u_{mnk}^s, f_{mnk})$ является линейным и непрерывным в формуле (23) по u_{mnk}^s и по q . Далее перейдем к следующему пределу в (30) по переменным q и h :

$$\lim_{\substack{q \rightarrow 1-0 \\ h \rightarrow 0}} u_{mnk}^* = \lim_{\substack{q \rightarrow 1-0 \\ h \rightarrow 0}} G(q u_{mnk}^*, f_{mnk}) = G \left(\lim_{\substack{q \rightarrow 1-0 \\ h \rightarrow 0}} u_{mnk}^*, f_{mnk} \right) \Leftrightarrow \lim_{\substack{q \rightarrow 1-0 \\ h \rightarrow 0}} u_{mnk}^* = \lim_{h \rightarrow 0} (u^{exact})_{mnk}.$$

Теорема 2 доказана.

Рассмотрим тестовый пример

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \sin(x) \sin(y) \sin(z), & x \in (0, \pi), y \in (0, \pi), z \in (0, \pi) \\ u(0, y, z) = u(\pi, y, z) = \sin(y) \sin(z), & (y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u(x, 0, z) = u(x, \pi, z) = \sin(x) \sin(2z), & (x, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u(x, y, 0) = u(x, y, \pi) = \sin(3x) \sin(y), & (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]. \end{cases} \quad (31)$$

Постановка задачи в примере (31) является классической, так как все шесть краевых функций непрерывны не только на своей грани куба, но и на всех 12 ребрах куба равны друг другу (нулю).

Задача (31) является линейной относительно неизвестной функции $u(x, y, z)$, поэтому воспользуемся методом редукции линейной задачи $u(x, y, z) = u_1(x, y, z) + u_2(x, y, z) + u_3(x, y, z) + u_4(x, y, z)$, где функции $u_1(x, y, z), u_2(x, y, z), u_3(x, y, z), u_4(x, y, z)$ являются решениями соответственно следующих частных задач:

$$1) \begin{cases} u_{1xx} + u_{1yy} + u_{1zz} = \sin(x) \sin(y) \sin(z), & x \in (0, \pi), y \in (0, \pi), z \in (0, \pi) \\ u_1(0, y, z) = u_1(\pi, y, z) = 0, & (y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_1(x, 0, z) = u_1(x, \pi, z) = 0, & (x, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_1(x, y, 0) = u_1(x, y, \pi) = 0, & (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} u_{2xx} + u_{2yy} + u_{2zz} = 0, & x \in (0, \pi), y \in (0, \pi), z \in (0, \pi) \\ u_2(0, y, z) = u_2(\pi, y, z) = \sin(y) \sin(z), & (y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_2(x, 0, z) = u_2(x, \pi, z) = 0, & (x, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_2(x, y, 0) = u_2(x, y, \pi) = 0, & (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} u_{3xx} + u_{3yy} + u_{3zz} = 0, & x \in (0, \pi), y \in (0, \pi), z \in (0, \pi) \\ u_3(0, y, z) = u_3(\pi, y, z) = 0, & (y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_3(x, 0, z) = u_3(x, \pi, z) = \sin(x) \sin(2z), & (x, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_3(x, y, 0) = u_3(x, y, \pi) = 0, & (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} u_{4xx} + u_{4yy} + u_{4zz} = 0, & x \in (0, \pi), y \in (0, \pi), z \in (0, \pi) \\ u_4(0, y, z) = u_4(\pi, y, z) = 0, & (y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_4(x, 0, z) = u_4(x, \pi, z) = 0, & (x, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_4(x, y, 0) = u_4(x, y, \pi) = \sin(3x) \sin(y), & (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]. \end{cases}$$

Ищем решение задачи 1) в виде $u_1(x, y, z) = C \sin(x) \sin(y) \sin(z)$, которое удовлетворяет однородным краевым условиям системы уравнений 1):

$$u_1(0, y, z) = u_1(\pi, y, z) = u_1(x, 0, z) = u_1(x, \pi, z) = u_1(x, y, 0) = u_1(x, y, \pi) = 0.$$

Подставим $u_1(x, y, z)$ в первое уравнение системы 1):

$$u_{1xx} + u_{1yy} + u_{1zz} = -3C \sin(x) \sin(y) \sin(z) = \sin(x) \sin(y) \sin(z) \Leftrightarrow C = -\frac{1}{3}, u_1(x, y, z) = -\frac{1}{3} \sin(x) \sin(y) \sin(z).$$

Ищем решение задачи 2) в виде $u_2(x, y, z) = f(x) \sin(y) \sin(z)$, которое удовлетворяет однородным краевым условиям системы уравнений 2): $u_2(x, 0, z) = u_2(x, \pi, z) = u_2(x, y, 0) = u_2(x, y, \pi) = 0$.

