

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 004.056.55

НОРМЫ СИНДРОМОВ И ИХ СВОЙСТВА В КОДАХ РИДА – СОЛОМОНА

д-р техн. наук, проф. В.А. ЛИПНИЦКИЙ, С.И. СЕМЁНОВ
(Военная академия Республики Беларусь, Минск)

Разработана теория норм синдромов (ТНС) для семейства кодов Рида – Соломона, являющаяся развитием ТНС для класса БЧХ-кодов. РС-коды построены на недвоичных алфавитах, поэтому, в отличие от кодов Боуза – Чоудхури – Хоквингема, РС-коды содержат исключительно большое количество корректируемых ошибок. Для коррекции этих ошибок предлагается систематическое применение автоморфизмов кодов. Характерными автоморфизмами РС-кодов являются циклические и аффинные подстановки, образующие циклические группы Γ и A соответственно, порядки которых совпадают с длиной кода. Циклическая и аффинная подстановки коммутируют друг с другом и порождают совместную АГ-группу. Эти три группы действуют на пространстве векторов-ошибок РС-кодов, разбивая это пространство на три вида орбит ошибок. Как правило, эти орбиты являются полными, то есть содержат максимально возможное количество ошибок. Спектры синдромов орбит ошибок также, как правило, являются полными. Структура спектров синдромов копирует структуру самих орбит, которые, в свою очередь, копируют структуру групп автоморфизмов кода. Введено понятие нормы синдрома вектора-ошибки – векторной величины, координаты которой определяются всевозможными парами компонент синдрома. Доказано, что норма синдрома инвариантна относительно действия подстановок группы Γ , поэтому нормы синдромов являются инвариантами каждой отдельно взятой Γ -орбиты. В работе доказан ряд предложений, отражающих базовые свойства норм синдромов. Эти результаты составляют теоретическую основу норменных методов коррекции ошибок РС-кодами.

Ключевые слова: линейный код, РС-код, синдромы ошибок, автоморфизмы кодов, циклическая подстановка, аффинная подстановка, орбиты векторов-ошибок, теория норм синдромов.

Введение. Коды Рида – Соломона попали в сферу внимания исследователей достаточно давно – в 1960-е гг. [1; 2]. Тем не менее, интерес к ним не ослабевает и поныне [3; 4]. Систематическое применение современного матричного языка в теории РС-кодов позволяет максимально использовать возможности теории полей Галуа и открывает перспективы развития теории норм синдромов (ТНС) [5; 6] на коды Рида – Соломона.

В данной работе всесторонне исследуются свойства циклических подстановок на конечномерных векторных пространствах над полями Галуа характеристики два, их отражение на РС-кодах. Вводится понятие нормы синдрома, внешне похожее на такое же понятие в БЧХ-кодах [5; 6]. Однако в условиях недвоичного алфавита при двукратно увеличенном количестве компонент синдромов в РС-кодах и соответствующем росте числа координат норм синдромов доказательство основных результатов ТНС приходится проводить независимо, с разработкой и применением самостоятельных подходов. Иное, более весомое значение приобретают и сами структурные теоремы теории норм синдромов РС-кодов.

Некоторые сведения об РС-кодах. В данной работе рассматриваются РС-коды, определенные над полями Галуа $GF(q) = GF(2^m)$, $m > 1$, характеристики два с 2^m элементами. Зафиксируем примитивный элемент α поля $GF(2^m)$ и неприводимый над полем $GF(2)$ полином $p(x)$ степени m с корнем α . Зафиксируем также целые числа $b \geq 0$, $\delta > 1$, $N = q - 1$, $(\delta - 1) \times N$ – матрица (1), имеющая ранг $\delta - 1$, поскольку ее минор из первых $\delta - 1$ столбцов является определителем Вандермонда [7], отличным от нуля. Более того, по тем же причинам любой минор этой матрицы порядка $\delta - 1$ также отличен от нуля. Следовательно, линейный код длиной N с проверочной матрицей H имеет размерность $K = N - \delta + 1$ и минимальное расстояние $D = N - K + 1 = \delta$ [1]. Это классический код Рида – Соломона $RS(N, K)$.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \alpha^b & \alpha^{2b} & \dots & \alpha^{(N-1)b} \\ 1 & \alpha^{b+1} & \alpha^{2(b+1)} & \dots & \alpha^{(N-1)(b+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha^{b+\delta-2} & \alpha^{2(b+\delta-2)} & \dots & \alpha^{(N-1)(b+\delta-2)} \end{bmatrix} = \left(\alpha^{bi}, \alpha^{(b+1)i}, \dots, \alpha^{(b+\delta-2)i} \right)^T, \quad 0 \leq i \leq N-1. \quad (1)$$

На самом деле, за обозначением $RS(N, K)$ скрыто целое семейство РС-кодов, зависящих от выбора примитивного элемента α и полинома $p(x)$, от значений $b = 0, 1, 2, \dots$. Поскольку $\alpha^N = 1$, то реальный смысл имеет лишь приведенная система значений b : $b = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

В теории и практике БЧХ-кодов, формально имеющих практически аналогичное определение, предпочтение отдается значению $b = 1$ [1; 5]. Здесь же для РС-кодов проверочная матрица H принимает вид

$$H = [\alpha^i, \alpha^{2i}, \dots, \alpha^{(\delta-1)i}]^T, \quad 0 \leq i \leq N-1, \quad (2)$$

что лишь слегка упрощает формулы и вычисления с ней.

Как и кодовые слова, векторы-ошибки в кодах $RS(N, K) = RS(q-1, q-\delta)$ принадлежат N -мерному векторному пространству $V_N(GF(q))$ над полем Галуа $GF(q)$. Легко видеть, что в коде $RS(N, K)$ имеется $(q-1)^2$ ошибок весом 1; двойных – $C_{q-1}^2 \cdot (q-1)^2$; ошибок весом $\omega \geq 1 - C_{q-1}^\omega \cdot (q-1)^\omega$. Векторы-ошибки, вес которых меньше D , обнаруживаются кодом $RS(N, K)$ и исправляются, если их вес $t \leq (D-1)/2$ для нечетных и $t \leq (D-2)/2$ для четных значений D [1].

Единственным необходимым и достаточным средством обнаружения и исправления ошибок в линейных кодах в каждом принятом сообщении \bar{x} является их синдром $S(\bar{x}) = H \cdot \bar{x}^T$. В соответствии со структурой проверочной матрицы (1) или (2) синдром представляет собой вектор $S(\bar{x}) = (s_1, s_2, \dots, s_{\delta-1})$ с $\delta-1$ координатами $s_i \in GF(2^m)$, $1 \leq i \leq \delta-1$. Априори \bar{x} – любой вектор из пространства $V_N(GF(2^m))$, поэтому в силу свойств векторно-матричных умножений [7] синдром $S(\bar{x})$ может быть любым вектором пространства $V_{\delta-1}(GF(2^m))$. Таким образом, в РС-коде имеется $q^{\delta-1} = 2^{m(\delta-1)}$ различных синдромов векторов-ошибок. Это потенциал, достаточный для декодирования всех ошибок весом 1, 2, ..., t , где t – целая часть числа $(D-1)/2$. Классические методы коррекции ошибок в РС-кодах – методы Форни, Берлекемпа-Месси [2; 3] – эффективны, когда вес этих ошибок равен 1, 2. Однако работа декодеров, основанных на этих методах, резко замедляется с ростом N и ω – веса исправляемых ошибок. Хорошим решением этой проблемы авторы данной статьи считают применение автоморфизмов кодов.

Аutomорфизмы РС-кодов и их влияние на синдромы ошибок. В РС-кодах будем рассматривать циклическую и аффинную подстановки σ и f_γ [5]. Степени этих подстановок образуют циклические группы Γ и A порядка N , а также их прямое произведение $A\Gamma$ порядка N^2 в группе автоморфизмов $Aut(RS(N, K))$ [8].

Пусть $\bar{e} = (e_1, e_2, \dots, e_N)$ – вектор-ошибка в коде $RS(N, K)$. Автоморфизм σ циклического сдвига координат векторов действует на \bar{e} по правилу: $\sigma(\bar{e}) = (e_N, e_1, e_2, \dots, e_{N-1})$. В силу формулы (1) это действие сказывается на синдроме следующим образом:

$$S(\sigma(\bar{e})) = (\alpha^b s_1, \alpha^{2b} s_2, \dots, \alpha^{(\delta-1)b} s_{\delta-1}). \quad (3)$$

Аффинная подстановка действует таким образом: $f_\gamma(\bar{e}) = (\gamma e_1, \gamma e_2, \dots, \gamma e_N) = \gamma \bar{e}$. В силу линейности векторно-матричных умножений [7] имеем

$$S(f_\gamma(\bar{e})) = (\gamma s_1, \gamma s_2, \dots, \gamma s_{\delta-1}) = \gamma S(\bar{e}). \quad (4)$$

Нормы синдромов в кодах Рида – Соломона.

Определение 1. Нормой синдрома $S(\bar{e})$ в коде $RS(N, K)$ называется вектор $\bar{N}(S(\bar{e})) = (N_{12}, N_{13}, \dots, N_{1(\delta-1)}, N_{23}, \dots, N_{(\delta-2)(\delta-1)})$ с $C_{\delta-1}^2$ координатами N_{ij} , $1 \leq i < j \leq \delta-1$, которые вычисляются следующим образом:

$$N_{ij} = s_j^{(b+i-1)/h_{ij}} / s_i^{(b+j-1)/h_{ij}}, \text{ если } s_i \neq 0,$$

где $h_{ij} = \text{НОД}(b+i-1, b+j-1)$;

$$N_{ij} = \infty, \text{ если } s_j \neq 0, s_i = 0; \quad (5)$$

N_{ij} не существует, если $s_i = s_j = 0$.

Отметим, что для РС-кода с проверочной матрицей (2) формула (5) в определении нормы имеет более простой вид:

$$N_{ij} = s_j^{i/h_{ij}} / s_i^{j/h_{ij}}, \quad (5')$$

где $h_{ij} = \text{НОД}(i, j)$; $1 \leq i < j \leq \delta - 1$.

Пример 1. Для кода $RS(N, K)$, с проверочной матрицей

$$H = [\alpha^i, \alpha^{2i}, \alpha^{3i}, \alpha^{4i}]^T \quad (6)$$

синдром каждого вектора-ошибки \bar{e} представляет собой вектор $S(\bar{e}) = (s_1, s_2, s_3, s_4)$. Пусть первые три компоненты этого синдрома отличны от нуля. Тогда нормой синдрома $S(\bar{e})$ является вектор $\bar{N}(S(\bar{e})) = (N_{12}, N_{13}, N_{14}, N_{23}, N_{24}, N_{34})$, координаты которого в силу формулы (5') вычисляются следующим образом:

$$N_{12} = s_2/s_1^2; N_{13} = s_3/s_1^3; N_{14} = s_4/s_1^4; N_{23} = s_3^2/s_2^3; N_{24} = s_4/s_2^2; N_{34} = s_4^3/s_3^4. \quad (7)$$

Норма синдрома обладает рядом замечательных свойств. Важнейшее из них отражает предложение 1.

Предложение 1. В коде $RS(N, K)$ с проверочной матрицей (1) норма синдрома любого вектора-ошибки \bar{e} не меняется при действии на этот вектор автоморфизма σ : $\bar{N}(S(\sigma(\bar{e}))) = \bar{N}(S(\bar{e}))$.

Доказательство вытекает из формул (3) и (5). Пусть у синдрома $S(\bar{e})$ компонента $s_i \neq 0$. Тогда согласно формуле (5) координата N_{ij} вектора-нормы $\bar{N}(S(\bar{e}))$ есть элемент поля Галуа $GF(2^m)$, равный $N_{ij} = s_j^{(b+i-1)/h_{ij}} / s_i^{(b+j-1)/h_{ij}}$. При этом у нормы синдрома $\bar{N}(S(\sigma(\bar{e})))$ вектора $\sigma(\bar{e})$ в силу предложения 1 координата $N_{ij}^\sigma = (\alpha^{b+j-1} s_j)^{(b+i-1)/h_{ij}} / (\alpha^{b+i-1} s_i)^{(b+j-1)/h_{ij}} = \left(\alpha^{(b+j-1)(b+i-1)/h_{ij}} / \alpha^{(b+i-1)(b+j-1)/h_{ij}} \right) \cdot \left(s_j^{(b+i-1)/h_{ij}} / s_i^{(b+j-1)/h_{ij}} \right) = s_j^{(b+i-1)/h_{ij}} / s_i^{(b+j-1)/h_{ij}} = N_{ij}$, что и требовалось доказать.

Кратным применением предложения 1 получается доказательство следующего утверждения.

Предложение 2. Для всех векторов каждой отдельно взятой Γ -орбиты $J = \langle \bar{e} \rangle_\Gamma$ норма синдрома принимает одно и то же значение и представляет собой инвариант этой Γ -орбиты относительно действия циклических подстановок.

Предложение 2 является основой для того, чтобы ввести следующее определение.

Определение 2. Для всякой Γ -орбиты $J = \langle \bar{e} \rangle$ ее нормой $\bar{N}(J)$ или $\bar{N}(\langle \bar{e} \rangle)$ называется норма синдрома любого вектора-ошибки из этой орбиты.

Нормы Γ -орбит, принадлежащих одной АГ-орбите, как и сами Γ -орбиты, четко и однозначно взаимосвязаны.

Предложение 3. Пусть в РС-коде с проверочной матрицей (1) норма $\bar{N}(S(\bar{e})) = (N_{12}, N_{13}, \dots, N_{(\delta-2)(\delta-1)})$. Тогда $\bar{N}(S(f_\gamma(\bar{e}))) = (N_{12}^\gamma, N_{13}^\gamma, \dots, N_{(\delta-2)(\delta-1)}^\gamma)$, где

$$N_{ij}^\gamma = N_{ij} / \gamma^{(j-i)/h_{ij}}, \quad 1 \leq i < j \leq \delta - 1, \quad (8)$$

где $h_{ij} = \text{НОД}(b+i-1, b+j-1)$ для всех целых i, j ;

$$1 \leq i < j \leq \delta - 1.$$

Доказательство. Пусть $\bar{e} = (e_1, e_2, \dots, e_N)$ и $S(\bar{e}) = (s_1, s_2, \dots, s_{\delta-1})$. Тогда $f_\gamma(\bar{e}) = (\gamma e_1, \gamma e_2, \dots, \gamma e_N)$ и согласно формуле (4) $S(f_\gamma(\bar{e})) = (\gamma s_1, \gamma s_2, \dots, \gamma s_{\delta-1}) = \gamma S(\bar{e})$. Согласно определению нормы вычисляемая формулой (5) координата $N_{ij}^\gamma = (\gamma s_j)^{(b+i-1)/h_{ij}} / (\gamma s_i)^{(b+j-1)/h_{ij}} = (s_j^{(b+i-1)/h_{ij}} / s_i^{(b+j-1)/h_{ij}}) \cdot (\gamma^{(b+i-1-b-j+1)/h_{ij}}) = N_{ij} / \gamma^{(j-i)/h_{ij}} = N_{ij}^\gamma$, что и доказывает предложение 3.

Следствие 1. Для РС-кода с $\delta = 5$, $b = 1$, норма $\bar{N}(S(f_\gamma(\bar{e}))) = (N_{12}^\gamma, N_{13}^\gamma, N_{14}^\gamma, N_{23}^\gamma, N_{24}^\gamma, N_{34}^\gamma)$, где $N_{12}^\gamma = N_{12}/\gamma$; $N_{13}^\gamma = N_{13}/\gamma$; $N_{14}^\gamma = N_{14}/\gamma^2$; $N_{23}^\gamma = N_{23}/\gamma$; $N_{24}^\gamma = N_{24}/\gamma$; $N_{34}^\gamma = N_{34}/\gamma$.

Из предложения 3 следует, что циклическое преобразование Γ -орбит внутри АГ-орбиты под действием f_α сопровождается преобразованием норм этих Γ -орбит в соответствии с формулой (8).

Взаимосвязь координат норменного вектора. Координат у норм синдромов существенно больше, чем компонент у синдромов, из которых они получены, поэтому между координатами N_{kj} , $1 \leq k \leq \delta - 1$ неизбежно должны существовать функциональные зависимости. Об одном классе таких зависимостей ярко свидетельствует следующее утверждение.

Предложение 4. Пусть в коде $RS(N, K)$ с проверочной матрицей (2) у синдрома $S(\bar{e})$ компонента $s_1 \neq 0$. Тогда у нормы синдрома $\bar{N}(S(\bar{e}))$ координаты N_{1j} , $1 < j \leq \delta - 1$ (в количестве $\delta - 2$) вычисляются по формуле (5'), а остальные координаты N_{kj} , $2 \leq k < j \leq \delta - 1$ при условии $N_{1k} \neq 0$ выражаются через вычисленные по формуле

$$N_{kj} = N_{1j}^{k/h_{kj}} / N_{1k}^{j/h_{kj}}, \quad (9)$$

если $N_{1k} = 0$, $N_{1j} \neq 0$, то $N_{kj} = \infty$; если же $N_{1k} = 0$, $N_{1j} = 0$, то N_{kj} не существует.

Доказательство. Пусть у синдрома $S(\bar{e})$ компонента $s_1 \neq 0$. Тогда по формуле (5') вычислены координаты N_{1j} , $1 < j \leq \delta - 1$. В частности, для конкретных значений j, k , $2 \leq j < k \leq \delta - 1$ координаты $N_{1j} = s_j / s_1^j$; $N_{1k} = s_k / s_1^k$. Тогда $N_{1j}^{k/h_{kj}} / N_{1k}^{j/h_{kj}} = (s_j / s_1^j)^{k/h_{kj}} / (s_k / s_1^k)^{j/h_{kj}} = s_j^{k/h_{kj}} / s_k^{j/h_{kj}} = N_{kj}$, что доказывает формулу (9).

Следствие 1. Пусть условия предложения 4 выполняются для Γ -орбиты $J = \langle \bar{e} \rangle_\Gamma$. Тогда это же предложение справедливо и для всех Γ -орбит, составляющих АГ-орбиту $\langle \bar{e} \rangle_{\text{АГ}}$.

Доказательство вытекает из предложения 4 и следствия из предложения 1.

Следствие 2. Многообразие $K_{\text{АГ}}$ всех АГ-орбит векторов-ошибок, корректируемых кодом $RS(N, K)$ с проверочной матрицей (1) или (2), разбивается по виду синдромов образующих этих орбит и по строению векторов-норм синдромов этих образующих на два непересекающихся класса. В первый класс попадают все орбиты $\langle \bar{e} \rangle_{\text{АГ}}$, у которых первая компонента синдрома образующей $s_1 \neq 0$. Для всякой АГ-орбиты $\langle \bar{e} \rangle_{\text{АГ}}$ из этого класса и для Γ -орбиты $\langle \bar{e}_i \rangle_\Gamma \in \langle \bar{e} \rangle_{\text{АГ}}$ сохраняем от вектора $N(S(\bar{e}_i))$ только первые $\delta - 2$ координат: $N_{12}, N_{13}, \dots, N_{1(\delta-1)}$. Во второй класс попадают все орбиты $\langle \bar{e} \rangle_{\text{АГ}}$, у синдромов $S(\bar{e})$ образующих которых $s_1 = 0$. Для всякой АГ-орбиты $\langle \bar{e} \rangle_{\text{АГ}}$ из этого класса и для Γ -орбиты $\langle \bar{e}_i \rangle_\Gamma \in \langle \bar{e} \rangle_{\text{АГ}}$ сохраняем в силу предложения 4 от вектора $N(S(\bar{e}_i))$ остальные $C_{\delta-1}^2 - \delta - 2$ координаты: $N_{23}, N_{24}, \dots, N_{(\delta-2)(\delta-1)}$.

Следует отметить, что возможно развитие следствия 2 в сторону подобного же разбиения второго класса АГ-орбит – с компонентой синдромов $s_1 = 0$. К сожалению, таких же четких и однозначных формул, аналогичных формуле (9), здесь не наблюдается.

Пусть в орбите $\langle \bar{e} \rangle_{\text{АГ}}$ у всех векторов-ошибок первая компонента синдрома равна нулю, но $s_2 \neq 0$. Пусть по формуле (5') вычислены координаты $N_{23}, N_{24}, \dots, N_{2(\delta-1)}$ вектора $\bar{N}(S(\bar{e}))$. Выразим через них последующие координаты вектора $\bar{N}(S(\bar{e}))$. Для четных k, j , $2 < k < j \leq \delta - 1$ и для $h_{kj} = \text{НОД}(k, j) = 2 \cdot s$,

$$\text{где } s = \text{НОД}\left(\frac{k}{2}, \frac{j}{2}\right), \text{ для } s_k \neq 0 \text{ согласно формуле (5')} \quad N_{kj} = s_j^{k/h_{kj}} / s_k^{j/h_{kj}} = \frac{s_j^{k/2s}}{s_k^{j/2s}}. \text{ Частное } \frac{N_{2j}^{k/2s}}{N_{2k}^{j/2s}} =$$

$$= \left(\frac{s_j}{s_2^{j/2}} \right)^{k/2s} / \left(\frac{s_k}{s_2^{k/2}} \right)^{j/2s} = \frac{s_j^{k/2s}}{s_2^{jk/4s}} \cdot \frac{s_2^{jk/4s}}{s_k^{j/2s}} = N_{kj}.$$

$$\text{Для нечетных } k, j, 2 < k < j \leq \delta - 1 \text{ и для } h_{kj} = \text{НОД}(k, j) \text{ частное } \frac{N_{2j}^{k/h_{kj}}}{N_{2k}^{j/h_{kj}}} = \left(\frac{s_j^2}{s_2^j} \right)^{k/h_{kj}} / \left(\frac{s_k^2}{s_2^k} \right)^{j/h_{kj}} =$$

$$= \frac{s_j^{2k/h_{kj}}}{s_2^{jk/h_{kj}}} \cdot \frac{s_2^{jk/h_{kj}}}{s_k^{2j/h_{kj}}} = N_{kj}^2. \text{ Возведем обе части последнего равенства в степень } 2^{m-1}. \text{ Справа получим в точности}$$

величину N_{kj} .

Пусть при тех же условиях k является нечетным числом, а j – четным, $2 < k < j \leq \delta - 1$. Вычисления показывают, что $\frac{((N_{2j})^2)^{k/h_{kj}}}{N_{2k}^{j/h_{kj}}} = N_{kj}^2$. Если же k является четным числом, а j – нечетным, $2 < k < j \leq \delta - 1$, то $\frac{N_{2j}^{k/h_{kj}}}{((N_{2k})^2)^{j/h_{kj}}} = N_{kj}^2$. Таким образом, во всех случаях N_{kj} , $2 < k < j \leq \delta - 1$ функционально выражается через N_{2j} , N_{2k} .

Следовательно, обосновано следующее предложение.

Предложение 5. Пусть в коде $RS(N, K)$ с проверочной матрицей (2) у синдрома $S(\bar{e})$ компоненты $s_1 = 0$, $s_2 \neq 0$. Тогда у нормы синдрома $\bar{N}(S(\bar{e}))$ координаты N_{2j} , $2 < j \leq \delta - 1$ (в количестве $\delta - 3$) вычисляются по формуле (5'), а остальные координаты N_{kj} , $3 \leq k < j \leq \delta - 1$ функционально выражаются через N_{2k} , N_{2j} : для четных k , j $N_{kj} = N_{2j}^{k/2s} / N_{2k}^{j/2s}$; для нечетных k и четных j величина $N_{kj} = \left(((N_{2j})^2)^{k/h_{kj}} / N_{2k}^{j/h_{kj}} \right)^{2^{m-1}}$; для четных k и нечетных j $N_{kj} = \left(N_{2j}^{k/h_{kj}} / ((N_{2k})^2)^{j/h_{kj}} \right)^{2^{m-1}}$; для нечетных k и четных j координата $N_{kj} = \left(N_{2j}^{k/h_{kj}} / N_{2k}^{j/h_{kj}} \right)^{2^{m-1}}$.

О количестве норм синдромов в РС-кодах. Установленная выше внутренняя зависимость между координатами норменных векторов ставит вопрос о количестве различных норм синдромов. Рассмотрим его для частного случая РС-кодов.

Лемма 1. Пусть код $RS(N, K)$ задан проверочной матрицей (2). Пусть в условиях следствия 2 из предложения 4 $s_1 \neq 0$, и, более того, $s_1 = 1$. Тогда $N_{12} = s_2, N_{13} = s_3, \dots, N_{1(\delta-1)} = s_{\delta-1}$. Пусть $s_1 = 0, s_2 = 1$, тогда $N_{23} = s_3^2, N_{24} = s_4, \dots, N_{2j} = s_j^2$ для нечетных j , $2 < j \leq \delta - 1$ и $N_{2j} = s_j$ для четных j , $2 < j \leq \delta - 1$.

Доказательство вытекает из определения нормы синдрома и формулы (5').

Таким образом, лемма 1 дает естественные примеры векторов-ошибок, нормы синдромов которых получаются практически без вычислений.

Предложение 6. В коде $RS(N, K)$ с проверочной матрицей (6) имеется $(N+1)^3 + (N+1)^2 + N + 3$ различных норм синдромов.

Доказательство. Пусть выполняются условия предложения 6. Согласно следствию 2 из предложения 4 у всех синдромов $S(\bar{e}) = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ с компонентой $s_1 \neq 0$ нормы синдромов определяются первой тройкой координат $\{N_{12}, N_{13}, N_{14}\}$, каждая из которых принадлежит полю $GF(2^m)$ определения кода $RS(N, K)$. Как известно, в данном коде имеется q^4 различных синдромов, в частности, q^3 различных синдромов вида $S(\bar{e}) = (1, s_2, s_3, s_4)$. Тогда согласно лемме 1 имеется q^3 различных троек $\{N_{12}, N_{13}, N_{14}\}$. В таком случае первый класс Γ -орбит $< \bar{e} >_{\Gamma}$ с компонентой синдрома $s_1 \neq 0$ имеет $q^3 = (N+1)^3$ различных норм синдромов.

Пусть $s_1 = 0$. Тогда первые три координаты норменного вектора вырождены и количество векторов $\bar{N}(S(\bar{e}))$ определяется количеством различных троек $\{N_{23}, N_{24}, N_{34}\}$. Пусть $s_1 = 0, s_2 \neq 0$. Тогда согласно предложению 5 N_{34} функционально выражается через N_{23} , N_{24} и на количество различных троек $\{N_{23}, N_{24}, N_{34}\}$ не влияет. Иными словами, в этом случае количество троек равно количеству различных пар $\{N_{23}, N_{24}\}$. Согласно второй части леммы 1 при $s_2 = 1$ $\{N_{23}, N_{24}\} = \{s_3^2, s_4\}$. Количество различных синдромов вида $S(\bar{e}) = (0, 1, s_3, s_4)$ в коде $RS(N, K)$ равно $q^2 = (N+1)^2$. Операция возведения в квадрат является автоморфизмом поля Галуа $GF(2^m)$. Отсюда следует, что мощности множеств всевозможных различных пар $\{s_3^2, s_4\}$ и $\{s_3, s_4\}$ совпадают. Таким образом, количество различных пар $\{N_{23}, N_{24}\}$ равно $q^2 = (N+1)^2$.

Пусть $s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 \neq 0$. У всех векторов-ошибок с таким синдромом норма синдрома в условиях предложения 6 имеет единственную невырожденную координату $N_{34} = s_4^3 / s_3^4$. Пусть в этой формуле $s_4 = 1$, а s_3 принимает все возможные значения поля $GF(2^m)$. Операция возведения в четвертую степень также остается автоморфизмом поля $GF(2^m)$. Это означает, что s_3^4 будет принимать значения всех ненулевых

элементов поля Галуа. То же самое можно сказать и об обратных к ним величинах $1/s_3^4$. Таким образом, координата N_{34} принимает N различных значений. При $s_3 \neq 0, s_4 = 0$ координата $N_{34} = 0$. Итак, для всевозможных синдромов $S(\bar{e}) = (0, 0, s_3, s_4), s_3 \neq 0$, найдется $N+1 = q$ различных норменных векторов.

Векторы \bar{e} с синдромом $S(\bar{e}) = (0, 0, 0, s_4), s_4 \neq 0$, имеют одну и ту же норму $\bar{N}(S(\bar{e})) = (-, -, \infty, -, \infty, \infty)$. Вектор $\bar{e} = \bar{0}$ и все векторы \bar{e} , совпадающие с кодовыми словами, имеют один и тот же синдром $S(\bar{e}) = (s_1, s_2, s_3, s_4) = (0, 0, 0, 0)$. Здесь $\bar{N}(S(\bar{e})) = (-, -, -, -, -, -)$.

Суммируя рассмотренные случаи, приходим к выводу, что в РС-коде с проверочной матрицей (6) имеется в точности $q^3 + q^2 + q + 2$ различных норменных векторов, что полностью доказывает предложение 6.

О равномерном распределении синдромов по нормам.

Лемма 2. В условиях предложения 6 каждое значение норменного вектора $\bar{N}(S(\bar{e})) = (N_{12}, N_{13}, N_{14}, N_{23}, N_{24}, N_{34})$, кроме $\bar{N}(S(\bar{e})) = (-, -, -, -, -, -)$, принимает как минимум $q-1 = N$ различных синдромов векторов-ошибок.

Доказательство. Подавляющее большинство норменных векторов содержат хотя бы одну координату, принадлежащую мультипликативной группе $GF(2^m)^*$, то есть являющуюся ненулевым элементом поля Галуа $GF(2^m)$. Пусть такой координатой является $N_{12} = s_2 / s_1^2 = \gamma \in GF(2^m)^*$. Это означает, что существует вектор-ошибка \bar{e}^* с таким синдромом $S(\bar{e}^*) = (s_1^*, s_2^*, s_3^*, s_4^*)$, у которого $s_1^* \neq 0, s_2^* \neq 0$ и у нормы $\bar{N}^* = \bar{N}(S(\bar{e}^*)) = (N_{12}^*, N_{13}^*, \dots, N_{34}^*)$ первая координата $N_{12}^* = s_2^* / (s_1^*)^2 = \gamma$. В силу формулы (5) то же самое значение γ первой координаты N_{12} имеют и норменные векторы $\bar{N}(\sigma^i(S(\bar{e}^*)))$ синдромов $S(\sigma^i(\bar{e}^*)) = (\alpha^i \cdot s_1^*, \alpha^{2i} \cdot s_2^*, \alpha^{3i} \cdot s_3^*, \alpha^{4i} \cdot s_4^*), 0 \leq i \leq N-1$. У названных синдромов первые компоненты попарно различны. Попарно различны и вторые компоненты этих синдромов, потому что, как уже упоминалось выше, операция возведения в квадрат является автоморфизмом группы $GF(2^m)^*$. Итак, названо как минимум N различных синдромов, у нормы которых координата N_{12} одинакова. Заметим еще, что перечисленные синдромы образуют полный спектр синдромов полной Γ -орбиты $\langle \bar{e}^* \rangle_\Gamma$. Предложение 2 утверждает, что не только координата N_{12} , но и все координаты векторов $\bar{N}(\sigma^i(S(\bar{e}^*)))$ совпадают друг с другом, то есть совпадают сами норменные векторы. Тем самым лемма 2 в первом случае полностью доказана. Точно также последовательно доказывается лемма 2 и для ненулевых значений координат $N_{13}, N_{14}, N_{24}, N_{23}, N_{34}$.

Пусть теперь норменный вектор не содержит координат, принадлежащих $GF(2^m)^*$, но некоторые из его координат равны 0, например, координата N_{12} . Значит, существует конкретная вектор-ошибка \bar{e} в коде $RS(N, K)$ с синдромом $S(\bar{e}) = (\gamma, 0, 0, 0), \gamma \in GF(2^m)^*$. У этого синдрома ни одна из компонент s_3 или s_4 не может быть отличной от нуля, иначе мы получаем уже рассмотренный выше случай с ненулевой координатой у вектора $\bar{N}(S(\bar{e}))$. С таким синдромом Γ -орбита $J = \langle \bar{e} \rangle_\Gamma$ является полной, потому что у нее полный спектр синдромов $S(\langle \bar{e} \rangle_\Gamma) = \{(\alpha^i \cdot \gamma, 0, 0, 0)\}, 0 \leq i \leq N-1$. Норма этой орбиты есть вектор $\bar{N}(J) = (0, 0, 0, -, -, -)$. Эту норму, как уже сказано, принимают не менее N различных синдромов. Значит, и в данном случае лемма 2 доказана. Приведенный пример одновременно доказывает лемму 2 и для значений $N_{13} = 0$ и $N_{14} = 0$.

Пусть координаты норменного вектора $\bar{N}(S(\bar{e}))$ могут принимать три значения: 0, $\infty, -$, и при этом первой нулевой координатой является N_{23} . Это возможно только для синдрома $S(\bar{e}) = (0, \gamma, 0, 0), \gamma \in GF(2^m)^*$. С таким синдромом Γ -орбита $J = \langle \bar{e} \rangle_\Gamma$ является полной, потому что у нее полный спектр синдромов $S(\langle \bar{e} \rangle_\Gamma) = \{(0, \alpha^i \cdot \gamma, 0, 0)\}, 0 \leq i \leq N-1$. Норма этой орбиты есть вектор $\bar{N}(J) = (\infty, -, -, 0, 0, -)$. Эту норму, как уже отмечено, принимают не менее N различных синдромов. Следовательно, и в рассматриваемом случае лемма 2 доказана. Отметим, что данный пример доказывает лемму 2 и для значения $N_{24} = 0$.

Пусть по-прежнему координаты норменного вектора $\bar{N}(S(\bar{e}))$ могут принимать три значения: 0, $\infty, -$, и нулевой координатой является N_{34} . Следовательно, в коде $RS(N, K)$ существует вектор-

ошибка \bar{e} с синдромом $S(\bar{e}) = (0, 0, \gamma, 0)$, $\gamma \in GF(2^m)^*$. С таким синдромом Γ -орбита $J = \langle \bar{e} \rangle_\Gamma$ является полной, потому что у нее полный спектр синдромов $S(\langle \bar{e} \rangle_\Gamma) = \{(0, 0, \alpha^i \cdot \gamma, 0)\}$, $0 \leq i \leq N-1$. Норма этой орбиты есть вектор $\bar{N}(J) = (-, \infty, -, \infty, -, 0)$. Эту норму, как уже отмечено, принимают не менее N различных синдромов. Следовательно, и для данной нормы лемма 2 доказана.

Осталось рассмотреть норменные векторы \bar{N} , координаты которых принимают только два значения: ∞ , $-$. Такие ситуации возможны лишь для отдельных значений векторов-синдромов. У синдромного вектора не должно быть двух ненулевых координат, иначе у \bar{N} появится координата $N_{ij} \in GF(2^m)^*$. Таким образом, $S(\bar{e})$ может содержать лишь одну ненулевую координату. Три приведенных выше примера $S(\bar{e}) = (\gamma, 0, 0, 0)$; $S(\bar{e}) = (0, \gamma, 0, 0)$; $S(\bar{e}) = (0, 0, \gamma, 0)$, $\gamma \in GF(2^m)^*$ имеют нормы $\bar{N}(S(\bar{e}))$, обязательно содержащие нулевую координату. Последний нерассмотренный случай: $S(\bar{e}) = (0, 0, 0, \gamma)$, $\gamma \in GF(2^m)^*$. Здесь $\bar{N}(S(\bar{e})) = (-, -, \infty, -, \infty, \infty)$. Данное значение нормы принимают как минимум N синдромов $S(\langle \bar{e} \rangle_\Gamma) = \{(0, 0, 0, \alpha^i \cdot \gamma)\}$, $0 \leq i \leq N-1$.

Лемма 2 полностью доказана.

Предложение 7. В коде $RS(N, K)$ с проверочной матрицей (6) каждое значение норменного вектора \bar{N} , кроме $\bar{N}(S(\bar{e})) = (-, -, -, -, -, -)$, принимают в точности N различных синдромов. Исключенное значение $\bar{N}(S(\bar{e})) = (-, -, -, -, -, -)$ принимают вектор-ошибки $\bar{e} = \bar{0}$ и $\bar{e} = \bar{c}$ – любое кодовое слово с одинаковым синдромом $S(\bar{e}) = (0, 0, 0, 0)$.

Доказательство. В рассматриваемом коде $RS(N, K)$ имеется в точности q^4 различных синдромов. Согласно предложению 6 эти синдромы определяют $(N+1)^3 + (N+1)^2 + N + 3$ различных норменных векторов $\bar{N}(S(\bar{e}))$. Лемма 2 утверждает, что $(N+1)^3 + (N+1)^2 + N + 2$ из них принимают как минимум N различных синдромов. В общей сложности на перечисленные норменные векторы приходится $((N+1)^3 + (N+1)^2 + N + 2) \cdot N = (q^3 + q^2 + q + 1) \cdot (q-1) = q^4 - 1$ синдромов.

Предложение 7 полностью доказано.

Предложение 8. Пусть две Γ -орбиты J_1, J_2 имеют одинаковые нормы $N(J_1) = N(J_2)$ отличные от нормы $\bar{N}(S(\bar{e})) = (-, -, -, -, -, -)$. Пусть Γ -орбита J_1 является полной с полным спектром синдромов. Тогда для всякого вектора $\bar{g} \in J_2$ с синдромом $S(\bar{g}) = S$ найдется вектор-ошибка $\bar{f} \in J_1$, синдром которого $S(\bar{f}) = S$.

Доказательство непосредственно следует из предложения 7.

Предложение 8 завершает построение теории, необходимой для корректной формулировки норменных методов декодирования ошибок РС-кодами. Для реализации норменного метода необходимо составить список 1 всех образующих \bar{e}_i Γ -орбит ошибок корректируемой совокупности, список 2 синдромов образующих $S(\bar{e}_i)$ и список 3 норм синдромов образующих $\bar{N}_i = \bar{N}(S(\bar{e}_i))$ (можно без учета зависимых координат норменных векторов), то есть норм соответствующих Γ -орбит. Инфокоммуникационная система, приняв очередное сообщение \bar{x} , в обязательном порядке вычисляет синдром $S(\bar{x})$. Если $S(\bar{x}) \neq \bar{0}$, вычисляем $\bar{N} = \bar{N}(S(\bar{x}))$. Вектор \bar{N} сравниваем с данными списка 3. Если $\bar{N} = \bar{N}_j$ из списка 3, то сравниваем $S(\bar{x})$ с $S(\bar{e}_j)$. Тем самым определяем показатель v такой, что $S(\bar{x}) = S(\sigma^v(\bar{e}_j))$. Тогда $\bar{c} = \bar{x} + \sigma^v(\bar{e}_j)$ – исправленное истинное сообщение.

Заключение. Спектры синдромов орбит ошибок, как правило, являются полными. Структура спектров синдромов копирует структуру самих орбит, которые в свою очередь копируют структуру групп автоморфизмов кода. По аналогии с БЧХ-кодами введено понятие нормы синдрома вектора-ошибки и для кодов Рида – Соломона. Это векторная величина, координаты которой определяются всевозможными парами компонент синдрома. Доказано, что норма синдрома инвариантна относительно действия подстановок группы Γ . Поэтому нормы синдромов являются инвариантами каждой отдельно взятой Γ -орбиты векторов-ошибок. В работе доказан ряд предложений, отражающих базовые свойства норм синдромов в РС-кодах. Эти результаты составляют теоретическую основу норменного метода коррекции ошибок в классе РС-кодов, формулировкой которого и завершается данная работа.

От классических методов обработки РС-кодов предлагаемый норменный метод отличается прозрачностью, опорой на несложные, легко поддающиеся алгоритмизации, вычисления с синдромами в полях Галуа, периодическими обращениями к устройствам памяти, в которых и сосредоточена наиболее громоздкая, переборная часть метода – поиск нужной нормы Γ -орбиты. Здесь поисковая работа осуществляется как минимум на порядок быстрее классических методов, нацеленных на непосредственный поиск конкретной ошибки в сообщении. Соответственно, норменные декодеры РС-кодов обещают быть на порядок быстрее уже известных декодеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. MacWilliams, F.J. The Theory of Error-Correcting Codes / F.J. MacWilliams, J.J. Sloan. – Amsterdam : North-holland publishing company, 1977. – 762 с.
2. Скляр, Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение : пер. с англ. / Б. Скляр – Изд. 2-е, испр. – М. : Вильямс, 2003. – 1104 с.
3. Кудряшов, Б.Д. Основы теории кодирования : учеб. пособие / Б.Д. Кудряшов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2016. – 400 с.
4. Маров, А.В. Матричный формализм кодов Рида – Соломона / А.В. Маров, А.Ю. Утешев // Вестн. С.-Петербург. ун-та, Сер. 10. – 2016. – Вып. 4.– С. 4–17.
5. Липницкий, В.А. Норменное декодирование помехоустойчивых кодов и алгебраические уравнения : монография / В.А. Липницкий, В.К. Конопелько. – Минск : Изд. центр БГУ, 2007. – 239 с.
6. Липницкий, В.А. Теория норм синдромов : метод. пособие / В.А. Липницкий. – Минск : БГУИР, 2011. – 96 с.
7. Липницкий, В.А. Высшая математика. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии / В.А. Липницкий. – Минск : ВА РБ, 2015. – 240 с.
8. Семёнов, С.И. Автоморфизмы и орбиты ошибок кодов Рида – Соломона [в печати] / В.А. Липницкий, С.И. Семёнов // Доклады БГУИР, 2020.

Поступила 04.02.2020

BASICS OF THE THEORY OF SYNDROME NORMS FOR REED-SOLOMON CODES

V. LIPNITSKI, S. SEMYONOV

The theory of syndrome norms (TNS) is developed for Reed-Solomon codes (RS-codes), the extension of TNS, which was developed 20 years ago for the class of the class of Bose-Chaudhuri-Hocquenghem codes (BCH-codes). RS-codes are built on non-binary alphabets, therefore it contain an extremely large variety of correctable errors in contrast to BCH-codes. To correct errors, a systematic application of automorphisms of codes is proposed. Characteristic automorphisms of RS-codes are cyclic and affine substitutions forming cyclic groups Γ and A whose orders coincide with the code length. Cyclic and affine substitutions commute with each other and generate a joint $A\Gamma$ group. These three groups act on the space of error vectors of RS-codes, breaking this space into three types of error orbits. As a rule, these orbits are complete, that is, they contain the maximum possible number of errors. The spectra of the syndromes of error orbits are also complete. The structure of the syndrome spectrums copies the structure of the orbits themselves, which in turn copy the structure of groups of code automorphisms. The concept of the norms of the error syndrome is introduced. This is vector quantity whose coordinates are determined by all kinds of pairs of components of the syndrome. It is proved that the norm of the syndrome is invariant under the action of substitution of group Γ . So the norms of syndromes are invariants of each individual Γ -group. The article proves a number of proposals that reflect the basic properties of the norms of syndromes. These results form the theoretical basis of the norm error correction methods by RS-codes.

Keywords: linear code, RS-code, error syndromes, automorphisms of codes, cyclic substitution, affine substitution, orbits of error vectors, theory of norms of syndromes.

УДК 629.07

КВАТЕРНИОННЫЙ БАЗИС ДЛЯ АЛГОРИТМА БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ БПЛА

д-р физ.-мат. наук, доц. К.В. КОЗАДАЕВ
(Белорусский государственный университет, Минск)

Рассмотрена возможность применения кватернионного базиса для описания поворотов беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) вокруг центра масс, что позволяет компенсировать известные недостатки использования углов Эйлера – Крылова, такие как нетранзитивность последовательных поворотов и «шарнирный замок».

Ключевые слова: кватернионы, бесплатформенная инерциальная навигационная система, ориентация в пространстве.

Одной из принципиальных сложностей реализации навигационного программного обеспечения для автономных пилотажных комплексов является использование для описания динамики БПЛА одновременно нескольких систем координат (СК) [1; 2]. Для решения этой проблемы применяется алгоритм бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС), позволяющий осуществлять перерасчет параметров движения БПЛА в используемых системах [2–4].

Традиционно для задач описания поворота твердого тела относительно центра масс в механике применяются углы Эйлера – Крылова, которые посредством построения соответствующих матриц поворотов позволяют пересчитывать параметры ориентации твердого тела при его повороте [5]. Такое описание обладает несколькими недостатками, сужающими область применения этого подхода в навигации.

Целью данной работы является построение альтернативного подхода к описанию поворотов для алгоритма БИНС на основе кватернионного базиса [6], который позволит устранить ряд недостатков описания ориентации БПЛА при вращении на основе углов Эйлера – Крылова, в частности, нетранзитивность последовательных поворотов и «шарнирный замок».

При описании ориентации малых БПЛА в основном используются три СК:

- жестко сцепленная с корпусом БПЛА связанная СК;
- сопровождающая СК, ассоциированная с центром масс БПЛА;
- геодезическая СК Земли (например, WGS-84) [5; 7; 8].

Связанная СК определяется взаимным расположением осей датчиков (акселерометров, гироскопов, магнитометров и пр.) и элементов фюзеляжа БПЛА. В данной работе предполагается, что соответствующие оси (Ox , Oy , Oz) всех датчиков сонаправлены, и при этом центр СК совпадает с центром масс БПЛА. Ось $Ox_{св}$ направлена вдоль линии, соединяющей центр масс БПЛА и его нос; ось $Oy_{св}$ перпендикулярна оси $Ox_{св}$ в продольной плоскости симметрии БПЛА; ось $Oz_{св}$ образует правую тройку с осями $Ox_{св}$ и $Oy_{св}$. В работе проекции различных параметров на эти оси будут иметь дополнительный индекс «св».

В качестве промежуточной между связанной и геодезической СК применяется сопровождающая СК, центр которой совпадает с центром масс БПЛА; ось Oy_g противоположно направлена вектору ускорения свободного падения; ось Ox_g ориентирована на север перпендикулярно Oy_g ; ось Oz_g образует правую тройку с Ox_g и Oy_g . Здесь и далее в работе проекции различных параметров на эти оси имеют дополнительный индекс «g».

Взаимное положение сопровождающей и связанной СК можно описать с помощью углов Эйлера – Крылова $\vec{\eta}_g = (\vec{\eta}_{xg}, \vec{\eta}_{yg}, \vec{\eta}_{zg}) = (\psi_g, \theta_g, \gamma_g)$, где ψ_g , θ_g , γ_g – курс, крен, тангаж соответственно (рисунок 1).

Сопровождающая СК вращается в пространстве геодезической СК с угловой скоростью, вызванной суточным вращением Земли с модулем угловой скорости Ω . Для определения положения объекта на поверхности Земли используются геодезические координаты. Положение некоторой точки задается широтой B и долготой L . Для летательных аппаратов вводится еще одна координата – высота над уровнем моря H . Широта B определяется углом, образуемым нормалью к референц-эллипсоиду Земли и плоскостью экватора. Референц-эллипсоид представляет собой приближение формы поверхности Земли эллипсоидом вращения, используемое на некотором участке земной поверхности. Долготу L измеряют двугранным углом между плоскостью меридиана, проходящего через точку, и плоскостью Гринвичского меридиана [5; 7].

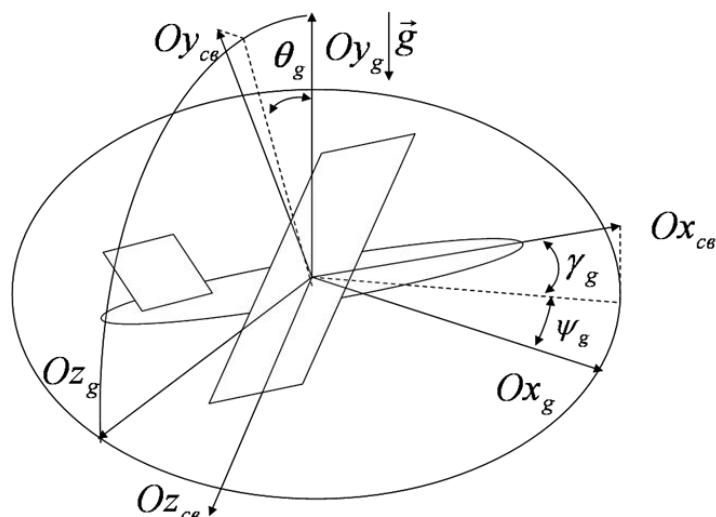


Рисунок 1. – Углы Эйлера – Крылова в качестве параметров ориентации БПЛА

При классическом описании положения твердого тела в пространстве, как правило, постулируется существование у него шести степеней свободы: трех, обусловленных перемещением его центра масс, и трех, относящихся к повороту самого тела вокруг его центра масс. Поворот вокруг центра масс можно представить как поворот некоего базиса $E(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, жестко связанного с системой, вокруг внешнего фиксированного базиса $I(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$ (рисунок 2).

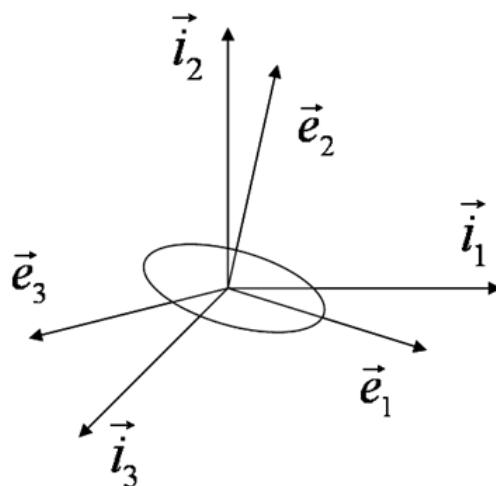


Рисунок 2. – Поворот твердого тела вокруг центра масс

Для описания поворота классически применяется матрица «направляющих косинусов». Пусть при повороте твердого тела вокруг центра масс произошло последовательное изменение углов курса, крена и тангажа на углы α , β и γ соответственно. Такому повороту будет соответствовать следующая матрица перехода [1; 2; 5]:

$$M(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma & -\cos \alpha \sin \beta \\ \sin \beta \sin \gamma & \sin \beta \cos \gamma & \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Т.е. чтобы от произвольного вектора \vec{a} в некой системе до поворота перейти к его аналогу \vec{a}' после поворота системы, необходимо рассчитать \vec{a}' по формуле $\vec{a}' = M \times \vec{a}$.

Такое описание является классическим в навигационных алгоритмах, однако не лишено недостатков. Основная проблема заключается в отсутствии свойства транзитивности у матричных произведений,

что приводит к неравнозначности результирующего поворота при изменении порядка следования элементарных поворотов курс–крен–тангаж. Т.е. $M(\alpha, \beta, \gamma) \neq M(\alpha, \gamma, \beta)$, что естественным образом сильно сокращает универсальность описания.

Другой проблемой является «складывание рамок» или «шарнирный замок». Дело в том, что при любом заданном выборе последовательности Эйлеровых углов поворота (например, в виде последовательности тангаж, курс, крен) особое положение возникает при угле тангажа, равном $\pi/2$. В этом положении любое непрерывное вращение в пространстве углов Эйлера не может быть представлено непрерывной кривой, что, например, в задаче компенсации внешнего поворота приводит к потере ориентации [5].

Компенсация указанных проблем описания поворотов вокруг центра масс возможна при использовании кватернионного базиса [6], который в силу применения другого математического описания принципиально не обладает указанными недостатками, правда, в отличие от рассмотренных углов Эйлера, не обладает таким же уровнем наглядности.

Каждому повороту объекта на угол φ вокруг оси \vec{b} с направляющими косинусами l, m и n , заданными относительно исходной системы координат, ставятся в соответствие четыре числа, называемые параметрами Родрига – Гамильтона [6]:

$$\lambda_0 = \cos \frac{\varphi}{2}, \lambda_1 = l \sin \frac{\varphi}{2}, \lambda_2 = m \sin \frac{\varphi}{2}, \lambda_3 = n \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (2)$$

Параметры Родрига – Гамильтона связаны друг с другом выражением $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. Кроме этого, они образуют, так называемые, собственные кватернионы – гиперкомплексные числа вида $\Lambda = \lambda_0 + i\lambda_1 + j\lambda_2 + k\lambda_3$. Величины λ_0 и $i\lambda_1 + j\lambda_2 + k\lambda_3$ называются скалярной и векторной частями кватерниона соответственно. Кватернионы впервые были введены в математику в 1843 г. В.Р. Гамильтоном при разработке нового аппарата гиперкомплексных чисел, аналогичного аппарату комплексных чисел на плоскости.

С точки зрения алгебры кватернионов поворот базиса I в базис E для каждого конечного момента времени может быть описан следующей операцией преобразования [6]:

$$E = \Lambda \cdot I \cdot \bar{\Lambda}, \quad (3)$$

где Λ и $\bar{\Lambda}$ – кватернион перехода между базисами и сопряженный с ним кватернион соответственно. При этом в зависимости от параметров вращения компоненты кватерниона $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ могут изменяться, однако в каждый момент времени должно выполняться соотношение нормировки $\Lambda \cdot \bar{\Lambda} = 1$.

Бесконечно малый поворот в этом случае имеет вид

$$d\Lambda = 1 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot dt, \quad (4)$$

где $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости поворота системы $E(t + dt)$ относительно $E(t)$.

Тогда для $\Lambda(t + dt)$ можно записать (5) и (6):

$$\Lambda(t + dt) = \Lambda(t) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \omega_E \cdot dt \right); \quad (5)$$

$$\Lambda(t + dt) = \left(1 + \frac{1}{2} \omega_I \cdot dt \right) \cdot \Lambda(t), \quad (6)$$

где ω_E и ω_I – кватернион-отображения вектора $\vec{\omega}$ на базисы E и I соответственно.

Преобразовывая (5) и (6), получаем кинематические уравнения (7), описывающие поворот твердого тела относительно центра масс [6]:

$$\begin{cases} \dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \Lambda \cdot \omega_E \\ \dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \omega_I \cdot \Lambda \end{cases} \quad (7)$$

Полученное уравнение может использоваться в навигационных алгоритмах для преобразования показаний инерциальных датчиков из собственной связанной системы координат в некоторую внешнюю. В случае, если кватернион Λ описывает переход между базами I и E , для любого трехмерного вектора \vec{N} справедливо соотношение (7):

$$N_E = \Lambda \cdot N_I \cdot \bar{\Lambda} = \Lambda \cdot N_I \cdot \Lambda^{-1}, \quad (7)$$

где N_E, N_I – кватернионные отображения \vec{N} в базах E и I соответственно.

Кватернионное отображение трехмерного вектора в некотором базисе представляет собой кватернион с нулевой скалярной частью, векторная часть которого соответствует представлению вектора в данном базисе.

В силу эквивалентности подходов искомые углы курса, тангажа и крена могут быть выражены через параметры Родрига – Гамильтона на основе выражений

$$\begin{cases} \psi = \tan^{-1} \left(-\frac{2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_0\lambda_2}{2\lambda_0^2 + 2\lambda_1^2 - 1} \right) \\ \theta = \sin^{-1} (2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_0\lambda_3) \\ \gamma = \tan^{-1} \left(-\frac{2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_0\lambda_1}{2\lambda_0^2 + 2\lambda_2^2 - 1} \right). \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, взаимное положение двух систем координат помимо трех углов Эйлера – Крылова, девяти направляющих косинусов, можно определить с помощью четырех параметров Родрига – Гамильтона.

При достаточных навыках составления собственных кватернионов, отвечающих последовательно-сти конечных поворотов, можно опускать определение направляющих косинусов оси конечного поворота и формально руководствоваться следующим правилом. Скалярная часть кватерниона всегда отлична от нуля, за исключением случая поворота на угол π . В векторной части кватерниона отлична от нуля компонента, соответствующая оси, вокруг которой происходит поворот. Например, если поворот происходит вокруг оси X , то отлична от нуля компонента при мнимой единице i , аналогично $Y \rightarrow j, Z \rightarrow k$. Если конечный поворот происходит по ходу стрелки часов, то векторная часть кватерниона пишется со знаком «минус» – образуется сопряженный кватернион.

Для описания взаимного положения сопровождающей и связанной с объектом СК могут быть использованы различные кинематические параметры: углы Эйлера – Крылова, направляющие косинусы, параметры Родрига – Гамильтона и др. С математической точки зрения при описании алгоритмов идеальной работы БИНС все эти параметры обеспечивают одинаковые результаты. Различные кинематические параметры можно трактовать как элементы соответствующего линейного пространства, так как все они допускают операции сложения и умножения на число. В каждом линейном пространстве задана операция ортогонального преобразования, позволяющая определить компоненты вектора (элемента пространства) при повороте системы координат. Другими словами, все пространства кинематических параметров изоморфны, т.е. все элементы и операции над ними в одном пространстве имеют взаимно-однозначные аналоги во всех остальных пространствах. С точки зрения реализации численных алгоритмов предпочтение отдается параметрам Родрига – Гамильтона или их систематизирующей гиперкомплексной конструкции – кватерниону. Кинематические уравнения в параметрах Родрига – Гамильтона линейные, имеют четвертый порядок и определены для любых углов курса, тангажа и крена. Параметры Родрига–Гамильтона подчиняются одному уравнению нормировки, что делает их одним из самых удобных математических формализмов в БИНС.

