

MIESIĘCZNIK
POŁOCKI.

№ 1(44), 2025

Т о м I.
Р о к 1818.

*«Вестник Полоцкого государственного университета»
продолжает традиции первого в Беларуси литературно-
научного журнала «Месячник Полоцкий».*

ВЕСТНИК ПОЛОЦКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА Серия С. Фундаментальные науки

В серии С научно-теоретического журнала публикуются статьи, прошедшие рецензирование, содержащие новые научные результаты в области информатики, вычислительной техники и управления, электрофизики, электрофизических установок (технические науки), математики.

ВЕСНІК ПОЛАЦКАГА ДЗЯРЖАЎНАГА ЎНІВЕРСИТЭТА Серыя С. Фундаментальныя навукі

У серыі С навукова-тэарэтычнага часопіса друкуюцца артыкулы, якія прайшлі рэцэнзаваанне, змяшчаюць новыя навуковыя вынікі ў галіне інфарматыкі, вылічальнай тэхнікі і кіравання, электрафізікі, электрафізічных устаноў (тэхнічныя навукі), матэматыкі.

HERALD OF POLOTSK STATE UNIVERSITY Series C. Fundamental sciences

Series C includes reviewed articles which contain novelty in research and its results in the field of computer science, computer engineering and management, electrophysics, electrophysical installations (technical sciences), mathematics.

Журнал входит в Российский индекс научного цитирования.
Электронная версия номера размещена на сайте <https://journals.psu.by/fundamental>.

Адрес редакции:
Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой,
ул. Блохина, 29, г. Новополоцк, 211440, Беларусь
тел. + 375 (214) 59 95 44, e-mail: vestnik@psu.by

Отв. за выпуск: С. А. Вабищевич.
Редактор С. Е. Рясова.

Подписано к печати 18.04.2025. Бумага 80 г/м². Формат 60×84¹/₈. Ризография.
Усл. печ. л. 10,23. Уч.-изд. л. 12,33. Тираж 50 экз. Заказ 151.

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

УДК: 004.932

DOI 10.52928/2070-1624-2025-44-1-2-8

ОЦЕНКА 3D-ПОЗЫ ЧЕЛОВЕКА НА ОСНОВЕ 2D КЛЮЧЕВЫХ ТОЧЕК

А. ДИИ, канд. техн. наук, доц. О. В. НЕДЗЬВЕДЬ
(Белорусский государственный университет, Минск)

Предложена инновационная мало выборочная легковесная архитектура для решения задачи оценки 3D-позы человека на основе 2D ключевых точек. В рамках данного подхода введены специализированные обучаемые позиционные кодировки, предназначенные для задач трехмерной оценки позы, которые используются совместно с традиционными позиционными кодировками для представления входных данных. Архитектура метода включает многоуровневую обработку признаков и их адаптивное объединение с использованием механизма пространственного внимания, что позволяет усиливать релевантные признаки. Эксперименты, проведенные на стандартных тестовых наборах данных, подтвердили эффективность предложенного метода: достигнуто значение средней ошибки положения суставов (MPJPE) 42,1, что превосходит результаты существующих подходов.

Ключевые слова: оценка 3D-позы, обработка многоуровневых признаков, адаптивное объединение признаков, прогрессивное уточнение признаков, обучаемые позиционные кодировки.

Введение. Оценка трехмерной позы человека на основе монокулярных видеопоследовательностей с использованием двумерных входных данных является одной из ключевых и при этом наиболее сложных задач в области компьютерного зрения. Данная задача требует решения ряда проблем, включая точное предсказание глубины, обеспечение временной согласованности [1], а также достижение устойчивости к частичным перекрытиям и сложным позам. Современные достижения в разработке пространственно-временных архитектур продемонстрировали значительные успехи в решении различных задач компьютерного зрения, предоставляя мощные инструменты для моделирования дальнедействующих зависимостей. Однако прямое применение подобных архитектур к задаче оценки трехмерной позы человека сопряжено с рядом существенных ограничений. К ним относятся недостаточная эффективность в захвате иерархических (многоуровневых) представлений признаков, неполноценное моделирование пространственно-временных взаимосвязей, а также отсутствие механизмов прогрессивного уточнения, направленных на повышение точности предсказаний.

На рисунке 1 представлена новая архитектура MAPS, которая интегрирует пространственно-временные методы с многоуровневым обучением признаков и механизмом прогрессивного уточнения. В рамках предложенного подхода введен адаптивный механизм слияния признаков, обеспечивающий динамический баланс их вклада на различных масштабах [3]. Кроме того, разработан инновационный модуль пространственно-временного внимания, эффективно захватывающий пространственные и временные зависимости. Проведенные исследования методом исключений подтвердили значимость каждого компонента архитектуры. Детальный анализ поведения модели в различных условиях, а также сравнение с современными методами демонстрируют превосходство предложенного подхода [4].

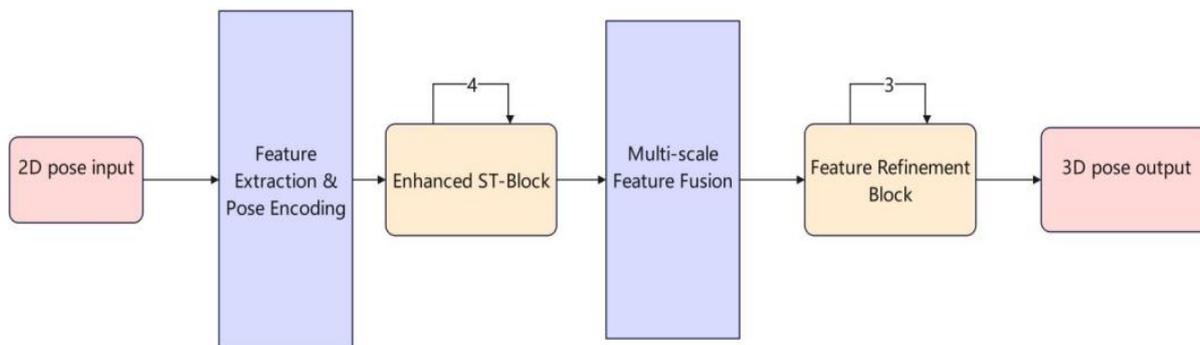


Рисунок 1. – Сетевая структура для оценки позы человека, преобразующая двумерные входные данные в трехмерную модель

Сочетание обучаемого параметрического кодирования с позиционным кодированием. В рамках данного эксперимента в задаче оценки трехмерной позы человека применяются обучаемые параметрические кодировки, предназначенные для извлечения структурной информации о скелете человека. Этот подход позволяет модели эффективно захватывать сложные характеристики скелетной структуры, повышая ее информативность. Параллельно с этим используются позиционные кодировки, которые предоставляют ключевым точкам явную пространственную информацию об их местоположении. Это позволяет модели лучше понимать относительное расположение узлов скелета и временные зависимости между последовательными кадрами. Комбинация указанных методов обеспечивает более точное моделирование структуры человеческого тела и его динамики, что приводит к повышению точности предсказаний и улучшению способности модели к обобщению. Математически это может быть выражено формулой [5]

$$F'(x, y, i) = F(x, y, i) + PE(x, y, i) + P(x, y, i). \tag{1}$$

Функция $PE(x, y, i)$ с помощью синусов и косинусов обеспечивает уникальное и плавное кодирование позиционной информации для элементов, расположенных в различных позициях последовательности или пространства. Данный подход позволяет сохранить непрерывность и однозначность представления позиционных данных. $P(x, y, i)$ представляет собой обучаемую позиционную кодировку, способную интегрировать информацию о структурных связях между суставами скелета или временных зависимостях между кадрами. Совместное использование данных методов способствует повышению точности модели и ее способности к обобщению, что подтверждается исследованиями [6].

Модуль многомасштабного объединения признаков (Multi-scale Feature Fusion Module) представляет собой архитектурный компонент, предназначенный для повышения способности модели к обработке сложных данных посредством интеграции признаков, извлеченных на различных масштабах.

На рисунке 2 показано, как модуль многомасштабного объединения признаков в задаче оценки позы человека обеспечивает эффективное извлечение информации о ключевых точках тела на различных пространственных и временных уровнях. Это позволяет модели учитывать как локальные, так и глобальные зависимости в данных, что способствует улучшению качества моделирования позы человека и повышению точности предсказаний [9].

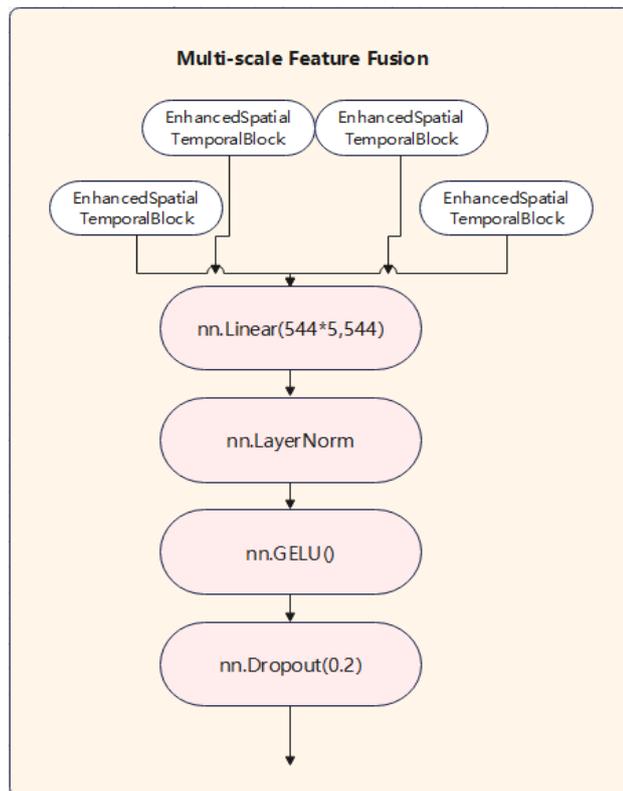


Рисунок 2. – Модуль многомасштабного объединения признаков

Входные данные представляют собой набор признаков, извлеченных на различных этапах или масштабах обработки. Каждый этап обеспечивает захват уникальных локальных и глобальных последовательных признаков, которые впоследствии объединяются для формирования многомасштабного представления.

Полученные признаки проходят через полносвязный слой, где выполняется их проекция в заданное пространство размерностей. Для повышения стабильности процесса обучения применяется операция нормализации [10]. На заключительном этапе применяется метод Dropout, направленный на улучшение обобщающей способности модели и минимизацию риска переобучения. Математическое описание данного процесса может быть представлено следующей формулой:

$$F_{fusion} = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i, \quad (2)$$

где F_i – объединенные признаки;
 α_i – весовой коэффициент для i -го признака;
 n – количество масштабов признаков.

Применение модуля многомасштабного объединения признаков позволяет выполнить проекцию объединенных признаков в общее пространство эмбединговой размерности. Объединенные признаки включают как временную, так и пространственную информацию, извлеченную на различных масштабах, что обеспечивает более полное и детализированное представление данных.

Функция SE-модуля (Squeeze-and-Excitation Module) заключается в повышении способности модели к селективному выделению наиболее информативных признаков по каналной размерности. Данный модуль адаптивно регулирует весовые коэффициенты, определяющие значимость каждого канала, что позволяет усиливать релевантные признаки и ослаблять менее значимые. В контексте задачи оценки позы человека применение SE-модуля особенно эффективно для фокусировки на характеристиках, связанных с 17 ключевыми суставами, что способствует более точному выделению пространственных и структурных особенностей скелета [7].

SE-модуль (Squeeze-and-Excitation Module) реализует операцию глобального усредненного объединения (global average pooling) по пространственному измерению входных признаков, что позволяет агрегировать глобальную контекстную информацию. Полученные данные затем обрабатываются через два последовательных полносвязных слоя, которые формируют нелинейные зависимости и вычисляют веса для каждого канала. На заключительном этапе размерность выходных данных восстанавливается до исходной глубины признаков, что обеспечивает согласованность с входными данными. Математическое описание данного процесса может быть представлено следующей формулой [8]:

$$s_c = \text{sigmoid}(W_2 \cdot \text{ReLU}(W_1 \cdot g(X))). \quad (3)$$

SE-модуль, интегрированный перед многослойным перцептроном MLP и остаточным соединением, повышает способность модели к селективному выделению информативных признаков между каналами. Здесь $g(X)$ – операция глобального усредненного объединения (global average pooling), которая агрегирует пространственную информацию, а W_1 и W_2 – весовые матрицы двух полносвязных слоев, отвечающих за вычисление значимости каналов. Такая архитектура позволяет эффективно усиливать релевантные признаки и подавлять шумовые компоненты.

Многослойный перцептрон MLP выполняет нелинейное преобразование входных признаков, что позволяет усилить способность модели к представлению сложных характеристик данных. Архитектура MLP включает два полносвязных слоя: первый слой увеличивает размерность признаков в четыре раза по сравнению с исходной, что способствует повышению способности модели к репрезентации сложных зависимостей и закономерностей в данных, а второй слой восстанавливает размерность до начального значения. Для обеспечения нелинейности и улучшения обобщающей способности модели применяется функция активации GELU (Gaussian Error Linear Unit) и метод регуляризации Dropout. Математически данный процесс можно описать выражением

$$MLP(x) = W_2 \cdot \text{Dropout}(GELU(W_1 \cdot x)), \quad (4)$$

где W_1 и W_2 представляют собой весовые матрицы линейного отображения, предназначенные для дальнейшего извлечения признаков из высокоразмерного пространства после применения механизма усиления внимания к каналам (SEModule).

Метод исключений. Для оценки вклада каждого модуля в общую производительность модели оценки позы человека было проведено несколько исключаящих экспериментов. В рамках исследования последовательно исключались следующие компоненты: модуль уточнения признаков (Feature Refinement Block), модуль многомасштабного объединения признаков (Multi-scale Feature Fusion), блок двух типов кодирования (Two Encodings) и усовершенствованный пространственно-временной блок (Enhanced ST-Block). В таблице для каждого исключения фиксировалось значение средней ошибки положения суставов (MPJPE).

Таблица. – Результаты проведения исключяющего эксперимента

Исключаемый модуль	Значение MPJPE
Без исключений (полная модель)	42,1
Feature Refinement Block	69,3
Multi-scale Feature Fusion	68,5
Two Encodings	60,1
Enhanced ST-Block	77,6

Модуль уточнения признаков (Feature Refinement Block) в задаче оценки позы человека реализует многослойную оптимизацию признаков, направленную на постепенное улучшение качества представления эмбеддингов суставов. Данный модуль использует линейные преобразования для захвата высоко-размерных зависимостей между суставами, а также применяет нормализацию на уровне слоев (LayerNorm) для повышения стабильности и согласованности признаков. Функция активации GELU обеспечивает усиление нелинейной выразительности модели, а механизм Dropout способствует снижению риска переобучения за счет регуляризации [11].

Концепция поэтапной оптимизации позволяет моделировать сложные пространственно-временные зависимости между суставами, обеспечивая устойчивость модели при обработке данных из множества кадров. В результате работы модуль формирует высококачественные представления признаков, что создает надежную основу для точного прогнозирования положения ключевых точек тела. Данный подход представляет собой эффективный метод повышения точности оценки позы человека за счет улучшения качества извлечения и обработки признаков.

Оценка позы человека требует точного моделирования сложных пространственно-временных взаимосвязей между суставами. Модуль уточнения признаков обеспечивает воспроизведение этих зависимостей посредством поэтапных преобразований и применения нелинейных функций активации [2]. На каждом уровне модуля выполняется обновление и оптимизация признаков, что способствует их постепенному приближению к целевому представлению. Такой подход позволяет достичь высокой точности в предсказании трехмерных координат суставов. Благодаря прогрессивной оптимизации признаков, предсказание положения ключевых точек в конечном прогнозе становится более точным. Математическое описание данного процесса может быть представлено формулой [12]

$$X_t = X_{t-1} + F_{refine}(X_{t-1}). \quad (5)$$

В формуле X_t представляет собой результат уточнения признаков X_{t-1} . Данный процесс реализуется посредством рекурсивного обновления, или пошагового уточнения, где функция F_{refine} выполняет поэтапное улучшение признаков. Процесс продолжается до достижения состояния сходимости или исчерпания заданного максимального числа итераций T . Основная цель данного подхода заключается в постепенном преобразовании начального приближенного результата в высококачественное итоговое представление, что обеспечивает повышение точности и устойчивости модели.

Обучение модели и результаты. Эксперимент проводился на наборе данных Human3.6M. В рамках эксперимента была определена оптимальная комбинация параметров, включающая скорость обучения $L_r = 0,004$, количество блоков Enhanced ST-Block, равное 4, и значение параметра Feature Refinement Block, равное 3. Данная конфигурация продемонстрировала наилучшую производительность модели. Обучение проводилось на тренировочном наборе данных, состоящем из 10 000 образцов, с выполнением 150 итераций. Для анализа динамики обучения были построены графики функции потерь на тренировочном наборе и кривой средней ошибки положения суставов (MPJPE) на валидационном наборе данных (рисунок 3).

Результаты эксперимента показали, что на 145-й итерации модель достигла наилучшей производительности, при этом значение средней ошибки положения суставов (MPJPE) на валидационном наборе данных снизилось до 42,1, что представляет собой наилучший результат в рамках проведенного исследования. В процессе обучения наблюдалось постепенное снижение значения функции потерь, а кривая MPJPE на валидационном наборе данных демонстрировала устойчивую тенденцию к снижению, что свидетельствует о высокой сходимости модели и ее способности к обобщению при выбранной конфигурации параметров. Финальные результаты подтвердили эффективность предложенной конфигурации, предоставив надежное решение для задачи оценки позы человека.

В идентичных экспериментальных условиях (с использованием 10 000 обучающих и 200 валидационных образцов) было проведено обучение моделей LSTM, MHFormer, MyModel и PoseFormer на протяжении 150 итераций. После завершения обучения для каждой модели были построены графики кривых средней ошибки положения суставов (MPJPE) на валидационном наборе данных, что позволило провести сравнительный анализ их производительности (рисунок 4).

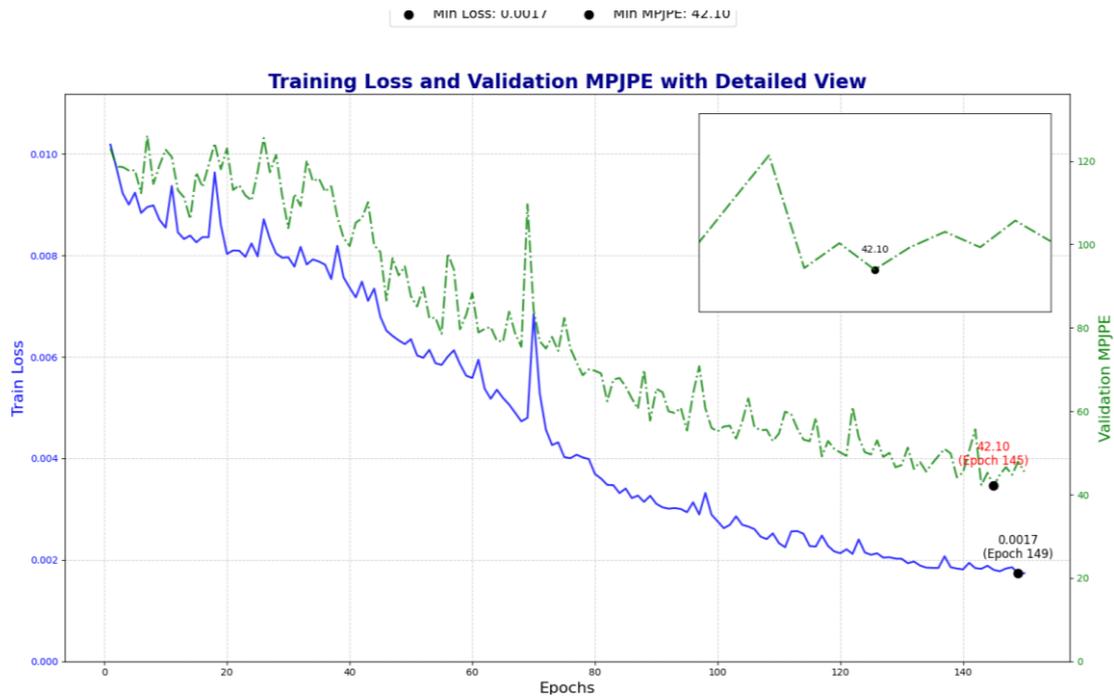


Рисунок 3. – Потери модели в данном эксперименте и MPJPE на валидационном наборе данных

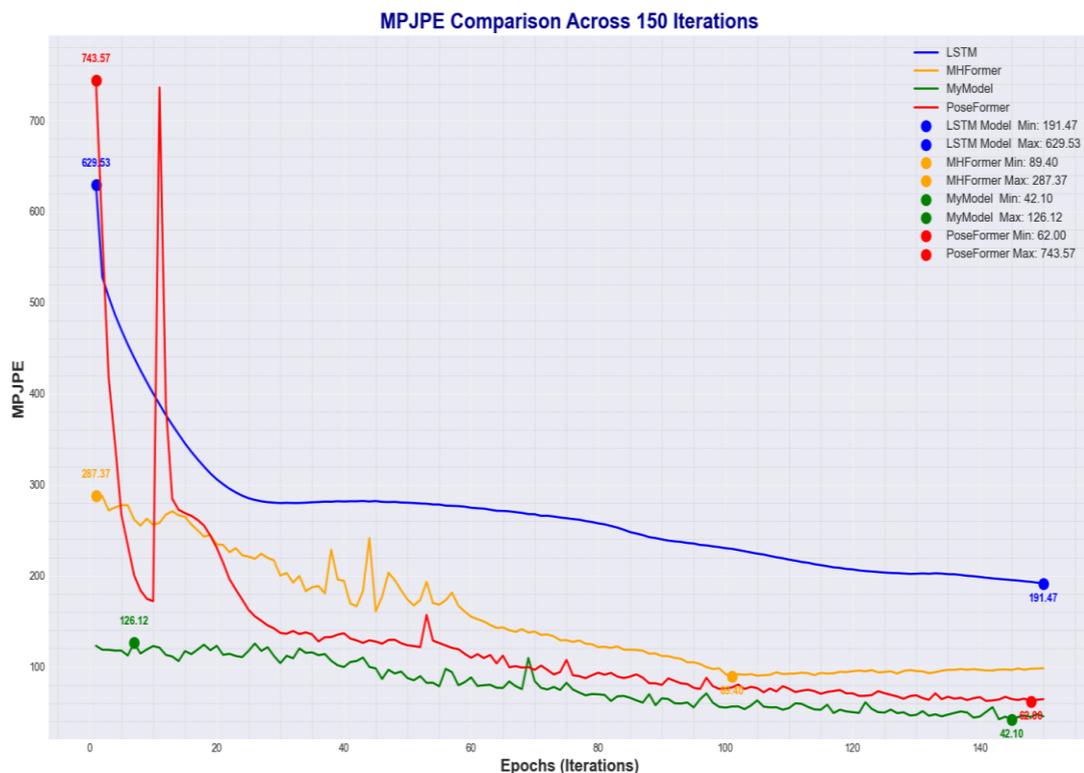


Рисунок 4. – Сравнение MPJPE различных моделей

Результаты эксперимента продемонстрировали, что модель PoseFormer достигла наилучшей производительности, показав минимальное значение ошибки. Модель MyModel заняла второе место, значительно превзойдя по точности модели LSTM и MHFormer. Полученные данные подтверждают высокую эффективность MyModel в задаче оценки позы человека, что подчеркивает ее практическую значимость и потенциал для дальнейшего применения.

Для оценки производительности моделей в задаче предсказания координат 17 суставов человека были выбраны три архитектуры: LSTM, PoseFormer и MyModel. Тестирование проводилось на 200 валидационных образцах, после чего была построена гистограмма, отражающая среднее значение ошибки положения суставов (MPJPE) для каждой модели по всем 17 суставам. Дополнительно для визуализации результатов предложенной модели MyModel была использована линейная диаграмма, демонстрирующая значение MPJPE для каждого отдельного сустава (рисунок 5).

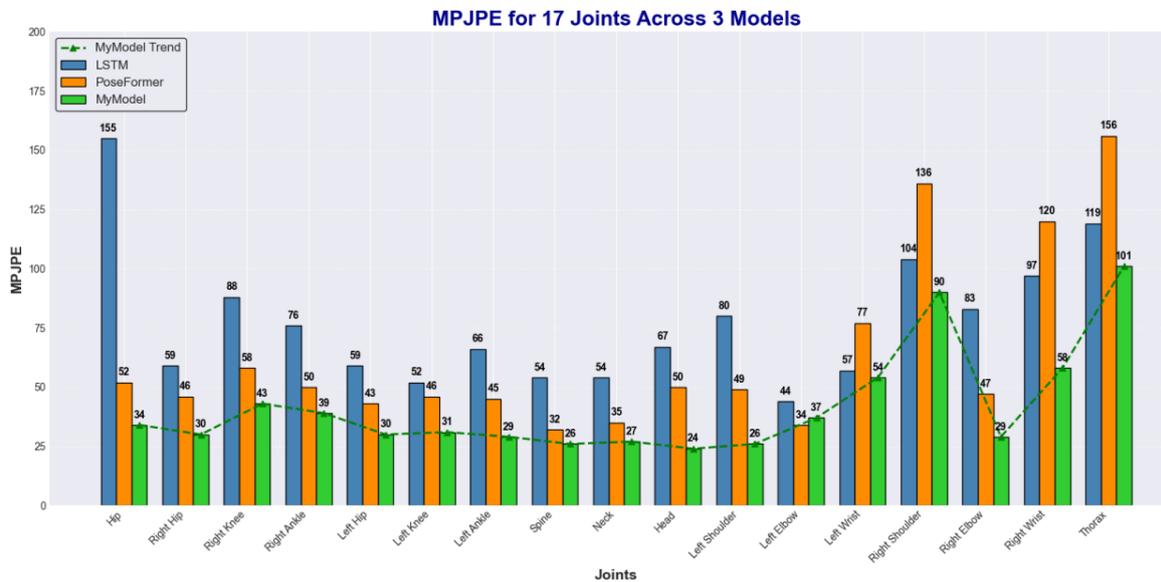


Рисунок 5. – Сравнение точности определения координат скелетных суставов в различных моделях

Результаты эксперимента демонстрируют, что средняя ошибка положения суставов (MPJPE) модели MyModel на всех суставах значительно ниже по сравнению с другими моделями. Особенно заметно превосходство в точности предсказания для сложных суставов, таких как запястья и лодыжки. Кроме того, распределение ошибок предложенной модели является более равномерным, что указывает на ее устойчивость и способность эффективно обрабатывать разнородные данные. Эти результаты свидетельствуют о значительных преимуществах модели MyModel в захвате сложных структурных зависимостей суставов человека и повышении точности преобразования из 2D в 3D, что имеет важное значение для разработки высокоточных методов оценки позы человека.

Заключение. В данной работе предложена комплексная архитектура для трехмерной оценки позы человека, направленная на решение ключевых задач в данной области. Основной научный вклад состоит во внедрении модуля многомасштабного объединения признаков, что улучшает извлечение контекстной информации и эффективно анализирует позы разной сложности; разработке усовершенствованного пространственно-временного блока с SE-модулем, что повышает качество моделирования связей между суставами и временных зависимостей; реализации прогрессивной стратегии уточнения с обучаемым позиционным кодированием, улучшающей качество признаков и точность предсказаний, особенно в сложных сценариях. Эксперименты на наборах данных, включая Human3.6M (MPJPE = 42,1), продемонстрировали высокую точность модели, ее устойчивость к окклюзиям и способность к обобщению в реальных условиях. Полученные результаты свидетельствуют, что сочетание многомасштабной обработки, механизмов внимания и учета неопределенности открывает перспективы для применения предлагаемой архитектуры в таких областях, как медицина, взаимодействие человека с машиной и захват движений.

ЛИТЕРАТУРА

1. 3D human pose estimation in video with temporal convolutions and semi-supervised training / D. Pavllo, C. Feichtenhofer, D. Grangier et al. // CVPR. – 2019. – DOI: [10.48550/arXiv.1811.11742](https://doi.org/10.48550/arXiv.1811.11742).
2. Zhang T., Huang B., Wang Y. Object-occluded human shape and pose estimation from a single-color image // CVPR. – 2020. – DOI: [10.1109/CVPR42600.2020.00740](https://doi.org/10.1109/CVPR42600.2020.00740).
3. Semantic Graph Convolutional Networks for 3D Human Pose Regression / L. Zhao, X. Peng, Y. Tian et al. // CVPR. – 2019. – DOI: [10.48550/arXiv.1904.03345](https://doi.org/10.48550/arXiv.1904.03345).
4. Pavlakos G., Zhou X., Daniilidis K. Ordinal depth supervision for 3D human pose estimation // CVPR. – 2018. – DOI: [10.48550/arXiv.1805.04095](https://doi.org/10.48550/arXiv.1805.04095).

5. Artzi Y., Zettlemoyer L. Weakly supervised learning of semantic parsers for mapping instructions to actions // *Trans. Assoc. Comput. Linguist.* – 2013. – Vol. 1. – P. 49–62. – DOI: [10.1162/tacl_a_00209](https://doi.org/10.1162/tacl_a_00209).
6. Unite the people: Closing the loop between 3D and 2D human representations / Lassner, C., Romero, J., Kiefel, M. et al. // *CVPR.* – 2017. – DOI: [10.48550/arXiv.1701.02468](https://doi.org/10.48550/arXiv.1701.02468).
7. Shape and Pose Estimation for Closely Interacting Persons Using Multi-View Images / Li, K., Jiao, N., Liu, Y. et al. // *Computer Graphics Forum.* – 2018. – Vol. 37, iss. 7. – P. 361–371. – DOI: [10.1111/cgf.13574](https://doi.org/10.1111/cgf.13574).
8. End-to-end learning for self-driving cars / M. Bojarski, D. Del Testa, D. Dworakowski et al. // *CVPR.* – 2016. – DOI: [10.48550/arXiv.1604.07316](https://doi.org/10.48550/arXiv.1604.07316).
9. Cross-modal self-attention network for referring image segmentation / L. Ye, M. Roohan, Z. Liu et al. // *CVPR.* – 2019. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1904.04745>.
10. Yeh R. A., Hu Y.-T., Schwing A. G. Chirality nets for human pose regression // *CVPR.* – 2019. – DOI: [10.48550/arXiv.1911.00029](https://doi.org/10.48550/arXiv.1911.00029).
11. SRNet: Improving generalization in 3D human pose estimation with a split-and-recombine approach / A. Zeng, X. Sun, F. Huang et al. // *ECCV.* – 2020. – DOI: [10.48550/arXiv.2007.09389](https://doi.org/10.48550/arXiv.2007.09389).
12. Liang J., Lin M. C. Shape-aware human pose and shape reconstruction using multi-view images // *ICCV.* – 2019. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1908.09464>.

REFERENCES

1. Pavlo, D., Feichtenhofer, C., Grangier, D., & Auli, M. (2019). 3D human pose estimation in video with temporal convolutions and semi-supervised training. *CVPR*. DOI: [10.48550/arXiv.1811.11742](https://doi.org/10.48550/arXiv.1811.11742).
2. Zhang, T., Huang, B., & Wang, Y. (2020). Object-occluded human shape and pose estimation from a single-color image. *CVPR*. DOI: [10.1109/CVPR42600.2020.00740](https://doi.org/10.1109/CVPR42600.2020.00740).
3. Zhao, L., Peng, X., Tian, Y., Kapadia, M., & Metaxas, D. N. (2019). Semantic Graph Convolutional Networks for 3D Human Pose Regression. *CVPR*. DOI: [10.48550/arXiv.1904.03345](https://doi.org/10.48550/arXiv.1904.03345).
4. Pavlakos, G., Zhou, X., & Daniilidis, K. (2018). Ordinal depth supervision for 3D human pose estimation. *CVPR*. DOI: [10.48550/arXiv.1805.04095](https://doi.org/10.48550/arXiv.1805.04095).
5. Artzi, Y., & Zettlemoyer, L. (2013). Weakly supervised learning of semantic parsers for mapping instructions to actions. *Trans. Assoc. Comput. Linguist.*, (1), 49–62. DOI: [10.1162/tacl_a_00209](https://doi.org/10.1162/tacl_a_00209).
6. Lassner, C., Romero, J., Kiefel, M., Bogo, F., Black, M. J., & Gehler, P. V. (2017). Unite the people: Closing the loop between 3D and 2D human representations. *CVPR*. DOI: [10.48550/arXiv.1701.02468](https://doi.org/10.48550/arXiv.1701.02468).
7. Li, K., Jiao, N., Liu, Y., Wang, Y., & Yang, J. (2018). Shape and pose estimation for closely interacting persons using multi-view images. *Computer Graphics Forum*, 37(7), 361–371. DOI: [10.1111/cgf.13574](https://doi.org/10.1111/cgf.13574).
8. Bojarski, M., Del Testa, D., Dworakowski, D., Firner, B., Flepp, B., Goyal, P., ... Zieba, K. (2016). End-to-end learning for self-driving cars. *CVPR*. DOI: [10.48550/arXiv.1604.07316](https://doi.org/10.48550/arXiv.1604.07316).
9. Ye, L., Roohan, M., Liu, Z., & Wang, Y. (2019). Cross-modal self-attention network for referring image segmentation. *CVPR*. DOI: [10.48550/arXiv.1904.04745](https://doi.org/10.48550/arXiv.1904.04745).
10. Yeh, R. A., Hu, Y.-T., & Schwing, A. G. (2019). Chirality nets for human pose regression. *CVPR*. DOI: [10.48550/arXiv.1911.00029](https://doi.org/10.48550/arXiv.1911.00029).
11. Zeng, A., Sun, X., Huang, F., Liu, M., Xu, Q., & Lin, S. (2020). SRNet: Improving generalization in 3D human pose estimation with a split-and-recombine approach. *ECCV*. DOI: [10.48550/arXiv.2007.09389](https://doi.org/10.48550/arXiv.2007.09389).
12. Liang, J., & Lin, M. C. (2019). Shape-aware human pose and shape reconstruction using multi-view images. *ICCV*. DOI: [10.48550/arXiv.1908.09464](https://doi.org/10.48550/arXiv.1908.09464).

Поступила 27.03.2025

HUMAN 3D POSE ESTIMATION BASED ON 2D KEYPOINTS

A. DING, O. V. NEDZVED
(*Belarusian State University, Minsk*)

In the presented work, innovative low-sampling lightweight architecture is proposed to solve the task of 3D human pose estimation based on 2D key points. The approach introduces specialized trainable pose encodings designed for 3D pose estimation tasks, which are used in conjunction with traditional pose encodings to represent the input data. The architecture of the method includes multilevel feature processing and their adaptive association using a spatial attention mechanism, which allows to enhance relevant features. Experiments conducted on standard test datasets confirmed the effectiveness of the proposed method: a mean joint position error (MPJPE) value of 42.1 was achieved, which exceeds the results of existing approaches.

Keywords: *3D pose estimation, multi-level feature processing, adaptive feature aggregation, progressive feature refinement, learnable positional encodings.*

СИНТЕЗ НЕДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ ПО РЕГУЛЯРНЫМ ВЫРАЖЕНИЯМ АЛГОРИТМОМ ГЛУШКОВА В ФОРМАТЕ JFF

Д. С. ЛОБАРЁВ, Н. Д. ЛОБАРЁВ
(Псковский государственный университет, Россия)

D. Lobaryov ORCID <https://orcid.org/0000-0002-1918-7990>

N. Lobaryov ORCID <https://orcid.org/0009-0006-2547-8467>

Представлены результаты реализации программного средства синтеза недетерминированных конечных автоматов по регулярным выражениям в формате JFF. В качестве метода синтеза автоматов применялся алгоритм Глушкова. При разработке программы использовались интегрированная среда разработки для языка программирования Python – Visual Studio Code, программный пакет JFLAP для визуализации конечных автоматов, а также библиотеки Python `xml.etree` и `pythonds`.

Ключевые слова: недетерминированные конечные автоматы, регулярные выражения, алгоритм Глушкова, JFLAP, Python, `xml.etree`, `pythonds`.

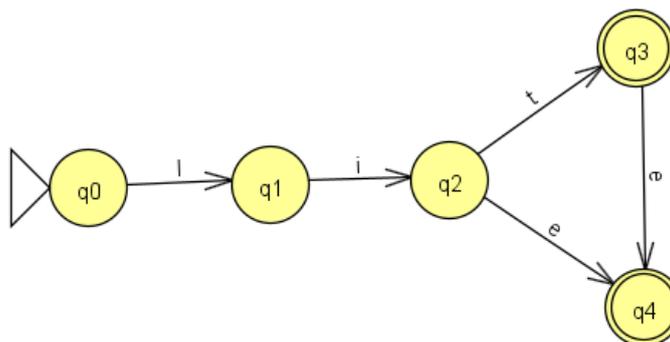
Введение. При проектировании программных и аппаратных средств часто применяются математические модели в виде конечных автоматов. Так, например, с помощью автомата удобно описывать поведение пользователя при разработке интерфейса, управление процессами в операционных системах, моделирование аппаратных устройств в схемотехнике и алгоритмы управления робототехническими системами. Программирование конечных автоматов в настоящее время все шире используется в системах автоматизированного управления, в разработке компьютерных игр, текстовых интерпретаторах и онлайн-переводчиках.

Одним из распространенных способов синтеза конечных автоматов считается синтез по регулярному выражению. Конечные автоматы и регулярные выражения имеют стандартную форму [1]. Теоретической основой исследования стали работы зарубежных и отечественных ученых и практиков: В. М. Глушкова, Ю. Г. Карпова, К. Томпсона, А. А. Шалыто, Э. Ф. Мура, Дж. Мили, Д. Э. Хопкрофта, Р. Мотвани, Д. Ульмана и других¹ [1–3]. Методы исследования базируются на элементах теории множеств, теории алгоритмов и дискретной математике.

Конечные автоматы и регулярные выражения. Автомат – это любой объект, поведение которого может быть описано набором состояний и переходами между ними. Множество конечных автоматов можно разделить на два больших класса: автоматы-распознаватели и автоматы-преобразователи. Задача первых – определить, принадлежит ли входное слово к заданному множеству слов. Обычно они выдают ответ в виде «да» или «нет». Автоматы-распознаватели чаще всего используются в лексических анализаторах в качестве программных моделей. Аппаратная реализация конечного автомата обычно встречается для второго класса – автоматов-преобразователей. Такие автоматы преобразуют входное слово в некоторое выходное слово.

Автомат-распознаватель – это объект, который задается структурой $(Q, q_0, F, \Sigma, \delta)$, где Q – множество состояний; q_0 – начальное состояние; F – множество конечных состояний, т. е. все такие состояния, в которых завершение работы автомата считается корректным; Σ – множество входных символов или входной алфавит; δ – функция переходов. Пример графа автомата, распознающего слова *lite*, *lie* и *lit*, представлен на рисунке 1.

Рисунок 1. – Граф автомата, распознающего слова *lite*, *lie* и *lit*



¹ Thurston A. Ragel State Machine Compiler User Guide. URL: <https://www.colm.net/files/ragel/ragel-guide-6.10.pdf>.

Конечные автоматы делятся на детерминированные и недетерминированные. Детерминированный конечный автомат – это конечный автомат, принимающий или отклоняющий заданную строку символов путем прохождения через последовательность состояний, определенных строкой [1]. Недетерминированный конечный автомат – это детерминированный конечный автомат, который не выполняет следующих условий: любой его переход единственным образом определяется по текущему состоянию и входному символу; чтение входного символа требуется для каждого изменения состояния.

Регулярным языком, или языком, распознаваемым автоматом, называется множество таких слов, после прочтения которых автомат из начального состояния q_0 попадает в конечное из множества F [2].

Существуют следующие способы задания регулярного языка:

1. Перечень слов: представляет собой список слов. Например, для графа из рисунка 1 перечень слов, представляющий собой язык, распознаваемый автоматом, будет включать *lite, lie, lit*.

2. Регулярная грамматика, т. е. перечень правил, который определяет принадлежность слова к языку.

3. Регулярное выражение.

С помощью алгебры регулярных выражений описывают правила, которые можно применять к операциям, содержащимся в данном регулярном выражении. Алгебра регулярных выражений – это частный случай алгебры Клини – некоммутативное идемпотентное полукольцо с нейтральным элементом [2].

Синтез недетерминированных конечных автоматов алгоритмом Глушкова. В работе рассматривается алгоритм построения графа методом Глушкова. Для получения множеств по регулярному выражению составляется синтаксическое дерево с помощью библиотеки *ruthonds* языка программирования Python.

Алгоритм Глушкова был разработан советским ученым Виктором Михайловичем Глушковым. Суть алгоритма заключается в преобразовании регулярного выражения в эквивалентный ему недетерминированный конечный автомат без переходов по пустой строке [3]. Алгоритм Глушкова состоит из четырех этапов.

Первый этап – линеаризация выражения. Каждый символ алфавита, встречающийся в регулярном выражении e , переименовывается, так что в новом выражении e' каждый символ встречается не более одного раза. Конструкция Глушкова, по сути, основана на том факте, что e' представляет собой язык $L(e')$. Пусть A – старый алфавит, а B – новый.

Второй этап – вычисление множеств $P(e')$, $D(e')$, $F(e')$ и $\Lambda(e')$. Первое множество, $P(e')$, – это набор символов, который встречается как первый символ слова из языка $L(e')$. Второе множество, $D(e')$, – это набор символов, которыми может заканчиваться слово из языка $L(e')$. Третье множество, $F(e')$, представляет собой набор пар соседних символов, которые могут 26 раз последовательно встречаться в словах из языка $L(e')$. Эти наборы математически определяются формулами

$$P(e') = \{x \in B \mid xB^* \cap L(e') \neq \emptyset\};$$

$$D(e') = \{y \in B \mid B^*y \cap L(e') \neq \emptyset\};$$

$$F(e') = \{u \in B^2 \mid B^*uB^* \cap L(e') \neq \emptyset\}.$$

Они вычисляются методом индукции по структуре выражения, как описано ниже. Последнее множество $\Lambda(e')$ содержит пустое слово, если это слово принадлежит языку $L(e')$, и является пустым множеством в противном случае. Формально это $\Lambda(e') = \{\lambda\} \cap L(e')$, где λ обозначает пустое слово.

Третий этап – вычисление автомата, распознающего язык, определенный множествами $P(e')$, $D(e')$, $F(e')$ и $\Lambda(e')$. Язык, определяемый наборами P , D и F , по своей сути является набором слов, которые начинаются с символа множества P , заканчиваются символом множества D и пар соседних символов множества F , необязательно также включая пустое слово; то есть это язык $L' = (PB^* \cap B^*D) \setminus B^*(B^2 \setminus F)B^* \cup \Lambda(e')$, где \setminus означает разницу множеств, или относительное дополнение между множествами. Строго говоря, именно вычисление автомата для языка, обозначаемого этим линеаризованным выражением, является конструкцией Глушкова.

Четвертый этап – удаление линеаризации путем замены каждого индексированного символа алфавита B исходным символом алфавита A .

В роли входных данных выступает регулярное выражение типа данных *str*, в роли выходных данных – XML-дерево, содержащее информацию о недетерминированном конечном автомате. Предлагаемое программное средство состоит из 5 программных модулей, написанных на языке Python версии 3.11.0. Например, в [4] представлен опыт поиска оптимального решения в дифференциальной линейно-квадратичной задаче на языке программирования Python в облачной среде Google Colab.

Кратко опишем каждый модуль разрабатываемого программного средства:

1. `init.py` – модуль инициализации. Чтобы программа начала свою работу, необходимо запустить именно этот модуль. В данном файле производится импорт всех остальных модулей и соблюдается строгая последовательность выполнения функций каждого модуля.

2. `grammar_check.py` – модуль проверки введенного регулярного выражения. Представляет собой лексический и синтаксический анализатор.

3. `transform.py` – модуль преобразования регулярного выражения для правильного построения синтаксического дерева.

4. `all_sets.py` – модуль, реализующий 2-й этап алгоритма Глушкова. С помощью данного модуля по преобразованному регулярному выражению строится синтаксическое дерево, по которому формируются множества:

- множество переходов из начального состояния (т. е. $P(e')$);
- множество конечных состояний (т. е. $D(e')$);
- множество всех возможных пар символов (т. е. $F(e')$);
- множество, отвечающее за конечность начального состояния (т. е. $\Lambda(e')$).

5. `create_xml_tree.py` – модуль, реализующий 3-й и 4-й этапы алгоритма Глушкова. Также данный модуль создает xml-код, содержащий информацию о конечном автомате, визуализацию которого можно посмотреть в пакете JFLAP².

JFLAP (Java Formal Languages and Automata Package) – свободное ПО, созданное для образовательных целей в области теории автоматов. Основной особенностью JFLAP является широкий и регулярно пополняемый функционал, позволяющий интерактивно решать такие типовые задачи, как работа с регулярными языками (создание детерминированных и недетерминированных конечных автоматов, регулярных грамматик и выражений), преобразования (недетерминированного конечного автомата в детерминированный, недетерминированного конечного автомата в регулярное выражение или грамматику, минимизация детерминированного конечного автомата), создание и преобразование контекстно-свободных языков, работа с машинами Тьюринга, а также синтез конечных автоматов по регулярным выражениям хорошо известным алгоритмом Томпсона.

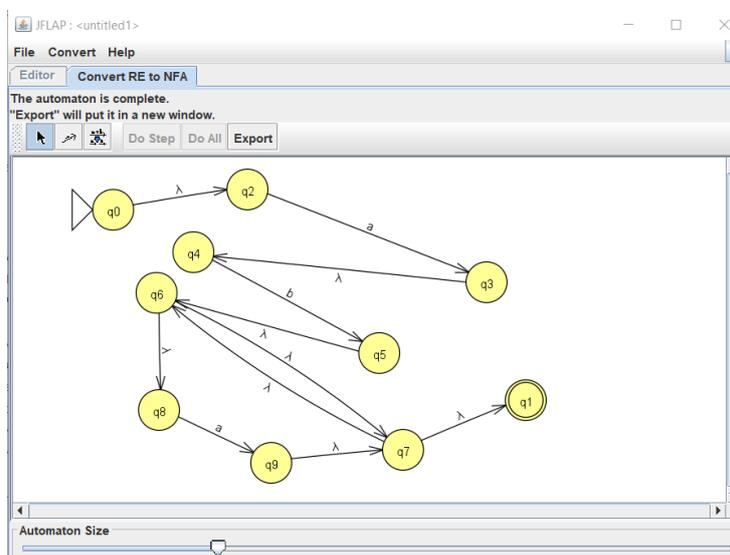


Рисунок 2. – Окно JFLAP с результатом синтеза недетерминированного конечного автомата по регулярному выражению aba^*

Особенность данного исследования заключается в построении графа с помощью алгоритма Глушкова. В отличие от алгоритма Томпсона, он позволяет строить конечные автоматы без пустых переходов. Работа программного средства функционально состоит из четырех этапов:

1. Проверка регулярного выражения. На данном этапе осуществляется чтение введенного регулярного выражения. Программа должна оповестить пользователя о том, что он ввел регулярное выражение правильно или неправильно. Если выражение было указано неверно, то программа не допустит его дальнейшей обработки. Эту задачу выполняет модуль `grammar_check.py`.