Подставим $u_2(x, y, z) = f(x) \sin(y) \sin(z)$ в первое и второе уравнения системы 2):

$$\begin{cases} u_{2xx} + u_{2yy} + u_{2zz} = f''(x) \sin(y) \sin(z) - 2f(x) \sin(y) \sin(z) = 0 \Leftrightarrow f''(x) - 2f(x) = 0 \\ u_2(0, y, z) = f(0) \sin(y) \sin(z) = \sin(y) \sin(z), \forall (y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \Leftrightarrow f(0) = 1 \\ u_2(\pi, y, z) = f(\pi) \sin(y) \sin(z) = \sin(y) \sin(z), \forall (y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \Leftrightarrow f(\pi) = 1. \end{cases}$$

Общее решение краевой задачи с обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) второго порядка есть

$$f''(x) - 2f(x) = 0, f(x) = A \operatorname{sh}(\sqrt{2}x) + B \operatorname{ch}(\sqrt{2}x), f(0) = 1 \Leftrightarrow B = 1, f(\pi) = 1 \Leftrightarrow 1 = A \operatorname{sh}(\sqrt{2}\pi) + \operatorname{ch}(\sqrt{2}\pi),$$

$$A = \frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{2}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{2}\pi)}, f(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{2}x) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{2}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{2}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{2}x),$$

$$u_2(x, y, z) = \left(\operatorname{ch}(\sqrt{2}x) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{2}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{2}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{2}x) \right) \sin(y) \sin(z).$$

Ищем решение задачи 3) в виде $u_3(x, y, z) = f(y) \sin(x) \sin(2z)$, которое удовлетворяет однородным краевым условиям системы уравнений 3):

$$u_3(0, y, z) = u_3(\pi, y, z) = u_3(x, y, 0) = u_3(x, y, \pi) = 0.$$

Подставим $u_3(x, y, z) = f(y) \sin(x) \sin(2z)$ в первое и третье уравнения системы 3):

$$\begin{cases} u_{3xx} + u_{3yy} + u_{3zz} = f''(y) \sin(x) \sin(2z) - 5f(y) \sin(x) \sin(2z) = 0 \Leftrightarrow f''(y) - 5f(y) = 0 \\ u_3(x, 0, z) = f(0) \sin(x) \sin(2z) = \sin(x) \sin(2z), \forall (x, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \Leftrightarrow f(0) = 1 \\ u_3(x, \pi, z) = f(\pi) \sin(x) \sin(2z) = \sin(x) \sin(2z), \forall (x, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \Leftrightarrow f(\pi) = 1. \end{cases}$$

Общее решение краевой задачи с ОДУ второго порядка есть

$$f''(y) - 5f(y) = 0, f(y) = A \operatorname{sh}(\sqrt{5}y) + B \operatorname{ch}(\sqrt{5}y), f(0) = 1 \Leftrightarrow B = 1, f(\pi) = 1 \Leftrightarrow 1 = A \operatorname{sh}(\sqrt{5}\pi) + \operatorname{ch}(\sqrt{5}\pi)$$

$$A = \frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{5}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{5}\pi)}, f(y) = \operatorname{ch}(\sqrt{5}y) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{5}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{5}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{5}y),$$

$$u_3(x, y, z) = \left(\operatorname{ch}(\sqrt{5}y) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{5}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{5}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{5}y) \right) \sin(x) \sin(2z).$$

Ищем решение задачи 4) в виде $u_4(x, y, z) = f(z) \sin(3x) \sin(y)$, которое удовлетворяет однородным краевым условиям системы уравнений 3):

$$u_4(0, y, z) = u_4(\pi, y, z) = u_4(x, 0, z) = u_4(x, \pi, z) = 0.$$

Подставим $u_4(x, y, z) = f(z) \sin(3x) \sin(y)$ в первое и четвертое уравнения системы 4):

$$\begin{cases} u_{4xx} + u_{4yy} + u_{4zz} = f''(z) \sin(3x) \sin(y) - 10f(z) \sin(3x) \sin(y) = 0 \Leftrightarrow f''(z) - 10f(z) = 0 \\ u_4(x, y, 0) = f(0) \sin(3x) \sin(y) = \sin(3x) \sin(y), \forall (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \Leftrightarrow f(0) = 1 \\ u_4(x, y, \pi) = f(\pi) \sin(3x) \sin(y) = \sin(3x) \sin(y), \forall (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \Leftrightarrow f(\pi) = 1. \end{cases}$$

