

MIESIĘCZNIK
POŁOCKI.

№ 1(46), 2026

Т о м I.
Р о к 1818.

*«Вестник Полоцкого государственного университета»
продолжает традиции первого в Беларуси литературно-
научного журнала «Месячник Полоцкий».*

ВЕСТНИК ПОЛОЦКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА Серия С. Фундаментальные науки

В серии С научно-теоретического журнала публикуются статьи, прошедшие рецензирование, содержащие новые научные результаты в области информатики, вычислительной техники и управления, электрофизики, электрофизических установок (технические науки), математики.

ВЕСНІК ПОЛАЦКАГА ДЗЯРЖАЎНАГА ЎНІВЕРСІТЭТА Серыя С. Фундаментальныя навукі

У серыі С навукова-тэарэтычнага часопіса друкуюцца артыкулы, якія прайшлі рэцэнзаваанне, змяшчаюць новыя навуковыя вынікі ў галіне інфарматыкі, вылічальнай тэхнікі і кіравання, электрафізікі, электрафізічных устаноў (тэхнічныя навукі), матэматыкі.

HERALD OF POLOTSK STATE UNIVERSITY Series C. Fundamental sciences

Series C includes reviewed articles which contain novelty in research and its results in the field of computer science, computer engineering and management, electrophysics, electrophysical installations (technical sciences), mathematics.

Журнал входит в Российский индекс научного цитирования.
Электронная версия номера размещена на сайте <https://journals.psu.by/fundamental>.

Адрес редакции:
Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой,
ул. Блохина, 29, г. Новополоцк, 211440, Беларусь
тел. + 375 (214) 59 95 44, e-mail: vestnik@psu.by

Отв. за выпуск: С. А. Вабищевич.
Редактор С. Е. Рясова.

Подписано к печати 15.04.2026. Бумага 80 г/м². Формат 60×84¹/₈. Ризография.
Усл. печ. л. 6,97. Уч.-изд. л. 8,4. Тираж экз. Заказ 153.

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

УДК 004.032.26

DOI 10.52928/2070-1624-2026-46-1-2-9

**ЭФФЕКТИВНОЕ ОБУЧЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ
НА ОСНОВЕ ВЫБОРА НАЧАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

*д-р техн. наук, проф. В. В. КРАСНОПРОШИН,
канд. техн. наук В. В. МАЦКЕВИЧ
(Белорусский государственный университет, Минск)*

V. Krasnoproshin ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9463-4869>

V. Matskevich ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6964-542X>

Рассмотрена проблема, связанная с обучением нейронных сетей. Введено понятие неоднородности пространства оптимизации и доказан критерий его существования. Показано, что одним из факторов, влияющих на качество и скорость алгоритма обучения, является выбор начального приближения. Предложена процедура генерации начального решения, учитывающая свойство неоднородности пространства, специфику решаемой задачи и другие факторы, что позволило повысить качество обучения. Показано, что данную процедуру можно использовать для любых архитектур нейронных сетей и входных данных. Приведены результаты экспериментов по решению прикладной задачи, которые подтверждают эффективность предложенного подхода к обучению.

Ключевые слова: *нейронные сети, обучение, пространство решений, неоднородность, многомерная матрица несоответствий.*

Введение. Нейросетевые технологии применяются для решения широкого спектра прикладных задач. Эффективность их применения напрямую зависит от качества обучения нейронных сетей. Однако при анализе процесса обучения выбору начального приближения уделяется неоправданно мало внимания. Вместе с тем, как показано в [1–4], такой выбор влияет не только на скорость обучения, но и на качество конечного решения. Можно отметить лишь отдельные результаты, которые непосредственно связаны с проблемой выбора начального решения, но они носят локальный, ограниченный характер. Они, как правило, не учитывают специфику задачи, тип архитектуры сети, свойства пространства оптимизации и др. Так, в алгоритмах градиентного типа в большей степени используют свойство сходимости. Область сходимости формируется на основе локального минимума, от которого и зависят результаты обучения. Вследствие этого начальным приближением выбирают точку пространства решений, максимально близкую к глобальному минимуму (например, локальный минимум). Именно с нее и начинают процесс обучения сети. Другие алгоритмы используют процедуры генерации начального решения на основе анализа количества весов в отдельном слое сети. Начальные приближения в этом случае строятся, как правило, на основе реализации равномерно распределенных на отрезке с центром в нуле случайных величин. Отличаются такие процедуры лишь длинами этих отрезков.

В работе исследуются свойства пространства решений оптимизационной задачи обучения. Вводится понятие его неоднородности, на основе которого предлагается процедура генерации начального приближения. Показано, что в рамках данной процедуры учитывается специфика входных данных, тип архитектуры нейронной сети и другие важные факторы. Это делает ее в некотором смысле универсальной при обучении нейронных сетей. На примере решения прикладной задачи экспериментально показано, что применение алгоритма обучения с использованием такой процедуры позволяет повысить качество результатов обучения.

Обучение нейронных сетей. Процесс обучения является наиболее трудоемким этапом нейросетевой технологии, который условно можно разбить на несколько частей.

Первая из них включает сбор, очистку и преобразование входных данных, разметку обучающей и тестовой выборки. Далее определяется тип архитектуры нейронной сети, которая проектируется исходя из специфики решаемой задачи. Она должна учитывать особенности входных данных и предметной области в целом. Все это подготовительная работа, которая непосредственно предшествует началу обучения. Однако полнота входных данных и выбор способа преобразования, как и типа архитектуры, существенно влияют на качество получаемого в результате обучения конечного решения.

В завершение выбирается алгоритм обучения, генерируется начальное приближение и производится непосредственная настройка нейронной сети на предметную область [5–9]. От выбора алгоритма зависит не только качество обучения, но и объем необходимых для этого вычислительных ресурсов. Это наиболее затратная с вычислительной точки зрения часть процесса.

Необходимо отметить, что обучение является типичной оптимизационной задачей с соответствующим пространством решений. Архитектура сети определяет его размерность и, возможно, некоторые дополнительные свойства, вызванные ее особенностью. Алгоритм обучения задает стратегию поиска оптимального решения, однако эффективность поиска во многом определяется свойствами структуры пространства оптимизации.

Неоднородность пространства решений. Рассмотрим оптимизационное пространство обучения более подробно. Известно, что архитектура любой нейронной сети задается набором слоев и связей между ними. При этом каждый слой ориентирован на выполнение одного или несколько типов преобразования, задаваемых системой параметров. Для каждого параметра определены диапазоны изменения его значений, с помощью которых можно управлять процессом обработки, то есть формально любую архитектуру нейронной сети можно задать в виде параметрического семейства $N(X)$, где X – система из m векторов, координаты которых задаются значениями параметров определенного типа. В пределах отдельного вектора координаты отвечают за однотипные преобразования, поэтому диапазон их допустимых значений будет также одинаковым. Из этого следует, что для каждого i -го вектора ($i = \overline{1, m}$) множество допустимых значений D_i каждой координаты его параметров определятся диапазоном

$$D_i = [a_i; b_i]^{k_i},$$

где k_i – количество координат в i -м векторе,
 a_i, b_i – верхние и нижние границы диапазона ее значений соответственно.

Нетрудно показать, что процесс обучения нейронной сети формально можно записать в виде следующей задачи условной оптимизации. Введем обозначения:

- $N(X_1, X_2, \dots, X_m)$ – параметрическое семейство алгоритмов, реализующих преобразование информации;
- Ω – пространство параметров в виде декартова произведения множеств допустимых значений D_i , определяющих диапазоны их изменений для соответствующих векторов.

Цель задачи обучения заключается в нахождении значения параметров, доставляющих минимум некоторой функции F , фиксирующей ошибки алгоритма.