² JFLAP: off. website. URL: www.jflap.org.

2. Преобразование регулярного выражения. После выполнения первого этапа необходимо преобразовать исходное регулярное выражение для правильного построения синтаксического дерева. Также после преобразования формируется новый алфавит B в виде списка, что является результатом первого шага алгоритма Глушкова. Эту задачу выполняет модуль `transform.py`.

3. Вычисление множеств. После выполнения второго этапа программа на основе преобразованного выражения создает синтаксическое дерево и с помощью него вычисляет множества начальных состояний $P(e')$, конечных состояний $D(e')$, всех возможных пар символов $F(e')$ и множество, определяющее конечность начального состояния $\Lambda(e')$. Результат вычисления этих множеств означает завершение второго шага алгоритма Глушкова. Каждое такое множество, за исключением последнего, также будет представлено в формате списков. На этом этапе задействованы следующие модули: `init.py`, `all_sets.py`.

4. Формирование выходного файла. На основе списков, полученных на предыдущем этапе, программа формирует выходной файл в формате JFF, содержащий информацию о структуре недетерминированного конечного автомата. Эту задачу выполняет модуль `create_xml_tree.py`.

В качестве примера возьмем регулярное выражение $e = b(ab + ba)^*$. Запускаем модуль `init.py` и вводим регулярное выражение. Результат работы программного средства продемонстрирован на рисунке 3.

```

Введите регулярное выражение без пробелов: b(ab+ba)*
Поздравляем! Выражение составлено верно!
Исходное выражение: e = b.(a.b+b.a)*
Преобразованное выражение: e' = ( b1 . ( ( ( a2 . b3 ) + ( b4 . a5 ) ) * ) )
Новый алфавит: B = ['b1', 'a2', 'b3', 'b4', 'a5']
Множество переходов из начального состояния: P(e') = ['b1']
Множество переходов в конечные состояния: D(e') = ['b3', 'a5', 'b1']
Множество всех возможных пар символов: F(e') = [['b4', 'a5'], ['a2', 'b3'], ['b1', 'b4'], ['a5', 'a2'],
['a5', 'b4'], ['b1', 'a2'], ['b3', 'a2'], ['b3', 'b4']]
Определяем конечность начального состояния:  $\Lambda(e') = \text{False}$ 
JFF-файл создан успешно!

```

Рисунок 3. – Ввод данных, проверка и преобразование регулярного выражения

Визуализация конечного автомата в программе JFLAP показана на рисунке 4. Модуль `create_xml_tree.py` формирует файл формата JFF, который представляет из себя XML-дерево. Для работы с XML-файлами необходимо использовать библиотеку `xml.etree`.

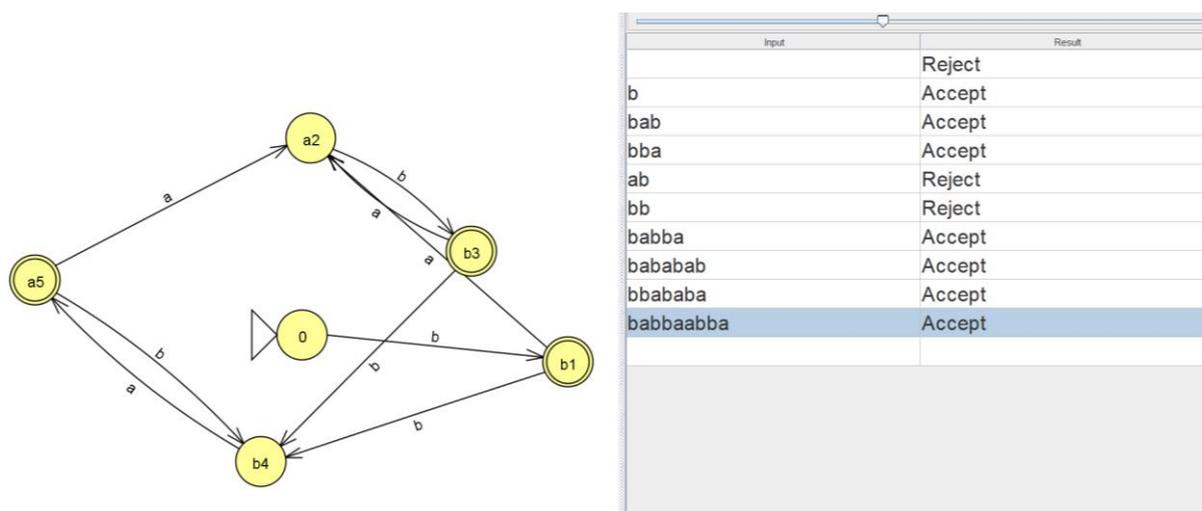


Рисунок 4. – Построение графа конечного автомата по регулярному выражению

Заключение. В статье представлена авторская разработка специальной программы синтеза недетерминированных конечных автоматов по регулярным выражениям. Для синтеза используется алгоритм Глушкова, в результате чего получен недетерминированный конечный автомат без пустых переходов. Результаты тестирования программы указывают на необходимость введения дополнительных параметров.

Одной из таких модификаций может стать экранирование специальных символов для создания возможности их использования в регулярных выражениях.

Разработанное программное средство может быть использовано в образовательных целях, а также в качестве альтернативного метода синтеза недетерминированных конечных автоматов по регулярному выражению для программы JFLAP. Области практического применения результатов разработки могут быть управление потоком задач и реализация синтеза цифровых устройств, описание алгоритмов, а также моделирование процессов в различных сферах, таких как лингвистика, химия, физика, биология, математика и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хопкрофт Д. Э., Мотвани Р., Ульман Д. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. – М.: Вильямс, 2008. – 527 с.
2. Когабаев, Н. Т., Дискретная математика и теория алгоритмов. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2023. – 126 с.
3. Глушков В. М. Абстрактная теория автоматов // Успехи математических наук. – 1961. – Т. 16, вып. 5(101). – С. 3–62. – URL: <https://www.mathnet.ru/links/6e142a93807e67659b1200367fd3b613/rm6668.pdf> (дата обращения: 12.01.2024).
4. Лобарёв Д. С., Толбухин Д. В. Поиск оптимального решения дифференциальной линейно-квадратичной задачи управления средствами Python в облачной среде Google Colab // Науч.-техн. вестн. Поволжья. – 2021. – № 12. – С. 208–213.

REFERENCES

1. Khopkroft, D. E., Motvani, R., & Ul'man, D. (2008). *Vvedenie v teoriyu avtomatov, yazykov i vychislenii*. Moscow: Vil'yams. (In Russ.).
2. Kogabaev, N. T., (2023). *Diskretnaya matematika i teoriya algoritmov*. Novosibirsk: IPTs NGU. (In Russ.).
3. Glushkov, V. M. The abstract theory of automata. (1961). *Russian Mathematical Surveys*, 16(5), 1–53. DOI: [10.1070/RM1961v016n05ABEH004112](https://doi.org/10.1070/RM1961v016n05ABEH004112).
4. Lobarev, D. S., & Tolbukhin, D. V. (2021). Poisk optimal'nogo resheniya differentsial'noi lineino-kvadraticnoi zadachi upravleniya sredstvami Python v oblachnoi srede Google Colab [Search for the optimal solution to the differential linear-quadratic Python management problem in the Google Colab cloud environment]. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik Povolzh'ya*. (12), 208–213. (In Russ., abstr. in Engl.).

Поступила 17.01.2025

SYNTHESIS OF NONDETERMINISTIC FINITE AUTOMATON FROM REGULAR EXPRESSIONS BY GLUSHKOV'S ALGORITHM IN JFF FORMAT

D. LOBARYOV, N. LOBARYOV
(Pskov State University, Russia)

The paper presents the results of the implementation of a software tool for synthesizing nondeterministic finite automaton using regular expressions in JFF format. Glushkov's algorithm is used as a method for synthesizing automata. When developing the program, the integrated development environment for the Python – Visual Studio Code, the JFLAP software package for visualizing finite automaton, as well as the Python libraries xml.etree and pythonds were used.

Keywords: *nondeterministic finite automaton, regular expressions, Glushkov's algorithm, JFLAP, Python, xml.etree, pythonds.*

УДК 517.977

DOI 10.52928/2070-1624-2025-44-1-14-24

МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ СОЦИОКУЛЬТУРНОГО ПРОЦЕССА В УСЛОВИЯХ НЕТОЧНОСТИ ДИАГНОСТИКИ

канд. физ.-мат. наук Т. И. ПЕСЕЦКАЯ

(Белорусский государственный университет культуры и искусств, Минск)

Рассматривается проблема моделирования социокультурных процессов с помощью динамических систем управления. Изучены вопросы описания управляемого объекта социокультурного пространства набором измеримых показателей, полученных путем параметризации качественных характеристик. Предложены подходы к моделированию процессов регулирования ценностных ориентиров актора социокультурного пространства для достижения социально значимых целей с помощью динамических систем с управлением типа обратной связи. Представлен алгоритм построения оптимального управления с обратной связью в дискретном времени, учитывающий ограничения на ресурсы управления и неточность измерений состояний объекта управления. В качестве примера рассматривается модель, основанная на социокультурных измерениях Г. Хофстеде.

Ключевые слова: регулирование процессов социокультурного пространства, социокультурные измерения, динамические системы управления, оптимальное управление с обратной связью.

1. Теория управления и управление социокультурными процессами. Сегодня можно с уверенностью утверждать, что современная теория управления развита достаточно глубоко для ее применения в управлении сложными техническими системами и технологическими процессами. В условиях развития современных информационных технологий и постоянно множачихся, совершенствующихся алгоритмов обработки больших данных, которые применяются в системах искусственного интеллекта и искусственного разума, основанных на изучении феноменов когнитивного функционала человека и поведения социальных групп, возрастает актуальность математического моделирования деятельности как отдельного индивида, личности, так и социума в целом, а также вычислительных методов обработки социальных и культурологических данных, формирующих аналитическую основу для принятия решений целевого регулирования социума и управления социокультурными процессами [1]. В социологии модели теории оптимального управления используются в основном для моделирования распространения социальных проблем (например, преступности, алкоголизма, злоупотребления психоактивными веществами) через контакты с «пораженными» субъектами социума [2], а также для моделирования процессов обучения [3]. Ставшие уже классическими модели основаны на формализации объекта управления в виде нелинейной системы дифференциальных уравнений с неопределенностью [2; 4], как правило, заданной стохастически, что актуализирует исследование подходов к построению алгоритмов управления, не требующих нахождения решения в явном виде, а использующих позиционные ряды наблюдений состояний объекта управления для построения управляющего воздействия в реальном времени [5]. Цель работы – обосновать возможность использования разработок теории управления для управления недетерминированными динамическими системами с неопределенностью в реальном времени для решения задач регулирования социокультурных процессов.

2. Понятие социокультурного измерения и состояние объекта социокультурного пространства. С точки зрения математического моделирования социум является самым сложным объектом математической формализации. Прежде всего социокультурные процессы описываются с помощью концептуально-качественных характеристик. Помимо этого, необходимы подходы к формированию количественных измерений состояний объекта управления социокультурного пространства, которые позволяют иерархизировать и типологизировать социальные явления и пригодны для построения динамических систем управления. Следуя концепции социокультурного пространства Е. Ю. Шакировой [6], определим социокультурное пространство как многоуровневый, многоэтапный и разноплановый синтез феноменов деятельности и взаимодействий социокультурных акторов (как единичных, так и коллективных), результирующий наполнение пространства характерным действующим акторам содержанием: смыслы, идеи, убеждения, традиции, ценности, знаковые формы, символы, системы аксио-семантических координат. Соответственно, состояние объекта социокультурного пространства определим в контексте координат его содержательных характеристик эквивалентным набором измеримых показателей. Традиционно в современных социокультурных исследованиях методики перевода качественных характеристик в измеримые количественные показатели осуществляется с помощью параметризации или введения шкал для количественной оценки той либо иной характеристики.

Первые подходы в сфере социокультурных измерений предложил нидерландский социолог Г. Хофстеде, который ввел шесть показателей, характеризующих культуру [7] по стобалльной шкале, соответственно сопоставив качественным характеристикам количественные эквиваленты (таблица 1).

Таблица 1. – Измерения Г. Хофстеде

	Нижняя граница измерения	Шкала	Верхняя граница измерения
1.	МАЛАЯ	0 ↔ 100	БОЛЬШАЯ
	Ориентирование на «голос» каждого, в том числе в принятии решений. Порождает неявное управление лидеров через управленческую горизонталь	ДИСТАНЦИЯ ВЛАСТИ	Ориентирование на достойного лидера, делегирование лидеру полномочий в принятии решений. Порождает управленческую вертикаль
2.	КОЛЛЕКТИВИЗМ	0 ↔ 100	ИНДИВИДУАЛИЗМ
	«Мы»-культура. Решение принимается в пользу Мы, даже если в ущерб «Я»	АВТОНОМНОСТЬ	«Я»-культура. Решение принимается в пользу Я, даже если в ущерб «Мы»
3.	ФЕМИННОСТЬ	0 ↔ 100	МАСКУЛИННОСТЬ
	Ориентирование на гарантированное обеспечение социума (горизонтальный рост)	КОНКУРЕНЦИЯ	Ориентирование на конкуренцию (вертикальный рост)
4.	ПРИНЯТИЕ	0 ↔ 100	ИЗБЕГАНИЕ
	Краткосрочное планирование, принятие риска, вариабельность действующих законов, правил, политик	НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ	Долгосрочное планирование, предпочтение не рисковать, стабильность действующих законов, правил, политик
5.	КРАТКОСРОЧНАЯ	0 ↔ 100	ДОЛГОСРОЧНАЯ
	«Настоящее определяется прошлым», в большей степени доверяют традициям, чтят историю	ПЕРСПЕКТИВА	«Настоящее для будущего», в меньшей степени учитывается прошлое, история, традиции, прагматическая культура
6.	НИЗКАЯ	0 ↔ 100	ВЫСОКАЯ
	Ориентирование на «самопрощение» и «самопоощрение»	ИНДУЛЬГЕНЦИЯ	Ориентирование на наказание, если виновен, поощрение, если заслужил

Таким образом, в данной модели состояние актора социокультурного пространства характеризуется шестью координатами. Например, если акторами выступают страны, представленные на рисунке 1, то их координаты в разные моменты времени будут принимать значения, представленные в таблице 2.

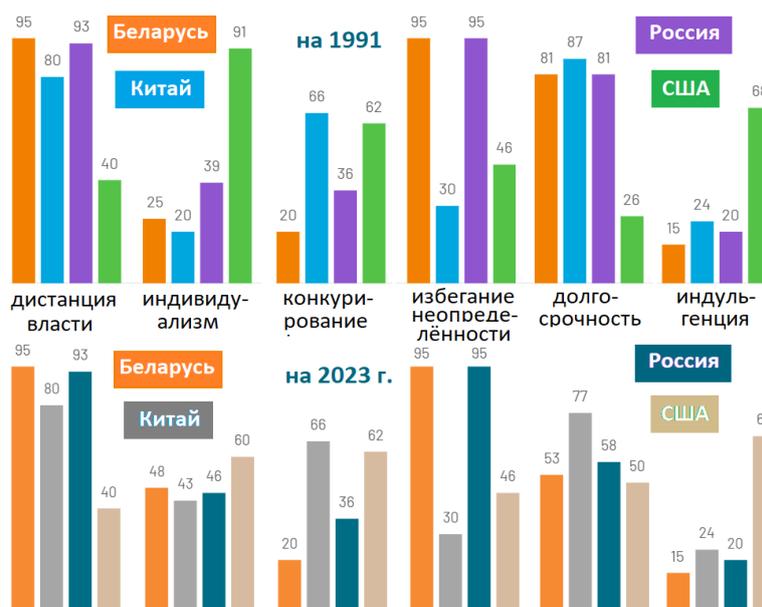


Рисунок 1. – Сравнение Беларуси, России, Китая и США по измерениям Г. Хофстеде (данные получены с помощью конструктора ресурса «The Culture Factor»¹)

¹ URL: www.theculturefactor.com.

Таблица 2. – Пример состояний акторов социокультурного пространства

Беларусь	Китай	Россия	США
$X_B(1991) =$ = (95, 25, 20, 95, 81, 15)	$X_C(1991) =$ = (80, 20, 66, 30, 87, 24)	$X_R(1991) =$ = (93, 39, 36, 95, 81, 20)	$X_U(1991) =$ = (40, 91, 62, 46, 26, 68)
$X_B(2023) =$ = (95, 48, 20, 95, 53, 15)	$X_C(2023) =$ = (80, 43, 66, 30, 77, 24)	$X_R(2023) =$ = (93, 46, 36, 95, 58, 20)	$X_U(2023) =$ = (40, 60, 62, 46, 50, 68)

Как мы видим, состояния акторов социокультурного пространства меняются со временем (хотя некоторые показатели векторов состояний в данном примере не изменяются, что мы обсудим далее), то есть наблюдается некоторая динамика системы

$$\dot{x} = f(x, \rho, t), \quad (1)$$

где x – вектор состояния динамической системы;

f – вектор-функция, описывающая динамику системы;

ρ – вектор-функция, описывающая воздействия на систему, если таковые имеются;

t – время.

3. Моделирование управления социокультурным процессом. Прежде чем перейти непосредственно к моделированию, рассмотрим понятие «социокультурный процесс». Под самим процессом в социокультурном пространстве будем понимать последовательную смену состояний объекта или актора социокультурного пространства в его развитии во времени. Согласно П. Сорокину (1889–1968), социокультурный процесс представляет собой «взаимовлияние фундаментальных идей и социальных процессов»; в свою очередь, Р. Будон (1934–2013) дополняет это определение, подчеркивая, что социокультурное проявляется «через соотношение социальной структуры, идей и ценностей, циркулирующих в обществе» [8]. Таким образом, в контексте данного исследования определим социокультурный процесс как последовательную смену состояний объекта или актора социокультурного пространства, приводящую к формированию/изменению ценностей или универсалий в данном социокультурном пространстве. В таблице 3 (основана на схеме из [9, с. 16]) приведены этапы управления таким процессом.

Таблица 3. – Этапы управления социокультурным процессом (*• – принятие/передача управляющего воздействия)

Этап	Описание	Управление	
1. Концептуальная часть	Целеполагание (например, уточнение общественного идеала, определение социального заказа)	←/↓	↑/←
2. Диагностическая подготовка	Изучение объекта или социального актора (выявление «проблемного поля», изучение интересов, запросов)	↓/↓	
3. Проектная основа	Структуризация содержания и данных (отбор и формирование содержания, организация его в конкретную проектную форму)	↓/↓	
4. Прогностическая подготовка	Создание прогностической модели (определение стратегических и тактических целей и задач, перевод их в диагностические цели и задачи, систематизация и параметризация)	↓/↓	
5. Процессуальная часть	Организация и управление процессами (например, регулирования состояний социального актора или создания и реализации проекта)	↓↑/↓	
6. Аналитическая часть	Анализ результатов (диагностирование и экспертная оценка достигнутых результатов)	↓↑/↓	
7. Переход на новую ступень	Формирование рекомендаций перспектив	↓/→	→/↑

Как отмечает Г. Н. Новикова [9, с. 16], данная схема содержит управляющую подсистему (см. таблицу 3, этапы 5, 6), другими словами, в терминах теории управления, мы можем сказать, что управляющая подсистема представляет собой систему оптимального управления с обратной связью, которая строится по результатам измерений состояний объекта управления (см. таблицу 3, этап 6), где основой определения целевой функции является целеполагание (см. таблицу 3, этап 1).

Вернемся к примеру с измерениями Г. Хофстеде (см. таблицу 2), где мы видим, что некоторые показатели остались неизменными в точках измерения состояний $t_1 = 1991$ и $t_2 = 2023$. Однако анализ с помощью аналитического конструктора ресурса «The Culture Factor» показывает, что изменения в данные измерений вносились на основе разрозненных исследований показателей, при этом последние обновления данных выполнены согласно исследованию [10], в котором были изучены лишь такие измерения как «индивидуализм» и «долгосрочность». Следует отметить, что согласно исходным измерениям 1991 г. из шести

показателей Г. Хофстеде значимую корреляцию, равную 0,72, имеют два измерения: «дистанция власти» и «коллективизм – индивидуализм», таким образом, мы можем с достаточно большой вероятностью полагать, что данный показатель по странам тоже изменился, но не измерен. В этом случае говорят об измерительном устройстве, которое измеряет в момент времени t не конкретные состояния системы, а некоторый выходной сигнал

$$\dot{x} = f(x, \rho, t), \quad y = h(x, t), \quad (2)$$

где y – вектор измеренных выходных сигналов;
 $h(x, t)$ – вектор-функция, описывающая процесс измерения.

К моделям управления динамическими системами по неполным измерениям состояний мы перейдем в дальнейших работах. В данном исследовании мы сосредоточимся на измерениях всех состояний системы с допуском некоторой погрешности измерения $\xi(t)$. Так, опираясь на имеющиеся данные ресурса «The Culture Factor», построим динамическую модель поведения актора социокультурного пространства, в данном случае страны, с двумя состояниями: x_1 – «индивидуализм – коллективизм», x_2 – «долгосрочность», тогда система (2) примет вид

$$\dot{x} = f(x, \rho, t), \quad y(t) = x(t) + \xi(t). \quad (3)$$

В случае с показателями измерений Г. Хофстеде поведение социального актора состоит в смене состояний (x_1, x_2) или ценностных социокультурных ориентиров «индивидуализм – коллективизм» и «долгосрочное – краткосрочное планирование».

Отметим, что современные технологии построения социокультурных измерений базируются на масштабных опросах, таких как, например, World Values Survey², где ответы переводятся в числовые эквиваленты с разной вариативностью дискретных шкал, динамические же модели имеют дело с кусочно-непрерывными функциями. Будем полагать, что социокультурный процесс имеет кусочно-непрерывную динамику, а измерение с помощью дискретной шкалы лишь аппроксимирует измеренное состояние социального актора. Таким образом, погрешности измерений будет аккумулироваться функцией

$$\xi_* \leq \xi(t) \leq \xi^*, \quad (4)$$

которую мы также будем считать кусочно-непрерывной.

Вернемся к вопросу об управляющей подсистеме схемы управления социокультурным процессом (см. таблицу 3). Как было отмечено выше, управление ведется согласно целеполаганию. Определим целеполагание управлением поведением социокультурного актора. В исследованиях Г. Хофстеде [7] обнаружена взаимосвязь факторов «индивидуализм – коллективизм» и «долгосрочность» с экономическим поведением социокультурного актора. Так, в главе «I, We and They» книги «Cultures and Organizations: Software of the Mind» авторы отмечают, что коллективистские культуры зачастую характеризуются сильной социальной сплоченностью и взаимопомощью, что может обусловить более стабильную социальную среду, которая способствует вложению долгосрочных инвестиций, а «...компании в странах с высоким показателем «долгосрочности» склонны к долгосрочному планированию, инвестициям в будущее, стратегическому развитию и завоеванию доли рынка. Они более терпимы к медленным результатам и отдают приоритет долгосрочной устойчивости над краткосрочной прибылью» [7, с. 244]. Рассмотрим вариант реализации долгосрочного национального проекта. В этом случае благоприятно, когда ценностные ориентиры актора социокультурного пространства тяготеют к «коллективному» и «долгосрочному» паттернам.

Если мы посмотрим на показатели Беларуси (здесь социальным актором выступает страна как коллективный актор социокультурного пространства), то можем отметить, что за 32 года показатель «индивидуализм» вырос на 23 пункта – с 25 до 48, а показатель «долгосрочность» снизился на 28 пунктов – с 81 до 53. Предположим, что мы ставим задачу регулирования данных показателей с целью реализации большого национального проекта, требующего долгосрочных инвестиций и приложения усилий в некоторый период \bar{T} , и нам необходимо, чтобы состояние показателей (x_1, x_2) за промежуток времени $t \in T = [t_*, t^*]$, $t^* - t_* < \bar{T}$ достигло некоторого удовлетворимого множества

$$x(t^*) \in X^* = \{x \in R^n : \bar{g}_* \leq x(t^*) \leq \bar{g}^*\}, \quad (5)$$

с наименьшими затратами управляющих усилий на промежутке управления

$$\varphi(t^*) = \int_{t_*}^{t^*} b'|u(t)| dt \rightarrow \min. \quad (6)$$

² URL: www.worldvaluessurvey.org.

Динамическую систему (3) будем считать линейной:

$$\dot{x} = \mathbf{A}x(t) + u(t) + w(t). \quad (7)$$

Так, коэффициенты матрицы \mathbf{A} в (7) для общего случая $x = x(t) \in R^n$ можно определить с помощью имеющихся наблюдений в моменты времени $\bar{t}_1 < \bar{t}_2 < t_*$:

$$X_1(\bar{t}_1) = \{x_1^j(\bar{t}_1), j = \overline{1, p}\}, \quad X_2(\bar{t}_1) = \{x_2^j(\bar{t}_1), j = \overline{1, p}\}, \quad \dots, \quad X_n(\bar{t}_1) = \{x_n^j(\bar{t}_1), j = \overline{1, p}\}; \quad (8)$$

$$X_1(\bar{t}_2) = \{x_1^j(\bar{t}_2), j = \overline{1, p}\}, \quad X_2(\bar{t}_2) = \{x_2^j(\bar{t}_2), j = \overline{1, p}\}, \quad \dots, \quad X_n(\bar{t}_2) = \{x_n^j(\bar{t}_2), j = \overline{1, p}\},$$

$$x_1 = \psi(x_1^j, j = \overline{1, p}), \quad x_2 = \psi(x_2^j, j = \overline{1, p}), \quad x_n = \psi(x_n^j, j = \overline{1, p}), \quad (9)$$

и, используя многофакторную линейную регрессию, прийти к соотношению

$$\frac{x_i(\bar{t}_2) - x_i(\bar{t}_1)}{\bar{t}_2 - \bar{t}_1} = a_{i0} + a_{i1}x_1(\bar{t}_1) + \dots + a_{i-1}x_{i-1}(\bar{t}_1) + a_{i+1}x_{i+1}(\bar{t}_1) + \dots + a_{in}x_n(\bar{t}_1), \quad i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Поясним, что в качестве состояния x_i в формулах (9) – (10) мы рассматриваем агрегированный показатель, характеризующий социокультурного актора, выраженного коллективом (например, гражданами страны), однако измерения мы проводим, опрашивая некоторую выборку единиц коллектива $\{x_i^j, j = \overline{1, p}\}$ (граждан для страны) (8), и далее получаем агрегированное значение $x_i = \psi(x_i^j, j = \overline{1, p})$, которым, как правило, является среднее значение

$$x_i = \psi(x_i^j, j = \overline{1, p}) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_i^j. \quad (11)$$

При этом для построения коэффициентов регрессии, использованных в (10), и соответственно коэффициентов матрицы \mathbf{A} в (7) используются значения выборок $\{x_i^j, j = \overline{1, p}\}$, $i = \overline{1, n}$ (8), а в самой модели (7) задействованы агрегированные переменные (9), (11).

Далее ошибки моделирования (9), (10), а также действующие на систему неизвестные возмущения обобщим ограниченной функцией $w(t)$, которую будем считать кусочно-непрерывной:

$$w(t) \in W(\cdot) = \{w(t) \in R^n: \omega_* \leq w(t) \leq \omega^*\}. \quad (12)$$

Поскольку любые ресурсы управления исчерпываемы, то управляющее воздействие также будет ограниченным:

$$u(t) \in U(\cdot) = \{u(t) \in R^n: u_* \leq u(t) \leq u^*\}. \quad (13)$$

В рассматриваемом нами случае регулирования социокультурного процесса формирования ценностных ориентиров актора социокультурного пространства управляющим ресурсом выступают соответствующие информационные потоки, обеспечение которых, во-первых, затратно, а во-вторых, при слишком большой насыщенности может привести к эффекту информационного переизбытка, что также приводит к ограничениям (13) на управляющие воздействия.

Как мы видим из методологии построения социокультурных показателей, их значения всегда ограничены минимумом и максимумом шкалы:

$$x(t) \in X(t) = \{x \in R^n: g_* \leq x(t) \leq g^*\}. \quad (14)$$

Измерения, реализуемые опросами, не гарантируют точность, что отражено измерительным устройством (3), (4), и должно быть учтено для начального состояния:

$$x(t_*) = x_0 \in X_* = \{x \in R^n: g_{0*} \leq x(t) \leq g_{0}^*\}. \quad (15)$$

Таким образом, задачу регулирования социокультурного процесса формирования ценностных ориентиров актора социокультурного пространства можно свести к оптимальному управлению линейной динамической системой по неточным измерениям состояний объекта управления (рисунок 2).

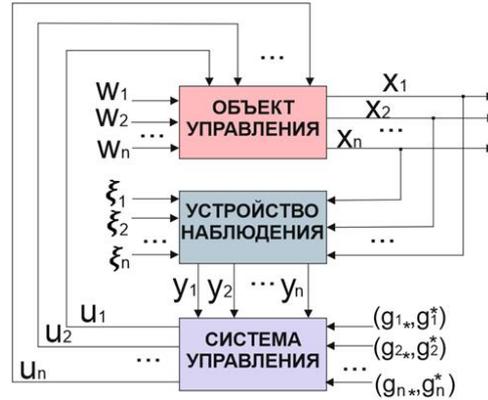


Рисунок 2. – Управление системой по неточным измерениям состояний объекта управления

4. Терминальная задача оптимального управления по неточным измерениям состояний системы управления. Обобщив основные уравнения (3) – (7), (12) – (15), полученные в результате моделирования управления социокультурным процессом, приходим к терминальной задаче оптимального управления по неточным измерениям состояний системы управления:

$$\begin{aligned} \varphi(t^*) &= \int_{t_*}^{t^*} b' |u(t)| dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} = Ax(t) + u(t) + w(t), \quad t \in T = [t_*, t^*]; \\ u(t) \in U(\cdot) &= \{u(t) \in R^n: u_* \leq u(t) \leq u^*\}; \quad w(t) \in W(\cdot) = \{w(t) \in R^n: \omega_* \leq w(t) \leq \omega^*\}; \\ x(t) \in X(t) &= \{x(t) \in R^n: g_* \leq x(t) \leq g^*\}; \quad y(t) = x(t) + \xi(t), \quad \xi_* \leq \xi(t) \leq \xi^*; \\ x(t_*) &= x_0 \in X_* = \{x \in R^n: g_{0*} \leq x \leq g_0^*\}; \quad x(t^*) \in X^* = \{x \in R^n: \bar{g}_* \leq x(t^*) \leq \bar{g}^*\}, \end{aligned} \tag{16}$$

где $x(t) = (x_j(t), j = \overline{1, n}), t \in T$, – n -вектор состояния системы в момент времени t ;

A – $n \times n$ -матрица системы с заданными значениями;

b – заданный n -вектор весов целевой функции;

$u(t) = (u_i(t), i = \overline{1, n}), t \in T$, – значение управления, ограниченного условием (13);

$y(t) = (y_j(t), j = \overline{1, n}), t \in T$, – n -вектор измерений состояний системы в момент времени t ;

$w(t) = (w_i(t), i = \overline{1, n}), t \in T$, и $\xi(t) = (\xi_i(t), i = \overline{1, n})$ – неизвестные возмущение и ошибка измерений, которые могут реализовываться любыми кусочно-непрерывными функциями, значения которых удовлетворяют соответственно условиям (12) и (4);

$g_{0*}, g_0^* \in R^n; g_*, g^* \in R^n; \bar{g}_*, \bar{g}^* \in R^n; u_*, u^* \in R^n; \xi_*, \xi^* \in R^n; \omega_*, \omega^* \in R^n$ – заданные n -векторы.

Таким образом, априорная неопределенность системы управления характеризуется неизвестным начальным состоянием x_0 , принадлежащим ограниченному множеству X_* , ошибками измерений в пределах от ξ_* до ξ^* и множеством ограниченных кусочно-непрерывных функций $W(\cdot)$. Построение решения задач типа (16) невозможно в явном виде до начала процесса управления. В этом случае используются алгоритмы для построения дискретной управляющей последовательности в режиме реального времени [5]. Другими словами, задача (16) погружается в класс задач генерации оптимального управления с обратной связью, требующих доступности измерений состояний управляемой системы (16) в некоторые дискретные моменты времени периода T . Следуя логике, представленной в [11], для моделей управления динамическими системами регулирования ценностных ориентиров актора социокультурного пространства в условиях точных измерений его состояний, погрузим задачу (16) в класс задач с дискретными управлениями

$$u(t) = u(t_* + kh), \quad t \in [t_* + kh, t_* + (k+1)h], \quad k = \overline{0, N-1}, \quad h = \frac{t^* - t_*}{N}, \tag{17}$$

при условии, что в дискретные моменты времени $t_* + kh, k = \overline{0, N-1}$, осуществляются неточные измерения состояний системы с помощью измерительного устройства (3), (4)

$$y(t_* + kh) = x(t_* + kh) + \xi(t_* + kh), \quad \xi_* \leq \xi(t_* + kh) \leq \xi^*. \tag{18}$$

Тогда с учетом (17) задача (16) примет вид

$$\sum_{k=0}^{N-1} b' |u(t_* + kh)| \rightarrow \min, \quad (19)$$

$$\dot{x} = \mathbf{A}x(t) + u(t) + w(t), \quad y(t) = x(t) + \xi(t), \quad t \in T, \quad (20)$$

$$\xi_* \leq \xi(t) \leq \xi^*, \quad x_0 \in X_*, \quad u(t) \in U(\cdot), \quad w(t) \in W(\cdot), \quad x(t) \in X(\cdot), \quad x(t^*) \in X^*. \quad (21)$$

Многозначную функцию

$$X(\tau, t, u_\tau^t) = \{x(t | \tau, x_\tau, u_\tau^t(\cdot), w_\tau^t(\cdot)), x_\tau(\cdot) \in X_\tau^t(\cdot) \in W_\tau^t(\cdot) \in W_\tau^t(\cdot)\}, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} W_\tau^t &= \{w_\tau^t(\cdot) = (w(s): w(s) \in W), s \in T_\tau^t\}, \quad T_\tau^t = [\tau, t]; \\ T_\tau^t &= \{x_\tau^t(\cdot) = (x(s): x(s) \in X), s \in T_\tau^t\}, \quad T_\tau^t = [\tau, t], \end{aligned} \quad (23)$$

соответствующую управлению $u_\tau^t(\cdot) = (u(s), s \in [\tau, t])$ и множеству возмущений (23), назовем множеством траекторий системы (20) на временном интервале $T_\tau^t = [\tau, t]$, где $x(t | \tau, x_\tau, u_\tau^t(\cdot), w_\tau^t(\cdot))$ является индивидуальной траекторией детерминированной системы (20) с начальным состоянием $x_\tau = x(\tau)$, управлением $u_\tau^t(\cdot)$ и возмущением $w_\tau^t(\cdot)$. Другими словами, многозначная функция $X(\tau, t, u_\tau^t)$ (22) – это множество индивидуальных траекторий $x(t | \tau, x_\tau, u_\tau^t(\cdot), w_\tau^t(\cdot))$ детерминированной системы (20) с фиксированным состоянием $x_\tau = x(\tau)$ и управлением $u_\tau^t(\cdot)$ при всех возможных возмущениях $w_\tau^t(\cdot)$.

Дискретное управление $u(t | x_\tau)$, $t \in T_\tau^{t^*}$, назовем допустимым программным управлением (программой) для системы (20) на интервале $T_\tau^t = [\tau, t]$, если оно удовлетворяет ограничению (13) и соответствующее ему априорное распределение $X(t^*) = X(\tau, t^*, u_\tau^{t^*})$ терминального состояния $x(t^*)$ является подмножеством терминального множества (5):

$$u(t | x_\tau) \in U, \quad t \in T_\tau^{t^*} \quad \text{и} \quad X(\tau, t^*, u_\tau^{t^*}) \subset X^*. \quad (24)$$

Оптимальным программным управлением $u^0(t | x_\tau)$, $t \in T_\tau^{t^*}$, для системы (19) – (21) является управление (22), доступное на интервале $T_\tau^{t^*}$, которое минимизирует целевую функцию стоимости (19). Оптимальное программное управление $u^0(t | x_\tau)$, $t \in T_\tau^{t^*}$ не только с гарантией переводит систему на терминальное множество (5), но и обеспечивает наименьшее значение целевой функции (19) при наихудших реализациях $w_\tau^t(\cdot) \in W$ на промежутке времени $t \in T_\tau^{t^*}$. Построение оптимального управления по принципу обратной связи в реальном времени подразумевает построение оптимальных программных управлений $u^0(t | x_\tau)$, $t \in T_\tau^{t^*}$, в дискретные моменты времени $t \in T$ при неточных измеренных состояниях системы y_τ и их применение на интервале $t \in T_\tau^{\tau+kh}$. Вычисление оптимального управления с обратной связью обеспечивает уменьшение неопределенности системы за счет снижения накопленного эффекта возмущений и минимизации затрат в процессе управления.

5. Позиционная программная оптимизация и построение управления с обратной связью. Для построения оптимального управления $u^0(t)$, $t \in T = [t_*, t^*]$, с обратной связью в классе дискретных управлений (17) сведем задачу оптимизации недетерминированной системой (19) – (21) к задаче оптимального управления, детерминированной линейной системой. Для этого запишем индивидуальную траекторию системы (20) с помощью формулы Коши:

$$x(t | \tau, x_\tau, u_\tau^t(\cdot), w_\tau^t(\cdot)) = e^{\mathbf{A}(t-\tau)} x(\tau) + \int_\tau^t e^{\mathbf{A}(t-s)} u(s) ds + \int_\tau^t e^{\mathbf{A}(t-s)} w(s) ds, \quad t \in T_\tau^{t^*}. \quad (25)$$

Учитывая, что управление осуществляется в классе дискретных управлений (17), представим (25) в дискретном виде:

$$x(t | \tau, x_\tau, u_\tau^t(\cdot), w_\tau^t(\cdot)) = e^{A(t-\tau)} x(\tau) + \sum_{k=k_\tau}^{N_t} u(t_* + kh) \times \int_{t_*+kh}^{t_*+(k+1)h} e^{A(t-s)} ds + \sum_{k=k_\tau}^{N_t} w(t_* + kh) \times \int_{t_*+kh}^{t_*+(k+1)h} e^{A(t-s)} ds, \quad (26)$$

$$(k_\tau, N_t: t_* + kh = \tau; t_* + (N_t + 1)h = t; t, \tau \in \{t_* + kh, k = \overline{0, N-1}\}, t > \tau).$$

В дискретные моменты времени $t \in \{t_* + kh, k = \overline{1, N-1}\}, t > \tau$, доступны неточные измерения (18) состояний системы (20), которые, по сути, при допустимом управлении $u(t | x_\tau)$ должны удовлетворять условиям (5) и (14):

$$g_* \leq e^{A(t-\tau)} x(\tau) + \sum_{k=k_\tau}^{N_t} \left[(u(t_* + kh) + w(t_* + kh)) \times \int_{t_*+kh}^{t_*+(k+1)h} e^{A(t-s)} ds \right] + \xi(t) \leq g^*; \quad (27)$$

$$\bar{g}_* \leq e^{A(t^*-\tau)} x(\tau) + \sum_{k=k_\tau}^{N_t} \left[(u(t_* + kh) + w(t_* + kh)) \times \int_{t_*+kh}^{t_*+(k+1)h} e^{A(t-s)} ds \right] + \xi(t^*) \leq \bar{g}^*.$$

Исходя из неточно измеренного состояния системы $y(\tau)$ и ограничений на ошибку измерения (4), получаем

$$x(\tau) = y(\tau) - \xi(\tau).$$

Тогда условия (27) для построения допустимого гарантированного программного управления $u(t | x_\tau), t \in T_\tau^t$, в момент времени $\tau \in \{t_* + kh, k = \overline{1, N-1}\}$ примут вид

$$g_*(\tau, t) \leq \sum_{k=k_\tau}^{N_t} u(t_* + kh) \times \int_{t_*+kh}^{t_*+(k+1)h} e^{A(t-s)} ds \leq g^*(\tau, t), \quad t \in \{t_* + kh, k = \overline{1, N-1}\};$$

$$\bar{g}_*(\tau, t^*) \leq \sum_{k=k_\tau}^{N-1} u(t_* + kh) \times \int_{t_*+kh}^{t_*+(k+1)h} e^{A(t-s)} ds \leq \bar{g}^*(\tau, t^*),$$

где

$$g_*(\tau, t) = g_* - e^{A(t-\tau)} y(\tau) - \alpha_*(\tau, t) - \xi_*, \quad g^*(\tau, t) = g_* - e^{A(t-\tau)} y(\tau) - \alpha^*(\tau, t) - \xi^*, \quad (28)$$

$$\bar{g}_*(\tau, t^*) = \bar{g}_* - e^{A(t^*-\tau)} y(\tau) - \alpha^*(\tau, t^*) - \xi_*, \quad \bar{g}^*(\tau, t^*) = \bar{g}_* - e^{A(t^*-\tau)} y(\tau) - \alpha^*(\tau, t^*) - \xi^*, \quad (29)$$

$$\alpha_*(\tau, t) = - \max_{\xi_* \leq \xi \leq \xi^*} e^{A(t-\tau)} \xi + \min_{w(t) \in W, t \in T_\tau^t} \sum_{k=k_\tau}^{N_t} w(t_* + kh) \times \int_{t_*+kh}^{t_*+(k+1)h} e^{A(t-s)} ds, \quad (30)$$

$$\alpha^*(\tau, t) = - \min_{\xi_* \leq \xi \leq \xi^*} e^{A(t-\tau)} \xi + \max_{w(t) \in W, t \in T_\tau^t} \sum_{k=k_\tau}^{N_t} w(t_* + kh) \times \int_{t_*+kh}^{t_*+(k+1)h} e^{A(t-s)} ds. \quad (31)$$

Однако, учитывая наличие ошибок измерения (4) в процессе управления, полученный сигнал измерительного устройства $y(\tau)$ в момент времени τ может лежать на границе допустимого множества значений $x(\tau)$, определяемого ограничениями (20) – (21). Соответственно, порожаемое этим сигналом множество возможных состояний $x(\tau) \in X_y(\tau) = \{x : y(\tau) - \xi^* \leq x \leq y(\tau) - \xi_*\}$ системы управления (19) – (21) будет иметь точки, не принадлежащие множеству допустимых значений $x(\tau)$, и для корректировки ограничений (28) (по аналогии (29)) применяется следующий алгоритм:

$$g_*(\tau, t) := \min \left[g_*(\tau, t), g_*(\tau - h, t) - u(\tau - h) \int_{\tau-h}^{\tau} e^{A(t-s)} ds \right];$$

$$g^*(\tau, t) := \max \left[g^*(\tau, t), g^*(\tau - h, t) - u(\tau - h) \int_{\tau-h}^{\tau} e^{A(t-s)} ds \right], \quad \tau \neq t_*.$$

Таким образом, вычисление оптимальных программных управлений $u^0(t|x_\tau)$, $t \in T_\tau^*$, в моменты времени $\tau \in \{t_* + kh, k = 1, N-1\}$ сводится к решению детерминированной задачи линейного программирования:

$$\sum_{k=k_\tau}^{N-1} b^k |u(t_* + kh)| \rightarrow \min; \quad (32)$$

$$g_*(\tau, t) \leq \sum_{k=k_\tau}^{N-1} u(t_* + kh) \times \int_{t_*+kh}^{t_*+(k+1)h} e^{A(t-s)} ds \leq g^*(\tau, t), t \in T_\tau^* / t^*; \quad (33)$$

$$\bar{g}_*(\tau, t^*) \leq \sum_{k=k_\tau}^{N-1} u(t_* + kh) \times \int_{t_*+kh}^{t_*+(k+1)h} e^{A(t-s)} ds \leq \bar{g}^*(\tau, t^*). \quad (34)$$

Оптимальное управление типа обратной связи для исходной задачи (16) синтезируется в режиме реального времени по мере получения измерений состояний (18), вычислением оптимального программного управления $u^0(t|x_\tau)$, $t \in T_\tau^*$, для системы (32) – (34) и применением его на промежутке времени $[\tau, \tau + h]$. Для момента времени $\tau = t_*$ слагаемые (30), (31) примут вид

$$\alpha_*(t_*, t) = \min_{x \in X_*} (e^{A(t-t_*)} x) + \min_{w(t) \in W, t \in T_{t_*}^*} \sum_{k=0}^{N-1} w(t_* + kh) \times \int_{t_*+kh}^{t_*+(k+1)h} e^{A(t-s)} ds;$$

$$\alpha^*(t_*, t) = \max_{x \in X_*} (e^{A(t-t_*)} x) + \max_{w(t) \in W, t \in T_{t_*}^*} \sum_{k=0}^{N-1} w(t_* + kh) \times \int_{t_*+kh}^{t_*+(k+1)h} e^{A(t-s)} ds.$$

Алгоритмы решения задач типа (30) – (32), разработанные в рамках теории синтеза оптимальных систем [12] позволяют быстро решать задачи, корректируя решения, построенные на предыдущем шаге.

6. Регулирование ценностных ориентиров актора социокультурного пространства в условиях неточности диагностики. В качестве актора социокультурного пространства для рассматриваемого нами случая возьмем Республику Беларусь. Основываясь на данных таблицы 2 и рисунка 1, мы видим динамику роста показателя «индивидуализм» и динамику снижения показателя «долгосрочная перспектива» во временном интервале [1991, 2023]. Основываясь на рассуждениях пункта 3 и данных ресурса «The Culture Factor», определим параметры динамической системы управления (16) с состояниями $(x_1(t), x_2(t))$, соответствующими динамике развития показателей социокультурных измерений «индивидуализм» и «долгосрочная перспектива»:

$$\varphi(t^*) = \int_0^5 (0,6 \cdot u_1 + 0,4 \cdot u_2) dt \rightarrow \min, \quad (35)$$

$$\dot{x}_1(t) = -0,02 \cdot x_1(t) - u_1(t) + w_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = -0,013 \cdot x_2(t) + u_2(t) + w_2(t), \quad x_1(0) = 48, \quad x_2(0) = 53,$$

$$y(t) = x(t) + \xi(t), \quad \xi(t) \in E = \{\xi \in R^2, |\xi_j(t)| \leq 1\}, \quad w(t) \in W = \{w \in R^2, |w_j(t)| \leq 0,3\},$$

$$u(t) \in U = \{u(t) \in R^2 : 0 \leq u_1 \leq 3, 0 \leq u_2 \leq 4, t \in T\}, \quad x(t) \in X = \{x \in R^2, 0 \leq x_j \leq 100\}, t \in [0,5],$$

$$x(0) \in X^* = \{x \in R^2, |x_1 - 48| \leq 1, |x_2 - 53| \leq 1\}, \quad x(5) \in X^* = \{x \in R^2, 28 \leq x_1 \leq 43,65 \leq x_2 \leq 80\}.$$

Здесь веса целевой функции при $u(t)$ и ограничения $u(t) \in U$ определяют стоимость управляющего воздействия и ограничения в управляющих ресурсах соответственно. В качестве управляющего ресурса в данном примере мы рассматриваем агрегированные информационные потоки, оказывающие воздействие на формирование ценностных ориентиров общества как актора социокультурного пространства. В вычислительном эксперименте на промежутке времени 5 лет рассмотрено построение управляющих воздействий в реальном времени по неточным измерениям состояний, осуществляемым каждые полгода. В качестве возмущений $w(t) \in W$ и ошибок измерений $\xi(t) \in E$ были взяты кусочно-линейные функции, принимающие постоянные значения в соответствующих границах модели (35) на каждом ежемесячном интервале.