Общее решение краевой задачи с ОДУ второго порядка есть

$$f''(z) - 10f(z), f(z) = A \operatorname{sh}(\sqrt{10}z) + B \operatorname{ch}(\sqrt{10}z), f(0) = 1 \Leftrightarrow B = 1, f(\pi) = 1 \Leftrightarrow 1 = A \operatorname{sh}(\sqrt{10}\pi) + \operatorname{ch}(\sqrt{10}\pi)$$

$$A = \frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{10}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{10}\pi)}, f(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{10}z) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{10}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{10}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{10}z),$$

$$u_4(x, y, z) = \left(\operatorname{ch}(\sqrt{10}z) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{5}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{5}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{10}z) \right) \sin(3x) \sin(y).$$

Решение примера (31) равно (в силу линейной редукции) сумме решений систем уравнений 1) – 4):

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = u_1(x, y, z) + u_2(x, y, z) + u_3(x, y, z) + u_4(x, y, z) = & -\frac{1}{3} \sin(x) \sin(y) \sin(z) + \\ + \left(\operatorname{ch}(\sqrt{2}x) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{2}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{2}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{2}x) \right) \sin(y) \sin(z) + & \left(\operatorname{ch}(\sqrt{5}y) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{5}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{5}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{5}y) \right) \sin(x) \sin(2z) + \\ + \left(\operatorname{ch}(\sqrt{10}z) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{5}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{5}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{10}z) \right) \sin(3x) \sin(y). & \end{aligned} \tag{32}$$

В таблице показаны результаты численного решения примера 1 с параметрами программы $n_1 = 60, n_2 = 60, n_3 = 60, m = 13500$ (первые три столбца координаты – x, y, z ; четвертый и пятый столбцы – численное и точное решение соответственно).

Таблица

x	y	z	numerical	exact
1	2	3	4	5
0.261799387799149	0.261799387799149	0.261799387799149	0.19326654098	0.19326654078
1.30899693899575	0.261799387799149	0.261799387799149	0.18328544131	0.18328544145
2.35619449019234	0.261799387799149	0.261799387799149	0.28564460479	0.2856446045
0.261799387799149	1.30899693899575	0.261799387799149	0.4608673730	0.46086737233
1.30899693899575	1.30899693899575	0.261799387799149	-0.28784462945	-0.28784462878
2.35619449019234	1.30899693899575	0.261799387799149	0.35457814658	0.35457814586
0.261799387799149	2.35619449019234	0.261799387799149	0.35373212267	0.35373212214
1.30899693899575	2.35619449019234	0.261799387799149	-0.14968371807	-0.14968371760
2.35619449019234	2.35619449019234	0.261799387799149	0.30424860387	0.30424860333
0.261799387799149	0.261799387799149	1.30899693899575	0.22895617234	0.22895617228
1.30899693899575	0.261799387799149	1.30899693899575	0.242830568967	0.242830568968
2.35619449019234	0.261799387799149	1.30899693899575	0.23202215878	0.23202215871
0.261799387799149	1.30899693899575	1.30899693899575	0.59406289056	0.59406289039
1.30899693899575	1.30899693899575	1.30899693899575	-6.56191877E-002	-6.56191875E-002
2.35619449019234	1.30899693899575	1.30899693899575	0.15445645365	0.15445645348
0.261799387799149	2.35619449019234	1.30899693899575	0.45123800883	0.45123800870
1.30899693899575	2.35619449019234	1.30899693899575	1.299659600E-002	1.299659609E-002
2.35619449019234	2.35619449019234	1.30899693899575	0.15774935695	0.15774935681
0.261799387799149	0.261799387799149	2.35619449019234	-1.683548459E-002	-1.683548468E-002
1.30899693899575	0.261799387799149	2.35619449019234	-0.57131703876	-0.57131703855
2.35619449019234	0.261799387799149	2.35619449019234	-0.35628466793	-0.35628466797
0.261799387799149	1.30899693899575	2.35619449019234	0.45799547075	0.45799547037