Кинематические уравнения в углах Эйлера – Крылова имеют невысокий порядок (третий) и понятную структуру, но содержат тригонометрические функции от искомых углов и допускают вырождение при угле тангажа, равном 90° . Все это обуславливает их непригодность в БИНС. Уравнения БИНС, записанные с использованием матрицы направляющих косинусов, – линейные, определены для любых углов курса, тангажа и крена, однако уравнения Пуассона имеют достаточно высокий (девятый) порядок. Кроме того, уравнения Пуассона должны быть дополнены шестью уравнениями связи.

Использование кватернионного базиса в задачах описания динамики летательных аппаратов для построения алгоритма БИНС позволяет нивелировать недостатки традиционного описания поворота твердого тела вокруг центра масс на основе углов ориентации Эйлера – Крылова, которые заключаются

в отсутствии свойства транзитивности у соответствующих матричных произведений, а также наличии так называемого «шарнирного замка». При этом существует взаимно однозначное преобразование параметров Родрига – Гамильтона в углы Эйлера – Крылова и наоборот, что позволяет применять одновременно оба формализма для решения конкретных задач ориентации БПЛА в пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grewal, M. Global Positioning Systems, Inertial Navigation and Integration / M. Grewal, L. Weill, P. Andrews – London : John Wiley and Sons Inc., 2001. – 392 p.
2. Матвеев, В.В. Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем / В.В. Матвеев, В.Я. Распопов ; под общ. ред. В.Я. Распопова. – СПб. : Электроприбор, 2009. – 280 с.
3. Козадаев, К.В. Повышение точности инерциально-спутниковой навигационной системы в режиме неподвижности / К.В. Козадаев, А.Е. Макаренко // Информатика. – 2017. – № 2 – С. 113–120.
4. Shin, E.-H. Techniques for Low-Cost Inertial Navigation / E.-H. Shin – Alberta : Department of Geomatics Engineering Calgary, 2005. – 206 p.
5. Алешин, Б.С. Ориентация и навигация подвижных объектов / Под общ. ред. Б.С. Алешина, К.К. Веремеенко, А.И. Черноморского. – М. : Физматлит, 2006. – 422 с.
6. Бранец, В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. – М. : Наука, 1973. – 320 с.
7. Красильщиков, М.Н. Управление и наведение беспилотных маневренных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий / Под ред. М.Н. Красильщикова и Г.Г. Себрякова. – М. : Физматлит, 2003. – 280 с.
8. Козадаев, К.В. Система определения углов ориентации в пространстве на основе метода RTK / К.В. Козадаев, И.О. Митрахович // Электроника-инфо – № 9. – 2015. – С. 49–52.

Поступила 14.02.2020

QUATERNION BASIS FOR THE ALGORITHM OF A FREEFORM INERTIAL NAVIGATION SYSTEM UAV

K. KOZADAEV

The article is dedicated to the possibility of using a quaternion basis for describing the turns of unmanned aerial vehicles (UAV) around the center of mass, which allows compensating for the known disadvantages of using Euler – Krylov angles, such as the non-transitivity of consequence of turns and the «hinge lock».

Keywords: *quaternions, freeform inertial navigation system, orientation in space.*

УДК: 004.85

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ КЛАССИФИКАЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА СЕГМЕНТИРОВАННЫХ ОБЪЕКТОВ НА ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ РАКОВЫХ КЛЕТОК

*Е.В. ЛИСИЦА, канд. физ.-мат. наук, доц. Н.Н. ЯЦКОВ,
канд. физ.-мат. наук, доц. В.В. СКАКУН, д-р физ.-мат. наук, проф. В.В. АПАНАСОВИЧ
(Белорусский государственный университет, Минск)*

Исследованы методы классификации для анализа многоканальных изображений раковых клеток опухоли молочной железы. Каждый объект описывался 13 признаками, из которых 11 признаков описывали форму, 2 признака – цвет. Для тестирования использовался метод перекрестной проверки с контролем по отдельному объекту. Рассмотрены следующие методы: линейного и квадратичного дискриминантного анализа, наивный байесовский классификатор, многослойный перцептрон, случайного леса, опорных векторов. Наилучшие результаты классификации получены для метода случайного леса, который показал точность классификации 0,97 при использовании всех признаков. Точность классификации этим методом на основе только признаков цвета – 0,96, а при классификации на основе только признаков формы – 0,92. Следующим по точности классификации является метод линейного дискриминантного анализа, обеспечивающий точность классификации 0,97 по всем признакам, 0,96 – по признакам цвета и 0,90 – по признакам формы. Наихудшие результаты получены для многослойного перцептрона.

Ключевые слова: машинное обучение, методы классификации, перекрестная проверка, дискриминантный анализ, байесовский классификатор, нейронные сети.

Рак груди – одно из самых распространенных онкологических заболеваний в мире среди женщин [1]. В Республике Беларусь рак молочной железы занимает одну из ведущих позиций по диагностике и смертности среди женского населения [2]. В случае ранней диагностики (до пяти лет после возникновения опухоли) выживаемость возрастает с 56% до 86% [3]. Основной причиной, вызывающей рак, является неконтролируемый рост клеток в тканях груди [4]. Ненормальный рост клеток может быть как доброкачественным, так и злокачественным. Доброкачественные образования, в отличие от злокачественных, не распространяются в другие органы и части тела. Таким образом, необходима грамотная и своевременная диагностика в лечении опухолей [5]. Онкологические заболевания очень разнообразны, в первую очередь это обусловлено тем, что рак – это болезнь на клеточном уровне, а структура клетки варьируется от человека к человеку [7]. Всего лишь 5–10% раковых опухолей имеют наследственный характер, и около 90% раковых опухолей возникают в результате процессов старения [6].

Современные методы диагностики основаны на данных, получаемых при клиническом наблюдении, и проведении ряда тестов [8]. Для исследования онкологических заболеваний используются методы, основанные на мониторинге молекулярных процессов, происходящих в клетке. Одним из таких методов является люминесцентная микроскопия, которая получила широкое распространение при диагностике онкологических заболеваний. В этом методе интенсивность люминесцентного красителя определяет концентрацию определенных белков в клетке, которые в свою очередь отражают процессы, которые в ней происходят [9]. В результате проведения эксперимента получается несколько десятков изображений, каждое из которых содержит по несколько сотен клеток. Решается задача выделения (сегментации) клеток на изображении и последующего их анализа с целью классификации на здоровые и больные клетки, вычисления их относительной доли на изображении [10]. Известны автоматические методы и программные комплексы сегментации клеток [11], но их применение не всегда дает ожидаемые результаты вследствие большой сложности объектов, представленных на изображениях.

Информацию, полученную в результате сегментации, представляют в виде многомерного набора данных, по которому необходимо определить тип клетки. Для решения задачи классификации типа клетки можно использовать методы машинного обучения [12–14].

Машинное обучение получило широкое распространение в различных научных областях и относится к группе методов искусственного интеллекта. Эти методы используются для выделения информативных признаков и зависимостей между ними [15–17], идентификации, классификации, снижения размерности и прогнозирования [18; 19]. Среди наиболее распространенных методов машинного обучения можно выделить:

- 1) наивный байесовский классификатор (NB, от англ. Naïve Bayes). На практике NB используют для сравнения с более сложными методами классификации [20];
- 2) методы дискриминантного анализа (DA, от англ. Discriminant Analysis): линейный DA (LDA, от англ. Linear Discriminant Analysis) и квадратичный DA (QDA, от англ. Quadratic Discriminant Analysis). В методе LDA для оценки параметров распределений классов используется метод наименьших квадратов (lsqr) или спектральное разложение матрицы (eigen), в случае больших объемов данных возможно применение метода сингулярного разложения (svd). В случае QDA основное влияние на качество классификации оказывает параметр регуляризации [21];

3) метод опорных векторов (SVM, от англ. Support Vector Machine). Качество классификации для метода SVM в первую очередь определяется видом функции ядра: линейная функция задается через C – штрафное значение за неверную классификацию и tol – точность критерия останова; полиномиальная функция с параметрами степень d и независимый член r ; радиально-базисная функция зависит от параметра степени γ ; сигмоидальная функция зависит от параметра степени γ и независимого члена $coef0$ [22; 23];

4) деревья решений (DT, от англ. Decision Trees). На практике чаще всего настраиваются следующие параметры DT: критерий разделения (*criterion*), может использоваться критерий Джини (*Gini*) или энтропия (*Entropy*); максимально разрешенная глубина $min_samples$; способ разбиения (*splitter*), который может быть случайным (*random*), или выбор наилучшего разбиения (*best*) [24];

5) случайный лес (RF, от англ. Random Forest). Для данного метода настраиваются два параметра: критерий построения деревьев (*criterion*), который может быть *Gini* или *Entropy*, количество деревьев ($n_estimators$) для классификации [24];

6) искусственные нейронные сети (ИНС). Основными параметрами для многослойного перцептрона являются количество слоев n_layer , количество нейронов $neurons_number$ в слое и обучающая функция g . На практике используется четыре вида функции g : линейная *identity*, которая подходит для решения только линейных задач, сигмоидальная функция *logistic*, функция гиперболического тангенса *tanh* и пороговый переход в нуле *relu* [25].

Часть методов классификации при их применении на практике неустойчивы к наличию выбросов в обучающей выборке, поэтому для отбора методов, устойчивых к выбросам данных, использовалась стандартизация для устранения неоднородности [13].

Рассмотренные методы используются при прогнозировании поведения рака груди, дифференциации между доброкачественными и злокачественными опухолями [20].

ИНС применяются для анализа рентгеновских изображений, получаемых с маммографа при ранней диагностике рака груди [27] и для оценки степени заболевания раком молочной железы [28]. Точность классификации с использованием нейронных сетей варьируется в пределах от 0,76 при исследовании рака легких [29] до 0,95 при исследовании рака желудка [30], когда использовался многослойный перцептрон.

Методы машинного обучения также используются для оценки выживаемости при онкологическом заболевании, при этом ИНС и DT показывают точности 0,912 и 0,936 соответственно [31].

Наивный байесовский классификатор показал хорошие результаты классификации при решении задачи постановки диагноза при определении вида опухоли. При этом точность классификации опухолей составляла 0,95 [32]. Наряду с NB используются и другие методы классификации, основанные на применении теоремы Байеса. Например, методы DA (линейный и квадратичный) с точностью классификации от 77% до 79%, а также классификатор на основе гауссовских процессов с точностью классификации от 0,81 до 0,85 [33].

Метод SVM получил широкое распространение в исследовании генома рака, например, для решения задачи типизации раковых заболеваний, поиска новых биомаркеров рака и генов, отвечающих за появление раковых заболеваний. В проведенных исследованиях точность метода SVM варьировалась в пределах от 0,88 до 0,93 [34].

Использование ансамблевых методов, в которых производится усреднение по ансамблю слабых базовых классификаторов, не дает значительного улучшения в точности классификации, однако приводит к увеличению требовательности к вычислительным ресурсам, как это было показано в работе, посвященной исследованию методов DA, NB, SVM и их ансамблевых реализаций при анализе рака простаты [35]. Исключением является RF, представляющий собой ансамблевую реализацию метода DT. Методы RF используются для прогнозирования терапевтического эффекта при лечении онкологических заболеваний, при этом точность составляет 0,932 [36]. Также они используются для постановки диагноза рака простаты, где их точность составляет 0,83 [37].

Целью данной работы является сравнение различных методов классификации раковых клеток на трехканальных люминесцентных изображениях. Из каждой группы методов классификации, базируясь на результатах опубликованных исследований, были выбраны наилучшие: NB, линейный DA, квадратичный DA, DT, SVM, RF, MLP (от англ. Multi-layer perceptron).

Рассмотрены девять случайно отобранных микроочков из 187 микроочков срезов тканей опухолей молочной железы. Экспертным путем установлены 6366 ядер на изображениях. Цель эксперимента – количественный анализ гетерогенности эстроген-рецептора при раке молочной железы.

Предварительно изготовленные парафинизированные препараты ткани подвергались депарафинированию и извлечению антигенов путем варки под давлением. Препараты инкубировались с 0,3% бычьего сывороточного альбумина в 0.1 М трис-буфере (BSA/TBS) в течение 30 мин при комнатной температуре. Далее препараты инкубировались с первичными антителами, разведенными в BSA/TBS, в течение 1 ч при комнатной температуре или в течение ночи при +4°C, трехкратно промывались в течение 5 мин раствором BSA/TBS, содержащим 0,05% Tween-20. Соответствующие вторичные антитела, растворенные в BSA/TBS,

добавлялись на 1 ч при комнатной температуре. Они представляли собой антитела, конъюгированные с флуорофором (Amersham, Piscataway и Molecular Probes, Eugene, США) и/или конъюгированные декстрановым остовом, несущим пероксидазу хрена (HRP) (Envision, DAKO, Carpinteria, США). Вместе со вторичными антителами в растворе присутствовал краситель 4,6-диамидино-2-фенилиндол дигидрохлорид (DAPI) для визуализации ядер. Затем срезы повторно подвергались троекратной отмывке BSA/TBS, содержащим 0,05% Tween-20. Для автоматического анализа препараты инкубировались с флуоресцентным хромогеном (цианин-5-тирамид, NEN LifeScience, Products, США), в результате чего молекулы цианина ковалентно сшивались за счет активности HRP и накапливались в непосредственной близости от мест связывания меченых вторичных антител. Препараты, предназначенные для автоматического анализа, покрывались средой, предотвращающей выцветание (гельватол с 0,6% n-пропилгаллатом). Изображения микрочипов получены с помощью платформы Deltavision и программного обеспечения Soft Worx 2.5 (Applied Precision, США) с использованием камеры с водяным охлаждением Photometrics серии 300 и линз $\times 10$ Nikon Super-Fluor на флуоресцентном микроскопе Nikon TE 200.

Изображения представляют собой популяции клеток, маркированные тремя красителями и сохраненные в RGB-формате. В противоположность здоровым клеткам в цитоплазме раковых клеток появляется белок цитокератин. Белок маркируется цианиновым красителем Cy3 и регистрируется в зеленом цветовом канале изображения. Для маркировки всех ядер (ДНК) использован краситель DAPI и зарезервирован синий канал; красный канал изображения – для индикации ядер раковых клеток. Краситель Cy5 использован для маркировки белка эстроген-рецептора, который находится в ядрах раковых клеток. Соответственно, маркерами раковых клеток являются два красителя – Cy5 и Cy3. Размер изображений составляет 2048×2048 пикселей в каждом из трех каналов, разрешающая способность – 0,2 мкм/пиксель или 5 мкм [16; 17].

Выполнено сравнение методов классификации LDA, DDA, NB, DT, RF, MLP, LR. Сравнение произведено по признакам формы и цвета ядер, полученных в результате их сегментации на люминесцентных изображениях раковых клеток [16; 17]. Каждый объект (ядро) описывается 13 признаками, из которых два признака относятся к признакам цвета, а одиннадцать – к геометрическим признакам: второе собственное значение матрицы тензора инерции, координата центра масс по оси абсцисс, координата центра масс по оси ординат, первое собственное значение матрицы тензора инерции, первый Ну-момент, нормированный центральный момент, коэффициент плотности, третий Ну-момент, пятый Ну-момент, нормированный центральный момент, площадь выпуклой оболочки, верхний квантиль интенсивности в красном канале и математическое ожидание в зеленом. Признаки были отобраны при помощи пакета «EFS» языка программирования R. Анализ выполнялся на процессоре Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2630 v2 @2.60 Ghz. Для анализа использовались методы, реализованные в библиотеке машинного обучения scikit-learn языка программирования Python. В качестве критерия использовалась точность классификации – относительная доля верно классифицированных объектов. Метод проверки – метод перекрестной проверки с контролем по отдельным объектам [40].

Байесовские методы. Для наивного байесовского классификатора получены следующие результаты: точность классификации по всем признакам составила 0,97, при использовании только признаков цвета – также 0,97, для признаков формы – 0,89. Как следует из полученных результатов, использование всех признаков одновременно показывает наилучшие результаты классификации, использование только признаков формы приводит к снижению качества кластеризации в среднем на 10%.

В таблице 1 показаны средние значения точности классификации методом LDA с различными параметрами, усредненные по девяти изображениям и рассчитанные как по всем признакам, так и по признакам формы и цвета в отдельности.

Таблица 1. – Результаты точности классификации для LDA

Усечение	Метод оценки								
	svd			lsqr			eigen		
	Признаки								
	Все	Цвет	Форма	Все	Цвет	Форма	Все	Цвет	Форма
Нет	0,97	0,96	0,90	0,97	0,96	0,90	0,75	0,93	0,75
LW	–	–	–	0,97	0,96	0,90	0,75	0,93	0,75

При использовании методов svd и lsqr результаты классификации совпадают. Временные затраты на обучение для методов оценки svd и lsqr без усечения одинаковы и составляют 0,003 с. При рассмотрении усечения временные затраты возрастают до 0,004 с. Для методов оценки lsqr и eigen усечение не влияет на качество классификации. Наихудшие результаты были получены для метода оценки eigen. Отличительной чертой LDA является то, что наилучшие результаты классификации (0,93) для него были получены при использовании только признаков цвета. Включение дополнительной информации от признаков формы только снижало точность классификации. Для LDA с методами оценки svd и lsqr характерно улучшение

точности классификации при использовании всех признаков по сравнению с использованием признаков цвета и формы в отдельности. При этом точность классификации с учетом только признаков формы для методов оценки svd и lsqr на 17% больше, чем при рассмотрении признаков формы при методе eigen. Таким образом, для дальнейшего анализа оптимальным для работы с LDA является метод оценки svd.

В таблице 2 показаны средние значения точности классификации метода QDA с различными значениями *reg_param*, усредненные по девяти изображениям по всем признакам, а также по признакам формы и цвета в отдельности.

Таблица 2. – Результаты точности классификации для QDA

Признаки	reg_param			
	0,1	1,0	10,0	100,0
Все	0,971	0,581	0,247	0,247
Цвет	0,967	0,910	0,247	0,247
Форма	0,891	0,581	0,247	0,247

По мере увеличения разброса в данных, что соответствует возрастанию значения *reg_param*, уменьшается точность классификации. При порядках от второго и более изменение параметра *reg_param* не приводит к изменению точности классификации. При значениях *reg_param* нулевого порядка совместное использование признаков формы и цвета позволяет улучшить качество классификации. Когда параметр *reg_param* принимает значения первого порядка, то наилучшие результаты классификации достигаются при использовании только признаков цвета. Точность классификации в этом случае ниже, чем при использовании значений *reg_param* нулевого порядка. Точность классификации, полученная методом QDA, сопоставима с методом LDA. Временные затраты на обучение обоих методов также показывают сопоставимые результаты.

Метод опорных векторов. Исследование метода SVM было проведено в следующем порядке: сначала SVM с линейным ядром, затем с полиномиальным, сигмоидальным и полиномиальным ядрами.

Для наших данных варьирование параметра *tol* в пределах от 10^{-4} до 10^1 не влияет на точность классификации. Это можно объяснить тем, что отдельные признаки имеют большой разброс, в результате чего получаются большие значения ошибки классификации (таблица 3).

Таблица 3. – Результаты точности классификации для линейного SVM

Признаки	C					
	0,01	0,1	1	10	100	1000
Все	0,81	0,71	0,82	0,82	0,81	0,81
Цвет	0,97	0,97	0,91	0,88	0,55	0,64
Форма	0,65	0,60	0,49	0,52	0,52	0,52
Нормированные данные						
Все	0,97	0,98	0,98	0,97	0,86	0,78
Цвет	0,96	0,97	0,97	0,97	0,94	0,91
Форма	0,90	0,91	0,91	0,87	0,73	0,64

Добавление нормировки увеличивает точность классификации для линейного метода опорных векторов при использовании как всех признаков, так и признаков формы и цвета в отдельности. Точность классификации значительно изменилась при использовании только признаков формы. Из этого можно сделать вывод, что признаки формы обладают высокой неоднородностью, а линейный метод опорных векторов является неустойчивым к выбросам. Поскольку наилучшие результаты были получены при штрафном параметре $C=1$, то в дальнейших исследованиях для метода опорных векторов использовалось это значение.

Основным параметром, который оказал влияние на точность классификации для полиномиального случая, был параметр степени полинома. Наилучшие результаты были получены при использовании полинома первой степени. Как и следовало ожидать, они сопоставимы с результатами для линейного случая метода опорных векторов. Изменение степени полинома приводит к резкому ухудшению точности классификации. Так, для признаков формы, она уменьшается с 0,91 до 0,59. При использовании все признаков точность классификации падает с 0,98 до 0,76. Только для признаков цвета она остается сопоставимой со значениями, полученными при использовании полинома первой степени. В таблице 4 показаны результаты точности классификации при использовании полинома первой степени с различными значениями свободного коэффициента *r*.

Таблица 4. – Результаты точности классификации для SVM с полиномиальным ядром

Признаки	<i>r</i>					
	10 ⁻³	10 ⁻²	10 ⁻¹	1	10	100
Все	0,89	0,80	0,78	0,82	0,66	0,80
Цвет	0,81	0,96	0,97	0,97	0,97	0,96
Форма	0,79	0,68	0,61	0,49	0,56	0,55
Нормированные данные						
Все	0,94	0,97	0,98	0,98	0,97	0,91
Цвет	0,80	0,96	0,97	0,97	0,97	0,96
Форма	0,85	0,90	0,91	0,91	0,86	0,75

На ненормированных данных точность варьирования параметров привела к изменению точности классификации только при использовании признаков цвета.

Далее проводились исследования метода SVM с сигмоидальным ядром. Результаты точности классификации показаны в таблице 5 и на рисунке 1. Параметр *gamma* оказывает основное влияние на точность классификации. При его неверном выборе параметр *coef0* не оказывает влияния на точность.

Таблица 5. – Результаты точности классификации для SVM с сигмоидальным ядром

<i>coef0</i>	<i>gamma</i>		
	0,001	0,01	0,1
-100	0,75	0,75	0,79
-10	0,75	0,82	0,58
-1	0,97	0,52	0,75
0	0,947	0,53	0,75
1	0,927	0,61	0,75

На рисунке 1 показаны результаты точности классификации SVM с сигмоидальными ядром на нормированных данных. В отличие от исследования на ненормированных данных, где точность классификации была одинаковой и составляла 0,75 вне зависимости от изменения параметров *gamma* и *coef0*, наилучшая точность классификации была получена при *gamma* = 0,01 и *coef0* = 0.

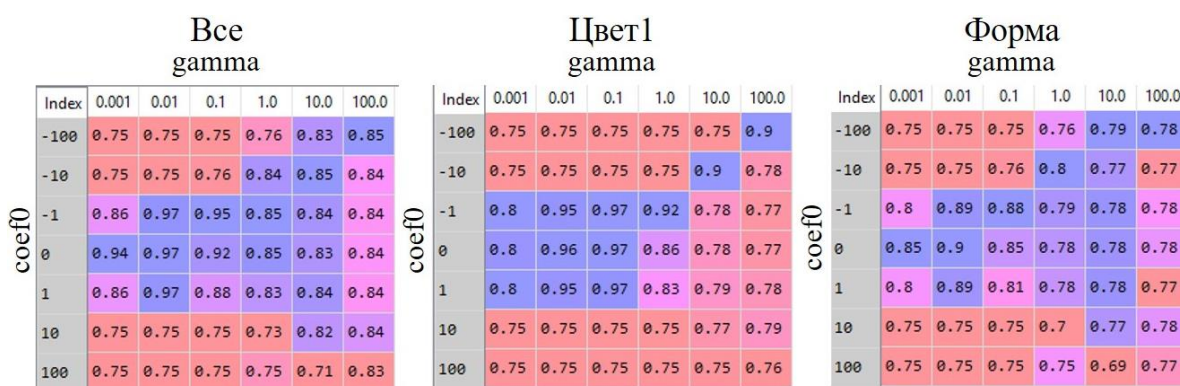


Рисунок 1. – Результаты точности классификации для SVM с сигмоидальным ядром на нормированных данных

Метод опорных векторов вне зависимости от вида используемого ядра является неустойчивым к наличию выбросов в выборке, а также чувствительным к выбору параметров метода, что затрудняет его использование на практике.

Решающие деревья. В таблице 6 показаны результаты классификации решающими деревьями, построенные по алгоритму CART с варьированием двух параметров: *criterion* и *splitter*.

Таблица 6. – Результаты точности классификации для решающих деревьев

Признаки	Все		Цвет		Форма	
	<i>criterion</i>					
	<i>Gini</i>	<i>Entropy</i>	<i>Gini</i>	<i>Entropy</i>	<i>Gini</i>	<i>Entropy</i>
<i>splitter</i>						
<i>random</i>	0,961	0,960	0,956	0,954	0,883	0,875
<i>best</i>	0,965	0,961	0,955	0,956	0,887	0,876

Изменение критерия кластеризации *criterion* или способа разбиения *splitter* не оказывает значительного влияния на точность классификации. Изменение точности классификации не превосходило 0,01%. При использовании всех признаков были получены наилучшие результаты классификации, наихудшие – при использовании только признаков формы.

Метод случайного леса. Количество деревьев $n_estimators$ при построении леса принимало значения 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90; использовались критерии построения деревьев Джинни и энтропии. При использовании всех признаков варьирование параметров метода не влияло на точность классификации, которая составляла 0,97. Аналогичные результаты были получены при отдельном рассмотрении признаков цвета (0,96) и формы (0,92). Ансамблевый метод классификации показал незначительное улучшение точности классификации по сравнению с решающими деревьями с 0,96 до 0,97 при использовании всех признаков. Однако он показал большую устойчивость при классификации по признакам формы, когда точность классификации была улучшена с 0,88 до 0,92.

Многослойный персептрон. Для исследования были рассмотрены однослойный и двухслойный персептроны с 1, 5, 10 и 20 нейронами в каждом слое. Использование нормированного набора данных позволяет улучшить точность классификации от 5 до 25%. Однако, поскольку нормировка устраняет неоднородность, это говорит о чувствительности метода к выбросам. Как и ожидалось, общей тенденцией является то, что двухслойная нейронная сеть показывает лучшие результаты классификации по сравнению с однослойным персептроном на всех наборах данных. Исключение составляет многослойный персептрон с передаточной функцией «пороговый переход в нуле», которая показала наилучшие результаты классификации для всех нейронных сетей. При использовании количества нейронов в сети большего, чем количество признаков, точность классификации улучшается только на ненормированном наборе данных. На нормированном наборе данных происходит либо ухудшение точности классификации, либо она остается неизменной. В таблице 7 показана точность классификации многослойным персептроном с передаточной функцией порогового перехода в нуле в зависимости от набора данных и количества нейронов в слое.

Таблица 7. – Результаты точности классификации для многослойной нейронной сети с передаточной функцией порогового перехода в нуле

Архитектура нейронной сети	Количество нейронов	Тип признаков					
		Все	Цвет	Форма	Все	Цвет	Форма
	Ненормированные данные			Нормированные данные			
	(1)	0,80	0,87	0,75	0,96	0,96	0,90
(1, 1)	0,92	0,96	0,83	0,97	0,97	0,91	
(5)	0,77	0,79	0,76	0,79	0,78	0,78	
(5, 5)	0,90	0,91	0,81	0,91	0,85	0,86	
(10)	0,78	0,89	0,77	0,95	0,95	0,89	
(10, 10)	0,88	0,97	0,82	0,97	0,97	0,91	
(20)	0,75	0,82	0,71	0,91	0,87	0,86	
(20, 20)	0,92	0,95	0,85	0,97	0,97	0,91	

Заключение. Для большинства методов классификации точность увеличивается при использовании всех признаков (как формы, так и цвета). Все методы классификации показали значительное ухудшение точности при использовании только признаков формы или только цвета.

Метод опорных векторов и многослойный персептрон являются неустойчивыми к наличию выбросов в выборке, поэтому их использование на практике нецелесообразно.

Наихудшие результаты были получены для метода опорных векторов, этот метод является неустойчивым к наличию выбросов при обучении. При этом результаты классификации метода опорных векторов сильно зависят от выбранных параметров.

Оптимальным методом для решения поставленной задачи является метод случайного леса. Этот метод устойчив к наличию выбросов в обучающей выборке, т.к. в основу метода положено коллективное решение по наборам деревьев.

В группе байесовских методов при классификации по всем признакам и признакам цвета были получены результаты сопоставимые с методом случайного леса. Однако, при использовании только признаков формы точность классификации случайным лесом выше, чем у методов на основе теоремы Байеса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Программный пакет CELLDATAMINER для анализа люминесцентных изображений раковых клеток / Е.В. Лисица [и др.] // Информатика. – 2015. – № 4. – Стр. 73–84.

2. Третьяк, И.Ю. Клинико-морфологическая характеристика пациентов с отечноинфильтративной формой рака молочной железы / И.Ю. Третьяк, Ю.Е. Демидчик, С.А. Костюк // Актуальные вопросы диагностики и лечения злокачественных новообразований : материалы респ. науч.-практ. конф., посвященной 40-летию кафедры онкологии БГМУ, Минск, 21 нояб. 2014 / Белорус. гос. мед. ун-т ; под общ. ред. проф. А.В. Прохорова. – Минск, 2014. – С.102–106.
3. Paulin, F. and Santhakumaran, A. Extracting rules from feed forward neural networks for diagnosing breast cancer / F. Paulin, A. Santhakumaran // Artificial Intelligent Systems and Machine Learning. – 2009. – V. 1, № 4 – P. 143–146.
4. Global and Local Structure Preservation for Feature Selection / X. Liu [et al.] // Neural Networks and Learning Systems, IEEE Transactions. – 2013. – V. 99 – P. 1.
5. Hota, H. Diagnosis of breast cancer using intelligent techniques / H. Hota // Int J Emerg Sci Eng (IJESE). – 2013. –V. 1, № 3 – P. 45–53.
6. Reif, M. Efficient feature size reduction via predictive forward selection / M. Reif, F. Shafait // Pattern Recognition. – 2014. – V. 47, № 4 – P. 1664–1673.
7. Cancer worldwide // World cancer report 2014 / B. Stewart, C. P. Wild. – WHO, 2016. – P. 16–81.
8. Gayathri, B. Breast cancer diagnosis using machine learning algorithms –ASurvey / B. Gayathri, C. Sumathi, T. Santhanam // International Journal of Distributed and Parallel Systems. – 2013. – 4(3). – P. 105.
9. Digital quantitative measurements of gene expression / V. Mikkilineni [et al.] // Biotechnology and bioengineering. – 2004. – № 86, V. 2. – P. 117–124.
10. Spatial quantitative analysis of fluorescently labeled nuclear structures: problems, methods, pitfalls / O. Ronneberger [et al.] // Chromosome Res. – 2008. – № 16, V. 3. – P. 523–562.
11. Алгоритм автоматической сегментации границ ядер раковых клеток на трехканальных люминесцентных изображениях / Лисица Е.В. [и др.] // Журнал прикладной спектроскопии. – 2015. – № 82, Т. 4. – С. 598–607.
12. Stabenfeldt, S.E. Current trends in biomarker discovery and analysis tools for traumatic brain injury / S.E. Stabenfeldt, B.I. Martinez // Journal of Biological Engineering. – 2019. – № 13, V. 16. – P. 1–12.
13. Интеллектуальный анализ данных : пособие / Н.Н. Яцков. – Минск : БГУ, 2014. – 151 с.
14. MaGIC: a machine learning tool set and web application for monoallelic gene inference from chromatin / S. Vinogradova [et al.] // BMC Bioinformatics. – 2019. – № 20, V. 1. – P. 106–111.
15. Neumann, U. EFS: an ensemble feature selection tool implemented as R-package and web-application / U. Neumann, N. Genze, D. Heider // BioData Mining. – 2017. – № 10, V. 21.
16. Отбор характеристик распределения интенсивности в цветовых каналах на люминесцентных изображениях раковых клеток / Е. В. Лисица [и др.] // Журнал прикладной спектроскопии. – 2019. – Т. 86, № 3 – С. 394–400.
17. Отбор информативных геометрических признаков ядер клеток на люминесцентных изображениях раковых клеток / Е. В. Лисица [и др.] // Информатика. – 2019. – Т. 16, № 2 – С. 16–26.
18. Machine Learning-based Analysis of Rectal Cancer MRI Radiomics for Prediction of Metachronous Liver Metastasis / M. Liang [et al.] // Acad Radiol. – 2019. [Epub ahead of print].
19. Constructing Prediction Model of Lung Cancer Recurrence Risk Using Gene Function Clustering and Machine Learning / J. Zhong [et al.] / Comb Chem High Throughput Screen.
20. Tackling the poor assumptions of naive bayes text classifiers / J.D. Rennie [et al.] // Proceedings of the Twentieth International Conference on Machine Learning (ICML-2003). – Washington DC, 2003. – P. 616–623.
21. Hastie, T. The Elements of Statistical Learning / T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman. – Springer, 2009. – P. 106–119.
22. Guyon, I. Automatic Capacity Tuning of Very Large VC-dimension Classifiers / I. Guyon, B. Boser, V. Vapnik // Advances in neural information processing. – 1993.
23. Cortes, C. Support-vector networks / C. Cortes, V. Vapnik // Machine Learning. – 1995. – V. 20. – P. 273–297.
24. Classification and Regression Trees / L. Breiman [et al.] // Wadsworth, Belmont-CA. – 1984.
25. Scikit-learn: Machine Learning in Python / Pedregosa [et al.] // JMLR. – 2011. – V. 12, – P. 2825–2830.
26. Machine learning models in breast cancer survival prediction / M. Montazeri [et al.] // Technology and Health Care. – 2016.
27. Artificial Neural Networks in Image Processing for Early Detection of Breast Cancer / M.M. Mehdy [et al.] // Comput Math Methods Med. – 2017.
28. Assessing Breast Cancer Risk with an Artificial Neural Network / M. Sepandi [et al.] // Comput Math Methods Med. – 2017.
29. Application of artificial neural network model combined with four biomarkers in auxiliary diagnosis of lung cancer / Xiaoran Duan [et al.] // Med Biol Eng Comput. – 2017. – № 55, V. 8. – P. 1239–1248.
30. Korhani Kangi, A. Predicting the Survival of Gastric Cancer Patients Using Artificial and Bayesian Neural Networks/ A. Korhani Kangi, A. Bahrapour // Asian Pac J Cancer Prev. – 2018. – № 19, V. 2. – P. 487–490.

31. Delen, D. Predicting breast cancer survivability: a comparison of three data mining methods / D. Delen, G. Walker, A. Kadam // *Artificial intelligence in medicine*. – 2005. – № 34, V. 2. – P. 113–127.
32. Jiang, W. A naive Bayes algorithm for tissue origin diagnosis (TOD-Bayes) of synchronous multifocal tumors in the hepatobiliary and pancreatic system / W. Jiang [et al.] // *Int J Cancer*. – 2018. – № 42, V. 2. – P. 357–368.
33. Maniruzzaman, Md. Comparative Approaches for Classification of Diabetes Mellitus Data: Machine Learning Paradigm / Md. Maniruzzaman // *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. – 2017. – V. 152. – P. 23–34.
34. Applications of Support Vector Machine (SVM) Learning in Cancer Genomics / S. Huang [et al.] // *Cancer Genomics Proteomics*. – 2018. – № 15, V. 1. – P. 41–51.
35. Viswanath, S.E. Comparing radiomic classifiers and classifier ensembles for detection of peripheral zone prostate tumors on T2-weighted MRI: a multi-site study / S.E. Viswanath [et al.] // *BMC Med Imaging*. – 2019. – № 19, V. 1. – P. 22–34.
36. Predictors of the therapeutic effect of corticosteroids on radiation-induced optic neuropathy following nasopharyngeal carcinoma/ B. Zheng [and et.] // *Support Care Cancer*. – 2019.
37. Prostate cancer prediction using the random forest algorithm that takes into account transrectal ultrasound findings, age, and serum levels of prostate-specific antigen / L.H. Xiao [et al.] // *Asian J Androl*. – 2017. – № 19, V. 5. – P. 586–590.
38. Camp, R.L. Validation of tissue microarray technology in breast carcinoma / R.L. Camp, L.A. Charette, D.L. Rimm // *Lab Invest*. – 2000. – № 80, V. 12. – P. 1943–1949.
39. Zhang, H. The optimality of Naive Bayes / H. Zhang // *Proc. FLAIRS*. – 2004. – № 1, V. 2. – P. 1–6.
40. Kohavi, R. A Study of Cross-Validation and Bootstrap for Accuracy Estimation and Model Selection / R. Kohavi // *Intl. Jnt. Conf. AI Montreal, Quebec, Canada*. – 1995. – V. 2 – P. 1137–1143.

Поступила 12.03.2020

CLASSIFICATION METHODS FOR THE ANALYSIS OF SEGMENTED OBJECTS ON FLUORESCENT IMAGES OF CANCER CELLS

Y. LISITSA, M. YATSKOU, V. SKAKUN, V. APANASOVICH

The methods of classification to analyze the multi-channel fluorescent images of breast cancer were studied. Each object is described by 13 features, where 11 features are geometry characteristics and 2 features corresponds to color characteristics. The methods were studied on the standardized and not-standardized data. The cross validation was used. The considered methods are linear and quadratic discriminant analysis, Naive Bayes, Support Vector Machines, Decision Trees, Random Forest, Neural network models. The most sufficient result were received for the Random Forest methods, where the accuracy of the classification is 0,97, when all features are used. If only color features are exploited, the accuracy is 0,96, and finally it is 0,92 for form features. The same results received the linear discriminant analysis, where the accuracy based on all features is 0,97, the accuracy received by color features is 0,96. Which is the same as for random forest classification. However for form features it is only 0,90. The most insufficient results are obtained for Multi-layer Perceptron.

Keywords: *machine learning, classification methods, cross-validation, discriminant analysis, Bayesian classifier, neural networks.*

УДК 621.391.82

**МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ЗАЩИЩЕННОСТИ ВИДЕОИНФОРМАЦИИ
ШИМ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ СРЕДСТВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ**

*д-р техн. наук, проф. В.К. ЖЕЛЕЗНЯК, С.В. ХАРЧЕНКО
(Полоцкий государственный университет)*

Разработана методика оценки защищенности видеоинформации ШИМ-преобразователя средств вычислительной техники (СВТ). Разработана экспериментальная модель исследования каналов утечки видеоинформации ШИМ-преобразователя СВТ. Принятие решения о защищенности основано на сравнении нормативного значения отношения мощности сигнала к мощности шума полученного результата с тестовым информационным сигналом. Методика позволяет получить результаты оценки защищенности ШИМ-преобразователя с высокой избирательностью, исключая влияющие факторы от других источников информации СВТ. Методика устанавливает требования по защите каналов утечки видеоинформации с использованием модели исследования ШИМ-преобразователя СВТ.

Ключевые слова: защита информации, широтно-импульсная модуляция, каналы утечки информации, побочные электромагнитные излучения и наводки.

Защита информации от утечки по техническим каналам сформировалась как составная часть противодействия мониторингу, в большей степени техническим компонентам. Очевидно, что основные требования к противодействию мониторингу (скрытность, маскировка, дезинформация, своевременность, непрерывность, правдоподобность) присущи мероприятиям по защите информации. Практически все научные исследования и разработки, а также меры по противодействию мониторингу учитывали вопросы защиты информации, включали это направление либо как основной элемент, либо как одну из важных частей исследований и разработок. Естественно, что научно-технические достижения, полученные в области противодействия техническим видам мониторинга, использовались и используются для целей защиты информации [1].

При выявлении технических каналов утечки информации, средства вычислительной техники рассматривают как систему, включающую:

- основное (стационарное) оборудование;
- оконечные устройства;
- соединительные линии;
- систему заземления;
- вспомогательные технические средства и системы, которые находятся в одном помещении с основными техническими средствами;
- технические средства открытой телефонной, громкоговорящей связи;
- системы охранной и пожарной сигнализации;
- электробытовые приборы и т.д. [2].

Наибольший интерес представляют вспомогательные технические средства и системы, имеющие выход за пределы контролируемой зоны, посторонние провода и кабели, к ним не относящиеся, но проходящие через помещение, где установлены основные и вспомогательные технические средства, металлические трубы систем отопления, водоснабжения и другие токопроводящие металлоконструкции.

В зависимости от физической природы возникновения информационных сигналов, среды их распространения и способов перехвата технические каналы утечки информации можно разделить на электромагнитные и электрические.

Электромагнитные каналы утечки информации. К электромагнитным относятся каналы утечки информации, возникающие за счет побочных электромагнитных излучений различного вида:

- излучений элементов СВТ (носителем информации является электрический ток, сила, напряжение, частота или фаза которого изменяется по закону информационного сигнала);
- излучений на частотах работы высокочастотных генераторов СВТ (устройства – задающие генераторы, генераторы тактовой частоты, генераторы стирания и подмагничивания магнитофонов, гетеродины радиоприемных и телевизионных устройств, генераторы измерительных приборов и т.д.);
- излучений на частотах самовозбуждения усилителей низкой частоты СВТ (самовозбуждение возможно за счет случайных преобразований отрицательных обратных связей в паразитные положительные, что приводит к переводу усилителя из режима усиления в режим автогенерации сигналов. Самовозбуждение наблюдается при переводе усилителя низкой частоты в режим перегрузки) [2].

Электрические каналы утечки информации. Электрические каналы утечки информации возникают за счет:

- наводок электромагнитных излучений СВТ на вспомогательные технические средства и системы и их соединительные линии, выходящие за пределы контролируемой зоны;
- просачивания электромагнитных сигналов в цепи электропитания (возможны при наличии магнитной связи между выходным трансформатором усилителя и трансформатором электропитания, что обуславливает изменение потребляемого тока по закону изменения информационного сигнала);
- просачивания информационных сигналов в цепи заземления (образуется за счет гальванической связи с землей различных проводников, выходящих за пределы контролируемой зоны).

Побочные электромагнитные излучения и наводки (ПЭМИН) – это вид электромагнитных волн, возникающих в результате работы электрических приборов, в частности, протекания электрического тока по проводникам. Так как электромагнитные излучения есть возмущения электромагнитного поля, то при передаче информации через локальную сеть или на монитор посредством кабелей возникают электромагнитные излучения, которые при попадании на проводник (антенну считывающего устройства) порождают в нем ток, схожий с оригиналом. После дискретизации считанного сигнала можно восстановить данные, передаваемые через проводник, что может привести к утечке информации. Самым простым примером является устройство перехвата или радиоприемник, установленный на нужную частоту, с помощью которого можно перехватить информацию. Однако эти излучения имеют свойство затухать при удалении от источника излучения и маскироваться электромагнитным фоном. Опасность данного канала утечки информации заключается в том, что могут существовать условия для считывания побочных электромагнитных излучений с достаточным соотношением сигнал/шум. Однако сигнал может не только напрямую излучаться различными проводниками, по которым непосредственно передается информация, электромагнитные излучения наводятся на различные электропроводные материалы. Канал утечки информации ПЭМИН является пассивным, если не содержит излучатели. Это указывает на то, что обнаружить утечку через такой канал информации довольно сложно.

Помехи можно разделить на две категории – узкополосные и широкополосные. В узкополосной помехе (например, гармонической) мощность сконцентрирована в узкой полосе частот. На практике в подавляющем большинстве случаев помеха имеет явно выраженный широкополосный, импульсный характер. Чем короче импульс (или длительность скачка напряжения) по сравнению с периодом его повторения, тем, в соответствии с Фурье-распределением, более широкополосная помеха и тем большее количество гармоник может излучаться.

В современных радиотехнических устройствах используются импульсы с очень острыми фронтами, что еще в большей степени увеличивает потенциальное количество существующих гармоник от таких источников помех. В любом случае импульсная последовательность возбуждает сильное переменное магнитное поле, легко проникающее в другие цепи, особенно на высоких частотах.

Широтно-импульсная модуляция (ШИМ) – это способ рационального управления подачей мощности к нагрузке. Управление заключается в изменении длительности импульсов при постоянной частоте их следования. Широтно-импульсная модуляция бывает различных видов.

Основной причиной применения ШИМ является стремление к повышению КПД при построении вторичных источников питания электронной аппаратуры.

Целью данной статьи является разработка и обоснование методики оценки защищенности видеoinформации СВТ, питаемого ШИМ-преобразователем.

Для реализации поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Разработать экспериментальную модель для исследования каналов утечки ШИМ-преобразователя СВТ.
2. Предложить тестовые сигналы и критерий оценки защищенности видеoinформации ШИМ-преобразователя СВТ.
3. Исследовать и обосновать алгоритм разработанной методики оценки защищенности ШИМ-преобразователя СВТ.

Особенности возникновения и распространения электромагнитной помехи

Поля ближней, дальней и промежуточной зон. Как известно из теории электромагнитных волн, электрическая и магнитная составляющие переменного во времени поля, связанные соответственно с напряжением и током, существуют одновременно в любой простейшей цепи переменного тока. Одна из составляющих поля, однако, может быть намного больше другой.

Характеристики поля в сильной степени зависят от расстояния до воспринимающего устройства, от параметров излучателя, параметров среды распространения и других факторов.

Как правило, расстояние до излучателя оценивают в относительных единицах R , связанных с длиной волны излучаемой помехи:

$$R = \lambda / 2\pi .$$

В соответствии с этим пространство вокруг источника делится на три зоны:

- ближнюю (поле индукции), в которой $R < 1$;
- дальнюю (поле плоской волны), в которой $R > 2$;
- промежуточную, когда $1 < R < 2$.

В зависимости от параметров источника помех ближняя зона может представлять собой или преимущественно поле магнитной индукции H , когда в источнике протекает значительный ток при относительно малых напряжениях, или преимущественно поле электрической индукции E , когда в источнике протекают малые токи при больших напряжениях. При этом в ближней зоне E и H находятся в фазе и сдвинуты в пространстве на 90 градусов.

По отношению к сопротивлению свободного пространства $Z_в$ поле E – высокоимпедансное, а поле H – низкоимпедансное.

Для высокоимпедансного поля (в ближней зоне):

- составляющая E убывает с расстоянием в кубе;
- составляющая H убывает с расстоянием в квадрате.

Для низкоимпедансного поля (в ближней зоне):

- составляющая H убывает с расстоянием в кубе;
- составляющая E убывает с расстоянием в квадрате.

При этом предполагается, что размеры излучателя во много раз меньше длины волны. В промежуточной зоне все составляющие поля убывают с расстоянием в квадрате, а в дальней зоне все составляющие поля убывают с расстоянием линейно.

Особенности учета электрических помех. Электрическая связь между цепями возникает из-за наличия емкостных паразитных связей между этими цепями. Для уменьшения наведенного паразитного напряжения следует уменьшать емкость связи и снижать сопротивление нагрузки в цепи наведенного напряжения по переменному току.

Для уменьшения паразитных связей используют экраны. Для того чтобы экран выполнял свои функции на высокой частоте, комплексное сопротивление самого экрана или заземляющего проводника должно быть меньше сопротивления емкости между экраном и источником паразитного излучения. Соответственно, экран должен иметь достаточно качественный контакт с корпусом в рабочем диапазоне частот.

Защита магнитных полей. Магнитные поля возникают вокруг токоведущих проводников, высокочастотных катушек индуктивности, дросселей и трансформаторов. Передача магнитной энергии происходит посредством взаимоиндукции, существующей между цепями. Как известно, ток, протекающий по проводнику одной цепи, вызывает магнитный поток, который наводит напряжение в другой цепи.

Экранирование аппаратуры от воздействия магнитных полей – дорогая и на низких частотах не всегда эффективная мера. На более высоких частотах современные экранирующие материалы обеспечивают более чем достаточное для большинства практических случаев затухание магнитных полей. Возникающие здесь проблемы связаны в основном с прохождением паразитных колебаний через неоднородности экранов (отверстия, щели и т.д.) и межмонтажными наводками.

Наиболее часто встречающимися источниками магнитного поля являются проводники, по которым протекают токи высокой частоты.

Защита от электромагнитного поля. Защита от электромагнитного поля – это защита от электромагнитных полей в дальней зоне. Сопротивление электромагнитной волны для дальней зоны одинаково для всех волн и равно сопротивлению свободного пространства. Напряженность поля с расстоянием уменьшается линейно. Основным способом защиты от электромагнитных помех в этой зоне – экранирование и уменьшение мощности помех в самом источнике.

Обычно, если экран хорошо выполняет возложенную на него задачу в ближних полях, то экранирование оказывается достаточным и для полей дальней зоны.

Разработка экспериментальной модели для исследования каналов утечки видеoinформации ШИМ-преобразователя питания. Блок-схема разработанной экспериментальной модели для исследования каналов утечки информации изображена на рисунке 1.

Экспериментальная модель состоит из следующих компонентов:

- ШИМ-преобразователь питания. В качестве объекта испытаний используется преобразователь питания видеомонитора, преобразующий переменный ток сети напряжением 220 В в постоянный ток напряжением 12 В;
- монитор LG 786LS (служит нагрузкой преобразователя питания);
- ПЭВМ (источник видеoinформации, передаваемой на видеомонитор посредством кабеля интерфейса VGA);
- анализатор спектра;
- эквивалент сети.

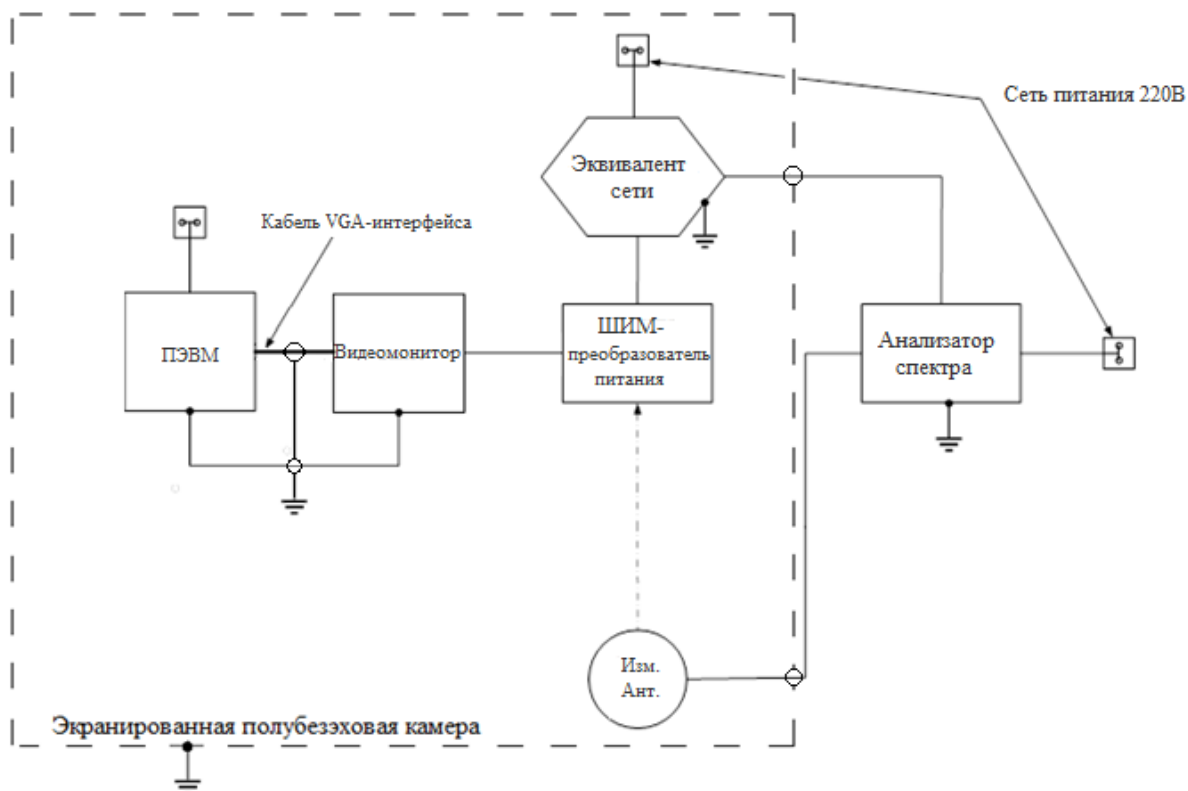


Рисунок 1. – Блок-схема экспериментальной модели для исследования каналов утечки видеoinформации ШИМ-преобразователя питания СВТ

Для увеличения достоверности результатов применялись пассивные методы снижения электромагнитных излучений: экранирование и заземление видеомонитора, ПЭВМ, соединительных линий. Измерительное оборудование, а также экранированная полубезэховая камера имеют соответствующие свидетельства о калибровке и аттестат. Измерения проводились в соответствии с ГОСТ Р 51320-99, что повышает достоверность оценки параметров информативных каналов утечки. Модель учитывает требования стандартов, вследствие чего снижается влияние промышленных помех высокого уровня.

Тестовые сигналы и критерий оценки защищенности видеoinформации ШИМ-преобразователя СВТ. В методике предложен тестовый информационный сигнал, параметры которого соответствуют однополярной меандровой последовательности, соответствующей параметрам последовательности элементарных посылок видеосигнала. В этом режиме длительности соответствующих импульсов и пауз между ними равны $T_u / \tau_u = 2$.

В зависимости от установленного видеоразрешения число строк в кадре и число пикселей в строке есть стандартные числа. Методика предусматривает использование видеомониторов с различной разрешающей способностью, которая влияет на значение тактовой частоты тестового измерительного сигнала.

Используемый в исследовании видеомонитор работает с разрешающей способностью $1024 \times 768 \times 60$ Гц. Это значит, что в одной строке формируется 512 «черных» и 512 «белых» пикселей, таких строк в кадре 768 при 60 кадрах в секунду.

Из вышеприведенного следует, что формируется сигнал в виде пакета из 512 импульсов, затем имеют место некая пауза на обратный ход в начало строки и новая строка. И так 768 строк. После этого следует более длительная пауза на обратный ход в начало следующего кадра. И так 60 раз в секунду. Из этого рассчитаем тактовую частоту тестового сигнала. Проходят 512 импульсов в 762 строках с обновлением 60 Гц; учитывая частоту обратного хода, получаем $512762 \cdot 60 \cdot 1,37 \approx 32,4$ МГц. Таким образом, была вычислена тактовая частота информационного измерительного тестового сигнала.

На рисунке 2 схематически представлен спектральный состав тестового измерительного сигнала, из которого следует наличие информативных гармоник, соответствующих меандровому сигналу с представленными параметрами.

Критерием оценки защищенности будем считать отношение напряженности гармонических составляющих тестового измерительного сигнала к напряженности опорного сигнала, в качестве которого используется сигнал «белое поле».

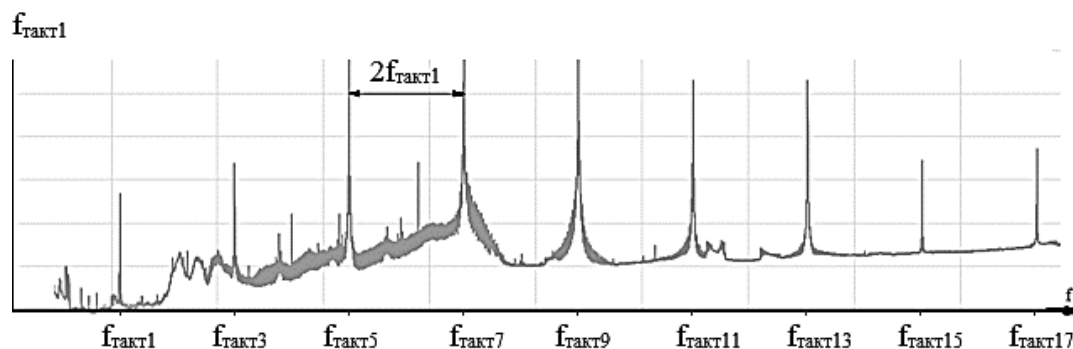


Рисунок 2. – График спектральной плотности тестового сигнала

Алгоритм оценки защищенности видеoinформации ШИМ-преобразователя:

- экспериментальная модель приводится в рабочий режим;
- на ПЭВМ формируется опорный сигнал «белое поле», который посредством VGA интерфейса подается на видеомонитор;
- при помощи измерительного оборудования производится замер фоновой обстановки;
- на ПЭВМ формируется информационный сигнал «точка через точку», который посредством VGA интерфейса подается на видеомонитор;
- производится повторный замер фоновой обстановки;
- при помощи анализатора спектра оба замера сравниваются, и производится поиск информационного сигнала.