Для управляемой динамической системы (35), моделирующей процесс регулирования динамики ценностных ориентиров актора социокультурного пространства, построены оптимальное программное управление и управление с обратной связью (рисунок 3). Значения целевой функции, достигаемые на оптимальном программном управлении и оптимальном управлении с обратной связью, а также терминальные значения состояний системы (35) представлены в таблице 4, соответствующие траектории системы – на рисунке 4.

Таблица 4. – Результаты управления

T = 5	Оптимальное программное управление	Оптимальное управление с обратной связью
Значение целевой функции	31,2	27,4
$x_1(t_*)$ – индивидуализм	48	
$x_1(t^*)$ – индивидуализм	28 < 39,3 < 43	28 < 41,3 < 43
$x_2(t_*)$ – долгосрочная перспектива	53	
$x_2(t^*)$ – долгосрочная перспектива	65 < 68,3 < 80	65 < 66,6 < 80

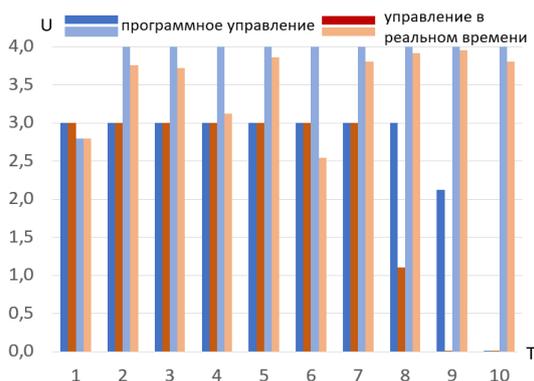


Рисунок 3. – Управляющие воздействия

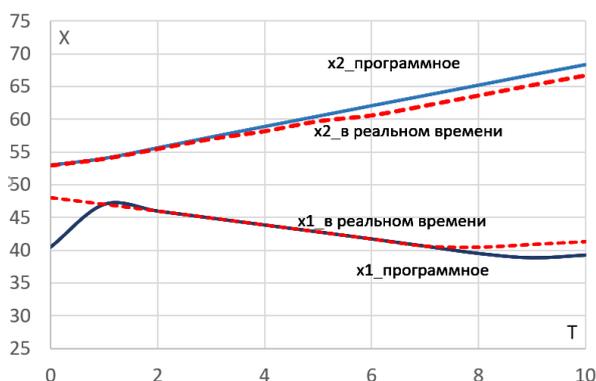


Рисунок 4. – Траектории управляемой системы

Как видно из проведенного эксперимента, управление с обратной связью позволяет значительно сократить расходы, связанные с управляющими воздействиями, достигая приемлемого результата. Для таких моделей необходимо тщательно планировать минимальные необходимые граничные терминальные значения траекторий регулируемого процесса, так как ключевая цель – сокращение расходов, что и обеспечивает оптимальное управление с обратной связью.

Заключение. Применение теории оптимального управления для регулирования социокультурных систем является достаточно новым направлением исследований. Это связано со сложностью построения самих динамических моделей социокультурных процессов и отслеживания результатов, поскольку помимо управляющих воздействий и учетных при моделировании факторов социум, как очень сложная система, генерирует ряд непредвиденных воздействий на управляемую систему, так называемых «черных лебедей» [13]. Однако само изучение динамики и влияния управляющих воздействий на социокультурный процесс помогает понять его основные тенденции и принимать более эффективные решения при регулировании развития социокультурного пространства. Современные системы интеллектуального анализа данных, включая информационные потоки социальных сетей, открывают возможности для применения алгоритмов оптимального управления к социокультурным системам для изучения динамики регулирования социокультурных процессов, таких, например, как развитие ценностных ориентиров общества, что может быть использовано для своевременной нейтрализации отрицательных ценностных тенденций. В данной работе мы предложили общие концепции и подходы применения теории оптимального управления, которые требуют дальнейшей проработки и развития для различных вариаций учета динамики и неопределенности социокультурных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Big data research guided by sociological theory: a triadic dialogue among big data analysis, theory, and predictive models / J. D. Luo, J. Liu, K. Yang et al. // The Journal of Chinese Sociology. – 2019. – Vol. 6, iss. 11. – Art. ID 11. – DOI: [10.1186/s40711-019-0102-4](https://doi.org/10.1186/s40711-019-0102-4).
2. Comissiong D. M. G., Sooknanan J. A review of the use of optimal control in social models // International Journal of Dynamic and Control. – 2018. – № 6. – P. 780–787. – DOI: [10.1007/s40435-018-0405-3](https://doi.org/10.1007/s40435-018-0405-3).
3. Teklu S. W., Terefe B. B. Mathematical modeling analysis on the dynamics of university students animosity towards mathematics with optimal control theory // Sci Rep. – 2022. – № 12. – Art. ID 11578. – DOI: [10.1038/s41598-022-15376-3](https://doi.org/10.1038/s41598-022-15376-3).
4. Lee S., Jung E., Castillo-Chavez C. Optimal control intervention strategies in low-and high-risk problem drinking populations // SocioEconomic Planning Sciences. – 2010. – Vol. 44., iss. 4. – P. 258–265. – DOI: [10.1016/j.seps.2010.07.006](https://doi.org/10.1016/j.seps.2010.07.006).
5. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Песецкая Т. И. Реализация в реальном времени оптимальных обратных связей по выходу для линейных систем в условиях неопределенности // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2005. – № 4. – С. 44–56.
6. Шакирова Е. Ю. Социокультурное пространство современности: основные характеристики // Культура. Духовность. Общество. – 2013. – № 7. – С. 174–180.

7. Hofstede G., Hofstede G. J., Minkov M. *Cultures and Organizations: Software of the Mind*. – 3rd ed. – McGraw Hill LLC, 2010. – 576 p.
8. Белогорцев В. Н. Социокультурный процесс: содержание и закономерности // Вестник РУДН. Серия: Философия. – 2009. – № 4. – С. 5–12.
9. Новикова Г. Н. Технологические основы социально-культурной деятельности: учеб. пособие. – М.: МГУКИ, 2010. – 158 с.
10. Minkov M., Kaasa A. Do dimensions of culture exist objectively? A validation of the revised Minkov-Hofstede model of culture with World Values Survey items and scores for 102 countries // *Journal of International Management*. – 2022. – Vol. 28, iss. 4. – Art. ID 100971. – DOI: [10.1016/j.intman.2022.100971](https://doi.org/10.1016/j.intman.2022.100971).
11. Pesetskaya, T. Real-Time Feedback Control Models for Regulating Values Development of the Social Actors // 2023 International Conference on Electrical, Communication and Computer Engineering (ICECCE), Dubai, United Arab Emirates. – IEEE, 2023. – P. 1–6. – DOI: [10.1109/ICECCE61019.2023.10442426](https://doi.org/10.1109/ICECCE61019.2023.10442426).
12. Габасов Р., Кириллова Ф. М. О проблеме синтеза оптимальных систем // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2015. – № 14. – С. 55–63.
13. Талей Н. Н. Черный лебедь. Под знаком непредсказуемости. – М.: КоЛибри, 2007. – 736 с.

REFERENCES

1. Luo, J. D., Liu, J., Yang, K., & Fu, X. (2019). Big data research guided by sociological theory: a triadic dialogue among big data analysis, theory, and predictive models. *The Journal of Chinese Sociology*, 6(11), 11. DOI: [10.1186/s40711-019-0102-4](https://doi.org/10.1186/s40711-019-0102-4).
2. Comissiong, D. M. G., & Sooknanan, J. A. (2018) Review of the use of optimal control in social models. *International Journal of Dynamic and Control*, (6), 780–787. DOI: [10.1007/s40435-018-0405-3](https://doi.org/10.1007/s40435-018-0405-3).
3. Teklu, S. W., & Terefe, B. B. (2022). Mathematical modeling analysis on the dynamics of university students animosity towards mathematics with optimal control theory. *Sci Rep*, (12), 11578. DOI: [10.1038/s41598-022-15376-3](https://doi.org/10.1038/s41598-022-15376-3).
4. Lee, S., Jung, E., & Castillo-Chavez, C. (2010). Optimal control intervention strategies in low-and high-risk problem drinking populations. *SocioEconomic Planning Sciences*, 44(4), 258–265. DOI: [10.1016/j.seps.2010.07.006](https://doi.org/10.1016/j.seps.2010.07.006).
5. Gabasov, R., Kirillova, F. M., & Pesetskaya, T. I. (2005). Real-time realization of optimal output feedbacks for linear systems under uncertainty. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 44(4), 542–554.
6. Shakirova, E. Ju. (2013). Sociokul'turnoe prostranstvo sovremennosti: osnovnye harakteristiki. *Kul'tura. Duhovnost'. Obshchestvo*, (7), 174–180. (In Russ.).
7. Hofstede, G., Hofstede, G. J., & Minkov, M. (2010). *Cultures and Organizations: Software of the Mind* (3rd ed.). McGraw Hill LLC.
8. Belogorcev, V. N. (2009). Sociokul'turnyj process: sodержanie i zakonomernosti [Social and cultural process: subject matter and principles]. *Vestnik RUDN. Serija: Filosofija [RUDN Journal of Philosophy]*, (4), 5–12. (In Russ., abstr. in Engl.).
9. Novikova, G. N. (2010). *Tehnologicheskie osnovy social'no-kul'turnoj dejatel'nosti*. Moscow: Publ. MGUKI.
10. Minkov, M., & Kaasa, A. (2022). Do dimensions of culture exist objectively? A validation of the revised Minkov-Hofstede model of culture with World Values Survey items and scores for 102 countries. *Journal of International Management*, 28(4), 100971. DOI: [10.1016/j.intman.2022.100971](https://doi.org/10.1016/j.intman.2022.100971).
11. Pesetskaya, T. (2023). Real-Time Feedback Control Models for Regulating Values Development of the Social Actors. In 2023 International Conference on Electrical, Communication and Computer Engineering (ICECCE) (1–6). IEEE. DOI: [10.1109/ICECCE61019.2023.10442426](https://doi.org/10.1109/ICECCE61019.2023.10442426).
12. Gabasov, R., & Kirillova, F. M. (2015). O probleme sinteza optimal'nyh system [On the Optimal Synthesis Problem for Control Systems]. *Izvestija Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Matematika [The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics]*, (14), 55–63. (In Russ., abstr. in Engl.).
13. Taleb, N. N. (2007). *Chernyj lebed'. Pod znakom nepredskazuemosti*. Moscow: KoLibri. (In Russ.)

Поступила 10.03.2025

**DYNAMIC SYSTEM WITH FEEDBACK CONTROL MODEL
FOR THE SOCIO-CULTURAL PROCESS REGULATION
UNDER DIAGNOSTICS INACCURACY**

T. PESETSKAYA

(Belarusian State University of Culture and Arts, Minsk)

This paper examines the problem of modeling socio-cultural processes using dynamic control systems. The issues of describing a controlled object of socio-cultural space by a set of measurable indicators obtained by parameterizing qualitative characteristics are considered. Approaches to modeling the processes of regulating the value orientations of an actor in socio-cultural space to achieve socially significant goals using dynamic systems with feedback control are proposed. An algorithm for constructing optimal control with feedback in discrete time within constraints on control resources and measurements inaccuracy is developed. A model based on Hofstede's socio-cultural dimensions is considered as an example.

Keywords: regulation of processes in socio-cultural space, socio-cultural dimensions, dynamic control systems, feedback optimal control.

УДК 612.845.552: 004.932

DOI 10.52928/2070-1624-2025-44-1-25-31

МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЯРКОСТИ ИЗОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ ПОМОЩИ ЛЮДЯМ С АХРОМАТОПСИЕЙ В ВИЗУАЛЬНОМ ВОСПРИЯТИИ ИНФОРМАЦИИ

В. В. СИНИЦЫНА

(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск)

Проанализирована такая редкая и тяжелая аномалия цветового зрения, как ахроматопсия, а также изучены существующие методы, предназначенные для помощи ахроматопам в корректном восприятии визуальной информации. Представлен разработанный метод преобразования яркости изображений, направленный на помощь людям с полной ахроматопсией в различении схожих в их восприятии цветов, где сходство определяется согласно показателю порога цветоразличения. Кроме того, в данном методе учитываются особенности цветовосприятия ахроматопов посредством предоставления возможности использования персонализированного коэффициента преобразования яркости. В результате проверки метода на корректность работы при помощи симуляции ахроматопического зрения отмечено увеличение колориметрического отклонения между ранее неразличимыми ахроматопами цветами и, соответственно, появление возможности отличать такие цвета друг от друга. Уменьшилась потеря контраста между исходным цветным изображением и рекolorизованным изображением в оттенках серого.

Ключевые слова: аномалии цветового зрения, особенности цветовосприятия, цветовая информация, ахроматопсия, колориметрическое отклонение, кластеризация, квантованные цвета, цветовые пространства, рекolorизация, яркость, оттенки серого.

Введение. На сегодняшний день ахроматопсия является наиболее тяжелым, но наименее распространенным видом аномалий цветового зрения, так как встречается лишь у 1 из 30 000 человек на земном шаре. Ахроматопсия бывает полной, при которой наблюдается абсолютное отсутствие восприятия цвета и такие сопутствующие заболевания, как нистагм и светобоязнь, и неполной, которая характеризуется незначительным цветоразличением, а нистагм и светобоязнь либо отсутствуют, либо проявляются в более легкой форме [1]. Наиболее распространенной является полная ахроматопсия. Кроме того, встречается как врожденная ахроматопсия, так и приобретенная. Приобретенная ахроматопсия именуется церебральной (или центральной) и связана с повреждением коры головного мозга [2]. В ICD-11 (International Classification of Diseases 11th Revision) ахроматопсия отнесена к нарушениям цветового зрения (код 9D44) и наследственным дистрофиям сетчатки (код 9B70)¹.

Ахроматопсия представляет собой аномалию цветового зрения, при которой наблюдается дисфункция колбочковой системы. Однако в темное время суток ахроматопы хорошо ориентируются в пространстве вследствие корректно функционирующих палочек, представляющих собой клетки-рецепторы сетчатки, чувствительные к силе света и действующие преимущественно при сумеречном или ночном зрении. Проблема же восприятия объектов людьми с ахроматопсией состоит в невозможности отличать объекты, оригинальные цвета которых различны, а преобразованные в оттенки серого – неразличимы. Кроме того, из-за таких сопутствующих заболеваний, как светобоязнь, нистагм, а также зачастую гиперметропия или, реже, миопия, ахроматопы обычно используют в повседневной жизни солнцезащитные очки, а также очки для коррекции гиперметропии или миопии.

В литературе описаны два основных метода, которые призваны помочь людям с ахроматопсией в корректном восприятии визуальной информации посредством изменения цветовых характеристик изображений. Метод, предложенный Rasche et al. [3], основывается на предположении, что воспринимаемая разница между любыми двумя цветами пропорциональна их соответствующей воспринимаемой разнице в оттенках серого цвета. Это предположение выражается в минимизации функции ошибок для гарантии того, что неразличимые цвета будут иметь различные значения яркости. Rasche et al.'s метод [4] дополняет предыдущий, используя целевую константу пропорциональности K . Идея данного метода состоит в сохранении постоянства яркости и контраста. Контраст не меняет своего значения благодаря сохранению относительного расстояния между каждой парой цветов. В Zhu et al.'s исследовании [5] указано, что для решения проблемы восприятия визуальной информации монохроматами также возможно использование методов преобразования изображений в оттенки серого для черно-белой печати.

Стоит отметить, что в существующих методах не указаны используемые последовательности обработки цветов, а также не уделено внимание помощи людям с ахроматопсией в возможности различать цвета, схожие в восприятии ахроматопов, но совершенно отличные в представлении нормальных трихроматов, не учитывается наличие у людей с ахроматопсией светобоязни.

Таким образом, цель исследования – разработать метод обработки изображений для помощи людям с полной ахроматопсией в восприятии визуальной информации, учитывающий преимущества и недостатки

¹ ICD-11 Coding Tool [website]. URL: https://icd.who.int/ct/icd11_mms/en/2025-01/.

существующих методов и особенности цветовосприятия ахроматопов. Ориентация на людей с полной ахроматопсией связана с большей распространенностью такой формы ахроматопсии, а также с отсутствием в литературе точных сведений, как именно человек с неполной ахроматопсией воспринимает окружающую его визуальную информацию.

Выделены следующие задачи исследования:

- на основании анализа существующих методов и особенностей полной ахроматопсии разработать метод обработки изображений для ахроматопов;
- применить разработанный метод к тестовому изображению и оценить полученные результаты по показателям качества;
- сделать выводы о корректности разработанного метода.

Метод обработки изображений для людей с ахроматопсией. Для преобразования изображений в оттенки серого цвета с целью их наиболее корректного восприятия людьми с ахроматопсией используется следующая последовательность действий.

1. Все преобразования происходят в цветовом пространстве CIE L*a*b*, так как колориметрическая система Lab данного пространства используется для оценки сходств и различий цветовых параметров объектов, что особенно важно для определения сходства цветов с целью их последующей модификации для помощи ахроматопама. Так, исходное изображение конвертируется из цветового пространства RGB в оттенки серого следующим образом: сперва загруженное изображение преобразуется в оттенки серого согласно алгоритму NTSC² вида

$$Y = 0.299 \cdot R + 0.587 \cdot G + 0.114 \cdot B, \quad (1)$$

затем данное изображение в оттенках серого конвертируется в цветовое пространство CIE L*a*b*.

2. Для уменьшения сложности вычислений с одновременным сохранением изображения в виде, наиболее близком к исходному, к полученному изображению в оттенках серого применяется кластеризация k -средних. Стоит отметить, что одним из ключевых параметров в данной кластеризации является так называемый флаг, указывающий, каким образом берутся начальные центры кластеров. Так, экспериментально определено, что наилучшие результаты показывает использование флага KMEANS_PP_CENTERS [6].

Так как при использовании данного вида кластеризации необходимо задать количество кластеров, в качестве решения используется следующее: константой задается выбранное в результате экспериментов значение количества кластеров $K = 100$. Данное значение было определено в процессе кластеризации изображений с количеством уникальных цветов, не превышающим 180 000, а также последующего сравнения детализации объектов на кластеризованном и исходном изображениях.

В случае же обработки изображения, для которого количество имеющихся цветов представлено числом, меньшим чем 100, среди квантованных значений будет довольно много близких друг к другу и даже одинаковых значений. Следовательно, необходимо удалить дубликаты, а также отсортировать квантованные цвета от меньшего значения яркости цвета к большему.

3. Найденные квантованные цвета следует определить в пары «ключ – значение» так, чтобы в одной паре находились цвета, полное отклонение которых друг от друга будет менее или равно 4 в оттенках серого, так как при пороге цветоразличения $\Delta E_{ab}^* \leq 4$ цвета воспринимаются как зрительно неразличимые [7], но больше 4 в исходном изображении. В качестве значения для соответствующего ключа будет взято первое из отсортированного списка квантованных цветов значение, удовлетворяющее данному условию. Кроме того, для сохранения в неизменном виде оттенков серого, имеющихся в исходном изображении, такие цвета не сохраняются в качестве цветов-ключей, а используются лишь как цвета-значения.

4. Затем значения яркостей цветов в таких парах меняются согласно следующему условию: если яркость цвета-ключа больше яркости цвета-значения, то к яркости цвета-ключа прибавляется разность коэффициента преобразования яркости Δ и разности яркостей ключа и значения, в противном случае от яркости цвета-ключа отнимается разность Δ и разности яркостей значения и ключа. Коэффициент Δ выбирается самим ахроматопом на основании просмотра изображения, причем минимальным значением считается порог цветоразличения, равный 4. Данное преобразование для некоторых яркостей L_{key} и L_{value} в общем виде выражается формулой

$$L'_{key} = L_{key} \pm (\Delta - |L_{key} - L_{value}|), \quad (2)$$

где $| |$ – модуль разности яркостей L_{key} и L_{value} ;

Δ – коэффициент преобразования яркости.

² Алгоритм NTSC (National Television Standards Committee) принят в качестве общего подхода для преобразования RGB в оттенки серого и направлен на обеспечение лучшей корреляции между светлотой и яркостью, воспринимаемой человеческим глазом, а также отражает относительное восприятие среднестатистическим человеком яркости красного, зеленого и синего света.

5. После вышеописанных действий каждой яркости цвета-ключа будет поставлено в соответствие новое значение. Так, при последовательном переборе всех новых значений яркостей цветов-ключей будет определяться, имеет ли разность между яркостями цветов-ключей значение меньше или равно 4, но при этом колориметрическое отклонение этих цветов в исходном изображении должно быть больше 4. Если данное условие соблюдается, то к большему значению яркости прибавляется разность Δ и разности яркостей цветов-ключей, в противном случае или цвета различимы, или в исходном изображении они схожи и нет необходимости в их преобразованиях.

6. Новые значения записываются вместо ранее используемых для изображения в оттенках серого, значения же для неквантованных цветов получаются в результате интерполирования.

7. Для вывода преобразованного изображения на экран устройства осуществляется переход из цветового пространства CIE L*a*b* в пространство RGB.

Блок-схема последовательности действий метода реколоризации представлена на рисунке 1.

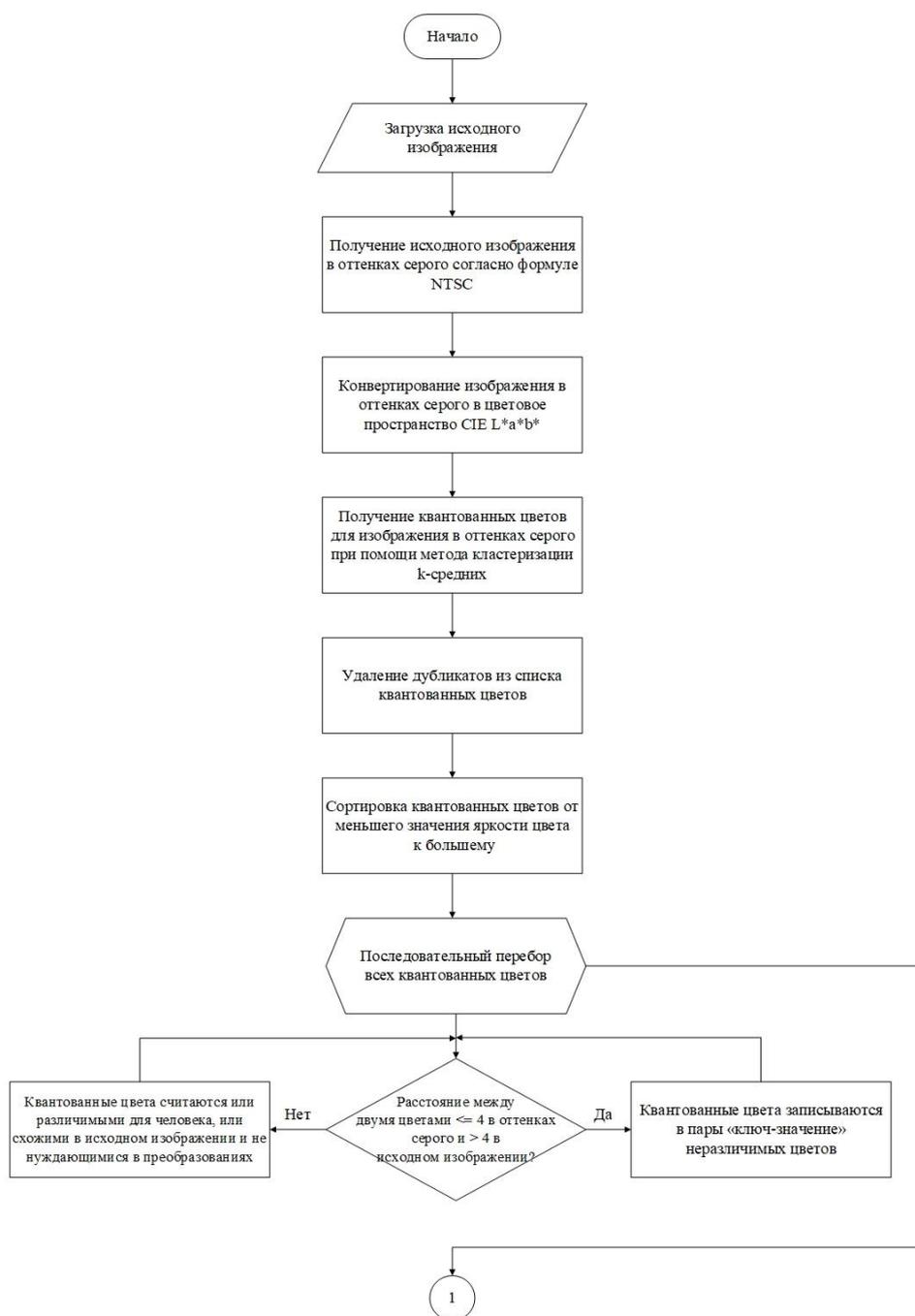


Рисунок 1. – Блок-схема метода преобразования изображения для людей с ахроматопсией (начало)

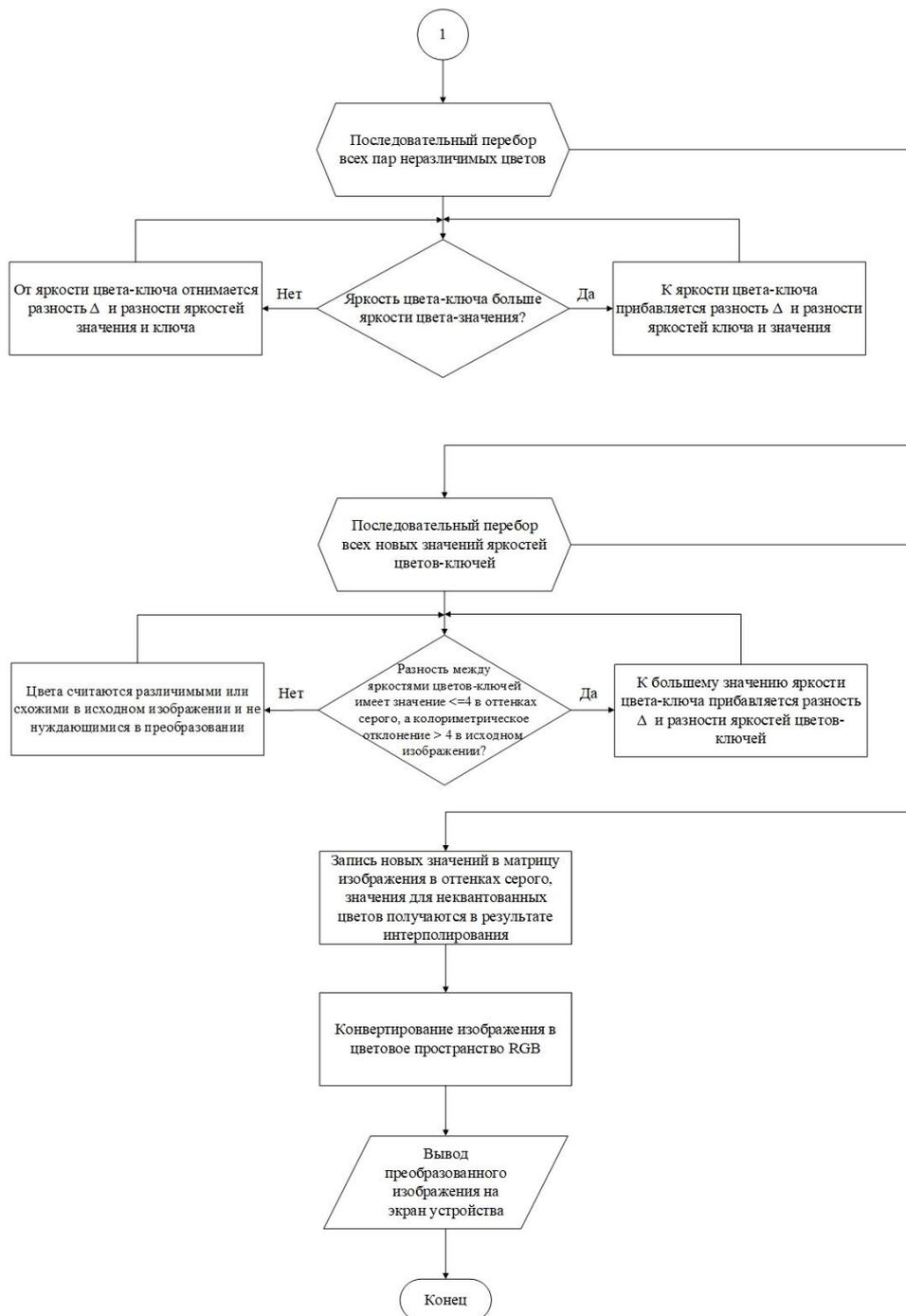


Рисунок 1. – Блок-схема метода преобразования изображения для людей с ахроматопсией (окончание)

Методика проведения эксперимента. Для оценки качества реколоризации необходимо:

1. Получить исходное тестовое изображение в таком виде, в котором оно воспринимается человеком с ахроматопсией, то есть в оттенках серого. Так, стандартным переходом к оттенкам серого является вычисление яркости Y для каждого пикселя, которое потом заменяет значения все трех координат в цветовом пространстве RGB. Данное преобразование осуществляется по формуле (1).
2. Применить к исходному изображению разработанный метод.
3. Получить реколоризованное изображение в таком виде, в котором оно воспринимается человеком с ахроматопсией, что возможно благодаря конвертации реколоризованного изображения в оттенки серого согласно (1).
4. Проверить восприятие реколоризованного изображения, к которому была применена формула (1) для симуляции зрения ахроматопов, через солнцезащитные очки. Линзы солнцезащитных очков имеют

светопропускание от 8 до 18 %, не являются поляризованными, не обладают антибликовым покрытием, не имеют цветных фильтров.

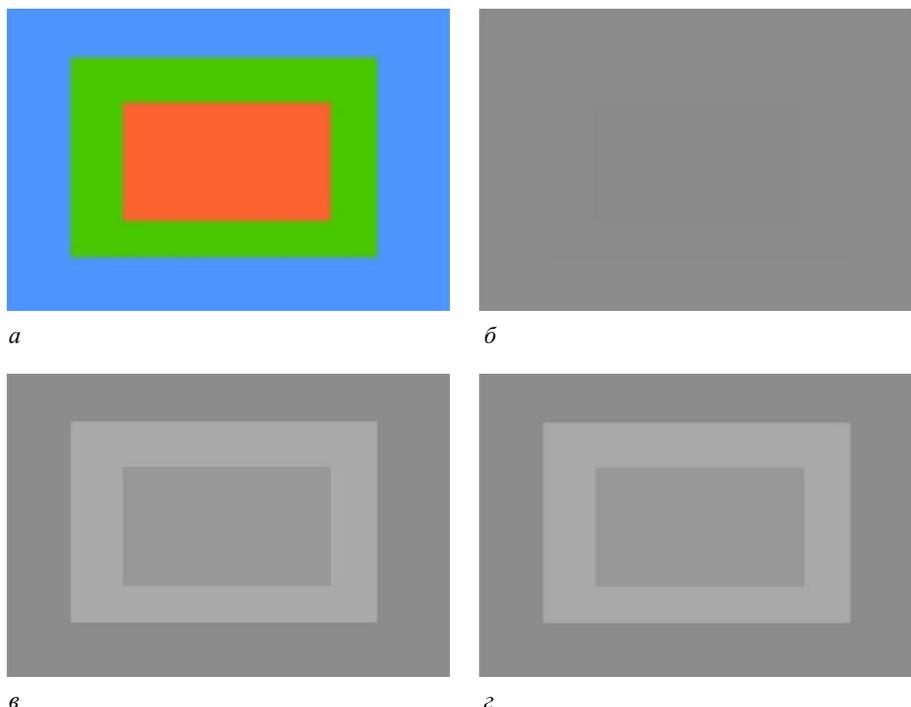
5. Оценить качество реколоризации: отметить, стали ли лучше различимы ранее неразличимые объекты.

Для объективной оценки качества реколоризации используются вычисленные для каждого пикселя изображения функции ошибок, определяющие потери контраста [8]. Данные функции позволяют количественно определить, насколько сопоставима разница между любыми парами цветов в исходном цветном изображении с соответствующей целевой разницей в изображении в оттенках серого. Определена каждая функция ошибок с использованием среднеквадратичного взвешенного значения RWMS (root weighted mean square):

$$rwms_q(i) = \sqrt{\frac{1}{\|K\|} \sum_{j \in Q} \frac{\|K_j\|}{\delta_{ij}^{q^2}} \left(\delta_{ij}^q - |lum(c_i) - lum(q_j)| \right)^2}, \quad (3)$$

- где $rwms(i)$ – ошибка, вычисленная для i -го пикселя исходного цветного изображения I ;
 K – набор всех пикселей в цветном изображении I ;
 $\|K\|$ – число пикселей в цветном изображении I ;
 c_i – цвет i -го пикселя цветного изображения I ;
 $K_j \subset K$ – кластер пикселей, представленных квантованным цветом q_j ;
 $\delta_{ij}^q = (G_{range} / Q_{range}) \|c_i - q_j\|$ – целевая разница в уровнях серого для пар цветов c_i и q_j ;
 lum – функция, которая возвращает компонент L^* реколоризованного цвета в оттенках серого;
 G_{range} – постоянное значение, равное 100;
 Q – многообразие всех квантованных цветов;
 Q_{range} – максимальное расстояние между любыми двумя квантованными цветами в Q .

Результаты и их обсуждение. Для выполнения субъективной оценки качества реколоризации были произведены преобразования тестового изображения в оттенки серого согласно (1), реколоризация данного изображения согласно разработанному методу, а также конвертация реколоризованного изображения в оттенки серого по формуле (1). Исходное тестовое изображение, а также все вышеупомянутые преобразования представлены на рисунке 2.

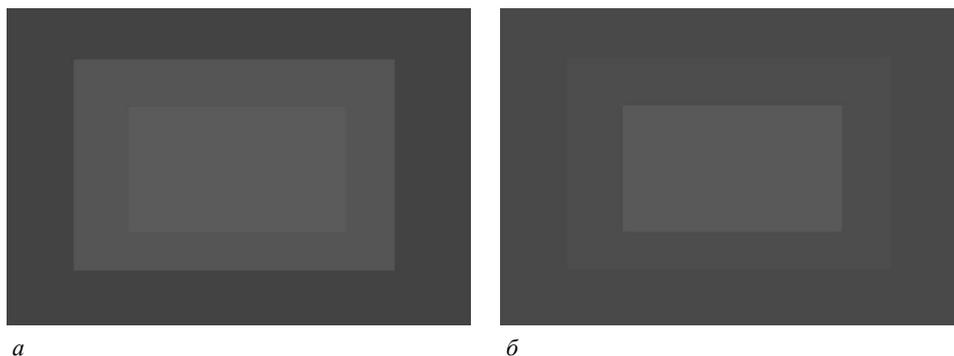


a – исходное изображение; b – исходное изображение в оттенках серого;
 v – реколоризованное изображение; z – реколоризованное изображение в оттенках серого

Рисунок 2. – Различные представления тестового изображения

В рамках данных преобразований тестового изображения использовано значение коэффициента преобразования яркости, равное 15. На основании оценки восприятия полученных результатов нормальным трихроматом посредством рассмотрения реколоризованного изображения, а также реколоризованного изображения, конвертированного в оттенки серого с использованием (1), что симулирует восприятие изображения человеком с ахроматопсией, определено, что возможность отличать друг от друга объекты, имеющие схожее представление в оттенках серого, но различное в исходном изображении, улучшилась, а также не произошло осветление темных участков изображения и затемнение светлых. Кроме того, восприятие реколоризованного изображения не ухудшилось при рассмотрении данного изображения через солнцезащитные очки.

Результаты преобразования оценивались по функциям ошибок, расчет которых для каждого пикселя исходного тестового изображения в оттенках серого и реколоризованного изображения в оттенках серого произведен по формуле (3). Полученные значения для каждого изображения были записаны в соответствующие матрицы и выведены в качестве изображений в оттенках серого, представленных на рисунке 3.



а – функции ошибок для исходного изображения в оттенках серого;
б – функции ошибок для реколоризованного изображения в оттенках серого

Рисунок 3. – Функции ошибок в виде изображений в оттенках серого для тестового изображения

Так как значения функций ошибок не превышают 1, что позволяет получить лишь изображение с практически черными пикселями, значение каждой функции умножается на 100 для сравнения данных значений визуально. В реколоризованном изображении функции ошибок для большинства пикселей уменьшили свои значения, что видно по более затемненным областям изображения.

Заключение. Разработан метод преобразования яркости изображений для помощи людям с полной ахроматопсией, учитывающий особенности цветовосприятия ахроматопов посредством использования персонализированного коэффициента преобразования яркости, а также направленный на помощь людям с ахроматопсией в различении цветов, схожих в восприятии ахроматопов, но отличных в представлении нормальных трихроматов, где сходство определяется согласно показателю порога цветоразличения. Кроме того, использование данного метода применимо для помощи в восприятии визуальной информации ахроматопами, носящими солнцезащитные очки ввиду имеющейся у них светобоязни. Разработанный метод позволяет улучшить восприятие информации ахроматопами посредством увеличения колориметрического отклонения между ранее неразличимыми ими цветами, что подтверждается результатами проверки метода на корректность работы при помощи симуляции ахроматопического зрения. Также стоит отметить уменьшение потери контраста между исходным цветным изображением и его реколоризованной версией в оттенках серого по сравнению с соответствующей потерей контраста между исходным цветным изображением и его версией, преобразованной в оттенки серого.

ЛИТЕРАТУРА

1. Achromatopsia: clinical features, molecular genetics, animal models and therapeutic options / N. Hirji, J Aboshiha., M. Georgiou et al. // *Ophthalmic Genetics*, 2018. – Vol. 39, iss. 2. – P. 149–157. – DOI: [10.1080/13816810.2017.1418389](https://doi.org/10.1080/13816810.2017.1418389).
2. Bartolomeo P., Bachoud-Levi A.-C., Schotten M. T. The anatomy of cerebral achromatopsia: a reappraisal and comparison of two case reports // *Cortex*, 2014. – Vol. 56. – P. 138–144. – DOI: [10.1016/j.cortex.2013.01.013](https://doi.org/10.1016/j.cortex.2013.01.013).
3. Rasche K., Geist R., Westall J. Detail preserving reproduction of color images for monochromats and dichromats // *IEEE Computer Graphics and Applications*, 2005. – Vol. 25, iss. 3. – P. 22–30. – DOI: [10.1109/MCG.2005.54](https://doi.org/10.1109/MCG.2005.54).
4. Rasche K., Geist R., Westall J. Re-coloring images for gamuts of lower dimension // *Computer Graphics Forum*, 2005. – Vol. 24, iss. 3. – P. 423–432. – DOI: [10.1111/j.1467-8659.2005.00867.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-8659.2005.00867.x).
5. Zhu Z., Mao X. Image Recoloring for Color Vision Deficiency Compensation: a Survey // *The Visual Computer*, 2021. – Vol. 37. – P. 2999–3018. – DOI: [10.1007/s00371-021-02240-0](https://doi.org/10.1007/s00371-021-02240-0).

6. Arthur D., Vassilvitskii S. K-Means++: The Advantages of Careful Seeding // Proc. of the Eighteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2007 / New Orleans, Louisiana, USA (7–9 January 2007). – P. 1027–1035.
7. Лютов В. П., Четверкин П. А., Головастик Г. Ю. Цветоведение и основы колориметрии. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2023. – 224 с.
8. Kuhn G. R., Oliveira M. M., Fernandes L. A. F. An improved contrast enhancing approach for color-to-grayscale mappings // The Visual Computer, 2008. – Vol. 24, iss. 7–9. – P. 505–514. – DOI: [10.1007/s00371-008-0231-2](https://doi.org/10.1007/s00371-008-0231-2).

REFERENCES

1. Hirji, N., Aboshiha, J., Georgiou, M., Bainbridge, J., & Michaelides, M. (2018). Achromatopsia: clinical features, molecular genetics, animal models and therapeutic options. *Ophthalmic Genetics*, 39(2), 149–157. DOI: [10.1080/13816810.2017.1418389](https://doi.org/10.1080/13816810.2017.1418389).
2. Bartolomeo, P., Bachoud-Levi, A.-C., & Schotten, M. T. (2014). The anatomy of cerebral achromatopsia: a reappraisal and comparison of two case reports. *Cortex*, (56), 138–144. DOI: [10.1016/j.cortex.2013.01.013](https://doi.org/10.1016/j.cortex.2013.01.013).
3. Rasche, K., Geist, R., & Westall, J. (2005). Detail preserving reproduction of color images for monochromats and dichromats. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 25(3), 22–30. DOI: [10.1109/MCG.2005.54](https://doi.org/10.1109/MCG.2005.54).
4. Rasche, K., Geist, R., & Westall, J. (2005). Re-coloring images for gamuts of lower dimension. *Computer Graphics Forum*, 24(3), 423–432. DOI: [10.1111/j.1467-8659.2005.00867.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-8659.2005.00867.x).
5. Zhu, Z., & Mao, X. (2021). Image Recoloring for Color Vision Deficiency Compensation: a Survey. *The Visual Computer*, (37), 2999–3018. DOI: [10.1007/s00371-021-02240-0](https://doi.org/10.1007/s00371-021-02240-0).
6. Arthur, D., & Vassilvitskii, S. (2007). K-Means++: The Advantages of Careful Seeding. In *Proc. of the Eighteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2007* (1027–1035). New Orleans, Louisiana, USA.
7. Lyutov, V. P., Четверкин, П. А., & Головастик, Г. Ю. (2023). *Tsvetovedenie i osnovy kolorimetrii* (3rd ed.). Moscow: Yurait. (In Russ.).
8. Kuhn, G. R., Oliveira, M. M., & Fernandes, L. A. F. (2008). An improved contrast enhancing approach for color-to-grayscale mappings. *The Visual Computer*, 24(7–9), 505–514. DOI: [10.1007/s00371-008-0231-2](https://doi.org/10.1007/s00371-008-0231-2).

Поступила 27.10.2024

**METHOD OF IMAGE BRIGHTNESS CONVERSION TO HELP PEOPLE
WITH ACHROMATOPSIA IN VISUAL PERCEPTION OF INFORMATION**

V. SINITSYNA

(Belarussian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk)

The article considers such a rare and severe anomaly of color vision as achromatopsia, and analyzes existing methods designed to help achromatopes in the correct perception of visual information. The developed method of image brightness transformation is presented, aimed at helping people with complete achromatopsia in distinguishing similar colors in their perception, where the similarity is determined according to the color discrimination threshold indicator. In addition, this method takes into account the features of color perception of achromatopes by providing the ability to use a personalized brightness transformation coefficient. As a result of checking the method for correctness of operation using the simulation of achromatopic vision, an increase in the colorimetric deviation between colors previously indistinguishable by achromatopes was noted and, accordingly, the ability to distinguish such colors from each other appeared. The loss of contrast between the original color image and the recolored grayscale image is reduced.

Keywords: *color vision anomalies, color perception features, color information, achromatopsia, colorimetric deviation, clustering, quantized colors, color spaces, recoloring, brightness, grayscale.*

УДК 658.5:519.8

DOI 10.52928/2070-1624-2025-44-1-32-38

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОМЫШЛЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

канд. техн. наук, доц. В. А. ШИРОЧЕНКО, Н. П. СКРЫЛЕВ, В. А. НЕДЮХИН
(Белорусско-Российский университет, Могилев)

Проведен анализ постановки и решения задачи повышения эффективности производственного процесса многономенклатурного серийного производства машиностроительного предприятия. Рассмотрены особенности разработки математической модели на основе методов линейного программирования. Разработаны алгоритмы построения двойственной задачи для анализа дефицитности ресурсов на основе применения механизмов агрегирования и приведения. Показаны результаты исследований, проведенные на тестовом примере, который, несмотря на малые размерности, демонстрирует все особенности решения поставленной задачи. Результаты исследований воплощены в разработанной на кафедре АСУ Белорусско-Российского университета программной системе, которая проходит стадию испытаний, после чего будет готова к использованию на промышленном предприятии.

Ключевые слова: многономенклатурное производство, серийное производство, производственная мощность, задача линейного программирования, двойственная задача, анализ задачи линейного программирования, эффективность производства, программная система.

Введение. В современных экономических условиях для выживания и процветания предприятий очень важно обеспечивать и поддерживать их эффективность. Одним из путей повышения эффективности предприятий является оптимизация промышленного производства. Данная процедура является не разовым мероприятием, а представляет собой непрерывный процесс улучшения, направленный на повышение объемов производства, снижение затрат, улучшение качества, обеспечение безопасности и экологической устойчивости, а также укрепление конкурентоспособности.

Одним из важнейших условий высокой эффективности многономенклатурного серийного производства является обеспечение полной загрузки имеющегося оборудования, которая позволяет осуществлять выпуск максимального объема продукции при максимальном использовании имеющихся производственных мощностей [1].

Такая задача может быть поставлена и решена на основе применения методов линейного программирования (ЛП) [2; 3], когда в качестве целевой функции используется зависимость объемов производства от загрузки оборудования при ограничениях по фондам времени работы имеющегося на предприятии оборудования.

Кроме значений управляемых параметров в качестве решения задачи ЛП исследователя интересует анализ рассматриваемой ситуации, который может быть выполнен путем решения двойственной задачи [2]. Получаемые значения двойственной задачи представляют собой частные производные целевой функции по ресурсам прямой задачи и позволяют оценить степень влияния изменения их величин на эффективность производственного процесса.

Основная часть. Известно, что условием правильности построения двойственной задачи является равенство значений целевой функции прямой и двойственной задач [2]. Точка решения задачи ЛП расположена на пересечении дефицитных ресурсов. Однако если прямая задача является целочисленной, т. е. на управляемые параметры накладываются условия целочисленности, то точка решения может находиться внутри области допустимых решений и не будет соответствовать значению целевой функции двойственной задачи.

Между тем целочисленность задачи линейного программирования несколько не искажает положение плоскости (или гиперплоскости) целевой функции, а лишь делает ее состоящей из отдельных точек. Отсюда следует, что для проверки правильности построения двойственной задачи к целочисленной задаче ЛП необходимо снять ограничения целочисленности, решить ее и сравнить значения целевых функций. Если они совпадут, то двойственная задача построена правильно и ее решение соответствует искомым значениям.

Таким образом, можно однозначно утверждать, что целочисленность задачи линейного программирования несколько не усложняют процедуру ее анализа. В том случае, когда прямая задача построена как параметрическая, т. е. когда ресурсы или коэффициенты целевой функции ставятся в линейную зависимость от некоего параметра из внешней среды, возникают определенные сложности при построении двойственной задачи. Разберем их подробно.