Окончание таблицы

1	2	3	4	5
1.30899693899575	1.30899693899575	2.35619449019234	-0.18843379843	-0.18843379794
2.35619449019234	1.30899693899575	2.35619449019234	9.325158014E-002	9.325157979E-002
0.261799387799149	2.35619449019234	2.35619449019234	0.30256837412	0.30256837385
1.30899693899575	2.35619449019234	2.35619449019234	-0.26000946507	-0.26000946466
2.35619449019234	2.35619449019234	2.35619449019234	-2.109387609E-002	-2.109387631E-002

С нормой невязки $\|u_{num} - u_{exact}\|_C = 1.0854397936022005e-009$ ($n_1 = n_2 = n_3 = 60$), где равномерно непрерывная норма разности двух сеточных функций численного и аналитического решений имеет порядок 10^{-9} и определяется по формуле $\|u_{num} - u_{exact}\|_C = \max_{\substack{0 \leq n \leq n_1 \\ 0 \leq m \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |u_{n,m,k}^{num} - u_{n,m,k}^{exact}|$, т.е. программа работает

с использованием алгоритма согласно формулам (19)–(28) с относительной точностью REAL (4), лучше чем 10^{-8} [10].

При $n_1 = 10$, $n_2 = 10$, $n_3 = 10$, $m = 6000$ $\|u_{num} - u_{exact}\|_C = 5.019113151139010E-005$, а при $n_1 = 20$, $n_2 = 20$, $n_3 = 20$, $m = 6000$ (уменьшение всех шагов сетки в 2 раза) $\|u_{num} - u_{exact}\|_C = 7.891130154868975E-007$, то алгебраический порядок погрешности p равен 6 при использовании формул (25), (27) – $q = 1$, так как норма невязки уменьшается в 63,4 раз:

$$\frac{\|u_{num} - u_{exact}\|_C^1}{\|u_{num} - u_{exact}\|_C^{1/2}} = \frac{5.019113151139010E-005}{7.891130154868975E-007} \approx 63.4 \approx 2^6 = 2^p, p = 6.$$

При использовании алгоритма (26), (27) $q = 1 - eps = 1 - 5 \cdot 10^{-8} = 0.99999995$

$$\frac{\|u_{num} - u_{exact}\|_C^1}{\|u_{num} - u_{exact}\|_C^{1/2}} = \frac{5.013128145980872E-005}{6.993329699778172E-007} \approx 71.7 \approx 2^6 = 2^p, p = 6.$$

Более высокое значение для порядка погрешности во втором случае объясняется экспоненциальным затуханием ошибки округления в правой части формулы (27) в слагаемых вида $u_{m-1, n-1, k-1}^s \dots$ с параметром $q = 0.99999995$.

Лемма 6. Пусть начальная норма разности численного и точного решения конечна, тогда после s шагов итерационной формулы (26) конечная норма затухает по экспоненциальному закону от s и справедлива оценка

$$R_0 = \|u_{m,n,k}^0 - u_{m,n,k}^{exact}\|_C = \max_{\substack{0 \leq n \leq n_1 \\ 0 \leq m \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |u_{n,m,k}^{0,num} - u_{n,m,k}^{exact}|, R_s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R_0}{\varepsilon} \exp(-\varepsilon s), q = 1 - \varepsilon. \quad (33)$$

Доказательство. Согласно теореме о неподвижной точке [8, с. 75] итерационная последовательность (26) имеет предел, и после s итераций получим оценку погрешности [8, с. 75]:

$$\begin{aligned} R_s &\leq \frac{R_0 q^s}{1-q}, q \rightarrow 1-0 \Leftrightarrow \varepsilon = 1-q \rightarrow +0, R_s \leq \frac{R_0 q^s}{1-q} = \frac{R_0 (1-\varepsilon)^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R_0}{\varepsilon} \exp(-\varepsilon s) = \\ &= \frac{R_0}{\varepsilon} \exp(-\varepsilon s) \stackrel{s = \frac{1}{\varepsilon^{1+d}}, d > 0}{=} \frac{R_0 \exp(-\varepsilon^{-d})}{\varepsilon} = \frac{R_0}{\varepsilon \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^d}\right)} \stackrel{z = \frac{1}{\varepsilon^d}}{=} \\ &= \frac{R_0}{\frac{1}{z^{1/d}} \exp(z)} \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{z \rightarrow \infty} = \frac{z^{1/d} R_0}{\exp(z)} \leq \frac{z^{[1/d]+1} R_0}{z^{[1/d]+1} + \frac{z^{[1/d]+2}}{([1/d]+2)!}} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Лемма 6 и формула (33) доказаны.