Преимущественно поиск производится на частоте 32,4 МГц и ее нечетных гармониках. Чтобы убедиться в информативности найденного сигнала, достаточно, настроившись на его частоту, изменить исходный тест на ПЭВМ – вместо сигнала «точка через точку» установить зеленое, красное либо синее поле. В этом случае найденный сигнал должен изменять форму импульсов в зависимости от исходного сигнала, сохраняя параметры несущей. Если указанные условия выполняются, то считаем найденный сигнал информационным.

Исследование разработанной экспериментальной модели на наличие каналов утечки видеoinформации по сети питания. Измерения производились при подключении ШИМ-преобразователя питания через эквивалент сети. Поиск информационных сигналов производился в разных полосах пропускания приемника и в диапазоне частот 0,15–1000 МГц. Для наглядности в статье представлены данные в диапазоне 30–500 МГц, так как информационных сигналов на более высоких частотах обнаружить не удалось. Необходимо учесть, что из-за неэкранированного источника питания, соединительных кабелей и отсутствия сетевого фильтра в сеть питания утекает большое количество посторонних помех. Измеренные спектры гармоник информационного сигнала показаны на рисунке 3. Найденные информационные сигналы представлены в таблице 1.

Таблица 1

№ гармоники информационного сигнала	Частота, МГц	$E_{\text{инф}}$, дБ мкВ/м
5	162,01	22,51
7	226,81	7,29
9	291,61	5,63
11	356,41	6,38
13	421,21	5,33

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что утечка информации в сеть питания может происходить по следующим причинам:

- наводки ПЭМИН на неэкранированный кабель, а именно кабель сети питания и кабель, соединяющий ШИМ-преобразователь питания и монитор;
- плохое исполнение сетевого фильтра в ШИМ-преобразователе питания.

Исследование разработанной экспериментальной модели на наличие каналов утечки видеoinформации в эфир. Поиск информационных сигналов производился в горизонтальной и вертикальной поляризациях измерительной антенны в диапазоне 30–1000 МГц.

Измеренные спектры гармоник информационного сигнала показаны на рисунке 4.

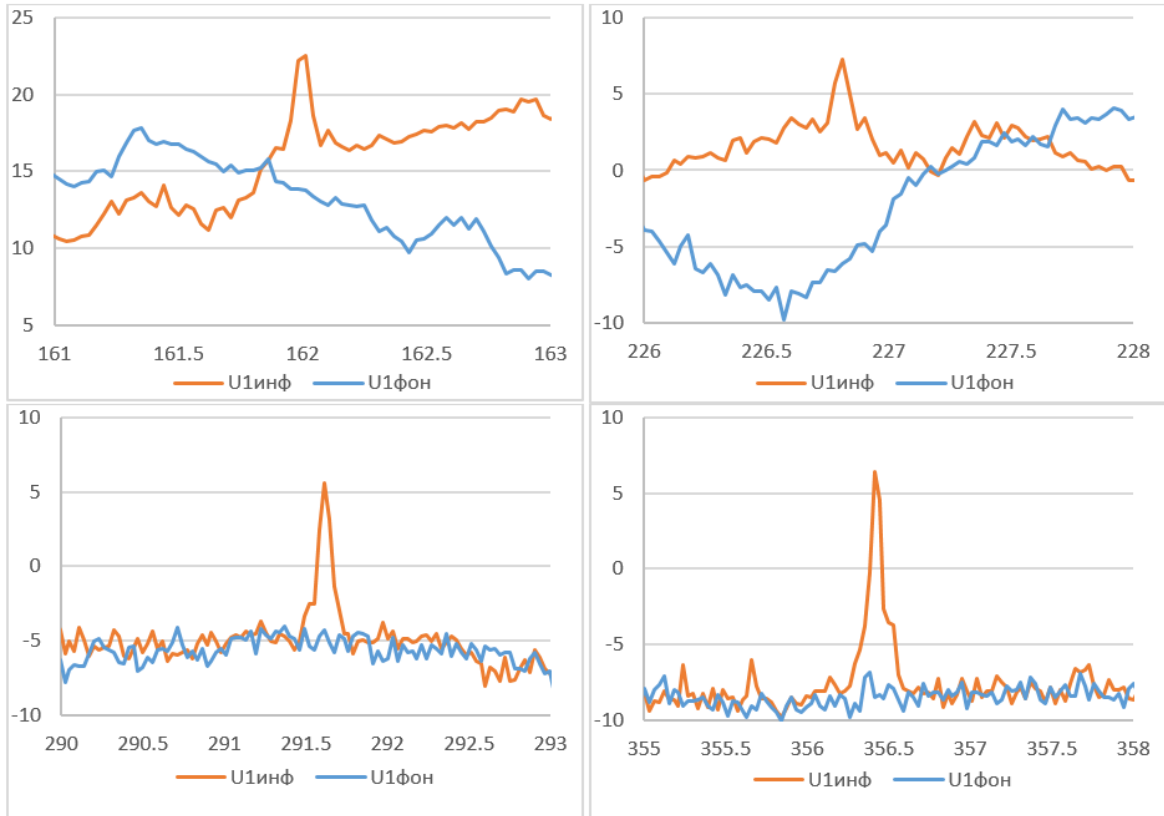


Рисунок 3. – Спектры 5-й, 7-й, 9-й и 11-й гармоник

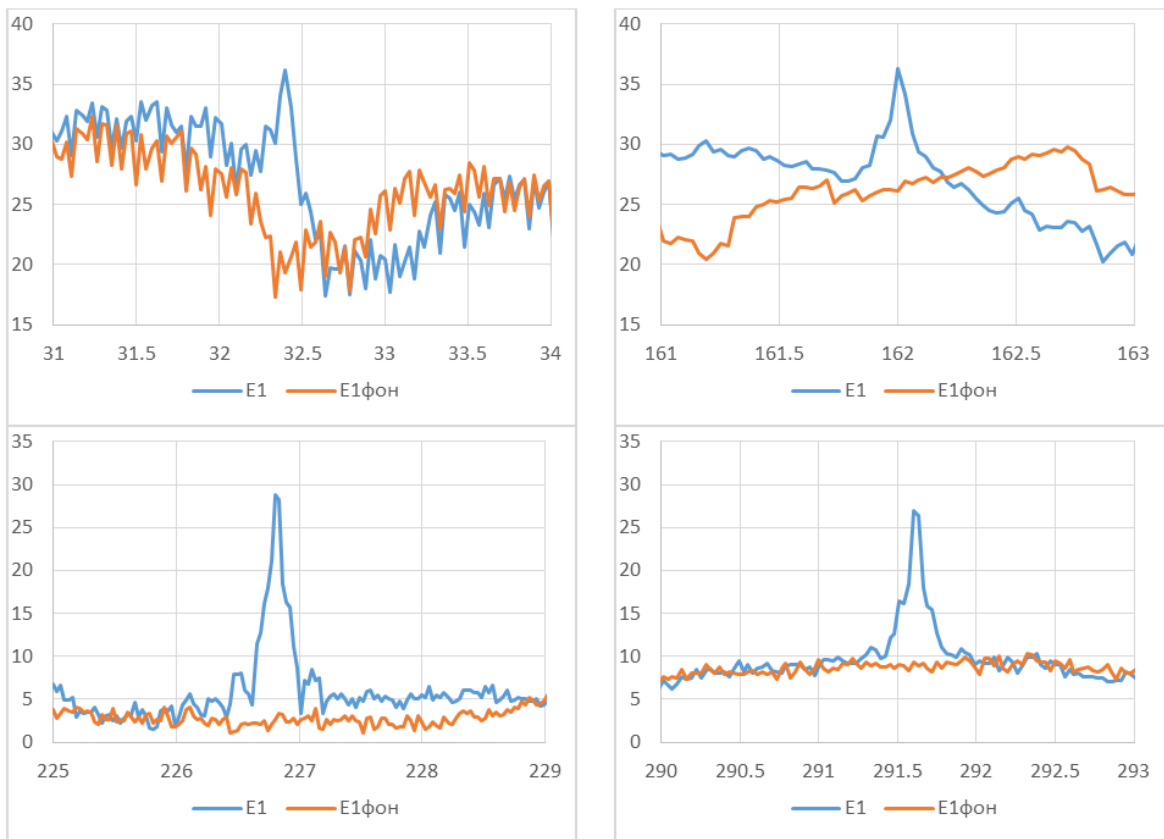


Рисунок 4. – Спектры 1-й, 5-й, 7-й и 9-ой гармоник

В результате измерений при помощи антенны СВЛ экспериментальным путем были найдены информационные сигналы, их частоты и уровни напряженности (таблица 2).

Таблица 2

№ гармоники информационного сигнала	Частота, МГц	$E_{инф}$, дБ мкВ/м
1	32,4	36,2
5	162,1	36,3
7	226,8	28,2
9	291,6	26,4
11	356,4	26,4
15	486,0	24,9
17	550,8	26,8
19	615,6	23,6

Из полученных результатов можно сделать вывод, что утечка информации в эфир может происходить из-за отсутствия экранирования ШИМ-преобразователя питания, а также соединительных кабелей.

Необходимо учесть, что из-за неэкранированного источника питания и неэкранированных соединительных кабелей в эфир утекает большое количество промышленных помех, которые могут плохо сказываться на работу другого оборудования.

Возможные пассивные методы подавления промышленных помех:

1. *Фильтрация.* Этот метод является основным средством ослабления кондуктивных помех, создаваемых в цепях питания и коммутации постоянного и переменного токов аппаратуры. Ослабление помех с помощью фильтрации достигается:

- шунтированием их на землю;
- отражением их обратно к источнику;
- рассеиванием (превращением их энергии в тепловую).

2. *Заземление.* Наряду с известными функциями защиты и безопасности заземляющая система должна:

- представлять собой цепь опорного источника напряжения;
- обеспечивать сигнальные и силовые цепи возврата;
- препятствовать появлению вблизи антенн высокочастотных потенциалов и свести к минимуму нежелательные паразитные связи между сигналами.

Протекание токов в системе заземления приводит к разности потенциалов, которая для обеспечения нормальной работы оборудования должна быть невелика по сравнению с амплитудой сигнала. Поэтому при проектировании системы заземления следует поддерживать импеданс заземления на как можно более низком уровне.

3. *Экранирование.* В большинстве практических случаев для защиты от помех и наводок достаточно эффективности экранирования в 30–60 дБ и лишь в некоторых ответственных местах (кухонь передатчика, источника питания, экран интерфейсного кабеля и др.) требуется величина затухания на уровне 50–100 дБ. На частотах выше 100 кГц однослойные экраны обеспечивают эффективность экранирования 40–70 дБ, а двухслойные – до 120 дБ. Отверстия и зазоры ограничивают ослабление электрических и высокочастотных полей, в то время как ослабление низкочастотных магнитных полей определяется материалом экрана и его толщиной. При этом, естественно, следует учитывать, что материал не должен насыщаться.

Заключение. Проанализированы возможные каналы утечки информации ШИМ-преобразователя питания СВТ. Разработана методика оценки защищенности видеoinформации ШИМ-преобразователя СВТ.

На основании разработанной методики проведена оценка защищенности видеoinформации ШИМ-преобразователя СВТ; исследования каналов утечки видеoinформации производились в двух средах распространения:

- излучение информационного сигнала в цепь питания в виде кондуктивных помех;
- излучение информационного сигнала в эфир в виде электромагнитных излучений.

В результате проведения измерений были обнаружены излучения информационного сигнала «точка через точку» превышали уровень излучения опорного (фоновое) сигнала «белое поле» в среднем на ~10 дБ мкВ. В эфире уровни излучения информационного сигнала «точка через точку» превышали уровни опорного (фоновое) сигнала «белое поле» в среднем на ~20 дБ мкВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Железняк, В.К. Защита информации от утечки по техническим каналам : учеб. пособие / В.К. Железняк. – СПб., ГУАП. – 2006. – 188 с.

2. Хорев, А.А. Защита информации от утечки по техническим каналам : учеб. пособие / А.А. Хорев. – М. : Гостехкомиссия РФ, 1998. – Ч. 1 : Технические каналы утечки информации. – 320 с.
3. Сергиенко, А.Б. Цифровая обработка сигналов : учеб. для вузов / А.Б. Сергиенко. – СПб. : Питер, 2002. – 608 с.
4. Кашкаров, А.П. Импульсные источники питания: схемотехника и ремонт / А.П. Кашкаров. – М. : ДМК Пресс, 2012. – 184 с.
5. Уайт, Д. Электромагнитная совместимость и непреднамеренные помехи : в 3-х вып. / Д. Уайт. – М. : Советское радио, 1977. – 352 с.
6. Князев, А.Д. Элементы теории и практики обеспечения электромагнитной совместимости радиоэлектронных средств / А.Д. Князев. – М. : Радио и связь, 1984. – 336 с.
7. Полонский, Н.В. Конструирование электромагнитных экранов для РЭА / Н.В. Полонский. – М. : Советское радио, 1979. – 216 с.
8. Вайнштейн, Л.А. Электромагнитные волны / Л.А. Вайнштейн. – М. : Радио и связь, 1988. – 440 с.

Поступила 11.03.2020

METHODOLOGY FOR ESTIMATING VIDEO INFORMATION SECURITY OF PWM CONVERTER OF COMPUTER EQUIPMENT

V. ZHELEZNYAK, S. HARCHENKO

Designed by methodology for assessing the security of video information of a PWM converter of computer equipment. A technique for assessing the security of video information of a PWM converter of computer equipment is considered. An experimental model for the study of leakage channels of video information of a PWM converter of computer technology has been developed. The adoption of a security permission is based on a comparison of the normative value of the ratio of signal power to noise power of the obtained result using a test information signal. The technique allows to obtain the results of assessing the security of a PWM converter with high selectivity, excluding influencing factors from other information sources of computer equipment. The methodology establishes requirements for the protection of video leakage channels using a research model of a PWM converter of computer equipment.

Keywords: *information protection, pulse width modulation, information leakage channels, Transient Electromagnetic Pulse Emanation Standard.*

УДК 004.891.2

**ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА
ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ДАННЫХ В СРЕДЕ ПРИЛОЖЕНИЯ RStudio**

*канд. техн. наук, доц. А.Ф. ОСЬКИН
(Полоцкий государственный университет);
Д.А. ОСЬКИН*

(Белорусский государственный экономический университет, Минск)

Описывается разработка программного комплекса для интеллектуального анализа образовательных данных. Обосновывается выбор языка программирования и среды разработки. Описывается структура создаваемого информационно-аналитического комплекса. Приводятся результаты работы одного из модулей комплекса.

Ключевые слова: *программный комплекс, интеллектуальный анализ образовательных данных, информационно-аналитический комплекс, язык программирования, хранилище данных, OLAP.*

Введение. В течение длительного времени в информационных системах высших учебных заведений накапливались значительные объемы информации, содержащей сведения об успеваемости студентов, их личных данных, увлечениях, участии в жизни университета и т.д. Кроме этого, университетские базы данных хранят информацию о преподавателях, учебных программах, учебных планах, компьютерных тестах, экзаменационных вопросах и задачах, а также другие разнообразные методические и научно-педагогические материалы. До последнего времени эти горы информации оставались невостребованными и по-настоящему неиспользованными. Это положение стало меняться с появлением нового научного направления, получившего название «Интеллектуальный анализ образовательных данных» (Educational Data Mining, EDM) [1].

Как пишут Н.Н. Горлушкина, И.Ю. Коцюба, М.В. Хлопотов: «наиболее характерными из задач интеллектуального анализа образовательных данных являются следующие:

- мониторинг сформированности профессиональных компетенций;
- проектирование учебных планов, индивидуальных учебных планов, программ учебных дисциплин;
- анализ и прогнозирование повышения конкурентоспособности студентов на рынке труда;
- прогнозирование и проектирование тех качеств выпускника, которые предполагается получить «на выходе» образовательного процесса;
- диагностика уровня качества образования для своевременной компенсации нежелательных отклонений;
- оценка реального качества образования на его соответствие стандартам.

Основные цели EDM:

- улучшить образовательный процесс путем поддержки принятия рациональных решений;
- направить студентов по целесообразной образовательной траектории;
- дать рекомендации студентам и преподавателям по корректировке образовательного процесса;
- вникнуть в самую суть учебного процесса – выявить неявные взаимосвязи данных и, как следствие, понять, каким образом человек усваивает информацию, приобретает навыки и умения» [2].

Таким образом, в настоящее время разработка программного комплекса для интеллектуального анализа образовательных данных представляется нам весьма актуальной и важной задачей.

Выбор среды разработки. Известны по крайней мере три языка программирования, которые могут быть эффективно использованы для создания задуманного нами программного комплекса. Это C/C++, Python и R. Мы оценили популярность каждого из этих языков и их пригодность для решения поставленной задачи, анализируя статистику запросов для соответствующих поисковых образов в поисковой системе Яндекс. Частью этой системы является ресурс <https://wordstat.yandex.by>, позволяющий получить общее число запросов по заданному поисковому образу за текущий месяц. Выяснилось, что с запросом «анализ данных в R» в течение последнего месяца к системе обращались 546 раз (рисунок 1), с аналогичными запросами по языку Python – 372 раза, C/C++ – 59 раз.

Таким образом, на основании этого мини-исследования можно сделать вывод, что на текущий момент наиболее популярным языком для построения программного комплекса интеллектуального анализа образовательных данных является язык R. В принципе, этот вывод не является неожиданным, так как

R – специализированный язык, ориентированный прежде всего на статистический анализ данных. Кроме того, несомненными достоинствами этого языка являются его следующие качества:

- бесплатность. R – это свободное программное обеспечение, его код открыт;
- расширяемость. Язык имеет модульную структуру и состоит из набора пакетов. При этом вновь создаваемые пакеты легко интегрируются в единую программную среду;
- кроссплатформенность и переносимость. Интерпретаторы языка R разработаны для всех популярных операционных систем и перенос кода из одной системы в другую не представляет никаких трудностей;
- великолепная графика, позволяющая выполнять визуальный анализ данных и создавать прекрасно иллюстрированные отчеты по выполненным исследованиям;
- огромное количество встроенных функций для проведения анализа данных;
- встроенные статистические тесты и алгоритмы.

Учитывая сказанное выше, мы остановили свой выбор на языке программирования R, используя в качестве среды разработки приложение RStudio.

Что искали со словом «анализ данных в г» — 546 показов в месяц

Статистика по словам	Показов в месяц [?]
анализ данных +в г	273
язык г анализ данных	100
г анализ +и визуализация данных	92
анализ данных +с помощью г	57
г studio анализ данных	18
анализ данных +в г stepic ответы	13
г +или python +для анализа данных	9
разведочный анализ данных г	8
search rsl ru анализ данных г	6
анализ панельных данных +в г	6

Рисунок 1. – Число запросов в Яндекс для поискового образа «анализ данных в R»

Структура программного комплекса. Анализ образовательных данных, проводимый с использованием технологий EDM, состоит из четырех этапов [3].

1. *Построение хранилища данных.*

Основой аналитической системы является хранилище данных. Оно должно актуализироваться с определенной периодичностью, пополняясь данными из баз, результатами контрольных мероприятий, итогами сессий и т.д. Данные проверяются, очищаются, проходят предварительную обработку, приводятся к единому формату и загружаются в хранилище данных.

2. *Построение многомерного OLAP-куба.*

Многомерный OLAP-куб строится на основе хранилища данных. С его помощью становится возможным осуществлять в режиме реального времени анализ данных и формировать отчеты в различных аспектах с произвольной глубиной детализации.

3. *Формирование системы ключевых показателей.*

На основе многомерных OLAP-кубов может быть сформирована система ключевых показателей, позволяющая проводить мониторинг и оценку бизнес-процессов и информировать администраторов об имеющих место фактах отклонения.

4. *EDM – интеллектуальный анализ образовательных данных.*

На основе данных, загруженных в хранилище, могут быть построены модели интеллектуального анализа, позволяющие реализовать процедуры прогнозирования наиболее важных показателей учебной деятельности, а также выявить ее скрытые и неочевидные закономерности.

В соответствии с описанной выше структурой программный комплекс должен включать в себя следующие модули (рисунок 2).

1. *Модуль хранения данных.* Данный модуль представляет собой хранилище данных, дополненное инструментами для интеграции с различными внешними источниками, такими как данные, хранящиеся в БД «Деканат», таблицы Excel, данные произвольных форматов из сторонних информационных систем. Здесь же будет выполняться предварительная обработка данных, их очистка и приведение к единому формату.

2. *Модуль анализа данных.* Функционал этого модуля должен позволять формировать многоаспектные отчеты на базе OLAP-технологий. Предполагается, что будет также реализована возможность графического представления результатов анализа в виде столбиковых, круговых, кольцевых и других диаграмм.
3. *Модуль прогнозирования.* В этом модуле будут реализованы известные методы Data Mining, такие как классификация, кластеризация, ассоциация, прогнозирование, анализ отклонений.
4. *Модуль администрирования,* содержащий функции управления приложением.



Рисунок 2. – Структура информационно-аналитической системы

Реализация комплекса в IDE RStudio. Как уже указывалось выше, работы по созданию программного комплекса велись в интегрированной среде разработки (IDE) RStudio. Это бесплатное программное обеспечение, позволяющее выполнить весь цикл работ по проектированию, созданию, отладке, тестированию и эксплуатации программных продуктов, написанных на языке R.

После запуска RStudio, перед разработчиком открывается четыре окна (рисунок 3).

Окно «Редактор» представляет собой удобный редактор кода, имеющий ряд опций, существенно повышающих продуктивность работы. Это, в частности, автоматическое завершение кода, подсветка кода, возможность одновременного редактирования нескольких файлов, поиск и замена выделенных частей кода. Интересной особенностью редактора является возможность выделить часть кода, проанализировать его и автоматически преобразовать в функцию для последующего многократного использования.

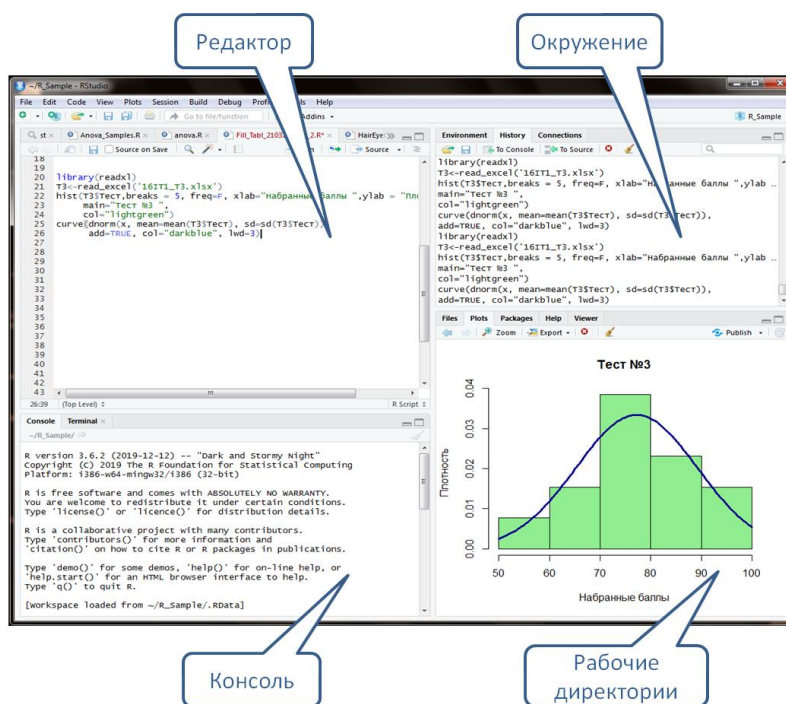


Рисунок 3. – Интегрированная среда разработки RStudio

Имеется также возможность исполнения кода непосредственно из редактора, без ручного копирования кода в консоль.

Кроме создания и редактирования кода в редакторе RStudio можно создавать и редактировать файлы документов, используя язык R Markdown, с последующим экспортом в форматы TeX или pdf. Эти файлы могут также содержать фрагменты исполняемого кода. Все это позволяет писать тезисы докладов, научные статьи, отчеты, другие документы, содержащие R-программы, прямо в редакторе, не тратя усилий на их последующее оформление.

Консоль RStudio представляет собой собственно среду для исполнения скриптов, написанных на языке R. Так же, как и в редакторе в консоли имеется опция автоматического завершения кода, что повышает продуктивность разработки и отладки программ.

Так как при работе с R постоянно возникает необходимость повторить выполненную ранее команду, в консоли Rstudio, как и в стандартной R-консоли, поддерживается функция навигации по ранее выполненным командам. Для этого используются клавиши со стрелками.

Окно «Окружение» содержит сведения о текущем состоянии рабочего окружения и позволяет просматривать векторы, матрицы, списки, датафреймы, доступные для использования в текущей сессии.

Кроме того, можно просматривать историю выполненных ранее программ, осуществлять поиск по истории и выполнять найденные команды.

Окно «Рабочие директории» позволяет просматривать списки файлов, созданных в процессе реализации проекта и манипулировать ими.

Таким образом, RStudio представляет собой гибкий и удобный инструмент, позволяющий вести разработку программного обеспечения с максимальной эффективностью.

По состоянию на начало марта 2020 года нами реализованы следующие пакеты, входящие в состав перечисленных выше модулей:

- пакет Load_IREN, предназначенный для извлечения, преобразования и загрузки данных из базы данных системы online-тестирования IREN [4] в хранилище разрабатываемого программного комплекса;
- пакет OLAP_Cube_Builder, строящий OLAP-куб на основе данных из хранилища;
- пакет Make_Report, ответственный за формирование отчетов;
- пакет Make_Visualization, предназначенный для визуализации результатов анализа.

На рисунках 4 и 5 показаны результаты работы пакета Make_Visualization. Это результаты прохождения тестов № 1 и № 3 по дисциплине «Методы и алгоритмы принятия решений» студентами одной из групп дневной формы обучения. Видно, что первый тест пройден гораздо хуже третьего. Это можно объяснить той методикой, которая использовалась нами при проведении тестирования знаний студентов. После изучения первой лекции студенты сдавали тест по материалам только этой лекции. После второй тест включал в себя вопросы как из первой, так и из второй лекций, после третьей – вопросы из первой, второй и третьей лекций и т.д. Таким образом, постоянное повторение вопросов способствовало лучшему усвоению материала и, как следствие, получению лучших результатов при тестировании. Все сказанное хорошо иллюстрируется гистограммами, приведенными на рисунках 4 и 5.

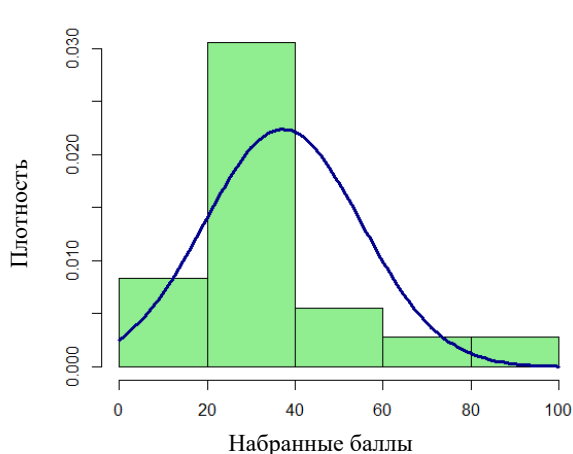


Рисунок 4. – Результаты теста № 1

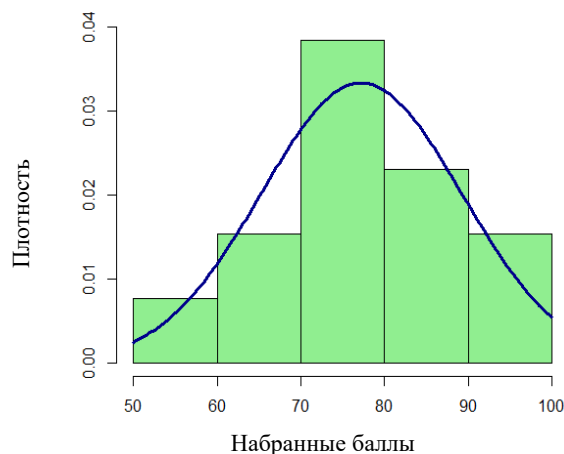


Рисунок 5. – Результаты теста № 3

Выводы:

1. Интеллектуальный анализ образовательных данных – перспективное и динамично развивающееся научное направление, результаты внедрения которого могут существенно изменить подходы к управлению учебным процессом.

2. Разработка программного обеспечения для интеллектуального анализа образовательных данных является важной и актуальной задачей.
3. Для быстрого построения систем интеллектуального анализа данных может быть весьма эффективно использован язык программирования R.
4. Для разработки, отладки и эксплуатации программ на R удобно использовать интегрированную среду разработки RStudio.

ЛИТЕРАТУРА

1. Romero, C. Data mining in education / C. Romero, S. Ventura // Wiley interdisciplinary reviews. Data mining and knowledge discovery. – 2013. – 3(1). – P. 12–27.
2. Горлушкина, Н.Н. Задачи и методы интеллектуального анализа образовательных данных для поддержки принятия решений / Н.Н. Горлушкина, И.Ю. Коцюба, М.В. Хлопотов // Образовательные технологии и общество. – 2015. – Т. 18, № 1. – С. 474.
3. KAI Development. IT решения для бизнеса и государства [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://kaidev.ru>. – Дата доступа: 14.03.2020.
4. Айрен. Программа тестирования знаний [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://irenproject.ru>. – Дата доступа: 14.03.2020.

Поступила 17.03.2020

**SOFTWARE PACKAGE FOR INTELLECTUAL ANALYSIS OF EDUCATIONAL DATA
IN THE ENVIRONMENT OF THE RSTUDIO APPLICATION**

A. OSKIN, D. OSKIN

Describes the development of a software package for the educational data mining. The choice of a programming language and development environment is substantiated. The structure of the created information-analytical complex is described. The results of one of the modules of the complex are presented.

Keywords: *software complex, educational data mining, information and analytical complex, programming language, data warehouse, OLAP.*

ФИЗИКА

УДК 621.371: 550.837.6

ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ НА КОМПОНЕНТЫ ПОВЕРХНОСТНОГО ИМПЕДАНСА СРЕДЫ НАД УГЛЕВОДОРОДАМИ

С.Н. АБРАМЕНКО, канд. техн. наук, доц. В.Ф. ЯНУШКЕВИЧ

(Полоцкий государственный университет);

д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. БОГУШ

(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск)

Приводится анализ взаимодействия электромагнитных волн в режиме радиоимпульсных сигналов со средой над углеводородными залежами. На основе квазигидродинамического подхода исследовано поведение амплитудных и фазовых компонентов поверхностного импеданса анизотропной среды над залежью при воздействии радиоимпульсных сигналов. Проведен анализ составляющих компонентов поверхностного импеданса среды над углеводородами для электромагнитных волн с правой и левой круговыми поляризациями в зависимости от диэлектрической проницаемости и удельной проводимости среды. Установлено, что по амплитудным и фазовым характеристикам поверхностного импеданса при вариации частоты радиоимпульса может осуществляться диагностика сред, что позволяет повысить производительность геологоразведочных работ и точность определения границ залежей углеводородов.

Ключевые слова: углеводородная залежь, поверхностный импеданс, радиоимпульсный сигнал.

Введение. Современные методы поиска углеводородных залежей (УВЗ) развиваются на основе тенденции активного применения электромагнитных методов (ЭММ) в поисковой геофизике. Их применение вызвано эффективностью, высоким уровнем достоверности, экологической чистотой по сравнению с методами грави-, сейсмо- и магниторазведки [1–3].

Актуальность настоящей работы обусловлена необходимостью решения задач, связанных с повышением производительности геологоразведочных работ, увеличением точности определения границ залежей углеводородов (нефти и газа), модернизацией имеющихся ЭММ георазведки и разработкой новых методов поиска, идентификации месторождений. Цель работы – определение механизмов взаимодействия сложных геофизических сред с электромагнитным излучением импульсных сигналов радиочастотного диапазона для повышения чувствительности и информативности методов поиска и выделения месторождений и скоплений, что расширяет возможности их использования в сложной геологической обстановке.

В настоящее время в процесс поиска углеводородов активно внедряются ЭММ и аппаратура для их реализации [4]. ЭММ позволяют определять не только контраст сопротивления пород, но и характеристики электромагнитных волн (ЭМВ): амплитуды различных составляющих, их фазовые компоненты, поляризацию и т.д. [5]. Взаимодействие ЭМВ с исследуемым объектом дает возможность получать значительно больше результатов от исследуемых сред на основе вариации параметров зондирующих сигналов в различных диапазонах частот. Решение данных задач базируется на анализе электрофизических и электрохимических процессов в средах над залежами углеводородов. Оптимизация параметров зондирующих сигналов осуществляется с учетом специфических характеристик УВЗ и существующих решений при изучении плазмы на основе квазигидродинамического подхода [6].

Результаты применения ЭММ для поиска УВЗ представлены во многих работах. В способе [7] апробируется радиоволновой метод поиска. Широко используются методы на основе электрорезонансного зондирования [8]. В работе [9] проведен анализ компонентов поверхностного импеданса среды над УВЗ с учетом влияния на верхний слой всех нижерасположенных слоев. Нефтегазовые резервуары выявляются на основе аномалии потенциалов поля [10]. В основу многих методов георазведки углеводородов может быть положено затухание радиоимпульсных сигналов в среде над залежью [11]. Возможно обнаружение месторождений нефти и газа на основе способа поиска УВЗ [12] по измерениям величины напряженности электрического поля отраженных радиоимпульсных сигналов на глубинах до 200 м. Разработаны методы поиска, оконтуривания и идентификации УВЗ на фоне различных видов подстилающей среды [13–15].

Взаимодействие радиоимпульсного сигнала и среды над УВЗ. Новизна исследований, приведенных в данной статье заключается в том, что полученные результаты способствуют выделению УВЗ по величине отличий компонентов поверхностного импеданса среды над углеводородами по сравнению с однородными средами.

Рассмотрим процесс взаимодействия ЭМВ с УВЗ в режиме радиоимпульсного сигнала вида

$$S(f) = \frac{U \cdot \tau_u}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0) \cdot \tau_u}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0) \cdot \tau_u}{2}} + \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0) \cdot \tau_u}{2}}{\frac{(\omega + \omega_0) \cdot \tau_u}{2}},$$

где $\frac{U \cdot \tau_u}{2} = 1$ – амплитуда;

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ – частота;

ω_0 – несущая частота;

τ_u – длительность радиоимпульса.

Среда распространения обладает параметрами $\epsilon_0, \mu_0, \sigma_0$, волна падает на безграничную поверхность с анизотропным импедансом. Процесс взаимодействия ЭМВ, возбуждаемой с помощью переносного передатчика, перемещаемого вдоль исследуемого профиля с локальным включением на трассе распространения радиоволн, можно представить в виде наклонного падения плоской волны с вертикальной поляризацией. Методика исследований заключается в определении поверхностного импеданса среды над УВЗ по формулам

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= -Z_0(\dot{Z}_{11}\dot{H}_x - \dot{Z}_{12}\dot{H}_y), \\ \dot{E}_y &= -Z_0(\dot{Z}_{21}\dot{H}_x - \dot{Z}_{22}\dot{H}_y), \\ \dot{Z}_{11} = \dot{Z}_{22} &= -\frac{1}{2j\sqrt{\dot{\epsilon}_R\dot{\epsilon}_L}}(\sqrt{\dot{\epsilon}_R} - \sqrt{\dot{\epsilon}_L}), \\ \dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} &= \frac{1}{2\sqrt{\dot{\epsilon}_R\dot{\epsilon}_L}}(\sqrt{\dot{\epsilon}_R} + \sqrt{\dot{\epsilon}_L}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $E_{x,y}, H_{x,y}$ – проекции падающей и отраженной волн на соответствующие координатные оси;

Z_0 – характеристическое сопротивление среды, окружающей анизотропную неоднородность;

\dot{Z}_{11} и \dot{Z}_{12} – компоненты поверхностного импеданса среды;

$\dot{\epsilon}_R = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 = \text{Re } \epsilon_R + j \text{Im } \epsilon_R$;

$\dot{\epsilon}_L = \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2 = \text{Re } \epsilon_L + j \text{Im } \epsilon_L$.

(2)

В выражениях (2) присутствуют элементы матрицы (3):

$$\dot{\tilde{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1 & -j\dot{\epsilon}_2 & 0 \\ j\dot{\epsilon}_2 & \dot{\epsilon}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_3 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Определение величин поверхностного импеданса для различных режимов облучения исследуемого профиля ЭМВ позволяет выделить границу УВЗ. Переход от изотропной среды к анизотропной сопровождается изменением свойств земной поверхности, что приводит к соответствующим изменениям компонентов поверхностного импеданса.

Компоненты поверхностного импеданса среды над УВЗ в выражениях (2) представим в виде

$$\dot{Z}_{11} = |\dot{Z}_{11}| \cdot \exp(j \cdot \phi_{z11}), \dot{Z}_{12} = |\dot{Z}_{12}| \cdot \exp(j \cdot \phi_{z12}), \quad (4)$$

где $|\dot{Z}_{11}|, |\dot{Z}_{12}|, \phi_{z11}, \phi_{z12}$ – соответственно модули и фазы составляющих поверхностного импеданса.

Результаты исследований. Проведен анализ выражений (4) для компонентов поверхностного импеданса среды над УВЗ на основании экспериментально полученных параметров среды над залежами углеводородов [1]: удельная электрическая проводимость $\sigma_r = (10^{-6} - 1)$ См/м; концентрация частиц $N_e = N_i = 10^{15} \text{ м}^{-3}$; частота столкновения частиц $\nu = 10 \cdot \pi \cdot 10^9$ рад / с. Количество гармоник спектра радиоимпульсного сигнала n выбрано равным 5. Диэлектрическая проницаемость среды исследовалась

в диапазоне от 1 до 25. Величина поверхностного импеданса среды над углеводородами определяется физико-химическими процессами в самой залежи и в околозалежном пространстве, составом кристаллического скелета и термодинамическими условиями залегания (давление и температура), приводящим к влиянию углеводородов на электрические свойства вмещающих пород над УВЗ. Абсолютные значения для компонентов поверхностного импеданса среды над УВЗ приведены на рисунках 1, 2.

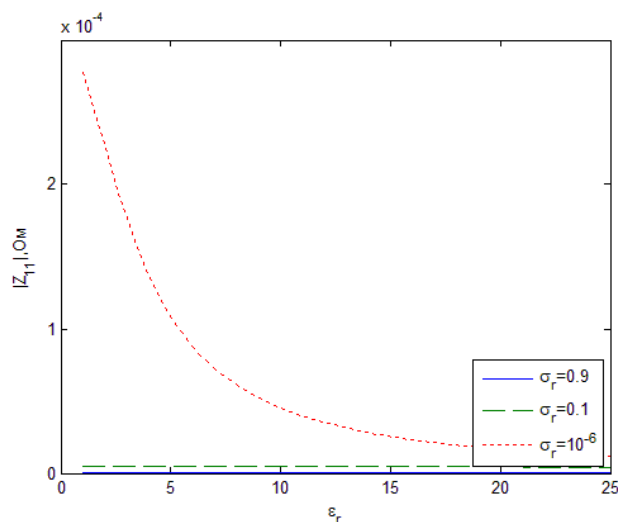


Рисунок 1. – Зависимости $|Z_{11}| = \psi(\varepsilon_r)$ при изменении удельной проводимости среды

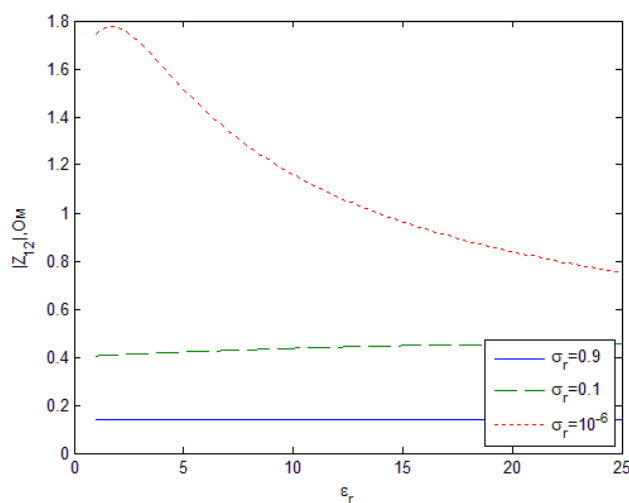


Рисунок 2. – Зависимости $|Z_{12}| = \psi(\varepsilon_r)$ при изменении удельной проводимости среды

Следует учесть, что величины $|Z_{11}|$ и $|Z_{12}|$ являются нормированными и для определения полных величин импеданса их нужно домножать на величину сопротивления окружающей среды $Z_0 = 377$ Ом. Составляющая $|Z_{11}|$ постоянна при больших значениях удельной проводимости среды, лежащих в диапазоне $\sigma_r = (0,1 - 0,9)$ См/м и при этом не зависит от вариации диэлектрической проницаемости пород. При уменьшении удельной проводимости среды до 10^{-6} См/м закономерности поведения комбинационных составляющих поверхностного импеданса среды над УВЗ могут быть рекомендованы для диагностики анизотропных сред, поскольку происходит резкое изменение данной фазовой компоненты, особенно при значениях диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon_r = (1 - 10)$. Дополнительно информацию при таких исследованиях дает анализ характеристик компоненты поверхностного импеданса $|Z_{12}|$. Прослеживается аналогичная функциональная зависимость данной составляющей как и для $|Z_{11}|$ за исключением численных значений. Влияние удельной проводимости среды проявляется более ощутимо и это приводит

к повышению информативности исследований. Дополнительно были проанализированы фазовые составляющие поверхностного импеданса среды над залежью (рисунок 3, 4).

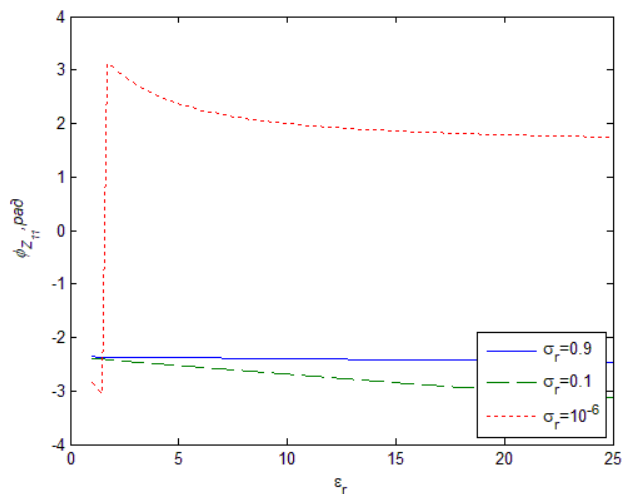


Рисунок 3. – Зависимости $\phi_{z_{11}} = \psi(\epsilon_r)$ при изменении удельной проводимости среды

Составляющая $\phi_{z_{11}}$ постоянна при больших значениях удельной проводимости среды, например для $\sigma_r = 0,9$ См/м и при этом не зависит от изменения диэлектрической проницаемости исследуемых профилей местности. При уменьшении удельной проводимости среды до 0,1 См/м наблюдается уменьшение данной комбинационной составляющей поверхностного импеданса среды над УВЗ при росте диэлектрической проницаемости среды ϵ_r . Выделяется экстремальное поведение составляющей $\phi_{z_{11}}$ для $\sigma_r = 10^{-6}$ См/м, когда происходит скачкообразное увеличение фазы от -3 рад до 3 рад для диэлектрической проницаемости $\epsilon_r = 2$. Следует отметить, что составляющая $\phi_{z_{11}}$ носит отрицательный характер, за исключением $\sigma_r = 10^{-6}$ См/м, когда появляется положительный характер поведения данной величины, что соответствует изменению характера проводимости среды. Составляющая $\phi_{z_{12}}$ также постоянна при больших значениях удельной проводимости среды, например для $\sigma_r = 0,9$ См/м. Уменьшение удельной проводимости среды приводит к вариации данной фазовой составляющей поверхностного импеданса среды над УВЗ в зависимости от изменения диэлектрической проницаемости исследуемых профилей местности. При уменьшении удельной проводимости среды до 10^{-6} См/м наблюдается наиболее контрастное уменьшение данной комбинационной составляющей поверхностного импеданса среды над УВЗ при росте диэлектрической проницаемости среды ϵ_r . В отличие от фазовой составляющей $\phi_{z_{11}}$ данная компонента всегда положительна в исследуемом диапазоне удельной проводимости среды.

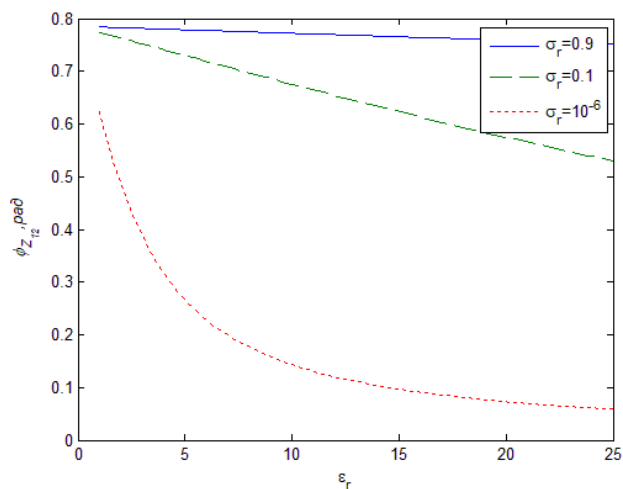


Рисунок 4. – Зависимости $\phi_{z_{12}} = \psi(\epsilon_r)$ при изменении удельной проводимости среды

Следует отметить, что зависимости, представленные на рисунках 1–4, соответствуют частоте импульса $F_u = \frac{1}{\tau_u} = 10^6$ Гц. Было проанализировано ее влияние на компоненты поверхностного импеданса среды над УВЗ (рисунок 5, 6). Применяя частоту импульса 10^7 Гц, установлено ее воздействие на составляющие сопротивления подстилающей поверхности. При высоких значениях удельной проводимости среды ($\sigma_r = 0,9$ См/м) абсолютная величина составляющей $|Z_{11}|$ практически равна нулю во всем исследуемом диапазоне диэлектрической проницаемости. Поверхностный импеданс среды над УВЗ в таком режиме соответствует идеальному проводнику. Для $\sigma_r = 0,1$ См/м в отличие от предыдущей частоты импульса появляется увеличение данной компоненты в диапазоне $\epsilon_r = (1-10)$. Наиболее контрастное изменение (уменьшение) происходит для $\epsilon_r = (1-5)$. Абсолютная величина составляющей $|Z_{12}|$ значительно превышает по величине $|Z_{11}|$. Для данной компоненты характерно увеличение импеданса по сравнению с предыдущим режимом. При высоких значениях удельной проводимости среды ($\sigma_r = 0,9$ См/м) абсолютная величина составляющей $|Z_{12}|$ практически постоянна при вариации диэлектрической проницаемости подстилающей поверхности. Для $\sigma_r = 0,1$ См/м в отличие от предыдущей частоты импульса появляется увеличение данной компоненты в диапазоне $\epsilon_r = (1-10)$. Низкие значения удельной проводимости среды ($\sigma_r = 10^{-6}$ См/м) приводят к более контрастным изменениям величины $|Z_{12}|$. В диапазоне $\epsilon_r = (1-10)$ происходит уменьшение данной составляющей поверхностного импеданса среды над УВЗ примерно в 3–3,5 раза. Фазовые составляющие поверхностного импеданса несут дополнительную информацию о характере сопротивления.

В результате процедуру диагностики среды можно осуществлять согласно методики решения обратной задачи, по которой на основании измерения компонент поверхностного импеданса и его фазовых компонент осуществляется определение диэлектрической проницаемости, удельной проводимости среды и глубины слоя. При определении поверхностного импеданса важную роль играют физико-геологические свойства пород-коллекторов, которые в свою очередь определяются гранулометрическим и минералогическим составом пород, особенностями структурно-текстурного строения скелета. Двухканальная схема определения комбинационных составляющих $|Z_{11}|$ и $|Z_{12}|$ позволяет учитывать характер пористости и проницаемости, вид цементирующего вещества и механические свойства скелета, количеством пластовой воды в порах и ее минерализацию и т.д. Распространение ЭМВ в режимах с правой и левой круговыми поляризациями над исследуемым геологическим профилем местности позволяет повысить производительность методов электроразведки. Дополнительная априорная информация может быть получена с помощью перемещения передатчика и приемника вдоль исследуемого профиля, задаваясь конкретными значениями расстояний и проводя конкретизацию электродинамических моделей УВЗ для повышения эффективности ЭММ георазведки с учетом влажности слоев, климатических факторов и особенностей измерений сезонного характера.

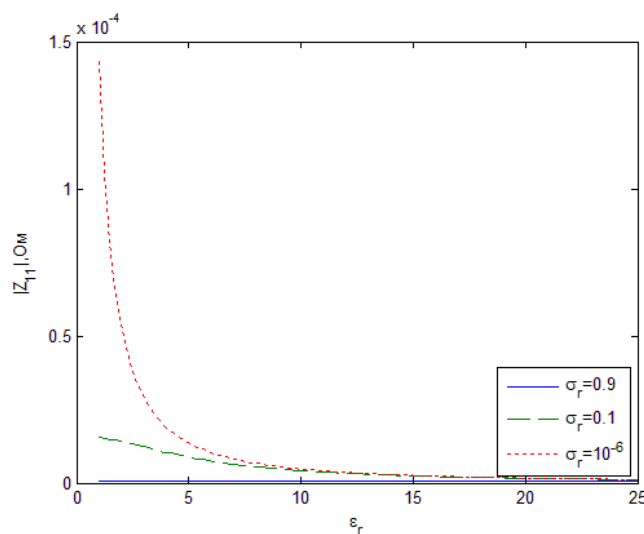


Рисунок 5. – Зависимости $|Z_{11}| = \psi(\epsilon_r)$ при изменении удельной проводимости среды

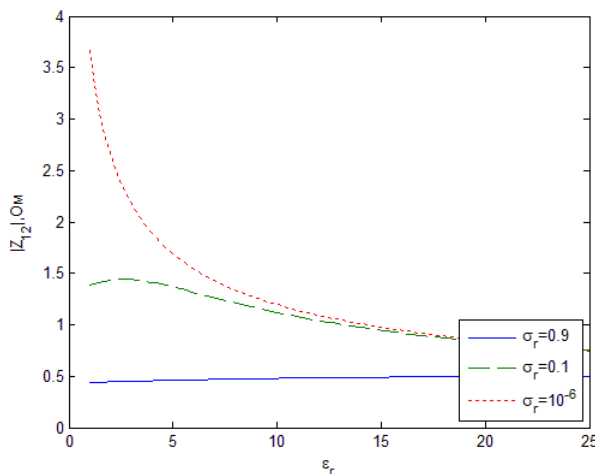


Рисунок 6. – Зависимости $|Z_{12}| = \psi(\epsilon_r)$ при изменении удельной проводимости среды

Заключение. Проведенный анализ компонентов поверхностного импеданса среды над УВЗ при взаимодействии радиоимпульсных сигналов показал возможность расширения функциональных зависимостей данных компонентов от режимов зондирования, что позволяет повысить точность разрабатываемых методов поиска УВЗ.

При этом следует отметить:

- электродинамические характеристики среды над залежью углеводородов в режиме радиоимпульсных сигналов могут быть определены по характеру и величине амплитудных и фазовых компонент поверхностного импеданса анизотропного слоя;
- информативность методов оконтуривания и выделения УВЗ повышается за счет применения для определения характеристик среды над залежью ЭМВ с правой и левой круговыми поляризациями, что реализуется на основе двухканальной схемы определения комбинационных составляющих;
- по амплитудным и фазовым характеристикам поверхностного импеданса при вариации частоты радиоимпульса может осуществляться диагностика сред при повышении производительности геологоразведочных работ и точности определения границ залежей углеводородов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гололобов, Д.В. Взаимодействие электромагнитных волн и углеводородных залежей / Д.В. Гололобов. – Минск : Бестпринт, 2009. – 185 с.
2. Электроразведка : справ. геофизика : в 2 кн. – 2-е изд., перераб. и доп. ; под ред. В.К. Хмелевского и В.М. Бондаренко. – М. : Недра, 1989. – Кн. 1. – 438 с.
3. Электроразведка : справ. геофизика : в 2 кн. – 2-е изд., перераб. и доп. ; под ред. В.К. Хмелевского и В.М. Бондаренко. – М. : Недра, 1989. – Кн. 2. – 378 с.
4. Способ поиска месторождений нефти и газа : а. с. SU 1264122 / А.Ф. Семенов, В.Ф. Семенов. – Опубл. 15.10.1986.
5. Могилатов, В.С. Зондирования вертикальными токами / В.С. Могилатов, Б.П. Балашов. – Новосибирск : СО РАН, филиал «Гео», 2005.
6. Moskvichew, V.N. Interaction of electromagnetic waves (EMW) with anisotropic inclusion in communication line / V.N. Moskvichew // 9-th Microw. Conf. NICON – 91, Rydzyna, May 20–22, 1991. – Vol. 1. – P. 240–244.
7. Способ радиоволнового зондирования и устройство для его осуществления : пат. RU 2152060 / В.К. Томилин, Г.П. Астафьев, В.И. Луконин. – Опубл. 27.06.2000.
8. Levashov, S.P. Electric-resonance sounding method and its application for, geological-geophysical and engineering-geological investigations [Electronic resource] / S.P. Levashov // 66nd EAGE Conf. and Tech. Exhib., Paris, France, 7–10 June 2003. – CD-ROM Abstracts volume.
9. Adamovskiy, E. Simulation of electromagnetic waves interaction with hydrocarbon deposits / E. Adamovskiy, V. Yanushkevich // 8 Junior researchers conference European and national dimension in research : in 3 p. / PSU. – Novopolotsk : PSU, 2016. – P. 3 : Technology. – P. 179–183.
10. Frasheri, A. Self-potential anomalies as possible indicators in search for oil and gas reservoirs / A. Frasheri // 57th EAGE Conf. and Tech. Exhib., Glasgow, 29 May–2 June 1995. – Glasgow, UK. – P. 8.

11. Взаимодействие электромагнитных волн с анизотропными средами над углеводородными залежами в режиме радиоимпульсных сигналов. / В.Ф. Янушкевич [и др.]. // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – Новополоцк, 2016. – № 12. – С. 45–50.
12. Иванова, К.И. Способ геоэлектроразведки углеводородной залежи с использованием радиоимпульсных сигналов. / К.И. Иванова, В.Ф. Янушкевич // Фундаментальные и прикладные исследования в современном мире : материалы XV междунар. науч.-техн. конф., Санкт-Петербург, 4 окт. 2016 г.–СПб. – Т. 1. – С. 107–111.
13. Янушкевич, В.Ф. Электромагнитные методы поиска и идентификации углеводородных залежей / В.Ф. Янушкевич. – Новополоцк, ПГУ, 2017. – 232 с.
14. Янушкевич, В.Ф. Моделирование двухчастотного взаимодействия электромагнитных волн с углеводородной залежью / В.Ф. Янушкевич // Приборы. Справ. журн. – 1999. – № 10. – С. 27–29.
15. Электродинамические параметры подводных источников в поле поверхностной электромагнитной волны / Д.В. Гололобов [и др.]. // 35 Всерос. Межвуз. науч.-техн. конф. : тез. докл. – Владивосток. – 1992. –Т. 1, ч. 1. – С. 59–62.
16. Янушкевич, В.Ф. Поверхностный импеданс анизотропной среды над углеводородными залежами в режиме радиоимпульсных сигналов [Электронный ресурс] / В. Ф. Янушкевич // Журнал радиоэлектроники. – 2017. – № 10. – Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/oct17/2/text.pdf>. – Дата доступа: 25.02.2020.

Поступила 10.03.2020

INFLUENCE OF LAYOUT SURFACE CHARACTERISTICS ON COMPONENTS OF SURFACE IMPEDANCE OF THE MEDIUM OVER HYDROCARBONS

S. ABRAMENKO, V. YANUSHKEVICH, V. BOGUSH

The article provides an analysis of the interaction of electromagnetic waves in the mode of radio-pulse signals with the medium above hydrocarbon deposits. The behavior of the amplitude and phase components of the surface impedance of the anisotropic medium over the reservoir in the mode of radio-pulse signals based on the quasi-hydrodynamic approach is studied. The analysis of the constituent components of the surface impedance of the medium over hydrocarbons for electromagnetic waves with right and left circular polarizations, depending on the dielectric constant and conductivity of the medium. It has been established that, according to the amplitude and phase characteristics of the surface impedance, when the frequency of the radio pulse is varied, media diagnostics can be carried out while increasing the productivity of exploration work and the accuracy of determining the boundaries of hydrocarbon deposits.