При решении параметрической задачи, кроме того, что необходимо найти значения управляемых параметров, обеспечивающих экстремум целевой функции, дополнительно требуется найти значение внешнего параметра, при котором найденный экстремум имеет наибольшее или наименьшее значение. Достижение

данной цели требует проведения процедуры сканирования всех возможных решений в зависимости от значения внешнего параметра.

В том случае, когда внешний параметр влияет на величины ресурсов, его можно включить в список искомых параметров и решить задачу оптимизации без перебора его значений. Если же внешний параметр влияет на коэффициенты целевой функции или на значения коэффициентов в ограничениях, то включение его в список управляемых параметров делает задачу нелинейной. Это обстоятельство требует применения других методов решения и лишает нас возможности провести анализ задачи на основе двойственности.

В качестве примера рассмотрим производство двух достаточно простых изделий, технология изготовления которых представлена на рисунке 1.

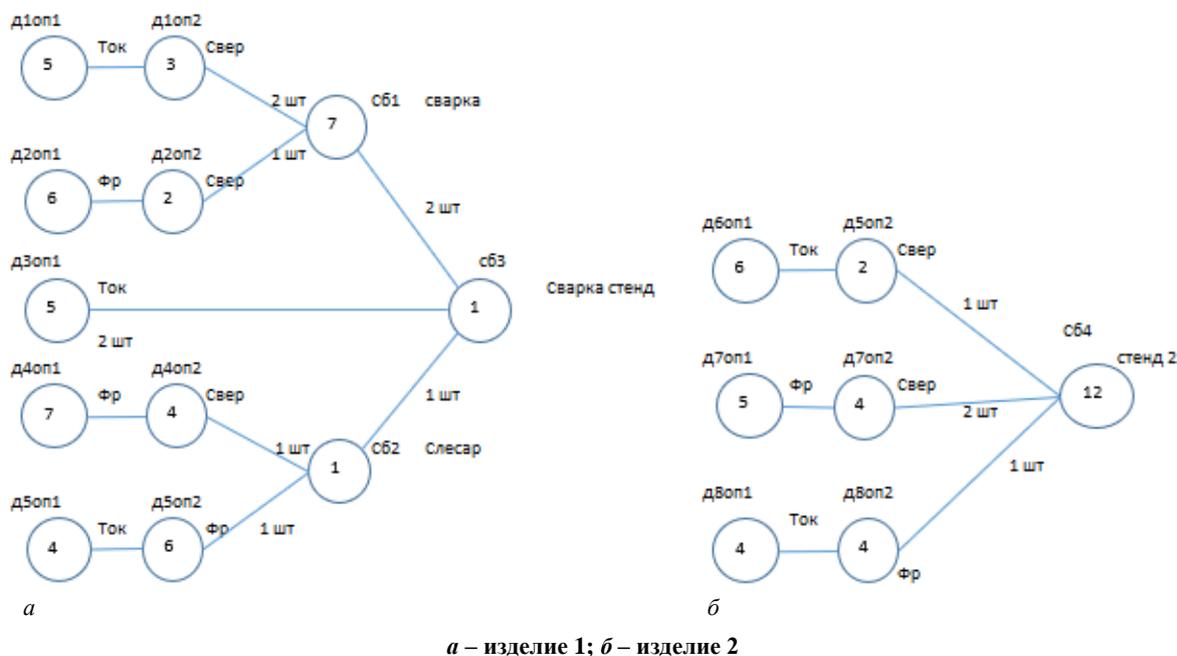


Рисунок 1. – Схема технологических маршрутов производства двух изделий

Первое изделие (см. рисунок 1, а) состоит из двух сборочных единиц СБ1 и СБ2 и одной детали Д3. Каждая сборочная единица состоит из двух деталей: первая – из деталей Д1 и Д2, вторая – из деталей Д4 и Д5. Технологические операции, выполняемые при изготовлении этих деталей, изображены кружками, внутри которых цифрой отмечена их длительность, а рядом приведены их обозначения: Ток – токарная операция, Фр – фрезерная, Свер – сверлильная, Слесар – сборочно-слесарная, Сварка – сборочно-сварочная, Сварка стенд – сборка конечного изделия на специальном стенде. Иерархию подчиненности конструктивных элементов показывают соединительные линии, рядом с которыми отображено количество составляющих. Второе изделие состоит из трех деталей: Д6, Д7 и Д8, сборка которых в готовое изделие осуществляется на стенде 2.

Необходимо распределить выполняемые операции по оборудованию таким образом, чтобы обеспечить максимальный суммарный выпуск продукции. Математически такая постановка задачи может быть записана следующим образом:

$$\sum_{j=1}^m t_{ij}x_{ij} \leq \Phi_j \text{ при } i = \overline{1, n}; \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq N_k n_k \text{ при } i = \overline{1, n}; \tag{2}$$

$$x_{ij} - \text{целые}; \tag{3}$$

$$F(x_{ij}) = \sum_{k=1}^K c_k N_k \rightarrow \max, \tag{4}$$

где n – количество технологических операций;
 m – количество единиц оборудования;
 t_{ij} – длительность i -й операции, выполняемой на j -м оборудовании;

Φ_j – фонд времени j -го оборудования;

N_k – количество произведенных k -х изделий;

x_{ij} – количество выполняемых i -х операций, закрепленных за j -м оборудованием;

$F(x_{ij})$ – аддитивная целевая функция;

c_k – коэффициенты целевой функции.

Решение задачи в исходном виде дает информацию о загрузке оборудования при максимальном объеме выпуска изделий (рисунок 2). В представленной на рисунке 2 таблице указано время, которое потрачено каждой единицей оборудования на производство максимального количества продукции. Для выполнения некоторых операций использовано несколько единиц оборудования, указанного в технологических картах как альтернативное.

			Фрезерный		Сверлильный		Токарный			Сварка		Слесарный		Стенд 1	Стенд 2
			Ф1	Ф2	Св1	Св2	Ток1	Ток2	Ток3	Свар1	Сл1	Сл1	Сл1	Ст1	Ст2
Сб3	1	17	Сб3											255	
Сб2	1	17	Сб2									170			
Сб1	2	34	Сб1							238					
Дет 1	2	68	Оп1д1				30	310							
		68	Оп2д1		0	204									
Дет 2	1	34	Оп1д2	0	204										
		34	Оп2д2		68	0									
Дет 3	2	34	Оп1д3					170	0						
Дет 4	1	17	Оп1д4	85	0										
		17	Оп2д4		68	0									
Дет 5	1	17	Оп1д5				0	0	68						
		17	Оп2д5	0	102										
Сб4	1	40	Сб4												480
Дет 6	1	40	Оп1д6				240	0							
		40	Оп2д6		80	0									
Дет 7	2	80	Оп1д7	230	170										
		80	Оп2д7		44	276									
Дет 8	1	40	Оп1д8					0	160						
		40	Оп2д8	156	4										
Затраты времени по оборудованию				471	480	260	480	270	480	228	238	170	255	480	
				<=	<=	<=	<=	<=	<=	<=	<=	<=	<=	<=	<=
Фонд времени по оборудованию				480	480	480	480	480	480	480	480	480	480	480	480

Рисунок 2. – Результаты решения оптимизационной задачи

Пересчитаем эти затраты таким образом, чтобы получить значения временных затрат по каждому изделию на соответствующих группах оборудования, на которых могут выполняться технологические операции при изготовлении этих деталей. Полученные данные приведены на рисунке 3.

		Фрезерный	Сверлильный	Токарный	Сварка	Слесарный	Стенд 1	Стенд 2
Изделие 1	Сб3						255	
	Сб2					170		
	Сб1				238			
	Дет 1		204	340				
	Дет 2	204	68					
	Дет 3			170				
	Дет 4	85	68					
	Дет 5	102		68				
	ΣТоп	391	340	578	238	170	255	0
ΣТоп/И1	23	20	34	14	10	15	0	
Изделие 2	Сб4							480
	Дет 6		80	240				
	Дет 7	400	320					
	Дет 8	160		160				
	ΣТоп	560	400	400	0	0	0	480
	ΣТоп/И2	14	10	10	0	0	0	12

Рисунок 3. – Пересчет временных затрат на изготовление одного изделия по группам оборудования

Используя полученные данные, можно составить упрощенную модель, в которой в качестве управляемых параметров используются значения объемов выпуска по изделиям, коэффициенты целевой функции приняты равными единице, а в качестве коэффициентов матрицы ограничений используются значения из таблицы на рисунке 3, представляющие собой приведенные затраты соответствующего оборудования на одно изделие. Полученная модель представлена уравнениями (5) и (6), решение задачи показано на рисунке 4.

$$F(N_k) = \sum_{k=1}^K c_k N_k \rightarrow \max, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^n T_{\text{обор } i} N_k \leq \Phi_i \text{ при } i = \overline{1, n}; \tag{6}$$

N_k – целые,

- где k – количество видов изготавливаемых изделий;
 n – количество типов оборудования;
 $T_{\text{обор } i}$ – суммарная длительность операций, выполняемых на оборудовании i -го типа при изготовлении изделий k -го вида;
 Φ_j – суммарный фонд времени i -го оборудования;
 N_k – количество произведенных k -х изделий;
 $F(N_k)$ – аддитивная целевая функция;
 c_k – коэффициенты целевой функции.

	И1	И2				
Управляемые параметры			17	40		
Коэффициенты целевой функции			1	1		
				57		
	Матрица коэффициентов			Значение целевой функции		
Фрезерный	23	14	951	<=	Фонд времени	960
Сверлильный	20	10	740	<=	960	
Токарный	34	10	978	<=	1440	
Сварка	14	0	238	<=	480	
Слесарный	10	0	170	<=	480	
Стенд 1	15	0	255	<=	480	
Стенд 2	0	12	480	<=	480	

Рисунок 4. – Постановка упрощенной задачи

В приведенном решении для каждой строки матрицы коэффициентов ограничений указано значение времени, затрачиваемого на изготовление одного изделия соответствующей группой станков. Справа от матрицы коэффициентов записаны вычисленные значения затрат на полный объем производства изделий, еще правее – фонд времени по данным группам оборудования.

На рисунке 5 полученное решение показано графически: в качестве осей графика приняты значения выпускаемых изделий, а в качестве ограничений – ресурсы времени работы оборудования, т. е. его фонды времени, область допустимых решений, ограниченная точками А, С, D, E, G, и вектор градиент F.

Для анализа результатов решения построим двойственную задачу ЛП, правила построения которой хорошо известны [3]. Решение двойственной задачи представлено на рисунке 6.

Из результатов видно, что значение целевой функции, которое в этой задаче минимизируется, несколько отличается от значения целевой функции прямой задачи. Это обусловлено целочисленностью прямой задачи и не свидетельствует о неправомерности ее построения.

Полученное решение в виде частных производных целевой функции прямой задачи по ресурсам говорит о том, что изменение только двух ресурсов оказывает влияние на значение целевой функции. Это фонд времени работы фрезерного оборудования и стенда 2, на котором осуществляется сборка изделия 2. Однако, как видно из рисунка 5, точка решения прямой задачи линейного программирования, строго говоря, ограничивается только одним из них.

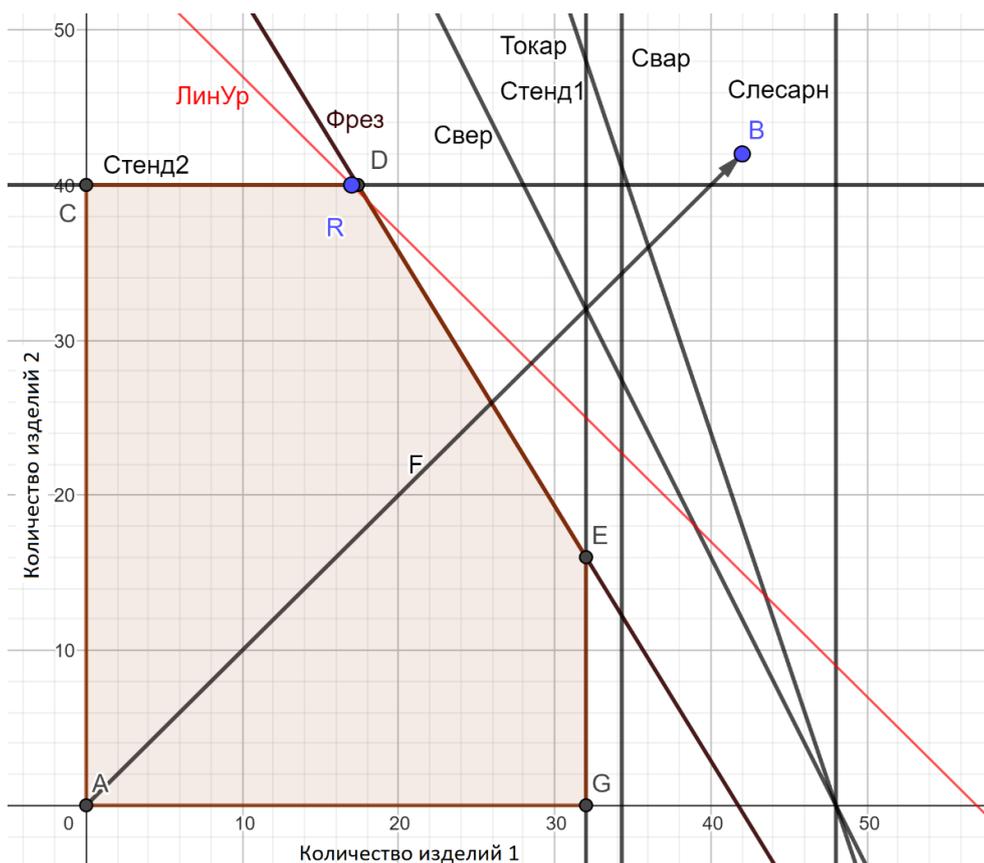


Рисунок 5. – Графическое представление задачи максимизации объемов производства

	Фрезерный	Сверлильный	Токарный	Сварка	Слесарный	Стенд 1	Стенд 2	
Решения	0,043	0	0	0	0	0	0,033	
Ресурсы	960	960	1440	480	480	480	480	Целевая функция 57,3913
Транспонированная матрица коэффициентов								
	23	20	34	14	10	15	0	1 >= 1
	14	10	10	0	0	0	12	1 >= 1

Рисунок 6. – Решение двойственной задачи линейного программирования

Фонд времени функционирования станда 2 действительно использован полностью, но фонд времени работы фрезерного оборудования остается недоиспользованным. Однако оставшегося недоиспользованного времени все же недостаточно для увеличения объема производства, что объясняется дискретностью задачи. С этой точки зрения данный ресурс является дефицитным, как и показало решение двойственной задачи.

Рассмотренная ситуация говорит о том, что простой анализ использования фондов времени работы оборудования не позволяет выделить все дефицитные ресурсы и что применение двойственной задачи оказывается весьма полезным.

Таким образом, проведенными исследованиями выявлены два узких места производства. Если мы захотим увеличить объем производства, то необходимо указанные фонды времени увеличить, например, за счет сверхурочных часов работы оборудования или путем увеличения его количества. Причем из результатов видно, что увеличение фонда времени работы фрезерного оборудования дает больший эффект чем увеличение фонда времени станда 2. Из сопоставления полученных значений (0,043 и 0,033) понятно, что увеличивать фонд времени фрезерного оборудования несколько выгоднее, чем фонд времени станда 2.

Остается только узнать, до каких пределов изменения указанных фондов времени и в каком объеме будут оказывать влияние на объем продукции. Для этого проделаем вычислительный эксперимент. В результате мы увидим, что первый ресурс после увеличения его в 1,25 раза, т. е. со значения 960 до значения 1204, перестает быть дефицитным и более не оказывает влияния на объем выпуска. Второй ресурс можно увеличить в 1,7 раза, т. е. со значения 480 до значения 816. В обоих случаях суммарный выпуск продукции увеличится, но происходит это по-разному. Различия можно проследить по таблице, в которой представлены результаты при исходных значениях ресурсов и при их увеличении до предельных значений.

Таблица. – Результаты влияния дефицитных ресурсов

	Изделие 1	Изделие 2	Суммарный выпуск
Исходные ресурсы	17	40	57
Увеличение первого ресурса	28	40	68
Увеличение второго ресурса	0	68	68

Чтобы понять величину необходимой дискреты, изменение на которую будет приводить к изменению объема продукции на единицу, проделаем простейшие вычисления: разделим прирост использованного фонда времени оборудования на величину изменения объема производства соответствующего изделия. Для первого ресурса $(1204 - 951) / (68 - 57) = 23$ и для второго $(816 - 480) / (68 - 57) = 30,5$.

Таким образом, для увеличения суммарного объема производства на единицу необходимо фонд времени работы фрезерного оборудования изменять на первом шаге до значения 974 мин и далее наращивать с шагом 23 мин. Фонд времени работы станка 2 для достижения того же результата необходимо увеличивать с шагом 30,5 мин. Фонды времени остальных единиц оборудования являются избыточными. Для них можно сократить необходимые ресурсы времени, что в конечном счете позволит сократить производственные затраты.

Заключение. В результате проведенных исследований можно сделать следующие выводы и предложения:

1. Анализ влияния фондов времени работы оборудования на объемы выпускаемой продукции целесообразно осуществлять на основе построения двойственной задачи к агрегированной модели прямой задачи. Последняя представляет собой обобщенную модель, записанную относительно управляемых параметров, которыми являются объемы производства по принятой номенклатуре продукции, а коэффициентами матрицы ограничений – приведенные затраты времени соответствующего оборудования на производство одного изделия.

2. Если производительность альтернативного оборудования не различается, т. е. время выполнения операции на альтернативном оборудовании одинаково по всему проекту, то все описанное ранее полностью справедливо. Если это условие не выполняется, то двойственную задачу можно построить и, соответственно, провести анализ влияния ресурсов на целевую функцию, только при принятом закреплении операций за группами альтернативного оборудования. Для получения такого закрепления нужно решить задачу в развернутом виде и провести ее анализ с точки зрения количества переналадок оборудования. Управлять коэффициентом закрепления операций можно с помощью дополнительных ограничений при решении задачи в развернутом виде: либо ограничивая его среднее значение по всему проекту, либо ограничивая (приравнивая к нулю) количество операций на одной из единиц альтернативного оборудования.

3. Упрощенную задачу линейного программирования с количеством управляемых параметров, равным количеству изделий, можно построить, введя параметры распределения количества повторений операций между альтернативным оборудованием, другими словами, сделав задачу параметрической. Но таких параметров будет много, т. е. столько, сколько альтернативных групп предусмотрено в технологии. Проводить анализ и выбор их наилучших значений вручную не представляется возможным. Однако ее можно решить путем введения этих параметров в число управляемых. Задача не перестанет быть линейной и ее можно будет решать линейными методами.

4. Результаты анализа можно использовать как обоснование переноса операций из группы безальтернативных, представляющих собой узкое место производства, в альтернативную группу, где операции могут выполняться на разных единицах оборудования.

5. Если производительность альтернативного оборудования различна, то коэффициенты матрицы ограничений вычисляются по менее производительному оборудованию. При этом общий ресурс времени на группу альтернативного оборудования вычисляется как сумма ресурса менее производительного и более производительного, увеличенного на коэффициент повышения производительности другого оборудования.

6. Если часть операций может выполняться только на одном станке, а другая часть представляет собой альтернативные операции, которые могут выполняться на одном из группы станков, то такое оборудование необходимо разделить на две группы. В первую группу необходимо выделить оборудование, на котором будут выполняться безальтернативные операции. Во вторую – альтернативное оборудование. Таким образом оборудование, задействованное в альтернативных и безальтернативных операциях,

будет входить в две разные группы. Ресурс времени на безальтернативное оборудование будет равняться всему периоду работы оборудования, а для этого же станка, входящего в альтернативную группу, ресурс времени будет равен времени периода работы минус время, занятое работой безальтернативного оборудования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Экономика организации (предприятия) / Т. К. Руткаускас, В. В. Криворотов, М. Г. Лордкипанидзе и др.; под общ. ред. д-ра экон. наук, проф. Т. К. Руткаускас. – 2-е изд., перераб. и доп. – Екатеринбург: Изд-во УМЦ УПИ, 2018. – 260 с.
2. Богданова, Е. Л. Соловейчик К. А., Аркина К. Г. Оптимизация в проектном менеджменте: линейное программирование. – СПб.: Ун-т ИТМО, 2017. – 165 с.
3. Шевченко А. С. Линейное программирование. – Рубцовск: Рубцовский индустриальный ин-т, 2021. – 150 с.

REFERENCES

1. Rutkauskas, T. K., Krivorotov, V. V., Lordkipanidze, M. G., Kondyukova, A. S., Shershneva, E. G., Zhurukhin, G. I., & Domnikova, L. V. (2018). *Ekonomika organizatsii (predpriyatiya)* (2st ed.). Ekaterinburg: Publ. UMTs UPI. (In Russ.).
2. Bogdanova, E. L. Soloveichik, K. A., & Arkina, K. G. (2017). *Optimizatsiya v proektnom menedzhmente: lineinoe programmirovaniye*. St. Petersburg: Un-t ITMO. (In Russ.).
3. Shevchenko, A. S. (2021). *Lineinoe programmirovaniye*. Rubtsovsk: Rubtsovskii industrial'nyi in-t. (In Russ.).

Поступила 28.02.2025

INDUSTRIAL PRODUCTION EFFICIENCY ANALYSIS BASED ON SOLVING A DUAL LINEAR PROGRAMMING PROBLEM

V. SHIROCHENKO, N. SKRILEV, V. NEDUHIN
(Belarusian-Russian University, Mogilev)

The analysis of the formulation and solution of the problem of increasing the efficiency of the production process of a multi-nomenclature serial production of a machine-building enterprise is carried out. The features of the development of a mathematical model based on linear programming methods are considered. Algorithms for constructing a dual task for analyzing resource scarcity based on the use of aggregation and reduction mechanisms have been developed. The results of the research conducted on a test example are shown, which, despite its small dimensions, demonstrates all the features of solving the problem. The research results are embodied in the automated control system developed at the Department of the Belarusian-Russian University, which is undergoing testing, after which it will be ready for use at an industrial enterprise.

Keywords: multi-nomenclature production, serial production, production capacity, linear programming task, dual task, linear programming task analysis, production efficiency, software system.

ЭЛЕКТРОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ УСТАНОВКИ (ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ)

УДК 541.183

DOI 10.52928/2070-1624-2025-44-1-39-46

ПЛЕНКИ НЕГАТИВНОГО ФОТОРЕЗИСТА AZ nLOF 5510, ОБЛУЧЕННЫЕ ЭЛЕКТРОНАМИ

С. А. АБРАМОВ, канд. физ.-мат. наук Д. И. БРИНКЕВИЧ,
канд. физ.-мат. наук, доц. В. С. ПРОСОЛОВИЧ
(Белорусский государственный университет, Минск)

О. А. ЗУБОВА

(ОАО «ИНТЕГРАЛ» – управляющая компания холдинга «ИНТЕГРАЛ», Минск)

канд. физ.-мат. наук, доц. С. А. ВАБИЩЕВИЧ, Н. В. ВАБИЩЕВИЧ
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

д-р философии (PhD) по физ.-мат. наукам, доц. КЕНЖАЕВ Зоир Тохир ўгли
(Ташкентский государственный технический университет имени Ислама Каримова)

канд. физ.-мат. наук С. Б. ЛАСТОВСКИЙ
(ГО «НПЦ НАН Беларуси по материаловедению», Минск)

Методом ИК-Фурье-спектроскопии с использованием приставки для диффузного отражения исследованы пленки негативных фоторезистов (ФР) AZ nLOF 5510 толщиной 0,99 мкм, нанесенные на поверхность пластин кремния методом центрифугирования. Облучение электронами с энергией 3,5 МэВ дозой до $\Phi = 7 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ проводилось на линейном ускорителе электронов ЭЛУ-4. Показано, что углерод-водородные связи основного компонента фоторезиста – фенолформальдегидной смолы – стабильны вплоть до доз $\sim (1-3) \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$. Связанные с растворителем полосы исчезают из спектра при дозах облучения $< 1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$. При облучении в интервале волновых чисел 1620–1660 см^{-1} возникают полосы, обусловленные формальдегидом, образующимся в результате реакции β -фрагментации кислород-центрированного радикала. Полосы, связанные с колебаниями ароматического кольца, достаточно стабильны. Их интенсивность заметно снижается только при дозе $\Phi = 7 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$. В области валентных колебаний кратных связей C=O при облучении наблюдалась сложная перестройка спектра, обусловленная несколькими процессами, протекающими при взаимодействии компонентов фоторезиста во время облучения электронами. В частности, могут наблюдаться трансформация ближайших заместителей связей C=O, сшивка молекул, увеличение количества сопряженных кратных связей как результат формирования хиноидных структур.

Ключевые слова: негативный фоторезист, ИК-Фурье-спектроскопия, ионное травление, облучение электронами, растворитель.

Введение. Фоторезист AZ nLOF 5510, выпускающийся немецкой компанией MicroChemicals GmbH, относится к классу негативных фоторезистов и применяется в процессах обратной литографии. Он стабилен до температур $\sim 250^\circ\text{C}$ ¹. Фоторезист AZ nLOF 5510 обладает достаточно высокой чувствительностью к электронному облучению, что позволяет использовать его не только в фотолитографии, но и в процессах электронно-лучевой литографии высокого разрешения. Это делает AZ nLOF 5510 подходящим для многокомпонентных процессов литографии, когда требуются различные технологии обработки материалов. Основу фоторезиста составляет фенолформальдегидная смола, а в качестве растворителя используется пропиленгликоль ацетат монометилового эфира (PGMEA). Фоторезист AZ nLOF 5510 разработан для получения пленок толщиной от 0,7 до 1,6 мкм. Так, при скорости вращения центрифуги 3000 об/мин с требуемой точностью и равномерностью нанесения достигается толщина пленки фоторезиста $\sim 0,90$ мкм, что позволяет создавать структуры с высоким разрешением.

Эффективность фотохимических реакций, происходящих в фоторезисте во время экспонирования, определяется его структурой и химическим составом. Информацию о составе и структуре смесей сложных органических соединений в твердом агрегатном состоянии позволяет получить метод ИК-Фурье-спектроскопии [1; 2]. Перспективы использования пленок фоторезиста AZ nLOF 5510 в электронно-лучевой литографии определяют необходимость исследования трансформации их оптических свойств при облучении

¹ AZ NLOF 5510 Photoresist. URL: www.microchemicals.com/AZ-nLOF-5510-Photoresist-3.785-l/1055100.

электронами. В настоящей работе представлены результаты исследования радиационно-индуцированных процессов при облучении электронами пленок фоторезиста AZ nLOF 5510 на кремнии.

Методика эксперимента. Пленки фоторезиста AZ nLOF 5510 толщиной 0,99 мкм наносились на кремниевые пластины с ориентацией (100) методом центрифугирования [3]. Перед нанесением фоторезиста поверхность пластин Si повергалась стандартному циклу очистки. После нанесения пленки фоторезиста на рабочую сторону пластины проводилась сушка при 90 °С длительностью 60 с. Часть образцов впоследствии подвергалась дополнительному усилению (облучение светом с $\lambda = 404$ нм в течение 106 с и последующая сушка при 115 °С длительностью 60 с), а затем ионному травлению в течение 20 мин в потоке ионов Ar^+ (скорость потока 6 см³/мин) с энергией 160 эВ. Геометрическая толщина пленок измерялась с помощью растрового электронного микроскопа HITACHI S-4800.

ИК-Фурье-спектры фоторезиста AZ nLOF 5510 на кремниевых подложках регистрировались в диапазоне 400–3200 см⁻¹ при комнатной температуре спектрофотометром ALPHA (Bruker Optik GmbH) с модулем диффузного отражения DRIFT [4]. Спектры получались в результате прохождения ИК-излучения через слой фоторезиста, его отражения от подложки и вторичного прохождения через фоторезистивную пленку. Для каждого измерения выполнялось 24 сканирования, разрешение составляло около 2 см⁻¹. Перед каждым измерением проводилась коррекция фона. Облучение электронами с энергией 3,5 МэВ дозой до $\Phi = 7 \cdot 10^{16}$ см⁻² выполнялось на линейном ускорителе электронов ЭЛУ-4. Плотность электронного потока составляла $1 \cdot 10^{12}$ см⁻²·с⁻¹ и контролировалась с помощью цилиндра Фарадея. Температура образцов в процессе облучения не превышала 310 К.

Экспериментальные результаты и их обсуждение. ИК-спектры облученных электронами пленок фоторезистов AZ nLOF 5510 представлены на рисунках 1–4. Экспериментальные значения частот полос ИК-поглощения, их соответствие функциональным группам и поведение при облучении приведены в таблице. Структура спектра и, соответственно, структура фоторезиста сохраняется во всем диапазоне использованных доз облучения. Заметное снижение интенсивности основных полос поглощения ФР (валентных колебаний ароматического кольца и пульсационных колебаний углеродного скелета ароматического кольца) наблюдалось только при $\Phi = 7 \cdot 10^{16}$ см⁻² (см. таблицу).

Таблица. – Энергетическое положение полос ИК-поглощения пленок AZ nLOF 5510 толщиной 0,99 мкм, их принадлежность к функциональным группам и поведение при облучении электронами

Волновое число, см ⁻¹	Функциональная группа, тип колебаний	Поведение при облучении
1	2	3
611 сдвоенный	Решеточное поглощение кремния [5]	Интенсивность растет при $\Phi \leq 1 \cdot 10^{15}$ см ⁻² , затем стабилизируется
668	Нет данных	Интенсивность растет при увеличении дозы
734	Нет данных	С ростом дозы полоса уширяется и смещается в высокоэнергетическую область
817	Внеплоскостные колебания СН-паразамещенного кольца [6]	При $\Phi > 1 \cdot 10^{16}$ см ⁻² интенсивность снижается, в ионно-травленных образцах полоса стабильна
970	С–О–С-связи растворителя [7]	При облучении исчезает. В ионно-травленных образцах отсутствует
1010 сл	Колебания С–С-связей	Практически не изменяется
1025 сл	Нет данных	В исходных образцах появляется после облучения, интенсивность растет с дозой. В ионно-травленных образцах присутствует изначально, при облучении стабильна
1100 сл	Валентные колебания С–О–С [8]	После облучения уширение полос и снижение интенсивности 1120 см ⁻¹ по сравнению с 1100 см ⁻¹
1120 сл	Деформационные плоскостные колебания в растворителе [7]	
1170 1211	Валентные колебания С–О- в С–О–Н-группе [2]	Интенсивность снижается при увеличении дозы, в ионно-травленных образцах выражено слабее
1366	Деформационные плоскостные колебания ОН-связей [1]	Постепенное снижение интенсивности при увеличении дозы
1438	Валентные колебания ароматического кольца, связанные с СН ₂ -мостиком [2; 9]	Интенсивность снижается при увеличении дозы и появляется полоса 1452 см ⁻¹
1507	Валентные колебания ароматического кольца [2; 6]	Уменьшение интенсивности заметно только при $\Phi > 5 \cdot 10^{16}$ см ⁻²
1539 сл		Интенсивность растет после облучения $\Phi = 1 \cdot 10^{15}$ см ⁻² , затем уменьшается, в ионно-травленных образцах интенсивность выше
1558 сл		

Окончание таблицы

1	2	3
1595 ± 2 1609	Пульсационные колебания углеродного скелета ароматического кольца [1]	Уменьшение интенсивности заметно только при $\Phi > 5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$
1620 1652	Валентные колебания С=О в формальдегиде [8] и хиноидных структурах [1; 9]	Проявляются после облучения. В ионно-травленных образцах присутствуют до облучения
1700	С=О валентные колебания в сложных ароматических эфирах [1]	Сложная перестройка в процессе облучения
1750	С=О валентные колебания [1] в растворителе	Исчезает при облучении дозами $\Phi > 1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$
2849 сл	Симметричные колебания CH_2 - и CH_3 -групп [1]	Анализ затруднен вследствие низкой интенсивности
2926	Асимметричные колебания CH_2 -группы [1]	Снижение интенсивности заметно лишь при $\Phi = 7 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ (до 30 %)
3024 сл	Валентные колебания CH -групп [1]	Снижение интенсивности заметно лишь при $\Phi = 7 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ (до 40 %)

Примечание: сл – полоса слабой интенсивности.

В области волновых чисел $\nu = 400\text{--}900 \text{ см}^{-1}$ (рисунок 1), наиболее сильной является полоса деформационных колебаний С–Н-связей с максимумом при 817 см^{-1} , обусловленная внеплоскостными колебаниями С–Н-связей ароматического кольца. Наблюдается также интенсивная полоса со сдвоенным максимумом при $\sim 610 \text{ см}^{-1}$ и ряд полос средней и малой интенсивности. Полоса при 610 см^{-1} обусловлена, предположительно, решеточным поглощением кремниевой подложки [5]. При облучении ее интенсивность возрастает при дозах до $1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$, а при дальнейшем повышении Φ стабилизируется. Такое поведение в процессе облучения обусловлено, вероятнее всего, релаксацией упругих напряжений на границе раздела фоторезист/кремний. Для полосы с максимумом при 817 см^{-1} характерно другое поведение – ее интенсивность начинает снижаться только при дозах $\Phi > 1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$. Отметим, что аналогичным образом ведут себя полосы с максимумами при ~ 2926 и 3024 см^{-1} , обусловленные валентными колебаниями CH - и CH_2 -групп (рисунок 2; см. таблицу). Это обстоятельство позволяет утверждать, что углерод-водородные связи основного компонента фоторезиста – фенолформальдегидной смолы – стабильны вплоть до доз $\sim (1\text{--}3) \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$.

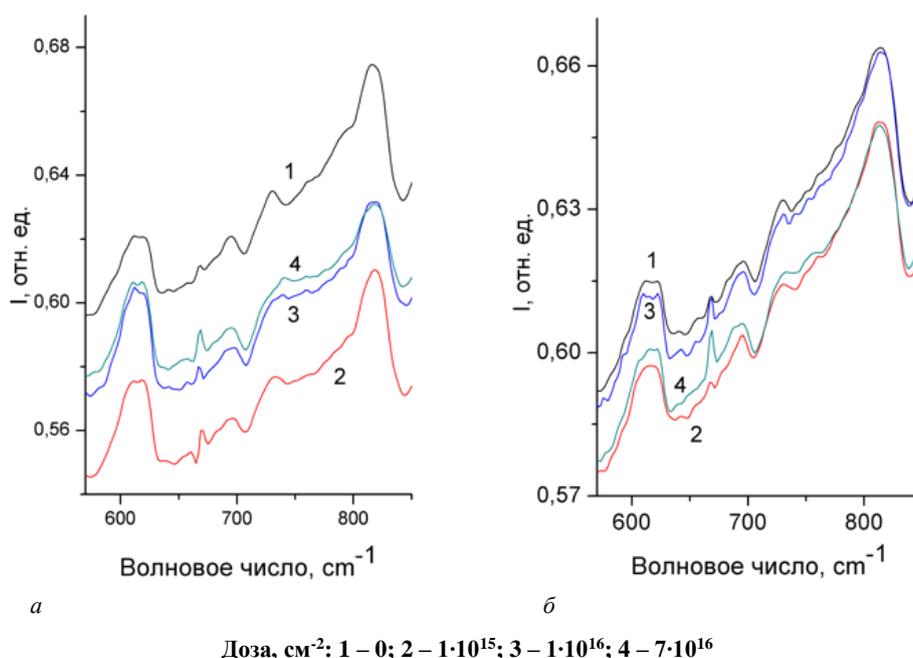


Рисунок 1. Отражательно-абсорбционные спектры пленок фоторезиста AZ nLOF 5510 толщиной 0,99 мкм, исходных (а) и подвергнутых дополнительному усилению (б), в области внеплоскостных колебаний С–Н-связей

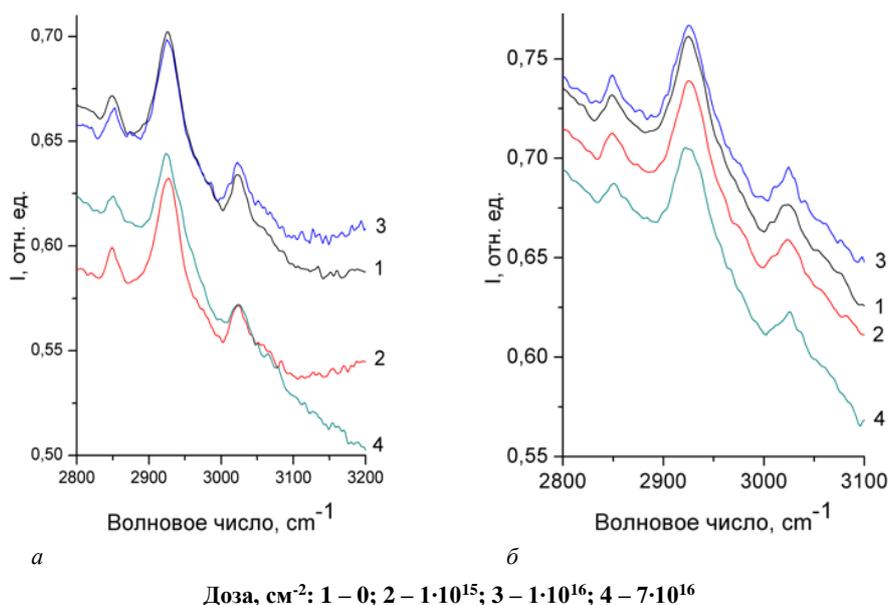


Рисунок 2. – Отражательно-абсорбционные спектры пленок фоторезиста AZ nLOF5510 толщиной 0,99 мкм, исходных (а) и подвергнутых дополнительному усилению (б), в области симметричных и асимметричных валентных колебаний СН₂- и СН₃-групп и валентных колебаний СН-группы

В области волновых чисел $\nu = 900\text{--}1400\text{ см}^{-1}$ (рисунок 3) наблюдается ряд полос, связанных с побочными продуктами синтеза (в том числе с продуктами неполного замещения) фенолформальдегидной смолы и остаточным растворителем. Наиболее интенсивной полосой, обусловленной растворителем является полоса с максимумом при 970 см^{-1} , причем она не имеет близко расположенных полос поглощения, обусловленных другими компонентами фоторезиста [7]. При облучении она исчезает на начальных дозах облучения $\sim 1 \cdot 10^{15}\text{ см}^{-2}$. Отметим, что она отсутствует в ионно-травленных образцах (см. рисунок 3, а). С растворителем также, вероятнее всего, связана полоса с максимумом при 1750 см^{-1} . Ее поведение полностью идентично поведению полосы с максимумом при 970 см^{-1} . Еще одна полоса, связанная с растворителем, имеет максимум при 1120 см^{-1} . Ее поведение схоже с поведением полос с максимумами при 970 и 1750 см^{-1} . Однако на нее накладывается полоса валентных колебаний С–О–С-группы (см. таблицу), что затрудняет детальный анализ ее поведения при облучении. Таким образом, можно констатировать, что остаточный растворитель легко удаляется/разлагается при ионном травлении или облучении фоторезистивной пленки.

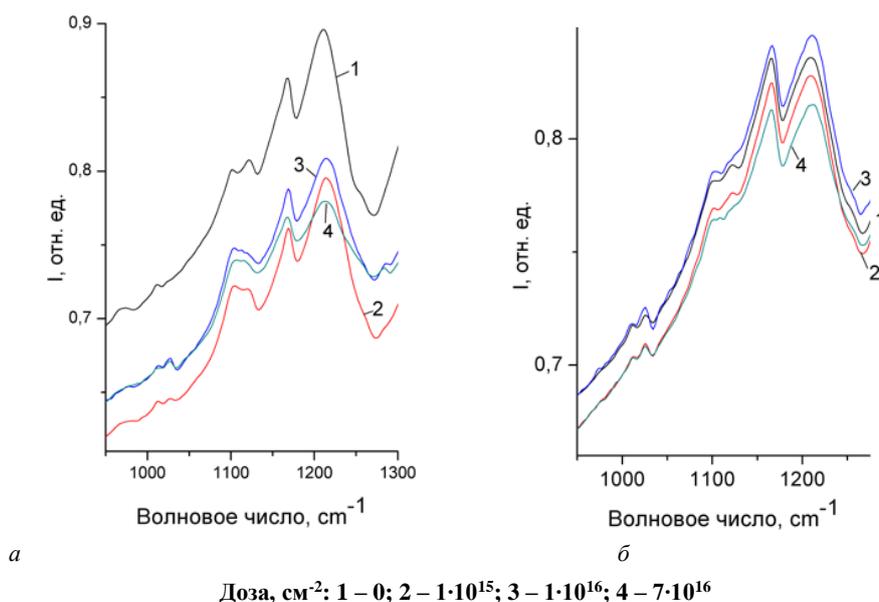
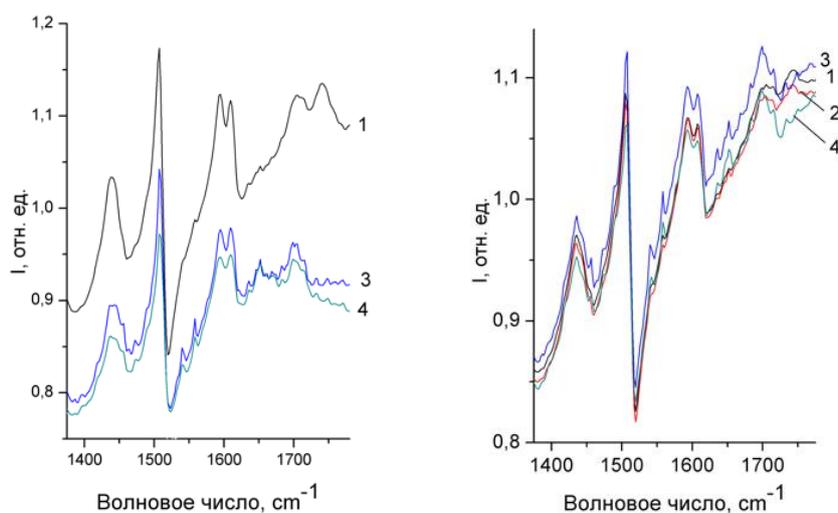
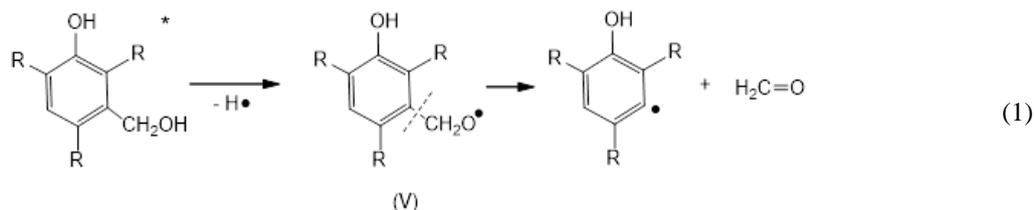


Рисунок 3. – Отражательно-абсорбционные спектры пленок фоторезиста AZ nLOF 5510 толщиной 0,99 мкм, исходных (а) и подвергнутых дополнительному усилению (б), в области валентных колебаний одиночных С–С-, С–О- и Si–О-связей

С формальдегидом, используемым при синтезе фенолформальдегидной смолы, связаны полосы в интервале волновых чисел 1620–1660 см⁻¹ (рисунок 4). В исходных пленках они появляются при облучении. В ионно-травленных образцах в малых количествах они присутствовали до облучения. По нашему мнению, наиболее вероятным механизмом образования формальдегида в ходе облучения электронами пленки фоторезиста может быть β-фрагментация кислород-центрированного радикала по реакции (1):



а

б

Доза, см⁻²: 1 – 0; 2 – 1·10¹⁵; 3 – 1·10¹⁶; 4 – 7·10¹⁶

Рисунок 4. – Отражательно-абсорбционные спектры пленок фоторезиста AZ nLOF 5510 толщиной 0,99 мкм, исходных (а) и подвергнутых дополнительному усилению (б), в области валентных колебаний ароматического кольца, пульсационных колебаний углеродного скелета ароматического кольца и валентных асимметричных колебаний С=О-связей

Полосы, связанные с колебаниями ароматического кольца достаточно стабильны. Интенсивность скелетных (полоса со двоянным максимумом при 1595 и 1609 см⁻¹) и валентных колебаний ароматического кольца (полоса при 1507 см⁻¹) заметно снижается только при дозе $\Phi = 7 \cdot 10^{16}$ см⁻² (см. рисунок 4). Это может быть обусловлено отщеплением от ароматического кольца заместителей или их значительной модификацией при облучении полимера электронами. Несколько более сильно снижалась интенсивность полосы с максимумом ~ 1438 см⁻¹, обусловленной колебаниями бензольного кольца, связанного с СН₂-мостиком. При этом появляется полоса с максимумом при 1452 см⁻¹, которая обусловлена образованием межмолекулярных водородных связей по СН₂-мостику [6]. Сшивание молекул фенолформальдегидной смолы при γ-облучении наблюдалось ранее [9].

В области валентных колебаний кратных связей ($\nu = 1620\text{--}1800$ см⁻¹) при облучении наблюдалась сложная перестройка спектра (см. рисунок 4). В исходных образцах в этом диапазоне присутствовали полоса с максимумом при ~ 1700 см⁻¹, обусловленная валентными колебаниями С=О-связей в ароматических соединениях [9; 10], и полоса с максимумом при ~ 1750 см⁻¹, связанная с валентными колебаниями С=О-связей в растворителе. Как отмечалось выше, полоса при ~ 1750 см⁻¹ исчезает при облучении дозой $\Phi > 1 \cdot 10^{15}$ см⁻². Полоса с максимумом при ~ 1700 см⁻¹ претерпевает сложные трансформации при облучении. Ее интенсивность при дозах $\leq 1 \cdot 10^{15}$ см⁻² снижается, а при повышении дозы начинает расти (см. рисунок 4, б). Кроме того, в этом диапазоне волновых чисел после облучения появляется ряд слабоинтенсивных полос переменной интенсивности. Это может быть связано с формированием/разложением различных сложных ароматических эфиров при облучении электронами, что является, вероятно, основной причиной перестройки спектра в этой области.

Как известно, в этой области (1620–1760 см⁻¹) наблюдаются асимметричные колебания С=О-связей² [11] и валентные колебания двойных С=C-связей [1]. На положение полос двойных связей С=C

² Тарасевич Б. Н. ИК спектры основных классов органических соединений: справ. материалы. – М.: МГУ, 2012. – 55 с.

и С=О влияет ряд факторов, среди которых основными являются: электронные эффекты ближайших заместителей; сопряжение с кратными связями и ароматическими кольцами; наличие меж- и внутримолекулярных связей³ [10; 11]. Так, при сопряжении с С=C-связями максимум полос асимметричных колебаний С=О смещается в низкоэнергетическую область [12]. Наблюдавшаяся в эксперименте сложная перестройка спектра в области валентных колебаний кратных связей может быть обусловлена несколькими процессами, протекающими при взаимодействии компонентов фоторезиста во время облучения электронами. В частности, могут наблюдаться трансформация (изменение состава) ближайших заместителей связей С=О, сшивка молекул [13], увеличение количества сопряженных кратных связей как результат формирования хиноидных структур [14].