Известно, что результатом работы нейронной сети является вектор значений нейронов выходного слоя. Для различных входных данных выходные значения должны быть разными. Можно показать, что оптимальные значения параметров находятся в диапазоне достаточно узких размеров, а само оптимальное решение, в силу особенности пространства поиска, находится в некотором подпространстве малой мощности.

Действительно, при функционировании сети входные значения нейронов слоя определяются в виде суммы произведений его весов и выходных значений предыдущего слоя. Веса, как известно, фиксированы, а входные данные имеют, если задачей не оговорено, многомерное равномерное распределение. Следовательно, каждое из получаемых в результате слагаемых является равномерно распределенной на некотором отрезке случайной величиной. Из закона больших чисел известно, что по мере роста числа слагаемых их сумма сходится к нормальному распределению, которое характеризуется малой дисперсией, поэтому изначально различные значения входных данных нейронные сети преобразуют в близкие по значению взвешенные суммы. Последние используются функцией активации для построения в пространстве выходных данных разделяющей поверхности. Очевидно, что чем меньше расстояние между классами, тем точнее должна быть построена разделяющая поверхность, то есть небольшое по размеру межклассовое расстояние требует точной настройки параметров разделяющей поверхности. Это, в свою очередь, порождает неустойчивость оптимального решения. Иными словами, в окрестности оптимального решения содержатся множества точек с различными значениями целевой функции.

Примечание. На практике для повышения разделительной способности сети используют, как правило, веса с большим соотношением либо функции активации с большими по модулю значениями производной.

Из проведенных выше рассуждений следует вполне очевидное утверждение: *для параметров нейронной сети существует относительно небольшие отрезки, вероятность нахождения оптимальных значений в которых существенно выше, чем на оставшемся диапазоне их изменений.*

Для формализации данного факта введем следующее определение.

Определение. Пространство решений Ω оптимизационной задачи обучения назовем неоднородным, если существует его разбиение на подпространства Ω_1 и Ω_2 такие, что

$$\begin{cases} \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset; \\ \forall \Omega_3, \Omega_4 : |\Omega_3| = |\Omega_4|, \Omega_3 \subseteq \Omega_1, \Omega_4 \subseteq \Omega_2; \\ P(x^* \in \Omega_3) \gg P(x^* \in \Omega_4), \end{cases} \quad (1)$$

где x^* – оптимальное решение.

Отношение вероятности нахождения оптимального решения в некотором подмножестве решений пространства Ω к его мощности назовем плотностью этого подмножества.

Из введенных определений следует вполне очевидное утверждение, что если пространство Ω обладает свойством неоднородности, то в нем существуют подмножества решений с заметно различающимися плотностями.

Коэффициент перекоса. Изучение свойства пространства оптимизации рассмотрим на примере решения задачи классификации. Предположим, что в качестве классификатора используется многослойный перцептрон, а входные данные разбиты на n классов. Классификацию будем производить стандартным образом: объект заносится в класс, нейрон выходного слоя которого обладает наибольшим значением.

Пусть в результате обучения построен некоторый классификатор N с набором параметров $t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$, а по результатам классификации обучающей выборки получена квадратная матрица $A(t)$ размером $n \times n$. Элементы матрицы $a_{ij}(t)$ определяют количество объектов i -го класса выбранных j -м нейроном выходного слоя. Эта матрица, известная в литературе как многомерная матрица несоответствий, применяется для оценки качества обучения [10]. Сумма элементов ее главной диагонали определяют количество правильных ответов, а сумма остальных – количество неверных классификаций. Воспользуемся данными фактами и введем следующее определение.

Определение. Коэффициентом перекоса $q(t)$ матрицы несоответствий $A(t)$ назовем величину, равную отношению суммы элементов столбца матрицы с наибольшим значением к сумме всех ее элементов:

$$q(t) = \frac{\max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n a_{ij}(t)}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)}. \quad (2)$$

Для задачи из n классов значение коэффициента варьируется в интервале от $1/n$ до 1. При этом значение $q(t) = 1$ указывает на полную «невосприимчивость» сети к данным из различных классов, а – равномерное «распределение» классов по нейронам выходного слоя, близкое к $1/n$.

Продemonстрируем, что с помощью данного коэффициента можно определить наличие неоднородности пространства решений. В [11] было показано, что если для некоторой сети N с набором параметров $t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ коэффициент перекоса $q(t) = 1$, то небольшие изменения данных параметров, как правило, не изменяют значение коэффициента и, следовательно, обобщающую способность сети в рамках рассматриваемой выборки. Очевидно, это указывает на однородность пространства в окрестности рассматриваемого решения t . Неоднородность же, напротив, предполагает наличие в малой окрестности большого количества решений с различным значением обобщающей способности. С учетом указанных фактов можно сформулировать критерий неоднородности пространства решений оптимизационной задачи.

Пусть $t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ значения параметров сети, полученных в результате обучения, а $q(t)$ – соответствующее значение коэффициента перекоса. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пространство решений Ω неоднородно тогда и только тогда, когда в нем существует пара решений x и y , таких что

$$\max_{t \in N(x)} q(t) - \min_{t \in N(x)} q(t) \gg \max_{t \in N(y)} q(t) - \min_{t \in N(y)} q(t), |N(x)| = |N(y)| \ll |\Omega|, \quad (3)$$

где $N(x)$ и $N(y)$ – окрестности x и y соответственно.

Доказательство.

Достаточность. Предположим, что верно неравенство (3). Тогда существуют малые окрестности пространства решений $N(x)$ и $N(y)$, в одной из которых для решения x содержится большое количество различных значений целевой функции, а в другой для решения y – малое. Это означает что вероятность нахождения оптимального решения в окрестности x значительно выше, чем в окрестности y , что и является неоднородностью пространства по определению.

Необходимость. Предположим, что пространство решений является неоднородным, при этом неравенство (3) не выполняется. Тогда в окрестности любого решения фиксированного размера количество возможных значений целевой функции должно быть примерно равным. Это означает, что вероятность расположения оптимального решения в окрестности любого решения является примерно одинаковой, что противоречит предположению о неоднородности пространства решений. Таким образом, утверждение доказано.

Замечание 1. Разница величин в неравенстве (3) может снижаться по мере роста числа классов.

Замечание 2. В неравенстве (3) можно использовать дисперсии коэффициента перекоса.

Воспользуемся результатами данной теоремы для разработки процедуры генерации начального приближения.

Коэффициент перекоса и пространство решений. В соответствии с критерием (3) для определения неоднородности пространства решений необходимо знать максимальное и минимальное значения коэффициента перекоса в малых ее областях. Аналитически определить это невозможно, так как значения коэффициента перекоса зависят не только от архитектуры нейронной сети, но и от входных данных задачи (которые нельзя задать аналитически). Количество решений в каждой малой области является несчетным. Их перебор и, следовательно, вычисление максимального и минимального значения также невозможны.

Формула (3) задана в виде строгого неравенства, причем левая его часть должна быть существенно больше правой. Для проверки соотношения таких величин, очевидно, можно использовать их грубые оценки. Действительно, погрешность оценок в таком случае существенно меньше модуля разности сравниваемых значений и, следовательно, не влияет на выполнение неравенства.

Предлагается один из возможных способов построения приближенных оценок максимального и минимального значений коэффициента перекоса.

Пусть задана нейронная сеть N , содержащая m настраиваемых параметров $t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$, которыми являются веса сети. Очевидно, что в этом случае размерность пространства поиска Ω равна m . Предположим, что в данном пространстве необходимо найти область повышенной плотности, обозначим ее через $N(x)$. Для нахождения такой области необходимо, очевидно, определить множество решений, которые ее образуют.