Keywords: hydrocarbon deposit, surface impedance, radio-pulse signal.

УДК 544.58: 661.12

РАДИАЦИОННО-ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПЛЕНКАХ ДИАЗОХИНОН-НОВОЛАЧНОГО РЕЗИСТА НА КРЕМНИИ ПРИ ИМПЛАНТАЦИИ ИОНОВ Ag^+ *канд. физ.-мат. наук, доц. С.А. ВАБИЩЕВИЧ, Н.В. ВАБИЩЕВИЧ**(Полоцкий государственный университет);**Г.А. ЭСПИНОЗА де лос МОНТЕРО, канд. физ.-мат. наук Д.И. БРИНКЕВИЧ,**канд. физ.-мат. наук, доц. В.С. ПРОСОЛОВИЧ**(Белорусский государственный университет, Минск)*

Методом ИК-Фурье спектроскопии нарушенного полного внутреннего отражения (НПВО) исследованы пленки диазохинон-новолачного фоторезиста ФП9120 толщиной 1,8 мкм, имплантированные ионами серебра с энергией 30 кэВ дозами $2,5 \cdot 10^{16} - 1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$. Показано, что в процессе имплантации ионами Ag^+ структур фоторезист – кремний происходит трансформация спектра НПВО, выражающаяся в перераспределении интенсивности колебаний C–O–H-групп, смещении в высокоэнергетическую область и расширении полосы, обусловленной валентными колебаниями C=O. Установлено, что имплантация приводит к снижению интенсивности полосы связанных валентных колебаний O–H-групп и смещению максимума указанной полосы в низкоэнергетическую область. Обнаружено снижение интенсивности полос поглощения остаточного формальдегида, обусловленное его испарением при имплантации в вакууме. Имплантация Ag^+ замедляет «старение» фоторезиста, что обусловлено, вероятнее всего, формированием при ионной имплантации у поверхности фоторезиста компактного механически устойчивого углеродистого слоя, препятствующего проникновению видимого излучения и газов из атмосферы.

Ключевые слова: *диазохинон-новолачный резист, имплантация, ионы серебра, спектры нарушенного полного внутреннего отражения.*

Введение. Ионная имплантация (ИИ) широко применяется в современной электронике [1]. Ее применение позволяет с высокой точностью управлять концентрацией легирующей примеси, характеризуется универсальностью и гибкостью технологического процесса. В процессах субмикронной и нанолитографии важную роль играют диазохинонноволачные (ДХН) резисты, представляющие собой композит из светочувствительного агента – О-нафтохинондиазида – и фенолформальдегидной смолы. Они используются в современной электронике в качестве масок при ионной имплантации [2]. Кроме того, интерес к исследованию модифицированных ионным облучением полимерных материалов стимулируется постоянно возрастающим их применением в новых сферах деятельности, в частности, в космической технике и медицине [3].

Ранее показано, что при ионной имплантации полимеров радиационно-индуцированные процессы протекают не только в области пробега ионов, но и за его пределами, что приводит к существенным изменениям физико-химических свойств полимерных пленок, в частности, к их радиационному упрочнению [4], модификации спектров отражения [5–7], уменьшению показателя преломления [7] и изменению адгезионного взаимодействия с материалом подложки [8]. Методом электронного парамагнитного резонанса в имплантированных ионами бора и фосфора пленках ДХН-резиста обнаружено формирование свободных радикалов с мощной системой сопряженных $>C=O-$ и $-C=C-$ кратных связей [9; 10]. Однако природа радиационно-индуцированных процессов, ответственных за изменение технологических свойств ДХН-фоторезистов за область пробега ионов, остается малоизученной.

Для исследования тонких пленок широко применяется метод ИК-Фурье спектроскопии нарушенного полного внутреннего отражения, позволяющий получать количественную информацию о составе и структуре сложных органических соединений и их смесей в твердом агрегатном состоянии [11; 12]. Отметим, что исследования спектров НПВО пленок ДХН-фоторезистов на поверхности пластин монокристаллического кремния, облученных ионами, ранее не проводились.

В настоящей работе с целью установления механизмов радиационно-индуцированной модификации ДХН-фоторезистов за область пробега ионов были исследованы ИК-Фурье спектры НПВО имплантированных ионами Ag^+ пленок диазохинон-новолачного фоторезиста марки ФП9120.

Методы исследования. Пленки позитивного фоторезиста ФП9120 толщиной 1,8 мкм наносились на поверхность пластин кремния марки КДБ-10 с ориентацией (111) методом центрифугирования при скорости вращения 1800 об/мин. Перед формированием пленки фоторезиста (ФР) кремниевые пластины подвергали стандартному циклу очистки поверхности в органических и неорганических растворителях. Время вращения центрифуги – 40 с. После нанесения фоторезиста на рабочую сторону пластины проводилась сушка в течение 50–55 минут при температуре 88 °С. Толщина пленок фоторезиста контролировалась механическим способом на профилемере «Dectak» по пяти фиксированным точкам на каждой пластине, при этом отклонения от среднего значения по пластине для всех исследованных образцов не превышали 1%.

Имплантация ионами Ag^+ с энергией 30 кэВ в интервале доз $2,5 \cdot 10^{16} - 1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$ в режиме постоянного ионного тока (плотность тока $j = 4 \text{ мкА/см}^2$) проводилась при комнатной температуре в остаточном вакууме не хуже 10^{-5} Па на имплантаторе ИЛУ-3. Во избежание перегрева и деструкции образца в процессе имплантации использовалась кассета, обеспечивающая эффективный сток ионного заряда с поверхности полимера и плотный контакт с металлическим основанием, охлаждаемым водой.

Спектры НПВО структур фоторезист – кремний в диапазоне $\nu = 400 - 4000 \text{ см}^{-1}$ регистрировались при комнатной температуре ИК-Фурье спектрофотометром *ALPHA (Bruker Optik GmbH)*. Разрешение составляло 2 см^{-1} , количество сканов – 24. Коррекция фона проводилась перед каждым измерением. Согласно измерениям методом атомно-силовой микроскопии рельеф поверхности пленки был достаточно гладким, для исходных и имплантированных пленок средняя арифметическая шероховатость R_a поверхности не превышала 2 нм.

Экспериментальные результаты. После ионной имплантации новых полос ИК-поглощения обнаружено не было (рисунок 1). Однако в процессе ИИ происходила трансформация ИК-спектра НПВО пленок диазохиноноволачного резиста: имело место снижение интенсивности ряда полос, сопровождавшееся исчезновением ряда слабых полос; наблюдалось смещение максимумов ряда полос и перераспределение интенсивностей между максимумами расположенных рядом полос, что свидетельствует о структурных и конформационных изменениях полимерной пленки при ионной имплантации.

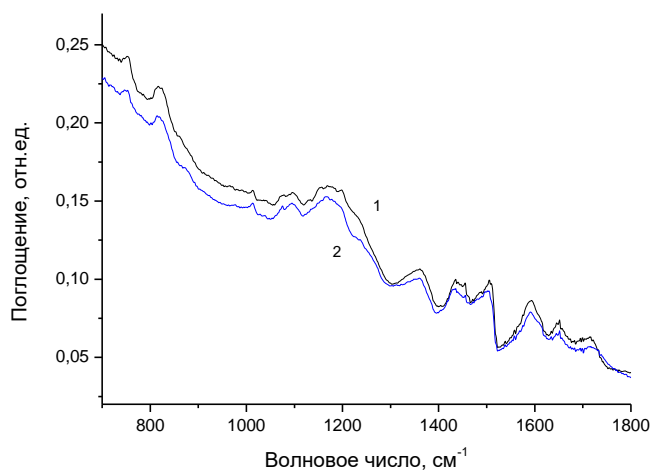


Рисунок 1. – Спектры НПВО исходной (1) и имплантированной Ag^+ дозой $1 \cdot 10^{17}$ (2) пленок ФП9120

При анализе экспериментальных данных необходимо учитывать следующее. При записи ИК-спектров НПВО глубина проникновения $d_{\text{эф}}$ светового луча в образец зависит от длины волны λ , показателей преломления призмы n_2 и образца n_1 , угла падения α [11] и рассчитывается по формуле

$$d_{\text{эф}} = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{\lambda}{n_1} \cos \alpha}{\pi \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\right] \left[\sin^2 \alpha - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\right]^{1/2}}. \quad (1)$$

В условиях нашего эксперимента материал призмы – алмаз ($n_2 = 2,42$) [13], угол падения 40° , показатель преломления фоторезиста $n_1 = 1,4$ [7]. Следовательно, согласно формуле (1) глубина проникновения излучения в фоторезистивную пленку составляет $d_{\text{эф}} \sim 0,5 \lambda$. Таким образом, эффективная толщина поглощающей среды (в нашем случае фоторезиста) сравнима, а при волновых числах менее 3000 см^{-1} существенно превышает геометрическую толщину исследуемых пленок. Поэтому ИК-спектр НПВО формируется за счет поглощения молекулярных фрагментов во всем объеме ФР, а не только с приповерхностного слоя полимерной пленки.

Кроме того, проецированный пробег ионов Ag^+ с энергией 30 кэВ в пленке фоторезиста равен $\sim 40 \text{ нм}$ [6]. Это составляет около 2,5% толщины исследованных пленок ФР. Вследствие этого вклад имплантированного слоя в спектры НПВО незначителен. Это подтверждается тем, что после ИИ новых интенсивных полос поглощения, связанных с имплантированными атомами, не наблюдалось (см. рисунок 1).

Вышесказанное позволяет утверждать, что основной вклад в спектры НПВО пленок вносит слой фоторезиста за область пробега ионов. Таким образом, в нашем эксперименте наблюдалась модификация структуры ФР за область пробега ионов.

Полос, обусловленных валентными колебаниями свободных О–Н-групп, в спектрах НПВО как исходных, так и имплантированных пленок не наблюдалось. В области валентных колебаний О–Н-групп, связанных водородной связью [14], наблюдалась широкая полоса в диапазоне волновых чисел от 3000 до 3700 см⁻¹ с максимумом ~3310 см⁻¹ (рисунок 2). Имплантация приводила к снижению ее интенсивности и смещению максимума указанной полосы в низкоэнергетическую область. Отметим, что также снижалась интенсивность полосы с максимумом ~1360 см⁻¹, обусловленной деформационными колебаниями О–Н-групп [12]. Уменьшение концентрации О–Н-групп за область внедрения ионов может быть обусловлено протеканием реакций окисления до соответствующих карбонильных соединений или превращения в эфирные фрагменты. Смещение максимума валентных колебаний связанных О–Н-групп в низкоэнергетическую область может свидетельствовать об увеличении концентрации карбоксильных групп. Так, частота колебаний у фенольных О–Н-групп равна ~3390 см⁻¹, а у карбоксильных О–Н-групп она существенно ниже и составляет ~3075 см⁻¹ [15].

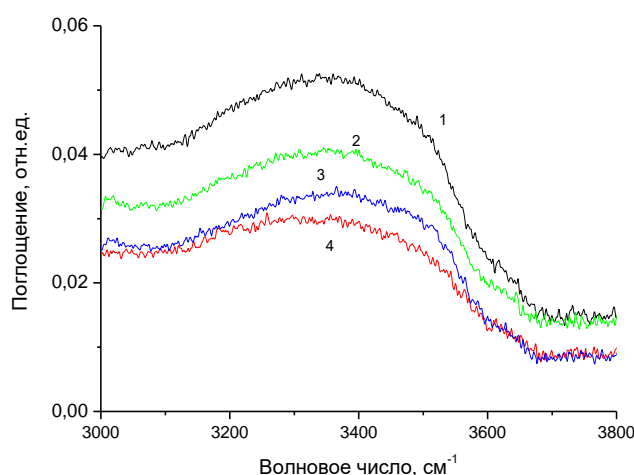


Рисунок 2. – Спектры НПВО имплантированных ионами Ag⁺ пленок фоторезиста ФП9120 в области валентных колебаний О–Н-связей. Доза, 10¹⁶ см⁻²: 1 – 2,5; 2 – 5,0; 3 – 7,5; 4 – 10

При ИИ наблюдалась трансформация полосы с максимумом ~1720 см⁻¹, обусловленной валентными колебаниями С=О в альдегидах и карбоновых кислотах [12; 14]. Она расширяется и смещается в высокоэнергетическую область; ее интенсивность слабо снижается (см. рисунок 1). Это может свидетельствовать об увеличении после ИИ концентрации карбоксильных групп, поскольку частота валентных колебаний С=О в них обычно выше, чем в альдегидах [15–17]. Эти результаты хорошо согласуются с приведенными выше экспериментальными данными по поглощению О–Н-групп.

При имплантации изменяется структура широкой полосы в диапазоне волновых чисел 1140–1220 см⁻¹. Указанная полоса является суперпозицией нескольких полос (по крайней мере 4-х, с максимумами при 1231, 1199, 1175 и 1150 см⁻¹ [18]) и обусловлена колебаниями С–О–Н групп в ароматических соединениях [14]. После ИИ усиливается максимум 1175 см⁻¹; он становится ярко выраженным. Остальные максимумы сглаживаются, их интенсивность снижается. Это свидетельствует о трансформации окружения этих групп.

Отметим, что после ИИ наблюдалось снижение интенсивности полос поглощения остаточного формальдегида, непрореагировавшего при формировании фоторезиста, в частности, полосы 1650 см⁻¹, обусловленной валентными колебаниями С=О в формальдегиде [14]. Полосы с максимумами при 1130 см⁻¹ и 1453 см⁻¹, связанные с деформационными колебаниями в формальдегиде, исчезают из спектров после имплантации. Вероятнее всего, избыточный формальдегид частично испаряется при имплантации в вакууме. Не исключено, что он реагирует с компонентами фоторезиста.

Имплантация Ag⁺ замедляет «старение» фоторезиста. В имплантированных пленках фоторезиста ФП9120, хранившихся в течение 5 лет, не обнаружено обусловленных кетеном полос поглощения, которые наблюдаются во всех необлученных пленках при хранении более 3 лет. Этот эффект обусловлен, вероятнее всего, формированием при ионной имплантации у поверхности фоторезиста компактного механически устойчивого углеродистого слоя, препятствующего проникновению видимого излучения и газов из атмосферы [19].

В заключение отметим, что процессы, протекающие за слоем внедрения при имплантации ионов Ag^+ , существенным образом отличаются от аналогичных процессов, наблюдавшихся нами в работе [18] при внедрении ионов бора и сурьмы. Так, при имплантации B^+ в спектрах НПВО появляются интенсивные полосы с максимумами при 2151 и 2115 см^{-1} , обусловленные валентными колебаниями двойных кумулятивных связей, в частности, $\text{C}=\text{C}=\text{O}$, что связано с радиационно-индуцированным деазотированием О-нафтохинондиазида. При имплантации Ag^+ таких полос в настоящей работе не наблюдалось. Это различие может быть обусловлено тем, что в [18] и настоящей работе использовались разные имплантаторы. «Везувий-6», использовавшийся в работе [18], является имплантатором барабанного типа. Облучение на таком ускорителе является импульсным и облучаемая пластина при этом не разогревается существенным образом. В настоящей же работе использовался имплантатор ИЛУ-3, у которого облучаемая пластина постоянно находится под пучком ионов. Это приводит к более сильному разогреву пластины (до 70–90 °С). Нами установлено, что интенсивность полос с максимумами при 2151 и 2115 см^{-1} снижается при термообработке. Так, эти полосы исчезают в спектрах НПВО при термообработке 90 °С длительностью 4 часа. Таким образом, указанная особенность имплантации Ag^+ обусловлена более высокой температурой фоторезистивного слоя при использовании ИЛУ-3.

Закключение. В процессе имплантации ионами Ag^+ структур фоторезист – кремний происходит трансформация спектра НПВО, выражающаяся в перераспределении интенсивности колебаний $\text{C}-\text{O}-\text{H}$ -групп, смещении в высокоэнергетическую область и расширении полосы, обусловленной валентными колебаниями $\text{C}=\text{O}$. Имплантация приводит к снижению интенсивности полосы связанных валентных колебаний $\text{O}-\text{H}$ -группы и смещению максимума указанной полосы в низкоэнергетическую область. Отмечено снижение интенсивности полос поглощения остаточного формальдегида, обусловленное его испарением при имплантации в вакууме. Имплантация Ag^+ замедляет «старение» фоторезиста, что обусловлено, вероятнее всего, формированием при ионной имплантации у поверхности фоторезиста компактного механически устойчивого углеродистого слоя, препятствующего проникновению видимого излучения и газов из атмосферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Просолович, В.С. Основы современных технологических процессов : курс лекций / В.С. Просолович, Ю.Н. Янковский, Д.И. Бринкевич. – Минск : БГУ, 2011. – 135 с.
2. Моро, У. Микролитография. Принципы, методы, материалы : в 2-х ч. / У. Моро. – М. : Мир, 1990. – Ч. 2. – 632 с.
3. Kondyurin, A. Ion beam treatment of polymers: application aspects from medicine to space / A. Kondyurin, M. Bilek. – Amsterdam : Elsevier, 2015. – 256 p.
4. Ion implantation of positive photoresists / D.I. Brinkevich [et al.]. // Russian Microelectronics. – 2014. – V. 43, № 3. – P. 194–200.
5. Модификация приповерхностной области пленки полиимида имплантацией ионов бора / А.А. Харченко [и др.]. // Поверхность. Рентген-, синхротрон. и нейтрон. исслед. – 2015. – № 1. – С. 94–99.
6. Radiation-induced modification of reflection spectra beyond the ion path region in polyimide films / D.I. Brinkevich [et al.]. // J. of Surface Investigation. X-ray, synchrotron and neutron techniques – 2017. – V. 11, № 4. – P. 801–806.
7. Reflection spectra modification of diazoquinone-novolac photoresist implanted with B and P ions / D.I. Brinkevich [et al.]. // Russian Microelectronics. – 2019. – V. 48, № 3. – P. 197–201.
8. Адгезия к монокристаллическому кремнию пленок диазохинон-новолачного фоторезиста, имплантированных ионами бора и фосфора / С.А. Вабищевич [и др.]. // Химия высоких энергий. – 2020. – Т. 54, № 1. – С. 54–59
9. Электронная проводимость в имплантированном ионами P^+ позитивном фоторезисте / А.Н. Олешкевич [и др.]. // Микроэлектроника. – 2020 – Т. 49, № 1. – С. 58–65.
10. ЭПР спектроскопия имплантированных ионами P^+ и B^+ пленок диазохинон-новолачного фоторезиста / Д.И. Бринкевич [и др.]. // Химия высоких энергий. – 2020. – Т. 54, № 2. – С. 126–134.
11. Беккер, Ю. Спектроскопия / Ю. Беккер. – М. : Техносфера, 2009.
12. Преч, Э. Определение строения органических соединений. Таблицы спектральных данных / Э. Преч, Ф. Бюльманн, К. Аффольтер – М. : Мир : Бином, 2006. – 438 с.
13. Физико-химические свойства полупроводниковых веществ : справочник / А.В. Новоселова [и др.]. – М. : Наука, 1979. – 340 с.
14. Тарасевич, Б.Н. ИК спектры основных классов органических соединений : справ. материалы / Б.Н. Тарасевич – М. : МГУ, 2012. – 54 с.
15. Инфракрасные спектры и структура молекулярных комплексов ароматических кислот / М.В. Бельков [и др.]. // Журнал прикладной спектроскопии. – 2011. – Т. 78, № 6. – С. 851–858.

16. Инфракрасные спектры бензальдегида и его производных в разных агрегатных состояниях / Г.Б. Толсторожев [и др.]. // Оптика и спектроскопия. – 2012. – Т. 113, № 2. – С. 202–207.
17. Водородные связи и противовирусная активность производных бензальдегида / Г.Б. Толсторожев [и др.]. // Журнал прикладной спектроскопии. – 2011. – Т. 79, № 4. – С. 658–663.
18. Спектры НПВО имплантированных ионами бора пленок диазохиноноволачного фоторезиста на кремнии / В.С. Просолович [и др.]. // Взаимодействие излучений с твердым телом : материалы 13-й Международ. конф., Минск, 30 сент.–3 окт. 2019 г. – Минск : Изд. ц-р БГУ, 2019. – С. 169–171.
19. Грасси, Н. Деструкция и стабилизация полимеров / Н. Грасси, Дж. М. Скотт. – М. : Мир, 1988. – 446 с.

Поступила 11.03.2020

RADIATION-INDUCED PROCESSES IN FILMS OF DIAZOQUINONE-NOVOLAC RESIST ON SILICON DURING IMPLANTATION OF Ag^+ IONS

S. VABISHCHEVICH, N. VABISHCHEVICH,
G.A. ESPINOZA de los MONTEROS, D. BRINKEVICH, V. PROSOLOVICH

The method of IR Fourier transform spectroscopy of impaired total internal reflection (ATR) was used to study 1,8 μm thick FP9120 diazoquinone-lacquer photoresist films implanted with 30 keV silver ions with doses of $2,5 \cdot 10^{16}$ – $1 \cdot 10^{17}$ cm^{-2} . It was shown that during the implantation of photoresist-silicon structures with Ag^+ ions, the ATR spectrum transforms, which is manifested in the redistribution of the vibration intensity of the C–O–H groups; displacement into the high-energy region and broadening of the band due to stretching vibrations C=O. It has been established that implantation leads to a decrease in the intensity of the band of coupled stretching vibrations of the OH group and a shift of the maximum of this band to the low-energy region. A decrease in the intensity of the absorption bands of residual formaldehyde due to its evaporation during implantation in vacuum was found. Ag^+ implantation slows down the “aging” of the photoresist, which is most likely due to the formation of a compact mechanically stable carbon layer during ion implantation at the photoresist surface, which prevents the penetration of visible radiation and gases from the atmosphere.

Keywords: diazoquinone-novolac resist; implantation; silver ions; spectra of impaired total internal reflection.

УДК 537.533; 621.384

ВОЗМОЖНОСТЬ ПОВЫШЕНИЯ ПЕРВЕАНСА В ПЛАЗМЕННЫХ ЭМИССИОННЫХ СИСТЕМАХ НА ОСНОВЕ РАЗРЯДА В СКРЕЩЕННЫХ $E \times H$ ПОЛЯХ

**С.Н. АБРАМЕНКО, канд. техн. наук, доц. Д.А. АНТОНОВИЧ,
д-р. техн. наук, проф. В.А. ГРУЗДЕВ, П.Н. СОЛДАТЕНКО
(Полоцкий государственный университет)**

Анализ известных конструкций плазменных источников заряженных частиц и основных физических процессов в них показывает, что существует возможность модификации этих структур с целью создания более эффективных условий формирования плазмы и получения тока эмиссии без существенного усложнения конструкции и изменения систем электропитания. В работе представлен макет конструкции плазменного источника заряженных частиц в скрещенных $E \times H$ полях с повышенным первеансом. Приведена его электродная структура, предложен механизм работы источника, приведены основные характеристики, показана перспективность для дальнейшей разработки на его основе высокопервеансного источника для промышленного применения

Ключевые слова: *первеанс, плазменные эмиссионные системы, плазменный эмиттер, импульсы тока пучка, разряд в скрещенных $E \times H$ полях, системы электропитания плазменных эмиссионных систем.*

Введение. Развитие промышленности требует создания деталей с поверхностными слоями, обладающими комплексом заданных свойств. К наиболее распространенным методам поверхностной обработки применительно к конструкционным материалам можно отнести ионное модифицирование и электронно-лучевое воздействие. Одним из путей существенного повышения эксплуатационных свойств поверхностей является использование комбинированных методов их инженерии. При этом сочетание двух способов обработки, как правило, приводит к появлению новых эффектов, не обеспечиваемых каждым из способов в отдельности. Накопленный опыт свидетельствует о перспективности использования плазменных источников заряженных частиц на основе разряда в скрещенных $E \times H$ полях для реализации таких комбинированных технологий обработки поверхностных слоев, поскольку плазменные источники не утрачивают работоспособности при воздействии паров металлов, в том числе тугоплавких, и газовых выбросов из зоны термического воздействия, имеют большой ресурс, удобны в эксплуатации не содержат редких и дорогостоящих материалов. Совокупность этих свойств не только позволяет использовать источники с плазменным эмиттером в традиционных электронно-лучевых технологиях, но и разрабатывать на их основе новые технологии термического воздействия на материалы. [1–3].

Существуют основания предполагать, что создание новых конструкций источников с плазменным эмиттером для реализации комбинированных ресурсосберегающих технологий электронно-ионно-плазменной обработки поверхностных слоев на их основе позволит снизить себестоимость продукции за счет сокращения длительности процесса ионно-плазменной обработки, снизить энергозатраты, а также повысить эксплуатационные характеристики изделий путем создания поверхностного покрытия с требуемыми свойствами. Для решения этой задачи представляется перспективной разработка высокопервеансных источников низко- и высокоэнергетичных (в зависимости от области применения) пучков заряженных частиц.

Первеанс P является мерой интенсивности потока заряженных частиц, характеризует влияние объемного заряда на пучок заряженных частиц и равен отношению тока I пучка частиц к эквивалентному ускоряющему напряжению U в степени три вторых в данной точке [4]:

$$P = \frac{I}{U^{3/2}}$$

Современная теория и опыт применения плазменных источников ионных и электронных пучков показывают, что диодные структуры с плазменными эмиттерами зарядов автоматически обеспечивают повышенный первеанс при заданной плотности эмиссионного тока [5]. Это обусловлено невозможностью формирования ленгмюровского минимума потенциала вблизи плазменного эмиттера вследствие возможности одновременной эмиссии из плазмы как электронов, так и ионов [6]. Эта возможность приводит к автоматическому перемещению каждого элемента поверхности эмиттирующей плазмы до реализации условия нулевого градиента потенциала на всей поверхности. Таким образом, диод с плазменным эмиттером работает в режиме насыщения, когда ток эмиссии равен току анода диодного промежутка.

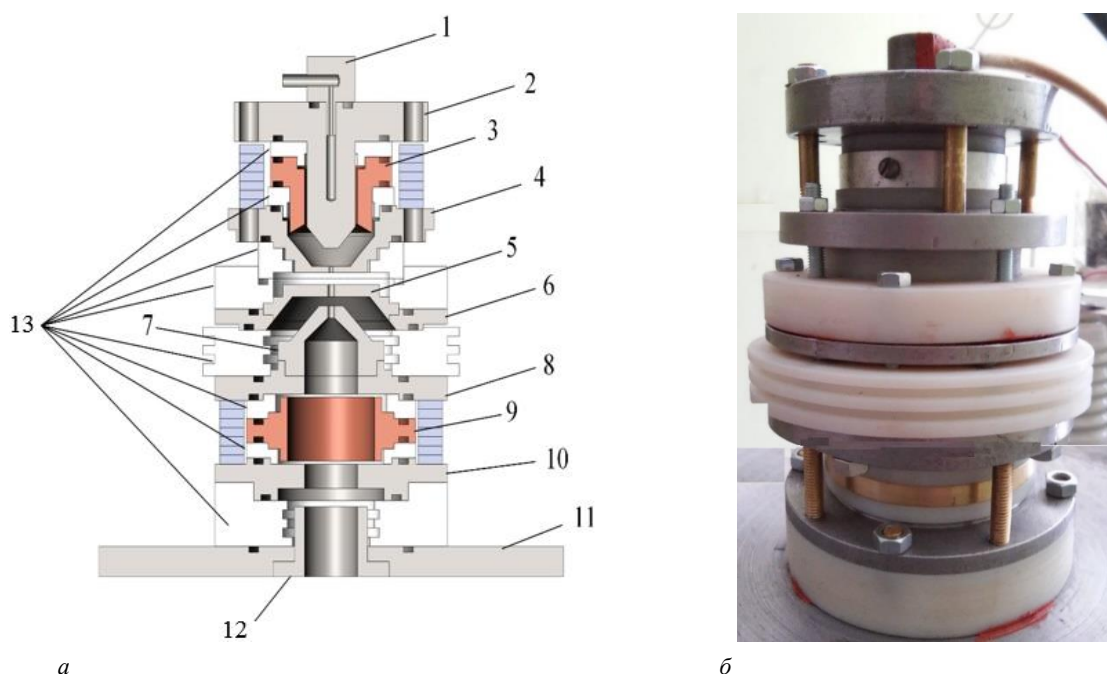
Дальнейшее повышение первеанса в диоде с плазменным эмиттером возможно за счет компенсации объемного заряда тока в диоде (электронном или ионном) зарядами другого типа во всем диодном промежутке. Такая ситуация реализуется, в частности, в возникающих при определенных условиях в плазме

двойных электрических слоях. Такие слои можно рассматривать как диоды с плазменным эмиттером и плазменным анодом. Первеанс двойных электрических слоев можно считать максимальным для заданной плотности тока в слое (диоде).

Анализ известных конструкций плазменных источников заряженных частиц (электронов) и основных физических процессов в них показывает, что существует возможность модификации этих структур с целью создания более эффективных условий формирования плазмы и получения тока эмиссии, без существенного усложнения конструкции и изменения систем электропитания. Используя теорию электростатических линз и известные принципы получения пучков большого сечения, например, можно предложить систему формирования и ускорения электронных пучков, близкую по основным параметрам к иммерсионным электростатическим линзам (источники первого типа), или газоразрядные структуры с двойными электрическими слоями (источники второго типа).

В данной работе представлен макет конструкции плазменного источника заряженных частиц в скрещенных $E \times H$ полях с повышенным первеансом.

Описание макета. На основе предложенной модели [7] была разработана экспериментальная конструкция плазменного источника заряженных частиц с повышенным первеансом, электродная структура которого и внешний вид приведены на рисунке 1.



1 – канал для напуска плазмообразующего газа; 2 – катод; 3 – главный анод; 4 – отражательный катод; 5 – эмиттерный электрод; 6 – вспомогательный катод; 7 – ускоряющий электрод; 8, 10 – катоды; 9 – анод; 11 – фланец для установки структуры на рабочую камеру; 12 – согласующий электрод; 13 – изоляторы

Рисунок 1. – Внешний вид (а) и внутренняя структура (б) разработанного макета источника с повышенным первеансом

Плазма, через часть поверхности которой осуществляется отбор (эмиссия) электронов, формируется в объеме, ограниченном внутренними поверхностями катода 2, отражательного катода 4, главного анода 3 и эмиттерного электрода 5. Указанные электроды разделены изоляторами. Катоды 2 и 4 являются накопниками постоянного магнита, создающего между ними магнитное поле, которое способствует осцилляции вторичных γ -электронов с катодов в пространство формирования плазмы. Электроды 5, 6 и 7 образуют промежуток ускорения электронов, где формируется поверхность плазмы, эмитирующая электроны. Электроды 8–10 образуют газоразрядную структуру, формирующую плазму, являющуюся источником ионов. Эта структура представляет собой ячейку «пеннинговского» типа [8]. Одновременно с этим магнитное поле, формируемое катодами 8, 9, образует некоторую магнитную фокусирующую систему для ускоренного электронного пучка, распространяющегося вдоль оси этой газоразрядной структуры до выхода из источника в технологическую камеру. На рисунке 2 приведены вольтамперные характеристики разряда камер источника. Они соответствуют типичным газоразрядным характеристикам источников данного типа.

На рисунке 3 приведена схема подключения электродов разработанного макета электронного источника с повышенным первеансом к системе электропитания. Предполагалось, что взаимосвязь раздельно управляемых разрядов в структуре будет способствовать повышению степени ионизации газа при пониженном давлении.

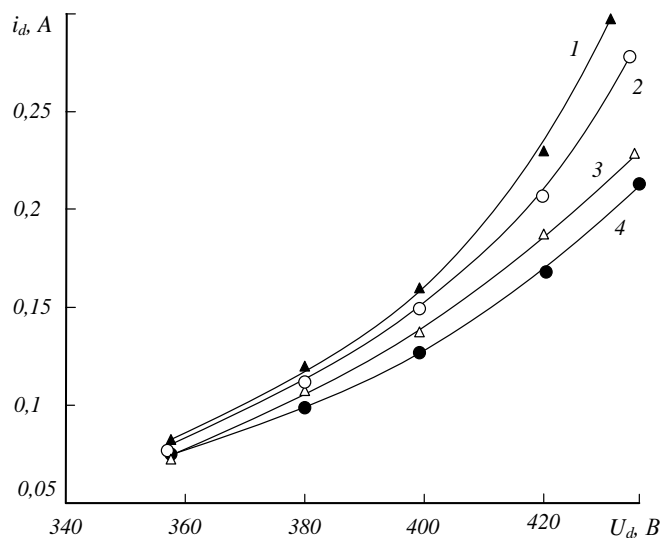
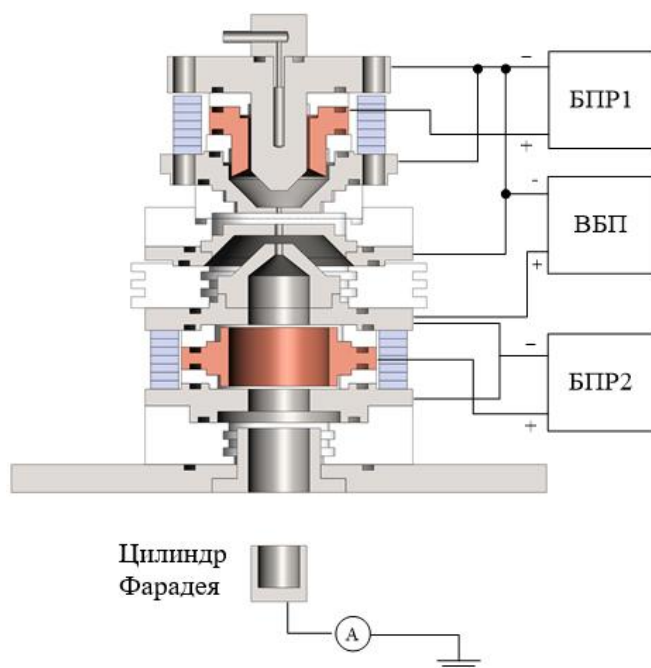


Рисунок 2. – Вольтамперные характеристики разряда для (1, 2) верхней (см. рисунок 1, а, электроды 2–5) и (3, 4) нижней (см. рисунок 1, а, электроды 8–10) разрядных камер при одновременном формировании разрядов в указанных камерах.
Напуск газа Q : 1, 3 – $3,5 \text{ мПа}\cdot\text{м}^3/\text{с}$; 2, 4 – $2,2 \text{ мПа}\cdot\text{м}^3/\text{с}$;



БПР – блок питания разряда (U_p, I_p), напряжение до 1000 В, ток до 1,5 А;
ВБП – высоковольтный блок питания (U_y), напряжение до 5 кВ, ток до 1 А

Рисунок 3. – Схема подключения электродов разрядных камер макета электронного источника на основе разряда в скрещенных $E \times H$ полях с повышенным первеансом

Предполагается следующий механизм работы: электронный пучок, формируемый в верхней камере (см. рисунок 1, а, электроды 2–5), попадает после ускорения в структуру, образованную электродами нижней камеры (см. рисунок 1, а, электроды 8–10), где в разряде низкого давления формируется эмитирующая

ионы плазма. Сформированный электронный пучок, распространяясь вдоль оси структуры, повышает степень ионизации плазмы в этом разряде. Ионы распространяются в верхнюю структуру, повышают ионизацию газа в области отбора электронов и плотность эмиссионного тока и частично компенсируют электронный объемный заряд в ускоряющем промежутке, что в целом должно приводить к увеличению первеанса источника.

О реализации этого механизма свидетельствует изменение наклона вольтамперных характеристик извлечения при наличии (рисунок 4, кривые 4–6 и рисунок 5, кривые 3–5) инициации разряда в нижней разрядной камере (см. рисунок 1, а, электроды 8–10) в сравнении с его отсутствием (рисунок 4, кривые 1–3 и рисунок 5, кривые 1, 2). Вид характеристик свидетельствуют о слабом влиянии на первеанс источника величины тока разряда и напуска газа (давления в разрядной камере) в рабочем диапазоне устойчивого существования разряда. Из представленных характеристик видно, что определяющее действие на первеанс источника оказывает наличие дополнительного разряда в нижней разрядной камере (см. рисунок 1, а, электроды 8–10).

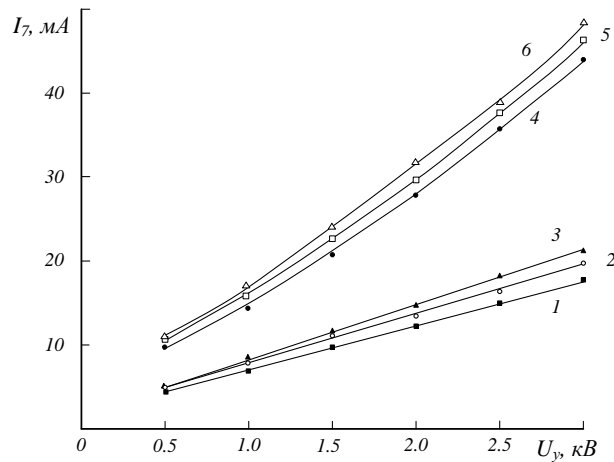
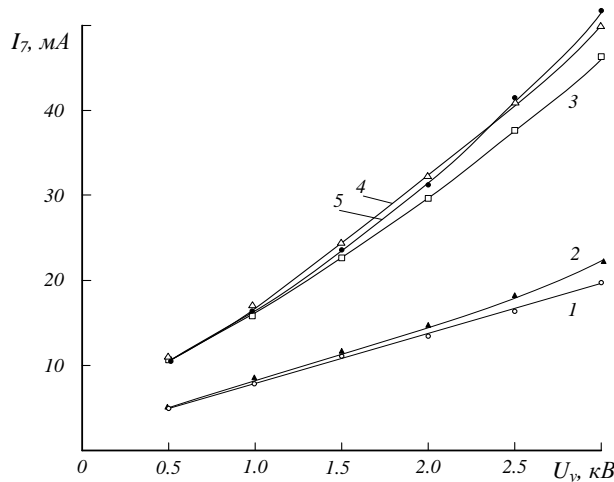


Рисунок 4. – Ток I_7 (в цилиндр Фарадея) при отсутствии (1–3) и наличии (4–6) инициации разряда в нижней разрядной камере (см. рисунок 1, а, электроды 8–10) для различных напусков газа Q : I_p в верхней камере (см. рисунок 1, а, электроды 2–5) 200 мА, напряжение горения разряда 420 В; I_p в нижней камере (см. рисунок 1, а, электроды 8–10) 180 мА, напряжение горения разряда 410 В. Напуск газа Q : 1, 4 – $0,05 \cdot 10^{-4}$ л/с; 2, 5 – $0,1 \cdot 10^{-4}$ л/с; 3, 6 – $0,38 \cdot 10^{-4}$ л/с



1–5 – напуск газа Q – $0,1 \cdot 10^{-4}$ л/с;
 I_p в верхней камере (см. рисунок 1, а, электроды 2–5): 1, 3, 5 – 200 мА, напряжение горения разряда 420 В;
 2, 4 – 240 мА, напряжение горения разряда 450 В
 3, 4 – I_p в нижней камере (см. рисунок 1, а, электроды 8–10) 180 мА, напряжение горения разряда 410 В;
 5 – I_p в верхней камере (см. рисунок 1, а, электроды 2–5) 210 мА, напряжение горения разряда 430 В;
Рисунок 5. – Ток I_7 (в цилиндр Фарадея) при отсутствии (1–2) и наличии (3–5) инициации разряда в нижней разрядной камере (см. рисунок 1, а, электроды 8–10) для различных токов разряда в верхней и нижней камерах

Заключение. Наряду с известными способами, повышающими переключение электронного тока из плазмы в ускоряющий промежуток (эмиссионный ток) в плазменных источниках заряженных частиц, существенное повышение первеанса плазменных источников как высокоэнергетических, так и низкоэнергетических пучков обеспечивается заполнением ускоряющего электроны промежутка ионами, компенсирующими объемный заряд электронного пучка. При этом для повышения первеанса плазменных источников электронов в непрерывном режиме целесообразно использовать ускоряющий электрод в виде плазменной поверхности, которая ускоряет электроны и одновременно эмитирует ионы в ускоряющий электроны промежуток. Для этого ускоряющий электрод должен быть элементом электродной газоразрядной структуры, формирующей плазму. Между эмитирующей электроны плазмой и плазмой ускоряющего электрода формируется двойной электрический слой с высоким первеансом для ускоряемого электронного пучка. При этом для каждого конкретного практического технологического применения высокопервеансного плазменного источника электронов целесообразна адаптация исследованных электродных структур источника на основе требований к условиям его работы и требований к параметрам (качеству) электронного пучка.

Полученные результаты свидетельствуют о возможности и перспективности применения представленного источника для разработки высокопервеансного источника для промышленного применения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барченко, В.Т. Плазменные эмиссионные системы с ненакаливаемыми катодами для ионно-плазменных технологий / В.Т. Барченко. – СПб. : Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2011. – 220 с.
2. Плазменные эмиссионные системы для электронно-лучевых технологий. Ч. 1 / Д.А. Антонович [и др.]. // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 37–44.
3. Плазменные эмиссионные системы для электронно-лучевых технологий. Ч. 2 / Д.А. Антонович [и др.]. // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4 – С. 45–51.
4. Молоковский, С.И. Интенсивные электронные и ионные пучки / С.И. Молоковский, А.Д. Сушков. – Л. : Энергия, 1972. – 274 с.
5. Залесский, В.Г. Эмиссионные и электронно-оптические системы плазменных источников электронов : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.04.04 / В.Г. Залесский. – Минск, 2015. – 316 л.
6. Чен, Ф. Введение в физику плазмы / Ф. Чен. – М. : Мир, 1987. – 398 с.
7. Antonovich, D.A. Plasma emission systems for electron and ion-beams technologies / D.A. Antonovich [et al.]. // High Temperature Material Processes : An International Quarterly of High-Technology Plasma Processes. – 2017. – Vol. 21, iss. 2. – P. 143–159.
8. Coating by Cathode Disintegration : pat. US 2,146,025 / Penning F.M. ; N.V. Philips, Gloeilampenfabrieken, Eindhoven, The Netherlands. – 1939.

Поступила 12.03.2020

POSSIBILITY OF INCREASING PERVEANCE IN PLASMA EMISSION SYSTEMS BASED ON DISCHARGE IN CROSSED $E \times H$ FIELDS

S. ABRAMENKO, D. ANTONOVICH, V. GRUZDEV, P. SOLDATENKO

An analysis of the known designs of plasma sources of charged particles and the basic physical processes in them shows that it is possible to modify these structures in order to create more effective conditions for the formation of plasma and to obtain an emission current, without significantly complicating the design and changing the power supply systems. The paper presents a mock-up of the design of a plasma source of charged particles in crossed $E \times H$ fields with an increased perveance. Its electrode structure is given, the source's mechanism of operation is proposed, the main characteristics are given, and the prospects for further development of a high-perveance source for industrial applications based on it are shown.

Keywords: *perveance, plasma emission systems, plasma emitter, beam current pulses, discharge in crossed $E \times H$ fields, power systems for plasma emission systems.*

УДК 537.533

**ЭЛЕКТРОДНАЯ СТРУКТУРА ПЛАЗМЕННОГО ЭЛЕКТРОННО-ИОННОГО ИСТОЧНИКА
ДЛЯ СОВМЕСТНОГО ФОРМИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ И ИОННЫХ ПУЧКОВ***канд. техн. наук, доц. Д.А. АНТОНОВИЧ, д-р техн. наук, проф. В.А. ГРУЗДЕВ,**П.Н. СОЛДАТЕНКО**(Полоцкий государственный университет);**д-р физ.-мат. наук, доц. В.Г. ЗАЛЕССКИЙ**(Физико-технический институт НАН Республики Беларусь, Минск)*

Опыт разработки и применения источников электронов и ионов с плазменными эмиттерами позволяет предполагать возможность создания совмещенного ионно-электронного пучка на основе единой плазменной структуры с определенными в ней электростатическими слоями, формирующими в едином объеме ионный и электронный потоки одного направления. В данной работе предложена экспериментальная электродная структура плазменного электронно-ионного источника для совместного формирования электронных и ионных пучков, приведен ряд характеристик, показана перспективность дальнейшей разработки на ее основе электронно-ионного источника для промышленного применения.

Ключевые слова: *плазменный источник заряженных частиц, электронно-ионное воздействие, электронные пучки, компенсированные ионные пучки.*

Введение. В настоящее время источники ионных и электронных пучков позволяют реализовать обширный кластер современных инновационных технологий обработки, модификации и создания новых материалов. В ряде случаев значительное повышение качества таких технологий и производительности технологического оборудования предусматривает одновременное воздействие электронного и ионного пучков. В данный момент такая технология обычно обеспечивается использованием раздельных электронного и ионного источников. При этом наиболее широкое применение для формирования плазменных поверхностей, эмитирующих ионные или электронные пучки, получили газоразрядные электродные структуры, в которых возбуждаются магнетронные разряды [1; 2], или разряды с осцилляцией электронов «пеннинговского» типа (PIG) [3], или с полым катодом [4; 5]. В технологически необходимых условиях низкого давления газа для снижения напряжения разряда и плотности эмитирующей плазмы в газоразрядных структурах используются термокатоды [6]. Существенным недостатком подобных источников является их недолговечность в газовых разрядах.

В названных разрядах эмитирующая плазма отделена от электродов газоразрядной структуры пристеночными электрическими слоями, параметры которых определяются разностью потенциалов между плазмой и каждым электродом, а также плотностью плазмы, как принято в настоящее время, по условию равенства нулю напряженности электрического поля на ее границе [7]. Эмитирующая поверхность плазмы также подчиняется этому условию [8], поэтому электронно- (ионно-) оптические условия в промежутке ускорения электронов (ионов) и формирование пучка зависят от положения и формы эмитирующей границы плазмы, т.е. от ускоряющего напряжения, геометрии электродов и их потенциала. Это создает определенные трудности формирования пучков большого сечения [9].

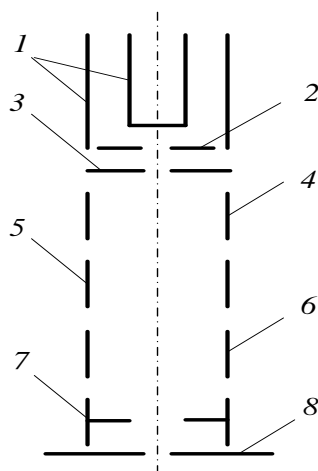
Однако известный эффект возможного формирования вторичной плазмы в ускоряющем промежутке [10] может обеспечить значительное улучшение эмиссионно-оптических свойств источника с плазменным эмиттером: уменьшение расходимости пучка за счет снижения радиального градиента потенциала в ускоряющем промежутке; повышение эмиссионного тока за счет обратного потока зарядов из вторичной плазмы в эмитирующую плазму [11]; повышение первеанса ускоряющей системы за счет частичной компенсации объемного заряда пучка.

Изложенное выше позволяет предполагать:

- 1) возможность создания плазменного объекта с электростатическими слоями в нем, способного обеспечить формирование совмещенных в едином пространстве ионного и электронного пучков;
- 2) многофакторность такой структуры и отсутствие необходимых алгоритмов затрудняет в настоящее время численное моделирование таких структур;
- 3) экспериментальное исследование подобных структур на данном этапе представляется наиболее эффективным для создания технологических источников совмещенных ионно-электронных пучков.

В данной работе предложена концепция и разработанная на ее основе конструкция единой мультirazрядной структуры, способной формировать совмещенные или попеременные ионно-электронные пучки, а также представлены некоторые экспериментальные результаты формирования таких пучков.

Физическая концепция и электродная структура экспериментального источника. Схематически электродная структура экспериментального источника показана на рисунке 1.

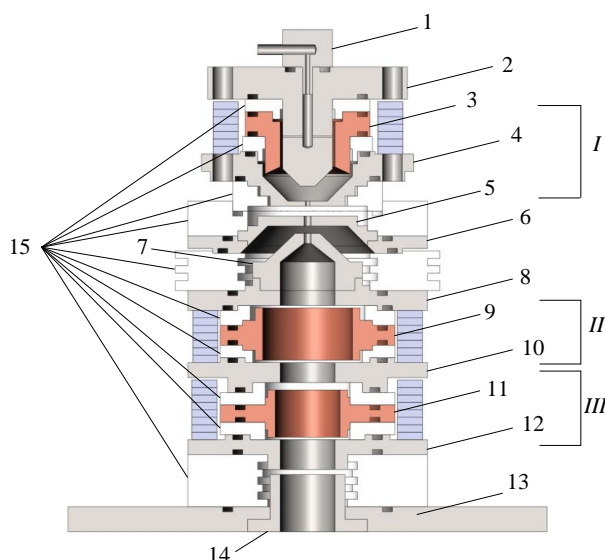


1, 5, 7 – катоды; 2, 4, 6 – аноды; 3 – электрод ускоряющий (электроны); 8 – электрод ускоряющий (ионы)

Рисунок 1. – Схематическая электродная структура разработанного макета электронно-ионного источника со скрещенными $E \times H$ полями

В объеме, ограниченном электродами 1 (катод) и электродом 2 (анод), возбуждается разряд с осциллирующей электронов [12; 13], из плазмы которого электродом 3 обеспечивается эмиссия и ускорение электронов. Электроды 3–7 образуют газоразрядную структуру, формирующую плазму, являющуюся источником распыляющих ионов. Эта структура состоит из двух соединенных последовательно (вдоль оси) газоразрядных ячеек РИГ-типа. Элементы 4 и 6 этой структуры являются анодами разрядных ячеек; элементы 3, 5 и 7 – катодами. Между электродами 7 и 8 прикладывается напряжение, ускоряющее ионы до требуемой технологической энергии распыляющих ионов. В тоже время в этом промежутке (между электродами 7 и 8) осуществляется торможение пучка электронов, ускоренных между электродами 2 и 3.

Реальная конфигурация электродов разработанного макета электронно-ионного источника (эскиз электродной структуры) и блок-схема электропитания показаны на рисунках 2, 3 соответственно.



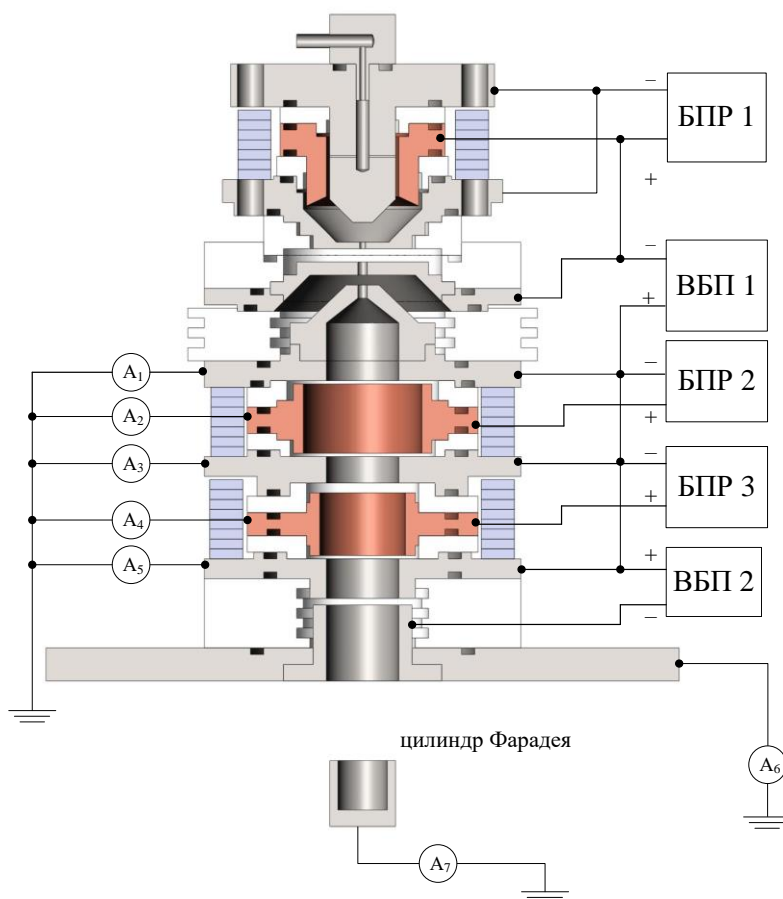
1 – штуцер для напуска плазмообразующего газа; 2 – внутренний катод; 3 – главный анод;
4 – внешний катод; 5 – эмиттерный электрод; 6 – вспомогательный анод; 7 – ускоряющий электрод;
8, 10, 12 – катоды; 9, 11 – аноды; 13 – фланец для установки структуры на рабочую камеру;
14 – согласующий электрод; 15 – изоляторы; I, II, III – области разрядных камер

Рисунок 2. – Электродная структура разработанного макета электронно-ионного источника со скрещенными $E \times H$ полями

Макет представляет собой генератор эмитирующей плазмы, формируемой в объеме, ограниченном внутренними поверхностями катодов 2 и 4, анода 3 и эмиттерного электрода 5 (разрядная камера I). Электроды 6 и 7 образуют промежуток ускорения электронов, где формируется поверхность плазмы, эмитирующая электроны. Электроды 8–12 образуют газоразрядную структуру, формирующую плазму, являющуюся источником распыляющих ионов. Эта структура состоит из двух соединенных последовательно (вдоль оси) газоразрядных ячеек «пеннинговского» типа (II и III) [3]. Элементы 9 и 11 этой структуры являются анодами разрядных ячеек; элементы 8, 10 и 12 – катодами, которые одновременно являются полюсными наконечниками постоянных магнитов. Можно предполагать, что в этих ячейках обеспечивается как осцилляция электронов между катодами, так и подобие их циклоидального движения, реализуемого в разрядах магнетронного типа.

Одновременно с этим магнитное поле, формируемое катодами 8, 10 и 12, образует магнитную фокусирующую систему для ускоренного электронного пучка, распространяющегося вдоль оси второй газоразрядной структуры до выхода из источника ионно-электронного пучка в технологическую камеру. Между электродами 12 и 14 прикладывается напряжение, ускоряющее ионы до требуемой технологией энергии ионов. В то же время в этом промежутке (между электродами 12 и 14) осуществляется торможение пучка электронов, ускоренных в промежутке между электродами 6 и 7. Эмитирующая ионы поверхность плазмы, формирующаяся между электродами 12 и 14, определяет траектории как ионов, так и электронов в пространстве дрейфа электронно-ионного пучка до распыляемой мишени, а значит определяет и распределение плотностей ионного и электронного тока по поверхности мишени.

Независимые системы электропитания и ускорения для каждой разрядной камеры единой структуры (рисунок 3) позволяют формировать различные режимы работы всего источника в целом.



БПР – блок питания разряда соответствующей разрядной (I, II или III камеры) с напряжением разряда U_p до 1000 В и током I_p до 1,2 А; **ВБП** – высоковольтный блок питания с ускоряющим напряжением U_y до 5 кВ и током до 0,5 А; **ВБП 1** – блок ускорения электронов; **ВБП 2** – блок ускорения ионов

Рисунок 3. – Схема подключения электродов разрядных камер электронно-ионного источника на основе разряда в скрещенных $E \times H$ полях

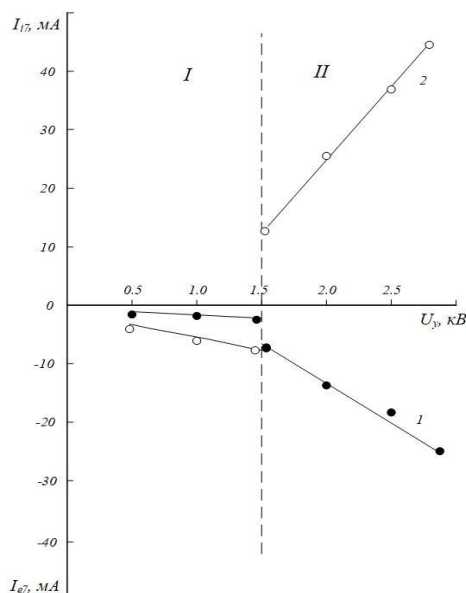
На рисунке 4 представлены вольтамперные характеристики извлечения при одновременном формировании пучка электронов (см. рисунок 2, разрядная камера I) и ионов (см. рисунок 2, разрядные камеры II и III) для двух режимов:

- 1) с фиксированным напряжением 1,5 кВ блока, ускоряющего ионы (см. рисунок 3, ВБП 2), и варьируемым напряжением блока ускорения электронов (см. рисунок 3, ВБП 1);
- 2) с фиксированным напряжением ускорения электронов и варьируемым напряжением ускорения ионов.