Заключение. При исследовании облученных электронами пленок фоторезиста AZ nLOF 5510 на кремнии экспериментально установлено, что углерод-водородные связи основного компонента фоторезиста – фенолформальдегидной смолы – стабильны вплоть до доз $\sim (1-3) \cdot 10^{16}$ см⁻². Связанные с растворителем полосы исчезают из спектра при дозах облучения $< 1 \cdot 10^{15}$ см⁻². При облучении в интервале волновых чисел 1620–1660 см⁻¹ возникают полосы, обусловленные формальдегидом, образующимся в результате реакции β -фрагментации кислород-центрированного радикала. Полосы, связанные с колебаниями ароматического кольца достаточно стабильны. Их интенсивность заметно снижается только при дозе $\Phi = 7 \cdot 10^{16}$ см⁻². В области валентных колебаний кратных связей С=О при облучении наблюдалась сложная перестройка спектра, которая обусловлена несколькими радиационно-индуцированными процессами, протекающими при взаимодействии компонентов фоторезиста. В частности, могут наблюдаться трансформация (изменение состава) ближайших заместителей связей С=О, сшивка молекул, увеличение количества сопряженных кратных связей в результате формирования хиноидных структур.

Работа выполнена в рамках задания 2.16 Государственной программы научных исследований «Материаловедение, новые материалы и технологии», подпрограмма «Наноструктурные материалы, нанотехнологии, нанотехника («Наноструктура»).

ЛИТЕРАТУРА

1. Преч Э., Бюльманн Ф., Афвольтер К. Определение строения органических соединений. Таблицы спектральных данных. – М.: Мир: БИНОМ. Лаб. знаний, 2006. – 439 с.
2. Модификация пленок диазохинон-новолачного фоторезиста за областью внедрения ионов В⁺ / С. Д. Бринкевич, Е. В. Гринюк, Д. И. Бринкевич и др. // Химия высоких энергий. – 2020. – Т. 54, № 5. – С. 377–386. – DOI: [10.31857/S0023119320050046](https://doi.org/10.31857/S0023119320050046).
3. Модификация спектров отражения пленок диазохинон-новолачного фоторезиста при имплантации ионами бора и фосфора / Д. И. Бринкевич, А. А. Харченко, В. С. Просолович и др. // Микроэлектроника. – 2019. – Т. 48, № 3. – С. 235–239. – DOI: [10.1134/S0544126919020029](https://doi.org/10.1134/S0544126919020029).
4. Отражательно-абсорбционная ИК Фурье-спектроскопия фоторезистивных пленок на кремнии / Д. И. Бринкевич, Е. В. Гринюк, В. С. Просолович и др. // Приборы и методы измерений. – 2025. – Т. 16, № 1. – С. 242–250.
5. Спектры нарушенного полного внутреннего отражения азотированных структур SiO₂/Si / В. Б. Оджаев, А. Н. Петлицкий, В. С. Просолович и др. // Журнал прикладной спектроскопии. – 2022. – Т. 89, № 4. – С. 498–504. – DOI: [10.47612/0514-7506-2022-89-4-498-504](https://doi.org/10.47612/0514-7506-2022-89-4-498-504).
6. Poljansek I., Sebenik U., Krajnc M. Characterization of phenol–urea–formaldehyde resin by inline FTIR spectroscopy // Journal of Applied Polymer Science. – 2006. – Vol. 99, iss. 5. – P. 2016–2028. – DOI: [10.1002/app.22161](https://doi.org/10.1002/app.22161).
7. Трансформация спектров нарушенного полного внутреннего отражения в процессе сушки диазохинон-новолачного фоторезиста / Д. И. Бринкевич, С. Д. Бринкевич, А. Н. Петлицкий и др. // Микроэлектроника. – 2021. – Т. 50, № 4. – С. 274–280. – DOI: [10.31857/S0544126921040037](https://doi.org/10.31857/S0544126921040037).
8. Бринкевич С. Д., Бринкевич Д. И., Просолович В. С. Модификация пленок диазохинон-новолачного фоторезиста имплантацией ионов сурьмы // Микроэлектроника. – 2021. – Т. 50, № 1. – С. 36–42. – DOI: [10.31857/S0544126920060022](https://doi.org/10.31857/S0544126920060022).
9. Спектры нарушенного полного внутреннего отражения пленок диазохинон-новолачного резистов / С. Д. Бринкевич, Д. И. Бринкевич, В. С. Просолович и др. // Журнал прикладной спектроскопии. – 2020. – Т. 87, № 6. – С. 941–948.
10. Инфракрасные спектры бензальдегида и его производных в разных агрегатных состояниях / Г. Б. Толсторожев, И. В. Скорняков, М. В. Бельков и др. // Оптика и спектроскопия. – 2012. – Т. 113, № 2. – С. 202–207.
11. Инфракрасные спектры и структура молекулярных комплексов ароматических кислот / М. В. Бельков, С. Д. Бринкевич, С. Н. Самович и др. // Журн. прикладной спектроскопии. – 2011. – Т. 78, № 6. – С. 851–858.
12. Беккер Ю. Спектроскопия. – М.: Техносфера, 2009. – 527 с.
13. Ионная имплантация позитивных фоторезистов / Бринкевич Д. И., Бринкевич С. Д., Вабищевич Н. В. и др. // Микроэлектроника. – 2014. – Т. 43, № 3. – С. 193–199. – DOI: [10.7868/S0544126914010037](https://doi.org/10.7868/S0544126914010037).
14. Электронная проводимость в имплантированном ионами Р⁺ позитивном фоторезисте / А. Н. Олешкевич, Н. М. Лапчук, В. Б. Оджаев и др. // Микроэлектроника. – 2020. – Т. 49, № 1. – С. 58–65. – DOI: [10.31857/S0544126919060073](https://doi.org/10.31857/S0544126919060073).

³ Тарасевич Б. Н. ИК спектры основных классов органических соединений: справ. материалы. – М.: МГУ, 2012. – 55 с.

REFERENCES

1. Pretsch E., Bühlmann, P., & Affolter C. (2000). *Structure Determination of Organic Compounds. Tables of Spectral Data*. Berlin – Heidelberg: Springer – Verlag.
2. Brinkevich, S. D., Grinyuk, E. V., Brinkevich, D. I., & Prosolovich V. S. (2020). Modification of Diazoquinone–Novolac Photoresist Films beyond the Region of Implantation of B⁺ Ions. *High energy chemistry*, 54(5), 342–351. DOI: [10.31857/S0023119320050046](https://doi.org/10.31857/S0023119320050046).
3. Brinkevich, D. I., Kharchenko, A. A., Prosolovich, V. S., Odzhaev, V. B., Brinkevich, S. D., & Yankovski, Yu. N. (2019). Reflection spectra modification of diazoquinone-novolac photoresist implanted with B and P ions. *Russian Microelectronics*, 48(3), 197–201. DOI: [10.1134/S1063739719020021](https://doi.org/10.1134/S1063739719020021).
4. Brinkevich, D. I., Grinyuk, E. V., Prosolovich, V. S., Brinkevich, S. D., Kolos, V. V., & Zubova, O. A. (2025). Otrazhatel'no-absorbtsionnaya IK Fur'e-spektroskopiya fotorezistivnykh plenok na kremnii [Reflective Absorption IR Fourier-Spectroscopy of Photoresistive Films on Silicon]. *Pribory i metody izmerenii [Devices and methods of measurements]*, 16(1), 242–250. (In Russ., abstr. in Engl.).
5. Odzhaev, V. B., Pyatlitski, A. N., Prosolovich, V. S., Kovalchuk, N. S., Soloviev, Ya. A., Zhygulin, D. V., ... Brinkevich, D. I. (2022). Attenuated Total Reflection Spectra of Nitrided SiO₂/Si Structures. *Journal of Applied Spectroscopy*, 89(4), 665–670. DOI: [10.1007/s10812-022-01408-3](https://doi.org/10.1007/s10812-022-01408-3).
6. Poljansek, I., Sebenik, U., Krajnc, M. (2006). Characterization of phenol–urea–formaldehyde resin by inline FTIR spectroscopy. *Journal of Applied Polymer Science*, 99(5), 2016–2028. DOI: [10.1002/app.22161](https://doi.org/10.1002/app.22161).
7. Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., Petlitsky, A. N., & Prosolovich, V. S. (2021). Transformation of the Spectra of a Attenuated Total Reflection when Drying a Diazoquinone–Novolac Photoresist. *Russian Microelectronics*, 50(4), 239–245. DOI: [10.1134/S106373972104003X](https://doi.org/10.1134/S106373972104003X).
8. Brinkevich, S. D., Brinkevich, D. I., & Prosolovich, V. S. (2021). Modification of Diazoquinone–Novolac Photoresist Films by the Implantation of Antimony Ions. *Russian Microelectronics*, 50(1), 33–38. DOI: [10.1134/S1063739720060025](https://doi.org/10.1134/S1063739720060025).
9. Brinkevich, S. D., Brinkevich, D. I., Prosolovich, V. S., Lastovskii, S. B., & Pyatlitski, A. N. (2021). Frustrated total internal reflection spectra of diazoquinone–novolac photoresist films. *Journal of Applied Spectroscopy*, 87(6), 1072–1078. DOI: [10.1007/s10812-021-01111-9](https://doi.org/10.1007/s10812-021-01111-9).
10. Tolstorozhev, G. B., Skorniyakov, I. V., Bel'kov, M. V., Shadyro, O. I., Brinkevich, S. D., & Samovich, S. N. (2012). IR spectra of benzaldehyde and its derivatives in different aggregate states. *Opt. Spektrosk.*, 113(2), 179–183.
11. Belkov, M. V., Brinkevich, S. D., Samovich, S. N., Skorniyakov, I. V., Tolstorozhev, G. B., & Shadyro, O. I. (2011). Infrared spectra and structure of molecular complexes of aromatic acids. *J. Appl. Spectrosc.*, 78(6), 794–801.
12. Böcker, J. (1997). *Spektroskopie*. Würzburg (Germany): Vogel Industrie Medien GmbH & Co KG.
13. Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., Vabishchevich, N. V., Odzhaev, V. B., & Prosolovich, V. S. (2014). Ion implantation of positive photoresists. *Russian Microelectronics*, 43(3), 194–200. DOI: [10.1134/S106373971401003X](https://doi.org/10.1134/S106373971401003X).
14. Oleshkevich, A. N., Lapchuk, N. M., Odzhaev, V. B., Karpovich, I. A., Prosolovich, V. S., Brinkevich, D. I., & Brinkevich, S. D. (2020). Electronic Conductivity in a P⁺-Ion Implanted Positive Photoresist. *Russian Microelectronics*, 49(1), 55–61. DOI: [10.1134/S1063739719060076](https://doi.org/10.1134/S1063739719060076).

Поступила 05.03.2025

**FILMS OF THE NEGATIVE PHOTORESIST AZ nLOF 5510,
IRRADIATED BY ELECTRONS**

S. ABRAMOV, D. BRINKEVICH, V. PROSOLOVICH
(Belarusian State University, Minsk)

O. ZUBOVA

(“INTEGRAL” Joint Stock Company, Minsk)

S. VABISHCHEVICH, N. VABISHCHEVICH
(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

ZOIR T. KENZHAEV

(Tashkent State Technical University Named after Islam Karimov)

S. LASTOVSKII

(Scientifi-Practical Materials Research Centre, National Academy of Sciences of Belarus)

The method of IR-spectroscopy using a module for diffuse reflection, the films of negative photoresists AZ nLOF 5510 thick of 0,99 μm, applied to the surface of the silicon plates by centrifugation, were studied. Electron irradiation with an energy of 3,5 MeV dose to 7·10¹⁶ cm⁻² was carried out on ELU-4 linear accelerator of electrons. It is shown that the carbon-hydrogen bonds of the main component of the photoresist – phenol-formaldehyde resin - are stable up to doses ~ (1–3)·10¹⁶ cm⁻². The bands associated with the solvent disappear from the spectrum at doses of irradiation < 1·10¹⁵ cm⁻². In the interval of wave numbers 1620–1660 cm⁻¹ during irradiation bands arise due to formaldehyde formed as a result of the β-fragmentation of oxygen-centered radical. Bands associated

with the vibrations of the aromatic ring are quite stable. Their intensity is significantly reduced only at the dose of $F = 7 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-2}$. In the area of valence fluctuations of multiple C=O bonds, overlapping, a complex restructuring of the spectrum was observed, due to several processes that occur due to the interaction of the components of the photoresist during radiation with electrons. In particular, the transformation of the nearest deputies of C=O bonds may be observed, the cross-linking of molecules, an increase in the number of conjugated multiple bonds as a result of the formation of chinoid structures.

Keywords: negative photoresist, IR-Fourier spectroscopy, ionic etching, electron radiation, solvent.

УДК 536.37: 537.868

DOI 10.52928/2070-1624-2025-44-1-47-52

**ОСОБЕННОСТИ МИКРОВОЛНОВОЙ ОБРАБОТКИ СУСПЕНЗИЙ
ОРГАНИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ В АВТОТЕРМИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ**

канд. физ.-мат. наук **М. А. БРИЧ**, **Н. М. ГОРБАЧЁВ**, канд. физ.-мат. наук **И. А. КОЗНАЧЕВ**
(Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова
Национальной академии наук Беларуси, Минск)

канд. техн. наук, доц. **Ю. Г. ГРОЗБЕРГ**, канд. техн. наук., доц. **А. Л. АДАМОВИЧ**
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

В численном эксперименте микроволновой торрефикации суспензии органического материала, когда часть теплоты для нагрева поступает от экзотермической реакции разложения, показано, что газовыделение продуктов разложения существенно меняет диэлектрические свойства среды и условия теплообмена, что необходимо учитывать для обеспечения управляемости температурного режима.

Ключевые слова: суспензия, микроволновая торрефикация, экзотермическая реакция, газовыделение, диэлектрические свойства, тепловой режим, численное моделирование.

Введение. Эффективным способом тепловой обработки органических материалов является микроволновой нагрев. Известно его промышленное применение для сушки растительных материалов, торфа, лигнина. Актуальной задачей для производства топлив, смазок, сорбентов является высокотемпературная обработка суспензий этих материалов в режиме торрефикации – низкотемпературного пиролиза. Одной из разновидностей такой обработки является гидротермальная карбонизация – получение биоугля обработкой суспензий или влажных органических материалов. Для повышения энергетической эффективности торрефикации целесообразно использовать теплоту разложения ее органических компонентов, таких, например, как гемицеллюлозы, то есть проводить разогрев в так называемом автотермическом режиме [1]. Особенностью этого режима является быстрый, лавинообразный рост температуры. Использование традиционных способов нагрева в этом случае затруднено из-за их инерционности. Скорость разложения значительно превышает быстродействие горелочных устройств, работающих на органическом топливе. В работе [2] показана принципиальная возможность управления автотермическим режимом при использовании циклического микроволнового разогрева смеси лигнина, торфа с углеродом, нефтяным коксом. Режим торрефикации органических материалов сопровождается потерей массы, часть разложившегося материала и химически связанная вода переходят в газовую фазу. Для торфа эти потери составляют от 5 до 12 %. Таким образом, обрабатываемая среда при высокотемпературной обработке влажных материалов и суспензий в автотермическом режиме является трехфазной. Учитывая существенное различие диэлектрических свойств этих сред, практически важной задачей является исследование влияния выделяющегося газа на процесс нагрева в автотермическом режиме, когда обеспечение устойчивости процесса нагрева затруднено. Следует учитывать при этом, что барботаж газа через поверхность материала меняет не только диэлектрические свойства жидкой среды, но и условия теплообмена на границе «жидкость – твердое тело».

Постановка задачи. Рассмотрим задачу нагрева суспензии торфа в силиконовом масле за счет поглощения энергии микроволнового излучения. Смесь находится в цилиндрической камере радиусом R и высотой L . Состояние каждого компонента характеризуется своей температурой T , являющейся функцией времени t и радиальной координаты r (неоднородность в осевом направлении не учитывается). В расчетах принято допущение, что в исследуемом диапазоне температур теплофизические и диэлектрические свойства не зависят от температуры.

В расчетах учитывалось выделение энергии за счет экзотермических реакций, протекающих в торфе при высоких температурах, а также выделение из торфа летучих газовых компонентов, оказывающих влияние на процессы теплообмена. При расчетах имитировалась обратная связь, когда микроволновой нагрев выключался при достижении температуры в центре образца заданного значения T_{\max} .

Динамика системы описывается уравнениями

$$\rho_{\tau} \frac{\partial e_{\tau}}{\partial t} = W_{\tau} + Q;$$

$$\rho_{\text{м}} \frac{\partial e_{\text{м}}}{\partial t} = W_{\text{м}} - Q - \text{div}(\mathbf{q});$$

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T_{\text{м}};$$

$$\rho_T = \beta \rho_{0T};$$

$$\rho_M = (1 - \beta) \rho_{0M};$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -k\gamma,$$

где e – удельная внутренняя энергия;

Q – количество тепла, передаваемого от масла торфу в единице объема в единицу времени;

q – плотность теплового потока;

W – удельная мощность, передаваемая материалу от микроволнового излучения;

β – относительное содержание (объемная доля) торфа в смеси;

γ – доля массы торфа, приходящаяся на вещества, которые вступают в реакцию;

λ – коэффициент теплопроводности;

ρ – плотность (масса на единицу объема системы);

ρ_0 – истинная плотность (масса на единицу объема компонента).

Индексы «м» и «т» обозначают масло и торф соответственно.

Мощность, передаваемая материалу микроволновым излучением и приходящаяся на единицу объема, определяется формулой

$$W = \omega \varepsilon \operatorname{tg} \delta_e E^2,$$

где E – эффективное значение напряженности электрического поля излучения;

$\operatorname{tg} \delta_e$ – тангенс угла диэлектрических потерь;

ε – диэлектрическая проницаемость материала;

ω – циклическая частота излучения, определяемая как $\omega = 2\pi f$;

f – частота излучения.

При расчете использовались значения напряженности, соответствующие технически достижимым значениям удельной мощности $W = 0,5\text{--}2,5$ кВт/кг.

Тепловая мощность, передаваемая от среды биоматериалу и приходящаяся на единицу объема, рассчитывается по формуле

$$Q = \alpha S (T_l - T_m),$$

где α – коэффициент теплообмена.

Влияние газовой фазы на теплопередачу учитывалось путем использования двух различных моделей: принималось, что либо газ присутствует в виде пузырьков, равномерно распределенных в объеме (пузырьковая модель), либо формируется газовая прослойка между частицами материала и средой (пленочная модель). Для пузырьковой модели

$$\alpha = \alpha_0 \frac{\lambda_l V_l + \lambda_g V_g}{\lambda_l (V_l + V_g)};$$

для пленочной модели

$$\alpha = \alpha_0 \left/ \left(1 + \frac{h_g}{h_l} \right) \right.,$$

где $h_l = \frac{\Delta r}{\lambda_l}$, $h_g = \frac{\sqrt[3]{V_g}}{\lambda_g}$;

$\alpha_0 = \frac{1}{\frac{d}{2} \left(\frac{1}{\lambda_l} + \frac{1}{\lambda_m} \right)}$ – коэффициент межкомпонентного теплообмена в отсутствие газовой фазы.

Используемый при расчетах параметр газонасыщенности G определяется по формуле

$$G = \frac{V_g}{V_l + V_g}.$$

Удельная мощность тепловыделения за счет экзотермической реакции I вычисляется по выражению

$$I = hk\gamma\rho_T,$$

где h – тепловой эффект реакции;

k – константа скорости экзотермической химической реакции, зависящая от температуры.

В начальный момент времени температура смеси во всех точках образца равна температуре окружающей среды. Граничное условие на боковой поверхности образца (при $r = R$) имеет вид

$$q = \alpha\Delta T_{\text{окр}},$$

где α – коэффициент теплообмена с окружающей средой;

$\Delta T_{\text{окр}}$ – разность между температурой торфа на боковой поверхности образца и температурой окружающей среды.

При расчетах были использованы следующие значения параметров: $R = 20$ мм, $L = 120$ мм; $d = 1$ мм; $f = 2,45$ ГГц; $E = 250$ В/см; $\alpha = 10$ Вт/м²/К. Значения параметров материалов приведены в таблице.

Таблица. – Значения параметров материалов

Материал (вещество)	ρ_0 , кг/м ³	c , Дж/кг/К	λ , Вт/м/К	ε , Ф/м	$10^3 \cdot \text{tg } \delta_e$
Торф	500	2000	0,2	3,2	7,1
Силиконовое масло	800	2300	0,1	2,55	60
Вода	1000	4185	0,6	72	250

Константа скорости экзотермической реакции определялась из соотношения Аррениуса

$$k = Ae^{-E_a/R_0T},$$

где A – предэкспоненциальный множитель константы скорости экзотермической реакции разложения торфа;

E_a – энергия активации экзотермической реакции разложения торфа;

R_0 – универсальная газовая постоянная.

Значения кинетических параметров взяты из работы [3]: $E_a = 68,9$ кДж/моль; $A = 2537$ с⁻¹.

При моделировании использовался метод численного решения Патанкара [4].

Результаты расчетов. Суспензия торфа в силиконовом масле. Ниже представлены результаты исследования влияния газовой выделения, связанного с выходом летучих при нагреве частиц торфа, на распределение температур. Расчеты выполнены в двух вариантах: по пленочной и по пузырьковой модели. В обоих вариантах предполагается, что газ выделяется равномерно в течение 2 мин и весь выделившийся газ остается в объеме камеры.

Расчет по пленочной модели. Соотношение торф : масло = 1 : 2. Доля летучих равна 10 %. Источник излучения выключается, когда температура в центре превышает 250 °С.

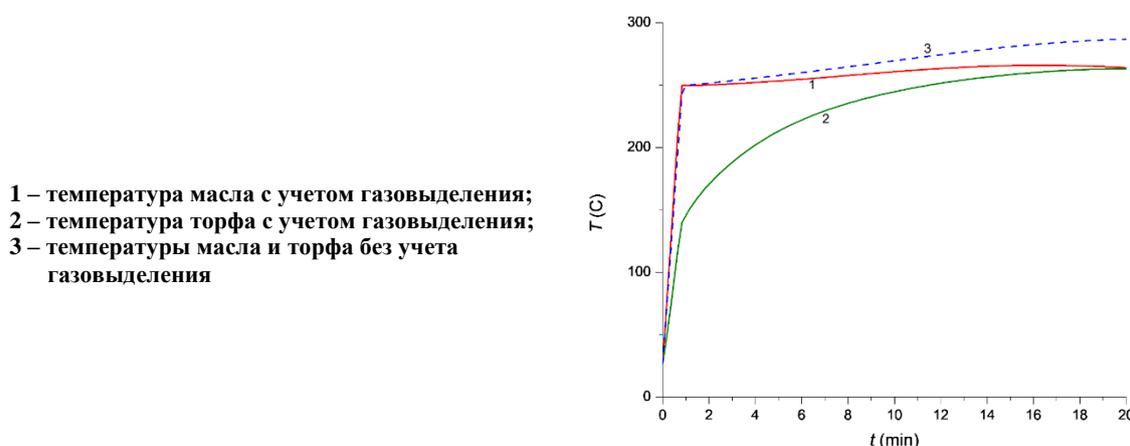


Рисунок 1. – Зависимость температуры в центре образца от времени (с учетом экзотермической реакции)

Расчет по пузырьковой модели. Соотношение торф : масло = 1 : 2. Доля летучих равна 10 %. Источник излучения выключается, когда температура в центре превышает 250 °С.

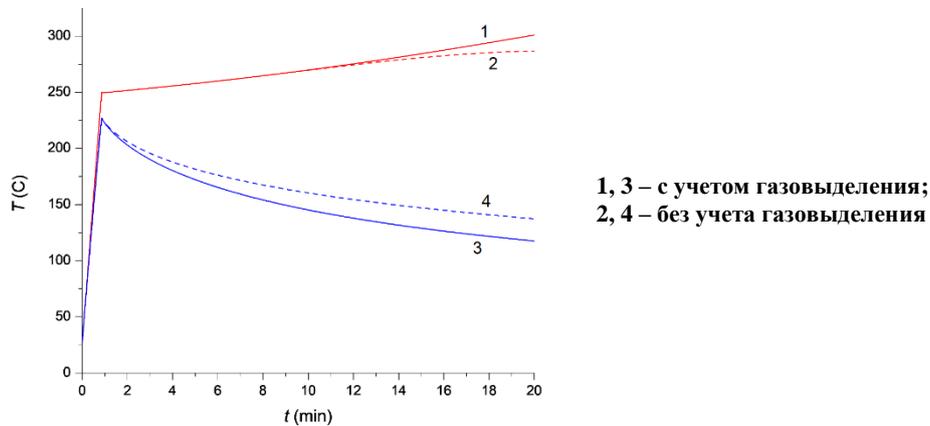


Рисунок 2. – Зависимость температуры от времени в центре (1, 2) и вблизи поверхности (3, 4) образца

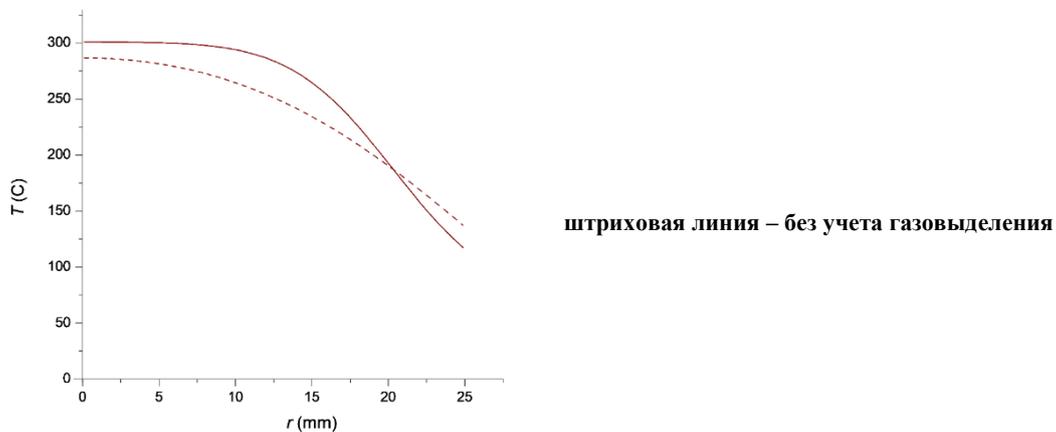


Рисунок 3. – Радиальное распределение температуры в образце

Суспензия торфа в воде. Влияние газонасыщенности на радиальное распределение температур. Соотношение торф : вода = 1 : 2.

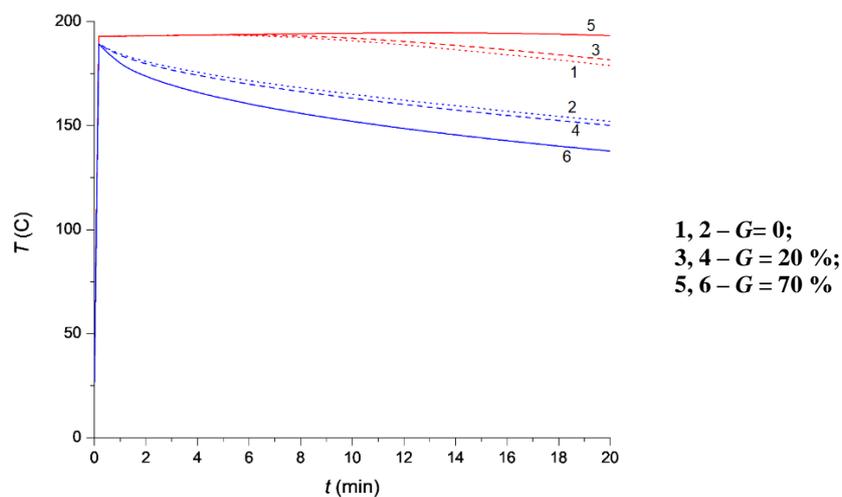
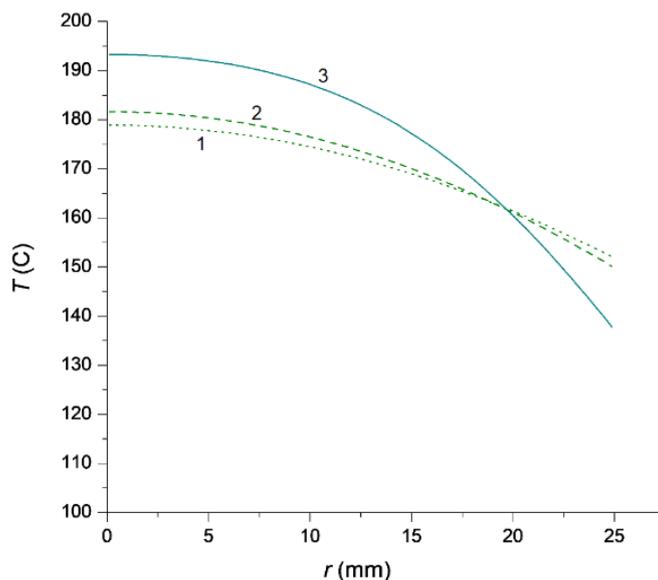


Рисунок 4. – Зависимость температуры от времени в центре (1, 3, 5) и вблизи поверхности (2, 4, 6) образца при разных значениях газонасыщенности G



1 – $G = 0$; 2 – $G = 20\%$; 3 – $G = 70\%$

Рисунок 5. – Радиальное распределение температуры в образце на момент времени $t = 20$ мин при разных значениях газонасыщенности G

Заключение. Разработана математическая модель микроволновой торрефикации органических материалов в жидкой среде с учетом образования газовой фазы, выделяющейся при частичном термическом разложении этих материалов. Результаты численного моделирования торрефикации суспензии торфа в масле и воде показывают существенное изменение характера роста температуры частиц торфа со временем, обусловленное этим газовыделением, а также заметное изменение радиального распределения температуры в разрабатываемом образце. Разработка технологии микроволновой высокотемпературной обработки суспензий органических материалов, сопровождающейся их экзотермическим разложением, должна вестись с учетом влияния на нагрев образующейся газовой фазы. Работы по торрефикации органических материалов с учетом газовыделения будут продолжены в направлении одновременного использования микроволновой и кавитационной обработки, что, предположительно, позволит повысить эффективность процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайченко В. М., Шевченко А. Л. Энергоэффективная торрефикация с использованием управляемой экзотермической реакции // Теплофизика высоких температур. – 2022. – Т. 60, № 3. – С. 448–454. – DOI: 10.31857/S0040364422020090.
2. Оценка возможности микроволновой торрефикации биомассы с использованием теплоты экзотермической реакции разложения / М. А. Брич, Н. М. Горбачев, И. А. Козначев и др. // Инженерно-физический журнал. – 2024. – Т. 97, № 7. – С. 1769–1777.
3. Altynbaeva D., Astafev A., Tabakaev R. Kinetics of biomass low-temperature pyrolysis by Coats-Redfern method // MATEC Web Conf. – 2018. – Vol. 194: Heat and Mass Transfer in the Thermal Control System of Technical and Technological Energy Equipment (HMTTSC-2018). – Art. ID 01058. – DOI: [10.1051/mateconf/201819401058](https://doi.org/10.1051/mateconf/201819401058).
4. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: пер. с англ. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.

REFERENCES

1. Zaichenko, V. M., & Shevchenko, A. L. (2022). Energy Efficient Torrefication Using a Controlled Exothermic Reaction. *High Temperature*, 60(3), 403–408. DOI: [10.1134/S0018151X22020092](https://doi.org/10.1134/S0018151X22020092).
2. Brich M. A., Gorbachev N. M., Koznachev I. A., & Makarenko D. S. (2024). Otsenka vozmozhnosti mikrovolnovo torrefikatsii biomassy s ispol'zovaniem teploty ekzotermicheskoi reaktсии razlozheniya [Evaluation of the possibility of microwave torrefaction of biomass using the heat of the exothermic decomposition reaction]. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*, 97(7), 1769–1777. (In Russ.).

3. Altynbaeva, D., Astafev, A., & Tabakaev, R. (2018). Kinetics of biomass low-temperature pyrolysis by Coats-Redfern method. In *MATEC Web Conf: Vol. 194. Heat and Mass Transfer in the Thermal Control System of Technical and Technological Energy Equipment (HMTTSC-2018)* (01058). DOI: [10.1051/mateconf/201819401058](https://doi.org/10.1051/mateconf/201819401058).
4. Patankar S. (1984). *Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti*. Moscow: Energoatomizdat. (In Russ.).

Поступила 12.03.2025

FEATURES OF MICROWAVE PROCESSING OF ORGANIC MATERIALS SUSPENSIONS IN AUTOTHERMAL MODE

M. BRITCH, N. GORBACHOV, I. KOZNACHEEV
(A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of NAS of Belarus)

Y. GROZBERG, A. ADAMOVICH
(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

In a numerical experiment of microwave torrefaction of a suspension of organic material, when part of the heat for heating comes from an exothermic decomposition reaction, it was shown that the gas release of decomposition products significantly changes the dielectric properties of the medium and the heat exchange conditions, which must be taken into account to ensure controllability of the temperature regime.

Keywords: suspension, microwave torrefaction, exothermic reaction, gas evolution, dielectric properties, thermal regime, numerical modeling.

УДК 541.183

DOI 10.52928/2070-1624-2025-44-1-53-60

**ИНДЕНТИРОВАНИЕ ПЛЕНОК НЕГАТИВНЫХ ФОТОРЕЗИСТОВ
ДЛЯ ОБРАТНОЙ ЛИТОГРАФИИ**

канд. физ.-мат. наук, доц. С. А. ВАБИЩЕВИЧ¹,
канд. физ.-мат. наук Д. И. БРИНКЕВИЧ²,
канд. физ.-мат. наук, доц. В. С. ПРОСОЛОВИЧ²,
О. А. ЗУБОВА³, канд. техн. наук О. В. ТАНАНА¹, Н. В. ВАБИЩЕВИЧ¹,
д-р философии (PhD) по физ.-мат. наукам, доц. Б. К. ИСМАЙЛОВ⁴

¹(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

²(Белорусский государственный университет, Минск)

³(ОАО «ИНТЕГРАЛ» – управляющая компания холдинга «ИНТЕГРАЛ», Минск)

⁴(Ташкентский государственный технический университет имени Ислама Каримова)

Методом индентирования исследованы пленки негативных фоторезистов (ФР) AZ nLOF 2020, AZ nLOF 2070 и AZ nLOF 5510 толщиной 0,99–6,1 мкм, нанесенные на поверхность пластин кремния методом центрифугирования. Экспериментально установлено, что поведение при индентировании фоторезиста AZ nLOF 5510 кардинально отличается от поведения фоторезистов серии AZ nLOF 20XX. Пленки AZ nLOF 5510 обладают высокой адгезией к кремнию, не было замечено даже единичных случаев их растрескивания или отслаивания от кремниевой подложки. Дополнительная стабилизирующая обработка и ионное травление пленок AZ nLOF 5510 приводят к их охрупчиванию и увеличению микротвердости на 50 % – с 0,14 до 0,21 ГПа. Прочностные и адгезионные свойства пленок серии AZ nLOF 20XX существенно хуже, чем AZ nLOF 5510. Коэффициент вязкости разрушения K_{1C} (трещиностойкость) пленок AZ nLOF 20XX варьировался в пределах 3,1–3,8 МПа·м^{1/2} и слабо возрастал после стабилизирующей обработки и ионного травления. Удельная энергия отслаивания G составляла 0,185 Дж/м² для AZ nLOF 2020 и 0,63 Дж/м² у AZ nLOF 2070. Ионное травление приводило к резкому (~ в 30 раз) снижению значений G . Истинная микротвердость пленок серии AZ nLOF 20XX находилась в пределах 0,1–0,2 ГПа и увеличивалась после стабилизирующей обработки и ионного травления, что обусловлено сшиванием молекул фоторезиста. Полученные экспериментальные данные объяснены с учетом упорядочения структуры фоторезистивной пленки вблизи границы раздела ФР/кремний вследствие ориентации молекул и конформационных изменений в структуре основного компонента фоторезиста – фенолформальдегидной смолы. Различия прочностных и адгезионных свойств фоторезистов серии AZ nLOF 20XX связаны с наличием в пленках остаточного растворителя.

Ключевые слова: негативный фоторезист, микроиндентирование, микротвердость, адгезия, трещиностойкость.

Введение. В современной микроэлектронике фотолитография применяется при формировании заданного рисунка на кремниевой подложке для получения необходимой топологии микросхем [1]. Важную роль в литографических процессах играют фоторезисты [2]. Негативные фоторезисты AZ nLOF 2020, AZ nLOF 2070 и AZ nLOF 5510, выпускаемые компанией MicroChemicals GmbH (Германия), широко используются в процессах обратной (lift-off) литографии. Они обладают высокой термической стабильностью и могут также применяться в процессах высокоразрешающей электронной литографии [3]. Указанные фоторезисты рассчитаны на разные толщины пленки и, соответственно, имеют различную вязкость. Так, при скорости вращения центрифуги 3000 об/мин толщина пленки составляет для фоторезиста AZ nLOF 2070 – 7,0 мкм; для AZ nLOF 2020 – 2,0 мкм, а у AZ nLOF 5510 – 0,90 мкм. Для определения оптимальных технологических режимов литографических процессов важно знание особенностей физико-механических свойств негативных фоторезистов, даже если речь идет о резистах одного производителя. Однако, несмотря на широкое применение фоторезистов, их прочностные и адгезионные свойства изучены недостаточно.

Целью настоящей работы являлось исследование методом индентирования прочностных характеристик пленок негативных фоторезистов AZ nLOF 2020, AZ nLOF 2070 и AZ nLOF 5510 на кремнии.

Методы исследования. Пленки негативных фоторезистов марок AZ nLOF 2020, 2070 и 5510 нанесли на поверхность пластин кремния методом центрифугирования [4]. Перед нанесением ФР пластины кремния подвергались стандартному циклу очистки поверхности в органических и неорганических растворителях. После формирования пленки ФР проводилась ее сушка при температуре 90–110 °С. Толщина фоторезистивных пленок после сушки составляла: у AZ nLOF 2070 – 5,8 мкм; для AZ nLOF 2020 – 6,0 мкм, а у AZ nLOF 5510 – 0,99 мкм. Измерение геометрической толщины пленок фоторезистов выполнялось на растровом электронном микроскопе. Впоследствии часть образцов с целью дополнительного усиления фоторезистивной пленки подвергалась облучению светом с $\lambda = 404$ нм в течение 106 с и последующей сушке при 115 °С длительностью 60 с. Кроме того, часть дополнительно усиленных образцов проходила

очистку поверхности фоторезистивной пленки в течении 20 мин ионами Ag энергией 160 эВ при интенсивности потока газа $6 \text{ см}^3/\text{мин}$.

Микроиндентирование проводилось на приборе ПМТ-3 при комнатной температуре [5]. В качестве индентора использовался алмазный наконечник в форме четырехгранной пирамиды с квадратным основанием и углом при вершине $\alpha = 136^\circ$. Нагрузка P на индентор варьировалась в пределах $1 \dots 50 \text{ г}$. Длительность нагружения составляла 2 с; выдержка под нагрузкой – 5 с. При измерении для каждой экспериментальной точки на поверхность образца наносилось не менее 50 отпечатков. Измерения восстановленной микротвердости H выполнялись по стандартной методике [6]. Обработка результатов измерений проводилась с использованием методов математической статистики [7]. Это обеспечивало погрешность измерений микротвердости менее 2,5 % (с доверительной вероятностью 0,95).

Коэффициент вязкости разрушения (трещиностойкость) K_{IC} рассчитывался по длине радиальных трещин у отпечатков согласно формуле [7]

$$K_{IC} = 0,016 \left(\frac{E}{H} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{P}{L^{\frac{3}{2}}},$$

где E – модуль Юнга (для кремния $1,5 \cdot 10^{11} \text{ Па}$),
 L – длина трещины.

Погрешность измерений коэффициента вязкости разрушения K_{IC} не превышала 8 %.

Прочность адгезионного взаимодействия фоторезистивной пленки с кремнием оценивалась по удельной энергии отслаивания пленки G , которая рассчитывалась по формуле [8]

$$G = \frac{0,627 H^2 h (1 - \nu^2)}{E (1 + \nu + 2(1 - \nu) H l^2 / P)^2},$$

где h – толщина пленки;
 ν – коэффициент Пуассона (использовалось значение 0,3);
 E – модуль Юнга (для исследовавшейся пленки 8 ГПа [1]);
 P – нагрузка на индентор,
 l – длина трещины расслоения.

Экспериментальные результаты и их обсуждение. Процессы индентирования тонких (AZ nLOF 5510) и толстых (AZ nLOF 2070 и AZ nLOF 2020) пленок отличались кардинальным образом. При индентировании тонких пленок AZ nLOF 5510 даже при минимальной использовавшейся нагрузке 1 г глубина проникновения индентора сравнима с толщиной пленки, и уже при нагрузке 2 г практически у всех образцов наблюдались светлые точки в центре отпечатка, обусловленные проникновением индентора в кремний. Истинную микротвердость пленок AZ nLOF 5510 можно оценить по измерениям при нагрузке 1 г. В исходной пленке она составляет $\sim 0,15 \text{ ГПа}$. При увеличении нагрузки сказывается влияние кремниевой подложки, обладающей существенно более высокой микротвердостью ($\sim 9 \text{ ГПа}$ [5; 6]), и измеренная величина H структуры фоторезист/кремний начинает расти (рисунок 1). При нагрузке 50 г величина H становится сравнимой с микротвердостью монокристаллического кремния [9]. При индентировании пленок AZ nLOF 5510 не было замечено даже единичных случаев растрескивания, появления радиальных трещин у углов отпечатков индентора или отслаивания пленок от кремниевой подложки (рисунок 2). Это характерно как для исходных пленок, так и для пленок, подвергнутых дополнительному усилению и ионному травлению. Данное обстоятельство свидетельствует о хорошей адгезии пленок AZ nLOF 5510 и не позволило измерить величину их трещиностойкости K_{IC} и удельной энергии отслаивания G .

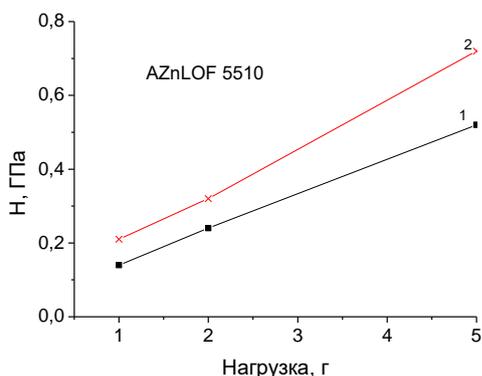
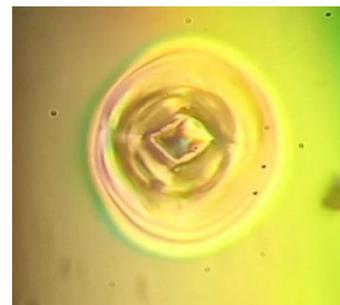


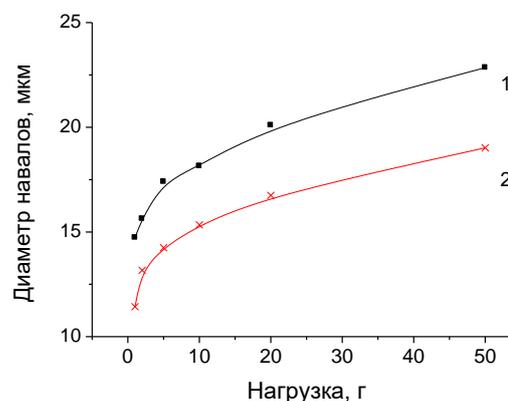
Рисунок 1. – Зависимость микротвердости от нагрузки для пленок фоторезиста AZ nLOF 5510 исходных (1) и после дополнительного усиления и ионного травления (2)

Рисунок 2. – Фотографии отпечатков индентора в пленках фоторезиста AZ nLOF 5510, выполненные методом дифференциально-интерференционного контраста (увел. в 800 раз)



На фотографиях отпечатков индентора в пленках фоторезиста AZ nLOF 5510, выполненных методом дифференциально-интерференционного контраста, отчетливо видны концентрические навалы вокруг отпечатков индентора (см. рисунок 2). Эти навалы обусловлены вытесненным из-под индентора материалом пленки, что можно рассматривать как формирование «замороженных» остаточных напряжений после снятия нагрузки. У исходных пленок размеры навалов вокруг отпечатков существенно больше, чем у пленок, прошедших дополнительное усиление и ионное травление (рисунок 3). Кроме того, вокруг некоторых отпечатков индентора при больших нагрузках (50 и 20 г) в пленках AZ nLOF5510, подвергавшихся дополнительному усилению и последующему ионному травлению, наблюдались трещины в области навалов, что указывает на их «охрупчивание» после такой обработки.

Рисунок 3. – Зависимости диаметров навалов от нагрузки для пленок фоторезиста AZ nLOF 5510 исходных (1) и после дополнительного усиления и ионного травления (2)



Дополнительная обработка пленок AZ nLOF5510 приводила также к увеличению микротвердости структур фоторезист/кремний при всех использовавшихся в работе нагрузках (см. рисунок 1). При этом истинная микротвердость пленки, измеренная при нагрузке 1 г, увеличилась на 50 % – с 0,14 до 0,21 ГПа. Возрастание микротвердости фоторезистивных диазохинон-новолачных пленок при сушке и различных высокоэнергетических воздействиях наблюдалось ранее в работах [10; 11]. Увеличение микротвердости полимерных материалов чаще всего обусловлено сшиванием молекул [12]. Сшивание молекул фоторезиста должно также приводить к «охрупчиванию» ФР-пленки и замедлению процесса выдавливания материала из-под индентора, т. е. к снижению размеров «навалов» вокруг отпечатков.

Поведение толстых пленок фоторезиста при индентировании существенно отличается от описанного выше для тонких слоев AZ nLOF 5510. На рисунке 4 представлены характерные фотографии отпечатков индентора в пленках фоторезиста AZ nLOF 2020 толщиной 6,0 мкм при нагрузках от 5 до 50 г. Схожие микрофотографии были также получены для пленок AZ nLOF 2070 толщиной 5,8 мкм. Важно обратить внимание на следующее. В отличие от индентирования тонких пленок AZ nLOF 5510, при индентировании толстых пленок фоторезистов серии AZ nLOF 20XX наблюдались угловые трещины у отпечатков индентора при всех использовавшихся нагрузках, что позволило оценить трещиностойкость указанных пленок и ее изменения при внешних воздействиях (рисунок 5). Коэффициент вязкости разрушения K_{1C} обеих пленок серии AZ nLOF 20XX возрастает при увеличении нагрузки, а также при проведении стабилизирующей обработки и ионного травления (рисунок 5). При нагрузках ≤ 10 г глубина проникновения индентора в фоторезистивную пленку не превышает 2/3 ее толщины (3,5 мкм). При этом влияние подложки не является определяющим. Как известно [13; 14], в случае «мягкой» пленки на «твердой» подложке пластическая деформация локализуется в пленке; подложка оказывает существенное влияние лишь при глубине проникновения индентора, близкой к толщине пленки. Таким образом, измеренное при нагрузках ≤ 10 г значение K_{1C} обусловлено свойствами фоторезистивной пленки. Отметим, что коэффициент вязкости разрушения K_{1C}

исходной пленки AZ nLOF 2020 несколько выше (на ~ 25 %), чем пленки AZ nLOF 2070. Последующие обработки нивелировали указанное различие: после ионного травления величина K_{1C} составляла ~ 4,2 МПа·м^{1/2} в обеих пленках.