Отметим, что в критерии неоднородности (3) заданы лишь значения коэффициента перекоса и мощности окрестностей, но при этом отсутствуют какие-либо ограничения на используемую в пространстве решений метрику. Поэтому для простоты способа проверки критерия, будем полагать, что любое решение u принадлежит области $N(x)$, если Манхэттенское расстояние между векторами x и u не превосходит некоторого порогового значения ε .

Для построения приближенных оценок предлагается итерационная процедура, состоящая из двух этапов.

На предварительном этапе задают некоторое решение $x = (x_1, \dots, x_m)$, количество итераций $k = 0, 1, \dots, h$ и полагают $x_0 = x$.

Затем выполняется k -я общая итерация:

- генерируют случайный вектор $c = (c_1, \dots, c_m)$, координатами которого являются равномерно распределенные на отрезке $[-\varepsilon/m, +\varepsilon/m]$ случайные величины;

- формируют новое решение $x_k = x + c$ и строят его оценки по формулам

$$\begin{cases} q_{x \min} = \min\{q_{x \min}, q(x_k)\}; \\ q_{x \max} = \max\{q_{x \max}, q(x_k)\}; \end{cases}$$

- если $k = h$, то останов и $\Delta q(x) = q_{x \max} - q_{x \min}$, в противном случае – $k = k + 1$.

Нетрудно заметить, что при бесконечном количестве итераций в окрестности $N(x)$ произойдет «перебор» всех решений. Следовательно, построенная в результате приближенная оценка $\Delta q(x)$ является состоятельной. Благодаря выбору размера отрезков, гарантируется, что $x_k \in N(x)$, $k = \overline{0, h}$.

Замечание. На практике установлено, что для получения относительно точной оценки достаточно выполнить не более 10 итераций.

В результате для изучения пространства решений можно обойтись без обучения нейронных сетей: достаточно в определенной области сгенерировать несколько необученных сетей и вычислить для них на объемах обучающей выборки коэффициент перекоса.

Генерация начального приближения. В [11] было показано, как выбор начального решения влияет на качество конечного решения. При выборе такого приближения выдвигается дополнительное требование – его устойчивость. Иными словами, дисперсия оценки значения целевой функции должна быть наименьшей при наибольшей величине математического ожидания.

Начальное решение, очевидно, будет устойчивым, если оно расположено достаточно близко к подпространству повышенной плотности, с малым смещением за его пределы.

Начальное приближение предлагается строить с помощью алгоритма, основанного на итерационной процедуре случайного поиска оптимальной инициализации.

Для простоты изложения будем полагать, что решения x и y из неравенства (3) являются многомерными скалярами с одним значением по всем координатам ($x = (a, a, a, \dots, a)$, $y = (b, b, b, \dots, b)$). Такое предположение вполне допустимо, так как все рассматриваемые параметры однотипны. Предлагаемый алгоритм также состоит из двух этапов.

На предварительном этапе инициализации фиксируется архитектура обучаемой нейронной сети и производится генерация значений ее параметров. Значения всех параметров сети, кроме весов, полагают

«нейтральными», то есть не влияющими на работу сети (для смещений персептрона такими значениями, например, являются нули).

На втором (основном) этапе запускается итерационный процесс, состоящий из последовательности следующих шагов.

Шаг 1. *Выбор окрестности решения.* На первой итерации значение скаляра устанавливается равным нулю, а на всех последующих выбирается случайным образом на отрезке $[-1, 1]$ (большие значения по модулю не имеют смысла из-за особенностей функций активации нейронов).

Шаг 2. *Оценка значения.* Для оценки выбранного решения применяется описанный выше способ. Длина отрезка для генерации определяется равной 10^{-4} .

Шаг 3. *Обновление области.* При выполнении первой итерации полагают $\Delta q_{x_{\max}} = \Delta q(x)$ и окрестность $N(x)$ запоминается как лучшая. Окрестность $N(x)$ обновляется тогда и только тогда, когда $\Delta q_{x_{\max}} < \Delta q(x)$. Новое значение $\Delta q_{x_{\max}}$ запоминается.

Шаг 4. *Критерий останова.* Если $\Delta q_{x_{\max}}$ за некоторое число итераций не увеличилось или оказалось наибольшим для $x = 0$ после второй итерации, то переходим к шагу 5, в противном случае – к шагу 1.

Шаг 5. *Генерация начального решения.* Для генерации весов лучшее на текущий момент решение x смещается на небольшую величину (например, на 10^{-4} в большую сторону по всем координатам) и получается решение x' . Далее генерируется одно решение из окрестности $N(x')$.

Шаг 6. *Улучшение начального решения.* Для решения, полученного на шаге 5, вычисляется многомерная матрица несоответствий. Затем с помощью специального алгоритма на основе динамического программирования полученное на шаге 5 решение оптимизируется [12].

Идея алгоритма основана на решении оптимизационной задачи. Целевой функцией являлось количество верных классификаций для начального решения, а параметрами оптимизации – соответствие между нейронами выходного слоя сети и классами данных. Данный алгоритм заменяет полный перебор динамическим программированием.

Замечание 1. Для оценки неоднородности пространства рекомендуется выполнить 5 итераций, а значение скалярных величин (для решения x) выбирать из последовательности чисел $0; -0,5; -0,25; 0,25; 0,5$.

Замечание 2. Результаты выполнения шага 5 не изменяют свойства пространства решений, количество настраиваемых параметров (размерность пространства решений), архитектуру нейронной сети (ограничения на значения параметров и их типы).

Замечание 3. Вместо разности максимального и минимального значений коэффициента перекоса можно вычислять его дисперсию.

Замечание 4. Если значение функции активации при нулевом значении аргумента равно 0, то область неоднородности, как правило, расположена в окрестности этого значения. Однако для нулевого значения аргумента сигмоидной функции ее значение равно 0,5. Поэтому для нее область неоднородности указанным алгоритмом может быть найдена для другого, отличного от нуля, значения скаляра.

Оценка эффективности. Общеизвестно, что качество получаемого при обучении решения коррелирует со значением целевой функции. Если, например, в качестве такой функции используется среднеквадратическая ошибка, то с повышением качества обучения значение ошибки, как правило, уменьшается. Поэтому очевидно, что существенное повышение обобщающей способности сети в рамках заданной обучающей выборки с большой долей вероятности приводит к значительному снижению значения целевой функции еще до момента ее обучения. Попробуем оценить, как (или на сколько) построенное алгоритмом приближенное решение может повысить обобщающую способность сети до начала ее обучения.

Рассмотрим многомерную матрицу несоответствий. При решении задачи с n классами, как правило, применяется классификатор с n нейронами в выходном слое. Таким образом, получаем матрицу $n \times n$, причем сумма элементов каждой строки по условию задачи равна c . Количество данных не может быть отрицательным, следовательно, элементы матрицы – целые неотрицательные числа.

В случае классификации случайным образом получим в среднем ровно c правильных ответов, то есть $1/n$ верных классификаций от общего количества данных.

Покажем, что сгенерированное решение гарантирует качество начального решения не хуже случайного выбора класса, то есть не менее $1/n$.

В соответствии с алгоритмом в каждой строке и каждом столбце матрицы выбирается ровно один элемент, поэтому всего выбирается ровно n элементов. Как было показано ранее, выбор осуществляется оптимальным образом, то есть так, чтобы максимизировать сумму выбранных элементов. Оценим теперь сумму выбранных элементов и покажем, что она всегда не меньше, чем величина c , соответствующая случайному выбору.

Доказательство проведем с использованием метода математической индукции. Вначале проверим базу индукции (для одного и двух классов).