В случае фиксированного напряжения ускорения ионов на участке I (рисунок 4, кривая 1) реализуется практически полная компенсация электронного пучка в диапазоне от 0 до 1,5 кВ, ток в цилиндр Фарадея близок к нулевому значению. При превышении ускоряющим электроны напряжением величины +1,5 кВ (фиксированное значение напряжения ускорения ионов –1,5 кВ) ток в цилиндр Фарадея повышается.

При фиксации напряжения ускорения электронов на уровне +1,5 кВ и варьировании напряжения ускорения ионов (рисунок 4, область I, кривая 2), ток в цилиндр Фарадея претерпевает скачкообразное изменение полярности в области напряжения 1,5 кВ (рисунок 4, кривая 2), что свидетельствует о взаимной компенсации электронного и ионного пучков до этого значения и преобладающей эмиссии из источника ионов при напряжениях свыше 1,5 кВ. Значение тока эмиссии ионов при напряжении 3 кВ составляет 45 мА, а плотность тока эмиссии ионов – порядка 10 мА/см², что свидетельствует о перспективности разработки на базе данной конструкции электронно-ионного источника для промышленной реализации различных технологий обработки и модификации поверхностей материалов.

Необходимо отметить, что на рисунке 4 в области I существует область неопределенности полярности тока эмиссии, что обусловлено, по-видимому, наличием в разрядных структурах II и III (см. рисунок 2) двойных электрических слоев. При ускоряющих напряжениях более 1,5 кВ в области II (рисунок 4) поле двойных электрических слоев оказывает уже слабое влияние на движение зарядов в газоразрядных структурах II и III (см. рисунок 2), а токи электронов I_{e7} и ионов I_{i7} (рисунок 4) имеют определенные значения. Важно, что эксперименты проводились в широком диапазоне значений напусков газа 1,1–3,5 мПа·м³/с и токов разряда 0,18–0,24 А. Полученные характеристики оказались подобны уже представленным и на рисунках не приводятся. Линейный вид вольтамперных характеристик обеспечивает высокую управляемость технологическими характеристиками источника. Наличие дополнительных разрядных структур и соответствующих систем электропитания, конечно, усложняет конструкцию источника, однако однозначность влияния напряжения в дополнительных блоках питания на характеристики извлечения источника в целом позволяет создать общую согласованную автоматизированную систему управления. Приведенные характеристики свидетельствуют о возможности разработки технологического источника заряженных частиц для реализации технологий, требующих комбинированного воздействия электронными и ионными пучками.



I_{i7} – ионный ток в цилиндр Фарадея;

1 – фиксированное напряжение ускорения ионов 1,5 кВ (см. рисунок 3, ВБП 2);

2 – фиксированное напряжение ускорения электронов 1,5 кВ (см. рисунок 3, ВБП 1);

ток разряда в камере I (см. рисунок 2) 200 мА, напряжение горения разряда 420 В;

ток разряда в камере II (см. рисунок 2) 180 мА, напряжение горения разряда 410 В

Рисунок 4. – Ток I_{i7} (в цилиндр Фарадея); I_{e7} – электронный ток в цилиндр Фарадея

Заключение. Представленная конструкция плазменного источника заряженных частиц далеко не исчерпывает весь спектр возможных технологических и конструктивных решений, а только показывает потенциальные возможности такого типа источников для решения актуальных задач формирования технологически совмещенных электронных и ионных пучков для реализации электронно-лучевого ассистирования плазмохимическим процессам или комбинированного воздействия электронными и ионными пучками. Проведенные испытания показали перспективность разработанной конструкции для реализации режимов формирования электронного пучка с повышенным первеансом и формирования совместных электронно-ионных пучков, однако возможности разработанной структуры не ограничиваются этими режимами работы. Предложенная конструкция может служить прототипом для создания технологических источников для формирования скомпенсированных ионных пучков, пучков нейтральных атомов или для реализации попеременного или одновременного воздействия пучками обоих типов заряженных частиц. Такого типа источники могут стать уникальным универсальным инструментом для нанесения пленочных покрытий различного назначения [11; 12]. Подобные системы могут представлять интерес как в качестве отдельных источников, так и в качестве ячеек мультиразрядного источника для формирования воздействия на большие площади.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барченко, В.Т. Физика и технология плазменных эмиссионных систем / В.Т. Барченко. – СПб. : Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2014. – 286 с.
2. Кузьмичев, А.И. Магнетронные распылительные системы / А.И. Кузьмичев – Киев : Аверс, 2008. – Кн. 1 : Введение в физику и технику магнетронного распыления. – 244 с.
3. Coating by Cathode Disintegration : pat. US 2,146,025 / Penning F.M. ; N.V. Philips, Gloeilampenfabrieken, Eindhoven, The Netherlands. – 1939.
4. Москалев, Б.И. Разряд с полым катодом / Б.И. Москалев. – М. : Энергия, 1969. – 184 с.
5. Крейндел, Ю.Е. Плазменные источники электронов / Ю.Е. Крейндел. – М. : Атомиздат, 1977. – 145 с.
6. Алямовский, И.В. Электронные пучки и электронные пушки / И.В. Алямовский. – М. : Советское Радио, 1966. – 454 с.
7. Груздев, В.А. О механизме возникновения электрического поля в плазме при эмиссии электронов / В.А. Груздев, В.Г. Залесский // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2014. – № 4. – С. 103–108.
8. Груздев, В.А. Формирование эмиссионного тока в плазменных эмиттерах электронов. / В.А. Груздев, В.Г. Залесский // Прикладная физика. – 2009. – № 5. – С. 82–90.
9. Gruzdev, V.A. Electron-optical characteristics of the beam generated by the electron plasma sources / V.A. Gruzdev, V.G. Zaleski // Electrotechnica and electronica. – Bulgaria, 2014 – V. 49, № 5–6. – P. 264–268.
10. Gruzdev V.A. Emission current formation in plasma electron emitters / V.A. Gruzdev, V.G. Zaleski // Plasma Physics Reports. – 2010. – № 36. – P. 1191–1198.
11. Залесский, В.Г. Эмиссионные и электронно-оптические системы плазменных источников электронов : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.04.04 / В.Г. Залесский. – Минск, 2015. – 316 л.
12. Universal plasma electron source / V.A. Gruzdev [et al.]. // Vacuum. – 2005. – №77. – P. 399–405.
13. Zaleski V.G. Peculiarities of plasma electron sources operation at high pressures / V.G. Zaleski, D.A. Antonovich // Journal of Physics D: Applied Physics. – 2007. – № 40. – P. 7771–7777.

Поступила 12.03.2020

THE ELECTRODE STRUCTURE OF A PLASMA ELECTRON-ION SOURCE FOR THE SIMULTANEOUS FORMATION OF ELECTRON AND ION BEAMS

D. ANTONOVICH, V. GRUZDEV, P. SOLDATENKO, V. ZALESKI

The experience of developing and using electron and ion sources with plasma emitters suggests the possibility of creating a combined ion-electron beam based on a single plasma structure with certain electrostatic layers in it, forming ion and electron flows in the same direction and in a single volume. In this work, the experimental electrode structure of a plasma electron-ion source for the joint formation of electron and ion beams is proposed, a number of characteristics are given, and the prospects for the further development of an electron-ion source for industrial application on its basis are shown.

Keywords: plasma source of charged particles, electron-ion influence, electron beams, compensated ion beams.

УДК 539.2

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ АСФАЛЬТЕНОВ С ПОМОЩЬЮ АТОМНО-СИЛОВОЙ МИКРОСКОПИИ

канд. техн. наук, доц. А.В. ВАСЮКОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. С.А. ВАБИЩЕВИЧ,
Н.П. СУХОВИЛО, Н.В. ВАБИЩЕВИЧ
(Полоцкий государственный университет)

Представлены результаты исследования структуры асфальтенов методами атомно-силовой микроскопии. Показана возможность применения атомно-силового микроскопа (АСМ) NT-206 и использования пленок Ленгмюра – Блоджетт для изучения структуры поверхности асфальтенов.

Ключевые слова: битум, атомно-силовая микроскопия, элементы структуры, асфальтены, кластеры.

Введение. Основным структурным компонентом нефтяных остатков и полученных из них продуктов являются асфальтены – твердые органические вещества, нерастворимые в низших алканах. Вместе с некоторыми смолами асфальтены образуют в нефти первичные дисперсные частицы, которые сольватируются смолами и полициклическими ароматическими углеводородами.

Согласно литературным данным, исследования асфальтенов в последнее время проводятся достаточно активно. Так, в работах [1; 2] показаны результаты исследования микрорельефа поверхности гудрона, кокса и продуктов его карбонизации и графитирования. В статье [3] предложены три варианта построения молекул асфальтена, относящихся к классу молекул, состоящих из сгруппированных ароматических колец с алкановыми цепями (рисунок 1).

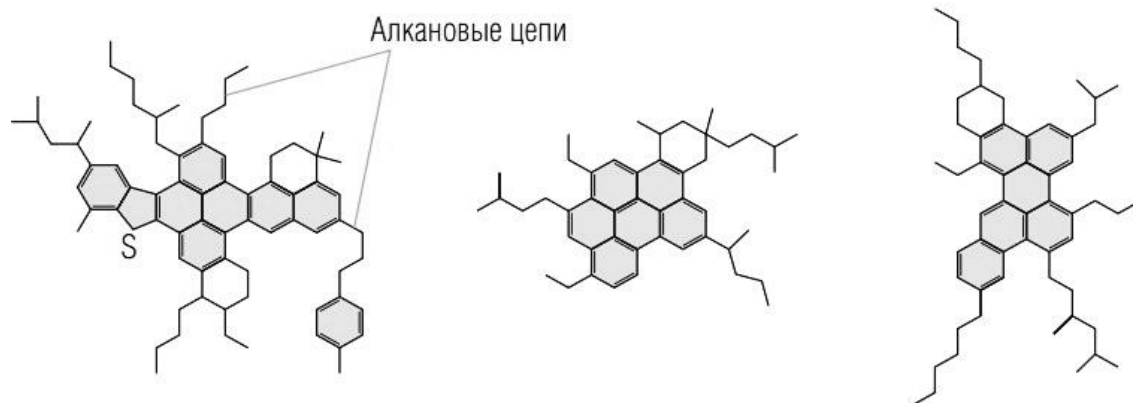


Рисунок 1. – Строение молекул асфальтенов [3], где S – атом серы

Установлено, что стандартные методы анализа легких фракций нефти, например, методы газовой хроматографии, неприменимы к анализу тяжелых нефтяных фракций смол и асфальтенов.

Согласно выводам, полученным авторами [3] по поводу методов изучения асфальтенов, «список методов, использующихся для изучения асфальтенов и других тяжелых фракций, включает масс-спектрометрию, электронную микроскопию, методы ядерно-магнитного резонанса, методы малоуглового рассеяния нейтронов и рентгеновских лучей, ультразвуковую спектроскопию, метод динамического рассеяния света, флуоресцентную корреляционную спектроскопию, метод деполяризации флуоресценции, обратную эбуллиоскопию и гель-проникающую хроматографию. Поскольку эти методы исследуют разные свойства асфальтенов в разных условиях, неудивительно, что на выходе получают совершенно несопоставимые модели молекул асфальтенов».

Из литературных данных известно [6–8], что метод атомно-силовой микроскопии может быть успешно использован для исследования поверхностного состояния твердотельных структур, приповерхностных слоев и пленок. Необходимость систематизации сведений о моделях молекул асфальтенов и трудности ее осуществления указывают на необходимость анализа возможности применения атомно-силовой микроскопии (АСМ) для исследования структуры поверхности асфальтенов.

Методика измерения. С целью исследования структуры молекул асфальтены были выделены из битумов, применяемых для анализа по методу Маркуссона, по стандартной методике [4].

Асфальтены представляют собой хрупкие твердые вещества темно-коричневого цвета с плотностью около 1,2 г/см³, не растворимые в алканах, но растворимые в толуоле, бензоле. Полученные асфальтены были растворены в бензоле следующих концентраций: 0,1% (массовая доля 1000 мг/л), 0,01% (массовая доля 100 мг/л) и 0,001% (массовая доля 10 мг/л). Растворы наносились на обезжиренную подложку по технологии Ленгмюра – Блоджетт [5], которая позволяет получить сверхтонкие молекулярные пленки, с контролируемой толщиной.

Одновременно исследовалась возможность использования пленок Ленгмюра – Блоджетт для изучения структуры поверхности асфальтенов. Исследование поверхности и измерение геометрических размеров макромолекул асфальтенов проводились по стандартной методике на атомно-силовом микроскопе NT-206.

Экспериментальные результаты. На рисунках 2–4 представлены результаты исследования 0,1%-го раствора асфальтена в бензоле.

На рисунке 2 показано АСМ 2D-изображение 0,1%-го раствора асфальтена в бензоле (белые отрезки разной длины и размера – макромолекулы асфальтена). Размер поля сканирования составляет 5×5 мкм. На рисунке 3 показан профиль четырех макромолекул асфальтена и отмаркированы их характерные точки измерения. Поскольку макромолекула асфальтена имеет геометрические размеры по ширине (*H*), длине (*L*) и высоте (*h*), то все эти величины были измерены у соответствующих макромолекул.

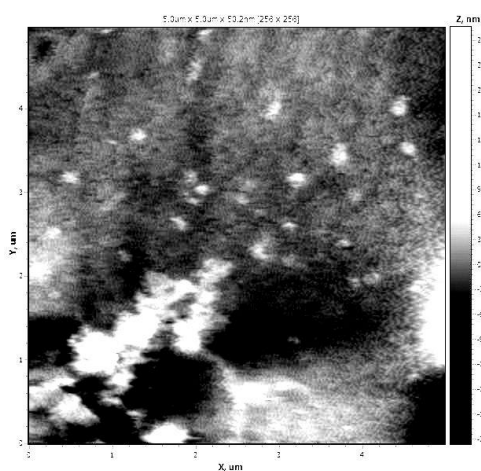


Рисунок 2. – 2D-изображение поверхности пленок раствора асфальтенов

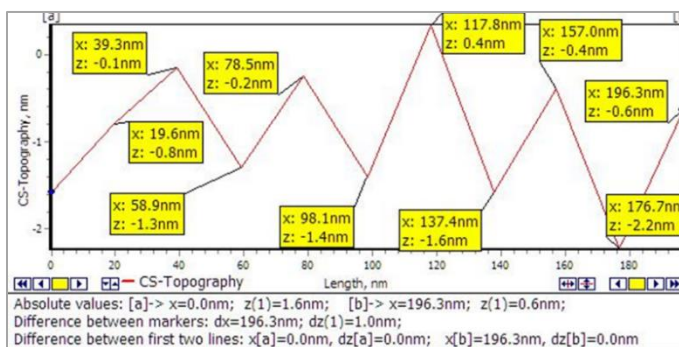
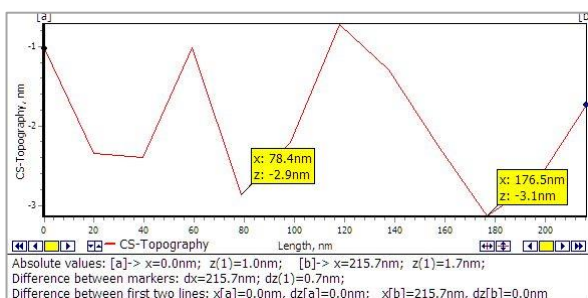
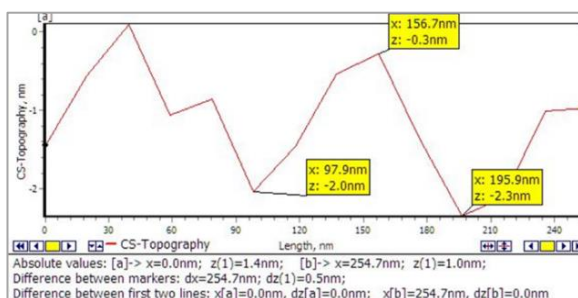


Рисунок 3. – Профиль по ширине макромолекул асфальтена

На рисунке 4 а, б показаны профили, измеренные по длине макромолекулы, отличающиеся геометрическими размерами макромолекул асфальтена.



а



б

Рисунок 4. – Профили выбраны по длине макромолекул асфальтена

Анализ экспериментальных данных позволил определить усредненные размеры макромолекул в 0,1%-м растворе асфальтена в бензоле (таблица 1).

Таблица 1. – Размеры макромолекул в 0,1%-м растворе асфальтена. Серия измерений 1 (5 макромолекул)

<i>H</i> , нм	39,3	39,2	39,3	39,3	39,2
<i>L</i> , нм	98,0	98,1	98,0	98,0	98,3
<i>h</i> , нм	1,1	1,2	1,6	2,1	2,6

Согласно полученным экспериментальным данным ширина и длина макромолекул в 0,1%-м растворе асфальтена являются близкими величинами, в то время как высота макромолекулы, измеренная в разных точках, отличается более, чем в два раза.

По методике [5] были нанесены пленки асфальтенов из 0,01%-го и 0,001%-го растворов асфальтена в бензоле.

Экспериментальные результаты измерений геометрических размеров макромолекул асфальтена в 0,01%-м растворе в бензоле представлены в таблицах 2, 3.

Обнаружено, что при разбавлении 0,1%-го раствора асфальтена до концентрации 0,01% появляются макромолекулы асфальтенов шириной 58,6 нм и 39,0 нм. Поскольку меняется высота измеренных макромолекул (таблицы 2, 3), то можно предположить, что молекулы асфальтена налипают друг на друга по высоте.

Таблица 2. – Размеры макромолекул по ширине и высоте в 0,01%-м растворе асфальтена. Серия измерений 2 (14 макромолекул)

Количество измеренных макромолекул	Ширина, нм	Высота, нм
3	58,6; 58,6 39,1	1,3; 1,4; 1,8;
5	58,6 58,6 58,6 58,6 58,6	1,4; 1,9; 2,1; 2,3; 2,9
6	39,0 58,6 58,6 58,6 58,6 58,6	1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 2,0
Примечание	Появляются новые по строению макромолекулы асфальтенов	Налипают единичные молекулы

Были выполнены измерения геометрических размеров макромолекул асфальтена по их длине и высоте (таблица 3).

Таблица 3. – Размеры макромолекул по длине и высоте в 0,01%-м растворе асфальтена. Серия измерений 3 (5 макромолекул)

Количество измеренных макромолекул	Длина, нм	Высота, нм
1	177,1	2,2
2	156,7 156,7	1,6 2,2
1	150,6	1,1
1	136,7	2,6

Из представленных в таблице 3 результатов видно, что длины макромолекул асфальтена отличаются друг от друга и превышают измеренную длину макромолекул в 0,1%-м растворе асфальтена, где она составляет 98,0 нм.

В таблице 4 представлены результаты измерений макромолекул в 0,001%-м растворе асфальтена в бензоле по ширине и высоте, которые свидетельствуют о том, что при дальнейшем уменьшении концентрации раствора асфальтена до 0,001%, структура растворенных асфальтенов меняется, появляются макромолекулы разных геометрических размеров.

Таблица 4. – Размеры макромолекул по ширине и высоте в 0,001%-м растворе асфальтена. Серия измерений 4 (18 макромолекул)

Количество измеренных макромолекул	Ширина, нм	Высота, нм
3	45,2 67,9 90,4 = (45,2x2)	3,3 3,6 3,7
4	58,8 58,8 58,9 78,5 = (39,2x2)	2,7 2,8 3,2 2,8
5	58,8 58,8 58,9 39,3 39,2	3,3 2,5 3,3 3,4 3,5
6	59,3 59,3 Плюс 4 молекулы по 79,0 = (59,3 + 19,7)	1,6 2,3 2,5 3,2 4,0 4,5

Такие макромолекулы в зависимости от их ширины можно разбить на группы и отнести к одному из трех типов:

I тип макромолекул: 39,2 нм (0,1%-й раствор); 39,1 нм (0,01%-й раствор); 39,2 нм (0,001%-й раствор);

II тип макромолекул: 45,2 нм (0,001%-й раствор);

III тип макромолекул: 58,6 нм – 59,3 нм (0,01–0,001%-й раствор).

Макромолекулы шириной 67,9 нм и 79,0 нм – это составные макромолекулы второй и третьей групп. Установлено, что изменение высоты от 1,1 нм до 4,5 нм присуще всем используемым растворам, что свидетельствует о слипаемости асфальтенов по высоте макромолекулы.

В таблице 5 показаны результаты измерений макромолекул по длине и высоте их кластеров для 0,001%-го раствора асфальтена. Из анализа профиля по длине макромолекулы (таблица 5, измерения 1) следует, что суммарная длина выбранной макромолекулы асфальтена по координатной сетке составляет **445,8 нм**.

При проведении измерений видно, что макромолекулы 0,001%-го раствора асфальтена в бензоле распадаются на более мелкие фрагменты – кластеры, слипшиеся друг с другом. Длина отдельных кластеров в макромолекуле составляет от 44,5 до 44,6 нм, а высота изменяется от 1,1 до 1,7 нм.

Анализ профиля по длине макромолекулы (таблица 5, измерение 2) свидетельствует, что суммарная длина выбранной макромолекулы асфальтена по координатной сетке составляет **307,0 нм**.

Если разделить измеренную длину макромолекулы (таблица 5, столбец 5) на измеренную длину формирующих ее кластеров (таблица 5, столбец 3), то кратное от деления (таблица 5, столбец 6) будет иметь целые значения.

Результаты измерений макромолекул, приведенные в таблице 5, подтверждают наличие в 0,001%-м растворе различных по строению асфальтенов, имеющих разные по длине кластеры наноагрегатов: 40,5 нм; 42,2 нм; 44,5 нм; 76,7 нм.

Таблица 5. – Размеры макромолекул по длине и высоте в 0,001%-м растворе асфальтена. Серия измерений 5 (19 макромолекул)

Количество измеренных макромолекул	Длина кластеров, нм	Высота, нм	Суммарная длина макромолекулы, нм	Кратное от деления
4	44,5 44,6 44,6 44,5	1,1 1,2 0,9 1,1	445,8	10,0
4	76,7 76,8 76,8 76,7	0,8 1,1 1,7	307,0	4,0
4	42,2 ; 63,3=(42,2+21,1) 42,2 63,3	0,9; 1,0; 1,3 1,3	464,2	11,0
5	40,5 ; 42,2 40,6 42,2 40,5	1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7	324,4	8,0

Обсуждение экспериментальных результатов

0,1%-й раствор асфальтена в бензоле. Как видно из измерений, ширина, длина и высота макромолекул в 0,1% растворе асфальтена в бензоле довольно стабильна и составляет $H_0 = 39,2$ нм; $L_0 = 90,0$ нм; $h_0 = 1,1 - 2,6$ нм.

Различие по высоте макромолекул позволяет предположить, что в 0,1%-м растворе асфальтена макромолекулы слипаются друг с другом по высоте, в виде «пачек параллельно расположенных плоских молекул» в 2–3 слоя [3]. Макромолекулы асфальтенов в растворах высоких концентраций имеют практически одинаковые геометрические размеры по ширине, длине и высоте. Возможно, это происходит за счет π-поляризации электронных облаков и полярных групп гетероатомов молекул асфальтенов [3].

0,01%-й раствор асфальтена в бензоле. При разбавлении раствора асфальтена до концентрации 0,01% наряду с однотипными показателями замеров, обнаружено специфическое отклонение результатов измерений высоты и длины макромолекул. Это можно объяснить отдалением макромолекул асфальтенов друг от друга и, как следствие, уменьшением воздействия поляризации электронных облаков и полярных групп молекул асфальтенов. Имеющие похожее пространственное строение макромолекулы можно сгруппировать по ширине и высоте:

$$H_1 = 39,2 \text{ нм}; \quad h_1 = 1,1 - 2,9 \text{ нм};$$

$$H_2 = 58,6 \text{ нм}; \quad h_2 = 1,2 - 2,9 \text{ нм}.$$

Разброс по высоте позволяет предположить, что и в 0,01%-м растворе асфальтена макромолекулы продолжают слипаться друг с другом по высоте, в виде «пачек параллельно расположенных плоских молекул» [4]. Длина макромолекул в 0,01%-м растворе асфальтенов изменилась и составила: 177,1 нм; 156,7 нм; 150,6 нм; 136,7 нм. Видимо, удлинение «пачек» макромолекул происходит за счет слипания фрагментов макромолекул асфальтена друг с другом.

0,001% раствор асфальтена в бензоле. Установлено, что при разбавлении раствора асфальтенов до 0,001% (как и при разбавлении до 0,01%) измеренные длины макромолекул асфальтена не являются постоянными. Более того, макромолекула распадается на более мелкие фрагменты, чем в растворах с более высокой концентрацией. Макромолекулы слипаются торцами в длинные цепи и даже закручиваются в спирали. Сканирование поверхности для этого случая представлено на рисунке 5.

Результаты измерений макромолекул, приведенные в таблице 5, подтверждают наличие в 0,001%-м растворе различных по строению асфальтенов, имеющих различные по длине кластеры наноагрегатов: 40,5 нм; 42,2 нм; 44,5 нм; 76,7 нм.

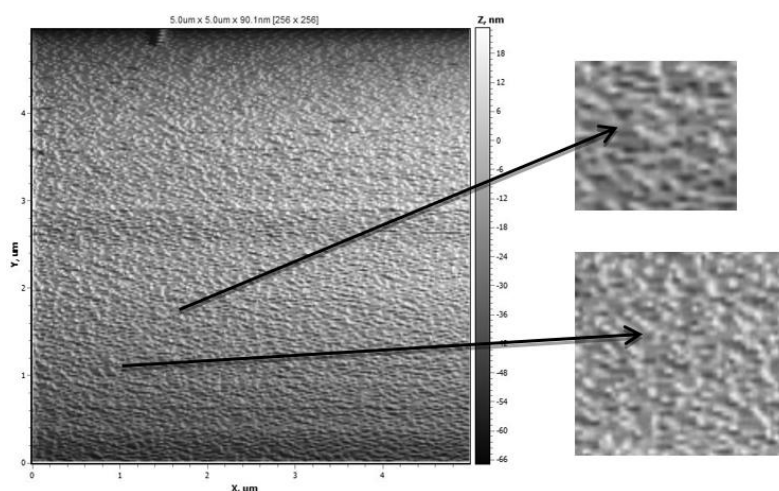


Рисунок 5. – 3D-изображение поверхности пленок 0,001%-го раствора асфальтенов

Анализ полученных в настоящей работе экспериментальных данных и измерений позволяет предложить следующую классификацию макромолекул асфальтенов по геометрическим размерам их молекул и кластеров:

группа I:	$H_0 = 39,2$ нм;	$L_0 = 90,0$ нм;	$h_0 = 1,1 - 2,6$ нм.
группа II:	$H_1 = 45,2$ нм;	$L_1 = 40,5 - 44,5$ нм;	$h_1 = 1,1 - 2,9$ нм.
группа III:	$H_2 = 58,6$ нм;	$L_2 = 76,7$ нм;	$h_2 = 1,2 - 2,9$ нм.

Группа I включает пространственные измеренные размеры макромолекул в 0,1%-м растворе асфальтена в бензоле. В группу II включены измеренные геометрические размеры макромолекул в 0,01%-м и 0,001%-м растворах. В группе III выделены наиболее часто встречающиеся пространственные размеры макромолекул в 0,001%-м растворе асфальтенов.

В работе [3] приведены данные об агрегационном поведении асфальтенов при повышении их концентрации (рисунок 6). При 0,001%-й концентрации раствора асфальтена в бензоле его массовая доля составляет 10^{-5} . Исходя из данных работы [3], можно предположить, что обнаруженные в настоящей работе макромолекулы относятся к «отдельным молекулам, наблюдающимся только при низких концентрациях – ниже 100 мг/л (т.е. при массовой доле менее 10^{-4})».

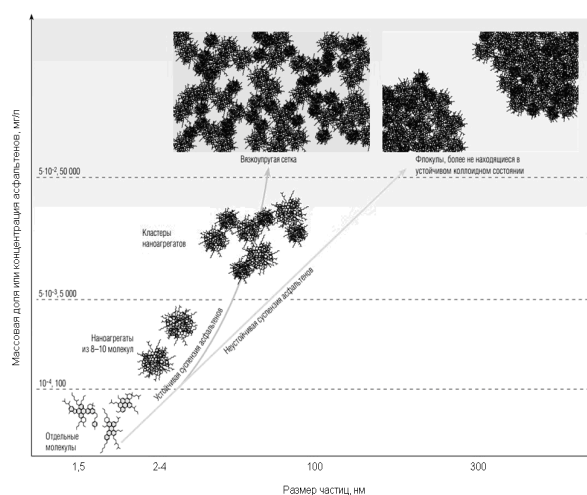


Рисунок 6. – Иллюстрация агрегационного поведения асфальтенов при повышении их концентрации [3]

В заключение следует отметить, что согласно литературным данным [3] существует проблема анализа структуры молекул асфальтенов, поскольку экспериментальные результаты приводят к появле-

нию несопоставимых моделей молекул асфальтенов, полученных при разных методах анализа, смене растворителей, проведении анализа в разных условиях и т.д. [3]. В то же время в настоящей работе экспериментально показано, что метод АСМ можно успешно использовать для оценки размеров молекул асфальтена по их геометрической модели.

Заключение. Результаты работы подтверждают возможность применения зондовой атомно-силовой микроскопии для исследования поверхности гетероатомных соединений нефтяных остатков. Использование технологии Ленгмюра – Блоджетт и полученных с ее помощью тонких пленок позволяет проводить изучение не только твердотельных структур [6–8], но твердых составляющих нефти (асфальтенов, коксов, парафинов, нафталинов) и любых нефтяных дисперсных систем. Применяя вышеназванные методы исследования, удалось установить пространственные размеры макромолекул асфальтенов и агрегационное поведение асфальтенов при изменении концентрации их растворов. Полученные результаты измерений дают нам право выделить по геометрическим размерам макромолекулы асфальтена 44,5×1,1 нм; 76,7×1,1 нм; 42,2×1,1 нм; 40,5×1,1 нм, собранные в наноагрегаты из 4–11 молекул длиной 445,8 нм; 307,0 нм; 464,2 нм; 324,4 нм соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Элементы структуры тяжелых нефтяных остатков и их изменение в процессе термического и термоокислительного воздействия / С.М. Ткачев [и др.]. // Методологические аспекты сканирующей зондовой микроскопии : сб. докл. XII Междунар. конф., Минск, 18–21 окт. 2016 г. / Нац. акад. Беларуси, Ин-т тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова ; редкол. : С.А. Чижик (пред.) [и др.]. – Минск : Беларуская навука, 2016. – С. 189–195.
2. Васюков, А.В. Трансформация структуры углеродных материалов в процессе термической обработки / А.В. Васюков, С.М. Ткачев, П.М. Поляшкевич // Методологические аспекты сканирующей зондовой микроскопии : сб. докл. XII Междунар. конф., Минск, 18–21 окт. 2016 г. / Нац. акад. Беларуси, Ин-т тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова ; редкол. : С.А. Чижик (пред.) [и др.]. – Минск : Беларуская навука, 2016. – С. 169–175.
3. Асфальтены: Проблемы и перспективы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.slb.com/~media/Files/resources/oilfield_review/russia07/sum07/03_Aspaltenes.pdf.
4. Химическая технология природных энергоносителей и углеродных материалов : учеб.-метод. комплекс для студ. специальности 1-48 01 03 дневной и заочной форм обучения / Сост. и общ. ред. С.В. Покровской. – Новополоцк : ПГУ, 2006. – 268 с.
5. Матвеева, Н.К. Исследование возможностей использования пленок Ленгмюра – Блоджетт для создания тактильных датчиков / Н.К. Матвеева // Перспективы науки. – Тамбов, Фонд развития науки и культуры. – 2012. – № 7 (34) – С. 64–68.
6. Атомно-силовая микроскопия пленок позитивного диазохиноноволачного фоторезиста, имплантированного ионами бора / С.А. Вабищевич [и др.]. // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 37–41.
7. Васюков, А.В. Сканирование поверхностей твердотельных структур и нефтяных дисперсных систем методом атомно-силовой микроскопии / А.В. Васюков, С.А. Вабищевич // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 52–56.
8. Исследование поверхности полимеров модифицированной радиационной обработкой / А.А. Харченко [и др.]. // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2013. – № 12. – С. 83–90.

Поступила 11.03.2020

RESEARCH OF SURFACE OF ASPHALTENES BY ATOMIC-POWER MICROSCOPY

A. VASYUKOV, S. VABISHCHEVICH, N. SUKHOVILO, N. VABISHCHEVICH

The results of studying the structure of asphaltenes by atomic force microscopy are presented. The possibility of using the atomic force microscope (AFM) NT-206 and the use of Langmuir – Blodgett films to study the surface structure of asphaltenes is shown.

Keywords: bitumen, atomic force microscopy, structural elements, asphaltenes, clusters.

УДК 539.3

ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ ТОЛСТОСТЕННОГО ЦИЛИНДРА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Е. МАРМЫШ
(Белорусский государственный университет, Минск)

Рассмотрены четыре типа граничных задач (в напряжениях, перемещениях, смешанные граничные условия и граничные условия в виде распределения температурного поля на стенках цилиндра) для толстостенного кругового цилиндра. В каждом из случаев представлены формулы определения напряженного состояния стенки цилиндра и ее радиальных перемещений. Для каждого типа граничных задач применена теория состояния объемной повреждаемости и получены в замкнутом виде формулы для вычисления опасных объемов и интегральной повреждаемости в зависимости от величин давлений, смещений и температур, приложенных к внутренней и внешней стенкам толстостенного цилиндра. Показатели повреждаемости толстостенного цилиндра можно использовать при проектировании и разработке технических систем, в которых цилиндрические элементы подвергаются циклическому нагружению.

Ключевые слова: толстостенный цилиндр, напряженно-деформированное состояние, граничные задачи, повреждаемость, опасный объем.

Введение. В современной инженерной практике проектирования и разработки технических объектов толстостенные цилиндры имеют самое широкое распространение в силу простоты их изготовления любых размеров (диаметра, толщины стенки, длины) и практически из любых материалов. Материал изготовления может быть как однородным изотропным, так и анизотропным, а также многослойным композитом, в зависимости от тех условий, в которых предполагается эксплуатация систем, содержащих толстостенные цилиндры.

Многие системы работают в условиях гармонического или случайного (пульсирующего) циклического нагружения силовым и/или температурным полем, например, газо- и нефтепроводный транспорт, системы жидкостного охлаждения, военная техника, резервуары и проч. Кроме того, цилиндры могут эксплуатироваться в агрессивных средах, в которых материал стенки подвергается коррозионному разрушению.

Первые подходы к расчету напряженно-деформированного состояния толстостенных цилиндров были предприняты достаточно давно и на данный момент получены некоторые точные решения по расчету напряжений и деформаций в стенке цилиндра [1]. В настоящее время предпринимаются активные попытки разработки механико-математических моделей прогнозирования предельных состояний и ресурса работы цилиндров. В многом подходы к построению данных моделей являются эмпирическими и полуэмпирическими, основанными на опыте эксплуатации подобных систем [2–4].

1. Граничная задача для толстостенного цилиндра в напряжениях. Граничная задача для толстостенного цилиндра была рассмотрена Г. Ламе и им же впервые было получено аналитическое решение для описания напряженно-деформированного состояния цилиндра. Радиальные σ_r и окружные напряжения σ_θ , возникающие в толстостенном круговом цилиндре, определяются соответственно по формулам [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{E} &= \frac{1}{1-\mu^2} \left[(1+\mu)A - \frac{1-\mu}{r^2} B \right], \\ \frac{\sigma_\theta}{E} &= \frac{1}{1-\mu^2} \left[(1+\mu)A + \frac{1-\mu}{r^2} B \right], \end{aligned} \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad (1)$$

где E и μ – упругие постоянные;

r_1 и r_2 – внутренний и внешний радиусы кругового цилиндра соответственно;

A и B – постоянные, которые определяются из граничных условий.

Радиальное смещение точек стенки цилиндра определяется по формуле

$$u = Ar + \frac{B}{r}. \quad (2)$$

Хорошо известно решение, когда на внутренней поверхности цилиндра действует внутреннее давление p_1 ($\sigma_r|_{r=r_1} = -p_1$), а на наружной поверхности – наружное давление p_2 ($\sigma_r|_{r=r_2} = -p_2$) [2]:

$$\sigma_r = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2},$$

$$\sigma_0 = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2}, \quad (3)$$

$$u = \frac{1-\mu}{E} \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1+\mu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r}.$$

2. Повреждаемость и ее численное определение. В общем случае повреждаемость характеризуется тремя параметрами [3]:

- опасным объемом

$$V = \int_{\sigma \geq \sigma^{(*\text{lim})}} dV; \quad (4)$$

- локальной повреждаемостью в точке среды (ψ)

$$\psi = \frac{\sigma}{\sigma^{(*\text{lim})}}; \quad (5)$$

- интегральной повреждаемостью всей среды (Ψ)

$$\Psi = \int_{\sigma \geq \sigma^{(*\text{lim})}} \frac{\sigma}{\sigma^{(*\text{lim})}} dV. \quad (6)$$

Опасным объемом будем называть объем рассматриваемой среды, в каждой точке которой действующие напряжения σ превышают предельные напряжения $\sigma^{(*\text{lim})}$. Считая, что действующие напряжения σ определяются функцией радиус-вектора x , т.е. $\sigma = f(x)$, при вычислении опасного объема приходим к неравенству

$$\sigma = f(x) \geq \sigma^{(*\text{lim})}. \quad (7)$$

Таким образом, опасный объем – это множество точек, действующие напряжения в которых удовлетворяют неравенству (7).

В качестве относительной интегральной повреждаемости может быть использовано отношение опасного объема к рабочему V_k [4]

$$\omega_k = \frac{V}{V_k}. \quad (8)$$

Соответственно, простейшие функции накопления повреждаемости во времени для единицы объема и всего опасного объема будут иметь вид

$$d\Psi^{(t)} = \int_t \psi(t) dt \text{ и } \Psi^{(V,t)} = \int_{\sigma \geq \sigma^{(*\text{lim})}} \int_t \psi(V,t) dt dV. \quad (9)$$

Для интегральной оценки повреждаемости могут быть использованы показатели средней по объему повреждаемости и ее изменения во времени

$$\Psi^{(Vav)} = \frac{1}{V} \int_{\sigma \geq \sigma^{(*\text{lim})}} \Psi(V) dV \text{ и } \Psi^{(Vav,t)} = \frac{1}{V} \int_{\sigma \geq \sigma^{(*\text{lim})}} \int_t \Psi(V,t) dt dV. \quad (10)$$

Функции (4)–(10) позволяют анализировать объемную повреждаемость систем в различных пространственных областях и во времени.

3. Повреждаемость толстостенного цилиндра при действии внутреннего и внешнего давления. Рассмотрим повреждаемость цилиндра при приложении к нему внутреннего и наружного давления. Для сокращения математических выражений введем следующие обозначения:

$$C_1 = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad C_2 = \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (11)$$

При приложении к цилиндру давления первоначальное разрушение происходит на внутренней поверхности цилиндра, где возникают максимальные растягивающие (окружные) напряжения σ_0^{\max} . Особую опасность представляют случаи, когда на поверхностях цилиндра имеются дефекты и трещины, ориентированные вдоль оси цилиндра [5]. Величина максимальных окружных напряжений с учетом (11) равна

$$\sigma_0^{\max} = C_1 + \frac{C_2}{r_1^2}. \quad (12)$$

Вычислим по формулам (4) и (6) опасный объем и повреждаемость цилиндра, используя первую теорию предельных напряжений, т.е. для случая, когда $\sigma_0 \geq \sigma^{(*\text{lim})}$. Тогда $\sigma_0 = C_1 + \frac{C_2}{r_{\text{lim}}^2} = \sigma^{(*\text{lim})}$, откуда

$$r_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{C_2}{\sigma^{(*\text{lim})} - C_1}}. \quad (13)$$

Опасный объем

$$V = 2\pi l \int_{r_1}^{r_{\text{lim}}} r dr = \pi l (r_{\text{lim}}^2 - r_1^2), \quad (14)$$

где l – длина нагруженной части цилиндра.

Повреждаемость согласно формуле (6)

$$\Psi = \int_{\sigma \geq \sigma^{(*\text{lim})}} \frac{\sigma}{\sigma^{(*\text{lim})}} dV = \frac{1}{\sigma^{(*\text{lim})}} \int_{\sigma \geq \sigma^{(*\text{lim})}} \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) dV = \frac{2\pi l}{\sigma^{(*\text{lim})}} \int_{r_1}^{r_{\text{lim}}} \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) dr = \frac{\pi l}{\sigma^{(*\text{lim})}} \left[C_1 (r_{\text{lim}}^2 - r_1^2) + 2C_2 \ln \frac{r_{\text{lim}}}{r_1} \right]$$

или

$$\Psi = \frac{\pi l}{\sigma^{(*\text{lim})}} \left[\frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} (r_{\text{lim}}^2 - r_1^2) + \frac{2r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_{\text{lim}}}{r_1} \right]. \quad (15)$$

Таким образом, исходя из теории максимальных растягивающих напряжений, в случае напряженно-деформированного состояния толстостенного цилиндра, определяемого формулами (3), повреждаемость описывается выражениями (14) и (15).

4. Граничные условия в перемещениях и повреждаемость. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние толстостенного кругового цилиндра в случае, когда граничные условия заданы в перемещениях. Предположим, что к внутренней стенке цилиндра смещена на величину u_1 , а наружная – на величину u_2 , т.е. граничные условия имеют вид

$$\begin{cases} u|_{r=r_1} = u_1, \\ u|_{r=r_2} = u_2. \end{cases} \quad (16)$$

Для определения напряженного состояния толстостенного цилиндра в случае, когда граничные условия заданы в перемещениях, используем решение (2). Тогда $u_1 = Ar_1 + \frac{B}{r_1}$, $u_2 = Ar_2 + \frac{B}{r_2}$, откуда

$$A = \frac{r_1 u_1 - r_2 u_2}{r_1^2 - r_2^2}, \quad B = \frac{r_1 r_2 (r_1 u_2 - r_2 u_1)}{r_1^2 - r_2^2}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в формулы (1), получим выражения для определения радиального и окружного напряжения

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{E} &= \frac{1}{1-\mu^2} \left[(1+\mu) \frac{r_1 u_1 - r_2 u_2}{r_1^2 - r_2^2} - \frac{1-\mu}{r^2} \cdot \frac{r_1 r_2 (r_1 u_2 - r_2 u_1)}{r_1^2 - r_2^2} \right], \\ \frac{\sigma_\theta}{E} &= \frac{1}{1-\mu^2} \left[(1+\mu) \frac{r_1 u_1 - r_2 u_2}{r_1^2 - r_2^2} + \frac{1-\mu}{r^2} \cdot \frac{r_1 r_2 (r_1 u_2 - r_2 u_1)}{r_1^2 - r_2^2} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Введя обозначения

$$D_1 = \frac{E}{1-\mu} \cdot \frac{r_1 u_1 - r_2 u_2}{r_1^2 - r_2^2}, \quad D_2 = \frac{E}{1+\mu} \cdot \frac{r_1 r_2 (r_1 u_2 - r_2 u_1)}{r_1^2 - r_2^2}, \quad (19)$$

для вычисления опасного объема и повреждаемости толстостенного цилиндра можно воспользоваться формулами (13)–(15), подставив вместо постоянных C_1 и C_2 выражения для D_1 и D_2 из (19). Тогда $r_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{D_2}{\sigma^{(*\text{lim})} - D_1}}$

$$\Psi = \frac{\pi l E}{\sigma^{(*\text{lim})}} \left[\frac{1}{1-\mu} \cdot \frac{r_1 u_1 - r_2 u_2}{r_1^2 - r_2^2} (r_{\text{lim}}^2 - r_1^2) + \frac{2}{1+\mu} \cdot \frac{r_1 r_2 (r_1 u_2 - r_2 u_1)}{r_1^2 - r_2^2} \ln \frac{r_{\text{lim}}}{r_1} \right]. \quad (20)$$

5. Смешанные граничные условия и повреждаемость. В ряде практических задач, например, при исследовании составных толстостенных цилиндров, граничные условия можно задать в смешанном виде. Рассмотрим два случая задания граничных условий в напряжениях и перемещениях:

1) на внутренней поверхности цилиндра действует давление p_1 , а внешняя поверхность смещена на величину u_2 , т.е.

$$\begin{cases} \sigma|_{r=r_1} = -p_1, \\ u|_{r=r_2} = u_2; \end{cases} \quad (21.1)$$

2) внутренняя поверхность цилиндра смещена на величину u_1 , а на внешней поверхности действует давление p_2 , т.е.

$$\begin{cases} u|_{r=r_1} = u_1, \\ \sigma|_{r=r_2} = -p_2. \end{cases} \quad (21.2)$$

Решая систему уравнений (1), (2), получим следующие выражения для коэффициентов A и B :

$$A = (-1)^i \frac{r_i u_i - p_j r_j^2 (1+\mu)/E}{r_j^2 (1+\mu)/(1-\mu) + r_i^2},$$

$$B = (-1)^i \frac{r_i r_j^2 [u_i + p_j r_i (1-\mu)/E]}{r_j^2 + r_i^2 (1-\mu)/(1+\mu)},$$

где набор индексов $\{i, j\} = \{1, 2\}$ для случая граничных условий (21.1) и $\{i, j\} = \{2, 1\}$ для случая граничных условий (21.2).

Введем следующие обозначения:

$$F_1 = (-1)^i \frac{r_i u_i E - p_j r_j^2 (1+\mu)}{r_j^2 (1+\mu) + r_i^2 (1-\mu)},$$

$$F_2 = (-1)^i \frac{r_i r_j^2 [u_i E + p_j r_i (1-\mu)]}{r_j^2 (1+\mu) + r_i^2 (1-\mu)}. \quad (22)$$

Учитывая обозначения (22), объем можно определить по формуле (13), где $r_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{F_2}{\sigma^{(*\text{lim})} - F_1}}$.

Аналогичным образом можно получить и формулу для вычисления повреждаемости кругового толстостенного цилиндра

$$\Psi = \frac{\pi l}{\sigma^{(*\text{lim})}} \left[F_1 (r_{\text{lim}}^2 - r_1^2) + 2 F_2 \ln \frac{r_{\text{lim}}}{r_1} \right]. \quad (23)$$

6. Повреждаемость цилиндра в температурном поле. Как уже было отмечено во введении, толстостенные цилиндры, входящие в состав различных технических объектов, зачастую, кроме силового нагружения, подвергаются воздействию температурных полей. Рассмотрим вопрос определения повреждаемости цилиндра в стационарном температурном поле. Предположим, что внутренняя стенка кругового толстостенного цилиндра нагрета до температуры T_1 , а внешняя – до температуры T_2 . Введем обозначение для разности температур на стенках цилиндра $T^* = T_1 - T_2$.

Одним из самых простых способов определения температуры в стенке цилиндра является предположение, что температурное поле линейно в зависимости от радиуса. Используя линейную интерполяцию для значений T_1 и T_2 , получим следующий закон распределения

$$T(r) = T^* \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}. \quad (24)$$

Для линейного закона распределения температурного поля (24) по стенке кругового цилиндра и при отсутствии внутреннего и внешнего давлений окружное напряжение определяется по формуле [10]

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha T^*}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)} \left[2r + \frac{r_1^3}{r^2} - \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \right], \quad (25)$$

где E – модуль упругости;

μ – коэффициент Пуассона;

α – температурный коэффициент линейного расширения.

Для определения показателя интегральной повреждаемости воспользуемся формулой (6). Тогда

$$\Psi = \frac{1}{\sigma^{(*\text{lim})}} \int_{\sigma \geq \sigma^{(*\text{lim})}} \sigma_\theta(r) dr = \frac{2\pi l}{\sigma^{(*\text{lim})}} \int_{r_1}^{r_{\text{lim}}} \sigma_\theta(r) dr.$$

После подстановки формулы (25) в последнее выражение, интегрирования и элементарных преобразований выражение для вычисления интегральной повреждаемости примет вид

$$\Psi = \frac{2\pi l}{\sigma^{(*\text{lim})}} \frac{E\alpha T^*}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)} \left[r_{\text{lim}}^2 - \frac{r_1^3}{r_{\text{lim}}} - \left(r_{\text{lim}} - \frac{r_1^2}{r_{\text{lim}}} \right) \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \quad (26)$$

Иногда принимают, что в толстостенных цилиндрах температура изменяется по логарифмическому закону, устанавливаемому теорией теплопередачи [11; 12]:

$$T(r) = \frac{T^*}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r_2}{r}.$$

В данном случае, при отсутствии внешнего и внутреннего давления на стенки цилиндра, окружное напряжение определяется по формуле [10]

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha T^*}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[1 - \ln \frac{r_2}{r} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} \right]. \quad (27)$$

Интегрирование последнего выражения позволяет определить показатель интегральной повреждаемости участка цилиндра длиной l

$$\Psi = \frac{\pi l}{\sigma^{(*\text{lim})}} \frac{E\alpha T^*}{(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[r_1 \ln \frac{r_2}{r_1} - r_{\text{lim}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(r_1 - r_{\text{lim}} - \frac{r_2^2}{r_1} + \frac{r_2^2}{r_{\text{lim}}} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} \right]. \quad (28)$$

Отметим, что в обоих случаях стационарного распределения температурного поля по стенке кругового толстостенного цилиндра опасный объем можно определить по формуле (14). Величина радиуса r_{lim} в формулах (26) и (28) определяется из неравенства $\sigma_\theta \geq \sigma^{(*\text{lim})}$, т.е. превышения действующих окружных напряжений, вызванных температурным полем некоторой выбранной предельной величины. Для линейного закона распределения температуры по стенке цилиндра предельный радиус r_{lim} определяется из неравенства для выражения (25), для логарифмического закона – из неравенства для выражения (27). Для решения получившегося неравенства можно использовать один из известных численных методов решения нелинейных алгебраических уравнений.

Заключение. При анализе повреждаемости твердого тела по формулам (4)–(6) получить аналитические выражения в большинстве случаев затруднительно в силу сложности выражений для напряжений и/или в силу невозможности определения геометрической формы опасного объема. В таких ситуациях

используют численные подходы к вычислению и анализу повреждаемости твердого тела [9]. В случае напряженного состояния толстостенного кругового цилиндра опасный объем также имеет форму кругового цилиндра. При анализе повреждаемости по первой теории предельных напряжений выражения (4) и (6) можно проинтегрировать и получить формулы для вычисления показателей опасного объема и интегральной повреждаемости в замкнутом виде.

В работе были рассмотрены задачи вычисления опасного объема и интегральной повреждаемости для четырех типов граничных условий (в напряжениях, в перемещениях, смешанные граничные условия и граничные условия в виде распределения температурного поля на стенках цилиндра). Во всех четырех случаях величина опасного объема определяется по формуле (14). Величина интегральной повреждаемости толстостенного цилиндра вычисляется по формулам (15), (20) и (23) для случая силового нагружения, а в случае температурного нагружения – по формулам (26) или (28) в зависимости от принятого закона распределения температуры по стенке цилиндра.

Теоретические показатели повреждаемости толстостенного цилиндра можно использовать при проектировании и разработке технических систем, в которых цилиндрические элементы подвергаются силовому и/или температурному циклическому нагружению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mott, R.L. Applied strength of materials / R.L. Mott. – 5th ed. – Prentice Hall, 2007. – 800 p.
2. Damage and fracture mechanism of aluminium alloy thick-walled cylinder under external explosive loading / Y. Yang [et al.]. // Material science and engineering. – 2008. – Vol. 490 (1–2). – P. 378–384.
3. Lvov, G. Effect of material damage on autofrettage of thick-walled cylinder / G. Lvov, O. Kostromitskaya // Universal journal of mechanical engineering. – 2014. – Vol. 2 (2). – P. 44–48.
4. Пронина, Ю.Г. Расчет долговечности упругой трубы под действием продольной силы, давления и осесимметричного нагрева в условиях равномерной коррозии / Ю.Г. Пронина // Проблемы прочности и пластичности. – 2009. – № 71. – С. 129–135.
5. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Д. Гудьер. – М. : Наука, 1975. – 576 с.
6. Сосновский, Л.А. Механика износоусталостного повреждения / Л.А. Сосновский. – Гомель : БелГУТ, 2007. – 434 с.
7. Щербаков, С.С. Новая модель износа / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский // Вестн. Белорус. гос. ун-та транспорта. Наука и транспорт. – 2016. – № 1 (32). – С. 74–82.
8. Миронов, А.А. Модель разрушения оболочек с поверхностными трещинами / А.А. Миронов, В.М. Волков // Проблемы прочности и пластичности / Ун-т Лобачевского. – Нижний Новгород, 2006. – Вып. 68. – С. 45–52.
9. Мармыш, Д.Е. Численное моделирование повреждаемости силовой системы / Д.Е. Мармыш // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.-техн. сб. / Белорус. нац. техн. ун-т. – Минск, 2017. – Вып. 32. – С. 312–316.
10. Писаренко, Г.С. Соппротивление материалов / Г.С. Писаренко. – 5-е изд. – Киев : Вища шк., 1986. – 775 с.
11. Юдаев, Б.Н. Теплопередача / Б.Н. Юдаев. – М. : Высш. шк., 1981. – 319 с.
12. Петухов, Б.С. Вопросы теплообмена / Б.С. Петухов. – М. : Наука, 1987. – 280 с.

Поступила 12.02.2020

DAMAGEABILITY OF A THICK WALL CYLINDER FOR DIFFERENT TYPES OF BOUNDARY CONDITIONS

D. MARMYSH

The paper considers four types of boundary value problems (in stresses, displacements, mixed boundary conditions and boundary conditions in the form of a temperature field distribution on the cylinder walls) for a thick-walled circular cylinder. In each case, formulas for determining the stress state of the cylinder wall and its radial displacements are presented. For each type of boundary value problem, the theory of the state of volumetric damageability is applied and closed formulas for calculating dangerous volumes and integral damage are obtained depending on the pressure and displacements applied to the inner and outer walls of a thick-walled cylinder. Damageability indicators of a thick-walled cylinder can be used in the design and development of technical systems in which cylindrical elements are subjected to cyclic loading.

Keywords: thick-walled cylinder, stress-strain state, boundary problems, damageability, dangerous volume.

УДК 621.376.6

АНАЛИЗ ФАЗОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДЫ НАД ЗАЛЕЖЬЮ УГЛЕВОДОРОДОВ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СИГНАЛОВ С МОДУЛЯЦИЕЙ СМЕШАННОГО ТИПА

С.В. КАЛИНЦЕВ, канд. техн. наук, доц. В.Ф. ЯНУШКЕВИЧ, В.Б. ТАЛДЫКИН
(Полоцкий государственный университет)

Исследуется процесс воздействия электромагнитных волн на анизотропную среду на основе существующей теории взаимодействия электрических сигналов и анизотропных сред. Результаты, полученные в ходе исследований, позволяют осуществить качественную оценку использования модулированных сигналов для оптимизации методов электромагнитного поиска и оконтуривания углеводородных залежей.

Ключевые слова: анизотропная среда, залежь углеводородов, квазигидродинамическое приближение, модулированный сигнал, оконтуривание залежей углеводородов, фазовая характеристика, частота столкновений.

Введение. Представив среду над углеводородной залежью (УВЗ) в виде среды, которая имеет анизотропные свойства, можно провести исследование взаимодействия электромагнитных волн (ЭМВ) с углеводородной залежью. При этом для рассматриваемой электрофизической обстановки в окрестности УВЗ можно использовать квазигидродинамическое приближение с применением многочастичных электронно-ионных токов и заданных частот столкновений ввиду того, что нет необходимости учитывать пространственно-временное перемещение частиц.

Наряду с исследованиями реальной УВЗ, очень широко применяется электрофизическое моделирование, связанное с использованием электродинамического подхода, который основан на использовании взаимосвязи характеристик рассматриваемого объекта с рядом параметров применяемых электромагнитных сигналов.

Представляя среду над УВЗ в виде среды, имеющей анизотропные свойства, при изучении взаимодействия ЭМВ с УВЗ можно использовать существующие решения для изучения анизотропных сред (АС).