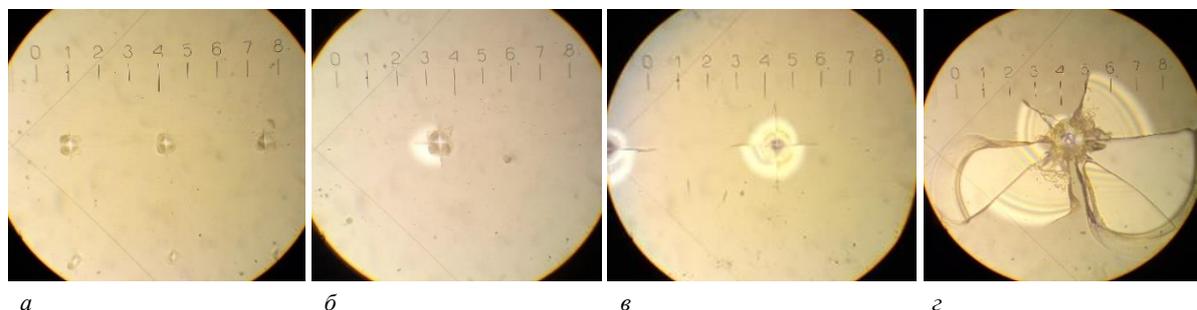


Рисунок 4. – Характерные фотографии отпечатков индентора в пленках фоторезиста AZ nLOF 2020 толщиной 6,0 мкм при нагрузках 5 (а), 10 (б), 20 (в) и 50 (г) г

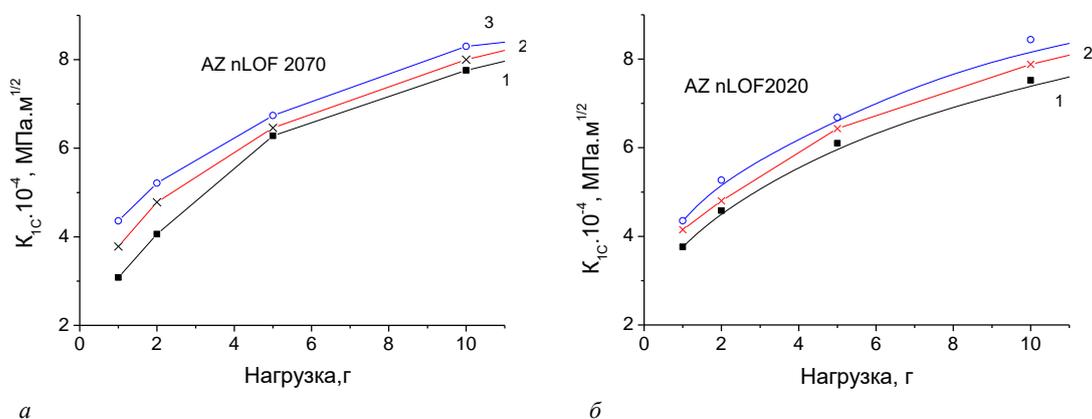


Рисунок 5. – Зависимости коэффициента вязкости разрушения K_{1C} от нагрузки для пленок AZ nLOF 2070 толщиной 5,8 мкм (а) и AZ nLOF 2020 толщиной 6,0 мкм (б) исходных (1), дополнительно усиленных (2) и протравленных ионами Ag (3)

При нагрузке 50 г индентор пересекает границу раздела фоторезист/кремний. При этом наблюдалось достаточно интенсивное отслоение пленки от подложки (см. рисунок 4, г) во всех исследованных пленках фоторезистов серии AZ nLOF 20XX, что указывает на слабую адгезию указанных пленок к кремнию. Измеренные при нагрузке $P = 50$ г значения удельной энергии отслаивания G для пленок фоторезистов серии AZ nLOF 20XX, исходных и подвергавших дополнительному усилению и ионному травлению, представлены в таблице. Видно, что адгезия (величина G) пленок AZ nLOF 2020 существенно ниже (более, чем в 3 раза), по сравнению с AZ nLOF 2070 и заметно снижается при проведении стабилизирующей обработки и ионного травления. У пленок AZ nLOF 2070 стабилизирующая обработка не оказывала существенного влияния на адгезию к кремниевой подложке, однако ионное травление приводило к катастрофическому (~ в 30 раз) снижению удельной энергии отслаивания G .

Таблица. – Удельная энергия отслаивания G пленок фоторезистов серии AZ nLOF 20XX на кремнии

Тип пленки	AZ nLOF 2020			AZ nLOF 2070		
	исходный	стабилизация	стабилизация + травление	исходный	стабилизация	стабилизация + травление
G , Дж/м ²	0,185	0,077	0,019	0,63	0,61	0,023

Микротвердость пленок фоторезистов серии AZ nLOF 20XX возрастала при увеличении нагрузки (рисунок 6). Наиболее интенсивно этот эффект проявляется в пленках AZ nLOF 2070 при нагрузках 1–5 г (рисунок 6, а). Отметим, что при нагрузке 1-2 г микротвердость исходных пленок AZ nLOF 2070 была ниже почти в 2 раза, чем у пленок AZ nLOF 2020 (кривые 1 на рисунке 6, а, б). Стабилизационная обработка и ионное травление увеличивали микротвердость обеих фоторезистивных пленок, особенно сильно пленок AZ nLOF 2070 при малых нагрузках.

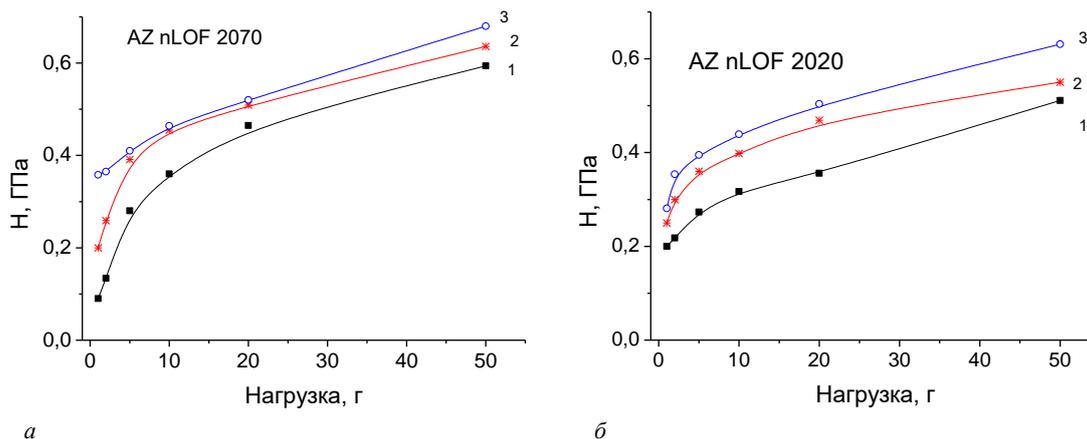


Рисунок 6. – Зависимость микротвердости от нагрузки для пленок фоторезистов AZ nLOF 2070 (а) и AZ nLOF 2020 (б) исходных (1), после дополнительного усиления (2) и ионного травления (3)

Полученные экспериментальные данные можно объяснить следующими обстоятельствами. Фенолформальдегидные смолы могут присоединять мономерные цепи тремя различными способами, т. е. строгая линейная цепочка молекулы полимера маловероятна. Однако на границе раздела фоторезист/кремний имеет место взаимодействие молекул фоторезиста и кремния (оксида на его поверхности). Так, ранее авторами [15] на границе раздела «полиакриламид – кремний» наблюдалось образование связей между атомами водорода в амидных группах и кислорода на поверхности кремния, приводящее к ориентации карбонильных групп параллельно поверхности кремния. Согласно [16], полимерные пленки способны ориентироваться под внешним воздействием (например, электрического или магнитного поля) и после удаления растворителя сохранять стабильный порядок. Причем степень кристалличности системы ориентированных цепей может быть близка к 100 %. Подобное взаимодействие полиметилметакрилата и SiO₂ отмечалось авторами [17] на глубине до десяти микрон. Упорядочение структуры фоторезистивной пленки вблизи границы раздела ФР/кремний вследствие ориентации молекул способствует ее упрочнению вдоль направления ориентации. В наших экспериментах это проявлялось как возрастание микротвердости и коэффициента вязкости разрушения K_{1C} фоторезистивных пленок при увеличении нагрузки (увеличении глубины проникновения индентора в пленку).

Различия прочностных свойств ФР одной серии AZ nLOF 20XX обусловлены наличием остаточного растворителя в фоторезистивных пленках. Как отмечалось выше, фоторезисты AZ nLOF 2020 и AZ nLOF 2070 рассчитаны на разные толщины пленки. Вследствие этого они имеют различную вязкость и, соответственно, различаются содержанием растворителя. Поскольку AZ nLOF 2020 оптимизирован под толщину пленки 2,0 мкм, он имеет более низкую вязкость и, следовательно, более высокое содержание растворителя по сравнению с AZ nLOF 2070, оптимизированным под пленки толщиной 7,0 мкм. Стандартная сушка после центрифугирования (110 °C, 60 с) практически полностью удаляет растворитель из пленки AZ nLOF 2070. Концентрация остаточного растворителя мала и усадка пленки AZ nLOF 2070 после дополнительной стабилизирующей обработки составляет ~ 0,9 % от ее геометрической толщины. Отметим, что усадка фоторезистивной пленки обусловлена испарением растворителя в процессе сушки [2; 18]. Фоторезист AZ nLOF 2020 рассчитан на формирование пленок толщиной 2,0 мкм и содержание растворителя в нем выше, чем в AZ nLOF 2070. Стандартная сушка (110 °C, 60 с) после нанесения пленки AZ nLOF 2020 толщиной ~ 6 мкм лишь частично удаляет растворитель, поэтому после дополнительной стабилизирующей обработки усадка этих пленок достаточно существенна и достигает 9 % от ее геометрической толщины.

Радиационно-стимулированные процессы, протекающие при травлении ионами Ag обусловлены следующими причинами. Энергии ионов Ag достаточно для разрушения С–С-связей [19], возбуждения и ионизации макромолекул фенолформальдегидной смолы, являющейся основным компонентом исследовавшихся фоторезистов [3]. Это приводит к образованию радикалов преимущественно феноксильного и метиленового типа, рекомбинация которых обуславливает формирование ковалентных швов между полимерными цепями [20]. Шливы в свою очередь способствуют упрочнению пленки.

Наличие длинных молекулярных цепочек в структуре фенолформальдегидной смолы может способствовать передаче энергии из приповерхностной области, взаимодействующей с ионами Ag, на расстояние до 10 мкм к границе раздела ФР/кремний, особенно если избыточная энергия недостаточна для разрыва С–С-связей [21]. При этом значительная часть этой энергии низкоэнергетического возбуждения макромолекул «накапливается» на межфазных границах, на дефектах и включениях в пленке. Ее может быть достаточно для различных конформационных изменений в структуре фенолформальдегидной смолы (т. е. связанных с расположением полимерной цепи в объеме пленки). В результате этого может происходить релаксация напряжений в пленке, что в конечном итоге будет проявляться как снижение адгезии фоторезиста к кремнию.

Кроме того, при сшивании молекул фоторезиста увеличивается плотность резистивной пленки, что приводит к формированию упругих напряжений на границе раздела фоторезист/кремний и ухудшению адгезии полимера к кремниевой подложке.

Заключение. Экспериментально установлено, что поведение при индентировании фоторезиста AZ nLOF 5510 кардинально отличается от поведения фоторезистов серии AZ nLOF 20XX. Пленки AZ nLOF 5510 обладают высокой адгезией к кремнию, не было замечено даже единичных случаев их растрескивания или отслаивания от кремниевой подложки. Дополнительная стабилизирующая обработка и ионное травление пленок AZ nLOF 5510 приводят к их охрупчиванию и увеличению микротвердости на 50 % – с 0,14 до 0,21 ГПа. Прочностные и адгезионные свойства пленок серии AZ nLOF 20XX существенно хуже, чем AZ nLOF 5510. Коэффициент вязкости разрушения K_{IC} (трещиностойкость) пленок AZ nLOF 20XX варьировался в пределах 3,1–3,8 МПа·м^{1/2} и слабо возрастал после стабилизирующей обработки и ионного травления. Удельная энергия отслаивания G составляла 0,185 Дж/м² для AZ nLOF 2020 и 0,63 Дж/м² у AZ nLOF 2070. Ионное травление приводило к резкому (~ в 30 раз) снижению значений G . Истинная микротвердость пленок серии AZ nLOF 20XX находилась в пределах 0,1–0,2 ГПа и увеличивалась после стабилизирующей обработки и ионного травления, что обусловлено сшиванием молекул фоторезиста. Полученные экспериментальные данные объяснены с учетом упорядочения структуры фоторезистивной пленки вблизи границы раздела ФР/кремний вследствие ориентации молекул и конформационных изменений в структуре основного компонента фоторезиста – фенолформальдегидной смолы. Различия прочностных и адгезионных свойств фоторезистов серии AZ nLOF 20XX связаны с наличием в пленках остаточного растворителя.

Работа выполнена в рамках задания 2.16 Государственной программы научных исследований «Материаловедение, новые материалы и технологии», подпрограмма «Наноструктурные материалы, нанотехнологии, нанотехника («Наноструктура»).

ЛИТЕРАТУРА

1. Технология СБИС: в 2-х кн.: пер. с англ. / К. Пирс, А. Адамс, Л. Кац и др.; под ред. С. Зи. – М.: Мир, 1986. – Кн. 1. – 404 с.
2. Okoroanyanwu U. Lithographic resists as amazing compact imaging systems – A review // *Micro and Nano Engineering*. – 2024. – Vol. 24. – Art. ID 100280. – DOI: [10.1016/j.mne.2024.100280](https://doi.org/10.1016/j.mne.2024.100280).
3. Инфракрасная Фурье-спектроскопия диффузного отражения пленок негативных фоторезистов серии AZ nLOF на монокристаллическом кремнии / Д. И. Бринкевич, В. С. Просолович, В. В. Колос и др. // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки*. – 2024. – № 2(43). – С. 34–40. – DOI: [10.52928/2070-1624-2024-43-2-34-40](https://doi.org/10.52928/2070-1624-2024-43-2-34-40).
4. Модификация спектров отражения пленок диазохинон-новолачного фоторезиста при имплантации ионами бора и фосфора / Д. И. Бринкевич, А. А. Харченко, В. С. Просолович и др. // *Микроэлектроника*. – 2019. – Т. 48, № 3. – С. 235–239. – DOI: [10.1134/S0544126919020029](https://doi.org/10.1134/S0544126919020029).
5. Бринкевич Д. И., Вабишевич Н. В., Вабишевич С. А. Прочностные свойства термообработанного кремния, выращенного в магнитном поле // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки*. – 2009. – № 3. – С. 152–157.
6. Вабишевич С. А., Вабишевич Н. В., Бринкевич Д. И. Микротвердость пластин кремния, прошедшего геттеризирующую термообработку // *Перспективные материалы*. – 2005. – № 2. – С. 20–22.
7. Бринкевич Д. И., Вабишевич Н. В., Вабишевич С. А. Физико-механические свойства эпитаксиальных слоев фосфида галлия // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки*. – 2010. – № 9. – С. 92–97.
8. Адгезия к монокристаллическому кремнию пленок диазохинонноволачных фоторезистов, облученных электронами / С. А. Вабишевич, Н. В. Вабишевич, С. Д. Бринкевич и др. // *Химия высоких энергий*. – 2024. – Т. 58, № 1. – С. 60–68.
9. Прочностные свойства пленок фоторезиста AZ nLOF 5510 / С. А. Абрамов, Д. И. Бринкевич, В. С. Просолович и др. // *Приборостроение – 2024: материалы 17-й Междунар. науч.-техн. конф., 26–29 нояб. 2024 г., Минск / редкол.: А. И. Свистун (пред.), О. К. Гусев, Р. И. Воробей [и др.]*. – Минск: Интегралполиграф, 2024. – С. 106–108.
10. Garcia I. T. S., Zawislak F. C., Samios D. The effects of nuclear and electronic stopping powers on ion irradiated novolac-diazoquinone films // *Applied Surface Science*. – 2004. – Vol. 228, iss. 1–4. – P. 63–76. – DOI: [10.1016/j.apsusc.2003.12.027](https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2003.12.027).
11. Brinkevich D. I., Brinkevich S. D., Prosolovich V. S. Ion Implantation in Diazoquinone–Novolac Photoresist // *High Energy Chemistry*. – 2022. – Vol. 56, iss. 4. – P. 270–276. – DOI: [10.1134/s0018143922040051](https://doi.org/10.1134/s0018143922040051).
12. Ионная имплантация позитивных фоторезистов / Бринкевич Д. И., Бринкевич С. Д., Вабишевич Н. В. и др. // *Микроэлектроника*. – 2014. – Т. 43, № 3. – С. 193–199. – DOI: [10.7868/S0544126914010037](https://doi.org/10.7868/S0544126914010037).
13. Шугуров А. Р., Панин А. В., Оскомов К. В. Особенности определения механических характеристик тонких пленок методом наноиндентирования // *Физика твердого тела*. – 2008. – Т. 50, № 6. – С. 1007–1012.
14. Взаимодействие индентора с пленками сополимеров на основе метилметакрилата / С. А. Вабишевич, Н. В. Вабишевич, Д. И. Бринкевич и др. // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки*. – 2016. – № 4. – С. 90–96.
15. Lu X. L., Mi Y. L. Characterization of the Interfacial Interaction between Polyacrylamide and Silicon Substrate by Fourier Transform Infrared Spectroscopy // *Macromolecules*. – 2005. – Vol. 38, iss. 3. – P. 839–843. – DOI: [10.1021/ma0486896](https://doi.org/10.1021/ma0486896).
16. Власов С. В., Кулизнев В. Н. Ориентированное состояние полимеров. – М.: Знание, 1987. – 48 с.
17. Семенович Г. М., Липатов Ю. С., Гусев С. С. Исследование структуры граничных слоев полиметилметакрилата методом нарушенного полного отражения // *Высокомолекулярные соединения. Сер. Ф*. – 1978. – Т. 20, № 9. – С. 2000–2005.

18. Лапшинов Б. А. Технология литографических процессов. – М.: МИЭМ, 2011. – 95 с.
19. Kemper T. W., Sinnott S. B. Hyperthermal Atomic Oxygen and Argon Modification of Polymer Surfaces Investigated by Molecular Dynamics Simulations // *Plasma Process. Polym.* – 2012. – Vol. 9, iss. 7. – P. 690–700. – DOI: [10.1002/ppap.201100197](https://doi.org/10.1002/ppap.201100197).
20. Effect of Ion Implantation on the Adhesion of Positive Diazoquinone-Novolak Photoresist Films to Single-Crystal Silicon / S. Vabishchevich, S. Brinkevich, V. Prosolovich et al. // *J. of Surface Investigation. X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques.* – 2020. – Vol. 14, iss. 6. – P. 1352–1357. – DOI: [10.1134/S1027451020060476](https://doi.org/10.1134/S1027451020060476).
21. Модификация пленок диазохинон-новолачного фоторезиста за областью внедрения ионов В⁺ / С. Д. Бринкевич, Е. В. Гринюк, Д. И. Бринкевич и др. // *Химия высоких энергий.* – 2020. – Т. 54, № 5. – С. 377–386. – DOI: [10.31857/S0023119320050046](https://doi.org/10.31857/S0023119320050046).

REFERENCES

1. Pirs, K., Adams, A., Kats, L., Tsai, Dzh., Seidel, T., Makgillis, D. & Zi, S. (Ed.). (1986). *Tekhnologiya SBIS: v 2-h kn.* Kn. 1. Moscow: Mir. (In Russ.).
2. Okoroanyanwu U. (2024). Lithographic resists as amazing compact imaging systems – A review // *Micro and Nano Engineering*, 24, 100280. DOI: [10.1016/j.mne.2024.100280](https://doi.org/10.1016/j.mne.2024.100280).
3. Brinkevich, D. I., Prosolovich, V. S., Kolos, V. V., Zubova, O. A., & Vabishchevich, S. A. (2024). Infrakrasnaya Fur'espektroskopiya diffuznogo otrazheniya plenok negativnykh fotorezistov serii AZ nLOF na monokristallicheskom kremnii. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, 2(43), 34–40. DOI: [10.52928/2070-1624-2024-43-2-34-40](https://doi.org/10.52928/2070-1624-2024-43-2-34-40). (In Russ., abstr. in Engl.).
4. Brinkevich, D. I., Kharchenko, A. A., Prosolovich, V. S., Odzhaev, V. B., Brinkevich, S. D., & Yankovski, Yu. N. (2019). Reflection spectra modification of diazoquinone-novolac photoresist implanted with B and P ions. *Russian Microelectronics*, 48(3), 197–201. DOI: [10.1134/S1063739719020021](https://doi.org/10.1134/S1063739719020021).
5. Brinkevich, D. I., Vabishchevich, N. V., & Vabishchevich, S. A. (2009). Prochnostnye svoystva termoobrabotannogo kremniya, vyrashchennogo v magnitnom pole. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C. Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (3), 152–157. (In Russ.).
6. Vabishchevich, S. A., Vabishchevich, N. V., & Brinkevich, D. I. (2005). Microhardness of silicon sheets, subjected to gettering treatment. *J. Advanced Materials*, 12(2), 125–128.
7. Brinkevich, D. I., Vabishchevich, N. V., & Vabishchevich, S. A. (2010). Fiziko-mekhanicheskie svoystva epitaksial'nykh sloev GaP [Physical and mechanical properties of GaP epitaxial layers]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (9), 92–97. (In Russ., abstr. in Engl.).
8. Vabishchevich, S. A., Vabishchevich, N. V., Brinkevich, S. D., Brinkevich, D. I., Prosolovich, V. S., & Lastovskii, S. B. (2024). Adhesion of Electron-Irradiated Diazoquinone–Novolac Photoresist Films to Single-Crystal Silicon. *High Energy Chemistry*, 58(1), 112–119. DOI: [10.1134/S001814392401017X](https://doi.org/10.1134/S001814392401017X).
9. Abramov, S. A., Brinkevich, D. I., Prosolovich, V. S., Kolos, V. V., Zubova, O. A., Chernyi, ... Vabishchevich, N. V. (2024). Prochnostnye svoystva plenok fotorezista AZ nLOF 5510 [Strength properties of AZ nLOF 5510 photoresist films]. In A. I. Svistun, O. K. Gusev, R. I. Vorobei et al. (Eds.), *Priborostroenie – 2024 [Instrumentation Engineering – 2024]* (106–108). Minsk: Integralpoligraf. (In Russ., abstr. in Engl.).
10. Garcia, I. T. S., Zawislak, F. C., & Samios, D. (2004). The effects of nuclear and electronic stopping powers on ion irradiated novolac-diazoquinone films. *Applied Surface Science*, 228(1–4), 63–76. DOI: [10.1016/j.apsusc.2003.12.027](https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2003.12.027).
11. Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., & Prosolovich, V. S. (2022). Ion Implantation in Diazoquinone–Novolac Photoresist. *High Energy Chemistry*, 56(4), 270–276. DOI: [10.1134/s0018143922040051](https://doi.org/10.1134/s0018143922040051).
12. Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., Vabishchevich, N. V., Odzhaev, V. B., & Prosolovich, V. S. (2014). Ion implantation of positive photoresists. *Russian Microelectronics*, 43(3), 194–200. DOI: [10.1134/S106373971401003X](https://doi.org/10.1134/S106373971401003X).
13. Shugurov, A. R., Panin, A. V., & Oskomov, K. V. (2008). Osobennosti opredeleniya mekhanicheskikh harakteristik tonkih plenok metodom nanoindentirovaniya. *Fizika tverdogo tela [Physics of the Solid State]*, 50(6), 1007–1012. (In Russ.).
14. Vabishchevich, S. A., Vabishchevich, N. V., Brinkevich, D. I., & Prosolovich, V. S. (2016). Vzaimodeistvie indentora s plenkami sopolimerov na osnove metilmetakrilata [Interaction of the Indentor with Films of Copolymers on the Basis of Methylmethacrylate]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (4), 90–96.
15. Lu, X. L., & Mi, Y. L. (2005). Characterization of the Interfacial Interaction between Polyacrylamide and Silicon Substrate by Fourier Transform Infrared Spectroscopy. *Macromolecules*, 38(3), 839–843. DOI: [10.1021/ma0486896](https://doi.org/10.1021/ma0486896).
16. Vlasov, S. V., & Kuliznev, V. N. (1987). *Orientirovannoe sostoyanie polimerov*. Moscow: Znanie. (In Russ.).
17. Semenovich G. M., Lipatov Yu. S., Gusev S. S. (1978). Issledovanie struktury granichnykh sloev polimetilmetakrilata metodom narushennogo polnogo otrazheniya. *Vysokomolekulyarnye soedineniya. Ser. F*, 20(9), 2000–2005. (In Russ.).
18. Lapshinov, B. A. (2011). *Tekhnologiya litograficheskikh protsessov*. Moscow: MIEM. (In Russ.).
19. Kemper, T. W., & Sinnott, S. B. (2012). Hyperthermal Atomic Oxygen and Argon Modification of Polymer Surfaces Investigated by Molecular Dynamics Simulations. *Plasma Process. Polym.*, 9(7), 690–700. DOI: [10.1002/ppap.201100197](https://doi.org/10.1002/ppap.201100197).
20. Vabishchevich, S., Brinkevich, S., Prosolovich, V., Vabishchevich, N., & Brinkevich, D. (2020). Effect of Ion Implantation on the Adhesion of Positive Diazoquinone-Novolak Photoresist Films to Single-Crystal Silicon. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, 14(6), 1352–1357. DOI: [10.1134/S1027451020060476](https://doi.org/10.1134/S1027451020060476).

21. Brinkevich, S. D., Grinyuk, E. V., Brinkevich, D. I., & Prosolovich, V. S. (2020) Modification of Diazoquinone–Novolac Photoresist Films beyond the Region of Implantation of B⁺ Ions. *High energy chemistry*, 54(5), 342–351. DOI: [10.1134/S0018143920050045](https://doi.org/10.1134/S0018143920050045).

Поступила 05.03.2025

INDENTATION OF NEGATIVE PHOTORESIST FILMS FOR LIFT-OFF LITHOGRAPHY

S. VABISHCHEVICH¹, D. BRINKEVICH², V. PROSOLOVICH², O. ZUBOVA³,
O. TANANA¹, N. VABISHCHEVICH¹, B. K. ISMAYLOV⁴

¹(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

²(Belarusian State University, Minsk)

³(“INTEGRAL” Joint Stock Company, Minsk)

⁴(Tashkent State Technical University Named after Islam Karimov)

Films of the AZ nLOF 2020, AZ nLOF 2070 and AZ nLOF 5510 negative photoresists (PR) with a thickness of 0,95 – 6,1 μm, deposited on the surface of silicon wafers by the centrifugation method, were studied by the indentation method. It was experimentally established that the behavior of AZ nLOF 5510 and AZ nLOF 20XX series photoresists during indentation differs dramatically. AZ nLOF 5510 films have high adhesion to silicon; not even single cases of cracking or peeling of films from the silicon substrate were observed. Additional stabilizing treatment and ion etching of AZ nLOF 5510 films leads to their embrittlement and an increase in microhardness by 50 % – from 0,14 to 0,21 GPa. The strength and adhesive properties of the AZ nLOF 20XX series films are significantly worse than those of AZ nLOF 5510. The fracture toughness coefficient K_{IC} (crack resistance) of the AZ nLOF 20XX films varied within 3,1–3,8 MPa·m^{1/2} and increased slightly after stabilizing treatment and ion etching. The specific peel energy G was 0,185 J/m² for AZ nLOF 2020 and 0,63 J/m² for AZ nLOF 2070. Ion etching resulted in a sharp (~ 30-fold) decrease in the G values. The true microhardness of the AZ nLOF 20XX series films was within 0,1–0,2 GPa and increased after stabilizing treatment and ion etching, which is due to the cross-linking of photoresist molecules. The obtained experimental data are explained taking into account the ordering of the photoresist film structure near the PR/silicon interface due to the orientation of molecules and conformational changes in the structure of the main component of the photoresist - phenol-formaldehyde resin. The differences in the strength and adhesive properties of the AZ nLOF 20XX series photoresists are associated with the presence of residual solvent in the films.

Keywords: negative photoresist, microindentation, microhardness, adhesion, crack resistance.

УДК 539.214+539.219.2+620.178.6+621.77

DOI 10.52928/2070-1624-2025-44-1-61-69

**УДАРНО-ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В МЕТАЛЛАХ ПРИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ
С ПРИМЕНЕНИЕМ ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА***канд. техн. наук О. Б. СКВОРЦОВ, канд. физ.-мат. наук В. И. СТАШЕНКО
(Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Москва, Россия)**д-р техн. наук, проф. В. С. САВЕНКО**(Мозырский государственный педагогический университет имени И. П. Шамякина)*

При обработке металлов давлением находят применение различные виды дополнительного физического воздействия в виде нагрева, механических ударов, вибрации, акустического ультразвукового облучения, электроимпульсного воздействия. Такие воздействия, в частности, связаны с проявлениями колебательного движения частиц материалов, которое может рассматриваться как спусковой механизм для движения дислокаций и структурных неоднородностей материала. Эти неоднородности могут находиться в условиях остаточного механического напряженного состояния, которое при колебательном воздействии приводит к их передвижению и переходу в более устойчивое состояние. Подобные эффекты сопровождаются улучшением механических свойств и деформационными процессами при повышенной пластичности. В работе рассмотрены некоторые особенности проявления таких колебательных процессов, возникающих при дополнительных внешних воздействиях и применяемых при разработке технологий обработки металлов давлением с целью снижения сопротивляемости деформированию и улучшения структуры материалов.

Ключевые слова: *электропластический эффект, акустическое смягчение, дислокации, удар, вибрация, виброперегрузка, деформация.*

Введение. Механические ударные и вибрационные воздействия рассматривают как одну из основных причин повреждения конструкционных материалов и элементов. Под действием ударов в конструктивных элементах возникают собственные колебания и волны, которые создают динамические нагрузки на материал [1]. При этом сам конструктивный элемент фактически является механическим фильтром, выделяющим из широкополосного ударного спектра определенные частоты [2]. Корректная оценка вибрационного воздействия для этого случая является достаточно сложной технической задачей [3]. Это связано как с взаимодействием рассматриваемого конструктивного элемента с элементами его крепления [4], так и окружающей его средой (например, со смазкой или охлаждающей жидкостью). Особенно заметное воздействие на такие колебания оказывают различные резонансные процессы, что необходимо учитывать в оценке модели поведения исследуемого объекта под воздействием вибрации [5]. Анализ получаемой при испытаниях информации также осложняется тем, что ударные воздействия, как правило, носят случайный характер и для изучения получаемых данных необходимо использовать вероятностные методы анализа [6]. В результате при таком анализе часто ограничиваются качественными оценками и рекомендациями [7], а для описания применяемых воздействий вводят специализированные характеристики ударов в виде ударного спектра (SRS) [8].

В отличие от рассмотренных случаев, когда ударные и вибрационные воздействия оцениваются как негативные и нежелательные, при обработке металлов давлением роль ударных и вибрационных процессов не так однозначна и их присутствие может приносить ощутимую пользу в виде снижения сопротивляемости деформациям металла, повышения пластичности, упрочнения или разупрочнения или снижения остаточных механических напряжений. Управление особенностями ударных и вибрационных процессов при обработке металлов давлением позволяет совершенствовать технологические процессы [9]. Такие особенности важны при изготовлении и эксплуатации металлических электропроводящих элементов мощного электрического оборудования [10], которые испытывают механические ударные и вибрационные нагрузки при воздействии больших импульсных электрических токов. Источником таких «полезных» ударных и вибрационных воздействий могут быть и используемые при обработке материалов давлением инструменты [11] или дополнительное внешнее воздействие при исследовании различных материалов [12]. Такие вибрационные воздействия могут также являться существенной частью используемых технологий обработки металла, например, аддитивных или деформации изделий из металла для изменения пластических свойств материала [13]. Представлен критический анализ различных механизмов взаимодействия электрического тока через проводник и связанного с этим проявлением электропластического эффекта. В этой работе обоснована физическая несостоятельность большинства существующих гипотез, которые объясняют механизмы возникающих деформационных процессов, и делается вывод о важности именно импульсного характера электрического

воздействия. Экспериментальные данные работы подтверждают такой вывод. Действие на обрабатываемый материал постоянного тока большой плотности ограничивается эффектами теплового нагревания металла, а наблюдаемые изменения свойств определяются таким нагревом. Сам по себе нагрев обрабатываемого материала может сопровождаться повышением пластичности, но такой технологический прием энергетически малоэффективен и его применение может сопровождаться возникновением остаточных напряжений, что может потребовать дополнительной обработки для их релаксации. Воздействие электрических импульсов является более простым техническим решением, часто оно эквивалентно использованию ультразвукового облучения, а его действие сопровождается значительным виброакустическим откликом. Особенности формирования отклика при действии электрических импульсов рассмотрены ниже.

Методика экспериментов. При изучении влияния электропластического эффекта (ЭПЭ) и/или акустического ультразвукового смягчения необходимо учитывать, что даже в случае воздействия одиночных ударных импульсов последние сопровождаются серией колебаний в материале. В этих условиях материал испытывает циклическое нагружение в виде малоциклового, многоциклового или гигациклового нагружения [18; 19]. Испытания при таких нагрузках показывают, что прочностные характеристики материала существенно снижаются. Оценка прочности при циклическом нагружении материала в большинстве случаев основана на использовании $S-N$ диаграмм, которые показывают, как с увеличением числа циклов нагружения N снижается допустимое механическое нагружение S . В условиях циклического нагружения в виде вибрации в месте механических напряжений существенно более удобно использовать эквивалентную оценку по виброперегрузке, которая показывает, насколько динамическое действие вибрационного ускорения больше величины земного ускорения g . Такая виброперегрузка является относительной характеристикой нагружения и равна механическому ускорению, измеренному в единицах земного ускорения. Она может быть получена непосредственно в виде сигнала с акселерометра, установленного на испытываемом образце, и для типичных случаев возникающей высокочастотной вибрации имеет порядок десятков или сотен g . Частоты вибрационных колебаний при этом достигают нескольких килогерц или десятков килогерц. Несмотря на большие виброперегрузки, соответствующие вибрационные деформации (перемещения) незначительны и их прямое измерение затруднительно. Эти особенности необходимо учитывать при исследовании влияния колебательных процессов в материалах на движение дислокаций [11]. В противном случае измерения приходится выполнять на сравнительно низких частотах (например, 67–400 Гц [11]), при которых затруднительно обеспечить заметные виброперегрузки и которые существенно ниже собственных частот колебаний образцов на испытательном стенде.

При изучении свойств металлов, подвергнутых обработке давлением (прокатка, ковка, штамповка, прессование, плющение, волочение), а также таких операций, как сварка или сверление, возможно проведение экспериментов на соответствующем оборудовании. При большом объеме экспериментальных исследований с возможностью повторения опытов удобнее воспользоваться специализированными испытательными машинами, которые обеспечивают статическое или квазистатическое нагружение и дополнены средствами создания дополнительного динамического воздействия, создающими виброакустический отклик в испытываемом образце. Пример структуры такого стенда для проведения исследований представлен на рисунке 1. Испытываемый образец нагружен статическим растягивающим усилием, которое медленно увеличивается при постоянной скорости деформации. Контроль механического напряжения обеспечивается тензометрическим датчиком силы, что позволяет получить для испытываемого образца $S-N$ диаграмму.

Для получения электропластического эффекта испытываемый образец подключен к формирователю одиночных электрических импульсов, который обеспечивает генерацию прямоугольного импульса. Действие такого импульса сопровождается генерацией в исследуемом образце виброакустического отклика и накладывается на статическое растягивающее нагружение, которое проявляется в виде кратковременных «провалов» на $S-N$ диаграмме. Примеры таких диаграмм представлены на рисунках 2–5.

Момент разрушения образца, как правило, не синхронизирован с моментом поступления электрического импульса. Это свидетельствует о том, что динамические нагрузки в момент действия импульса и непосредственно после него не являются прямой причиной наступления фазы быстрого разрушения образца при превышении предела прочности. Амплитуда «провалов» пропорциональна амплитуде напряжения и тока электрического импульса и слабо меняется для различных участков $S-N$ диаграммы, соответствующих упругой, упругопластической, пластической деформации, а также области деформации, близкой к порогу разрушения образца.

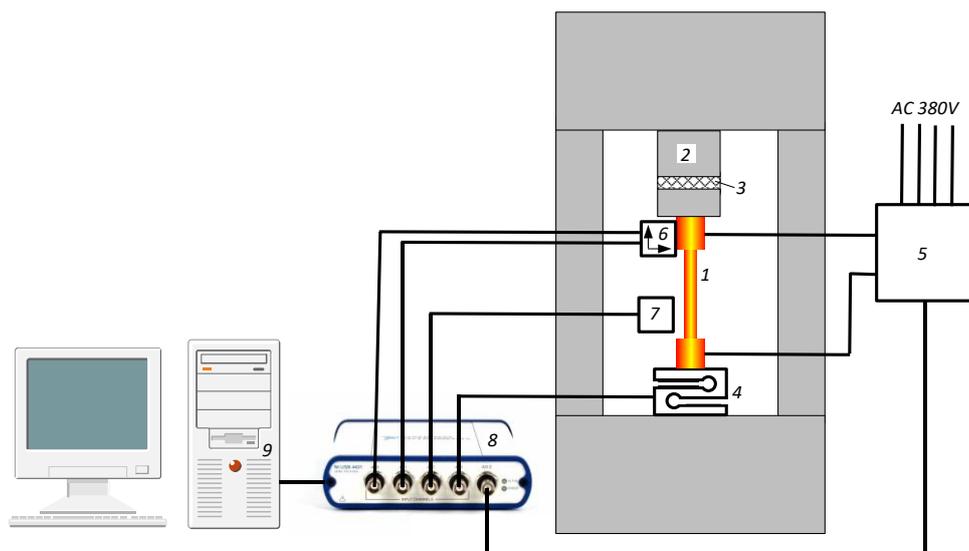
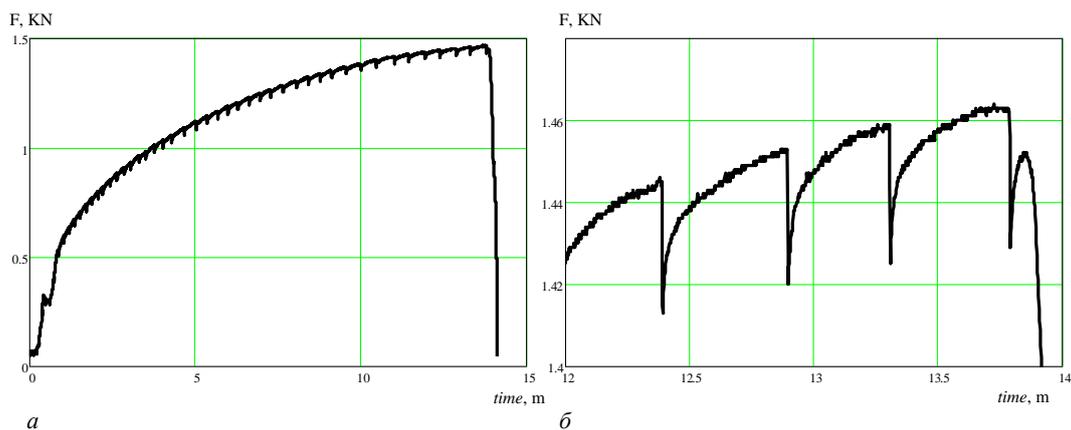
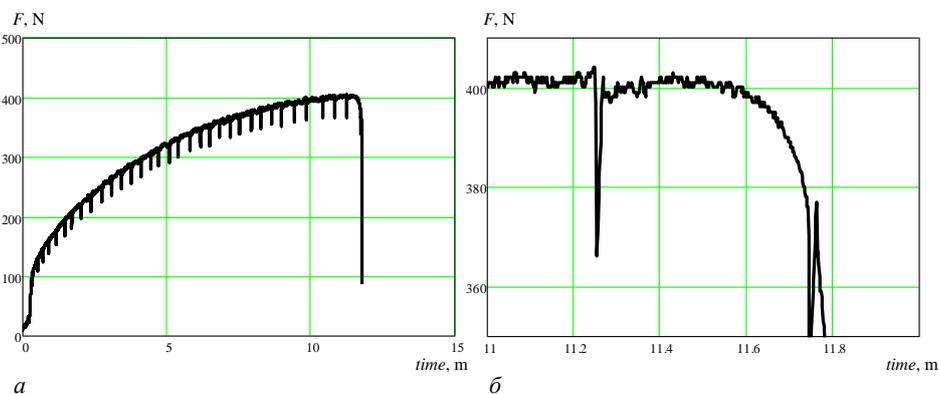


Рисунок 1. – Стенд для исследования влияния вибрации на деформации исследуемого образца (1) на испытательной машине (2). Образец закреплен через изолятор (3). Испытательная машина создает статическое продольное растяжение, измеряемое датчиком (4). Для создания ЭПЭ и вибрации на образец подают импульсы тока от формирователя (5). Продольную и поперечную вибрации контролируют датчиком механических колебаний (6). Ток через образец контролируют бесконтактным датчиком магнитной индукции (7). Датчики (4), (6), (7) и формирователь (5) подключены к устройству связи (8) с компьютером (9)



a – полная диаграмма; *б* – область разрушения

Рисунок 2. – Диаграмма зависимости механического растягивающего усилия F от времени для образца из медной фольги шириной 3 мм



a – полная диаграмма; *б* – область разрушения

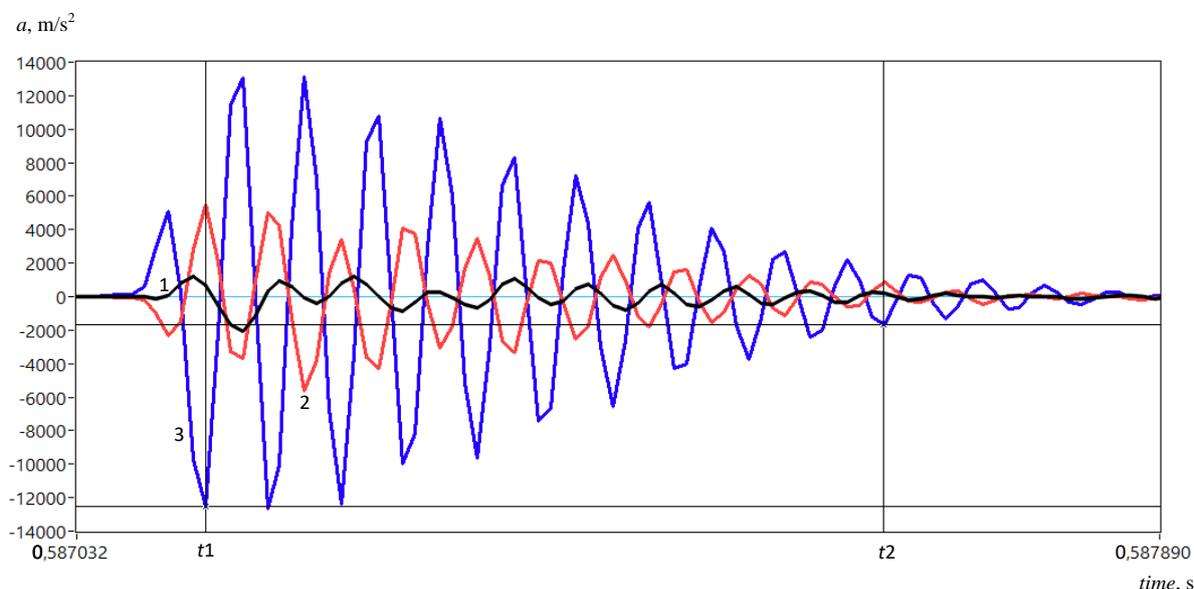
Рисунок 3. – Диаграмма зависимости механического растягивающего усилия от времени для образца из латунной фольги шириной 3 мм

этому закону сила линейно связана с деформацией тензорезистора в датчике. Высокочастотные вибрации характеризуются крайне малыми величинами и незаметны для датчика перемещения. В то же время такой датчик перемещения и его измерительный канал не рассчитаны на контроль очень быстрых изменений. Таким образом, измерение статического нагружения выполняется на временных масштабах в секунды и десятки секунд, циклические колебания в материале происходят на временных масштабах в миллисекунды, а динамическое действие электрического импульса на материал проводника характеризуется процессами с длительностью в единицы и десятки микросекунд. Эта особенность контроля динамики происходящих процессов должна быть учтена при проведении измерений. Кроме того, вибрационный отклик может быть представлен как в единицах перемещения, так и в единицах ускорения (виброперегрузки). Такие представления связаны между собой операциями двойного интегрирования (дифференцирования), при которых результат преобразования пропорционален квадрату частоты. Характерные времена и частоты процессов, как было отмечено, отличаются на несколько порядков и отклик в виде перемещения будет по форме сильно отличаться от отклика по виброперегрузке. Поэтому для измерения быстрых циклических процессов вибрационного нагружения при проведении экспериментальных исследований использованы дополнительные каналы контроля виброперегрузки с высокочастотными акселерометрами инерционного типа.

Хотя основные динамические силы и ускорения в образцах действуют вдоль его оси и совпадают с направлением растягивающей силы, а также направлением протекания импульсного тока, в экспериментах необходимо контролировать поперечные ускорения, поскольку жесткость образца в поперечном направлении существенно ниже жесткости в продольном направлении и виброакустический отклик в поперечном направлении может превосходить по амплитуде осевые виброперегрузки.

Для контроля динамики изменения тока через образец во время действия электрического импульса использован высокочастотный бесконтактный датчик магнитной индукции на основе эффекта Холла. Хотя тепловое действие одиночных импульсов электрического тока малой длительности не вызывает какого-нибудь нагрева проводника, такой нагрев (в пределах единиц градусов) можно контролировать дополнительным быстродействующим инфракрасным пирометром.