Замечание 4. Из формулы (33) следует, если $s \cdot \varepsilon = 1$, $R_s \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} sR_0 e^{-1}$, то ошибка округления в алгоритме (26) как и в (25) прямо пропорциональна числу итераций s . При выполнении условий в алгоритме (26): $\varepsilon = 1 - q \rightarrow 0$, $s\varepsilon = \varepsilon^{-d} \rightarrow \infty \Leftrightarrow s(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{1+d}}$, $d > 0$, $R_s \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, R_s мала.

Быстродействие алгоритма в секундах составляет для $n_1 = 30$, $n_2 = 30$, $n_3 = 30$, $m = 6000$ ($t_2 - t_1 = 12.85448$ с, с нормой погрешности $\|u_{num} - u_{exact}\|_C = 6 \cdot 10^{-8}$). В то время как авторы работы [11] получили время счета 15 минут ($n_1 = 30$, $n_2 = 30$, $n_3 = 30$) с алгоритмами вида $O(h^4)$ и погрешность в процентах, т.е. с точностью порядка 10^{-2} .

Программа написана на языке FORTRAN и представлена ниже с использованием всех функций и переменных двойной точности, также занесены данные из тестового примера 1.

```

module stolb;use dfmsl;integer(8),parameter:: n1=30,n2=30,n3=30,m=6000;end module
program one;use dfmsl;use stolb;real(8)::a,b,c,d,e,r,h1,h2,h3,ss
integer(8)::i,j,k;real(8)::res(0:n1+2,0:n2+2,0:n3+2)
real(8)::res0(0:n1+2,0:n2+2,0:m+2),(n1+2),nu(n1+2),res1(0:n1+2,0:n2+2,0:n3+2,0:m+1),max,delta(0:n1+2,0:n2+2,0:n3+1)
real(8)::x,y,z,t,ch,sh,f,u1x,u2x,u1y,u2y,u1z,u2z,du,d4u,d4xyzu,pi,h22,h44,h66
ch(x)=(dexp(x)+dexp(-x))/2d0;sh(x)=(dexp(x)-dexp(-x))/2d0;f(x,y,z)=dsin(x)*dsin(y)*dsin(z);
u1x(y,z)= dsin(y)*dsin(z);u2x(y,z)= dsin(y)*dsin(z);u1y(x,z)=dsin(x)*dsin(2d0*z)
u2y(x,z)=dsin(x)*dsin(2d0*z);u1z(x,y)=dsin(3d0*x)*dsin(y)
u2z(x,y)=dsin(3d0*x)*dsin(y);du(x,y,z)=-3d0*dsin(x)*dsin(y)*dsin(z)
d4u(x,y,z)=3d0*dsin(x)*dsin(y)*dsin(z);d4xyzu(x,y,z)=3d0*dsin(x)*dsin(y)*dsin(z)
a=0d0;c=0d0;e=0d0;pi=2d0*dasin(1d0);b=pi;d=pi;r=pi
h1=(b-a)/dfloat(n1);h2=(d-c)/dfloat(n2);h3=(r-e)/dfloat(n3)
max=-1d3;do k=0,n3;z=e+h3*dfloat(k);do j=0,n2;y=c+h2*dfloat(j)
do i=0,n1;x=a+h1*dfloat(i);call uu(x,y,z,t);res(i,j,k)=t;if(mod(i,5)==0.and.mod(j,5)==0.and.mod(k,5)==0)then;endif
if(max<dabs(res(i,j,k)))then;max=dabs(res(i,j,k));endif;
enddo;enddo;enddo;do i=1,n1-1;x=a+h1*dfloat(i);do j=1,n2-1;y=c+h2*dfloat(j);do k=1,n3-1;z=r+h3*dfloat(k)
res0(i,j,k)=(u1x(y,z)+u2x(y,z)+u1y(x,z)+u2y(x,z)+u1z(x,y)+u2z(x,y))/6d0