Наиболее приемлемым методом при изучении процесса взаимодействия ЭМВ со средой над УВЗ при анализе основных параметров подобных образований является метод кинетического уравнения [1], использующий функцию пространственно-временного распределения частиц.

Для очень разреженного газа взаимодействие между его частицами крайне мало, при этом компоненты тензора диэлектрической проницаемости среды могут быть определены гидродинамическим приближением.

Вместе с тем для рассматриваемой электрофизической обстановки в окрестности УВЗ необходимо использовать квазигидродинамическое приближение с применением многочастичных электронно-ионных токов и заданных частот столкновений ввиду того, что нет необходимости учитывать пространственно-временное перемещение частиц [2].

С учетом данного приближения уравнение движения электрона примет вид

$$m \frac{d\dot{\mathfrak{G}}}{dt} + v m \dot{\mathfrak{G}} = q \dot{E} + q \mu_0 \left[\dot{\mathfrak{G}}, \dot{H}_0 \right], \quad (1)$$

где m , q , $\dot{\mathfrak{G}}$ – масса, заряд и скорость движения частиц соответственно;

v – частота столкновений электрона с тяжелыми частицами;

μ_0 – магнитная проницаемость вакуума;

\dot{E} – напряженность электрического поля ЭМВ.

Решение вопроса о воздействии гармонической ЭМВ на среду над УВЗ с использованием (1) приведено в [3].

Изучение процесса воздействия многочастотных ЭМВ на АС представляет теоретический и практический интерес в связи с возможностью усовершенствования существующих методов поиска и обнаружения УВЗ.

Основная часть. Компоненты тензора диэлектрической проницаемости, определяющие взаимодействие ЭМВ со средой над УВЗ, зависят от электродинамических параметров потока частиц, дисперсии параметров магнитодиэлектрического наполнителя и поля подмагничивания Земли:

$$\dot{\varepsilon}_{\zeta} = \varepsilon_{\zeta}(f, N_e, k_u, v_u, v_e, \varepsilon_r[f], \sigma[f], \mu_r, H_0[\theta, \alpha]) \quad (2)$$

Такая многопараметричность определяет множественность решений при определении резонансного характера взаимодействия ЭМВ с АС. В этом случае представляет интерес выявление факторов, влияющих на процесс взаимодействия, для оптимизации выбора параметров воздействующих ЭМВ. Численные исследования компонентов тензора диэлектрической проницаемости выбранной модели позволяют провести оценки основных закономерностей при вариации одного или нескольких параметров. Аттестация компонентов или комбинаций компонентов тензора диэлектрической проницаемости может быть проведена по двум вариантам.

1. Одномерный:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_\xi &= \varepsilon_\xi (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n), \\ \varphi_m &= \text{var}, \text{ из } \varphi_1 \dots \varphi_n = \text{const}, \\ m &= 1 \dots n, \end{aligned} \quad (2)$$

где ξ – номер компонента или комбинации компонентов тензора,
 φ_m – аттестационный параметр.

2. Двухмерный:

$$\begin{aligned} \varphi_m = \text{var}, \varphi_h = \text{var} \text{ из } \varphi_1 \dots \varphi_n = \text{const}, \\ m = 1 \dots n, h \neq m \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \varphi_m = \text{var}, \varphi_h = \text{var}, \varphi_\tau = \text{var} \text{ из } \varphi_1 \dots \varphi_n = \text{const}, \\ m = 1 \dots n, h \neq m, \tau \neq m, h \neq \tau. \end{aligned} \quad (4)$$

При этом алгоритмы оценок, направленные на определение закономерностей резонансного поведения ЭМВ, зависят от исследуемых параметров выбранной электродинамической модели.

При одночастотной гармонической модуляции амплитуды и частоты радиосигнал имеет вид

$$e(t) = E_\omega (1 + k_m \cos \Omega t) \cos [\omega t + \beta \cdot \cos \Omega t], \quad (5)$$

где E_ω – амплитуда сигнала несущей частоты ω ;
 k_m – коэффициент амплитудной модуляции;
 β – индекс частотной модуляции.

При воздействии сигнала со смешанной амплитудно-частотной модуляцией (АЧМ) составляющие скорости частиц будут определяться

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_x = \frac{e}{m} E_x (1 + \beta \cdot \cos \Omega t) \frac{j\tilde{\omega}_4 + \nu}{(j\tilde{\omega}_4 + \nu)^2 + \omega_r^2} - \frac{e}{m} \omega_r E_y (1 + \beta \cdot \cos \Omega t) \frac{1}{(j\tilde{\omega}_4 + \nu)^2 + \omega_r^2}, \\ \mathfrak{g}_y = \omega_r \frac{e}{m} \frac{E_x (1 + \beta \cdot \cos \Omega t)}{(j\tilde{\omega}_4 + \nu)^2 + \omega_r^2} + \frac{e}{m} \frac{E_y (1 + \beta \cdot \cos \Omega t)(j\tilde{\omega}_4 + \nu)}{(j\tilde{\omega}_4 + \nu)^2 + \omega_r^2}, \\ \mathfrak{g}_z = \frac{e}{m} \frac{E_z (1 + \beta \cdot \cos \Omega t)}{j\tilde{\omega}_4 + \nu}, \end{cases} \quad (6)$$

где
$$\tilde{\omega}_4 = \omega [1 - k_m^2 \sin^2 \Omega t]. \quad (7)$$

Плотности токов определяются выражениями

$$\begin{cases} \delta_x = \varepsilon_0 \omega_n^2 E_x \frac{(1 + \beta \cdot \cos \Omega t)(j\tilde{\omega}_4 + \nu)}{(j\tilde{\omega}_4 + \nu)^2 + \omega_r^2} - \frac{\varepsilon_0 \omega_n^2 \omega_r E_y (1 + \beta \cdot \cos \Omega t)}{(j\tilde{\omega}_4 + \nu)^2 + \omega_r^2}, \\ \delta_y = \frac{\varepsilon_0 \omega_n^2 \omega_r E_x (1 + \beta \cdot \cos \Omega t)}{(j\tilde{\omega}_4 + \nu)^2 + \omega_r^2} + \frac{\omega_n^2 \varepsilon_0 E_y (1 + \beta \cdot \cos \Omega t)(j\tilde{\omega}_4 + \nu)}{(j\tilde{\omega}_4 + \nu)^2 + \omega_r^2}, \\ \delta_z = \frac{\varepsilon_0 \omega_n^2 E_z (1 + \beta \cdot \cos \Omega t)}{j\tilde{\omega}_4 + \nu}, \end{cases} \quad (8)$$

а компоненты тензора диэлектрической проницаемости среды для двух частичного потока

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 = \epsilon_r (1 - k_m^2 \sin \Omega \cdot t) + \sum_{i=1}^2 & \left\{ \frac{\omega_{\Gamma i}^2 \tilde{\omega}_4}{\omega} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2 - v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2} + j \left[\frac{\epsilon_r \beta \cdot k_m \sin \Omega \cdot t}{1 + \beta \cdot \cos \Omega \cdot t} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\sigma_r}{\omega \epsilon_0} - \frac{\omega_{\Gamma i}^2 v_i}{\omega} \frac{\tilde{\omega}_4^2 + v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\omega_{\Gamma i}^2 \tilde{\omega}_4}{\omega} \frac{(\omega_{\Gamma i} - v_i)^2 - \tilde{\omega}_4^2}{((v_i + \omega_{\Gamma i})^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2} + \right. \\ & \left. - j \left[\frac{\omega_{\Gamma i}^2 v_i}{\omega} \frac{(\tilde{\omega}_4 + v_i)^2 + \omega_{\Gamma i}^2}{((v_i + \omega_{\Gamma i})^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2} \right] \right\}, \\ \dot{\epsilon}_2 = \sum_{i=1}^2 & \left\{ \frac{\omega_{\Gamma i}^2 \omega_{\Gamma i}}{\omega} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2 + v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2} - \frac{2j \tilde{\omega}_4 v_i \omega_{\Gamma i}^2 \omega_{\Gamma i}}{\omega [(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2]} + \right. \\ & \left. + \frac{\omega_{\Gamma i}^2 \omega_{\Gamma i}}{\omega} \frac{(\tilde{\omega}_4 + v_i)^2 + v_i^2}{((v_i + \omega_{\Gamma i})^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2} \right\}, \\ \dot{\epsilon}_3 = \epsilon_r (1 - k_m^2 \sin \Omega \cdot t) + \sum_{i=1}^2 & \left\{ \frac{\omega_{\Gamma i}^2 \tilde{\omega}_4}{\omega} \frac{1}{v_i^2 + \tilde{\omega}_4^2} + \right. \\ & \left. + j \left[\frac{\epsilon_r \beta \cdot k_m \sin \Omega \cdot t}{1 + \beta \cdot \cos \Omega \cdot t} - \frac{\sigma_r}{\omega \epsilon_0} - \frac{\omega_{\Gamma i}^2 v_i}{\omega} \frac{1}{\tilde{\omega}_4^2 + v_i^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) видно, что компоненты тензора включают в себя параметры смешанного модулированного сигнала (K_m , β , Ω , K_ω) и имеют более сложную зависимость по сравнению с АМ- и ЧМ-сигналами.

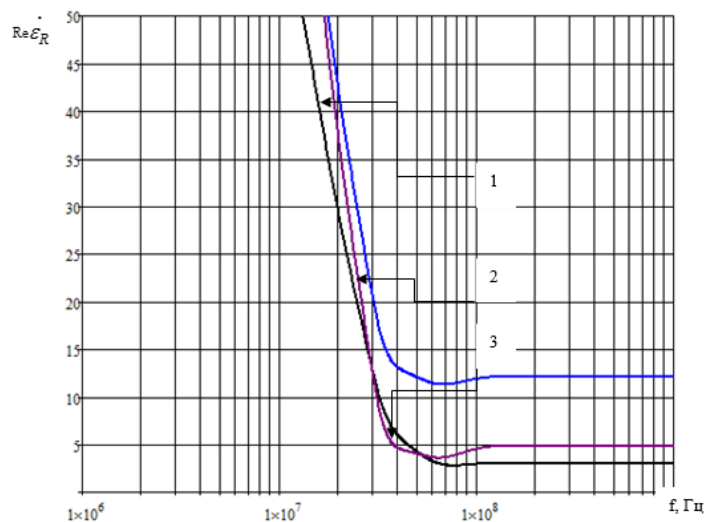
Тензор диэлектрической проницаемости имеет вид (9). Компоненты $\tilde{\epsilon}$ были проанализированы для тех же значений ϵ_r , σ_r , $v_{эффе}$ и N_e , что и в предыдущих случаях.

Численные исследования показали, что $\text{Re } \dot{\epsilon}_R \approx \text{Re } \dot{\epsilon}_L$ и $\text{arg } \dot{\epsilon}_R \approx \text{arg } \dot{\epsilon}_L$. Как видно из рисунка 1, комбинационный элемент (КЭ) $\text{Re } \dot{\epsilon}_R$ при частоте несущего колебания $f = 10^5 \dots 10^6$ Гц не изменяется и примерно равен нулю, причем влияние частоты амплитудной модуляции на диэлектрическую проницаемость на этом отрезке частот практически отсутствует. В диапазоне частот $f = 10^6 \dots 10^9$ Гц изменение коэффициента k_m и частоты модуляции F приводит к существенному изменению величины $\text{Re } \dot{\epsilon}_R$. Увеличение частоты модуляции и коэффициента амплитудной модуляции (АМ) приводит к уменьшению $|\text{Re } \dot{\epsilon}_R|$ и изменению частот $f_{2Ц}$ и $f_{2П}$. Так, при $F = 1$ МГц, $k_m = 0,5$ происходит уменьшение $f_{2Ц}$ и увеличение $f_{2П}$, а для $F = 10$ МГц, $k_m = 1$ – увеличение и $f_{2Ц}$, и $f_{2П}$ по сравнению со значениями частот для $F = 100$ кГц и $k_m = 0,1$. Индекс частотной модуляции (ЧМ) β не влияет на комбинационные элементы $\text{Re } \dot{\epsilon}_R$ и $\text{Re } \dot{\epsilon}_L$ [6–8].

Как видно из рисунка 2, значение $\text{arg } \dot{\epsilon}_R$ изменяется от 10° до 180° на отрезке частот $10^5 \dots 5 \cdot 10^7$ Гц, а дальше происходит резкое уменьшение фазы до -180° (при $f \approx 5 \cdot 10^7$ Гц) и до -60° (при $f \approx 10^8$ Гц) при $F = 10$ МГц, $\beta = 10$ и $k_m = 1$. При дальнейшем увеличении частоты несущего колебания фаза остается неизменной. Для $F = 10$ МГц, $\beta = 10$ и $k_m = 1$ характер изменения $\text{arg } \dot{\epsilon}_R$ остается прежним, за исключением численных значений. Дальнейшее увеличение частоты практически не оказывает влияния на величину $\text{arg } \dot{\epsilon}_R$. При $\beta = 100$ и частоте модуляции $F = 100$ кГц...1 МГц $\text{arg } \dot{\epsilon}_R \approx -180^\circ$ во всем диапазоне частот.

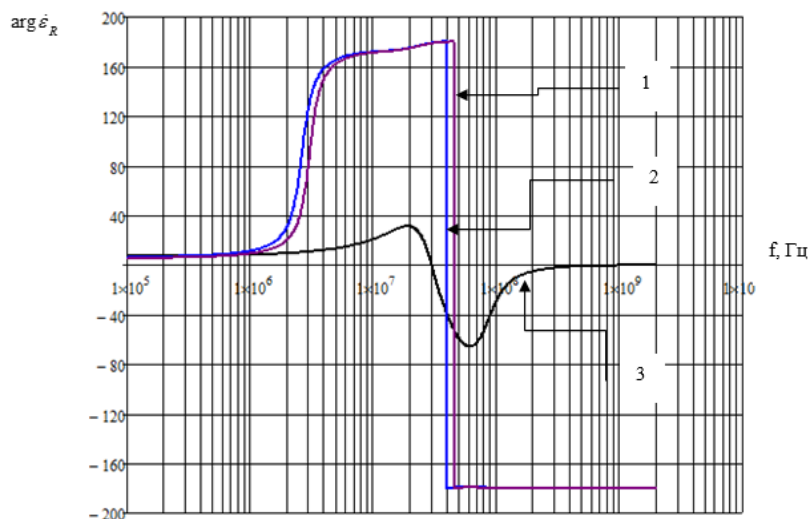
Анализ зависимостей $\text{arg } \dot{\epsilon}_R = \varphi(k_m)$ показывает, что при $k_m = 0 \dots 0,9$ (рисунок 3) величина $\text{Re } \dot{\epsilon}_R$ остается постоянной. Дальнейшее увеличение k_m приводит к росту КЭ тензора диэлектрической проницаемости. Особенно заметное влияние этого коэффициента наблюдается при значениях $k_m = 0,9 \dots 1,0$. На фазу КЭ (рисунок 4) оказывают влияние очень маленькие значения коэффициента АМ ($k_m \approx 0 \dots 0,1$) [9].

Анализ фазовых зависимостей показывает, что резкий фазовый сдвиг происходит при изменении частоты в пределах 50...60 МГц. Данный фактор может быть использован для создания метода поиска и оконтуривания залежей углеводородов при помощи АЧМ-сигнала.



1 – для $F = 100$ кГц, $k_m = 0,1$; 2 – для $F = 1$ МГц, $k_m = 0,5$; 3 – для $F = 10$ МГц, $k_m = 1$

Рисунок 1. – Зависимости $\text{Re } \dot{\epsilon}_R$



1 – для $F = 100$ кГц, $\beta = 10$, $k_m = 0,1$; 2 – для $F = 10$ МГц, $\beta = 10$, $k_m = 1$;
3 – для $F = 10$ МГц, $\beta = 10$, $k_m = 10$

Рисунок 2. – Зависимости $\text{arg } \dot{\epsilon}_R$

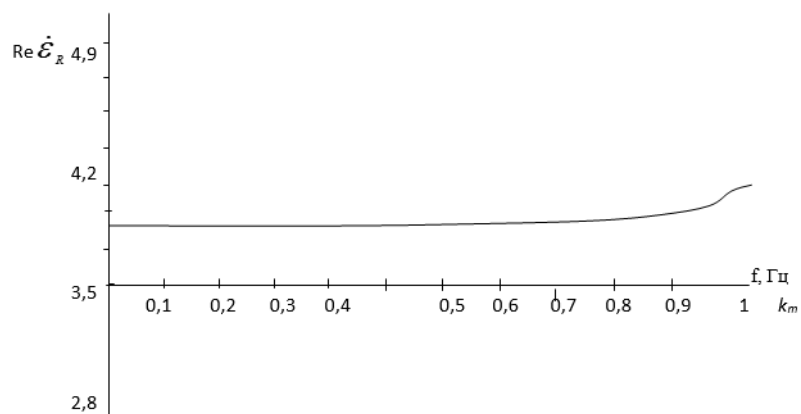
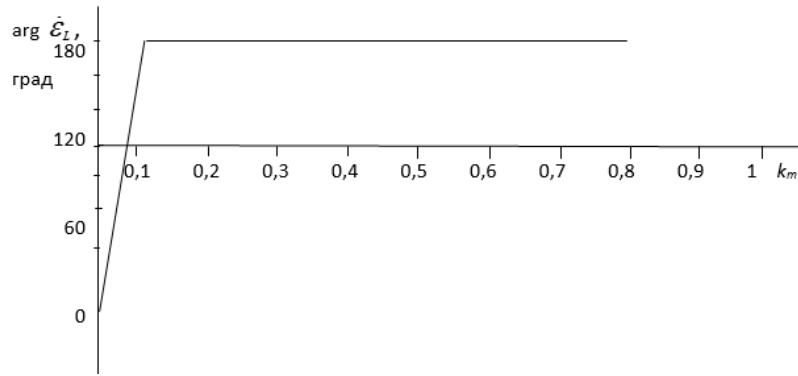
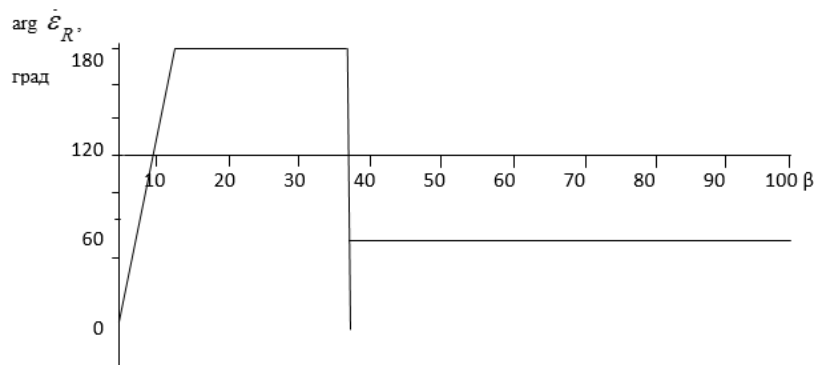


Рисунок 3. – Зависимость $\text{Re } \dot{\epsilon}_R = f(k_m)$

Рисунок 4. – Зависимость $\arg \dot{\varepsilon}_L = f(k_m)$

Как видно из рисунка 5, влияние индекса ЧМ на фазу КЭ наиболее существенно при $\beta = 0 \dots 12$, когда фаза $\arg \dot{\varepsilon}_R$ резко изменяется от -180° до 180° , и при $\beta \approx 25 \dots 28$, когда фаза изменяется от 180° до -180° . При $\beta = 12 \dots 37$ значение $\arg \dot{\varepsilon}_R \approx 180^\circ$, а при $\beta = 37 \dots 100$ $\arg \dot{\varepsilon}_R \approx -180^\circ$.

Рисунок 5. – Зависимость $\arg \dot{\varepsilon}_R = \varphi(k_m)$

Таким образом, оптимальный режим поиска и оконтуривания залежей углеводородов достигается при значении $\beta = 37$ и $\beta = 0 \dots 12$.

Для получения отражательных характеристик исследуемая среда над УВЗ представляется в виде анизотропной неоднородности. В общем случае пространственная ориентация внешней нормали к границе раздела сред и волнового вектора \vec{k} является произвольной, и процесс взаимодействия ЭМВ с локальным включением на трассе распространения радиоволн (РРВ) можно представить в виде режима наклонного падения плоской волны с вертикальной поляризацией на безграничную поверхность с анизотропным импедансом (в приближении больших характерных размеров неоднородности по сравнению с длиной волны зондирующего сигнала). Появление кроссполаризационной компоненты в структуре поля, отраженной от анизотропной неоднородности плоской волны с заданной линейной поляризацией, приводит к необходимости исследования пары коэффициентов Френеля R_{VV} , R_{VG} для вертикальной и R_{TV} , R_{TG} для горизонтальной поляризации падающей волны. В случае вертикальной поляризации ЭМВ для выбранной системы координат справедливы следующие соотношения [3]

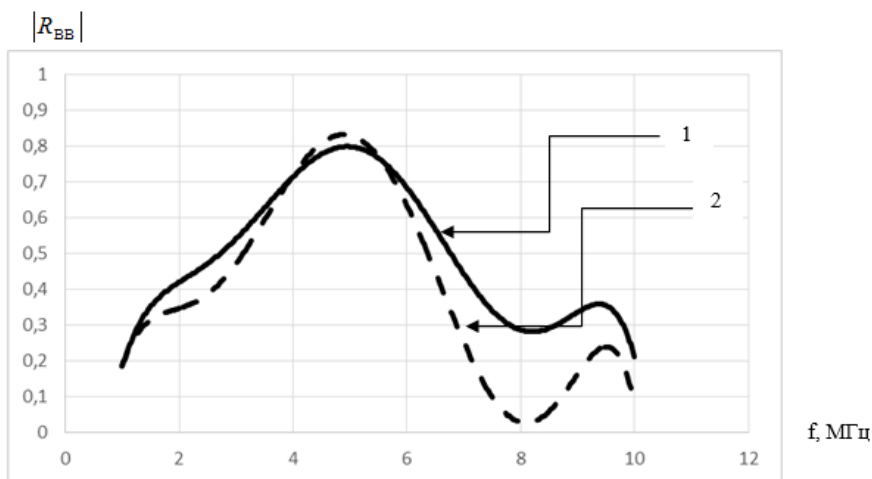
$$\begin{aligned}
 E_x &= E_{\text{зад}} + E_{\text{хотр}} = E_0(1 - R_{VV}) \cos \Theta \\
 E_y &= -E_0 R_{VG} \\
 H_x &= \frac{E_0}{Z_0} R_{VG} \cos \Theta \\
 H_y &= \frac{E_0}{Z_0} (1 + R_{VV})
 \end{aligned} \tag{10}$$

и импедансные граничные условия [4]

$$\begin{aligned}
 E_x &= -Z_0(\dot{Z}_{11}H_x - \dot{Z}_{12}H_y), \\
 E_y &= -Z_0(\dot{Z}_{21}H_x - \dot{Z}_{22}H_y), \\
 Z_{11} = Z_{22} &= -\frac{1}{2j\sqrt{\dot{\epsilon}_R\dot{\epsilon}_L}}(\sqrt{\dot{\epsilon}_R} - \sqrt{\dot{\epsilon}_L}), \\
 Z_{12} = Z_{21} &= -\frac{1}{2\sqrt{\dot{\epsilon}_R\dot{\epsilon}_L}}(\sqrt{\dot{\epsilon}_R} + \sqrt{\dot{\epsilon}_L}),
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

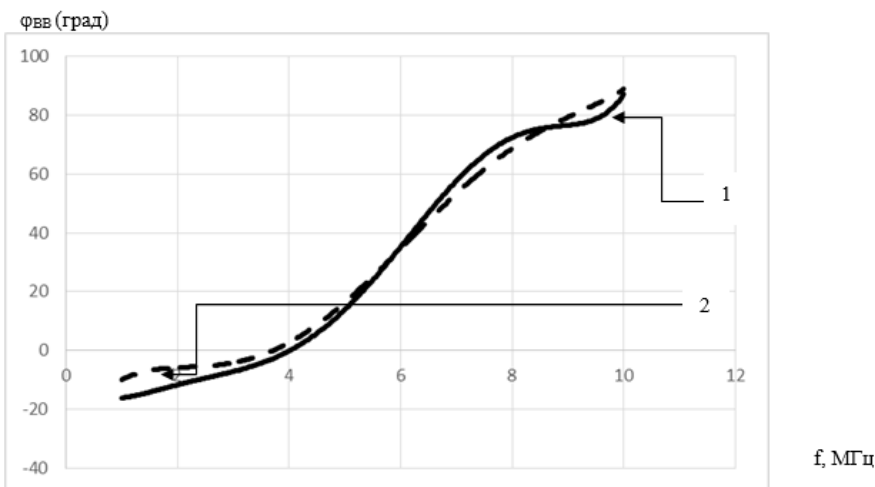
где E_0, Θ – амплитуда падающей волны и угол падения ЭМВ относительно внешней нормали \vec{n} ,
 $E_{x,y}, H_{x,y}$ – проекции падающей и отраженной волны на координатные оси,
 Z_0 – характеристическое сопротивление среды над УВЗ.

На рисунках 6, 7 представлены частотные зависимости модуля $|R_{\text{ВВ}}|$ и фазы $\varphi_{\text{ВВ}}$ при $\theta = 0^\circ$ для различных соотношений частот и амплитуд двух воздействующих сигналов, рассчитанных по формулам (11).



1 – для $k_m = 0,5$; 2 – для $k_m = 1$

Рисунок 6. – Зависимости $|R_{\text{ВВ}}| = f(f)$ при нормальном падении



1 – для $k_m = 0,5$; 2 – для $k_m = 1$

Рисунок 7. – Зависимости $|\varphi_{\text{ВВ}}| = f(f)$ при нормальном падении

Выражения (10) учитывают возникающие в структуре отраженной волны кроссполяризационные искажения, что приводит к смещению траектории луча относительно направления распространения падающей волны. В случае использования круговой поляризации принимаемая ЭМВ будет иметь эллиптическую в общем случае поляризацию, а возникающие при этом поляризационные искажения за счет влияния анизотропной неоднородности могут быть оценены коэффициентом эллиптичности [10; 11].

В исследуемом диапазоне частот наблюдается неравномерный характер изменения $|R_{\text{ВВ}}|$. Модуль коэффициента отражения имеет максимальное значение, равное 0,85, в диапазоне частот от 4 до 6 МГц. На частотах в диапазоне от 100 кГц до 5 МГц наблюдается рост этого коэффициента от 0,2 до 0,85, а на частотах выше 5 МГц – плавное уменьшение от 0,85 до 0,1 на частоте $f_2 = 10$ МГц. Величина $|R_{\text{ВВ}}|$ зависит от коэффициента модуляции k_m . Влияние коэффициента k_m сказывается незначительно, отличия характеристик практически несущественны. В целом характер изменения величины $|R_{\text{ВВ}}|$ от частоты f при различных коэффициентах β имеет одинаковый вид.

Таким образом, при анализе отражательных характеристик максимум коэффициента отражения $|R_{\text{ВВ}}| = 0,85$ наблюдается на частоте $f = 5$ МГц для значения коэффициента модуляции $k_m = 0,5$, что может быть использовано для дальнейшего создания методов поиска и идентификации залежей углеводородов в режиме АЧМ-сигнала.

Заключение. Доказано, что применение АЧМ-сигнала приводит к появлению дополнительных функциональных зависимостей компонентов тензора от параметров воздействующего сигнала. Это дает возможность повысить уровень информации о залежи углеводородов. Также в режиме АЧМ-сигналов изменения частоты модуляции и коэффициента АМ вызывают изменение частот электронно-плазменного резонанса. Коэффициент АМ приводит к изменению как комбинированных элементов тензора диэлектрической проницаемости, так и их фаз (только при $k_m \approx 0 \dots 0,1$). Влияние коэффициента частотной модуляции проявляется при его значениях $\beta < 12$ и $\beta = 37$. При указанных значениях наступает электронно-плазменный резонанс.

Учитывая анализ отражательных характеристик АЧМ-сигналов для создания электрофизической установки для поиска и оконтуривания УВЗ на основе регистрации фазовых сдвигов высокочастотных и модулирующих сигналов в режиме амплитудной модуляции с несущей частотой в интервале от 1 до 5 ГГц и модулирующей частотой в интервале от 10 до 100 МГц, которая позволила повысить уровень достоверности идентификации углеводородов до 85–90% и точность определения границ залежи на 10–15%, был использован АЧМ-сигнал, дающий наиболее качественные параметры по коэффициенту отражения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Денисов, С.Б. Высокочастотные электромагнитные методы исследования нефтяных и газовых скважин / С.Б. Денисов. – М. : Недра, 1986. – 142 с.
2. Фролов, А.Д. Поиски нефтегазовых месторождений радиоволновыми методами / А.Д. Фролов, В.Д. Озеров // Региональная, разведочная и промысловая геофизика. – М. : ВИЭМС, 1969. – № 19. – 32 с.
3. Каленов, Е.Н. Эффективность применения электроразведки при поисках нефти и газа / Е.Н. Каленов // Геофизические исследования земной коры. – М. : Недра, 1976. – С. 137–141.
4. Матвеев, Б.К. Электроразведка при поисках месторождений полезных ископаемых / Б.К. Матвеев. – М. : Недра, 1982. – 375 с.
5. Ваньян, Л.Л. Становление электромагнитного поля и его использование для решения задач структурной геологии / Л.Л. Ваньян. – М. : Наука, 1966. – 103 с.
6. Черняк, Г.Я. Электромагнитные методы в гидрогеологии и инженерной геологии / Г.Я. Черняк. – М. : Недра, 1987. – 215 с.
7. Гололобов, Д.В. Поиск месторождений углеводородных залежей радиоволновым методом / Д.В. Гололобов, В.Ф. Янушкевич // Приборы. Справочный журнал. – М. : Научтехмаш, 1999. – № 10. – С. 25–27.
8. Гололобов, Д.В. Фазовые методы идентификации углеводородных залежей / Д.В. Гололобов, В.Ф. Янушкевич, А.О. Рак // Инженерный вестник. – 2005. – № 1 (20). – С. 16–18.
9. Способ геоэлектроразведки углеводородных залежей : пат. ВУ 17382 / В.Ф. Янушкевич, Д.В. Гололобов, О.В. Орлова. – Оpubл. 24.04.2013.
10. Способ геоэлектроразведки углеводородных залежей : пат. ВУ 16771 / А.О. Бездель, В.Ф. Янушкевич, Ю.А. Щаденков. – Оpubл. 28.02.2013.

11. Калининцев, С.В. Отражательные характеристики углеводородной залежи при двухчастотном взаимодействии в режиме мощного НЧ-сигнала / С.В. Калининцев, Н.В. Цывис, В.Ф. Янушкевич // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2004. – № 4. – С. 40–44.
12. Отражательные характеристики среды над УВЗ при двухчастотном взаимодействии / Д.В. Гололобов [и др.] // Проблемы проектирования и производства радиоэлектронных средств : материалы III Международ. науч.-техн. конф., Новополоцк, 26–28 мая 2004 г. / Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2004. – Т. 2. – С. 226–229.

18.03.2020

**THE ANALYSIS OF PHASE CHARACTERISTICS OF THE ENVIRONMENT
OVER THE HYDROCARBON DEPOSIT AT INFLUENCE OF SIGNALS
WITH THE MIXED TYPE MODULATION**

S. KALINTSEV, V. YANUSHKEVICH, V. TALDIKIN

The process of the influence of electromagnetic waves on an anisotropic medium is investigated on the basis of the existing theory of the interaction of electrical signals and anisotropic media. The results obtained in the course of research allow us to qualitatively evaluate the use of modulated signals to optimize the methods of electromagnetic search and contouring of hydrocarbon deposits.

Keywords: *anisotropic medium, hydrocarbon deposit, quasi-hydrodynamic approximation, modulated signal, hydrocarbon deposits contouring, phase characteristic, collision frequency.*

МАТЕМАТИКА

УДК 519.6:517.958

О КОНЕЧНЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ

Н.К. ВОЛОСОВА

(Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана);

д-р физ.-мат. наук, проф. К.А. ВОЛОСОВ

(Российский университет транспорта, Москва);

канд. физ.-мат. наук А.К. ВОЛОСОВА

(ООО «Трамплин», Москва);

канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ

(Полоцкий государственный университет)

Предложен алгоритм прогонки в матричной форме с шестым порядком погрешности для решения уравнения Пуассона на прямоугольнике за конечное число арифметических операций. Аналитическим примером и программой, использующей данный алгоритм, подтвержден шестой порядок погрешности. В теореме 1 доказана монотонность матриц с диагональным преобладанием, у которых элементы главной диагонали отрицательны (положительны), а недиагональные положительны (отрицательны). В теореме 2 получена верхняя оценка бесконечной нормы обратной к монотонной матрице. В теореме 3 получены достаточные условия корректности предложенного алгоритма. Показано, что быстродействие данного алгоритма в десятки раз выше быстродействия алгоритма решения уравнения Пуассона на прямоугольнике методом простой итерации с той же формулой аппроксимации с шестым порядком погрешности.

Ключевые слова: метод прогонки в блочной форме, диагональные матрицы, монотонные матрицы, обратные задачи математической физики, численные методы, уравнение Пуассона, трансляция аналитического решения в численный массив.

Введение. Матрицы и матричные уравнения специального типа применяются во многих разделах прикладной математики. В квантовой механике динамика частиц со спином определяется матрицами квартернионов (полуквартернионов) [1; 2]. Уравнение Пуассона на прямоугольнике (параллелепипеде) можно решить методом прогонки [3; 4; 5; 6; 10; 12; 13; 19]. Алгебраический метод прогонки совместно с формулой простой итерации [5] является приближенным методом, так как число итераций не ограничено, но имея формулу аппроксимации уравнения Пуассона с шестым порядком погрешности, можно значительно снизить погрешность и время вычислений [5]. В данной работе рассмотрен метод прогонки в матричной форме для численного решения уравнения Пуассона за конечное число арифметических операций. Идея работы частично основана на идее статьи [10], а также на идее модификации краевых столбцов и строк в матрице правой части уравнения Пуассона с шестым порядком аппроксимации [5]. Однако в работе [10] и в данной работе возможно обобщение задачи, то есть решение уравнения Пуассона на прямоугольной сетке $n_1 \times n_2$ с квадратными ячейками $h_1 = h_2 = h$, но матрицы коэффициентов A, B при этом по-прежнему квадратные $n_1 \times n_1$. Этот эффект мы назвали эффектом прямоугольной шахты, в которой перемещается квадратная кабина лифта (квадратные матрицы A, B $n_1 \times n_1$) в направлении n_2 , минимальное перемещение $h_1 = h_2 = h$ (перемещение поперек шахты не разрешается). Возможны ситуации $n_1 < n_2$, $n_1 > n_2$ – длина шахты как больше размера кабины, так и меньше. Получены достаточные условия корректности предложенного алгоритма, теоремы 1, 2, 3. Метод можно использовать в численных задачах математической физики [15; 16; 17], а также в двумерных задачах гидродинамики, система уравнений которых содержит уравнение Пуассона от функции тока, где правая часть – функция вихря $\Delta\psi = -\omega$ [20].

Постановка задачи. Рассмотрим краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона на прямоугольнике с неизвестной функцией $u(x, y)$ с неоднородными граничными условиями $y \in [c, d]$, $x \in [a, b]$ ($\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$, $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$):

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), & (x, y) \in D = (a, b) \times (c, d) \\ u(a, y) = \varphi_1(y), u(b, y) = \varphi_2(y), u(x, c) = \varphi_3(x), u(x, d) = \varphi_4(x), & x \in [a, b], y \in [c, d]. \end{cases} \quad (1)$$

Дифференциальной задаче (1) сопоставим разностную задачу (2), в которой два параметра h_1, h_2 – шаги равномерной сетки по координатным осям x, y соответственно [4, с. 102]:

$$\begin{cases} L_{h_1 h_2} u_{h_1 h_2} = f_{h_1 h_2}, (x_{h_1}, y_{h_2}) \in D_{h_1 h_2} : x_{h_1} \equiv x_n = a + nh_1, n = \overline{1, n_1 - 1}, y_{h_2} \equiv y_m = c + mh_2, m = \overline{1, n_2 - 1} \\ l_{h_1 h_2} u_{h_1 h_2} \Big|_{\Gamma_{h_1 h_2}} = \varphi_{h_1 h_2}, (x_{h_1}, y_{h_2}) \in \Gamma_{h_1 h_2} : x_{h_1} \equiv x_n = a + nh_1, n = \overline{0, n_1}, y_{h_2} \equiv y_m = c + mh_2, m = \overline{0, n_2}, h_1 = \frac{b-a}{n_1}, h_2 = \frac{d-c}{n_2}, \end{cases} \quad (2)$$

где $u_{h_1 h_2}$ – неизвестная сеточная функция, решение задачи (2).

Отметим, что максимальный порядок аппроксимации разностной задачей (2) дифференциальной задачи (1) зависит от вида разностного оператора $L_{h_1 h_2}$, то есть, прежде всего, от числа узлов в шаблоне и симметрии шаблона. Можно получить шестой порядок аппроксимации задачи (1) задачей (2) на девяти-точечном шаблоне с равными шагами сетки [5; 6] $h_1 = h_2 = h$. Краевой разностный оператор $l_{h_1 h_2} \equiv 1$ в задаче Дирихле (2) – единичный. В работе [5, с. 73, формула (32)] нами получено разностное уравнение (2) с шестым порядком погрешности для девятиточечного шаблона с центральным узлом $u_{m,n}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} \left(\frac{-10}{3} u_{m,n} + \frac{2}{3} (u_{m-1,n} + u_{m+1,n} + u_{m,n-1} + u_{m,n+1}) + \frac{1}{6} (u_{m-1,n-1} + u_{m+1,n-1} + u_{m-1,n+1} + u_{m+1,n+1}) \right) = \\ & = f_{m,n} + \frac{h^2}{12} (f_{xx} + f_{yy}) + h^4 \left(\frac{1}{360} (f_x^{(4)} + f_y^{(4)}) + \frac{1}{90} f_{xyxy}^{(4)} \right) + O(h^6), \quad n = \overline{1, n_1 - 1}, m = \overline{1, n_2 - 1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Покажем, что разностное уравнение (3) можно получить из рекуррентного разностного матричного уравнения второго порядка. Определим матрицы A, B :

$$\begin{aligned} A = \|a_{m,n}\| &= \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & 0 \dots & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} 0 \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \dots & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 \dots & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \end{bmatrix}, \quad B = \|b_{m,n}\| = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} 0 \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \dots & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 \dots & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}; \\ a_{m,n} &= \begin{cases} -\frac{10}{3}, m = n; m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1}, \\ \frac{2}{3}, m = n + 1 \vee m = n - 1 \\ 0, m \geq n + 2 \vee m \leq n - 2 \end{cases} & b_{m,n} = \begin{cases} \frac{2}{3}, m = n; m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1}, \\ \frac{1}{6}, m = n + 1 \vee m = n - 1 \\ 0, m \geq n + 2 \vee m \leq n - 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

где A, B – квадратные симметрические трехдиагональные матрицы Тейлора ранга $n_1 - 1$. Перепишем уравнение (3) в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} & \frac{-10}{3} u_{m,n} + \frac{2}{3} (u_{m-1,n} + u_{m+1,n} + u_{m,n-1} + u_{m,n+1}) + \frac{1}{6} (u_{m-1,n-1} + u_{m+1,n-1} + u_{m-1,n+1} + u_{m+1,n+1}) = \\ & = F_{m,n} \equiv f_{m,n} h^2 + \frac{h^4}{12} (f_{xx} + f_{yy}) + h^6 \left(\frac{1}{360} (f_x^{(4)} + f_y^{(4)}) + \frac{1}{90} f_{xyxy}^{(4)} \right) + O(h^8), \quad m = \overline{1, n_2 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Если u_{m-1}, u_m, u_{m+1} вектор-строки матрицы решения ранга $(n_2 - 1) \times (n_1 - 1)$, то уравнение (5) эквивалентно уравнению (6):

$$\begin{aligned} Bu_{m-1}^T + Au_m^T + Bu_{m+1}^T = F_m^T &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n_1-1} b_{s,k} u_{k,m-1}^T + \sum_{k=1}^{n_1-1} a_{s,k} u_{k,m}^T + \sum_{k=1}^{n_1-1} b_{s,k} u_{k,m+1}^T = \overline{F_{s,m}^T}, s = \overline{2, n_1 - 2}, m = \overline{2, n_2 - 2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n_1-1} b_{s,k} u_{m-1,k} + \sum_{k=1}^{n_1-1} a_{s,k} u_{m,k} + \sum_{k=1}^{n_1-1} b_{s,k} u_{m+1,k} = \overline{F_{m,s}}, \\ &+ a_{s,s-1} u_{m,s-1} + a_{s,s} u_{m,s} + a_{s,s+1} u_{m,s+1} + b_{s,s-1} u_{m+1,s-1} + b_{s,s} u_{m+1,s} + b_{s,s+1} u_{m+1,s+1} = \overline{F_{m,s}}, s = \overline{2, n_1 - 2}, m = \overline{2, n_2 - 2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая (4), при $s = n$ из (6) получим

$$\frac{1}{6} u_{m-1,n-1} + \frac{2}{3} u_{m-1,n} + \frac{1}{6} u_{m-1,n+1} + \frac{2}{3} u_{m,n-1} - \frac{10}{3} u_{m,n} + \frac{2}{3} u_{m,n+1} + \frac{1}{6} u_{m+1,n-1} + \frac{2}{3} u_{m+1,n} + \frac{1}{6} u_{m+1,n+1} = \overline{F_{m,n}}.$$

Группируя слагаемые с одинаковыми коэффициентами в последнем уравнении, имеем

$$-\frac{10}{3} u_{m,n} + \frac{2}{3} (u_{m-1,n} + u_{m+1,n} + u_{m,n-1} + u_{m,n+1}) + \frac{1}{6} (u_{m-1,n-1} + u_{m-1,n+1} + u_{m+1,n-1} + u_{m+1,n+1}) = \overline{F_{m,n}},$$

$$\overline{n = 2, n_1 - 2}, m = \overline{2, n_2 - 2}, \text{ где } \overline{F_{m,n}} = f_{m,n} h^2 + \frac{h^4}{12} (f_{xx} + f_{yy}) + h^6 \left(\frac{1}{360} (f_x^{(4)} + f_y^{(4)}) + \frac{1}{90} f_{xyy}^{(4)} \right) + O(h^8) \Big|_{x=x_n, y=y_m}.$$

Последнее уравнение эквивалентно уравнению (5) на внутренних узлах. Уравнение $Bu_{m-1}^T + Au_m^T + Bu_{m+1}^T = F_m^T$ при $m=1$. $n_2 - 1$ имеет смысл, если положить $Au_1^T + Bu_2^T = F_1^T$, $Bu_{n_2-2}^T + Au_{n_2-1}^T = F_{n_2-1}^T$. В результате запишем систему матричных уравнений, в которой матрицы A, B определены формулой (4):

$$\begin{cases} Au_1^T + Bu_2^T = \overline{F_1^T} \\ Bu_{m-1}^T + Au_m^T + Bu_{m+1}^T = \overline{F_m^T}, m = \overline{2, n_2 - 2}. \\ Bu_{n_2-2}^T + Au_{n_2-1}^T = \overline{F_{n_2-1}^T} \end{cases} \quad (7)$$

Черта в системе уравнений (7) означает, что правая часть формулы (7), вообще говоря, не совпадает с правой частью формулы (5) в граничных узлах. В системе уравнений (7) квадратная матрица решений $u_{m,n}$ имеет ранг $(n_2 - 1)(n_1 - 1)$, ее можно расширить до ранга $(n_2 + 1)(n_1 + 1)$, используя граничные условия из постановки задачи (1), то есть

$$u_{m,0} = \overline{\varphi_{1,m}}, u_{m,n_1} = \overline{\varphi_{2,m}}, u_{0,n} = \overline{\varphi_{3,n}}, u_{n_2,n} = \overline{\varphi_{4,n}}, m = \overline{0, n_2}, n = \overline{0, n_1}. \quad (8)$$

С учетом системы уравнений (7), краевых условий (8) формула (5) имеет теперь смысл при всех $m = \overline{1, n_2 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1}$. Рассмотрим первое уравнение системы (7) в угловом узле равномерной сетки с индексами $(m = s = 1, n = 1)$:

$$a_{1,1} u_{1,1} + a_{1,2} u_{1,2} + b_{1,1} u_{2,1} + b_{1,2} u_{2,2} = \overline{F_{1,1}} \Leftrightarrow \frac{-10}{3} u_{1,1} + \frac{2}{3} u_{1,2} + \frac{2}{3} u_{2,1} + \frac{1}{6} u_{2,2} = \frac{-10}{3} u_{1,1} + \frac{2}{3} (u_{2,1} + u_{1,2}) + \frac{1}{6} u_{2,2} = \overline{F_{1,1}}. \quad (9)$$

В правой части уравнения (9) стоит черта, так как правая часть (9) отличается от уравнения (5):

$$\begin{aligned} \frac{-10}{3} u_{1,1} + \frac{2}{3} (u_{2,1} + u_{1,2} + u_{1,0} + u_{0,1}) + \frac{1}{6} (u_{2,2} + u_{0,2} + u_{2,0} + u_{0,0}) &= \overline{F_{1,1}} + \frac{2}{3} (u_{1,0} + u_{0,1}) + \frac{1}{6} (u_{0,2} + u_{2,0} + u_{0,0}) \equiv \overline{F_{1,1}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{F_{1,1}} \equiv \overline{F} - \frac{2}{3} (u_{1,0} + u_{0,1}) - \frac{1}{6} (u_{0,2} + u_{2,0} + u_{0,0}). \end{aligned}$$

Аналогично, для трех остальных узлов имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{10}{3}u_{1,n_1-1} + \frac{2}{3}(u_{2,n_1-1} + u_{1,n_1-2} + u_{1,n_1} + u_{0,n_1-1}) + \frac{1}{6}(u_{2,n_1-2} + u_{0,n_1-2} + u_{2,n_1} + u_{0,n_1}) = F_{1,n_1-1} \\ \overline{F_{1,n_1-1}} \equiv F_{1,n_1-1} - \frac{2}{3}(u_{1,n_1} + u_{0,n_1-1}) - \frac{1}{6}(u_{0,n_1-2} + u_{2,n_1} + u_{0,n_1}) \\ -\frac{10}{3}u_{n_2-1,1} + \frac{2}{3}(u_{n_2-2,1} + u_{n_2-1,2} + u_{n_2-1,0} + u_{n_2,1}) + \frac{1}{6}(u_{n_2-2,2} + u_{n_2,2} + u_{n_2-2,0} + u_{n_2,0}) = F_{n_2-1,1} \\ \overline{F_{n_2-1,1}} \equiv F_{n_2-1,1} - \frac{2}{3}(u_{n_2-1,0} + u_{n_2,1}) - \frac{1}{6}(u_{n_2,2} + u_{n_2-2,0} + u_{n_2,0}) \\ -\frac{10}{3}u_{n_2-1,n_1-1} + \frac{2}{3}(u_{n_2-2,n_1-1} + u_{n_2-1,n_1-2} + u_{n_2-1,n_1} + u_{n_2,n_1-1}) + \frac{1}{6}(u_{n_2-2,n_1-2} + u_{n_2,n_1-2} + u_{n_2-2,n_1} + u_{n_2,n_1}) = F_{n_2-1,n_1-1} \\ \overline{F_{n_2-1,n_1-1}} \equiv F_{n_2-1,n_1-1} - \frac{2}{3}(u_{n_2-1,n_1} + u_{n_2,n_1-1}) - \frac{1}{6}(u_{n_2,n_1-2} + u_{n_2-2,n_1} + u_{n_2,n_1}) \\ -\frac{10}{3}u_{1,1} + \frac{2}{3}(u_{2,1} + u_{1,2} + u_{1,0} + u_{0,1}) + \frac{1}{6}(u_{2,2} + u_{0,2} + u_{2,0} + u_{0,0}) = F_{1,1} \\ \overline{F_{1,1}} \equiv F_{1,1} - \frac{2}{3}(u_{1,0} + u_{0,1}) - \frac{1}{6}(u_{0,2} + u_{2,0} + u_{0,0}) \end{array} \right. \quad (10)$$

где
$$F_{m,n} = f_{m,n}h^2 + \frac{h^4}{12}(f_{xx} + f_{yy}) + h^6 \left(\frac{1}{360}(f_x^{(4)} + f_y^{(4)}) + \frac{1}{90}f_{xyxy}^{(4)} \right) + O(h^8) \Big|_{x=x_n, y=y_m}.$$

Рассмотрим второе уравнение системы (7) для узла с координатами $(m = 2, n = s = 1)$, из (6) имеем:

$$\begin{aligned} & b_{s,s-1}u_{m-1,s-1} + b_{s,s}u_{m-1,s} + b_{s,s+1}u_{m-1,s+1} + a_{s,s-1}u_{m,s-1} + a_{s,s}u_{m,s} + a_{s,s+1}u_{m,s+1} + b_{s,s-1}u_{m+1,s-1} + \\ & + b_{s,s}u_{m+1,s} + b_{s,s+1}u_{m+1,s+1} = F_{m,s} \Leftrightarrow b_{1,1}u_{1,1} + b_{1,2}u_{1,2} + a_{1,1}u_{2,1} + a_{1,2}u_{2,2} + b_{1,1}u_{3,1} + b_{1,2}u_{3,2} = \overline{F_{2,1}} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{2}{3}u_{1,1} + \frac{1}{6}u_{1,2} - \frac{10}{3}u_{2,1} + \frac{2}{3}u_{2,2} + \frac{2}{3}u_{3,1} + \frac{1}{6}u_{3,2} = \overline{F_{2,1}} \Leftrightarrow -\frac{10}{3}u_{2,1} + \frac{2}{3}(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,1}) + \frac{1}{6}(u_{1,2} + u_{3,2}) = \overline{F_{2,1}}. \end{aligned}$$

Добавляя тождественно несколько слагаемых к левой и правой части последнего уравнения до полноты формулы (5), получим

$$-\frac{10}{3}u_{2,1} + \frac{2}{3}(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,1} + u_{2,0}) + \frac{1}{6}(u_{1,0} + u_{3,2} + u_{1,2} + u_{3,0}) = \overline{F_{2,1}} + \frac{2}{3}u_{2,0} + \frac{1}{6}(u_{1,0} + u_{3,0}) \equiv \overline{F_{2,1}}. \quad (11)$$

Аналогично формуле (11) для узла $(m = 2, n = s = 1)$ для всех граничных (неугловых) узлов $(m = 1, n = 1, \dots, n_1 - 1)$, $(m = n_2 - 1, n = 1, \dots, n_1 - 1)$, $(m = 1, \dots, n_2 - 1, n = 1)$, $(m = 1, \dots, n_2 - 1, n = n_1 - 1)$ имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{10}{3}u_{1,n} + \frac{2}{3}(u_{1,n-1} + u_{2,n} + u_{1,n+1} + u_{0,n}) + \frac{1}{6}(u_{2,n-1} + u_{2,n+1} + u_{0,n-1} + u_{0,n+1}) = F_{1,n}, n = \overline{2, n_1 - 2} \\ \overline{F_{1,n}} = F_{1,n} - \frac{2}{3}u_{0,n} - \frac{1}{6}(u_{0,n-1} + u_{0,n+1}), n = \overline{2, n_1 - 2} \\ -\frac{10}{3}u_{n_2-1,n} + \frac{2}{3}(u_{n_2-1,n-1} + u_{n_2-2,n} + u_{n_2-1,n+1} + u_{n_2,n}) + \frac{1}{6}(u_{n_2-2,n-1} + u_{n_2-2,n+1} + u_{n_2,n-1} + u_{n_2,n+1}) = F_{n_2-1,n}, n = \overline{2, n_1 - 2} \\ \overline{F_{n_2-1,n}} = F_{n_2-1,n} - \frac{2}{3}u_{n_2,n} - \frac{1}{6}(u_{n_2,n-1} + u_{n_2,n+1}), n = \overline{2, n_1 - 2} \\ -\frac{10}{3}u_{m,1} + \frac{2}{3}(u_{m-1,1} + u_{m,2} + u_{m+1,1} + u_{m,0}) + \frac{1}{6}(u_{m-1,2} + u_{m+1,2} + u_{m-1,0} + u_{m+1,0}) = F_{m,1}, m = \overline{2, n_2 - 2} \\ \overline{F_{m,1}} = F_{m,1} - \frac{2}{3}u_{m,0} - \frac{1}{6}(u_{m-1,0} + u_{m+1,0}), m = \overline{2, n_2 - 2} \\ -\frac{10}{3}u_{m,n_1-1} + \frac{2}{3}(u_{m-1,n_1-1} + u_{m,n_1-2} + u_{m+1,n_1-1} + u_{m,n_1}) + \frac{1}{6}(u_{m-1,n_1-2} + u_{m+1,n_1-2} + u_{m-1,n_1} + u_{m+1,n_1}) = F_{m,n_1-1}, m = \overline{2, n_2 - 2}, \\ \overline{F_{m,n_1-1}} = F_{m,n_1-1} - \frac{2}{3}u_{m,n_1} - \frac{1}{6}(u_{m-1,n_1} + u_{m+1,n_1}), m = \overline{2, n_2 - 2} \\ \overline{F_{m,n}} = F_{m,n}, \forall m \in \overline{2, n_2 - 2}, n \in \overline{2, n_1 - 2} \end{array} \right. \quad (12)$$

где
$$F_{m,n} = f_{m,n}h^2 + \frac{h^4}{12}(f_{xx} + f_{yy}) + h^6 \left(\frac{1}{360}(f_x^{(4)} + f_y^{(4)}) + \frac{1}{90}f_{xyxy}^{(4)} \right) + O(h^8) \Big|_{x=x_n, y=y_m}.$$

Таким образом, запись уравнений системы (7) с матрицами A, B , определенных формулой (4) во внутренних узлах ($m = 2, \dots, n_2 - 2, n = 2, \dots, n_1 - 2$), не отличается от формулы (5) – аппроксимации уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности. В граничных узлах следует использовать формулы (10) – в четырех угловых граничных узлах или формулы (12) – в граничных узлах на четырех отрезках.

Будем искать решение рекуррентно заданной системы матричных уравнений (7) в виде

$$\begin{cases} u_m^T = \lambda_m u_{m+1}^T + v_m, m = \overline{1, n_2 - 2}. \\ u_{n_2-1}^T = v_{n_2-1}, m = n_2 - 1 \end{cases} \quad (13)$$

Как следует из теории размерностей [7] в формуле (7) u_m^T, v_m – векторы ранга $n_1 - 1$, а коэффициенты прогонки $\lambda_m, m = \overline{1, n_2 - 2}$ представляют собой квадратные матрицы того же ранга $n_1 - 1$. В (13) u_m^T обозначает вектор-столбец – транспонированную строку u_m с номером m матрицы решения $(n_2 - 1)(n_1 - 1)$.

Из первого уравнения системы (7) имеем

$$u_1^T = -A^{-1}Bu_2^T + A^{-1}\overline{F_1^T} \Leftrightarrow \lambda_1 = -A^{-1}B, v_1 = A^{-1}\overline{F_1^T}, \quad (14)$$

где $\overline{F_1^T}$ обозначает вектор-столбец – транспонированную строку с номером $m = 1$ матрицы правой части F уравнения Пуассона.

Как следует из (13) $u_{m-1}^T = \lambda_{m-1}u_m^T + v_{m-1}$, преобразуем второе уравнение системы (13):

$$\begin{aligned} Bu_{m-1}^T + Au_m^T + Bu_{m+1}^T = \overline{F_m^T} &\Leftrightarrow B(\lambda_{m-1}u_m^T + v_{m-1}) + Au_m^T + Bu_{m+1}^T = \overline{F_m^T}, (B\lambda_{m-1} + A)u_m^T = -Bu_{m+1}^T + \overline{F_m^T} - Bv_{m-1} \Leftrightarrow \\ u_m^T = -(B\lambda_{m-1} + A)^{-1}Bu_{m+1}^T + (B\lambda_{m-1} + A)^{-1}(\overline{F_m^T} - Bv_{m-1}) &\Leftrightarrow \\ \lambda_m = -(B\lambda_{m-1} + A)^{-1}B, v_m = (B\lambda_{m-1} + A)^{-1}(\overline{F_m^T} - Bv_{m-1}), m = \overline{2, n_2 - 2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Используя последнее уравнение системы (5), форму решения (13), найдем последнюю строку матрицы решения $u_{n_2-1}^T$:

$$\begin{aligned} Bu_{n_2-2}^T + Au_{n_2-1}^T = \overline{F_{n_2-1}^T}, u_{n_2-2}^T = \lambda_{n_2-2}u_{n_2-1}^T + v_{n_2-2} &\Leftrightarrow B(\lambda_{n_2-2}u_{n_2-1}^T + v_{n_2-2}) + Au_{n_2-1}^T = \overline{F_{n_2-1}^T} \Leftrightarrow \\ (B\lambda_{n_2-2} + A)u_{n_2-1}^T = \overline{F_{n_2-1}^T} - Bv_{n_2-2} &\Leftrightarrow u_{n_2-1}^T = (B\lambda_{n_2-2} + A)^{-1}(\overline{F_{n_2-1}^T} - Bv_{n_2-2}). \end{aligned} \quad (16)$$

В силу второго уравнения (13) получим

$$v_{n_2-1} = u_{n_2-1}^T. \quad (17)$$

Формулы (14), (15) назовем матричными формулами прогонки вперед, а формулы (17), (13) матричными формулами прогонки назад:

$$u_m^T = \lambda_m u_{m+1}^T + v_m, m = \overline{n_2 - 2, 1}. \quad (18)$$

Опишем построенный нами алгоритм решения уравнения Пуассона за конечное число арифметических операций матричным методом прогонки (в добрых традициях мехмата МГУ [3, с. 587–588]).