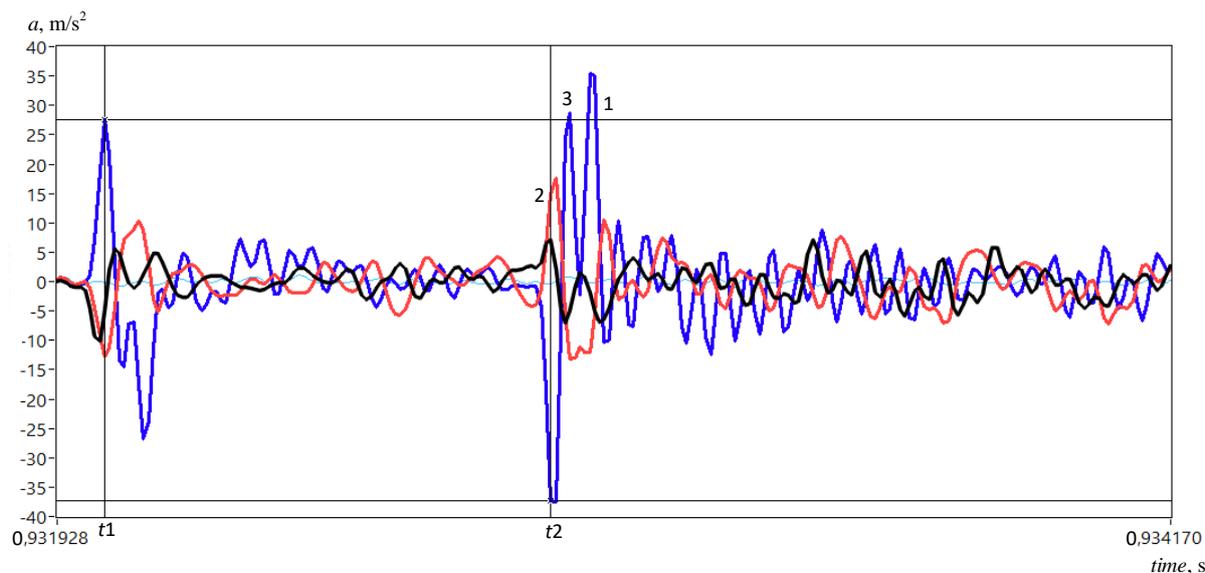
Результаты исследования. На рисунке 6 в качестве примера представлены три ортогональные компоненты сигналов ускорения (m/s^2) для пространственной вибрации испытываемой стальной пластины (эксперимент S_072) с периодом колебаний 53,7 мкс и частотой 18,62 кГц.



Три ортогональные компоненты ускорения для пространственной вибрации: продольная (1); поперечная вдоль плоскости образца (2); поперечная перпендикулярно плоскости образца (3).
Образец из стали толщиной 0,5 мм

Рисунок 6. – Вибрационный отклик на действие одиночного электрического импульса

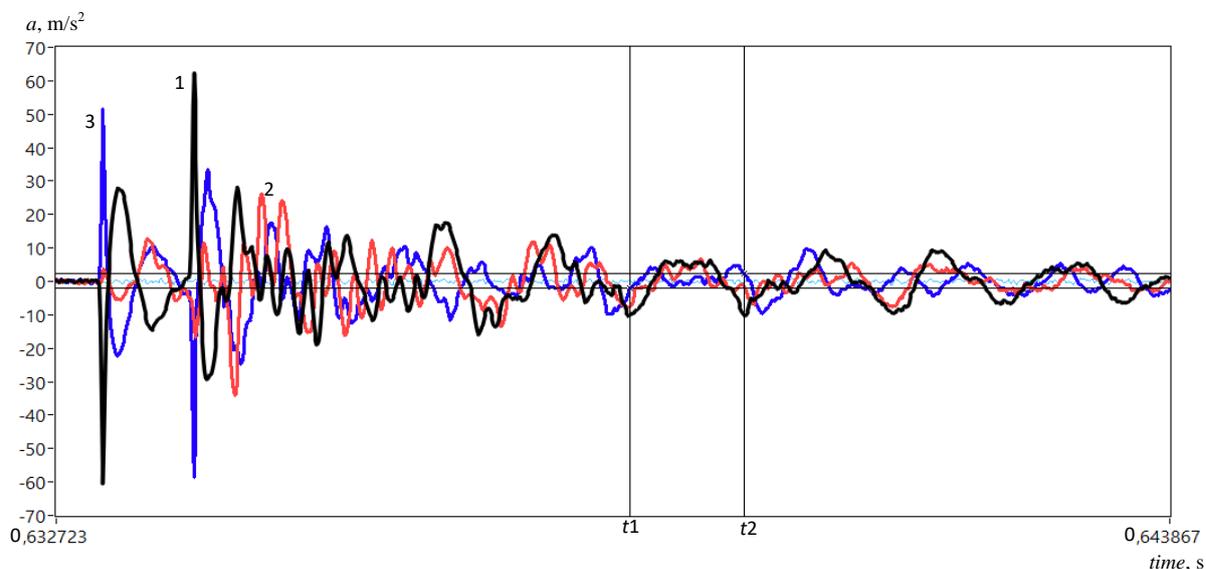
На рисунке 7 показан вибрационный отклик для образца из стали диаметром 3 мм (эксперимент S3_048). Амплитуда ускорения для такого образца существенно более низкая, что объясняется другой геометрией и отсутствием магнитных свойств у стали этой марки. Другие особенности данного вибрационного отклика – хорошо выраженные ударные процессы для переднего и заднего фронтов, имеющие противоположные знаки. Длительность импульса 898 мкс. Период затухающих колебаний после окончания импульса 103 мкс (частота 9,7 КГц).



Три ортогональные компоненты ускорения для пространственной вибрации: продольная (1); поперечная вдоль плоскости образца (2); поперечная перпендикулярно плоскости образца (3).
Образец из стали диаметром 3 мм

Рисунок 7. – Вибрационный отклик на действие одиночного электрического импульса

На рисунке 8 приведен вибрационный отклик для образца из меди Cu3a773 диаметром 3 мм. Период колебаний 1142 мкс (частота 876 Гц).

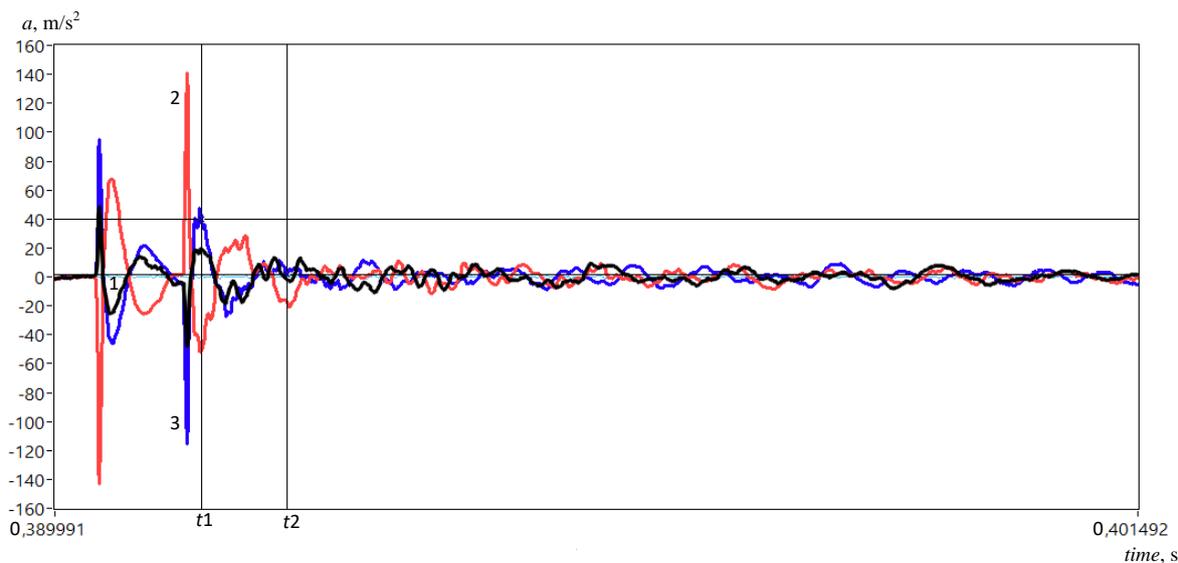


Три ортогональные компоненты ускорения для пространственной вибрации: продольная (1); поперечная вдоль плоскости образца (2); поперечная перпендикулярно плоскости образца (3).
Образец из меди шириной 3 мм

Рисунок 8. – Вибрационный отклик на действие одиночного электрического импульса

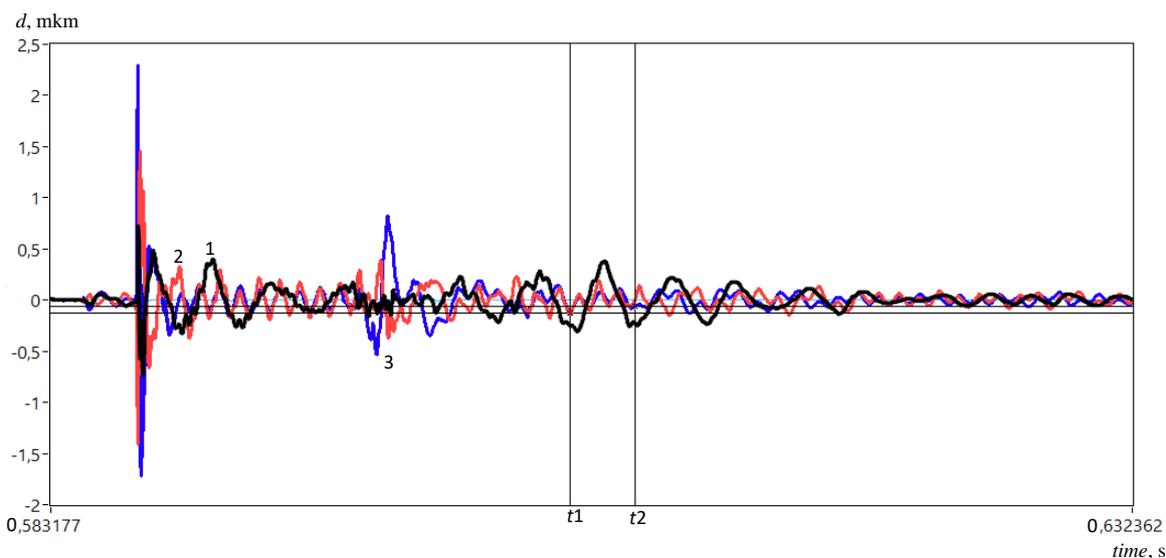
Кроме рассмотренных металлов, аналогичные результаты получены для образцов из латуни. На рисунке 9 показаны данные эксперимента Lat3a782: период 998 мкс (частота 1,002 Гц).

Для ускорений, представленных на рисунке 6, можно получить двойным интегрированием соответствующие сигналы динамического перемещения. Такие перемещения представлены на рисунке 10. Доминирующими для них являются пиковые ударные перемещения в моменты начала и окончания электрического импульса, а доминирующая частота колебаний после окончания импульса равна 3387 Гц. Форма сигналов виброперемещения имеет значительные отличия от формы сигналов вибрационного ускорения.



Три ортогональные компоненты ускорения для пространственной вибрации: продольная (1); поперечная вдоль плоскости образца (2); поперечная перпендикулярно плоскости образца (3).
Образец из латуни шириной 3 мм

Рисунок 9. – Вибрационный отклик на действие одиночного электрического импульса



Доминирующее значение периода колебаний в продольном направлении 338 Гц (период 2960 мкс)

Рисунок 10. – Вибрационные перемещения для эксперимента S_072

Приведенные примеры показывают, что в исследуемых образцах из стали, меди и латуни вибрационный отклик в виде перемещения и ускорения может иметь различную форму, а амплитуды могут при этом различаться на несколько порядков. Также существенно, что для колебательных процессов характерен большой разброс значений по частотам колебаний в виде волн после окончания импульса. Кроме того, доминирующим может быть как отклик в виде ударных процессов, связанных с моментами начала переднего и заднего фронтов электрического импульса, так и колебания в материале проводника, затухающие после окончания действия электрического импульса. Такие колебания можно рассматривать как результат интерференции колебаний, возбуждаемых ударными процессами на переднем и заднем фронтах. Получение максимального виброакустического отклика, соответствующего максимальному эффекту акустического смягчения в материале, требует выбора параметров воздействия для электрического импульса, изменяемого в очень широких пределах. Выбор таких параметров для оптимизации технологического процесса обработки металлов давлением с применением электропластического эффекта требует в этих условиях их адаптации на основе измерительной информации, получаемой путем измерения низкочастотной вибропространственной вибрации, которую преобразуют в высокочастотные пространственные колебания либо оценивают как виброперегрузку или ускорение.

Заключение. Электроимпульсное воздействие на металлические заготовки при обработке металлов давлением позволяет при минимальных затратах дополнительного оборудования и энергии получить возможность управления технологическим процессом с применением электропластического эффекта. При этом можно управлять амплитудными и частотными свойствами виброакустического отклика на действие электрического импульса. Воздействие электрического импульса на металл аналогично процессам вибрационного и акустического смягчения, которые изменяют структуру металла и улучшают его пластические свойства, что приводит к релаксации остаточных механических напряжений в металлах и сплавах с моно- и поликристаллической, аморфной, композитной и порошковой структурами.

Для получения максимального вибрационного воздействия на обрабатываемый материал электроимпульсное воздействие должно обеспечивать режимы, близкие к образованию механических резонансов. Получение таких режимов на практике затруднено изменением геометрии заготовки при обработке, а также значительным влиянием крепления заготовки и присоединенными массами инструмента, привода и т. п. Максимальное амплитудное воздействие достигается адаптивным изменением параметров электрических импульсов по длительности и периоду при помощи датчика виброперегрузок, установленного вблизи области деформирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Progress on the Effect and Mechanism of Ultrasonic Impact Treatment on Additive Manufactured Metal Fabrications / L. Sun, L. Huang, P. Wu et al. // *Crystals*. – 2023. – Vol. 13, iss. 7. – 995. – DOI: [10.3390/cryst13070995](https://doi.org/10.3390/cryst13070995).
2. Effect of Ultrasonic Vibration on Tensile Mechanical Properties of Mg-Zn-Y Alloy / W. Yang, Z. Xu, F. Xiong et al. // *Crystals*. – 2024. – Vol. 14, iss. 1. – P. 39-1–39-21. – DOI: [10.3390/cryst14010039](https://doi.org/10.3390/cryst14010039).
3. Givi M., Ghasemi A. H., Abbasi M. The effect of friction stir vibration processing on microstructure and mechanical properties of Al5052/SiC surface nano composite // *Iranian Journal of Manufacturing Engineering*. – 2019. – Vol. 6, iss. 1. – P. 1–11.
4. Sutton A. P., Todorov T. N. Theory of electroplasticity based on electromagnetic induction // *Physical review materials*. – 2021. – Vol. 5, iss. 11. – P. 113605-1–113605-19. – DOI: [10.1103/PhysRevMaterials.5.113605](https://doi.org/10.1103/PhysRevMaterials.5.113605).
5. The Effect of Direct Electric Current on the Plastic Behavior of AA7075 Aluminum Alloy in Different States of Hardening / Dobras, D., Bruschi, S., Simonetto, E. et al. // *Materials*. – 2021. – Vol. 14, iss. 1. – P. 73-1–73-13. – DOI: [10.3390/ma14010073](https://doi.org/10.3390/ma14010073).
6. Bathias C., Paris P. C. Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice. – 1st ed. – CRC Press, 2004. – 328 p. – DOI: [10.1201/9780203020609](https://doi.org/10.1201/9780203020609).
7. Белецкий Е. Н. Поврежденность конструкционной стали в условиях смешанных мод нагружения после предварительного циклического нагружения // *Физико-химия и технология неорганических материалов: сб. трудов XIX Рос. ежегод. конф. мол. науч. сотрудников и аспирантов (с междунар. участием), 18–21 окт. 2022 г., Москва*. – М.: Буки Веди, 2022. – С. 75–77.
8. Ленк А., Рениц Ю. Механические испытания приборов и аппаратов. – М.: Мир, 1976. – 276 с.
9. Морозенко В. Н., Кузнецов Е. В. Резонансный вибропластический эффект // *Металлы*. – 2000. – № 3. – С. 104–107.
10. Мисоченко А. А., Столяров В. В. Применение импульсного тока в процессах деформационной обработки материалов // *Машины, технологии и материалы для современного машиностроения: сб. тез. докл. конф., посвященной 85-летию Ин-та машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, 23 нояб. 2023 г., Москва; под ред. акад. Р. Ф. Ганиева*. – М.: ИМАШ РАН, 2023. – С. 138.
11. Модель прохождения ультразвука в среде с усталостными дефектами / В. Д. Сарычев, С. В. Коновалов, В. Е. Громов и др. // *Дефекты структуры и прочность кристаллов: Всерос. конф., 4–7 июня 2002 г., Черногловка*. – Черногловка, 2002. – С. 27.
12. Скворцов О. Б., Сташенко В. И., Троицкий О. А. Электропластический эффект и взаимодействие электрического импульса с проводником // *Письма о материалах*. – 2021. – Т. 11, № 4(44). – С. 473–478. – DOI: [10.22226/2410-3535-2021-4-473-478](https://doi.org/10.22226/2410-3535-2021-4-473-478).
13. Савенко В. С., Троицкий О. А. Физические и технологические основы электропластической деформации металлов: монография. – Мозырь: МГПУ им. И. П. Шамякина, 2016. – 208 с.

REFERENCES

1. Sun, L., Huang, L., Wu, P., Huang, R., Fang, N., Xu, F., & Xu, K. (2023). Progress on the Effect and Mechanism of Ultrasonic Impact Treatment on Additive Manufactured Metal Fabrications. *Crystals*, 13(7), 995. DOI: [10.3390/cryst13070995](https://doi.org/10.3390/cryst13070995).
2. Yang, W., Xu, Z., Xiong, F., Yang, H., Guo, X., & San, H. (2024). Effect of Ultrasonic Vibration on Tensile Mechanical Properties of Mg-Zn-Y Alloy. *Crystals*, 14(1), 39. DOI: [10.3390/cryst14010039](https://doi.org/10.3390/cryst14010039).
3. Givi, M., Ghasemi, A. H., & Abbasi, M. (2019). The effect of friction stir vibration processing on microstructure and mechanical properties of Al5052/SiC surface nano composite. *Iranian Journal of Manufacturing Engineering*, 6(1), 1–11. (In Persian, abstr. in Engl.)
4. Sutton, A. P., & Todorov, T. N. (2021). Theory of electroplasticity based on electromagnetic induction. *Physical review materials*, 5(11), 113605. DOI: [10.1103/PhysRevMaterials.5.113605](https://doi.org/10.1103/PhysRevMaterials.5.113605).

5. Dobras, D., Bruschi, S., Simonetto, E., Rutkowska-Gorczyca, M., & Ghiotti, A. (2021). The Effect of Direct Electric Current on the Plastic Behavior of AA7075 Aluminum Alloy in Different States of Hardening. *Materials*, 14(1), 73. DOI: [10.3390/ma14010073](https://doi.org/10.3390/ma14010073).
6. Bathias, C., & Paris, P. C. (2004). *Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice* (1st ed.). CRC Press. DOI: [10.1201/9780203020609](https://doi.org/10.1201/9780203020609).
7. Beletskii, E. N. (2022). Povrezhdennost' konstruktsionnoi stali v usloviyakh smeshannykh mod nagruzheniya posle predvaritel'nogo tsiklicheskogo nagruzheniya. Fiziko-khimiya i tekhnologiya neorganicheskikh materialov. In *XIX Rossiyskaya ezhegodnaya konferentsiya molodykh nauchnykh sotrudnikov i aspirantov (s mezhdunar. uchastiem)* (75–77). Moscow: Buki Vedi. (In Russ.).
8. Lenk, A., & Renitts, Yu. (1976). *Mekhanicheskie ispytaniya priborov i apparatov*. Moscow: Mir. (In Russ.).
9. Morozenko, V. N., & Kuznetsov, E. V. (2000). Rezonansnyi vibroplasticheskiy effekt. *Metally*, (3), 104–107. (In Russ.).
10. Misochenko, A. A., & Stolyarov, V. V. (2023). Primenenie impul'snogo toka v protsessakh deformatsionnoi obrabotki materialov. Mashiny, tekhnologii i materialy dlya sovremennogo mashinostroeniya. In R. F. Ganiev (Eds.), *Sbornik tezisev dokladov konferentsii, posvyashchennoi 85-letiyu Instituta mashinovedeniya im. A. A. Blagonravova RAN* (138). Moscow: IMASH RAN. (In Russ.).
11. Sarychev, V. D., Konovalov, S. V., Gromov, V. E., & Efimova, I. E. (2002). Model' prokhozhdeniya ul'trazvuka v srede s ustalostnymi defektami. In *Defekty struktury i prochnost' kristallov* (27). Chernogolovka. (In Russ.).
12. Skvortsov, O. B., Stashenko, V. I., & Troitskii, O. A. (2021). Elektroplasticheskiy effekt i vzaimodeistvie elektricheskogo impul'sa s provodnikom [Electroplastic effect and interaction of an electrical impulse with a conductor]. *Pis'ma o materialakh [Letters on Materials]*, 11(4), 473–478. DOI: [10.22226/2410-3535-2021-4-473-478](https://doi.org/10.22226/2410-3535-2021-4-473-478).
13. Savenko, V. S., & Troitskii, O. A. (2016). *Fizicheskie i tekhnologicheskie osnovy elektroplasticheskoi deformatsii metallov*. Mozyr': MGPU im. I. P. Shamyakina. (In Russ.).

Получена 22.11.2024

SHOCK-WAVE PROCESSES IN METALS DURING MECHANICAL TREATMENT USING THE ELECTROPLASTIC EFFECT

O. SKVORTSOV, V. STASHENKO

(Mechanical Engineering Research Institute of the RAS, Moscow, Russia)

V. SAVENKO

(Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin)

When processing metals by pressure, various types of additional physical influence are used in the form of heating, mechanical shock, vibration, acoustic ultrasonic irradiation, and electric pulse influence. Such impacts, in particular, are associated with manifestations of the oscillatory motion of material particles, which can be considered as a trigger for the movement of dislocations and structural inhomogeneities of the material. Such inhomogeneities can be in conditions of a residual mechanical stress state, which, under oscillatory influence, leads to their movement and transition to a more stable state. Such processes are accompanied by improved mechanical properties and deformation processes with increased plasticity. The work examines some features of the manifestation of such oscillatory processes that arise under additional external influences, which can be used in the development of metal forming technologies in order to reduce resistance to deformation and improve the structure of materials.

Keywords: *electroplastic effect, acoustic softening, dislocations, impact, vibration, vibration overload, deformation.*

УДК 621.371: 550.837.6

DOI 10.52928/2070-1624-2025-44-1-70-76

УЧЕТ КОНЦЕНТРАЦИИ ЧАСТИЦ В РЕЖИМЕ НИЗКОЧАСТОТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С АНИЗОТРОПНЫМИ СРЕДАМИ

канд. техн. наук, доц. В. Ф. ЯНУШКЕВИЧ,
К. И. ИВАНОВА, О. А. КИЗИНА, Д. С. СИВАЦКИЙ
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

Проведено исследование влияния концентрации частиц на электродинамические характеристики анизотропных сред в режиме низкочастотного взаимодействия электромагнитных волн. Исследованы характеристики горных пород над углеводородами с учетом требований многофакторного анализа. Установлены диапазоны концентраций электронов и ионов с различными степенями влияния на изменение вещественных и фазовых компонентов тензора для правой и левой поляризации электромагнитных волн. Отмечено, что использование широкого спектра частот зондирующих сигналов расширяет возможности для повышения эффективности проведения геологоразведочных работ. Полученные результаты математического моделирования взаимодействия могут быть использованы для поисковой геофизики с целью обнаружения месторождений нефти и газа.

Ключевые слова: углеводородная залежь, концентрация частиц, тензор, поляризация, частота.

Введение. В настоящее время поисковая геофизика основывается на усовершенствовании известных и разработке новых электромагнитных методов (ЭММ) георазведки углеводородных залежей (УВЗ) с учетом свойств горных пород и физико-химических процессов, проходящих в земной поверхности и в анизотропных средах (АС), окружающих углеводороды [1; 2]. Приводится алгоритм, учитывающий двойные ограничения как во временном, так и в пространственном измерениях, а также демонстрирующий стабильность и осуществимость, высокую производительность при инвертировании данных мониторинга для различных уровней шума [3]. Все большее внимание уделяется комплексным подходам к проведению георазведки и интерпретации полученных данных [4]. Мониторинг изменений в геометрии углеводородного резервуара и свойств поровой жидкости, происходящих в процессе добычи, играет ключевую роль в оценке эффективности извлечения и количественном анализе оставшихся запасов [5].

Приводятся результаты 1D и 3D прямого, а также 1D и 2D обратного моделирования с контролируемым источником электромагнитных полей (CSEM) на известном объекте на шельфе Западной Африки с целью продемонстрировать технологию, разработать методологию анализа и лучше понять ее ограничения [6]. Геохимические данные показывают повышенные концентрации метана в поверхностных отложениях, сопутствующие быстрому снижению концентраций сульфата, что указывает на повышенный поток метана и его окисление в сочетании с восстановлением сульфата у основания обращенного к суше хребта [7]. Метод георазведки требует обеспечения теоретических основ поисков и выделения нефти и газа [8]. В работах [9; 10] рассмотрены различные режимы взаимодействия электромагнитных волн (ЭМВ) с АС над углеводородами.

Методы полевой геофизики и методики проведения геологоразведочных работ приведены в работах [11; 12]. Гравиразведка и магниторазведка [13] имеют определенные ограничения к применению. Математическое моделирование позволяет установить требования к аппаратуре для проведения натурных испытаний [14; 15].

Актуальность совершенствования и разработки методов поиска и идентификации УВЗ обусловлена задачей обеспечения экономик государств стратегическим сырьем – углеводородами, что стимулирует непрерывное развитие технологий георазведки месторождений нефти и газа. Работы в этом направлении ведутся крупнейшими мировыми компаниями, которые уделяют особое внимание сокращению сроков и затрат на геологоразведочные испытания, а также повышению точности определения границ залежей углеводородов.

Методика исследований. Целью данной работы является проведение математического моделирования в режиме низкочастотного (НЧ) взаимодействия ЭМВ с АС с учетом концентрации частиц для бигармонического сигнала вида

$$\vec{e}(t) = \vec{e}_1(t) + \vec{e}_2(t) = E_1 \cos \omega_1 t + E_2 \cos \omega_2 t, \quad (1)$$

где $E_1, E_2, \omega_1 = 2\pi f_1, \omega_2 = 2\pi f_2$ соответственно амплитуды и частоты двух сигналов.

Для расчетов использованы компоненты тензора $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3$; гиротропная частота $\omega_{Гi}$; частота столкновительных процессов ν_i ; относительная диэлектрическая проницаемость АС ϵ_r ; проводимость среды σ_r ; диэлектрическая постоянная ϵ_0 ; коэффициенты отношения амплитуд и частот k_E и k_ω .

Составляющие тензора диэлектрической проницаемости среды для режима НЧ-сигнала приведены в [9]. Концентрации электронов и ионов N_e и N_i фигурируют в выражении для плазменной частоты

$$\omega_{Пе,i} = q_{e,i} \left(\frac{N_{e,i}}{m_{e,i} \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

где $q_{e,i}$ – заряд электрона (иона);
 $m_{e,i}$ – масса электрона (иона).

Методика исследований состоит в анализе компонент тензора диэлектрической проницаемости среды над углеводородами

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_R(N_{e,i}) &= \dot{\epsilon}_1(N_{e,i}) + \dot{\epsilon}_2(N_{e,i}) = \text{Re} \dot{\epsilon}_R(N_{e,i}) + j \text{Im} \dot{\epsilon}_R(N_{e,i}); \\ \dot{\epsilon}_L(N_{e,i}) &= \dot{\epsilon}_1(N_{e,i}) - \dot{\epsilon}_2(N_{e,i}) = \text{Re} \dot{\epsilon}_L(N_{e,i}) + j \text{Im} \dot{\epsilon}_L(N_{e,i}) \end{aligned} \quad (3)$$

для следующих параметров среды над залежами углеводородов [9]: значения диэлектрической проницаемости вмещающих пород $\epsilon_r = 1 - 30$ и электрической проводимости $\sigma_r = 1 \cdot 10^{-5} - 1 \text{ См/м}$; концентрации частиц $N_e = N_i = (10^{16} - 10^{20}) \text{ м}^{-3}$, частота столкновения частиц $\nu = 1 \cdot 10^9 - 1 \cdot 10^{10} \text{ рад/с}$.

Соотношение концентраций частиц показывает коэффициент ионизации

$$k_i = \frac{N_i}{N_e}. \quad (4)$$

Исследования выражений (3) в настоящее время получили широкое распространение (например, в работах [9; 10]). Методы разведки показали высокую эффективность. Вместе с тем сложность проходящих в окружающей углеводороды среде процессов, различие условий залегания горных пород, их структурного построения, диэлектрической проницаемости, электрической проводимости и других электрических и геологических характеристик требуют всестороннего учета вышеперечисленных факторов. Существующие модели УВЗ используют влияние миграции углеводородов на АС над залежами. Воздействие ЭМВ на вмещающие породы описывается режимами как однорезонансного, так и многорезонансного взаимодействия.

Таким образом, исследование физико-химических процессов в среде над залежами требует многофакторного анализа. В данной работе акцент сделан на вариацию концентрации электронов и ионов. Это позволяет проследить динамику изменения составляющих тензора (3).

Результаты исследований. Зависимости вещественной компоненты тензора (3) для правой поляризации ЭМВ для высокочастотных составляющих $f_2 = (1 \cdot 10^6, 3 \cdot 10^6, 5 \cdot 10^6) \text{ Гц}$ приведены на рисунке 1. Коэффициент ионизации (4) выбирался равным 1. При моделировании использовались значения: диэлектрическая проницаемость вмещающих пород $\epsilon_r = 10$, электрическая проводимость $\sigma_r = 10^{-3} \text{ См/м}$, частота столкновения частиц $\nu = 2\pi \cdot 10^9 \text{ рад/с}$, коэффициенты отношения амплитуд и частот $k_E = 10^{-1}$, $k_\omega = 10^{-6}$. Характерно увеличение вещественной компоненты для более низких значений частоты f_2 . Влияние концентраций частиц можно учесть разделением их исследуемого диапазона на три участка. Отрезок $N_e = N_i = (10^{16} - 10^{17}) \text{ м}^{-3}$ характеризуется несущественным изменением $\text{Re} \dot{\epsilon}_R$. Значения вещественной компоненты тензора в диапазоне $N_e = N_i = (10^{17} - 10^{19}) \text{ м}^{-3}$ увеличиваются с большей крутизной характеристики. На отрезке $N_e = N_i = (10^{19} - 10^{20}) \text{ м}^{-3}$ происходят наиболее существенные изменения $\text{Re} \dot{\epsilon}_R$.

Зависимости вещественной компоненты тензора (3) для правой поляризации ЭМВ для высокочастотных составляющих $f_2 = (1 \cdot 10^9, 3 \cdot 10^9, 5 \cdot 10^9) \text{ Гц}$ приведены на рисунке 2. Закономерности поведения данных характеристик аналогичны зависимостям, приведенным на рисунке 1, за исключением численных значений. Например, отличие значений $\text{Re} \dot{\epsilon}_R$ на частотах f_2 , равных $1 \cdot 10^6 \text{ Гц}$ и $1 \cdot 10^9 \text{ Гц}$, составляет 10^3 .

Таким образом, учет вариации концентраций частиц с использованием широкого спектра частот зондирующих сигналов (в данном случае $f_2 = (1 \cdot 10^4 - 1 \cdot 10^{10})$ Гц) расширяет возможности для повышения эффективности проведения геологоразведочных работ. Дополнительную информацию можно получить, изменяя коэффициент ионизации (4). Поскольку концентрации электронов и ионов N_e и N_i (2) определяют значения плазменной частоты, то при воздействии ЭМВ на вмещающие породы возможен спектральный анализ на частотах многорезонансного взаимодействия.

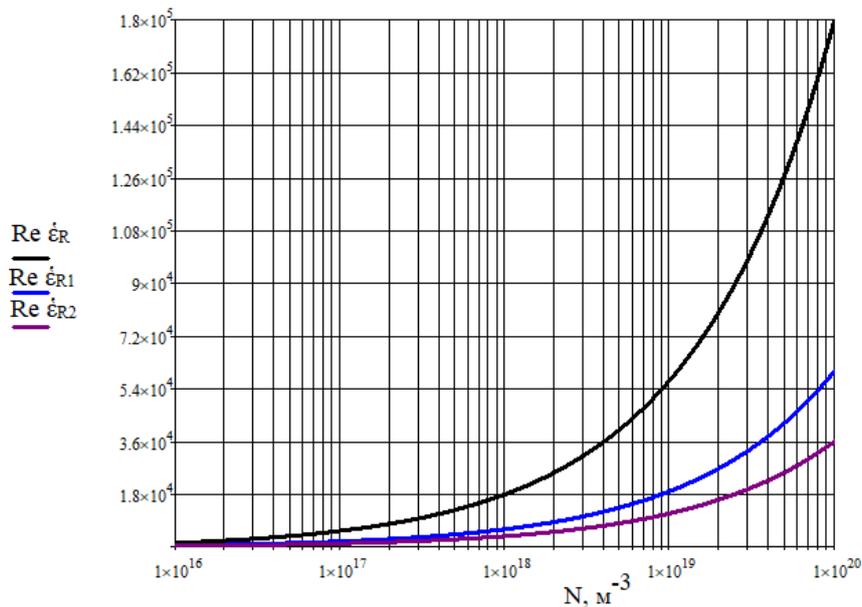


Рисунок 1. – Зависимости $\text{Re } \hat{\epsilon}_R$ – для $f_2 = 1 \cdot 10^6$ Гц; $\text{Re } \hat{\epsilon}_{R1}$ – для $f_2 = 3 \cdot 10^6$ Гц;
 $\text{Re } \hat{\epsilon}_{R2}$ – для $f_2 = 5 \cdot 10^6$ Гц

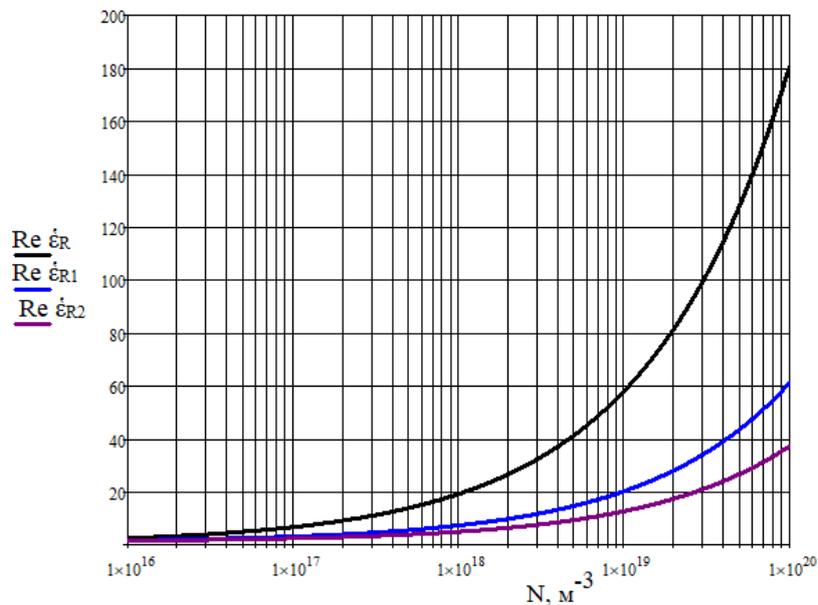


Рисунок 2. – Зависимости $\text{Re } \hat{\epsilon}_R$ – для $f_2 = 1 \cdot 10^9$ Гц; $\text{Re } \hat{\epsilon}_{R1}$ – для $f_2 = 3 \cdot 10^9$ Гц;
 $\text{Re } \hat{\epsilon}_{R2}$ – для $f_2 = 5 \cdot 10^9$ Гц

Зависимости вещественной компоненты тензора (3) для левой поляризации ЭМВ (рисунки 3, 4) получены путем моделирования характеристик, аналогичных тем, что применяются для правой поляризации ЭМВ.

Следует отметить, что для данной компоненты влияние концентраций частиц также можно учесть путем разделения их исследуемого диапазона на три участка; при этом наблюдается уменьшение $\text{Re} \dot{\epsilon}_L$ с ростом значений $N_{e,i}$. Характерно увеличение вещественной компоненты для более высоких значений частоты f_2 в отличие от результатов, показанных на рисунках 1, 2. Отличия значений вещественной компоненты тензора для левой поляризации ЭМВ для различных частот f_2 такие же, как и для вещественной компоненты тензора для правой поляризации ЭМВ. Также нужно отметить, что значения для данной компоненты отрицательные, а для $\text{Re} \dot{\epsilon}_R$ – положительные.

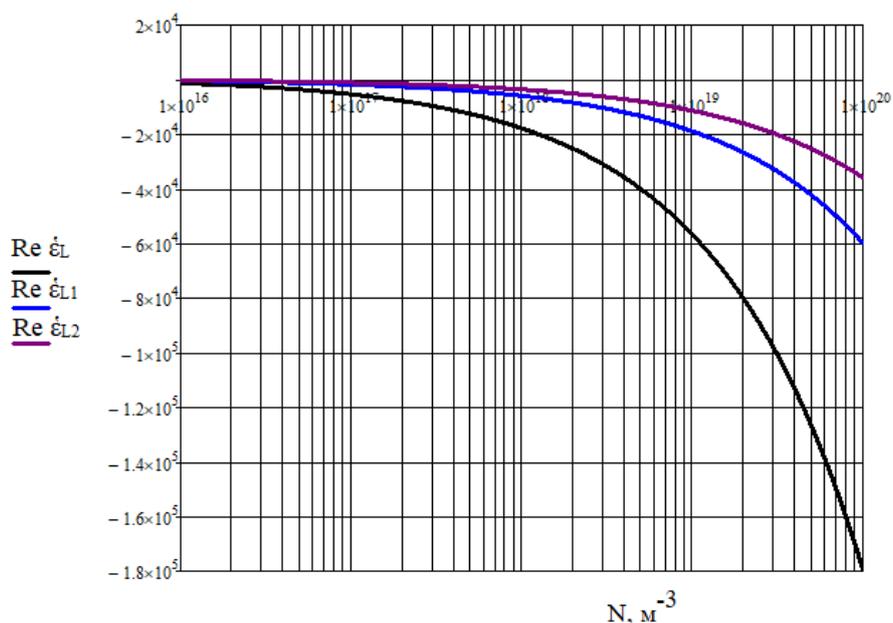


Рисунок 3. – Зависимости $\text{Re} \dot{\epsilon}_L$ – для $f_2 = 1 \cdot 10^6$ Гц; $\text{Re} \dot{\epsilon}_{L1}$ – для $f_2 = 3 \cdot 10^6$ Гц;
 $\text{Re} \dot{\epsilon}_{L2}$ – для $f_2 = 5 \cdot 10^6$ Гц

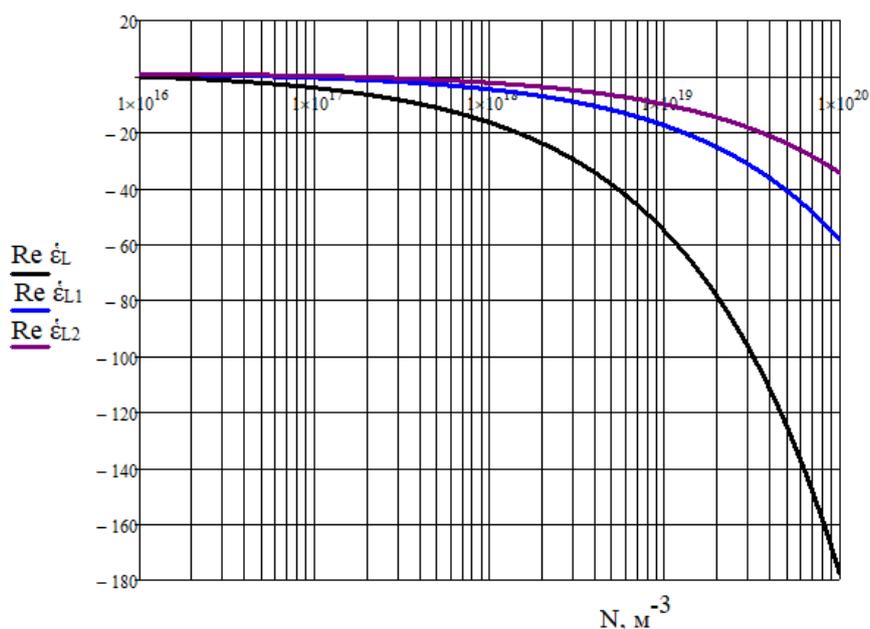


Рисунок 3. – Зависимости $\text{Re} \dot{\epsilon}_L$ – для $f_2 = 1 \cdot 10^9$ Гц; $\text{Re} \dot{\epsilon}_{L1}$ – для $f_2 = 3 \cdot 10^9$ Гц;
 $\text{Re} \dot{\epsilon}_{L2}$ – для $f_2 = 5 \cdot 10^9$ Гц

Установлено, что фазовые характеристики тензора для правой поляризации ЭМВ (рисунок 5) имеют тенденцию к уменьшению с ростом значений N_{ei} , а фазовые характеристики тензора для левой поляризации ЭМВ (рисунок 6) – к увеличению.

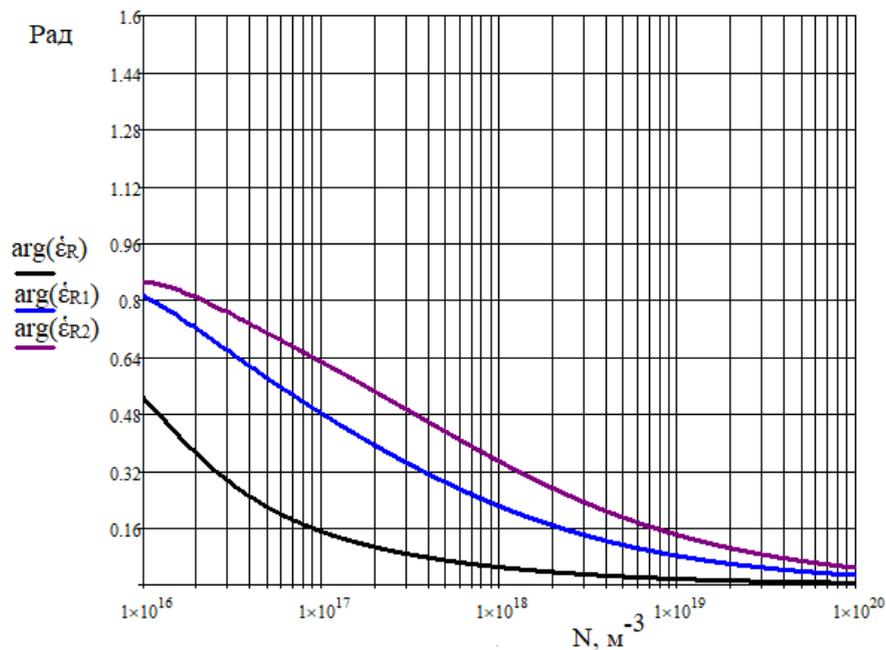


Рисунок 5. – Зависимости $\arg \dot{\epsilon}_R$ – для $f_2 = 1 \cdot 10^9$ Гц; $\arg \dot{\epsilon}_{R1}$ – для $f_2 = 3 \cdot 10^9$ Гц;
 $\arg \dot{\epsilon}_{R2}$ – для $f_2 = 5 \cdot 10^9$ Гц

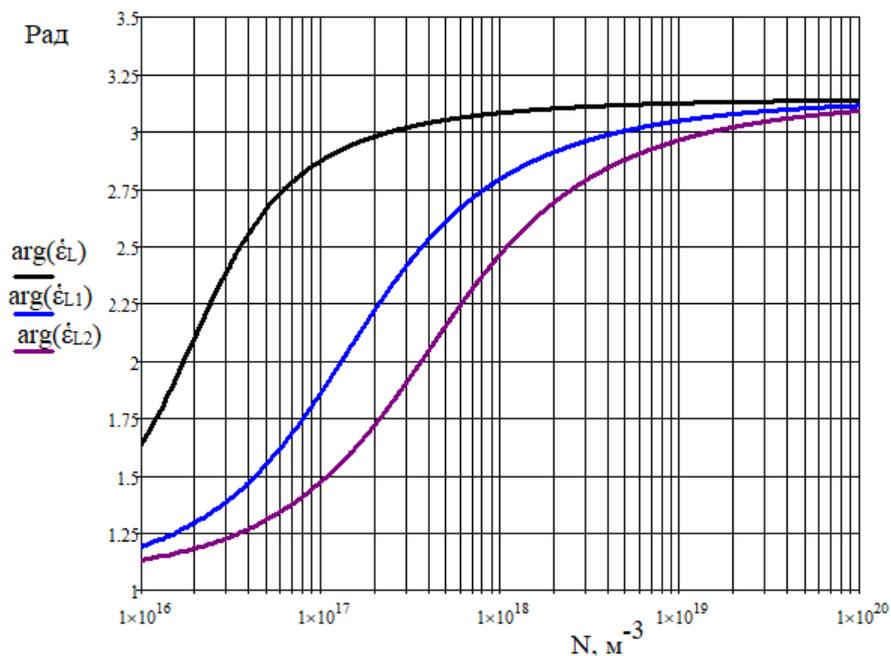


Рисунок 6. – Зависимости $\arg \dot{\epsilon}_L$ – для $f_2 = 1 \cdot 10^9$ Гц; $\arg \dot{\epsilon}_{L1}$ – для $f_2 = 3 \cdot 10^9$ Гц;
 $\arg \dot{\epsilon}_{L2}$ – для $f_2 = 5 \cdot 10^9$ Гц

Зависимости фазовых характеристик тензора приведены для высокочастотных составляющих $f_2 = (1 \cdot 10^9, 3 \cdot 10^9, 5 \cdot 10^9)$ Гц, поскольку на высоких частотах изменения фазы наиболее контрастны.

Влияние концентраций частиц также можно учесть, разделив их исследуемый диапазон на три участка. Однако закономерности изменения фазовых характеристик с ростом значений $N_{e,i}$ в данном случае другие. Отрезок $N_e = N_i = (10^{16} - 10^{18}) \text{ м}^{-3}$ характеризуется наиболее существенным уменьшением $\arg \dot{\epsilon}_R$ и ростом $\arg \dot{\epsilon}_L$. В диапазоне концентраций $N_e = N_i = (10^{18} - 10^{19}) \text{ м}^{-3}$ значения фазовых компонент тензора изменяются с меньшей крутизной характеристик. На отрезке $N_e = N_i = (10^{19} - 10^{20}) \text{ м}^{-3}$ происходят менее существенные вариации $\arg \dot{\epsilon}_R$ и $\arg \dot{\epsilon}_L$.

Заключение. Проведенное математическое моделирование взаимодействия ЭМВ с АС в режиме НЧ-сигналов показало следующее:

- учет вариации концентраций частиц с использованием широкого спектра частот зондирующих сигналов (в данном случае $f_2 = (1 \cdot 10^4 - 1 \cdot 10^{10}) \text{ Гц}$) расширяет возможности для повышения эффективности проведения геологоразведочных работ;
- диапазон концентраций $N_e = N_i = (10^{19} - 10^{20}) \text{ м}^{-3}$ оказывает более существенное влияние на изменение вещественных компонент тензора для левой и правой поляризации ЭМВ, а диапазон концентраций $N_e = N_i = (10^{16} - 10^{18}) \text{ м}^{-3}$ – на изменение фазовых компонент тензора для левой и правой поляризации ЭМВ.