Для одного класса это очевидно. Более того, так как все данные принадлежат одному классу и одному нейрону, получаем 100 % точность классификации.

Для двух классов имеем квадратную матрицу, состоящую из четырех элементов a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} . По условию задачи сумма элементов равна $2c$. Стандартный выбор дает сумму $a_{11} + a_{22}$, то есть элементов главной диагонали. Если $a_{11} + a_{22} \geq c$, то факт для двух классов доказан, если же нет, то для матрицы 2×2 возможны всего две конфигурации. Вторая оставшаяся конфигурация будет $a_{12} + a_{21}$. Очевидно, что

$$a_{12} + a_{21} = 2c - a_{11} - a_{22}.$$

Таким образом, получаем, что $a_{12} + a_{21} \geq c$, а так как в соответствии с алгоритмом выбирается максимум, то для двух классов данный факт доказан.

Теперь предположим, что данный факт верен для i классов и матрицы $i \times i$. Покажем, что это справедливо и для $i + 1$ классов.

Рассмотрим матрицу размером $(i + 1) \times (i + 1)$ и отбросим последнюю ее строку. Сумма элементов каждой строки матрицы по условию задачи равна c . По предположению, для матрицы размера $i \times i$ существует оптимальная конфигурация, в которой сумма строк равна c , а сумма элементов больше либо равна c . Так как расширение матрицы было проведено путем добавления $i + 1$ столбца с сохранением суммы элементов, то задача упростилась, и, следовательно, для нее существует конфигурация из i элементов суммой не меньше c . Поскольку элементы матрицы неотрицательные, то последний $i + 1$ элемент конфигурации, выбранный из оставшегося столбца матрицы, не уменьшит общую сумму. Таким образом, было показано, что алгоритм строит решение не хуже случайного выбора, что, очевидно, является нижней для него теоретической оценкой.

Замечание 1. К сожалению, полученная оценка по сути является неуплучшаемой. Действительно, если нейронная сеть изначально всегда дает одинаковый ответ, то оптимальная конфигурация даст ровно c правильных ответов, что и является наихудшим случаем.

Замечание 2. Даже если исходное начальное приближение дает более чем c правильных ответов (т. е. лучше случайного выбора), представленный алгоритм может улучшить и это начальное приближение.

Стоит отметить, что начальное приближение, сгенерированное алгоритмом, несмотря на его близость в пространстве поиска к оптимальному решению, по-прежнему является случайным и может иметь низкую обобщающую способность (гораздо хуже случайного выбора). Однако повышение качества даже до уровня случайного выбора может существенно ускорить процесс сходимости при обучении сети.

Эксперименты. В рамках экспериментов производилось сравнение различных способов генерации начального приближения. При этом оценивалось не только качество решения, но и среднее значение коэффициента перекоса.

Для обеспечения устойчивости и сокращения расстояния до оптимального решения начальное приближение строилось в пространстве, максимально близком к области неоднородности. В силу этого одна из целей проводимых экспериментов заключалась в исследовании зависимости качества конечного решения от близости начального решения к области неоднородности, для чего при генерации начальных значений весов рассматривались различные варианты размещения центра отрезка. Оценка близости к области неоднородности (согласно критерию неоднородности) производилась на основе вычисления для данной области разницы максимальных и минимальных значений коэффициента перекоса, а для оценки устойчивости решения вычислялось среднее значение коэффициента перекоса. В заключение исследований проводился эксперимент генерации начального решения традиционным способом. Полученные при его выполнении результаты использовались для подтверждения эффективности предложенного подхода.

Эксперименты производилось на примере ранее решенной задачи детектирования непогодных изменений поверхности Земли [13]. В качестве исходных данных использовались пары спутниковых снимков одной и той же местности, полученные в разные моменты времени. Спутниковые снимки разбивались на блоки 20×20 пикселей, и задача решалась независимо для каждого блока. С учетом масштаба снимков блоки указанного размера вмещают наименьший возможный объект исследования.

Для упрощения условий эксперимента прикладная задача решалась с использованием простого многослойного персептрона. На вход нейронной сети в соответствии с условием задачи подавались два цветных изображения разрешением 20×20 пикселей. Архитектура персептрона в экспериментах была фиксированной. Входной слой содержал 2400 нейронов, скрытый слой – 64 нейрона с биполярно-сигмоидной функцией активации, скрытый слой – 10 нейронов с функцией активации softmax.

Для обеспечения точности сравнения качества конечных решений время обучения было зафиксировано. Для всех испытуемых алгоритмов инициализации оно составило 4 часа. Для обучения, как и в [13], применялся тот же алгоритм на основе метода отжига [14]. Эксперименты проводились на ПК следующей конфигурации: NVIDIA RTX 3070, AMD Ryzen 7 7700, 32 GB DDR5 RAM на ОС Arch Linux.

Результаты экспериментов приведены в таблице. В первом ее столбце заданы параметры области: ее центр и размеры отрезка. В последнем указано качество конечного решения, под которым подразумевалось

относительное количество неверных классификаций. Чем меньше ошибок – тем выше качество. При этом использовалась относительная шкала. За единицу было выбрано наилучшее решение. Например, если за единицу взято наилучшее решение, которое обеспечивает точность 96 % (т. е. 4 % ошибки), то решение с точностью 92 % имеет качество, равное 0,5. В последней строке таблицы приведены результаты, полученные традиционным способом генерации начального решения.

Таблица. – Сравнение эффективности алгоритмов генерации начального приближения

Центр отрезка, длина	Среднее значение коэффициента перекося	Разница значений коэффициента перекося	Качество решения
0,0002; 0,0001	0,527	0,092	1
0,001; 0,0002	0,527	0,020	0,781
0,002; 0,001	0,527	0,035	0,658
0; 0,05	0,56	0,205	0,417

Результаты экспериментов показали, что при генерации значений параметров на отрезке с центром, отличным от нуля, начальное решение находилось за пределами области повышенной плотности. Это подтверждается неизменным средним значением коэффициента перекося. Однако по мере приближения центра к нулю разница между максимальным и минимальным значениями коэффициента возрастает. Это подтверждает факт наличия области неоднородности в оптимизационном пространстве решений в окрестности нулевых значений параметров.

Дополнительно был проведен замер разницы коэффициентов перекося для центра в нуле с длиной отрезка 10^{-4} . Разница значений составила 0,200, что гораздо больше, чем для центра в точке $2 \cdot 10^{-4}$. Это подтверждает наличие неоднородности пространства решений. Однако генерация параметров в окрестности нуля привела к гораздо более низкому среднему качеству решения. Данный факт объясняется тем, что в области повышенной плотности решения крайне неустойчивы. Поэтому вероятность того, что начальное решение значительно хуже оптимального, очень высокая. В то же время сгенерированные за пределами данной области решения обладают устойчивостью, что обеспечивает их стабильное качество от запуска к запуску. По мере сокращения расстояния между начальным решением и областью повышенной плотности сокращается расстояние и до оптимального решения. Этим обусловлена более чем двукратная разница в качестве между первым и последним результатами в таблице при равном времени обучения. То есть начальное решение, построенное традиционным способом, обладает вдвое худшим качеством конечного решения относительно результатов, полученных с использованием предложенного алгоритма.

Отдельно стоит отметить, что последнее тестируемое решение (построенное традиционным способом) достигает качества наилучшего решения только спустя 12 часов обучения. Данный факт, очевидно, свидетельствует о том, что при равном качестве конечного решения использование предложенного алгоритма инициализации повышает также скорость обучения в целом.

Таким образом, эксперименты показали, что начальное решение, построенное предложенным алгоритмом, позволяет либо более чем вдвое повысить качество конечного результата без увеличения времени обучения, либо сократить время обучения втрое, сохранив качество решения на прежнем уровне.