enddo;enddo;enddo;do s=0,m;do j=0,n2;do k=0,n3;y=c+h2*dfloat(j)
z=e+h3*dfloat(k);res1(0,j,k,s)=u1x(y,z);res1(n1,j,k,s)=u2x(y,z)
enddo;enddo;do i=0,n1;do k=0,n3;x=a+h1*dfloat(i);z=e+h3*dfloat(k)
res1(i,0,k,s)=u1y(x,z);res1(i,n2,k,s)=u2y(x,z);enddo;enddo;do i=0,n1;do j=0,n2;x=a+h1*dfloat(i);y=c+h2*dfloat(j);
res1(i,j,0,s)=u1z(x,y);res1(i,j,n3,s)=u2z(x,y);enddo;enddo;enddo
h22=h1*h1;h44=h22*h22;h66=h44*h44;do s=0,m-1;do k=1,n3-1;z=e+h3*dfloat(k);
do j=1,n2-1;y=c+h2*dfloat(j);do i=1,n1-1;ss=0d0;x=a+h1*dfloat(i)
ss=(7d0/64d0)*(res1(i-1,j,k,s)+res1(i+1,j,k,s)+res1(i,j-1,k,s)+res1(i,j+1,k,s)+res1(i,j,k-1,s)+res1(i,j,k+1,s))
ss=ss+(3d0/128d0)*(res1(i-1,j+1,k,s)+res1(i-1,j,k+1,s)+res1(i-1,j-1,k,s)+res1(i-1,j,k-1,s)+res1(i,j-1,k-
1,s)+res1(i,j-1,k+1,s)+res1(i,j+1,k-1,s)+res1(i,j+1,k+1,s)+res1(i+1,j-1,k,s)+res1(i+1,j,k-
1,s)+res1(i+1,j+1,k,s)+res1(i+1,j,k+1,s))
ss=ss+(1d0/128d0)*(res1(i-1,j-1,k-1,s)+res1(i-1,j-1,k+1,s)+res1(i-1,j+1,k-1,s)+res1(i-1,j+1,k+1,s)+res1(i+1,j-
1,k-1,s)+res1(i+1,j-1,k+1,s)+res1(i+1,j+1,k-1,s)+res1(i+1,j+1,k+1,s))
ss=ss-(15d0/64d0)*f(x,y,z)*h22-(5d0*h44/256d0)*du(x,y,z)-(h66/1536d0)*(d4u(x,y,z))-
(h66/384d0)*(d4xyzu(x,y,z))
res1(i,j,k,s+1)=ss;enddo;end do;enddo;enddo;max=-1d3;do k=0,n3;do j=0,n2;do i=0,n1
delta(i,j,k)=dabs(res(i,j,k)-res1(i,j,k,m));if(mod(i,2)==0.and.mod(j,2)==0.and.mod(k,2)==0)then
endif;if(max<=delta(i,j,k))then;max=delta(i,j,k);endif;enddo;enddo;enddo; print*,"norma C",max;
end program one;
subroutine uu(x,y,z,t);real(8)::x,y,z,t,pi,c1,c2,c3,c4,ch,sh
ch(x)=(dexp(x)+dexp(-x))/2d0;sh(x)=(dexp(x)-dexp(-x))/2d0
pi=2d0*dasin(1d0);c1=-dsin(x)*dsin(y)*dsin(z)/3d0
c2=dsin(y)*dsin(z)*(ch(x*dsqrt(2d0))+sh(x*dsqrt(2d0))*(1d0-ch(pi*dsqrt(2d0)))/sh(pi*dsqrt(2d0)))
c3=dsin(x)*dsin(2d0*z)*(ch(y*dsqrt(5d0))+sh(y*dsqrt(5d0))*(1d0-ch(pi*dsqrt(5d0)))/sh(pi*dsqrt(5d0)))
c4=dsin(3d0*x)*dsin(y)*(ch(z*dsqrt(10d0))+sh(z*dsqrt(10d0))*(1d0-ch(pi*dsqrt(10d0)))/sh(pi*dsqrt(10d0)))
t=c1+c2+c3+c4;end subroutine

```

Особую сложность в методах решения имеют дифференциальные уравнения с разрывами первого рода в краевых и начальных условиях [12, 13, 18], а также с разрывами первого рода в правой части

уравнения Пуассона [19, 20]. Предложенный в работе алгоритм (26) с формулой (24) устойчив по отношению к разрывам первого рода в краевых условиях, например, к прибавлению постоянной к краевой функции одной грани (точки разрыва первого рода краевых условий появляются на все 4 ребрах данной грани).