Работа выполнена в рамках договора БРФФИ № Т23-074 от 02 мая 2023 г. «Разработка и исследование методов поиска и идентификации углеводородных залежей с применением модулированных сигналов на основе алгоритмов цифровой обработки сигналов и вейвлет-преобразования».

ЛИТЕРАТУРА

1. Физика горных пород / Л. Я. Ерофеев, Г. С. Вахромеев, В. С. Зинченко и др. – Томск: Изд-во ТПУ, 2006. – 520 с.
2. Номоконова Г. Г. Физика Земли. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 105 с.
3. Research on 3D Time-Lapse Electric Field Inversion Algorithm for Controlled Source Audio-Frequency Magnetotelluric Method / Q. Sun, H. Tan, W. Wan et al. // *Applied Sciences*. – 2024. – Vol. 14, iss. 14. – Art. ID 1560. – DOI: [10.3390/app14041560](https://doi.org/10.3390/app14041560).
4. Никитин А. А., Булычев А. А. Комплексный анализ и комплексная интерпретация геофизических полей. – М.: ВНИИГеосистем, 2015. – 94 с.
5. Orange, A., K. Key, and S. Constable. The feasibility of reservoir monitoring using time-lapse marine CSEM // *Geophysics*. – 2009. – Vol. 74, iss. 2. – P. F21–F29. – DOI: [10.1190/1.3059600](https://doi.org/10.1190/1.3059600).
6. Price, A. 1D, 2D, and 3D modeling and inversion of 3D CSEM data offshore West Africa / A. Price, P. Turpin, M. Erbetta et al. // *SEG Technical Program Expanded Abstracts*. – 2008. – Vol. 27, iss. 1. – P. 639–643. – DOI: [10.1190/1.3063732](https://doi.org/10.1190/1.3063732).
7. Preliminary interpretation of electromagnetic, heat flow, seismic, and geochemical data for gas hydrate distribution across the Porangahau Ridge, New Zealand / K. Schwalenberg, W. Wood, I. Pecher [et al.] // *Marine Geology*. – 2010. – Vol. 272, iss. 1–4. – P. 89–98. – DOI: [10.1016/j.margeo.2009.10.024](https://doi.org/10.1016/j.margeo.2009.10.024).
8. Теоретические основы поисков и разведки нефти и газа: в 2-х кн. / А. А. Бакиров, Э. А. Бакиров, Г. А. Габриэлянц и др.; под ред. Э. А. Бакирова и В. Ю. Керимова. – 4-е изд. перераб. и доп. – М.: Издательский дом «Недра», 2012. – Кн. 2: Методика поисков и разведки скоплений нефти и газа. – 416 с.
9. Янушкевич В. Ф. Электромагнитные методы поиска и идентификации углеводородных залежей. – Новополоцк, ПГУ, 2017. – 232 с.
10. Взаимодействие электромагнитных волн с анизотропными средами над углеводородными залежами в режиме радиоимпульсных сигналов / В. Ф. Янушкевич, К. И. Кременя, М. М. Иванов и др. // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки*. – 2016. – № 12. – С. 45–50.
11. Воскресенский Ю. Н. Полевая геофизика. – М.: Издательский дом «Недра», 2010. – 479 с.
12. Гусев Е. В. Методы полевой геофизики. – Томск: Изд-во ТПУ, 2012. – 216 с.
13. Серкеров, С. А. Гравиразведка и магниторазведка. Основные понятия, термины, определения. – М.: Недр – Бизнесцентр, 2006. – 479 с.
14. Соловейчик Ю. Г. Математическое моделирование на базе метода конечных элементов трехмерных электрических полей в задачах электроразведки // *Физика Земли*. – 1997. – № 9. – С. 67–71.
15. Соловейчик Ю. Г. МКЭ-моделирование трехмерных нестационарных электромагнитных полей // *Физика Земли*. – 1998. – № 10. – С. 78–84.

REFERENCES

1. Erofeev, L. Ya., Vakhromeev, G. S., Zinchenko, V. S., & Nomokonova, G. G. (2006). *Fizika gornykh porod*. Tomsk: Publ. TPU. (In Russ.).
2. Nomokonova, G. G. *Fizika Zemli*. (2007). Tomsk: Publ. TPU. (In Russ.).
3. Sun, Q., Tan, H., Wan, W., & Hu, Q. (2024). Research on 3D Time-Lapse Electric Field Inversion Algorithm for Controlled Source Audio-Frequency Magnetotelluric Method. *Applied Sciences*, 14(4), 1560. DOI: [10.3390/app14041560](https://doi.org/10.3390/app14041560).

4. Nikitin, A. A., & Bulychev, A. A. (2015). *Kompleksnyi analiz i kompleksnaya interpretatsiya geofizicheskikh polei*. Moscow: VNIgeosistem (In Russ.).
5. Orange, A., K. Key, and S. Constable. The feasibility of reservoir monitoring using time-lapse marine CSEM (2009). *Geophysics*, 74(2), F21–F29. DOI: [10.1190/1.3059600](https://doi.org/10.1190/1.3059600).
6. Price, A., Turpin, P., Erbetta, M., Watts, D. & Cairns, G. (2008). 1D, 2D and 3D modeling and inversion of 3D CSEM data offshore West Africa. *Seg Technical Program Expanded Abstracts*, 27(1), 639–643. DOI: [10.1190/1.3063732](https://doi.org/10.1190/1.3063732).
7. Schwalenberg, K., Wood, W., Pecher, I., Hamdan, L., Henrys, S., Jegen, M., & Coffin, R. (2010). Preliminary interpretation of electromagnetic, heat flow, seismic, and geochemical data for gas hydrate distribution across the Porangahau Ridge, New Zealand. *Marine Geology*, 272(1–4), 89–98. DOI: [10.1016/j.margeo.2009.10.024](https://doi.org/10.1016/j.margeo.2009.10.024).
8. Bakirov, A. A., Bakirov, E. A. (Ed.), Gabrielyants, G. A., Kerimov, V. Yu. (Ed.), & Mstislavskaya, L. P. (2012). *Teoreticheskie osnovy poiskov i razvedki nefiti i gaza: v 2 kn. Kn. 2: Metodika poiskov i razvedki skoplenii nefiti i gaza*. Moscow: Publ. «Nedra». (In Russ.).
9. Yanushkevich, V. F. (2017). *Elektromagnitnye metody poiska i identifikatsii uglevodorodnykh zalezhei*. Novopolotsk: PGU. (In Russ.).
10. Yanushkevich, V. F., Kremeny, K. I., Ivanov, M. M., & Molodechkina, T. V. (2016). Vzaimodeistvie elektromagnitnykh voln s anizotropnyimi sredami nad uglevodorodnymi zalezhami v rezhime radioimpul'snykh signalov [Interaction of Electromagnetic Waves With Anisotropic Environments over Hydrocarbonic Deposits in the Mode of Radio Pulse Signals]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (12), 45–50. (In Russ., abstr. in Engl.).
11. Voskresenskii, Yu. N. (2010). *Polevaya geofizika [Field Geophysics Exploraton]*. Moscow: Publ. «Nedra». (In Russ.).
12. Gusev, E. V. (2012). *Metody polevoi geofiziki*. Tomsk: Publ. TPU. (In Russ.).
13. Serkerov, S. A. (2006). *Gravirazvedka i magnitorazvedka. Osnovnye ponyatiya, terminy, opredeleniya*. Moscow: Nedra – Biznestsentr. (In Russ.).
14. Soloveichik, Yu. G. (1997). Matematicheskoe modelirovanie na baze metoda konechnykh elementov trekhmernykh elektricheskikh polei v zadachakh elektrorazvedki. *Fizika Zemli*, (9), 67–71. (In Russ.).
15. Soloveichik, Yu. G. (1998). MKE-modelirovanie trekhmernykh nestatsionarnykh elektromagnitnykh polei. *Fizika Zemli*, (10), 78–84. (In Russ.).

Поступила 17.02.2025

ACCOUNTING FOR PARTICLE CONCENTRATION IN THE MODE OF LOW-FREQUENCY INTERACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES WITH ANISOTROPIC MEDIA

V. YANUSHKEVICH, K. IVANOVA, O. KIZINA, D. SIVATSKY
(*Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk*)

The influence of particle concentration on electrodynamic characteristics of anisotropic media in the mode of low-frequency interaction of electromagnetic waves has been studied. The characteristics of rocks above hydrocarbons have been studied taking into account the requirements of multifactor analysis. The ranges of electron and ion concentrations with different degrees of influence on the change in the material and phase components of the tensor for the right and left polarizations of electromagnetic waves have been established. It has been noted that the use of a wide range of frequencies of probing signals expands the possibilities for increasing the efficiency of geological exploration. The obtained results of mathematical modeling of interaction can be used for exploration geophysics in order to detect oil and gas deposits.

Keywords: hydrocarbon deposit, hydrocarbon deposit, particle concentration, tensor, polarization, frequency.

МАТЕМАТИКА

УДК 517. 0(075.8); 517. 9(075.8)

DOI 10.52928/2070-1624-2025-44-1-77-80

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ И ТОЖДЕСТВЕННЫЕ СВЯЗИ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

д-р техн. наук, проф. С. Г. ЕХИЛЕВСКИЙ,
канд. физ.-мат. наук, доц. О. В. ГОЛУБЕВА, О. Н. ЗАБЕЛЕНДИК
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

Обоснована корректность единого подхода к интегрированию рациональных дробей при наличии в знаменателе линейных комплексно сопряженных множителей. На его основе реализована процедура, позволившая выразить через элементарные функции двух переменных реальную и мнимую части натурального логарифма комплексного аргумента. Это дало возможность доказать формулу Эйлера без использования теории степенных рядов.

Ключевые слова: интегрирование рациональной дроби, натуральный логарифм комплексного аргумента, формула Эйлера.

Введение. Обычно методы интегрирования правильной рациональной дроби варьируют в зависимости от наличия (или отсутствия) в знаменателе квадратного трехчлена с отрицательным дискриминантом [1]. При этом никак не объясняется, почему нельзя применять единый алгоритм, связанный с разложением знаменателя на множители первой степени относительно аргумента. Целью данной публикации является доказательство корректности такого подхода и обосновывание процедуры, позволяющей выразить через элементарные функции двух переменных реальную и мнимую части натурального логарифма комплексного аргумента.

Интегрирование рациональной дроби при наличии в знаменателе квадратного трехчлена с отрицательным дискриминантом. Покажем, что в этом случае интегрирование правильной рациональной дроби

$$I = \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx \quad (1)$$

можно производить с помощью стандартной процедуры, раскладывая трехчлен на линейные множители [1]

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) = 0, \quad (2)$$

но уже с комплексно сопряженными корнями

$$x_{1,2} = \alpha \pm i\beta = -\frac{b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{-D}}{2a}, \quad (3)$$

где

$$D = b^2 - 4ac < 0 \quad (4)$$

– отрицательный дискриминант уравнения (2).

Разложим в новых обстоятельствах рациональную дробь на сумму простейших

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{mx+n}{a(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)} = \frac{1}{a} \left[\frac{A}{x-\alpha-i\beta} + \frac{B}{x-\alpha+i\beta} \right], \quad (5)$$

выполним сложение дробей в квадратных скобках и, приравняв числители в последнем равенстве (5)

$$mx+n = A(x-\alpha+i\beta) + B(x-\alpha-i\beta), \quad (6)$$

определим коэффициенты разложения

$$x = \alpha + i\beta \Rightarrow m(\alpha + i\beta) + n = 2i\beta A \Rightarrow A = \frac{m}{2} - \frac{i}{2\beta}(m\alpha + n), \quad (7)$$

$$x = \alpha - i\beta \Rightarrow m(\alpha - i\beta) + n = -2i\beta B \Rightarrow B = \frac{m}{2} + \frac{i}{2\beta}(m\alpha + n) = A^*, \quad (8)$$

где * – знак комплексного сопряжения.

Таким образом, из (1), (5) – (8) следует

$$I = \frac{1}{a} \left[A \ln(x - \alpha - i\beta) + A^* \ln(x - \alpha + i\beta) \right] + C, \quad (9)$$

где C – константа интегрирования.

Реальная и мнимая части натурального логарифма комплексного аргумента. Согласно (1) мнимая часть I равна нулю, из чего согласно (9) следует нетривиальное свойство

$$\ln^*(x + iy) = \ln(x - iy), \quad (10)$$

подтверждаемое вещественностью выражения

$$(p + iq)(\gamma - i\delta) + (p - iq)(\gamma + i\delta) = 2(p\gamma + q\delta), \quad (11)$$

в котором

$$A = p + iq, \quad \ln(x - \alpha + i\beta) = \gamma + i\delta. \quad (12)$$

Подстановка (12) в (9), с учетом (7) и (11), дает

$$I = \frac{2}{a} \left[\frac{m}{2} \gamma - \frac{m\alpha + n}{2\beta} \delta \right] + C. \quad (13)$$

Правая часть (13) позволяет выразить через элементарные функции действительную и мнимую части фигурирующего в (12) натурального логарифма комплексного аргумента. Для этого вычислим интеграл (1), не раскладывая квадратный трехчлен на множители [1]:

$$I = \int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax + b) - \frac{mb}{2a} + n}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{m}{2a} I_1 + \left(n - \frac{mb}{2a} \right) I_2, \quad (14)$$

$$I_1 = \ln(ax^2 + bx + c) + C_1 = (\text{см. (3)}) = \frac{1}{2} \ln((x - \alpha)^2 + \beta^2) + \frac{1}{2} \ln a + C_1, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}} = (\text{см. (4)}) = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-D}{4a^2}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{-D}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{b}{2a}}{\frac{1}{2a} \sqrt{-D}} + C_2 = \frac{2}{\sqrt{-D}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{2a} \sqrt{-D}}{x + \frac{b}{2a}} \right) + C_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что $\frac{1}{2} \ln a$ в (15) и $\frac{\pi}{2}$ в (16) можно опустить, т. к. C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

После этого, сравнив (14) с (13), с учетом (12), (15), (16), получим

$$\operatorname{Re} \ln(x - \alpha + i\beta) = \gamma = \frac{1}{2} \ln((x - \alpha)^2 + \beta^2), \quad (17)$$

$$\operatorname{Im} \ln(x - \alpha + i\beta) = \delta = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{2a} \sqrt{-D}}{x + \frac{b}{2a}} = (\text{см. (3)}) = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{x - \alpha}. \quad (18)$$

Поскольку в (13), (15) и (16) фигурируют произвольные постоянные, в справедливости (17), (18) легко убедиться при $\beta = 0$.

Формулы (17), (18) позволяют, абстрагируясь от интегрирования рациональной дроби, в общем виде записать итоговый результат

$$\ln(x + iy) \equiv \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad (19)$$

связывающий реальную и мнимую части логарифма комплексного аргумента с элементарными функциями двух действительных переменных.

Подчеркнем, что для получения (19) не потребовалась теория степенных рядов, хотя в совпадении первых (а значит и всех остальных) частных производных от левой и правой части (19) легко убедиться непосредственно:

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln(x + iy) = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right] = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \ln(x + iy) = \frac{i}{x + iy} = \frac{ix + y}{x^2 + y^2} \equiv \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right] = \frac{y}{x^2 + y^2} + i \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{ix + y}{x^2 + y^2}.$$

И завершая рассмотрение, заметим, что в полярной системе координат

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

из (19) следует формула Эйлера

$$\begin{aligned} \ln \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) &= \ln \rho + \ln(\cos \varphi + i \sin \varphi) \equiv \frac{1}{2} \ln(\rho^2) + i \operatorname{arctg}(tg \varphi) = \ln \rho + i\varphi \Rightarrow \\ \Rightarrow i\varphi &\equiv \ln(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow e^{i\varphi} \equiv \cos \varphi + i \sin \varphi, \end{aligned}$$

вводимая некоторыми авторами по определению [2] (без доказательства).

Заключение. Таким образом, в работе доказана корректность единого подхода к интегрированию рациональных дробей при наличии в знаменателе линейных относительно аргумента комплексно сопряженных множителей. На его основе реализована процедура, позволившая выразить через элементарные функции двух переменных реальную и мнимую части натурального логарифма комплексного аргумента. Это дало возможность доказать формулу Эйлера без использования теории степенных рядов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, т. 1 – М.: Наука, 1968. – 440 с.
2. Шабунин М. И., Сидоров Ю. В. Теория функций комплексного переменного. – М.: Лаборатория знаний, 2016. – 330 с.

REFERENCES

1. Fikhtengol'ts, G. M. (1968). *Osnovy matematicheskogo analiza, t. 1*. Moscow: Nauka. (In Russ.).
2. Shabunin, M. I., & Sidorov, Yu. V. (2016). *Teoriya funktsii kompleksnogo peremennogo*. Moscow: Laboratoriya znaniy. (In Russ.).

Поступила 20.01.2025

**INTEGRATION OF RATIONAL FRACTION AND IDENTICAL RELATIONS
OF ELEMENTARY FUNCTIONS OF COMPLEX ARGUMENT**

S. EKHILEVSKIY, O. GOLUBEVA, O. ZABELENDIK
(*Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk*)

The correctness of the unified approach to integration of rational fractions is justified if there is a product of linear complex conjugate polynomials in the denominator. On its basis, a procedure has been implemented that made it possible to express the real and imaginary parts of the natural logarithm of a complex argument through elementary functions of two variables. This made it possible to prove Euler's formula without using power series theory.

Keywords: *rational fraction integration, natural logarithm of the complex argument, Euler's formula.*

УДК 517.983

DOI 10.52928/2070-1624-2025-44-1-81-87

РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ФУНКЦИЕЙ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА В ЯДРАХ

д-р физ.-мат. наук, проф. С. М. СИТНИК

(Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ БелГУ), Россия)

канд. физ.-мат. наук, доц. О. В. СКОРОМНИК, М. В. ПАПКОВИЧ

(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

Рассматривается один класс многомерных интегральных уравнений первого рода с функцией Миттаг-Леффлера в ядрах по ограниченной пирамидальной области специального вида. Следуя методике Я. Тамаркина, выводятся явные формулы решения рассматриваемых многомерных интегральных уравнений. Устанавливаются необходимые и достаточные условия разрешимости таких уравнений в пространствах суммируемых функций.

Ключевые слова: *многомерные интегральные уравнения первого рода, функция Миттаг-Леффлера, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.*

Введение. Одномерные интегральные уравнения первого рода, которые обобщают классическое интегральное уравнение Абеля и содержат специальные функции в ядрах, изучены многими авторами (см. обзор результатов и библиографию в [1, § 35.1, 35.2, 37.1, 39.1, 39.2; 2]). Такие уравнения возникают, например, при изучении краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типа с краевыми условиями, содержащими обобщенные дробные интегралы и производные [3]. Исследование необходимых и достаточных условий разрешимости вышеуказанных уравнений является более сложной задачей. Хорошо известен классический результат Я. Тамаркина о разрешимости интегрального уравнения Абеля в пространстве $L_1(a, b)$ суммируемых функций на конечном отрезке $[a, b]$ действительной оси [1, теорема 2.1]. В работе [4] аналогичный результат был получен для многомерного интегрального уравнения типа Абеля по ограниченной пирамидальной области евклидова пространства специального вида. Интерес к исследованию таких уравнений вызван их приложениями в задачах исследования отражения волн от прямолинейной границы [5, с. 48; 6] и в задачах сверхзвукового обтекания пространственных углов [7] (см. также [1, § 24.1, 28.4]).

Используя методику Я. Тамаркина, в работах [8; 9] были установлены необходимые и достаточные условия разрешимости в $L_1(a, b)$ одного класса интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса и его многомерного аналога по пирамидальным областям. В [10–17] приводятся решения в замкнутой форме отдельных классов многомерных интегральных уравнений первого рода с такими специальными функциями, как гипергеометрическая функция Гаусса, функция Лежандра, вырожденная гипергеометрическая функция Куммера, функция Бесселя – Клиффорда, функция гиперболического синуса в ядрах по пирамидальным областям, и изучается вопрос разрешимости указанных уравнений в пространствах интегрируемых функций.

Целью настоящей работы является продолжение этих исследований. Мы даем решение в замкнутой форме еще одного класса многомерных интегральных уравнений с функцией Миттаг-Леффлера в ядрах по пирамидальной области специального вида и устанавливаем необходимые и достаточные условия их разрешимости в пространствах интегрируемых функций. Нами приводятся вспомогательные сведения, решения рассматриваемых уравнений в квадратурах, а также необходимые и достаточные условия их разрешимости.

1. Предварительные сведения. Будем использовать обозначения (см., например, [1, § 28.4; 10–17]). Пусть $N = \{1, 2, \dots\}$ – множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, R^n – n -мерное евклидово пространство.

Для $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ и $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in R^n$ через $\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = \sum_{k=1}^n x_k t_k$ обозначим их скалярное произведение.

Заметим, что $\mathbf{x} \cdot \mathbf{1} = \sum_{k=1}^n x_k$ для $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$; под выражением $\mathbf{x} > \mathbf{t}$ понимаем $x_1 > t_1, x_2 > t_2, \dots, x_n > t_n$

и аналогично для знака \geq ; $R_+^n = \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{x} > 0\}$; $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in N_0^n = N_0 \times N_0 \times \dots \times N_0$, где $(k_i \in N_0, i = 1, 2, \dots, n)$ – мультииндекс, $\mathbf{k}! = k_1! k_2! \dots k_n!$ и $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$. Для $\mathbf{x} \in R^n, \mathbf{k} \in N_0^n, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in R_+^n$

и $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathbf{R}_+^n$ полагаем $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\dots\Gamma(\alpha_n)$, $(\mathbf{x})_{\mathbf{k}} = (x_1)_{k_1} (x_2)_{k_2} \dots (x_n)_{k_n}$,
 $\mathbf{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x_1)^{\alpha_1} (\partial x_2)^{\alpha_2} \dots (\partial x_n)^{\alpha_n}}$, $\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma = (x_1^{\sigma_1} - t_1^{\sigma_1})(x_2^{\sigma_2} - t_2^{\sigma_2}) \dots (x_n^{\sigma_n} - t_n^{\sigma_n})$, где $(z)_n$ – символ Похгаммера:

$$(z)_0 \equiv 1, (z)_k = z(z+1)\dots(z+k-1) = \Gamma(z+n)/\Gamma(z) \quad (z \in \mathbf{C}; n \in \mathbf{N}), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}_+^n.$$

Пусть $A = \|a_{jk}\|$ ($a_{jk} \in \mathbf{R}^1$) – матрица порядка $n \times n$ с определителем $|A| = \det A$, вектор-строки которой обозначим через $\mathbf{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$, элементы обратной матрицы A^{-1} обозначим через a_{jk} . Без ограничения общности будем считать $|A| = 1$. Пусть [1, §28.4; 10–17]

$$A \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x}, \dots, \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{x}), \quad (A \cdot \mathbf{x})^\alpha = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x})^{\alpha_1} (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x})^{\alpha_2} \dots (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{x})^{\alpha_n}.$$

Для $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ и $r \in \mathbf{R}^1$ обозначим через

$$A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}) = \{\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n : A \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{t}) \geq 0, \mathbf{c} \cdot \mathbf{t} + r \geq 0\} \quad (1)$$

n -мерную ограниченную в \mathbf{R}^n пирамиду с вершиной в точке \mathbf{b} , основанием на гиперплоскости $\mathbf{c} \cdot \mathbf{t} + r = 0$ и боковыми гранями, лежащими на гиперплоскостях $\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{t}) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$). В частном случае, когда $A = E = \|\delta_{jk}\|$ – единичная матрица, $\mathbf{c} = (1, \dots, 1)$ и $r = 0$, $E_1(\mathbf{b})$ является модельной пирамидой:

$$E_1(\mathbf{b}) = \{\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{t} \leq \mathbf{b}, \mathbf{1} \cdot \mathbf{t} \geq 0\}. \quad (2)$$

Известно [1, лемма 28.2], что для ограниченности пирамиды (1) необходимо и достаточно выполнения условия $A^{-1}\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} > 0$ (соответственно для модельной пирамиды $A^{-1}\mathbf{c} > 0$).

Для $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}_+^n$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbf{R}_+^n$, введем функцию

$$E_{\alpha,\beta}[\mathbf{x}] = \prod_{j=1}^n E_{\alpha_j,\beta_j}[x_j], \quad (3)$$

представляющую собой произведение двухпараметрических функций Миттаг-Леффлера, определяемых по формуле [1, § 1.3; 18, глава 4]

$$E_{\delta,\eta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z)^k}{\Gamma(\delta k + \eta)}, \quad \delta > 0, \eta > 0. \quad (4)$$

Нам понадобится интегральное соотношение, содержащее функцию (4) [18, формула 4.4.5]

$$\frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^z (z-t)^{\gamma-1} E_{\delta,\eta}(\lambda t^\delta) t^{\eta-1} dt = z^{\gamma+\eta-1} E_{\delta,\gamma+\eta}(\lambda z^\delta), \quad \gamma > 0, \eta > 0, \quad (5)$$

а также вспомогательное утверждение.

Лемма 1 [1; § 28]. Если функция $f(\mathbf{t}, \boldsymbol{\tau})$, определенная на $A_{\mathbf{c}}(\mathbf{b}) \times A_{\mathbf{c}}(\mathbf{b})$, измерима, то верна следующая формула перестановки порядка интегрирования:

$$\int_{A_{\mathbf{c}}(\mathbf{b})} dt \int_{A_{\mathbf{c}}(\mathbf{t})} f(\mathbf{t}, \boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} = \int_{A_{\mathbf{c}}(\mathbf{b})} d\boldsymbol{\tau} \int_{\sigma(\mathbf{b}, \boldsymbol{\tau})} f(\mathbf{t}, \boldsymbol{\tau}) dt, \quad (6)$$

$$\sigma(\mathbf{b}, \boldsymbol{\tau}) = \{\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n : A \cdot \boldsymbol{\tau} \leq A \cdot \mathbf{t} \leq A \cdot \mathbf{b}\},$$

в предположении, что один из повторных интегралов в (6) сходится абсолютно.

Нами рассматривается интегральное уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{A_{c,r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}[\lambda(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^\alpha] f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in A_{c,r}(\mathbf{b}), \quad (7)$$

где $\mathbf{x} \in A_{c,r}(\mathbf{b})$ и $A_{c,r}(\mathbf{b}) (\mathbf{c}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^1)$ – пирамида (1);

$\mathbf{x}, \mathbf{t}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n, E_{\alpha,\beta}[\lambda(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^\alpha]$ – функция вида (3).

2. Решение в замкнутой форме. Выведем формулу решения уравнения (7). Заменяем в (7) \mathbf{x} на \mathbf{t} и \mathbf{t} на \mathbf{u} , умножаем обе части полученного равенства на $(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\beta} \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1}$, где $\sigma^1 = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n, \mathbf{t}^{\sigma-1} = t_1^{\sigma_1-1} t_2^{\sigma_2-1} \dots t_n^{\sigma_n-1}$, далее интегрируем по пирамиде $A_{c,r}(\mathbf{x})$, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{A_{c,r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\beta} \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} d\mathbf{t} \int_{A_{c,r}(\mathbf{t})} (A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma))^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}[\lambda(A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma))^\alpha] f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \\ & = \int_{A_{c,r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\beta} \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad \mathbf{x} \in A_{c,r}(\mathbf{b}). \end{aligned} \quad (8)$$

Изменяем порядок интегрирования в левой части (8) согласно формуле (6):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{A_{c,r}(\mathbf{x})} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \int_{\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\beta} (A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma))^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}[\lambda(A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma))^\alpha] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} d\mathbf{t} = \\ & = \int_{A_{c,r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\beta} \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n : A \cdot \mathbf{u} \leq A \cdot \mathbf{t} \leq A \cdot \mathbf{x}\}$.

Для вычисления внутреннего интеграла в левой части (9) вводим новые переменные

$$\tau_j = \mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma), \quad \mathbf{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn}) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Далее используем формулу (5) для внутреннего интеграла в левой части (9), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\beta} (A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma))^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}[\lambda(A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma))^\alpha] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} d\mathbf{t} = \\ & = \prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_j)} \int_0^{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)} \tau_j^{\beta_j-1} (\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - \tau_j)^{1-\beta_j-1} E_{\alpha_j, \beta_j}[\lambda \tau_j^{\alpha_j}] d\tau_j \right] = \\ & = \prod_{j=1}^n \left[(\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma))^{1-\beta_j+\beta_j-1} E_{\alpha_j, 1-\beta_j+\beta_j}[\lambda(\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma))^{\alpha_j}] \right] = E_{\alpha,1}[\lambda(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma))^\alpha]. \end{aligned}$$

Таким образом равенство (9) принимает вид

$$\int_{A_{c,r}(\mathbf{x})} E_{\alpha,1}[\lambda(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma))^\alpha] f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \int_{A_{c,r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\beta} \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t},$$

или

$$\int_{A_{c,r}(\mathbf{x})} f^*(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f_{A_{c,r}}^*(\mathbf{x}), \quad (10)$$

где

$$f^*(\mathbf{t}) = E_{\alpha,1}[\lambda(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^\alpha] f(\mathbf{t}), \quad f_{A_{c,r}}^*(\mathbf{x}) = \int_{A_{c,r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\beta} \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.$$

Совершаем замену переменных

$$\mathbf{x} + \frac{r}{nc} = A^{-1} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}, \quad \mathbf{t} + \frac{r}{nc} = A^{-1} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}} \right), \quad (11)$$

где $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} = \left(\frac{y_1}{d_1}, \dots, \frac{y_n}{d_n} \right) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{d} = A^{-1} \cdot \mathbf{c}$, переписываем (10) в виде

$$\int_{E_1(\mathbf{y})} \psi(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} = \varphi(\mathbf{y}), \quad (12)$$

где $E_1(\mathbf{y})$ – модельная пирамида (2),

$$\psi(\boldsymbol{\tau}) = f^* \left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}} \right) - \frac{r}{nc} \right), \quad \varphi(\mathbf{y}) = f_{A_{c,r}}^{\sigma, a} \left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} \right) - \frac{r}{nc} \right) \prod_{j=1}^n d_j.$$

Чтобы выполнить обращение уравнения (11), перепишем его в виде

$$\int_{-(y_1 + \dots + y_{n-1})}^{y_n} d\tau_n \int_{-(y_1 + \dots + y_{n-2} + \tau_n)}^{y_{n-1}} d\tau_{n-1} \dots \int_{-(\tau_2 + \dots + \tau_n)}^{y_1} \psi(\boldsymbol{\tau}) d\tau_1 = \varphi(\mathbf{y}). \quad (13)$$

Далее, произведя последовательное дифференцирование по переменным y_n, y_{n-1}, \dots, y_1 , возвращаемся опять к переменной $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} - \frac{r}{nc}$ и, учитывая

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^n \frac{a_{jk}}{d_k} \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (k=1, \dots, n), \quad (14)$$

где a_{jk} ($j, k=1, \dots, n$) – элементы обратной матрицы A^{-1} , получаем формулу решения уравнения (7)

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left\{ \int_{A_{c,r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\beta} \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right\}. \quad (15)$$

3. Необходимые и достаточные условия разрешимости. Приведем необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (7) в пространстве $L_1(A_{c,r}(\mathbf{b}))$:

$$L_1(A_{c,r}(\mathbf{b})) = \left\{ f(\mathbf{x}) : \int_{A_{c,r}(\mathbf{x})} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} < \infty \right\}. \quad (16)$$

Введем пространство (см., например, [1, § 28.4; 10–17])

$$I_{A_{c,r}}(L_1) = \left\{ \varphi : \varphi(\mathbf{x}) = \int_{A_{c,r}(\mathbf{x}), A \cdot (\mathbf{b}-\mathbf{t}) \geq A \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{t})} h(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, h(\mathbf{t}) \in L_1(A_{c,r}(\mathbf{b})) \right\}. \quad (17)$$

Пространство $I_{A_{c,r}}(L_1)$ играет ту же роль для уравнения (7), что и пространство $AC([a, b])$ абсолютно непрерывных функций для классического интегрального уравнения Абеля [1, § 2.2]. Известно, что если $\varphi \in I_{A_{c,r}}(L_1)$, то почти всюду на $A_{c,r}(\mathbf{b})$ существуют ее частные производные и

$$\prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \varphi(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}).$$

Если матрица $A = E$ – единичной матрице, $\mathbf{c} = (1, \dots, 1)$ и $r = 0$, то пространства (16) и (17) принимают соответственно вид

$$L_1(E_1(\mathbf{b})) = \left\{ f(\mathbf{x}) : \int_{E_1(\mathbf{x})} |f(\mathbf{t})| dt < \infty \right\},$$

$$I_{E_1}(L_1) = \left\{ \varphi : \varphi(\mathbf{x}) = \int_{E_1(\mathbf{x}), (\mathbf{b}-\mathbf{t}) \geq (\mathbf{x}-\mathbf{t})} h(\mathbf{t}) dt, h(\mathbf{t}) \in L_1(E_1(\mathbf{b})) \right\},$$

где
$$h(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} \varphi(\mathbf{x}).$$

Справедливы следующие два утверждения, которые являются аналогами классической теоремы Тамаркина о разрешимости одномерного интегрального уравнения Абеля в пространстве $L_1(a, b)$.

Теорема 1. Для разрешимости многомерного интегрального уравнения (7) с $\beta \in \mathbb{R}^n$ ($0 < \beta < 1$) и $\sigma \in \mathbb{R}_+^n$ в пространстве $L_1(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}))$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$f_{A_{\mathbf{c},r}}^*(\mathbf{x}) = \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\beta} \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) dt \in I_{A_{\mathbf{c},r}}(L_1)$$

и

$$\left[f_{A_{\mathbf{c},r}}^*(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + r = 0} = \left[\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{A_{\mathbf{c},r}}^*(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + r = 0} = \dots = \left[\prod_{k=2}^n \sum_{j=1}^n \left(\tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f_{A_{\mathbf{c},r}}^*(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + r = 0} = 0.$$

При выполнении этих условий уравнение (7) разрешимо в $L_1(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}))$ и его единственное решение выражается формулой (14).

Доказательство.

В модельном случае $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}) = E_1(\mathbf{b})$ утверждение теоремы следует из (12), (13). В случае произвольной пирамиды $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ оно выводится из (12), (13) после замены переменных (11) с учетом (14).

Следствие 1. Многомерное модельное интегральное уравнение типа Абеля

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}[\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^\alpha] f(\mathbf{t}) dt = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in E_1(\mathbf{b}), \tag{18}$$

с $\beta \in \mathbb{R}^n$ ($0 < \beta < 1$) и $\sigma \in \mathbb{R}_+^n$ разрешимо в пространстве $L_1(E_1(\mathbf{b}))$ тогда и только тогда, когда

$$f_{E_1}^*(\mathbf{x}) = \int_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\beta} \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) dt \in I_{E_1}(L_1)$$

и

$$\left[f_{E_1}^*(\mathbf{x}) \right]_{1 \cdot \mathbf{x} = 0} = \left[\frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}^*(\mathbf{x}) \right]_{1 \cdot \mathbf{x} = 0} = \dots = \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}^*(\mathbf{x}) \right]_{1 \cdot \mathbf{x} = 0} = 0.$$

При выполнении этих условий уравнение (18) разрешимо в $L_1(E_1(\mathbf{b}))$ и его единственное решение выражается формулой

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f_{E_1}^*(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \int_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\beta} \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) dt \right\}.$$

Работа выполнена в рамках задания 1.2.01 ГПНИ «Конвергенция–2025», подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.2.01 (№ регистрации 20211316 от 15.05.2021 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Скоромник О. В. Интегральные преобразования с функциями Гаусса и Лежандра в ядрах и интегральные уравнения первого рода. – Новополоцк: ПГУ, 2019. – 180 с.
3. Репин О. А. Краевые задачи со сдвигом для уравнений гиперболического и смешанного типов. – Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 1992. – 183 с.
4. Kilbas A. A., Saigo M., Takushima H. On integrable solution of a multidimensional Abel-type integral equation // *Fukuoka Univ. Sci. Rep.* – 1995. – Vol. 25. iss. 1. – P. 1–9.
5. Михлин С. Г. Лекции по интегральным уравнениям. – М.: Физматгиз, 1959. – 232 с.
6. Преображенский Н. Г. Абелева инверсия в физических задачах: Инверсия Абеля и ее обобщения. – Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – С. 6–24.
7. Федосов В. П. О некоторых обобщенных уравнениях Абеля. – Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – С. 106.
8. Решение многомерных гипергеометрических уравнений типа Абеля / А. А. Килбас, Р. К. Райна, М. Сайго и др. // Доклады НАН Беларуси. – 1995. – Т. 43. № 2. – С. 23–26.
9. Solvability of some Abel-type integral equations involving the Gauss hypergeometry Function as kernels in the space of summable functions / K. L. Raina, T. M. Srivastava, A. A. Kilbas et al. // *ANZIAM J.* – 2001. – Vol. 43. iss. 2. – P. 291–320.
10. Килбас А. А., Скоромник О. В. Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Лежандра в ядре по пирамидальной области // Доклады академии наук (Российская Академия наук). – 2009. – Т. 429, № 4. – С. 442–446.
11. Килбас А. А., Скоромник О. В. Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области // Труды Ин-та математики НАН Беларуси. – 2009. – Т. 17, № 1. – С. 71–78.
12. Скоромник О. В. Решение многомерных гипергеометрических интегральных уравнений типа Абеля // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2011. – № 4. – С. 64–70.
13. Скоромник О. В., Мателенок А. П. Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2011. – № 2(62). – С. 22–27.
14. Скоромник О. В., Шлапаков С. А. Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Куммера в ядре по пирамидальной области // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2014. – № 1(79). – С. 12–17.
15. Скоромник О. В., Шлапаков С. А. Решение многомерного интегрального уравнения типа Абеля с функцией Бесселя–Клиффорда в ядре по пирамидальной области // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2018. – № 2(99). – С. 5–13.
16. Папкович М. В., Скоромник О. В. Решение многомерного интегрального уравнения типа Абеля с функцией гиперболического синуса в ядре по пирамидальной области // Актуальные проблемы математики и информационных технологий: материалы II Всерос. конф., приуроч. к 90-лет. Дагестанского гос. ун-та, Махачкала, 5–7 февраля 2021 г. / ДГУ; редкол.: А. М. Магомедов (гл. ред.) [и др.]. – Махачкала, 2021. – С. 124–127.
17. Папкович М. В., Скоромник О. В., Шлапаков С. А. Решение одного класса многомерных интегральных уравнений первого рода с функцией гиперболического синуса в ядрах // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2021. – № 12. – С. 77–83.
18. Mittag-Lffler Functions, Related Topics and Applications / R. Corenflo, A Kilbas, F. Mainardi et al. – 2nd ed. – Berlin: Springer Verlag, 2020. – URL: link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-61550-8 (дата обращения 15.03.2025).

REFERENCES

1. Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1987). *Integrals i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]. Minsk: Nauka i tekhnika. (In Russ.).
2. Skoromnik O. V. (2019). *Integral'nye preobrazovaniya s funktsiyami Gaussa i Lezhandra v jadrakh i integral'nye uravneniya pervogo roda*. Novopolock: PSU. (In Russ.).
3. Repin, O. A. (1992). *Kraevye zadachi so sdvigom dlya uravnenii giperbolicheskogo i smeshannogo tipov*. Saratov: izd-vo Saratovskogo un-ta. (In Russ.).
4. Kilbas, A. A., Saigo, M., & Takushima, H. (1995). On integrable solution of a multidimensional Abel-type integral equation. *Fukuoka Univ. Sci. Rep.*, 25(1), 1–9.
5. Mikhlina, S. G. (1959). *Lektsii po integral'nym uravneniyam*. Moscow: Fizmatgiz. (In Russ.).
6. Preobrazhenskii, N. G. (1978). *Abeleva inversiya v fizicheskikh zadachakh: Inversiya Abelya i ee obobshcheniya*. Novosibirsk: In-t. teor. i prikl. mekhaniki SO AN SSSR. (In Russ.).
7. Fedosov, V. P. (1978). *O nekotorykh obobshchennykh uravneniyakh Abelya*. Novosibirsk: In-t teor. i prikl. mekhaniki SO AN SSSR. (In Russ.).
8. Kilbas, A. A., Raina, R. K., Saigo, M., & Srivastava, G. M. (1995). Reshenie mnogomernykh gipergeometricheskikh uravnenii tipa Abelya. *Doklady NAN Belarusi*, 43(2), 23–26. (In Russ.).
9. Raina, K. L., Srivastava, T. M., Kilbas, A. A., & Saigo, M. (2001). Solvability of some Abel-type integral equations involving the Gauss hypergeometry Function as kernels in the space of summable functions. *ANZIAM J.*, 43(2), 291–320.
10. Kilbas, A. A., & Skoromnik, O. V. (2009). Solution of a multidimensional integral equation of the first kind with the Legendre function in the kernel over a pyramidal domain. *Doklady Mathematics*, 80(3), 847–851. DOI: [10.1134/S1064562409060179](https://doi.org/10.1134/S1064562409060179).

11. Kilbas, A. A., & Skoromnik, O. V. (2009). Reshenie mnogomernykh integral'nykh uravnenii tipa Abelya s gipergeometricheskoi funktsiei Gaussa v yadrah po piramidal'noi oblasti [The solution of multidimensional integral Abel type equations with the Gauss hypergeometric function in kernels over pyramidal domain]. *Trudy In-ta matematiki NAN Belarusi [Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus]*, 17(1), 71–78. (In Russ., abstr. in Engl.).
12. Skoromnik, O. V. (2011). Reshenie mnogomernykh gipergeometricheskikh integral'nykh uravnenii tipa Abelya [Solution of a multidimensional hypergeometric abel-type integral equations]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (4), 64–70. (In Russ., abstr. in Engl.).
13. Skoromnik, O. V., & Matelenok, A. P. (2011). Reshenie mnogomernykh integral'nykh uravnenii tipa Abelya s gipergeometricheskoi funktsiei Gaussa v yadrah po piramidal'noi oblasti [Solution of multidimensional Abel-type integral equations with the Gauss hypergeometric function in the kernels over pyramidal domain]. *Vestnik Vitebskaya dzyarzhavnaya universiteta*, 2(62), 22–27. (In Russ., abstr. in Engl.).
14. Skoromnik, O. V., & Shlapakov, S. A. (2014). Reshenie mnogomernogo integral'nogo uravneniya pervogo roda s funktsiei Kummera v yadre po piramidal'noi oblasti [Solution of a Multidimensional Integral Equation of the First Kind with Kummer Function in the Kernel over a Pyramidal Domain]. *Vestnik Vitebskaya dzyarzhavnaya universiteta*, 1(79), 12–17. (In Russ., abstr. in Engl.).
15. Skoromnik, O. V., & Shlapakov, S. A. (2018). Reshenie mnogomernogo integral'nogo uravneniya tipa Abelya s funktsiei Besselya–Klifforda v yadre po piramidal'noi oblasti [Solution of a multidimensional integral abel type equation with the Bessel–Klifford function in the kernel over a pyramidal domain]. *Vestnik Vitebskaya dzyarzhavnaya universiteta*, 2(99), 5–13. (In Russ., abstr. in Engl.).
16. Papkovich, M. V., Skoromnik, O. V. (2021). Reshenie mnogomernogo integral'nogo uravneniya tipa Abelya s funktsiei giperbolicheskogo sinusa v yadre po piramidal'noi oblasti. In A. M. Magomedov et al. (Eds.), *Aktual'nye problemy matematiki i informatsionnykh tekhnologii* (124–127). Makhachkala: DGU. (In Russ.).
17. Papkovich, M. V., Skoromnik, O. V., & Shlapakov, S. A. (2021). Reshenie odnogo klassa mnogomernykh integral'nykh uravnenii pervogo roda s funktsiei giperbolicheskogo sinusa v yadrah [Solution of one class of multi-dimensional integral equations of the first kind with hyperbolic sine function in kernels]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (12), 77–83.
18. Corenflo, R., Kilbas, A., Mainardi, F., & Rogosin, S. (2020). *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications* (2nd ed.). Berlin: Springer Verlag. URL: link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-61550-8.

Поступила 15.04.2025

SOLUTION OF ONE CLASS OF MULTI-DIMENSIONAL INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH MITTAG-LEFFLER FUNCTION IN KERNELS

S. SITNIK

(The National Research University «Belgorod State University» (BelSU), Russia)

O. SKOROMNIK, M. PAPKOVICH

(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

One class of multidimensional integral equations of the first kind with Mittag-Leffler function in kernels over a bounded pyramidal domain of a special form is considered. Following the technique of Ya. Tamarkin, explicit formulas for the solution of the considered multidimensional integral equations are derived. Necessary and sufficient conditions for the solvability of such equations in spaces of summable functions are established.

Keywords: *multidimensional integral equations of the first kind, Mittag-Leffler function, space of integrable functions, fractional integrals and derivatives.*

СОДЕРЖАНИЕ

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

<i>Дин А., Недзьведь О. В.</i> Оценка 3D-позы человека на основе 2D ключевых точек	2
<i>Лобарёв Д. С., Лобарёв Н. Д.</i> Синтез недетерминированных конечных автоматов по регулярным выражениям алгоритмом Глушкова в формате JFF	9
<i>Песецкая Т. И.</i> Модель динамической системы управления с обратной связью для регулирования социокультурного процесса в условиях неточности диагностики	14
<i>Синицына В. В.</i> Метод преобразования яркости изображений для помощи людям с ахроматопсией в визуальном восприятии информации	25
<i>Широченко В. А., Скрылев Н. П., Недюхин В. А.</i> Анализ эффективности промышленного производства на основе решения двойственной задачи линейного программирования	32

ЭЛЕКТРОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ УСТАНОВКИ (ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ)

<i>Абрамов С. А., Бринкевич Д. И., Просолович В. С., Зубова О. А., Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Кенжаев Зоир Тохир ўгли, Ластовский С. Б.</i> Пленки негативного фоторезиста AZ nLOF 5510, облученные электронами	39
<i>Брич М. А., Горбачёв Н. М., Козначеев И. А., Грозберг Ю. Г., Адамович А. Л.</i> Особенности микроволновой обработки суспензий органических материалов в автотермическом режиме	47
<i>Вабищевич С. А., Бринкевич Д. И., Просолович В. С., Зубова О. А., Танана О. В., Вабищевич Н. В., Исмаилов Б. К.</i> Индентирование пленок негативных фоторезистов для обратной литографии	53
<i>Скворцов О. Б., Сташенко В. И., Савенко В. С.</i> Ударно-волновые процессы в металлах при механической обработке с применением электропластического эффекта	61
<i>Янушкевич В. Ф., Иванова К. И., Кизина О. А., Сивацкий Д. С.</i> Учет концентрации частиц в режиме низкочастотного взаимодействия электромагнитных волн с анизотропными средами	70

МАТЕМАТИКА

<i>Ехилевский С. Г., Голубева О. В., Забелендик О. Н.</i> Интегрирование рациональной дроби и тождественные связи элементарных функций комплексного аргумента	77
<i>Ситник С. М., Скоромник О. В., Папкович М. В.</i> Решение одного класса многомерных интегральных уравнений первого рода с функцией Миттаг-Леффлера в ядрах	81