Заключение. В работе рассмотрена проблема построения начального решения для обучения нейронных сетей. Проведено теоретическое исследование свойства пространства решений. Было введено понятие неоднородности пространства решений для задачи нейросетевой классификации и сформулирован критерий его существования. С использованием критерия был разработан алгоритм построения начального решения для обучения нейронных сетей любой архитектуры. Экспериментально на примере сравнения с традиционными алгоритмами показано, что предложенный подход позволяет повысить качество начального решения на тестируемой задаче более чем в два раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Narkhede M. V., Bartakke P. P., Sutaone M. S. A review on weight initialization strategies for neural networks // *Artificial Intelligence Review* Springer. – 2022. – Vol. 55. – P. 291–322. – DOI: [10.1007/s10462-021-10033-z](https://doi.org/10.1007/s10462-021-10033-z).
2. Gradinit: Learning to initialize neural networks for stable and efficient training / C. Zhu, R. Ni, Z. Xu et al. // *Advances in Neural Information Processing Systems*. – 2021. – Vol. 34. – P. 16410–16422. – DOI: [10.48550/arXiv.2102.08098](https://doi.org/10.48550/arXiv.2102.08098).
3. de Sá G.A.G., Fontes C. H., Embiruçu M. A new method for building single feedforward neural network models for multivariate static regression problems: a combined weight initialization and constructive algorithm // *Evolutionary Intelligence*. Springer. – 2024. – Vol. 17, iss. 2. – P. 1221–1233. – DOI: [10.1007/s12065-022-00813-z](https://doi.org/10.1007/s12065-022-00813-z).
4. Ejaz S., Khurshid K. Power Spectral Density Based Weight Initialization Technique for Feed-Forward Neural Network // *2025 International Conference on Emerging Technologies in Electronics, Computing, and Communication (ICETECC)* IEEE. – 2025. – P. 1–6. – DOI: [10.1109/ICETECC65365.2025.11070241](https://doi.org/10.1109/ICETECC65365.2025.11070241).
5. Artificial neural networks training algorithm integrating invasive weed optimization with differential evolutionary model. / A. A. Movassagh, J. A. Alzubi, M. Gheisari et al. // *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*. Springer. – 2023. – Vol. 14. – P. 6017–6025. – DOI: [10.1007/s12652-020-02623-6](https://doi.org/10.1007/s12652-020-02623-6).

6. Kaveh M., Mesgari M. S. Application of Meta-Heuristic Algorithms for Training Neural Networks and Deep Learning Architectures: A Comprehensive Review // *Neural Processing Letters*. Springer. – 2023. – Vol. 55. – P. 4519–4622. – DOI: [10.1007/s11063-022-11055-6](https://doi.org/10.1007/s11063-022-11055-6).
7. Abdulkadirov R., Lyakhov P., Nagornov N. Survey of optimization algorithms in modern neural networks // *Mathematics*. MDPI. – 2023. – Vol. 11, iss. 11. – DOI: [10.3390/math11112466](https://doi.org/10.3390/math11112466).
8. Reyad M., Sarhan A. M., Arafa M. A modified Adam algorithm for deep neural network optimization // *Neural Computing and Applications*, Springer. – 2023. – Vol. 35, iss. 23. – P. 17095–17112. – DOI: [10.1007/s00521-023-08568-z](https://doi.org/10.1007/s00521-023-08568-z).
9. Naidu G., Zuva T., Sibanda E. M. A Review of Evaluation Metrics in Machine Learning Algorithms // *Artificial Intelligence Application in Networks and Systems*. CSOC 2023. Lecture Notes in Networks and Systems. Springer, Cham. – 2023. – Vol 724. – P. 15–25. – DOI: [10.1007/978-3-031-35314-7_2](https://doi.org/10.1007/978-3-031-35314-7_2).
10. Heydarian M., Doyle T. E., Samavi R. MLCM: Multi-Label Confusion Matrix // *IEEE Access*. – 2022. – Vol. 10. – P. 19083–19095. – DOI: [10.1109/ACCESS.2022.3151048](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3151048).
11. Мацкевич В. В. Выбор начального приближения в задачах обучения нейронных сетей // Информационные системы и технологии : материалы XI Междунар. науч. конгр. по информатике (CSIST-2025), г. Минск, 29–31 окт. 2025 г.: в 2 ч. / Бел. гос. ун-т; редкол.: С. В. Абламейко (гл. ред.) [и др.]. – Мн., 2025. – Ч. 2. – С. 196–203.
12. Мацкевич В. В. Об эффективности обучения нейронных сетей // XXV Междунар. науч.-техн. конф., посвященная 100-летию ректора ППИ Николая Петровича Сергеева и 80-летию Победы в Великой отечественной войне «Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике», г. Пенза, РФ, 31 окт. – 1 нояб. 2025 / Пензенский гос. ун-т. – Пенза, 2025 – С. 47–55.
13. Landscape's non-natural changes detection system by satellites images based on local areas / X. Zhou, Q. Bu, V. Matskevich, A. Nedzved // *Pattern Recognition and Image Analysis*. Advances in Mathematical Theory and Applications. – Vol. 34, iss. 2. – Pleidas Publishing, 2024. – P. 365–378. – DOI: [10.1134/S1054661824700159](https://doi.org/10.1134/S1054661824700159).
14. Krasnoproshin V.V., Matskevich V. V. Random search in neural networks training // *Pattern Recognition and Image Analysis*. Advances in Mathematical Theory and Applications. – Vol. 34, iss. 2. – Pleidas Publishing, 2024. – P. 309–316. – DOI: [10.1134/S105466182470010X](https://doi.org/10.1134/S105466182470010X).

Поступила 16.02.2026

EFFECTIVE NEURAL NETWORKS TRAINING BASED ON INITIAL SOLUTION SELECTION

V. KRASNOPROSHIN, V. MATSKEVICH
(Belarusian State University, Minsk)

The paper deals with a problem related to neural network training. Optimization space inhomogeneity definition was introduced and its existence criteria was proven. It was shown that training algorithm speed and quality depends on, in particular, from initial solution selection. Initial solution generation procedure was proposed, which takes into account space inhomogeneity property, specifics of problem being solved and another factors, which made possible to increase training quality. It was shown that this procedure can be applied to any neural network architecture and input data. Soling applied problem experiments results are given, which approves approach efficiency to training.

Keywords: neural networks, training, solution space, inhomogeneity, confusion matrix.

УДК 004.4:681.51

DOI 10.52928/2070-1624-2026-46-1-10-20

**ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА
ОРГАНИЗАЦИИ ПЕРЕВОЗОК**

Е. В. ШВЕЦОВА, канд. техн. наук, доц. **В. Н. ШУТЬ**
(Брестский государственный технический университет)

A. Shviatsova ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1613-6645>

V. Shuts ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4310-8284>

Рассматривается интеллектуальная информационная система организации перевозок (ИИСОП), реализующая новый подход в организации транспортного процесса, заключающийся в непрерывном автоматическом воспроизведении цикла «мониторинг спроса на перевозку – анализ данных – адаптивная реакция транспортной системы». Предложена концепция интеллектуальной системы перевозок (ИСП) как объекта управления ИИСОП. Проанализированы основные принципы работы ИСП, математическое обеспечение ИИСОП, включающее математические модели интеллектуальных алгоритмов организации перевозок, триггерные условия их запуска и систему оценки эффективности, позволяющую в реальном времени находить оптимальный план перевозки на основе конкурентного выбора среди предложенных вариантов. Описано программное обеспечение ИИСОП, функциональность которого базируется на математическом обеспечении. Представлены экспериментальные результаты испытаний, свидетельствующие о преимуществах организации перевозок посредством ИИСОП.