1. По формуле $F_{m,n}^T = f_{m,n}h^2 + \frac{h^4}{12}(f_{xx} + f_{yy}) + h^6\left(\frac{1}{360}(f_x^{(4)} + f_y^{(4)}) + \frac{1}{90}f_{xxyy}^{(4)}\right) + O(h^8)$ вычис-

лить правую часть уравнения Пуассона во всех внутренних узлах равномерной сетки прямоугольника ($m = 1, \dots, n_2 - 1; n = 1, \dots, n_1 - 1$). Краевые условия задачи (1) определяются формулой (8)

$u_{m,0} = \Phi_{1,m}, u_{m,n_1} = \Phi_{2,m}, u_{0,n} = \Phi_{3,n}, u_{n_2,n} = \Phi_{4,n}, m = \overline{0, n_2}, n = \overline{0, n_1}$.

2. Поправить (модифицировать) правые части системы уравнений (7) по формулам (10), (12) в узлах прямоугольного контура, соседнего с граничным контуром, то есть найти $\overline{F_{m,n}}$ по величинам $F_{m,n}$ пункта 1.

3. Найти матричные коэффициенты прогонки вперед по формулам (14), (15) $m = \overline{1, n_2 - 2}$.

4. Найти вектор-строку $u_{n_2-1}^T$ по формуле (16).

5. Найти остальные строки матрицы – решения $u_m^T, m = \overline{n_2 - 2, 1}$ по формулам (18).

Решим пример на классе элементарных функций, методы решения аналогичных примеров описаны в учебнике по уравнениям математической физики [9]:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin(2x)\sin(3y), (x, y) \in (0, 2\pi) \times (0, 3\pi) . \\ u(0, y) = u(2\pi, y) = \sin(y), y \in [0, 3\pi] \\ u(x, 0) = u(x, 3\pi) = \sin(x), x \in [0, 2\pi] \end{cases} \quad (19)$$

Проведем линейную редукцию примера (19), положив $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y)$, где

$$1) \begin{cases} u_{1xx}(x, y) + u_{1yy}(x, y) = \sin(2x)\sin(3y), (x, y) \in (0, 2\pi) \times (0, 3\pi) . \\ u_1(0, y) = u_1(2\pi, y) = 0, y \in [0, 3\pi] \\ u_1(x, 0) = u_1(x, 3\pi) = 0, x \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Решение последней системы ищем в виде $u_1(x, y) = A\sin(2x)\sin(3y)$. При этом краевые условия – второе и третье уравнения системы 1), выполняются автоматически. Подставим $u_1(x, y)$ в первое уравнение системы:

$$u_{1xx}(x, y) + u_{1yy}(x, y) = \sin(2x)\sin(3y) \Leftrightarrow -A(4+9)\sin(2x)\sin(3y) = \sin(2x)\sin(3y) \Leftrightarrow A = -\frac{1}{13},$$

тогда $u_1(x, y) = -\frac{1}{13}\sin(2x)\sin(3y)$.

$$2) \begin{cases} u_{2xx}(x, y) + u_{2yy}(x, y) = 0, (x, y) \in (0, 2\pi) \times (0, 3\pi) . \\ u_2(0, y) = u_2(2\pi, y) = \sin(y), y \in [0, 3\pi] \\ u_2(x, 0) = u_2(x, 3\pi) = 0, x \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Ищем решение 2) в виде $u_2(x, y) = f(x)\sin(y)$, автоматически удовлетворяющее краевому условию – третьему уравнению в системе 2). Подставим $u_2(x, y)$ в первое и второе уравнения системы 2):

$$\begin{cases} (f''(x) - f(x))\sin(y) = 0 \\ u_2(0, y) = u_2(2\pi, y) = \sin(y) \Leftrightarrow f(0)\sin(y) = f(2\pi)\sin(y) = \sin(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x) - f(x) = 0 \\ f(0) = f(2\pi) = 1 . \end{cases}$$

Общее решение однородного обыкновенного дифференциального уравнения в краевой задаче ищем в виде $f(x) = A\operatorname{sh}(x) + B\operatorname{ch}(x)$, $f(0) = 1 \Leftrightarrow A \cdot 0 + B \cdot 1 = 1, B = 1; f(2\pi) = 1 \Leftrightarrow A \cdot \operatorname{sh}(2\pi) + \operatorname{ch}(2\pi) = 1, A = \frac{1 - \operatorname{ch}(2\pi)}{\operatorname{sh}(2\pi)}$,

где $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \forall x \in (-\infty, +\infty)$.

$$\text{Тогда } u_2(x, y) = f(x)\sin(y) = (A\operatorname{sh}(x) + B\operatorname{ch}(x))\sin(y) = \left(\left(\frac{1 - \operatorname{ch}(2\pi)}{\operatorname{sh}(2\pi)} \right) \operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x) \right) \sin(y) .$$

$$3) \begin{cases} u_{3xx}(x, y) + u_{3yy}(x, y) = 0, (x, y) \in (0, 2\pi) \times (0, 3\pi) . \\ u_3(0, y) = u_3(2\pi, y) = 0, y \in [0, 3\pi] \\ u_3(x, 0) = u_3(x, 3\pi) = \sin(x), x \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Ищем решение 3) в виде $u_3(x, y) = f(y)\sin(x)$, автоматически удовлетворяющее краевому условию – второму уравнению в системе 3). Подставим $u_3(x, y)$ в первое и третье уравнения системы 3):

$$\begin{cases} (f''(y) - f(y))\sin(x) = 0 \\ u_3(x, 0) = u_3(x, 3\pi) = \sin(x) \Leftrightarrow f(0)\sin(x) = f(3\pi)\sin(x) = \sin(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f''(y) - f(y) = 0 \\ f(0) = f(3\pi) = 1 \end{cases}$$

Но последние две краевые задачи отличаются друг от друга заменой переменных $x \leftrightarrow y$, поэтому и решения задач 2) и 3) отличаются только заменой переменных $x \leftrightarrow y$ и краевыми условиями $f(2\pi) = 1 \Leftrightarrow f(3\pi) = 1$:

$$u_3(x, y) = f(y)\sin(x) = (A\operatorname{sh}(y) + B\operatorname{ch}(y))\sin(x) = \left(\left(\frac{1 - \operatorname{ch}(3\pi)}{\operatorname{sh}(3\pi)} \right) \operatorname{sh}(y) + \operatorname{ch}(y) \right) \sin(x) .$$

Тогда решение исходного примера (19) имеет вид

$$u(x, y) = -\frac{1}{13} \sin(2x) \sin(3y) + \left(\left(\frac{1 - \operatorname{ch}(2\pi)}{\operatorname{sh}(2\pi)} \right) \operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x) \right) \sin(y) + \left(\left(\frac{1 - \operatorname{ch}(3\pi)}{\operatorname{sh}(3\pi)} \right) \operatorname{sh}(y) + \operatorname{ch}(y) \right) \sin(x). \quad (20)$$

Программа, написанная нами на языке FORTRAN [20] с использованием алгоритма (8), (10), (12), (14), (15), (16), (18), возвращает численное решение $u_{m,n}$ (*numerical*), которое сравнивается с точным решением $u(x, y)$ (*exact*) в таблице.

Таблица. – Сравнение численного решения $u_{m,n}$ (*numerical*), полученного алгоритмом (8), (10), (12), (14), (15), (16), (18) с точным решением $u(x_n, y_m)$ (*exact*).

$y_m = c + h_2 \cdot m$	$x_n = a + h_1 \cdot n$	$u(x_n, y_m)$ (<i>exact</i>)	$u_{m,n}$ (<i>numerical</i>)
1	2	3	4
1.25663706143	0.000000000000E+000	0.951056516295	0.951056516295
2.51327412287	0.000000000000E+000	0.587785252292	0.587785252292
3.76991118430	0.000000000000E+000	-0.587785252292	-0.587785252292
5.02654824574	0.000000000000E+000	-0.951056516295	-0.951056516295
6.28318530717	0.000000000000E+000	-2.4492127076E-016	-0.44921270764E-016
7.53982236861	0.000000000000E+000	0.951056516295	0.951056516295
8.79645943005	0.000000000000E+000	0.587785252292	0.587785252292
0.000000000000E+000	1.25663706143	0.951056516295	0.951056516295
1.25663706143	1.25663706143	0.573907707085	0.573907707086
2.51327412287	1.25663706143	0.205804929549	0.205804929546
3.76991118430	1.25663706143	-0.102572841154	-0.102572841152
5.02654824574	1.25663706143	-0.285044176197	-0.285044176199
6.28318530717	1.25663706143	4.28714624319E-002	4.287146243183E-002
7.53982236861	1.25663706143	0.447878357634	0.447878357636
8.79645943005	1.25663706143	0.635305917351	0.635305917348
0.000000000000E+000	2.51327412287	0.587785252292	0.587785252292
1.25663706143	2.51327412287	0.223220476438	0.223220476435
2.51327412287	2.51327412287	0.178820392472	0.178820392476
3.76991118430	2.51327412287	-0.115019453114	-0.115019453119
5.02654824574	2.51327412287	-4.4692996239E-002	-4.46929962365E-002
6.28318530717	2.51327412287	2.64960209303E-002	2.64960209302E-002
7.539822368615	2.513274122871	0.1453300548980	0.1453300548951
8.79645943005	2.51327412287	0.444266601135	0.444266601139
0.000000000000E+000	3.76991118430	-0.587785252292	-0.587785252292
1.25663706143	3.76991118430	-2.5661795207E-002	-2.5661795204E-002
2.51327412287	3.76991118430	-5.6722412698E-002	-5.6722412703E-002
3.76991118430	3.76991118430	-7.0785266586E-003	-7.0785266539E-003
5.02654824574	3.76991118430	-0.152865684991	-0.152865684994
6.28318530717	3.76991118430	-2.6496020930E-002	-2.6496020930E-002
7.53982236861	3.76991118430	5.22286263330E-002	5.22286263358E-002
8.79645943005	3.76991118430	-0.322168621361	-0.322168621366
0.000000000000E+000	5.02654824574	-0.951056516295	-0.951056516295
1.25663706143	5.02654824574	-2.1099959942E-002	-2.1099959944E-002
2.51327412287	5.02654824574	0.135849047429	0.135849047432
3.76991118430	5.02654824574	-0.239081135823	-0.239081135826
5.02654824574	5.02654824574	-0.267763570945	-0.267763570943
6.28318530717	5.02654824574	-4.2871462431E-002	-4.2871462431E-002
7.53982236861	5.02654824574	0.104929389507	0.104929389505
8.79645943005	5.02654824574	-0.293651940372	-0.293651940369
0.000000000000E+000	6.28318530717	-2.4492127076E-016	0.000000000000E+000
1.25663706143	6.28318530717	0.951056516295	0.951056516295
2.51327412287	6.28318530717	0.587785252292	0.587785252292
3.76991118430	6.28318530717	-0.587785252292	-0.587785252292
5.02654824574	6.28318530717	-0.951056516295	-0.951056516295
6.28318530717	6.28318530717	-2.5596176402E-016	-2.44921270764E-016
7.53982236861	6.28318530717	0.951056516295	0.951056516295
8.79645943005	6.28318530717	0.587785252292	0.587785252292

Замечание 1. Сравнение третьего и четвертого столбцов таблицы 1 показывает совпадение точного аналитического $u(x_n, y_m)(exact)$ и численного решения $u_{m,n}(numerical)$ в одиннадцати значащих цифрах. Программа вычисляет норму Чебышева разности между точным и численным решениями $\|u_{m,n}(numerical) - (u(exact))_{m,n}\|_C = \max_{m=0, n_1; n=0, n_2} |u_{m,n}(numerical) - (u(exact))_{m,n}| = 5.3980153680299 \cdot 10^{-12}$, с параметрами $n_1 = 250, n_2 = 375$ (число интервалов деления стороны квадрата $b - a = 2\pi, d - c = 3\pi$) равномерной сетки. Известно также, что все другие функциональные нормы в численных методах не превышают нормы Чебышева в пространстве равномерно непрерывных функций [3; 4; 8].

Отметим, что в нашей задаче появляется проблема трансляции аналитического решения в численный массив. Решение (20) с учетом относительной погрешности $10^{-16} - 10^{-15}$ в компиляторе с двойной точностью [18] имеет абсолютную ошибку $(ch(2\pi) + ch(3\pi)) \cdot 10^{-15} \approx 6.436 \cdot 10^{-12} > 5.398 \cdot 10^{-12}$. Видно, что ошибка трансляции (перевода) аналитического решения в численный массив превышает даже невязку задачи (1), (2) по норме Чебышева.

Замечание 2. Математики Новосибирской математической школы придерживаются мнения, что тестовые примеры в численных алгоритмах должны быть в некотором смысле экстремальными [14], поэтому в примере (19) выбрана быстро осциллирующая правая часть уравнения $f(x, y) = \sin(2x)\sin(3y)$.

Замечание 3. Определим порядок погрешности алгоритма (8), (10), (12), (14), (15), (16), (18) совместно с формулой (5). Программа возвращает значение нормы Чебышева

$\|u_{m,n}(numerical) - (u(exact))_{m,n}\|_C^{n_1=50, n_2=75} = 8.145 \cdot 10^{-8}$, а при числе интервалов вдвое больше имеем $\|u_{m,n}(numerical) - (u(exact))_{m,n}\|_C^{n_1=100, n_2=150} = 1.2658 \cdot 10^{-9}$, тогда порядок погрешности алгоритма $p = 6$: $\|u_{m,n}(numerical) - (u(exact))_{m,n}\|_C^{n_1=50, n_2=75} / \|u_{m,n}(numerical) - (u(exact))_{m,n}\|_C^{n_1=100, n_2=150} = 8.145 \cdot 10^{-8} / 1.2658 \cdot 10^{-9} \approx 64,35 \approx 2^6 \Leftrightarrow p = 6$. То есть порядок погрешности алгоритма не может превышать порядка погрешности аппроксимации уравнения Пуассона формулой (3), равного шести.

Замечание 4. В работе [5] методами простой итерации и скалярной прогонки с числом итераций $m = 1800$ ($n_1 = n_2 = 111$) с быстро осциллирующей правой частью $f(x, y) = \sin(2x)\sin(3y)$ программа возвращает норму Чебышева (с краевыми условиями $u(0, y) = u(\pi, y) = \sin(y), y \in [0, \pi], u(x, 0) = u(x, \pi) = \sin(x), x \in [0, \pi]$) для уравнения Пуассона равной $\|u_{m,n}(numerical) - (u(exact))_{m,n}\|_C^{n_1=111, n_2=111} = 2.428 \cdot 10^{-11}$ за время $\Delta t = 58.2$ с, в то время как в данной работе норма невязки и время равны $\|u_{m,n}(numerical) - (u(exact))_{m,n}\|_C^{n_1=111, n_2=111} = 1.06 \cdot 10^{-11}$, $\Delta t = 0,87$ с соответственно.

Отметим, что, как частный случай, из предложенного нами алгоритма можно получить матричный алгоритм, описанный в общих чертах в [3, с. 584–585]. Авторы Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. ввели термин – «метод прогонки в блочной форме». Там уравнение Пуассона решается на прямоугольнике с пятиточечным шаблоном «крест» со вторым порядком погрешности. Заметим, что в [3, с. 584–585] уравнение Пуассона решается на квадрате с одинаковым числом интервалов сетки. Мы обобщили их алгоритм для решения уравнения Пуассона на прямоугольник $(n_2 - 1) \times (n_1 - 1)$. Матрицы A, B имеют вид

$$a_{m,n} = \begin{cases} -4, m = n; m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1} \\ 1, m = n + 1 \vee m = n - 1 \\ 0, |m - n| \geq 2 \end{cases}, \quad b_{m,n} = \begin{cases} 1, m = n; m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1} \\ 0, m \neq n \end{cases}. \quad (21)$$

То есть матрица B представляет собой единичную матрицу ранга $n_1 - 1$. Вместо разностного уравнения (5) в [3] приводится уравнение

$$u_{m-1,n} + u_{m+1,n} + u_{m,n-1} + u_{m,n+1} - 4u_{m,n} = F_{m,n} \equiv f_{m,n} h^2. \quad (22)$$

Формулы (7) по-прежнему остаются в силе:

$$\begin{cases} Au_1^T + Bu_2^T = \overline{F_1^T} \\ Bu_{m-1}^T + Au_m^T + Bu_{m+1}^T = \overline{F_n^T}, m = \overline{2, n_2 - 2} \\ Bu_{n_2-2}^T + Au_{n_2-1}^T = \overline{F_{n_2-1}^T} \end{cases} \quad (23)$$

В (23) матрицы A, B определяются формулами (21). Граничные поправки (10), (12) переходят в

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{u_{2,n_1-1} + u_{1,n_1-2} + u_{1,n_1} + u_{0,n_1-1} - 4u_{1,n_1-1}} = h^2 f_{1,n_1-1} \equiv F_{1,n_1-1} \\ \overline{F_{1,n_1-1}} \equiv F_{1,n_1-1} - (u_{1,n_1} + u_{0,n_1-1}) \\ u_{n_2-2,1} + u_{n_2-1,2} + u_{n_2-1,0} + u_{n_2,1} - 4u_{n_2-1,1} = h^2 f_{n_2-1,1} \equiv F_{n_2-1,1} \\ \overline{F_{n_2-1,1}} \equiv F_{n_2-1,1} - (u_{n_2-1,0} + u_{n_2,1}) \\ u_{n_2-2,n_1-1} + u_{n_2-1,n_1-2} + u_{n_2-1,n_1} + u_{n_2,n_1-1} - 4u_{n_2-1,n_1-1} = h^2 f_{n_2-1,n_1-1} \equiv F_{n_2-1,n_1-1} \\ \overline{F_{n_2-1,n_1-1}} \equiv F_{n_2-1,n_1-1} - (u_{n_2-1,n_1} + u_{n_2,n_1-1}) \\ u_{2,1} + u_{1,2} + u_{1,0} + u_{0,1} - 4u_{1,1} = h^2 f_{1,1} \equiv F_{1,1} \\ \overline{F_{1,1}} \equiv F_{1,1} - (u_{1,0} + u_{0,1}) \end{array} \right. \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{1,n-1} + u_{2,n} + u_{1,n+1} + u_{0,n} - 4u_{1,n} = h^2 f_{1,n} \equiv F_{1,n}, n = \overline{2, n_1 - 2} \\ \overline{F_{1,n}} = F_{1,n} - u_{0,n}, n = \overline{2, n_1 - 2} \\ u_{n_2-1,n-1} + u_{n_2-2,n} + u_{n_2-1,n+1} + u_{n_2,n} - 4u_{n_2-1,n} = h^2 f_{n_2-1,n} \equiv F_{n_2-1,n}, n = \overline{2, n_1 - 2} \\ \overline{F_{n_2-1,n}} = F_{n_2-1,n} - u_{n_2,n}, n = \overline{2, n_1 - 2} \\ u_{m-1,1} + u_{m,2} + u_{m+1,1} + u_{m,0} - 4u_{m,1} = h^2 f_{m,1} \equiv F_{m,1}, m = \overline{2, n_2 - 2} \\ \overline{F_{m,1}} = F_{m,1} - u_{m,0}, m = \overline{2, n_2 - 2} \\ u_{m-1,n_1-1} + u_{m,n_1-2} + u_{m+1,n_1-1} + u_{m,n_1} - 4u_{m,n_1-1} = h^2 f_{m,n_1-1} \equiv F_{m,n_1-1}, m = \overline{2, n_2 - 2} \\ \overline{F_{m,n_1-1}} = F_{m,n_1-1} - u_{m,n_1}, m = \overline{2, n_2 - 2} \\ \overline{F_{m,n}} = F_{m,n}, \forall m \in \overline{2, n_2 - 2}, n \in \overline{2, n_1 - 2} \end{array} \right. \quad (25)$$

Формулы (14), (15), (16), (17), (18) по-прежнему остаются в силе для матриц A, B , определенных формулой (22):

$$\lambda_1 = -A^{-1}, v_1 = A^{-1} \overline{F_1^T}, \lambda_m = -(\lambda_{m-1} + A)^{-1}, v_m = (\lambda_{m-1} + A)^{-1} (\overline{F_m^T} - v_{m-1}), m = \overline{2, n_2 - 2}; \quad (26)$$

$$u_{n_2-1}^T = (\lambda_{n_2-2} + A)^{-1} (\overline{F_{n_2-1}^T} - v_{n_2-2}), v_{n_2-1} = u_{n_2-1}^T; \quad (27)$$

$$u_m^T = \lambda_m u_{m+1}^T + v_m, m = \overline{n_2 - 2, 1}. \quad (28)$$

Программа с использованием алгоритма (22)–(29) и условий примера (19) на квадрате со стороной π возвращает норму невязки Чебышева $\|u_{m,n}(\text{numerical}) - (u(\text{exact}))\|_{m,n} = 1.027 \cdot 10^{-4}$ за время $\Delta t = 0,312$ с.

Сравнивая полученные программой результаты (**Замечание 3**) в алгоритмах (22)–(29) и в (8), (10), (12), (14), (15), (16), (18) при одних и тех же параметрах и режимах программы (Release), можно видеть, что быстродействие алгоритмов сопоставимо, но в алгоритме (8), (10), (12), (14), (15), (16), (18) норма невязки меньше в 10^7 раз!

Определение 1. Векторной нормой Чебышева $\|x\|_C \equiv \|x\|_\infty$, $x \in R^{n_1-1}$ называют величину $\|x\|_C = \max_{i=1, n_1-1} |x_i|$.

Определение 2. Бесконечной нормой $\|A\|_\infty$ матрицы $a_{i,j} \in R^{(n_2-1) \times (n_1-1)}$ называется число

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1, n_2-1} \sum_{j=1}^{n_1-1} |a_{i,j}|.$$

Определение 3. Говорят, что матричная норма $\|A\|_X$ согласована с векторной нормой $\|x\|_X$, если $\forall x \in R^{(n_1-1)}, \|Ax\|_X \leq \|A\|_X \|x\|_X$.

Лемма. Матричная норма $\|A\|_\infty$ согласована с векторной нормой $\|x\|_\infty$.

Доказательство. $\|Ax\|_\infty = \max_{i=1, n_2-1} \sum_{j=1}^{n_1-1} |a_{i,j} x_j| \leq \max_{i=1, n_2-1} \sum_{j=1}^{n_1-1} |a_{i,j}| \max_{k=1, n_1-1} |x_k| = \|A\|_\infty \|x\|_\infty$. Лемма доказана.

Определение 4. Говорят, что матрица A монотонна, если обратная к ней матрица имеет неположительные (неотрицательные) элементы [8].

Например, матрица A , определенная формулой (4), является монотонной, а матрица B нет.

Численный эксперимент показывает, что матрица, обратная к A , определенная формулой (4), является монотонной для различных рангов, то есть все элементы матрицы A^{-1} неположительные. Оказывается, что все матрицы с диагональным преобладанием элементов, у которых диагональные и недиагональные элементы имеют противоположные знаки [8], являются монотонными.

Теорема 1. Невырожденная матрица со строгим диагональным преобладанием элементов, у которой диагональные элементы отрицательны (положительны), а недиагональные элементы положительны (отрицательны), является монотонной.

Доказательство для определенности проведем для матриц с отрицательными диагональными элементами и положительными недиагональными элементами.

База индукции ($n = 2$).

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}, a_{1,1} < 0, |a_{1,1}| > |a_{1,2}|, a_{2,2} < 0, |a_{2,1}| < |a_{2,2}|, \Delta = a_{2,2}a_{1,1} - a_{1,2}a_{2,1} > 0, A_1 = a_{2,2} < 0,$$

$$A_{22} = a_{2,2} < 0, A_{12} = -a_{2,1} < 0, A_{21} = -a_{1,2} < 0, \text{sign}(a_{2,1} + a_{2,2}) = \text{sign}(a_{2,2}) = -1, \text{sign}(a_{1,1} + a_{1,2}) = \text{sign}(a_{1,1}) = -1,$$

$$\text{sign}(\Delta_n) = (-1)^n = (-1)^2 = \text{sign}(a_{2,2}a_{1,1} - a_{1,2}a_{2,1}) = 1, a_{m,n}^{-1} = \frac{A_{n,m}}{\Delta} < 0, \forall m, n = 1, 2.$$

Видим, что A_2 монотонная, так как все элементы обратной матрицы отрицательны. Кроме того, диагональные алгебраические дополнения прямой матрицы – равносильно диагональные элементы обратной матрицы, больше по модулю недиагональных. База индукции проверена.

Индуктивный переход. Пусть A_{n-1} – монотонная, знак диагонального минора $\text{sign}(\Delta_{n-1}) = (-1)^{n-1}$, все диагональные миноры по модулю больше недиагональных миноров. Если $a_{m,n}$, $A_{m,n}$ соответственно элемент и его алгебраическое дополнение, то [11, с. 32]

$$\begin{cases} a_{m,1}A_{m,1} + a_{m,2}A_{m,2} + \dots + a_{m,m}A_{m,m} + \dots + a_{m,n}A_{m,n} = \Delta_n \\ a_{m,1}A_{s,1} + a_{m,2}A_{s,2} + \dots + a_{m,m}A_{s,m} + \dots + a_{m,n}A_{s,n} = 0, \forall s \neq m. \end{cases} \quad (29)$$

Так как $\text{sign}(\Delta_n) = \text{sign}(a_{m,1}A_{m,1} + a_{m,2}A_{m,2} + \dots + a_{m,m}A_{m,m} + \dots + a_{m,n}A_{m,n}) = \text{sign}(a_{m,m}A_{m,m}) = (-1) \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n$.

Выражая из формулы (29) диагональное алгебраическое дополнение, получим

$$\text{sign}(a_{m,1}A_{m,1} + a_{m,2}A_{m,2} + \dots + a_{m,m}A_{m,m} + \dots + a_{m,n}A_{m,n}) = \text{sign}(a_{m,m}A_{m,m}) = \text{sign}(a_{m,m}) \cdot \text{sign}(A_{m,m}) = \text{sign}(\Delta_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sign}(A_{m,m}) = \text{sign}(\Delta_n) \text{sign}(a_{m,m}) = (-1)^n (-1) = (-1)^{n+1}, a_{m,m} < 0 \forall m = \overline{1, n}, a_{m,m}^{-1} = \frac{A_{m,m}}{\Delta_n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sign}(a_{m,m}^{-1}) = \text{sign}\left(\frac{A_{m,m}}{\Delta_n}\right) = \text{sign}(A_{m,m}) \text{sign}(\Delta_n) = (-1)^{n+1} (-1)^n = -1.$$

Из второго уравнения (29) имеем $\sum_{k=1}^n a_{m,k} A_{s,k} = a_{m,1}A_{s,1} + a_{m,2}A_{s,2} + \dots + a_{m,m}A_{s,m} + \dots + a_{m,n}A_{s,n} = 0 (m \neq s) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a_{m,m}A_{s,m} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^n a_{m,k}A_{s,k} \Leftrightarrow \text{sign}(a_{m,m}A_{s,m}) = \text{sign}\left(-\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^n a_{m,k}A_{s,k}\right) = -\text{sign}(a_{m,s}A_{s,s}) = -\text{sign}(A_{s,s}) = (-1)^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sign}(a_{m,m}A_{s,m}) = (-1)^n \Leftrightarrow \text{sign}(a_{m,m}) \text{sign}(A_{s,m}) = (-1)^n, \text{sign}(A_{s,m}) = (-1)^n \text{sign}(a_{m,m}) = (-1)^n \cdot (-1) = (-1)^{n+1}$$

$$\text{sign}(a_{s,m}^{-1}) = \text{sign}\left(\frac{A_{m,s}}{\Delta_n}\right) = \text{sign}(A_{m,s}) \text{sign}(\Delta_n) \stackrel{A\text{-симметричная}}{=} \text{sign}(A_{s,m}) \text{sign}(\Delta_n) = (-1)^{n+1} (-1)^n = -1.$$

Кроме того, диагональные миноры по модулю больше недиагональных, так как их главная диагональ состоит из чисел, каждое из которых имеет диагональное преобладание в своей строке. **Индуктивный переход теоремы 1** доказан.

Теорема 2. Невырожденная матрица со строгим диагональным преобладанием, у которой диагональные элементы отрицательны (положительны), а недиагональные элементы положительны (отрицательны), имеет верхнюю оценку бесконечной нормы для обратной матрицы

$$r_m(A) = |a_{m,m}| - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N-1} |a_{m,n}|, R_* \equiv \min_{m=1, N-1} \left(|a_{m,m}| - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N-1} |a_{m,n}| \right) = \min_{m=1, N-1} r_m(A) > 0, \|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{R_*}.$$

Доказательство. Элемент единичной матрицы ранга $N-1$

$$e_{m,n} \equiv \delta_{m,n} = \sum_{k=1}^{N-1} a_{m,k}^{-1} a_{k,n} = a_{m,1}^{-1} a_{1,n} + a_{m,2}^{-1} a_{2,n} + \dots + a_{m,N-1}^{-1} a_{N-1,n} = \delta_{m,n}, \forall m, n = \overline{1, N-1}.$$

Просуммируем каждое слагаемое в последней сумме по индексу столбца $n = 1, \dots, N-1$:

$$\sum_{n=1}^{N-1} e_{m,n} = \sum_{n=1}^{N-1} \delta_{m,n} = 1 = \sum_{k=1}^{N-1} a_{m,k}^{-1} \sum_{n=1}^{N-1} a_{k,n} = a_{m,1}^{-1} \sum_{n=1}^{N-1} a_{1,n} + a_{m,2}^{-1} \sum_{n=1}^{N-1} a_{2,n} + \dots + a_{m,N-1}^{-1} \sum_{n=1}^{N-1} a_{N-1,n} = 1, \forall m = \overline{1, N-1}.$$

По условию **теоремы 2** диагональные и недиагональные элементы матрицы A имеют разные знаки,

имеем $\sum_{n=1}^{N-1} a_{m,n} = - \left(|a_{m,m}| - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N-1} |a_{m,n}| \right) \equiv -r_m(A)$, $-a_{m,1}^{-1} r_1(A) - a_{m,2}^{-1} r_2(A) - \dots - a_{m,N-1}^{-1} r_{N-1}(A) = 1, a_{m,n}^{-1} \leq 0, \forall m, n \in \overline{1, N-1} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |a_{m,1}^{-1}| r_1(A) + |a_{m,2}^{-1}| r_2(A) + \dots + |a_{m,N-1}^{-1}| r_{N-1}(A) = 1$, обозначим индекс строки матрицы, обратной к A , сумма модулей элементов которой максимальна, $i_0: \|A^{-1}\|_\infty = |a_{i_0,1}^{-1}| + |a_{i_0,2}^{-1}| + \dots + |a_{i_0,N-1}^{-1}| > 0$, но и для строки с номером i_0 верно

$$\left(|a_{i_0,1}^{-1}| + |a_{i_0,2}^{-1}| + \dots + |a_{i_0,N-1}^{-1}| \right) \min_{m=1, N-1} r_m(A) \leq |a_{i_0,1}^{-1}| r_1(A) + |a_{i_0,2}^{-1}| r_2(A) + \dots + |a_{i_0,N-1}^{-1}| r_{N-1}(A) = 1, \min_{m=1, N-1} r_m(A) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(|a_{i_0,1}^{-1}| + |a_{i_0,2}^{-1}| + \dots + |a_{i_0,N-1}^{-1}| \right) \min_{m=1, N-1} r_m(A) = \|A^{-1}\|_\infty \min_{m=1, N-1} r_m(A) \leq 1 \Leftrightarrow \|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\min_{m=1, N-1} r_m(A)} = \frac{1}{R_*}.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3 (достаточные условия устойчивости алгоритма (8)–(18). Пусть выполнены условия:

1) трехдиагональные матрицы Тейлица A, B симметрические ранга $n_1 - 1$ $a_{n,n+1} = a_{n+1,n}, b_{n,n+1} = b_{n+1,n}, \forall n = \overline{2, n_1 - 2}$;

2) матрица A монотонная с отрицательными диагональными элементами и положительными недиагональными элементами, B – положительная матрица $a_{n-1,n} \cdot a_{n,n} < 0, b_{n,n} > 0, \forall n = \overline{2, n_1 - 2}, \forall |n - m| \leq 1$;

$$3) R_* \equiv \min_{m=1, n_1-1} \left(|a_{m,m}| - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{n_1-1} |a_{m,n}| \right) = \min_{m=1, n_1-1} r_m(A) = |a_{m,m}| - 2|a_{m,m-1}| \geq 2\|B\|_\infty, |a_{m,m}| \geq \frac{10}{3}\|B\|_\infty, |a_{m,m-1}| \leq \frac{2}{3}\|B\|_\infty;$$

$$4) \exists \max_{m=1, n_2-1} \|F_m^T\|_\infty \equiv \|F^T\|_\infty = \max_{m=1, n_2-1} \sum_{n=1}^{n_1-1} |f_{m,n}| < +\infty.$$

Тогда:

$$1) \|\lambda_m\|_\infty \leq 1, \forall m = \overline{1, n_2 - 1};$$

2) формулы прогонки (14), (15), (16) корректны, то есть

$$\|v_m\|_\infty \leq m \frac{\|F^T\|_\infty}{\|B\|_\infty} < \infty, m = \overline{1, n_2 - 1}, \|u_{n_2-2}^T\|_\infty \leq (2n_2 - 3) \frac{\|F^T\|_\infty}{\|B\|_\infty} < +\infty.$$

Замечание 6. Нормы матриц A, B , определенных формулой (4), удовлетворяют условиям 2), 3) **теоремы 3:**

$$|a_{m,m}| \geq \frac{10}{3} \|B\|_\infty \Leftrightarrow \left(\frac{10}{3} \geq \frac{10}{3} \right); |a_{m,m-1}| \leq \frac{2\|B\|_\infty}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{2}{3}, \|B\|_\infty = \frac{2}{3} + 2\frac{1}{6} = 1,$$

$$|a_{m,m}| - 2|a_{m,m-1}| \geq 2\|B\|_\infty \Leftrightarrow \left| \frac{-10}{3} \right| - 2\frac{2}{3} = 2 \geq 2.$$

Доказательство теоремы 3 проведем по индукции. Если матрица A симметрическая, то обратная матрица A^{-1} также симметрическая. Матрицы $A + B$ и $A - B$ удовлетворяют условиям **теоремы 1** (и к ним применима **теорема 2**), так как имеют строгое диагональное преобладание элементов, а знаки диагональных и недиагональных элементов противоположны. Имеем оценку согласно [4, с. 57]

$$\|\lambda_1\|_\infty = \|-A^{-1}B\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \|B\|_\infty.$$

1) Базу индукции проверим при $k = 1$, используя **теорему 2**. Имеем

$$\|\lambda_1\|_\infty = \|-A^{-1}B\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \|B\|_\infty \stackrel{r_2}{\leq} \frac{1}{R_*} \|B\|_\infty = \frac{\|B\|_\infty}{|a_{m,m}| - 2|a_{m,m-1}|} \stackrel{3)}{\leq} \frac{\|B\|_\infty}{2\|B\|_\infty} = \frac{1}{2} \leq 1,$$

$$\|v_1\|_\infty = \|A^{-1} \overline{F_1^T}\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \|\overline{F_1^T}\|_\infty \leq \frac{\|F^T\|_\infty}{2\|B\|_\infty} \leq \frac{\|F^T\|_\infty}{\|B\|_\infty}.$$

База индукции проверена.

Индуктивный переход. Пусть верно $\|\lambda_k\| \leq 1, \forall k = \overline{1, m-1}$. Тогда имеем

$$R_*(A - B) \geq R_*(B\lambda_{m-1} + A) \geq R_*(B + A) \Leftrightarrow |a_{n,n} - b_{n,n}| - 2|a_{n,n-1} - b_{n,n-1}| \geq R_*(B\lambda_{m-1} + A) \geq |a_{n,n} + b_{n,n}| - 2|a_{n,n-1} + b_{n,n-1}| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |a_{n,n}| + |b_{n,n}| - 2(|a_{n,n-1}| - |b_{n,n-1}|) \geq R_*(B\lambda_{m-1} + A) \geq |a_{n,n}| - |b_{n,n}| - 2(|a_{n,n-1}| + |b_{n,n-1}|).$$

$$\|\lambda_m\|_\infty = \|(B\lambda_{m-1} + A)^{-1}B\|_\infty \leq \frac{\|B\|_\infty}{R_*(B\lambda_{m-1} + A)} \leq \frac{\|B\|_\infty}{|a_{n,n}| - |b_{n,n}| - 2(|a_{n,n-1}| + |b_{n,n-1}|)} =$$

$$= \frac{\|B\|_\infty}{|a_{n,n}| - 2|a_{n,n-1}| - \|B\|_\infty} \stackrel{3)}{\leq} \frac{\|B\|_\infty}{2\|B\|_\infty - \|B\|_\infty} = 1.$$

Первая часть **теоремы 1** доказана $\forall k = \overline{1, m} \subset \overline{1, n_2 - 2}$.

Обозначим $\max_{m=1, n_2-1} \|\overline{F_m^T}\|_\infty \equiv \|\overline{F^T}\|_\infty = \max_{m=1, n_2-1} \sum_{n=1}^{n_1-1} |f_{m,n}|$.

2) Так как $\|\lambda_m\|_\infty \leq 1, \forall m = \overline{1, n_2 - 2}$, база индукции $\|v_1\|_\infty = \|A^{-1} \overline{F_1^T}\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \|\overline{F_1^T}\|_\infty \leq \frac{\|\overline{F^T}\|_\infty}{2\|B\|_\infty} \leq \frac{\|\overline{F^T}\|_\infty}{\|B\|_\infty}$

проверена.

Индуктивный переход. Пусть $\|v_k\|_\infty < \infty, \forall k = \overline{1, m-1}$, тогда

$$\|v_m\|_\infty = \|(B\lambda_{m-1} + A)^{-1}(\overline{F_m^T} - Bv_{m-1})\|_\infty \leq \|(B\lambda_{m-1} + A)^{-1}\|_\infty \|(\overline{F_m^T} - Bv_{m-1})\|_\infty \leq \frac{\|(\overline{F_m^T} - Bv_{m-1})\|_\infty}{R_*(B\lambda_{m-1} + A)} \leq \frac{\|\overline{F_m^T}\|_\infty + \|B\|_\infty \|v_{m-1}\|_\infty}{\|B\|_\infty} \leq$$

$$\leq \frac{\|F_m^T\|_\infty}{\|B\|_\infty} + \|v_{m-1}\|_\infty \leq \frac{\|F^T\|_\infty}{\|B\|_\infty} + \|v_{m-1}\|_\infty \leq 2 \frac{\|F^T\|_\infty}{\|B\|_\infty} + \|v_{m-2}\|_\infty \leq \dots \leq (m-1) \frac{\|F^T\|_\infty}{\|B\|_\infty} + \|v_1\|_\infty \leq m \frac{\|F^T\|_\infty}{\|B\|_\infty} < +\infty; \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \|u_{n_2-1}^T\|_\infty = \|v_{n_2-1}\|_\infty &= \left\| (B\lambda_{n_2-2} + A)^{-1} \left(\overline{F_{n_2-1}^T} - Bv_{n_2-2} \right) \right\|_\infty \leq \left\| (B\lambda_{n_2-2} + A)^{-1} \right\|_\infty \left\| \overline{F_{n_2-1}^T} - Bv_{n_2-2} \right\|_\infty \leq \frac{\|F_{n_2-1}^T\|_\infty + \|B\|_\infty \|v_{n_2-2}\|_\infty}{\|B\|_\infty} \leq \\ &\leq \frac{\|F^T\|_\infty}{\|B\|_\infty} + \|v_{n_2-2}\|_\infty \leq (n_2-1) \frac{\|F^T\|_\infty}{\|B\|_\infty} < +\infty. \end{aligned} \quad (31)$$

По формуле (18) имеем

$$\begin{aligned} \|u_{n_2-2}^T\|_\infty &= \|\lambda_{n_2-2} u_{n_2-1}^T + v_{n_2-2}\|_\infty \leq \|\lambda_{n_2-2}\|_\infty \|u_{n_2-1}^T\|_\infty + \|v_{n_2-2}\|_\infty \leq \|u_{n_2-1}^T\|_\infty + \|v_{n_2-2}\|_\infty = \\ &= (n_2-1) \frac{\|F^T\|_\infty}{\|B\|_\infty} + (n_2-2) \frac{\|F^T\|_\infty}{\|B\|_\infty} = (2n_2-3) \frac{\|F^T\|_\infty}{\|B\|_\infty} < +\infty. \end{aligned} \quad (32)$$

Теорема 3 доказана.

В программе, написанной на FORTRAN, все массивы и функции заданы с двойной точностью, использован пример (19) с известным аналитическим решением (20). Для вычисления обратных матриц с двойной точностью в алгоритме (8), (10), (12), (14), (15), (16), (18) использована библиотека msImsl [18] с вызовом подпрограммы call dLinrg(n,bb,n,ainv,n) [18].

```

program puasson;
integer(8),parameter::n1=250,n2=(n1*3)/2,n11=n1-1,n22=n2-1;integer(8)::i,j,k,kk;
real(8)::a,b,c,d,pi,h,h1,h2,x,y;real(8)::delta(0:n2,0:n1),max,res(0:n2,0:n1);real(8)::c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8;
real(8)::nu(n22,n11),lamda(n22,n11,n11),u(0:n2,0:n1),ff(n22,n11);
real(8)::aa1(n11,n11),bb(n11,n11),aa(n11,n11),cc(n11,n11),u1(n22,n11);
real(8)::cch,ssh,a1,a2,b1,b2,f,t1,t2,f1,f2,f3,hh2,hh3,hh4,bb1(n11,n11);cch(x)=(dexp(x)+dexp(-x))/2d0;
ssh(x)=(dexp(x)-dexp(-x))/2d0;a1(x,y)=dsin(y);a2(x,y)=dsin(y);b1(x,y)=dsin(x);b2(x,y)=dsin(x);
f(x,y)=dsin(2d0*x)*dsin(3d0*y);f1(x,y)=-13d0*dsin(2d0*x)*dsin(3d0*y)/12d0;
f2(x,y)=97d0*dsin(2d0*x)*dsin(3d0*y)/360d0;f3(x,y)=4d-1*dsin(2d0*x)*dsin(3d0*y);max=-
1000d0;pi=2d0*dasin(1d0);
a=0d0;b=2d0*pi;c=0d0;d=3d0*pi;h1=(b-a)/dfloat(n1);h2=(d-c)/dfloat(n2);call cpu_time(t1);
print*,"h1=",h1,"h2=",h2;do i=1,n11;do j=1,n11;if(j==i)then;aa(i,j)=-10d0/3d0;bb(i,j)=2d0/3d0;
elseif(j==i+1.or.j==i-1)then;aa(i,j)=2d0/3d0;bb(i,j)=1d0/6d0;else;aa(i,j)=0d0;bb(i,j)=0d0;
endif;enddo;enddo;do j=0,n1,1;x=a+h1*dfloat(j);u(0,j)=b1(x,c);u(n2,j)=b2(x,d);enddo;
do i=0,n2,1;y=c+h2*dfloat(i);u(i,0)=a1(a,y);u(i,n1)=a2(b,y);enddo;hh2=h1*h1;hh3=hh2*hh2;hh4=hh3*hh2;do
j=2,n11-1,1;
x=a+h1*dfloat(j);ff(1,j)=(f(x,c+h2)*hh2+f1(x,c+h2)*hh3+(f2(x,c+h2)+f3(x,c+h2))*hh4)-(1d0/6d0)*(u(0,j-
1)+u(0,j+1))-(2d0/3d0)*u(0,j);
ff(n22,j)=(f(x,d-h2)*hh2+f1(x,d-h2)*hh3+(f2(x,d-h2)+f3(x,d-h2))*hh4)-(1d0/6d0)*(u(n2,j-1)+u(n2,j+1))-
(2d0/3d0)*u(n2,j);
enddo;do i=2,n22-1,1;y=c+h2*dfloat(i);
ff(i,1)=(f(a+h1,y)*hh2+f1(a+h1,y)*hh3+(f2(a+h1,y)+f3(a+h1,y))*hh4)-(1d0/6d0)*(u(i+1,0)+u(i-1,0))-
(2d0/3d0)*u(i,0);
ff(i,n11)=(f(b-h1,y)*hh2+f1(b-h1,y)*hh3+(f2(b-h1,y)+f3(b-h1,y))*hh4)-(1d0/6d0)*(u(i+1,n1)+u(i-1,n1))-
(2d0/3d0)*u(i,n1);
enddo;
ff(1,1)=(f(a+h1,c+h1)*hh2+f1(a+h1,c+h1)*hh3+(f2(a+h1,c+h1)+f3(a+h1,c+h1))*hh4)-
(1d0/6d0)*(u(0,0)+u(2,0)+u(0,2))-(2d0/3d0)*(u(1,0)+u(0,1));
ff(n22,1)=(f(a+h1,d-h1)*hh2+f1(a+h1,d-h1)*hh3+(f2(a+h1,d-h1)+f3(a+h1,d-h1))*hh4)-
(1d0/6d0)*(u(n2,0)+u(n2,2)+u(n2-2,0))-(2d0/3d0)*(u(n2-1,0)+u(n2,1));

```

```

ff(1,n11)=(f(b-h1,c+h2)*hh2+f1(b-h1,c+h2)*hh3+(f2(b-h1,c+h2)+f3(b-h1,c+h2))*hh4)-
(1d0/6d0)*(u(0,n1)+u(2,n1)+u(0,n1-2))-(2d0/3d0)*(u(0,n1-1)+u(1,n1));
ff(n22,n11)=(f(b-h1,d-h2)*hh2+f1(b-h1,d-h2)*hh3+(f2(b-h1,d-h2)+f3(b-h1,d-h2))*hh4)-
(1d0/6d0)*(u(n2,n1)+u(n2-2,n1)+u(n2,n1-2))-(2d0/3d0)*(u(n2,n1-1)+u(n2-1,n1));
do i=2,n2-2;do j=2,n1-2;x=a+h1*dfloat(j);y=c+h2*dfloat(i);ff(i,j)=(f(x,y)*hh2+f1(x,y)*hh3+(f2(x,y)+f3(x,y))*hh4);
enddo;enddo;call obr(n11,aa,aa1);lamda(1,1:n11,1:n11)=-matmul(aa1(1:n11,1:n11),bb(1:n11,1:n11));
nu(1,1:n11)=matmul(aa1(1:n11,1:n11),ff(1,1:n11));do i=2,n22-1;
bb1(1:n11,1:n11)=matmul(bb(1:n11,1:n11),lamda(i-1,1:n11,1:n11))+aa(1:n11,1:n11);call obr(n11,bb1,aa1);
lamda(i,1:n11,1:n11)=-matmul(aa1(1:n11,1:n11),bb(1:n11,1:n11));
nu(i,1:n11)=matmul(aa1(1:n11,1:n11),(ff(i,1:n11)-matmul(bb(1:n11,1:n11),nu(i-1,1:n11))));enddo;
bb1(1:n11,1:n11)=matmul(bb(1:n11,1:n11),lamda(n22-1,1:n11,1:n11))+aa(1:n11,1:n11);call obr(n11,bb1,aa1);
u1(n22,1:n11)=matmul(aa1(1:n11,1:n11),(ff(n22,1:n11)-matmul(bb(1:n11,1:n11),nu(n22-1,1:n11))));do i=n22-1,1,-1;
u1(i,1:n11)=matmul(lamda(i,1:n11,1:n11),u1(i+1,1:n11))+nu(i,1:n11);enddo;do i=1,n22;do
j=1,n11;u(i,j)=u1(i,j);
enddo;enddo;max=-1d3;open(2, file='2.txt');do j=0,n1;do i=0,n2;x=a+h1*dfloat(j);y=c+h2*dfloat(i);
c1= dsin(y)*(cch(x)+ssh(x)*(1d0-cch(2d0*pi))/ssh(2d0*pi));c2= dsin(x)*(cch(y)+ssh(y)*(1d0-
cch(3d0*pi))/ssh(3d0*pi));
c3= -dsin(2d0*x)*dsin(3d0*y)/13d0;res(i,j)=c1+c2+c3;delta(i,j)= u(i,j)- res(i,j);if( delta(i,j)<=0d0)then;
delta(i,j)=-delta(i,j);endif;if( delta(i,j)>max)then;max=delta(i,j);endif;if(mod(i,50)==0.and.mod(j,50)==0)then;
2 write(2,*,y,x;3 write(2,*,res(i,j),u(i,j);endif;enddo;enddo;print*, "norma C =",max, "num=";
call cpu_time(t2);print*, "t2-t1=",t2-t1;pause;end program puasson;
subroutine obr(n11,bb,aa1);use msimsl;integer(8)::n11,Lda,Ldainv;real(8)::ainv(n11,n11)
,bb(n11,n11),aa1(n11,n11);
Lda=n11;Ldainv=n11;call dLinrg(n11,bb,n11,ainv,n11);aa1(:,:)=ainv(:,:);
end subroutine;

```

Случай матричной прогонки ($h_1 \neq h_2$), но с равным числом интервалов $n_1 = n_2$ для уравнения Пуассона на квадрате (прямоугольнике) с 4 порядком погрешности описан нами в работах [6; 21].

В работе получены **результаты**:

- 1) предложен алгоритм прогонки в матричной форме для решения уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности (формулы (8), (10), (12), (14), (15), (16), (18) за конечное число арифметических операций;
- 2) показано, что предложенный алгоритм переходит как частный случай в известный алгоритм прогонки в матричной форме Бахвалова Н.С., Жидкова Н.П., Кобелькова Г.М. [3] со вторым порядком погрешности (формулы (22)–(29));
- 3) на примере (19) и программой, написанной на FORTRAN, показано, что алгоритм (8), (10), (12), (14), (15), (16), (18) имеет шестой порядок погрешности для решения уравнения Пуассона на прямоугольнике и выполняется за конечное число элементарных операций;
- 4) в теореме 1 доказана монотонность матриц с диагональным преобладанием, у которых элементы главной диагонали отрицательны (положительны), а недиагональные положительны (отрицательны);
- 5) в теореме 2 получена верхняя оценка бесконечной нормы обратной к монотонной матрице;
- 6) в теореме 3 получены достаточные условия корректности алгоритма (8), (10), (12), (14), (15), (16), (18);
- 7) быстродействие приведенного алгоритма в десятки раз превышает быстродействие алгоритма для решения уравнения Пуассона на прямоугольнике методом простой итерации с той же формулой аппроксимации с шестым порядком погрешности и относительной погрешностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов, А.А. Преобразование подобия на множестве полукватернионов / А.А. Козлов, К.С. Суравнева, И.Л. Жалейко // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 115–123.
2. Козлов, А.А. Множество полуоктав / А.А. Козлов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 75–85.
3. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – 7-е изд. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 636 с.
4. Бахвалов, Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – М. : БИНОМ, 2010. – 240 с.

5. Пастухов, Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.
6. Волосова, Н.К. Модифицированное разностное уравнение К.Н. Волкова для уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности // Евразийское Научное Объединение. – 2019. № 6-1 (52). С. 4–11.
7. Александров, П.С. Введение в теорию размерностей / П.С. Александров, Б.А. Пасынков. – М. : Наука, 1973. – 577 с.
8. Волков, Ю.С. Оценки норм матриц, обратных к матрицам монотонного вида и вполне неотрицательным матрицам / Ю.С. Волков, В.Л. Мирошниченко // Сиб. мат. журн. – 2009. – Т. 50, №6. – С. 1249 – 1254.
9. Пикулин, В.П. Практический курс по уравнениям математической физики : учеб. пособие / В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. – М. : Наука, 1995. – 224 с.
10. Волосова, Н.К. Векторный аналог метода прогонки для решения трех- и пятидиагональных матричных уравнений / Волосова [и др.]. // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 12. – С. 101–115.
11. Ильин, В.А. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. – М. : Наука : Физматлит – 1978. – 304 с.
12. Пастухов, Д.Ф. Оптимальный порядок аппроксимации разностной схемы волнового уравнения на отрезке / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 60–74.
13. Пастухов, Д.Ф. К вопросу о редукции неоднородной краевой задачи Дирихле для волнового уравнения на отрезке / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 167–186.
14. Годунов, С.К. Современные аспекты линейной алгебры / С.К. Годунов. – Новосибирск : Научная книга, 1997. – 407 с.
15. Вакуленко, С.П. Способы передачи QR-кода в стеганографии / С.П. Вакуленко, Н.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов // Мир транспорта. – 2018. – Т. 16, № 5 (78). – С. 14–25.
16. Пастухов, Д.Ф. Некоторые методы передачи QR-кода в стеганографии / Д.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, А.К. Волосова // Мир транспорта. – 2019. – Т. 17, № 3 (82). – С. 16–39.
17. Волосова, Н.К. Применение преобразования Радона в стеганографии // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования : сб. материалов науч. конф., Герценовские чтения – 2018, СПб., 9–13 апр. 2018 г. / Рос. гос. пед. ун-т им. А.И. Герцена. – СПб., 2018. – С. 234–238.
18. Бартењев, О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL: Ч. 1. – М. : ДИАЛОГ : МИФИ, 2001. – 437 с.
19. Пастухов, Д.Ф. Минимальная разностная схема для уравнения Пуассона в параллелепипеде с шестым порядком погрешности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 154–174.
20. Salih, A. Streamfunction-vorticity formulation // Indian Institute of Space Science and Technology, Department of Aerospace Engineering, Thiruvananthapuram. – 2013.
21. Волосова, Н.К. О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности за конечное число элементарных операций // Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 2-1 (60). С. 11–17.

Поступила 12.02.2020

ON FINITE METHODS FOR SOLVING THE POISSON EQUATION ON A RECTANGLE WITH THE DIRICHLET BOUNDARY CONDITIO

N. VOLOSOVA, K. VOLOSOV, A. VOLOSOVA, D. PASTUHOV, Y. PASTUHOV

An algorithm for sweeping in matrix form with a sixth order of error for solving the Poisson equation on a rectangle in a finite number of arithmetic operations is proposed. An analytical example and a program using this algorithm confirmed the sixth order of error. Theorem 1 proves the monotonicity of matrices with diagonal dominance, for which the elements of the main diagonal are negative (positive), and the off-diagonal are positive (negative). In Theorem 2, an upper bound is obtained for the infinite norm inverse to a monotonic matrix. In Theorem 3, sufficient conditions for the correctness of the proposed algorithm are obtained. It is shown that the speed of this algorithm is ten times higher than the speed of the algorithm for solving the Poisson equation on a rectangle using the simple iteration method with the same approximation formula with sixth error order.

The Keywords: *sweep method in block form, diagonal matrices, monotone matrices, inverse problems mathematical physicists, numerical methods, Poisson equation, translation of an analytical solution into a numerical array.*

УДК 514

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ОБОБЩЕННОЙ ЭНЕРГИИ НА ЭКСТРЕМАЛЯХ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА – ЛАГРАНЖА

*канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет)*

Рассматриваются свойства функций Гамильтона и Лагранжа в координатно-импульсном пространстве. Основным полученным результатом является свойство сохранения обобщенной энергии ранга n на экстремалиях системы уравнений Эйлера – Лагранжа порядка n . Это свойство является достаточным, но не необходимым условием сохранения обобщенной энергии ранга n .