В работе получены результаты:

1. Предложен минимальный симметричный 27-точечный шаблон для аппроксимации трёхмерного уравнения Пуассона на параллелепипеде.
2. Доказано, что на 27-точечном шаблоне и равномерной сетке невозможна аппроксимация уравнения Пуассона выше шестого порядка.
3. В **леммах 1–3** доказано, что коэффициенты разложения в ряд Тейлора суммы узловых значений в группах узлов, расположенных симметрично и на одинаковом расстоянии от центра куба, содержат только частные производные четного порядка и четного порядка по каждой из трех переменных.
4. В **леммах 4, 5** получено достаточное условие на коэффициенты аппроксимации уравнения Пуассона линейной квадратурной формулы, как следствие уравнения Пуассона, по одному уравнению на каждую четную степень шага сетки.
5. Найдена явная разностная схема аппроксимирующая трехмерное уравнение Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности, доказана ее устойчивость.
6. Численно показано с использованием точного аналитического решения тестирующего примера (28) и программы, что явная формула простой итерации (24) с алгоритмом (26) имеют шестой порядок погрешности.
7. Итерационная формула (25) устойчива относительно ошибки округления, исключая ее экспоненциальный рост, но допускает линейный рост ошибки округления. В то время как сжимающий алгоритм (27) и формула (26) подавляют даже линейный рост ошибки округления. Разность между начальной итерацией задачи (1) и ее точным решением падает экспоненциально. Алгоритм (27) обеспечивает единственность и существование численного решения задачи (1), совпадающего с точным при любой начальной допустимой итерации в пространстве сеточных функций. Он минимизирует ошибку до невязки аппроксимации $O(h^8)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики : учеб. пособие / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – Изд. 3-е. – М.: Изд-во ЛКИ, 2009. – 480 с.
2. Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках / К.Н. Волков [и др.]. – М.: Физматлит, 2013. – 709 с.
3. Пикулин, В.П. Практический курс по уравнениям математической физики : учеб. пособие / В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. – М.: Наука, 1995. – 224 с.
4. Пастухов, Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.
5. Кирхгоф, Г.Р. Механика : лекции по математической физике / Г.Р. Кирхгоф ; пер. с 4 нем. изд. – М.: ДомКнига, 2014. – 392 с.
6. Вакуленко, С.П. Способы передачи QR-кода в стеганографии / С.П. Вакуленко, Н.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов // Мир транспорта. – 2018. – Т.16, № 5(78). – С. 14–25.
7. Волосова, Н.К. Преобразование Радона и краевой задачи для уравнения Пуассона в стеганографии / Н.К. Волосова // Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 6–11 июля 2018 г. / МФТИ. – Суздаль, 2018. – С. 61.
8. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 543 с.
9. Бахвалов, Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – М.: БИНОМ, 2010. – 240 с.
10. Бартенев, О.В. Современный Фортран / О.В. Бартенев. – М.: ДИАЛОГ – МИФИ, 2000. – 450 с.
11. Гришин, А.М. Об одном методе решения трехмерного эллиптического уравнения общего вида / А.М. Гришин, А.С. Якимов // Вычислительные технологии. – 2000. – Т. 5, № 5. – С. 38–52.

12. Козлов, А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1319–1335.
13. Козлов, А.А. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 621–627.
14. Вакуленко, С.П. К методу оценки состояния железнодорожного полотна / С.П. Вакуленко, К.А. Волосов, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2016. – Т. 14, № 3 (64). – С. 20–35.
15. Вакуленко С.П. К вопросу о нелинейных волнах в стержнях / С.П. Вакуленко, А.К. Волосова, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2018. – Т. 16, № 3 (76). – С. 6–17.
16. Пастухов, Д.Ф. Оптимальный порядок аппроксимации разностной схемы волнового уравнения на отрезке / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 167–186.
17. Пастухов, Ю.Ф. Необходимые условия в обратной вариационной задаче / Ю.Ф. Пастухов // Фундаментальная и прикладная математика. – 2001. 7:1. С. 285–288.
18. Козлов, А.А. О равномерной глобальной достижимости двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов, И.В. Инц // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2017. – Т. 27, № 2. – С. 178–192.
19. Решение уравнения Пуассона в целых числах по модулю P с кусочно-разрывной правой частью стеганографии / Н.К. Волосова, К.А. Волосов, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Евразийское научное объединение. – 2019. – Т. 1, № 1 (47). – С. 4–9.
20. Эффективная итерационная формула для краевой задачи уравнения Пуассона со сложно распределенными источниками / Н.К. Волосова [и др.] // Герценовские чтения : сб. LXXII Междунар. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, СПб., 9–13 апр. 2019 г. / Рос. пед. ун-т им. А.И. Герцена. – СПб., 2019. – С. 234–238.