Ключевые слова: интеллектуальная информационная система организации перевозок, интеллектуальные алгоритмы организации перевозок, интеллектуальные транспортные системы, матрица корреспонденций, комбинированная перевозка, интеллектуальное управление перевозками, инфобус.

Введение. Современное управление транспортным процессом строится на ретроспективных данных о спросе на перевозку, от актуальности которых зависит эффективность работы транспортной системы [1, с. 27–57]. Так, в пассажирских перевозках ключевые параметры (пассажировместимость транспортных средств, интервалы движения) пересчитываются с периодичностью от полугода до нескольких лет. Полученные параметры используются на протяжении всего периода до появления новых данных. Подобная модель управления приводит к слабой адаптивности транспортной системы (система перестраивает свою модель работы лишь в ответ на триггерные события). Таким образом, ключевой проблемой транспортной сферы является недостаточная адаптивность, обусловленная слабой автоматизацией и ограниченными возможностями человеческого фактора, что в совокупности приводит к реактивному поведению и сниженной эффективности работы.

Сегодня наблюдается значительный разброс в уровнях организации транспортного процесса: с одной стороны – детерминированная модель, обусловленная низким уровнем автоматизации сбора и обработки данных [1, с. 58–62], а с другой стороны – транспортные системы, использующие цифровые интеллектуальные системы обработки и анализа данных (компьютерное зрение, системы поддержки и принятия решений) [2]. Всем этим системам присуща устаревшая модель организации транспортного планирования, основанная на использовании долгосрочных параметров, что приводит к разрыву между расчетными моделями и реальностью. Сегодня же нужны новые подходы в организации перевозок, обеспечивающие адаптивную реакцию транспортной системы в условиях стохастического транспортного процесса. В работе предложены:

- архитектура ИИСОП, отличающаяся от известных систем тем, что реализует полностью автоматическую функцию организации адаптивного транспортного процесса в реальном времени;
- математическое обеспечение ИИСОП, включающее критерии начала перевозочного процесса и комплекс интеллектуальных алгоритмов организации перевозки, формирующих в реальном времени варианты планов перевозки с учетом оптимизации ее ключевых параметров (при комбинированном использовании алгоритмы действуют синергетически, значительно повышая общую эффективность перевозок);
- система оценки эффективности перевозок как механизм отбора наилучшего плана на основе конкурентного выбора;
- программное обеспечение ИИСОП, принципиальное отличие которого от известных систем заключается в переходе от пассивного накопления исторических данных к автоматической организации перевозок в режиме реального времени путем оптимизации ключевых параметров транспортного процесса.

В работе представлены результаты экспериментальных исследований, свидетельствующие об преимуществах организации перевозок посредством ИИСОП.

Анализ существующих решений. Для абсолютного большинства транспортных систем характерна устаревающая детерминированная организация транспортного процесса: управление осуществляется в рамках заданной структуры со слабой реакцией на стохастичность спроса на перевозку: маршрутная сеть, расписания, объем транспортного средства (ТС) определяется заранее на основе усредненных данных о транспортной потребности [3, с. 9]; планирование перевозок с помощью единого алгоритма (без сравнения сценариев и выбора лучшего из них); скоростные и экспрессные перевозки выполняются эпизодически (сезонно, праздники); учет проезда пассажиров без точного определения пункта назначения, что снижает возможность адекватного анализа перевозочного процесса.

ИИСОП как интеллектуальный уровень организации перевозок. Интеллектуальная система перевозок – транспортная система нового типа, поведение которой регулируется информационным процессом в реальном времени за счет циклического воспроизведения контура «сбор данных – их анализ – адаптивная реакция» [4, с. 46; 5]. Включает в себя:

- парк беспилотных транспортных средств малой вместимости (*инфобусов*). Инфобусы движутся по выделенной линии с максимальным приоритетом движения, развивая конструктивную скорость. Автоматическая система круиз-контроля инфобусов обеспечивает синхронное движение ТС по принципу автокаравана, образуя транспортное средство новой вместимости (называемое *кассетой*);
- фиксированный маршрут из k остановок в двух направлениях, на концах которого находятся накопители, где ТС осуществляют подзарядку и получают планы перевозки;
- единый центр организационно-управляющего воздействия – ИИСОП. При организации перевозок используются интеллектуальные алгоритмы (ИА), позволяющие адаптивно подбирать ключевые параметры перевозки (интервалы движения, объем ТС, посещаемые остановки).

ИСП реализует *комбинированный режим перевозки*, включающий выполнение перевозок в одном из режимов: *экспрессном* (посещаются только начальная и конечная остановки маршрута), *скоростном* (посещаются некоторые остановки маршрута), *обычном* (посещаются все остановки маршрута). *Комбинирование режимов перевозки позволяет сочетать преимущества скоростных перевозок (время поездки, экономия топлива) и обычной перевозки (гарантированное обслуживание всех остановок).*

Информационный контур транспортной системы представлен на рисунке 1. Его построение основано на следующих принципах. Информация о заявках на перевозку с остановочных терминалов постоянно поступает в систему сбора и хранения данных (ССХД, подсистема ИИСОП). Система организации перевозок (СОП, подсистема ИИСОП) каждые 5–10 с сканирует массив накопленных необслуженных заявок. При обнаружении достаточного их накопления запускается процесс определения плана перевозки: формируется матрица корреспонденций (МК), служащая информационной основой для всех используемых ИА. Используя МК, каждый ИА формирует план перевозки (ПП). Полученные ПП оцениваются целевой функцией (ЦФ), которая определяет оптимальный план перевозки (ОПП). ОПП рассылается в накопители инфобусам для реализации. После выполнения ОПП инфобусы отправляют отчеты в ИИСОП.

Таким образом, ИИСОП, в отличие от существующих решений, непрерывно реализует функцию полной автоматической адаптивной организации перевозок в условиях стохастического транспортного процесса через интеллектуальное планирование, конкурентный выбор оптимального плана перевозки и организацию в автоматическом режиме комбинированных перевозок.

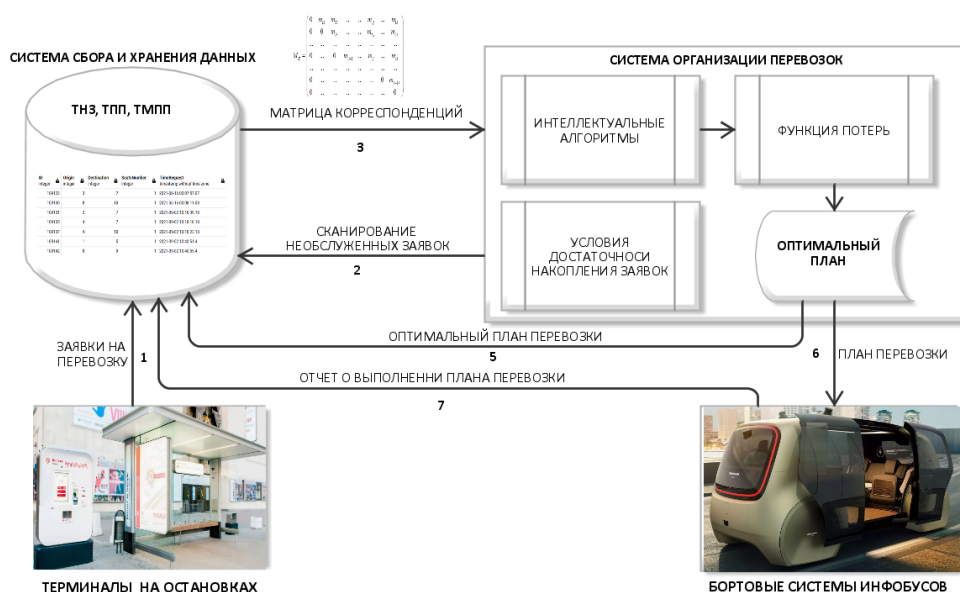


Рисунок 1. – Организация перевозок в ИСП: информационный контур ИСП

Математическое обеспечение ИИСОП (МО ИИСОП). МО ИИСОП представляет собой комплекс математических моделей, обеспечивающий теоретический базис для реализации автоматической функции адаптивной организации перевозки в условиях стохастического транспортного процесса. Включает в себя: матрицу корреспонденций [4, с. 45], критерии начала организации перевозок [4, с. 49], комплекс алгоритмов организации перевозок [4, с. 48], систему оценки эффективности перевозок [4, с. 74–79].