Ключевые слова: *Функция Гамильтона, вариационная задача, расслоенное пространство скоростей, уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, тензор обобщенного импульса, невырожденный гессиан.*

Введение. У.Р. Гамильтон в 1835 г. получил новую форму уравнений движения механических систем – канонические уравнения Гамильтона. Полученная система канонических уравнений содержит вдвое больше дифференциальных уравнений, чем система Ж.Л. Лагранжа, однако все они первого порядка (у Лагранжа – второго).

Гамильтонова точка зрения позволяет исследовать до конца ряд задач механики, не поддающихся решению иными средствами (например, задачу о притяжении двумя неподвижными центрами и задачи о геодезических на трехосном эллипсоиде). Еще большее значение гамильтонова точка зрения имеет для приближенных методов теории возмущений (небесная механика), для понимания общего характера движения в сложных механических системах (эргодическая теория, статистическая механика) и в связи с другими разделами математической физики (оптика, квантовая механика и т.п.).

Подход У.Р. Гамильтона оказался высоко эффективным во многих математических моделях физики. Первоначально вариационный принцип Гамильтона был сформулирован для задач механики, но при некоторых естественных предположениях из него выводятся уравнения Максвелла электромагнитного поля. С появлением теории относительности оказалось, что этот принцип строго выполняется и в релятивистской динамике. Его эвристическая сила существенно помогла разработке квантовой механики, а при создании общей теории относительности Д. Гильберт успешно применил гамильтонов принцип для вывода уравнений гравитационного поля (1915 г.). Из сказанного следует, что принцип наименьшего действия Гамильтона (и естественным образом связанная с ним система канонических уравнений) занимает место среди коренных, базовых законов природы наряду с законом сохранения энергии и законами термодинамики. Представленная работа является продолжением работ авторов [9; 10; 13; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23].

Основные определения. Пусть $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$, $L(x, \dots, x^{(p)})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

Определение 1. Система функций

$$P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = \overline{0, n}, \quad i = \overline{1, m}$$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(b(n,p,k))}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right) \quad k = \overline{0, n}, i = \overline{1, m}$$

называется обобщенным импульсом ранга n для функции $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ в локальных координатах (x) базы X_m расслоения $T^p X_m$, где $L(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)})$ – локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

Функции $p_{k,n}^i$ называются k -й компонентой обобщенного импульса P_n ранга n по i -й координате или импульсами порядка k (k -импульсами) по i -й координате обобщенного импульса P_n ранга n .

Определение 2. Пусть $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$, $L(x, \dots, x^{(p)})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$. Функция

$$H = H(x, x, \dots, x^{(a(n,p))}) = H_n = H_n(L, x) = H(L, x, n) = -L(x, x, \dots, x^{(p)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i (x)^{(k)i} =$$

$$= -L(x, x, \dots, x^{(p)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i D_t^k x^i = -L(x, x, \dots, x^{(p)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right) D_t^k x^i, \quad x = D_t^k x^i, \quad (1)$$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, x, \dots, x^{(b(n,p,k))}) = \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right), \quad k = \overline{0, n}, i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

где D_t^k – оператор k -кратного полного дифференцирования по времени t , называется функцией Гамильтона (гамильтонианом) ранга n этого преобразования, двойственной к функции Лагранжа $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$, а также обобщенной энергией системы, состояние которой описывается функцией $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ в локальной системе координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$. Имеет место следующая лемма.

Лемма. Максимальные порядки производной по t $b(n, p, k)$, $a(n, p)$ в выражениях (1), (2) для $p_k^i(n), H$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, x, \dots, x^{(b(n,p,k))}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right), \quad k = \overline{0, n}, i = \overline{1, m}$$

$$H = H(x, x, \dots, x^{(a(n,p))}) = H_n = H_n(L, x) = H(L, x, n) = -L(x, x, \dots, x^{(p)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i (x)^{(k)i} = -L(x, x, \dots, x^{(p)}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x, x, \dots, x^{(b(n,p,k))}) D_t^k x^i = -L(x, x, \dots, x^{(p)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right) D_t^k x^i, \quad x = D_t^k x^i$$

имеют вид:

$$b(n, p, k) = \max(2 \min(p, n) - k, p) = \begin{cases} 1)(p \leq n) \begin{cases} 2p - k, & k \leq p \leq n \\ p, & p \leq k \leq n \end{cases} \\ 2)(p \geq n), \max(2n - k, p), \quad p \geq n \end{cases} = \begin{cases} 2p - k, & k \leq p \leq n \\ p, & p \leq k \leq n \\ \max(2n - k, p), & p \geq n \end{cases} \quad (3)$$

$$a(n, p) = \max_{1 \leq k \leq n} (b(n, p, k), k) = \begin{cases} \max_{1 \leq k \leq \min(n, p)=p} (\max(2p - k, k), p) = \max_{p \leq k \leq n} (\max(2p - k), p), \text{ при } p \leq n \\ \max_{1 \leq k \leq \min(n, p)=n} (\max(2n - k, p), k) = \max(2n - 1, p, n), \text{ при } p \geq n \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \max(2p - 1, p) = 2p - 1, \text{ при } p \leq n. \\ \max(2n - 1, p), \text{ при } p \geq n \end{cases} \quad (4)$$

Доказательство. Максимальный порядок производной по t порядка l в $p_k^i(n)$ равен $l + l + k = 2 \cdot l + k$ при $l + k \leq p$. Если $l + k > p$, то $\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \equiv 0$, и, значит, коэффициент при производной $x^{(l+k)i}$ равен 0.

Следовательно, при определении максимального порядка производной по t можно считать $l + k \leq p$ (в частности, $k \leq p$, но $k \leq n \Rightarrow k \leq \min(n, p)$). Кроме того, $l \leq n - k \Leftrightarrow l + k \leq n \Rightarrow l + k \leq \min(n, p) \Rightarrow \Rightarrow l \leq \min(n, p) - k \Rightarrow 2 \cdot l + k \leq 2 \cdot (\min(n, p) - k) + k = 2 \cdot \min(n, p) - 2 \cdot k + k = 2 \cdot \min(n, p) - k$, $p_{k,n}^i$ зависит от производных порядка

$$b(n, p, k) = \max(2 \min(p, n) - k, p) = \begin{cases} 1) (p \leq n) \begin{cases} 2p - k, & k \leq p \leq n \\ p, & p \leq k \leq n \end{cases} \\ 2) (p \geq n), \max(2n - k, p), & p \geq n \end{cases} \quad (5)$$

Учитывая определение $b(n, p, k) = \max(2 \min(p, n) - k, p)$ при $p = n$, получим

$$b(n, n, k) = b(n, p = n, k) = \max(2 \min(n, n) - k, p) = \max(2n - k, n) = 2n - k,$$

$$\text{так как при } 1 \leq k \leq \min(p, n) \Rightarrow k \leq n. \quad (6)$$

Этот же результат получается из (3) как граничный случай, так как из $p = n \Rightarrow (p \leq n) \wedge (p \geq n)$ и, значит, $2(p = n) - k = 2n - k = \max(2n - k, p = n) = \max(2n - k, n) = 2n - k$, так как при $1 \leq k \leq \min(p, n) \leq n$.

Для каждого слагаемого вида $p_{k,n}^i x^{(k)i} = p_{k,n}^i x^{(k)i}$ – произведения импульса порядка k на производную того же порядка по i -й координате – справедливо $\max(\max(2 \min(p, n) - k, p), k) = \max(2 \min(p, n) - k, p, k)$.

Энергия системы $H_n(L, x) = H(L, x, n) = -L(x, x, \dots, x) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i x^{(k)i} = -L(x, \dots, x) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i (x, x, \dots, x)^{(p)(k)i}$ будет зависеть от максимального порядка производной, тогда имеем прямую задачу на $\max \min$:

$$\begin{aligned} a(n, p) &= (\max_{1 \leq k \leq n} (2 \min(p, n) - k, p), k, p) = \max_{1 \leq k \leq n} (2 \min(p, n) - k, p, k) = \\ &= \max_{1 \leq k \leq n} (\max(2 \min(p, n) - k, p), k) = \max_{1 \leq k \leq n} (b(n, p, k), k). \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя в (4) равенства, полученные в (3), получим:

$$\begin{aligned} a(n, p) &= \max_{1 \leq k \leq n} (b(n, p, k), k) = \begin{cases} \max(\max_{1 \leq k \leq \min(n, p)=p} (2p - k, k), p) = \max(\max_{1 \leq k \leq \min(n, p)=p} (2p - k), p), & \text{при } p \leq n \\ \max_{1 \leq k \leq \min(n, p)=n} (\max(2n - k, p), k) = \max(2n - 1, p, n), & \text{при } p \geq n \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \max(2p - 1, p) = 2p - 1, & \text{при } p \leq n. \\ \max(2n - 1, p), & \text{при } p \geq n \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая равенство $a(n, p) = \max_{1 \leq k \leq n} (b(n, p, k), k)$, при $p = n$ получим $a(n, p) = a(n, p = n) = \max_{1 \leq k \leq n} (b(n, p = n, k), k) = \max_{1 \leq k \leq n} (2n - k, k) = 2n - 1$, так как при $1 \leq k \leq \min(p, n) \Rightarrow k \leq n$.

Этот же результат получается из (5) как граничный случай, так как из $p = n \Rightarrow (p \leq n) \wedge (p \geq n)$ и, значит, $2(p = n) - 1 = 2n - 1 = \max(2n - 1, p = n) = \max(2n - 1, n) = 2n - 1$, так как $n \geq 1$.

На основании этого можно записать

$$\begin{aligned} H(x, x, \dots, x)^{(a(n, p))} &= H_n(L, x) = H(L, x, n) = -L(x, x, \dots, x)^{(p)} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i (x, x, \dots, x)^{(b(n, p, k))(k)i} = -L(x, x, \dots, x)^{(p)} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i (x, x, \dots, x)^{(b(n, p, k))} D_t^k x^i = -L(x, x, \dots, x)^{(p)} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(p)}}{\partial x^{(l+k)i}} \right) D_t^k x^i. \end{aligned} \quad (9)$$

Доказательство леммы завершено.

Замечание 1. Тем не менее можно всегда считать, что $p \geq n$, так как при $p < n$ можно определить $L_1(x, \dots, x)^{(n)} \equiv L(x, \dots, x)^{(p)} \Rightarrow a(n, p) = \max(2n - 1, p)$, $b(n, p, k) = \max(2n - k, p)$. В частности, при $p = n \Rightarrow \Rightarrow a(n, p = n) = \max(2n - 1, p = n) = 2n - 1$, $b(n, p = n, k) = \max(2n - k, p = n) = \max(2n - k, n) = 2n - k$, поскольку $2n - k \geq n$, так как при $1 \leq k \leq \min(p, n) \Rightarrow k \leq n$.

Функциональная часть системы уравнений Эйлера – Лагранжа порядка n может быть интерпретирована как импульсы нулевого порядка ранга n :

$$p_{k=0,n}^i = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+0)i}} \right) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}} \right) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (10)$$

Постановка задачи. Пусть $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$, $L(x, \dots, x) \overset{(p)}{\cdot}$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$. Рассмотрим функцию Гамильтона, двойственную к $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$:

$$H(x, x, \dots, x) \overset{(a(n,p))}{\cdot} = H_n(L, x) = H(L, x, n) = -L(x, x, \dots, x) \overset{(p)}{\cdot} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x, x, \dots, x) \overset{(b(n,p,k))}{\cdot} x^i = -L(x, x, \dots, x) \overset{(p)}{\cdot} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) \overset{(p)}{\cdot} D_t^k x^i.$$

Поставим следующую задачу: при каких условиях имеет место сохранение функции Гамильтона на экстремалиях системы уравнений Эйлера – Лагранжа.

Докажем, что при $p \leq n$ имеет место сохранение функции Гамильтона на экстремалиях системы уравнений Эйлера – Лагранжа. Ранее было доказано [16], что при $p \leq n$ энергия системы является тензором нулевого ранга, то есть не зависит от выбора локальной системы координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$, а при $p > n$, вообще говоря, зависит от локальных координат и, таким образом, не сохраняется при замене локальной системы координат в базе X_m расслоения $T^p X_m$. Имеет место следующая важная **теорема 1**.

Теорема 1 (о дифференциальной связи импульсов k -го и $(k-1)$ -го порядков ранга n). Пусть $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ – невырожденная функция Лагранжа; $p_k^i(x, x, \dots, x) \overset{(p+n-k)}{\cdot} = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) \overset{(p)}{\cdot}$, $k = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$ –

импульс k -го порядка по i -ой координате; $p_{k,n}^i = \sum_{l_1=0}^{n-k} (-1)^{l_1} D_t^{l_1} \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l_1+k)i}} \right) \overset{(p)}{\cdot}$ – импульс k -го порядка,

а соответственно, $p_{k-1,n}^i = \sum_{l_1=0}^{n-(k-1)} (-1)^{l_1} D_t^{l_1} \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l_1+k-1)i}} \right) \overset{(p)}{\cdot}$ – импульс $(k-1)$ -го порядка. Тогда справедливо

$$D_t p_{k,n}^i(x, x, \dots, x) \overset{(b(n,p,k))}{\cdot} = \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} \overset{(p)}{\cdot} - p_{k-1,n}^i(x, x, \dots, x) \overset{(b(n,p,k-1))}{\cdot}. \quad (11)$$

Доказательство. Преобразуем выражение

$$\begin{aligned} D_t p_{k,n}^i &= D_t \left(\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) \right) \overset{(p)}{\cdot} = \sum_{l=0}^{n-k} D_t \left((-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) \right) \overset{(p)}{\cdot} = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t \left(D_t^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) \right) \overset{(p)}{\cdot} \\ &= \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^{l+1} \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) \overset{(p)}{\cdot} = (-1) \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{l+1} D_t^{l+1} \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) \overset{(p)}{\cdot} = (-1) \left(\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{l+1} D_t^{l+1} \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l+1+k-1)i}} \right) \right) \overset{(p)}{\cdot}. \end{aligned}$$

Выполним замену $l_1 = l + 1$, так как $l = \overline{0, n-k}$, то $l_1 = \overline{1, n-k+1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} D_t p_{k,n}^i &= (-1) \left(\sum_{l_1=0}^{n-k} (-1)^{l_1+1} D_t^{l_1+1} \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l_1+k-1)i}} \right) \right) \overset{(p)}{\cdot} = (-1) \left(\sum_{l_1=1}^{n-k+1} (-1)^{l_1} D_t^{l_1} \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l_1+k-1)i}} \right) \right) \overset{(p)}{\cdot} = \\ &= (-1) \left(\sum_{l_1=1}^{n-(k-1)} (-1)^{l_1} D_t^{l_1} \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l_1+k-1)i}} \right) \right) \overset{(p)}{\cdot} = (-1) \left(\sum_{l_1=1}^{n-(k-1)} (-1)^{l_1} D_t^{l_1} \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(l_1+(k-1))i}} \right) \right) \overset{(p)}{\cdot} - \end{aligned}$$

$$-(-1)^0 D_i^0 \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(0+(k-1)i}} \right) = (-1)(p_{k-1,n}^i - \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(k-1)i}}) = -p_{k-1,n}^i + \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(k-1)i}}.$$

Теорема 1 доказана.

Имеет место следующая простая **теорема 2**.

Теорема 2 (о связи импульсов k -го порядка рангов n и $n+1$). Пусть $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$. $L(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)})$ – локальная запись функции $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ при выборе локальных координат в базе расслоения X_m ,

$p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_i^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right)$, $k = \overline{0, n}, i = \overline{1, m}$ – импульс k -го порядка ранга n ; $p_{k,n+1}^i = \sum_{l=0}^{n+1-k} (-1)^l D_i^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right)$ –

импульс k -го порядка ранга $n+1$. Тогда справедливо

$$p_{k,n+1}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)}) = p_i^k(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)}) + (-1)^{n+1-k} D_i^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(n+1)i}} \right), \quad i = \overline{1, m}, k = \overline{0, n}. \quad (12)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} p_{k,n+1}^i &= \sum_{l=0}^{n+1-k} (-1)^l D_i^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_i^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right) + (-1)^{n+1-k} D_i^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(n+1-k+k)i}} \right) = \\ &= \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_i^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right) + (-1)^{n+1-k} D_i^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(n+1)i}} \right) = p_{k,n}^i + (-1)^{n+1-k} D_i^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(n+1)i}} \right), \end{aligned}$$

так как $p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_i^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right)$.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$, $L(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$. Тогда при $1 \leq p \leq n$ выполняется равенство

$$D_i \left(H(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)}) \right) = - \sum_{i=1}^m p_{0,n}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)}) \cdot x^i,$$

где $p_{k=0,n}^i = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_i^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+0)i}} \right) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_i^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l)i}} \right) = 0$, $i = \overline{1, m}$ – импульсы нулевого порядка

(функциональная часть системы уравнений Эйлера – Лагранжа порядка n);

$H(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)})$ – обобщенная энергия системы ранга n :

$$\begin{aligned} H(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)}) &= H_n(L, x) = H(L, x, n) = -L(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)}) x^i = -L(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)}) + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)}) D_i^k x^i = -L(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_i^l \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right) D_i^k x^i, \end{aligned} \quad (13)$$

где $p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_i^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right)$, $k = \overline{0, \min(n, p)}, i = \overline{1, m}$ – импульс k -го порядка ранга n ,

$$b(n, p, k) = \max(2 \min(p, n) - k, p) = \begin{cases} 1(p \leq n) \begin{cases} 2p - k, & k \leq p \leq n \\ p, & p \leq k \leq n \end{cases} \\ 2(p \geq n), \max(2n - k, p), & p \geq n \end{cases} = \begin{cases} 2p - k, & k \leq p \leq n \\ p, & p \leq k \leq n \\ \max(2n - k, p), & p \geq n \end{cases},$$

$$a(n, p) = \max_{1 \leq k \leq n} (b(n, p, k), k) = \begin{cases} \max_{1 \leq k \leq \min(n, p) = p} (\max_{1 \leq k \leq \min(n, p) = p} (2p - k, k), p) = \max_{1 \leq k \leq \min(n, p) = p} (2p - k, p), & \text{при } p \leq n \\ \max_{1 \leq k \leq \min(n, p) = n} (\max(2n - k, p), k) = \max(2n - 1, p, n), & \text{при } p \geq n \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \max(2p - 1, p) = 2p - 1, & \text{при } p \leq n. \\ \max(2n - 1, p), & \text{при } p \geq n \end{cases}$$

Доказательство. Без ограничения общности в силу замечания 1 будем считать, что $p = n$:

$$p = n \Rightarrow a(n, p = n) = \max(2n - 1, p = n) = 2(p = n) - 1 = 2n - 1, \quad b(n, p = n, k) = \max(2n - k, p = n) = 2n - k$$

$$H(x, x, \dots, x^{(a(n, p))}) = H(x, \dots, x^{(2n-1)}) = H_n(L, x) = H(L, x, n) = -L(x, x, \dots, x^{(p=n)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x, x, \dots, x^{(2n-k)}) x^{(k)i} =$$

$$= -L(x, x, \dots, x^{(n)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x, x, \dots, x^{(2n-k)}) x^{(k)i}.$$

Найдем полную производную по t :

$$D_t(-L(x, x, \dots, x^{(n)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x, x, \dots, x^{(2n-k)}) x^{(k)i}) = D_t(-L(x, x, \dots, x^{(n)})) + D_t(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i(x, x, \dots, x^{(2n-k)}) x^{(k)i}) =$$

$$= D_t(-L(x, x, \dots, x^{(n)})) + (\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m D_t(p_{k,n}^i(x, x, \dots, x^{(2n-k)})) x + p_{k,n}^i(x, x, \dots, x^{(2n-k)}) D_t(x^{(k)i})). \quad (13)$$

По теореме 1

$$D_t p_i^k(x, x, \dots, x^{(p+n-k)}) = \frac{\partial L(x, x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(k-1)i}} - p_i^{k-1}(x, x, \dots, x^{(p+n-(k-1))}). \quad (14)$$

$$\text{При } p = n \Rightarrow D_t p_i^k(x, x, \dots, x^{(p+n-k)}) = D_t p_i^k(x, x, \dots, x^{(n+n-k)}) = D_t p_i^k(x, x, \dots, x^{(2n-k)}) = \frac{\partial L(x, x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(k-1)i}} -$$

$$- p_i^{k-1}(x, x, \dots, x^{(n+n-(k-1))}) = \frac{\partial L(x, x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(k-1)i}} - p_i^{k-1}(x, x, \dots, x^{(2n-k+1)}).$$

Подставим (14) в (13):

$$D_t(-L(x, x, \dots, x^{(n)})) + (\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m D_t(p_{k,n}^i(x, x, \dots, x^{(2n-k)})) x + p_{k,n}^i(x, x, \dots, x^{(2n-k)}) D_t(x^{(k)i})) =$$

$$= D_t(-L(x, x, \dots, x^{(n)})) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n ((\frac{\partial L(x, x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(k-1)i}} - p_{k-1,n}^i(x, x, \dots, x^{(n+n-(k-1))}) x + p_{k,n}^i(x, x, \dots, x^{(2n-k)}) D_t(x^{(k)i})) =$$

$$= -\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (\frac{\partial L(x, x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(k-1)i}} x - p_{k-1,n}^i(x, x, \dots, x^{(n+n-(k-1))}) x + p_{k,n}^i(x, x, \dots, x^{(2n-k)}) x^{(k+1)i}) =$$

$$= -\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{\partial L(x, x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(k-1)i}} x^{(k)i} - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n p_{k-1,n}^i(x, x, \dots, x^{(n+n-(k-1))}) x + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n p_{k,n}^i(x, x, \dots, x^{(2n-k)}) x^{(k+1)i} \quad (15)$$

Сделаем замену $k-1=l \Rightarrow k=l+1 \quad 1 \leq k \leq n \Leftrightarrow k-1 \leq l \leq n-1$. С учетом этого запишем (15):

$$= -\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{\partial L(x, x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(k-1)i}} x^{(k)i} - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n p_{k-1,n}^i(x, x, \dots, x^{(n+n-(k-1))}) x + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n p_{k,n}^i(x, x, \dots, x^{(2n-k)}) x^{(k+1)i} =$$

$$= - \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(k+1)i}}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} + \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(l+1)i}}{\partial x^{(l)i}} x^{(l+1)i} - \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-1} p_{l,n}^i(x, x, \dots, x)^{(2n-l)(l+1)i} x^{(2n-l)(l+1)i} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n p_{k,n}^i(x, x, \dots, x)^{(2n-k)(k+1)i} x^{(2n-k)(k+1)i}. \quad (16)$$

Так как $\sum_{i=i_0}^{i_1} a_i = \sum_{k=i_0}^{k=i_1} a_k$ не зависит от индекса суммирования, то (16) можно преобразовать (17):

$$= - \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(k+1)i}}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} + \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(l+1)i}}{\partial x^{(l)i}} x^{(l+1)i} - \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-1} p_{l,n}^i(x, x, \dots, x)^{(2n-l)(l+1)i} x^{(2n-l)(l+1)i} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n p_{k,n}^i(x, x, \dots, x)^{(2n-k)(k+1)i} x^{(2n-k)(k+1)i} =$$

$$= - \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(k+1)i}}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(k+1)i}}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} - \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n-1} p_{k,n}^i(x, x, \dots, x)^{(2n-k)(k+1)i} x^{(2n-k)(k+1)i} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n p_{k,n}^i(x, x, \dots, x)^{(2n-k)(k+1)i} x^{(2n-k)(k+1)i}. \quad (17)$$

Так как $\sum_{i=0}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i + a_0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i + a_n$, $\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n a_{ik} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^m a_{ik} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m a_{ik} + \sum_{i=1}^m a_{in} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ik} + \sum_{i=1}^m a_{i0} =$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m a_{ik} + \sum_{i=1}^m a_{i0} + \sum_{i=1}^m a_{in}$$

$$- \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(k+1)i}}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} = - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(k+1)i}}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(n+1)i}}{\partial x^{(n)i}} x^{(n+1)i} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(0+1)i}}{\partial x^{(0)i}} x^{(0+1)i} =$$

$$= - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(k+1)i}}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(n+1)i}}{\partial x^{(n)i}} x^{(n+1)i} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{\square i}}{\partial x^{(0)i}} x^{\square i} \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(k+1)i}}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(k+1)i}}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} + \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(0+1)i}}{\partial x^{(0)i}} x^{(0+1)i} =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(k+1)i}}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{\square i}}{\partial x^{(0)i}} x^{\square i} \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n p_{k,n}^i(x, x, \dots, x)^{(2n-k)(k+1)i} x^{(2n-k)(k+1)i} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} p_{k,n}^i(x, x, \dots, x)^{(2n-k)(k+1)i} x^{(2n-k)(k+1)i} + \sum_{i=1}^m p_{k=0,n}^i(x, x, \dots, x)^{(2n-0)(0+1)i} x^{(2n-0)(0+1)i} =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} p_{k,n}^i(x, x, \dots, x)^{(2n-k)(k+1)i} x^{(2n-k)(k+1)i} + \sum_{i=1}^m p_{0,n}^i(x, x, \dots, x)^{(2n)\square i} x^{(2n)\square i} \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n p_{k,n}^i(x, x, \dots, x)^{(2n-k)(k+1)i} x^{(2n-k)(k+1)i} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} p_{k,n}^i(x, x, \dots, x)^{(2n-k)(k+1)i} x^{(2n-k)(k+1)i} + \sum_{i=1}^m p_{k=n,n}^i(x, x, \dots, x)^{(2n-n)(n+1)i} x^{(2n-n)(n+1)i}. \quad (21)$$

Подставляя (18), (19), (20), (21) в (17) и учитывая, что $p_{k=n,n}^i = \sum_{l=0}^{n-n} (-1)^l D_l^i \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)^{(n)}}{\partial x^{(l+n)i}} \right) =$

$$= \sum_{l=0}^0 (-1)^l D_l^i \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)^{(n)}}{\partial x^{(l+n)i}} \right) = \frac{\partial L(x, \dots, x)^{(n)}}{\partial x^{(0)i}}, \text{ имеем:}$$

$$- \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(k+1)i}}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(k+1)i}}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} - \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n-1} p_{k,n}^i(x, x, \dots, x)^{(2n-k)(k+1)i} x^{(2n-k)(k+1)i} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n p_{k,n}^i(x, x, \dots, x)^{(2n-k)(k+1)i} x^{(2n-k)(k+1)i} =$$

$$= - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(k+1)i}}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(n+1)i}}{\partial x^{(n)i}} x^{(n+1)i} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{\square i}}{\partial x^{(0)i}} x^{\square i} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial L(x, x, \dots, x)^{(k+1)i}}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} \binom{(n)}{(0)i} x - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} p_{k,n}^i(x, x, \dots, x) \binom{(2n-k)}{(k+1)i} x - \sum_{i=1}^m p_{0,n}^i(x, x, \dots, x) \binom{(2n)}{i} x + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} p_{k,n}^i(x, x, \dots, x) \binom{(2n-k)}{(k+1)i} x + \\
 & + \sum_{i=1}^m p_{k=n,n}^i(x, x, \dots, x) \binom{(2n-n)}{(n+1)i} x = - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} \binom{(n)}{(k)i} x + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} \binom{(n)}{(k+1)i} x - \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} \binom{(n)}{(0)i} x + \\
 & + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} \binom{(n)}{(0)i} x - \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} \binom{(n)}{(n)i} x + \sum_{i=1}^m p_{k=n,n}^i(x, x, \dots, x) \binom{(2n-n)}{(n+1)i} x - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} p_{k,n}^i(x, x, \dots, x) \binom{(2n-k)}{(k+1)i} x + \\
 & + \sum_{i=1}^m p_{k=n,n}^i(x, x, \dots, x) \binom{(2n-n)}{(n+1)i} x - \sum_{i=1}^m p_{0,n}^i(x, x, \dots, x) \binom{(2n)}{i} x = - \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} \binom{(n)}{(n)i} x + \sum_{i=1}^m p_{n,n}^i(x, x, \dots, x) \binom{(2n-n)}{(n+1)i} x - \\
 & - \sum_{i=1}^m p_{0,n}^i(x, x, \dots, x) \binom{(2n)}{i} x = - \sum_{i=1}^m p_{n,n}^i(x, x, \dots, x) \binom{(2n-n)}{(n+1)i} x + \sum_{i=1}^m p_{n,n}^i(x, x, \dots, x) \binom{(2n-n)}{(n+1)i} x - \\
 & - \sum_{i=1}^m p_{0,n}^i(x, x, \dots, x) \binom{(2n)}{i} x = - \sum_{i=1}^m p_{0,n}^i(x, x, \dots, x) \binom{(2n)}{i} x .
 \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Очевидным следствием **теоремы 3** является **теорема 4**.

Теорема 4. Пусть $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$, $L(x, \dots, x)$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$. $1 \leq p \leq n$. Тогда на экстремальных уравнения Эйлера – Лагранжа

$p_{k=0,n}^i = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \binom{(p)}{(l+0)i} \right) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \binom{(p)}{(l)i} \right) = 0, i = \overline{1, m}$ – импульсы нулевого порядка (функциональная часть системы уравнений Эйлера – Лагранжа порядка n).

Двойственная к функции Лагранжа функция Гамильтона (обобщенная энергия) сохраняется:

$$D_t(H(x, x, \dots, x)) = \sum_{i=1}^m p_{0,n}^i(x, x, \dots, x) \cdot x \equiv 0 \Leftrightarrow H(x, x, \dots, x) \equiv const . \tag{22}$$

Доказательство. На экстремальных системы уравнений Эйлера – Лагранжа

$$p_{0,n}^i = p_{k=0,n}^i = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \binom{(p)}{(l+0)i} \right) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \binom{(p)}{(l)i} \right) = 0, i = \overline{1, m} .$$

По **теореме 3** для $1 \leq p \leq n$ имеем $D_t(H(x, x, \dots, x)) = \sum_{i=1}^m p_{0,n}^i(x, x, \dots, x) \cdot x = 0$. **Теорема 4** доказана.

Замечание 2. $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$, $L(x, \dots, x)$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$. $1 \leq p \leq n$. По **Лемме 1** система уравнений Лагранжа

$p_{k=0,n}^i = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \binom{(p)}{(l)i} \right)$ имеет порядок производных

$$b(n, p, k) = \max(2 \min(p, n) - k, p) = \begin{cases} 1(p \leq n) \begin{cases} 2p - k, & k \leq p \leq n \\ p, & p \leq k \leq n \end{cases} \\ 2(p \geq n), \max(2n - k, p), & p \geq n \end{cases} = \begin{cases} 2p - k, & k \leq p \leq n \\ p, & p \leq k \leq n \\ \max(2n - k, p), & p \geq n \end{cases} ,$$

$b(n, p, k = 0) = 2p - 0 = 2p$, а двойственная к функции Лагранжа функция Гамильтона

$$a(n, p) = \max_{1 \leq k \leq n} (b(n, p, k), k) = \begin{cases} \max(\max_{1 \leq k \leq \min(n, p)=p} (2p-k, k), p) = \max(\max_{1 \leq k \leq \min(n, p)=p} (2p-k), p), & \text{при } p \leq n \\ \max_{1 \leq k \leq \min(n, p)=n} (\max(2n-k, p), k) = \max(2n-1, p, n), & \text{при } p \geq n \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \max(2p-1, p) = 2p-1, & \text{при } p \leq n \\ \max(2n-1, p), & \text{при } p \geq n \end{cases}, \quad a(n, p) = 2p-1,$$

то есть на 1 меньше, чем система уравнений Эйлера – Лагранжа и по **теореме 4** является интегралом этой системы. **Теорема 3** сформулирована для $p \leq n$. Для обобщения **теоремы 3** докажем следующую **теорему 5**.

Теорема 5. Пусть $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$, $L(x, \dots, x^{(p)})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$. Функции

$$H_n(x, x, \dots, x^{(a(n,p))}) = H_n = H_n(L, x) = H(L, x, n) = -L(x, x, \dots, x^{(p)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i x^{(k)i} = -L(x, x, \dots, x^{(p)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^i D_i^k x^i =$$

$$= -L(x, x, \dots, x^{(p)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_i^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right) D_i^k x^i, \quad x = D_i^k x^i,$$

$$H_{n+1}(x, x, \dots, x^{(a(n+1,p))}) = H_{n+1} = H_{n+1}(L, x) = H(L, x, n+1) = -L(x, x, \dots, x^{(p)}) + \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^m p_{k,n+1}^i x^{(k)i} =$$

$$= -L(x, x, \dots, x^{(p)}) + \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^m p_{k,n+1}^i D_i^k x^i = -L(x, x, \dots, x^{(p)}) + \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n+1-k} (-1)^l D_i^l \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right) D_i^k x^i, \quad x = D_i^k x^i -$$

двойственные функции Гамильтона (обобщенная энергия) рангов n и $n+1$ соответственно;

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, x, \dots, x^{(b(n,p,k))}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_i^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right), \quad k = \overline{0, n}, i = \overline{1, m},$$

$$p_k^i(n+1) = p_{k,n+1}^i(x, x, \dots, x^{(b(n+1,p,k))}) = \sum_{l=0}^{n+1-k} (-1)^l D_i^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right), \quad k = \overline{0, n+1}, i = \overline{1, m} -$$

импульсы k -го порядка рангов n и $n+1$ соответственно. Тогда

$$H_{n+1}(x, x, \dots, x^{(a(n+1,p))}) = H_{n+1} = H_n + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (-1)^{n+1-k} D_i^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(n+1)i}} \right) x^{(k)i} + \sum_{i=1}^m p_{n+1,n+1}^i(x, x, \dots, x^{(b(n,p,k))}) x^{(n+1)i}. \quad (23)$$

Доказательство.

$$H_{n+1}(x, x, \dots, x^{(a(n+1,p))}) = H_{n+1} = H_{n+1}(L, x) = H(L, x, n+1) = -L(x, x, \dots, x^{(p)}) + \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^m p_{k,n+1}^i x^{(k)i}. \quad (24)$$

Учитывая тождество $\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1} \Rightarrow \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n+1} a_{ik} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ik} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ik} + \sum_{i=1}^m a_{i,n+1}$, преобразуем (24):

$$H_{n+1}(x, x, \dots, x^{(a(n+1,p))}) = H_{n+1} = H_{n+1}(L, x) = H(L, x, n+1) = -L(x, x, \dots, x^{(p)}) + \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^m p_{k,n+1}^i x^{(k)i} =$$

$$= -L(x, x, \dots, x^{(p)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n+1}^i x^{(k)i} + \sum_{i=1}^m p_{k=n+1,n+1}^i x^{(n+1)i} = -L(x, x, \dots, x^{(p)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n+1}^i x^{(k)i} + \sum_{i=1}^m p_{n+1,n+1}^i x^{(n+1)i}. \quad (25)$$

По **теореме 2**

$$p_{k,n+1}^i(x, x, \dots, x^{(b(n+1,p,k))}) = p_i^k(x, x, \dots, x^{(b(n,p,k))}) + (-1)^{n+1-k} D_i^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x^{(p)})}{\partial x^{(n+1)i}} \right), \quad i = \overline{1, m}, k = \overline{0, n}. \quad (26)$$

Подставим (26) в (25):

$$\begin{aligned}
 H_{n+1}(x, x, \dots, x) &= -L(x, x, \dots, x) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n+1}^{(k)i} x + \sum_{i=1}^m p_{n+1,n+1}^{(n+1)i} x = -L(x, x, \dots, x) + \\
 &+ \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m (p_i^k(x, x, \dots, x) + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}})) x + \sum_{i=1}^m p_{n+1,n+1}^{(n+1)i} x = \\
 &= -L(x, x, \dots, x) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_i^k(x, x, \dots, x) x + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}}) x + \sum_{i=1}^m p_{n+1,n+1}^{(n+1)i} x = \\
 &= H_n(x, x, \dots, x) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}}) x + \sum_{i=1}^m p_{n+1,n+1}^{(n+1)i} x. \tag{27}
 \end{aligned}$$

В (27) было использовано

$$H_n(x, x, \dots, x) = H_n = H_n(L, x) = H(L, x, n) = -L(x, x, \dots, x) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^{(k)i} x. \tag{28}$$

Теорема 5 доказана.

Теорема 3 сформулирована для $1 \leq p \leq n$. Обобщением **Теоремы 3** для любого $p \in \mathbb{N}$ является

Теорема 6.

Теорема 6. Пусть $L: T^p X_m \rightarrow \mathbb{R}$, $L(x, \dots, x)$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$. Тогда при $p \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$D_t(H_n(x, x, \dots, x)) = -\theta(p-n) \sum_{i=1}^m \sum_{k=n+1}^p \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} - \sum_{i=1}^m p_{0,n}^{(n+1)i} x, \quad i = \overline{1, m} \tag{29}$$

где $\theta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $\theta(n) = \begin{cases} 1, & n > 0 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}$ – тета-функция Хевисайда;

$$p_{k=0,n}^i = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+0)i}}) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}}) = 0, \quad i = \overline{1, m} \text{ – импульсы нулевого порядка}$$

(функциональная часть системы уравнений Эйлера – Лагранжа порядка n).

Доказательство проведем методом математической индукции по n .

База индукции $n = 1$

$$H_n(x, x, \dots, x) = H_n = H_n(L, x) = H(L, x, n) = -L(x, x, \dots, x) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_{k,n}^{(k)i} x$$

$$\begin{aligned}
 H_{n=1}(x, x, \dots, x) &= H_1 = H_1(L, x) = H(L, x, n=1) = -L(x, x, \dots, x) + \sum_{k=1}^{n=1} \sum_{i=1}^m p_{k,n=1}^{(k)i} x = \\
 &= -L(x, x, \dots, x) + \sum_{i=1}^m p_{1,1}^{(1)i} x = -L(x, x, \dots, x) + \sum_{i=1}^m p_{1,1}^{(1)i} x;
 \end{aligned}$$

$$p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}}) \Rightarrow p_{k=1,n=1}^i = p_{1,1}^i = \sum_{l=0}^{1-1} (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+1)i}}) = \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(0+1)i}} = \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{1i}}$$

$$p_{k=0,n=1}^i = p_{0,1}^i = \sum_{l=0}^{1-0} (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+0)i}}) = \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(0+0)i}} + (-1)^1 D_t^1 (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(0+1)i}}) = \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^i} - D_t (\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{1i}}),$$

ПОЭТОМУ

$$H_1 = -L(x, x, \dots, x) + \sum_{i=1}^m p_{1,1}^{(1)i} x = -L(x, x, \dots, x) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} x = -L(x, x, \dots, x) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} x; \quad (30)$$

$$D_t(H_1) = D_t(-L(x, x, \dots, x) + \sum_{i=1}^m p_{1,1}^{(1)i} x) = -D_t(L(x, x, \dots, x)) + \sum_{i=1}^m (D_t(p_{1,1}^{(1)i}) \cdot x + p_{1,1}^{(1)i} \cdot x). \quad (31)$$

По теореме 1

$$D_t p_{k,n}^i(x, x, \dots, x) = \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} - p_{k-1,n}^i(x, x, \dots, x) \Rightarrow D_t(p_{k=1,n=1}^i) = D_t(p_{1,1}^i) =$$

$$= \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} - p_{(k=1)-1,n=1}^i(x, x, \dots, x) = \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} - p_{0,1}^i = D_t p_{1,1}^i(x, x, \dots, x) = D_t p_{1,1}^i. \quad (32)$$

Учитывая, что $-D_t(L(x, x, \dots, x)) = -\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^p \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} x^{(k+1)i}$, а также очевидные равенства

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=2}^n a_k + a_0 + a_1 \Rightarrow \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n a_{ik} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^m a_{ik} = \sum_{k=2}^n \sum_{i=1}^m a_{ik} + \sum_{i=1}^m a_{i0} + \sum_{i=1}^m a_{i1} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=2}^n a_{ik} + \sum_{i=1}^m a_{i0} + \sum_{i=1}^m a_{i1},$$

$$\sum_{k=n+1}^p a_k = \theta(p-n) \sum_{k=n+1}^p a_k,$$

где $\theta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $\theta(n) = \begin{cases} 1, & n > 0 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}$ – тета-функция Хевисайда, подставляем левую часть (32) в (31):

$$D_t(H_1) = D_t(-L(x, x, \dots, x) + \sum_{i=1}^m p_{1,1}^{(1)i} x) = -D_t(L(x, x, \dots, x)) + \sum_{i=1}^m (D_t(p_{1,1}^{(1)i}) \cdot x + p_{1,1}^{(1)i} \cdot x) =$$

$$= -D_t(L(x, x, \dots, x)) + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} - p_{0,1}^{(1)i} \right) \cdot x + p_{1,1}^{(1)i} \cdot x = -\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^p \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} x^{(k+1)i} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} x -$$

$$-\sum_{i=1}^m p_{0,1}^{(1)i} \cdot x + \sum_{i=1}^m p_{1,1}^{(1)i} \cdot x = -\sum_{i=1}^m \sum_{k=2}^p \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} x^{(k+1)i} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} x^{(k=0)i} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} x^{(k=1)i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} x - \sum_{i=1}^m p_{0,1}^{(1)i} \cdot x + \sum_{i=1}^m p_{1,1}^{(1)i} \cdot x = -\sum_{i=1}^m p_{0,1}^{(1)i} \cdot x - \sum_{i=1}^m \sum_{k=2}^p \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} x^{(k+1)i} -$$

$$-\sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} x^{(k=0)i} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} x - \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} x^{(k=1)i} + \sum_{i=1}^m p_{1,1}^{(1)i} \cdot x =$$

$$= -\sum_{i=1}^m p_{0,1}^{(1)i} \cdot x - \sum_{i=1}^m \sum_{k=2}^p \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} x^{(k+1)i} = \sum_{i=1}^m p_{0,1}^{(1)i} \cdot x - \theta(p-1) \sum_{i=1}^m \sum_{k=2}^p \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} x^{(k+1)i}.$$

База индукции доказана. Индуктивный переход. Пусть для $n \in \mathbb{N}$ справедливо утверждение

$$D_t(H_n(x, x, \dots, x)) = -\theta(p-n) \sum_{i=1}^m \sum_{k=n+1}^p \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x} x^{(k+1)i} - \sum_{i=1}^m p_{0,n}^{(1)i}(x, x, \dots, x) \cdot x, \quad i = \overline{1, m}. \quad (33)$$

Докажем, что

$$D_t(H_{n+1}(x, x, \dots, x)) = -\theta(p - (n + 1)) \sum_{i=1}^m \sum_{k=n+2}^p \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} - \sum_{i=1}^m p_{0,n+1}^i(x, x, \dots, x) \cdot x, \quad i = \overline{1, m}. \quad (34)$$

По теореме 5

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x, x, \dots, x) &= H_{n+1} = H_n + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (-1)^{n+1-k} \cdot D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) \cdot x + \sum_{i=1}^m p_{n+1,n+1}^i(x, x, \dots, x) \cdot x \Rightarrow \\ \Rightarrow D_t(H_{n+1}(x, x, \dots, x)) &= D_t(H_n + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (-1)^{n+1-k} \cdot D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) \cdot x + \sum_{i=1}^m p_{n+1,n+1}^i(x, x, \dots, x) \cdot x) = \\ &= D_t(H_n) + D_t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (-1)^{n+1-k} \cdot D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) \cdot x + \sum_{i=1}^m p_{n+1,n+1}^i(x, x, \dots, x) \cdot x \right) = \\ &= D_t(H_n) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (-1)^{n+1-k} \cdot D_t(D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) \cdot x) + D_t \left(\sum_{i=1}^m p_{n+1,n+1}^i(x, x, \dots, x) \cdot x \right) = \\ &= D_t(H_n) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (-1)^{n+1-k} \cdot (D_t^{n+1+k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) \cdot x + D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) D_t x + \\ &\quad + \sum_{i=1}^m D_t p_{n+1,n+1}^i(x, x, \dots, x) \cdot x + p_{n+1,n+1}^i(x, x, \dots, x) D_t x) \end{aligned} \quad (35)$$

$$p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) \Rightarrow p_{k=n+1,n+1}^i = p_{n+1,n+1}^i = \sum_{l=0}^{n+1-(n+1)} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) = \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(0+n+1)i}} = \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}}. \quad (36)$$

По теореме 1

$$\begin{aligned} D_t p_{k,n}^i(x, x, \dots, x) &= \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} - p_{k-1,n}^i(x, x, \dots, x) \Rightarrow D_t(p_{k=n+1,n+1}^i) = \\ &= D_t(p_{n+1,n+1}^i) = \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i}} - p_{n,n+1}^i(x, x, \dots, x). \end{aligned} \quad (37)$$

Поэтому перепишем (35):

$$\begin{aligned} &= D_t(H_n) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (-1)^{n+1-k} \cdot (D_t^{n+1+k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) \cdot x + D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) D_t x + \sum_{i=1}^m D_t p_{n+1,n+1}^i(x, x, \dots, x) \cdot x + \\ &\quad + p_{n+1,n+1}^i(x, x, \dots, x) D_t x) = D_t(H_n) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (-1)^{n+1-k} \cdot (D_t^{n+1+k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) \cdot x + D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) x) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i}} - p_{n,n+1}^i \right) x + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} x = D_t(H_n) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (-1)^{n+1-k} \cdot D_t^{n+2-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) \cdot x + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \right)^{(k+1)i} x + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} - p_{n,n+1}^i \right)^{(n+1)i} x + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x}^{(n+2)i} x = \\
& = D_t(H_n) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (-1)^{n+1-k} \cdot D_t^{n+2-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \right)^{(k)i} x + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (-1)^{n+2-(k+1)} D_t^{n+2-(k+1)} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \right)^{(k+1)i} x + \\
& + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} - p_{n,n+1}^i \right)^{(n+1)i} x + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x}^{(n+2)i} x = D_t(H_n) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (-1)^{n+1-k} \cdot D_t^{n+2-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \right)^{(k)i} x + \\
& + \sum_{i=1}^m \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{n+2-k} D_t^{n+2-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \right)^{(k)i} x + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} - p_{n,n+1}^i \right)^{(n+1)i} x + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x}^{(n+2)i} x = \\
& = D_t(H_n) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (-1)^{n+1-k} \cdot D_t^{n+2-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \right)^{(k)i} x - \sum_{i=1}^m \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{n+1-k} D_t^{n+2-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \right)^{(k)i} x + \\
& + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} - p_{n,n+1}^i \right)^{(n+1)i} x + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x}^{(n+2)i} x = D_t(H_n) + (-1)^{n+1-1} \cdot \sum_{i=1}^m D_t^{n+2-1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \right)^{(k=1)i} x - \\
& - \sum_{i=1}^m D_t \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \right)^{(n+1)i} x + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} - p_{n,n+1}^i \right)^{(n+1)i} x + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x}^{(n+2)i} x = \\
& = -\theta(p-n) \sum_{i=1}^m \sum_{k=n+1}^p \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x}^{(k)i} x - \sum_{i=1}^m p_{0,n}^i \cdot x + \sum_{i=1}^m (-1)^n \cdot D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \right)^{\square i} x - \\
& - \sum_{i=1}^m D_t \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \right)^{(n+1)i} x + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} - p_{n,n+1}^i \right)^{(n+1)i} x + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x}^{(n+2)i} x. \quad (38)
\end{aligned}$$

По теореме 2

$$\begin{aligned}
p_{k,n+1}^i(x, x, \dots, x) &= p_{k,n}^i(x, x, \dots, x) + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \right)^{(p)}, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{0, n} \Rightarrow \\
p_{0,n+1}^i(x, x, \dots, x) &= p_{0,n}^i(x, x, \dots, x) + (-1)^{n+1-0} D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \right)^{(p)}, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{0, n} \Rightarrow p_{0,n+1}^i = \\
&= p_{0,n}^i + (-1)^{n+1} D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \right)^{(p)} \Rightarrow p_{0,n}^i = p_{0,n+1}^i - (-1)^{n+1} D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \right)^{(p)} = p_{0,n+1}^i + (-1)^{n+2} D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \right)^{(p)}. \quad (39)
\end{aligned}$$

$$p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \right)^{(l+k)i} \Rightarrow p_{k=n+1,n+1}^i = p_{n+1,n+1}^i = \sum_{l=0}^{n+1-(n+1)} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x} \right)^{(l+k)i} = \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x}^{(p)} = \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x}^{(p)}. \quad (40)$$

По теореме 1

$$D_t p_{k,n}^i(x, x, \dots, x) = \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x}^{(b(n,p,k))} - p_{k-1,n}^i(x, x, \dots, x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_t(p_{k=n+1,n+1}^i) = D_t(p_{n+1,n+1}^i) = \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i}} - p_{n,n+1}^i(x, x, \dots, x^{(b(n,p,k-1))}) = D_t\left(\frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}}\right). \quad (41)$$

Подставляем (39), (41) в (38):

$$\begin{aligned} & -\theta(p-n) \sum_{i=1}^m \sum_{k=n+1}^p \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} - \sum_{i=1}^m p_{0,n}^i \cdot x + \sum_{i=1}^m (-1)^n \cdot D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) \cdot x - \sum_{i=1}^m D_t \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) x^{(n+1)i} \\ & + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i}} - p_{n,n+1}^i \right) x^{(n+1)i} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} x^{(n+2)i} = -\theta(p-n) \sum_{i=1}^m \sum_{k=n+1}^p \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} - \\ & - \sum_{i=1}^m (p_{0,n}^i - (-1)^n \cdot D_t^{n+1} \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right)) \cdot x + \sum_{i=1}^m (-D_t \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} \right) + \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n)i}} - p_{n,n+1}^i) x^{(n+1)i} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(n+1)i}} x^{(n+2)i} = \\ & = -\theta(p-n) \sum_{i=1}^m \sum_{k=n+2}^p \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} - \sum_{i=1}^m p_{0,n+1}^i \cdot x = -\theta(p-(n+1)) \sum_{i=1}^m \sum_{k=n+2}^p \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k)i}} x^{(k+1)i} - \sum_{i=1}^m p_{0,n+1}^i \cdot x. \end{aligned}$$

Индуктивный переход доказан. Теорема 6 доказана.

Следствием теоремы 6 является теорема 7.

Теорема 7. Пусть $L: T^p X_m \rightarrow \mathfrak{R}$, $L(x, \dots, x)$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$. Тогда на экстремальных уравнения Эйлера – Лагранжа

$$p_{k=0,n}^i = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+1)i}} \right) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}} \right) = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Двойственная к функции Лагранжа функция Гамильтона (обобщенная энергия):

1) при $1 \leq p \leq n$ сохраняется (теорема 4):

$$D_t(H(x, x, \dots, x)) = \sum_{i=1}^m p_{0,n}^i(x, x, \dots, x) \cdot x \equiv 0 \Leftrightarrow H(x, x, \dots, x) \equiv const; \quad (42)$$

2) при $p > n$

$$D_t(H(x, x, \dots, x)) = \sum_{i=1}^m p_{0,n}^i(x, x, \dots, x) \cdot x \neq 0 \Leftrightarrow H(x, x, \dots, x) \neq const. \quad (43)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин, В.А. Современная геометрия. Методы и приложения / В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М. : УРСС, 1994.
2. Рашевский, П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов, А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд, В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
5. Козлов, А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1319–1335.
6. Козлов, А.А. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 621–627.
7. Козлов, А.А. О глобальном управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Изв. Ин-та матем. и информ. Удмурт. гос. ун-та. – 2006. – № 3. – С. 63–64.
8. Галеев, Э.М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М. : МГУ, 1989. – 203 с.

9. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов [и др.]. // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.
10. Закон преобразования обобщенного импульса / Ю.Ф. Пастухов [и др.]. // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.
11. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик [и др.]. // Итоги науки и техники. Сер. «Проблемы геометрии»: ВИНТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.
12. Трофимов, В.В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В.В. Трофимов, А.Т. Фоменко. – М.: Факториал, 1995.
13. Пастухов, Ю.Ф. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, С.В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 117–123.
14. Вакуленко, С.П. К вопросу о нелинейных волнах в стержнях / С.П. Вакуленко, А.К. Волосова, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2018. – Т. 16, № 3 (76). – С. 6–17.
15. Пастухов, Ю.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.
16. Пастухов, Ю.Ф. Тензор обобщенной энергии / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 78–100.
17. Пастухов, Ю.Ф. Группы преобразований, сохраняющие вариационную задачу со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 194–209.
18. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2018. – Режим доступа: <http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/22094>. – Дата доступа: 15.06.2019.
19. Пастухов, Ю.Ф. Необходимые условия в обратной вариационной задаче / Ю.Ф. Пастухов // Фундам. и прикл. матем. – 2001. – Т. 7, вып. 1. – С. 285–288.
20. Пастухов, Ю.Ф. Лагранжевы сечения / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 75–99.
21. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии 2 [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2019. – Режим доступа: <http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/23288>. – Дата доступа: 26.03.2019.
22. Пастухов, Ю.Ф. Свойства функции Гамильтона в вариационных задачах со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 137–153.
23. Пастухов, Ю.Ф. Обратная теорема Гамильтона / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2019. – № 12. – С. 86–100.
24. Пастухов, Д.Ф. Минимальная разностная схема для уравнения Пуассона в параллелепипеде с шестым порядком погрешности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 154–174.
25. Волосова, Н.К. Векторный аналог метода прогонки для решения трех- и пятидиагональных матричных уравнений / Н.К. Волосова [и др.]. // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2019. – № 12. – С. 101–115.
26. Пастухов, Д.Ф. Некоторые методы передачи QR-кода в стеганографии / Д.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, А.К. Волосова // Мир транспорта. – 2019. – Т. 17, № 3 (82). – С. 16–39.

Поступила 12.02.2020

ABOUT INTEGRALS OF GENERALIZED ENERGY AT THE EXTREMALS OF THE EULER-LAGRANGE EQUATION SYSTEM

Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV

The paper considers the properties of the Hamilton and Lagrange functions in the coordinate-momentum space. The main result obtained is the property of conservation of generalized energy of rank n on the extremals of the system of Euler – Lagrange equations of order n . This property is a sufficient but not necessary condition for the conservation of generalized energy of rank n .

Keywords: *Hamilton function, variation problem, fiber space of velocities, Euler – Lagrange equations, smooth manifolds, energy tensor, tensor of generalized momentum, non-degenerate function.*

СОДЕРЖАНИЕ

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

<i>Липницкий В.А., Семёнов С.И.</i> Нормы синдромов и их свойства в кодах Рида – Соломона	2
<i>Козадаев К.В.</i> Кватернионный базис для алгоритма бесплатформенной инерциальной навигационной системы БПЛА.....	10
<i>Лисица Е.В., Яцков Н.Н., Скакун В.В., Апанасович В.В.</i> Исследование методов классификации для анализа сегментированных объектов на люминесцентных изображениях раковых клеток	15
<i>Железняк В.К., Харченко С.В.</i> Методика оценки защищенности видеоинформации ШИМ-преобразователя средств вычислительной техники	23
<i>Оськин А.Ф., Оськин Д.А.</i> Программный комплекс для интеллектуального анализа образовательных данных в среде приложения RStudio.....	31

ФИЗИКА

<i>Абраменко С.Н., Янушкевич В.Ф., Богуш В.А.</i> Влияние характеристик подстилающей поверхности на компоненты поверхностного импеданса среды над углеводородами.....	36
<i>Вабищевич С.А., Вабищевич Н.В., Эспиноза де лос Монтеро Г.А., Бринкевич Д.И., Просолович В.С.</i> Радиационно-индуцированные процессы в пленках диазохинон-новолачного резиста на кремнии при имплантации ионов Ag^+	43
<i>Абраменко С.Н., Антонович Д.А., Груздев В.А., Солдатенко П.Н.</i> Возможность повышения первеанса в плазменных эмиссионных системах на основе разряда в скрещенных $E \times H$ полях	48
<i>Антонович Д.А., Груздев В.А., Солдатенко П.Н., Залесский В.Г.</i> Электродная структура плазменного электронно-ионного источника для совместного формирования электронных и ионных пучков.....	53
<i>Васюков А.В., Вабищевич С.А., Суховило Н.П., Вабищевич Н.В.</i> Исследование поверхности асфальтенов с помощью атомно-силовой микроскопии	58
<i>Мармыш Д.Е.</i> Повреждаемость толстостенного цилиндра для различных типов граничных условий.....	64
<i>Калинцев С.В., Янушкевич В.Ф., Талдыкин В.Б.</i> Анализ фазовых характеристик среды над залежью углеводородов при воздействии сигналов с модуляцией смешанного типа.....	70

МАТЕМАТИКА

<i>Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.</i> О конечных методах решения уравнения Пуассона на прямоугольнике с краевым условием Дирихле.....	78
<i>Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф.</i> Об интегралах обобщенной энергии на экстремалях системы уравнений Эйлера – Лагранжа.....	94