Поступила 01.03.2019

MINIMUM SCHEME OF THE DIFFERENCES FOR EQUATION OF THE POISSON ON BOX WITH SIXTH RATHER INACCURACY

D. PASTUHOV, Y. PASTUHOV, N. VOLOSOVA

The Offered algorithm of the decision of the general lumpy marginal problem Dirihle for three-dimensional equation of the Poisson on parallelepiped with sixth rather inaccuracy with minimum 27 point patterns. Numerically stability of the algorithm is checked to breakup of the first sort of the border conditions on side parallelepiped. It Is Received decomposition to inaccuracy of the problem in general type for uneven net through derived even order from decision and right part of equation and even order on each of three variable. The Writtened program on base of the built algorithm and principle of the compressed images for evident formula iteration idle time. It Is Solved exactly and numerically test example, which comparison confirms the sixth order to inaccuracy for molded the numerical algorithm.

Keywords: *three-dimensional equation of the Poisson on parallelepiped, lumpy-marginal task Dirihle.*

СОДЕРЖАНИЕ

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

<i>Железняк В.К., Адамовский Е.Р.</i> Метод адаптивного маскирования видеокadra маскируемым сигналом	2
<i>Богуш Р.П., Захарова И.Ю., Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф., Наумович Н.М.</i> Моделирование сжатия радиолокационных данных дистанционного зондирования Земли на основе блочного адаптивного квантования	7
<i>Железняк В.К., Раханов К.Я.</i> Цифровая обработка сигнала с линейно-частотной модуляцией частотно-временным преобразованием Вигнера для оценки разборчивости речи	16
<i>Сурто С.Г.</i> Перспективы и тенденции развития концепции больших данных в современной IT-индустрии	26
<i>Железняк В.К., Раханов К.Я., Казютин А.В.</i> Применение стеклянных трубок на оконных ограждениях для увеличения защищенности речевой информации	32
<i>Горошко С.М., Петров С.Н.</i> Акустический анализ речи лиц с дисфонией	39
<i>Змитрович С.Ю., Вабищевич С.А., Шабанов Д.Н.</i> Автоматизированная система физических измерений	45
<i>Нияковский А.М., Яцкевич Ю.В., Чичко А.Н.</i> Алгоритм и численная схема моделирования нестационарных процессов тепловой обработки бетонных изделий	50
<i>Батюшко В.И., Бобович Н.М., Лебединский С.И.</i> Об использовании семантической модели для обновления терминологии в сфере образования и науки	62

ФИЗИКА

<i>Бринкевич Д.И., Бринкевич С.Д., Вабищевич С.А., Крот В.О., Малиборский А.Я.</i> Долгоживущие β -излучающие радионуклиды при производстве радиофармпрепаратов на основе ^{18}F	67
<i>Янушкевич В.Ф., Заяц Е.Ю.</i> Распространение радиоимпульсных сигналов в анизотропных средах над углеводородами	77
<i>Танана О.В.</i> Наноструктурные углеродные материалы для практических приложений в СВЧ диапазоне	84
<i>Янушкевич В.Ф., Заяц Е.Ю.</i> Взаимодействие различных типов сигналов с неоднородными природными образованиями	91
<i>Шут В.Н., Мозжаров С.Е., Куксевич В.Ф.</i> Морфология и дисперсность порошков магнетита, полученных при воздействии ультразвука	96
<i>Давыдовская В.В.</i> Энергетический обмен между взаимодействующими пучками в фоторефрактивном кристалле SBN	101
<i>Шут В.Н., Сырцов С.Р., Трубловский В.Л., Жигулин Д.В.</i> Свойства керамики $(\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x)\text{Fe}_2\text{O}_4$ со слоистой структурой	109

МАТЕМАТИКА

<i>Козлов А.А., Суравнева К.С., Жалейко Н.Д.</i> Преобразование подобия во множестве полукватернионов	115
<i>Подоксенов М.Н., Гаджиева Ф.С.</i> Автоподобия и автоизометрии одной четырехмерной алгебры Ли VI типа Бианки	124
<i>Папкович М.В., Скоромник О.В.</i> Двумерное интегральное преобразование с g -функцией Мейера в ядре в пространстве суммируемых функций	131
<i>Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф.</i> Свойства функции Гамильтона в вариационных задачах со старшими производными	137
<i>Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К.</i> Минимальная разностная схема для уравнения Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности	154