Матрица корреспонденций. Имеет размерность $k \times k$ (по числу остановок маршрута). В МК записывается информация о запрашиваемых пассажирами корреспонденциях. Каждый элемент МК $m_{ij}, i = \overline{1, k-1}, j = \overline{2, k}$ есть число необслуженных зафиксированных в ИСП на конкретный момент времени запросов от пассажиров на перевозку с остановки i на остановку j . На основе МК происходит построение планов перевозки.

Критерии начала перевозок. В отличие от существующих моделей организации перевозок, в которых перевозка начинается либо через определенный интервал времени, либо после накопления достаточного объема пассажиров/грузов для рентабельности рейса, критерии начала перевозок в ИИСОП используются для обеспечения проактивного поведения системы, подразамерающего начало организации перевозки до возникновения непосредственной необходимости в ней. Критерии начала перевозок представляют собой условия, накладываемые на элементы матрицы корреспонденций. Например:

$$m_{ij} \geq a \cdot V, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad j = \overline{2, k}, \quad a \in [0, 5; 1), \quad (1)$$

где a – коэффициент эластичности (величина, используемая для обеспечения вывоза в том числе и пассажиров, пришедших на остановку i от момента начала перевозки инфобуса и до момента его прибытия на данную остановку, ее использование позволяет предусмотреть некоторый запас мест для таких пассажиров); V – объем инфобуса.

В соотношении (1) представлен критерий начала перевозки на основе критического элемента матрицы корреспонденций: перевозка начинается, как только некоторый элемент МК начинает удовлетворять условию (1). Наличие критического элемента указывает на накопившийся достаточный объем заявок по корреспонденции ij для скоростной перевозки. Если критических элементов несколько, то матрица обрабатывается для каждого из них в порядке убывания их значений.

Комплекс интеллектуальных алгоритмов организации перевозок. Обеспечивают формирование планов перевозки по матрице корреспонденций. При комбинированном использовании на основе конкурентного выбора алгоритмы действуют синергетически, повышая общую эффективность транспортного процесса.

Алгоритм организации перевозки на основе строки матрицы корреспонденций (ИА «По строке») [4, с. 53–60] представляет собой математическую модель нахождения ключевых параметров рейса для кассеты инфобусов, осуществляющей перевозку с некоторой остановки маршрута. Отличительными особенностями алгоритма являются динамическое определение числа инфобусов кассеты и формирование плана перевозки с конца маршрута к его началу (для того, чтобы инфобусы не задерживали друг друга). При разработке плана каждый инфобус получает собственный кластер соседних остановок, на которые будет осуществлять развозку. Для определения кластера остановок инфобуса n , входящего в осуществляющую развозку с остановки i кассету, находится упорядоченное (согласно следованию по маршруту) множество потенциальных остановок J_{i,n_p} (на которые он может перевезти пассажиров):

$$J_{i,n_p} = \{i+1, i+2, \dots, k\} \setminus J_{i,1} \setminus J_{i,2} \setminus \dots \setminus J_{i,n-1}, \quad (2)$$

где $J_{i,1}, \dots, J_{i,n-1}$ – реальные множества остановок инфобусов, уже определенных алгоритмом для кассеты.

Упорядоченное реальное множество остановок инфобуса $J_{i,n}$ определяется из соотношения (следование элементов в множестве согласно следованию остановок на маршруте)

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{i,n_p} = \{i+1, i+2, \dots, k\} \setminus J_{i,1} \setminus J_{i,2} \setminus \dots \setminus J_{i,n-1}; \\ \sum_{j=\sup J_{i,n_p}}^{\sup J_{i,n_p}} m_{ij} \leq V, \quad \sum_{j=\sup J_{i,n_p} - |J_{i,n}|}^{\sup J_{i,n_p}} m_{ij} > V; \\ J_{i,n} = \left\{ j \mid \sup J_{i,n_p} - |J_{i,n}| + 1 \leq j \leq \sup J_{i,n_p} \right\}. \end{array} \right. \quad (3)$$

Таким образом, кластер остановок инфобуса формируется из элементов, последовательно отобранных от конца к началу упорядоченного множества потенциальных остановок J_{i,n_p} , для которых суммарное число пассажиров, едущих с остановки i , не превосходит объем инфобуса. Между остановками своего кластера инфобус может производить дополнительный подвоз пассажиров. После обработки i -й строки

матрицы корреспонденций определяется совокупность кластеров остановок доставки для кассеты, осуществляющей вывоз пассажиров с остановки i :

$$J_i = \bigcup J_{i,n}, n \in N, i = \overline{1, k-1}. \tag{4}$$

Итерационно используя данный алгоритм, можно обойти все строки матрицы, составив план перевозки, обеспечивающий вывоз всех пассажиров со всех остановок маршрута, заявки которых зафиксированы в матрице корреспонденций. В результате обработки матрицы алгоритм «простраивает» граф корреспонденций (рисунок 2).

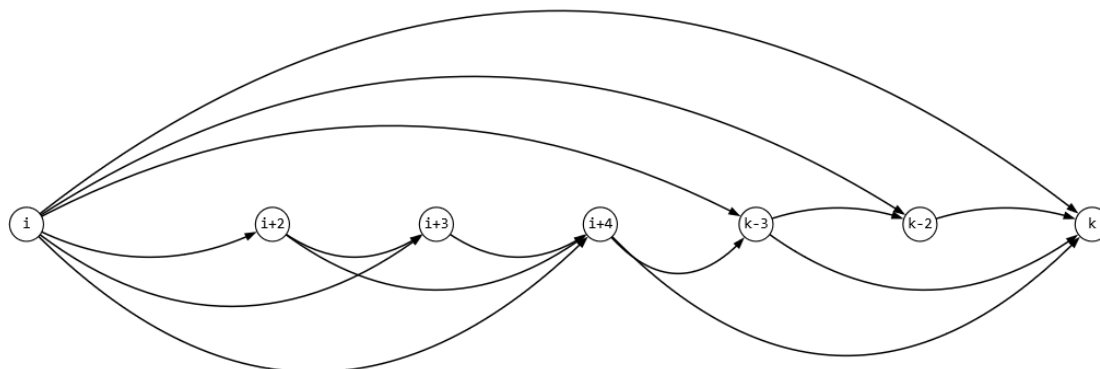


Рисунок 2. – Организация перевозок в ИСП: граф корреспонденций ИА «По строке»

Новизна организации перевозки по алгоритму «По строке»:

- ключевые параметры рейса определяются через серию итерационно-рекурсивных состояний (кластер остановок для текущего инфобуса зависит от сформированных кластеров остановок для предыдущих инфобусов на предыдущих итерациях);
- обработка маршрута (строка матрицы корреспонденций) от конца к началу для исключения задержек инфобусами друг друга;
- поиск реального множества остановок через максимальный элемент потенциального множества (определяется итерационно), а также через пассажироместимость транспортного средства;
- используется вычислительный метод с полиномиальной сложностью, позволяющий обрабатывать матрицы корреспонденций большого размера за миллисекунды.

Алгоритм организации перевозки на основе критического элемента матрицы корреспонденций (ИА «По критическому элементу») [4, с. 60–66; 6] представляет собой математическую модель нахождения ключевых параметров перевозки для обслуживания наиболее интенсивной корреспонденции МК. На данную корреспонденцию указывает элемент матрицы $m_{i^*j^*}$, удовлетворяющий условию

$$m_{i^*j^*} \geq a \times V, a \in [0,5; 1), \tag{5}$$

где V – объем транспортного средства;

a – коэффициент эластичности (величина, используемая для обеспечения вывоза в том числе и пассажиров, пришедших на остановку i^* от момента начала перевозки инфобуса и до момента его прибытия на данную остановку, ее использование позволяет предусмотреть некоторый запас мест для таких пассажиров).

В результате алгоритм формирует рейс, разделенный на три логические зоны (рисунок 3): подъезд к зоне основной перевозки (движение от начальной точки до остановки i^*), зона основной перевозки (экспрессное движение между остановками i^* и j^*), зона довоза до конечной точки маршрута (движение от j^* до конечной точки).

Первая и третья зоны организуются для исключения порожнего пробега ТС. Остановки подъезда к зоне основной перевозки определяются согласно системе требований

$$\begin{cases} \sum_{1 \leq i \leq i^* - 1, i \in N} m_{ii^*} \rightarrow \max; \\ \sum_{1 \leq i \leq i^* - 1, i \in N} m_{ii^*} \leq V. \end{cases} \tag{6}$$

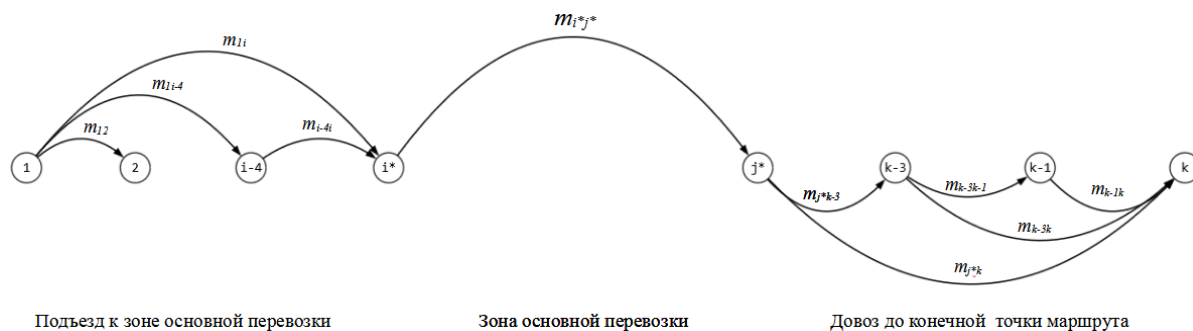


Рисунок 3. – Организация перевозок в ИСП: граф корреспонденций ИА «По критическому элементу»

Для оптимизации заполнения ТС между остановками этой зоны выполняется перевозка пассажиров. Выбор остановок осуществляется итерационно согласно системе требований (для текущей итерации)

$$\begin{cases} m_{ij} < V - \sum_{s \in S_{at}, s < j} m_{si}^* - \sum_{m_{sk} \in J_{pt}} m_{sk} + \sum_{\substack{m_{sk} \in J_{pt}, \\ s < i, k \leq i}} m_{sk}; \\ i, j \in S_{at}, i < j, \end{cases} \quad (7)$$

где V – объем инфобуса;

$\sum_{s \in S_{at}, s < j} m_{si}^*$ – пассажиры, следующие с предыдущих остановок на остановку i^* ;

$\sum_{m_{sk} \in J_{pt}} m_{sk}$ – пассажиры, которые перевозятся между посещаемыми остановками от первой до $(i^* - 1)$.

Рассчитывается на каждой итерации алгоритма отдельно;

$\sum_{m_{sk} \in J_{pt}, s < i, k \leq i} m_{sk}$ – объем освободившихся в салоне мест за счет вышедших пассажиров для данной

итерации.

Для составления плана перевозки для зоны довоза выбирается максимальный элемент m_{j^*j} , $j > j^*$ в строке j^* . Он включается первым в множество довоза. Остальные пассажиры зоны довоза до конечной остановки выбираются итерационно согласно системе требований

$$\begin{cases} m_{j^*j} + \sum_{j^* < s < j} m_{sj} \rightarrow \max; \\ m_{j^*j} + \sum_{j^* < s < j} m_{sj} \leq V; \\ s \in N, j < k. \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, зоны подъезда и довоза обрабатываются рекурсивно, а множество остановок формируется выборочно, что обеспечивает скоростной режим движения. В результате минимизируется как время поездки для пассажиров, так и механический износ транспортного средства. В зоне основной перевозки обеспечивается стабильно высокий коэффициент использования пассажироместности и минимальное время в пути за счет исключения промежуточных остановок, а также снижается эксплуатационный износ ТС благодаря сокращению циклов «разгон–торможение». Таким образом, организация перевозки позволяет совместить высокую скорость доставки на участке i^*j^* с общей эффективностью использования транспорта по всему маршруту, что выгодно отличает его от систем, работающих по принципу обязательного объезда.

Новизна организации перевозки на основе алгоритма «По критическому элементу»:

- множества остановок дополнительной перевозки определяются через серию итерационно-рекурсивных состояний;
- введение понятий дополнительного и попутного подвоза для оптимизации загрузки и пробега;
- перевозка в экспрессном режиме позволяет максимизировать заполняемость транспортного средства и минимизировать его износ из-за разгонов–торможений;
- используется вычислительный метод с полиномиальной сложностью, позволяющий обрабатывать матрицы корреспонденций большого размера за миллисекунды.

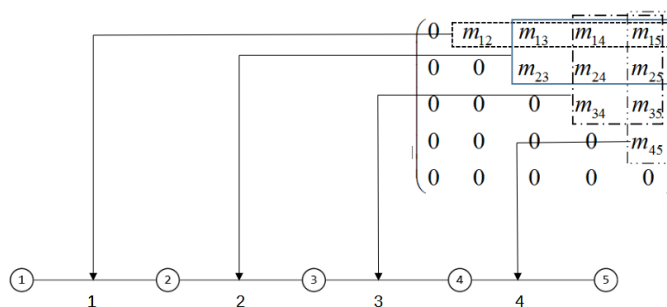
Алгоритм организации перевозки по наиболее пассажиронапряженному перегону (ИА «По наиболее пассажиронапряженному перегону»). Ключевые параметры перевозки при традиционном подходе рассчитываются исходя из величины наиболее пассажиронапряженного перегона (участка маршрута между двумя соседними остановками с наибольшей загруженностью ТС), которая определяется раз в полгода – несколько лет, что часто приводит к неспособности системы адекватно реагировать на изменения спроса на перевозку. ИА «По наиболее пассажиронапряженному перегону» [4, с. 66–68] представляет собой математическую модель организации перевозки, усовершенствующую классический подход. Ее суть заключается в динамическом расчете объема кассеты (ТС) по наиболее пассажиронапряженному перегону в реальном времени.

Алгоритм находит пассажиронапряженность на каждом перегоне $n, n = \overline{1, k-1}$ по МК (рисунок 4) согласно формуле (9):

$$p_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^k m_{ij}, n = \overline{1, k-1}. \tag{9}$$

Среди полученных значений определяется наиболее пассажиронапряженный перегон: $\max\{p_n\}, n = \overline{1, k-1}$ и число инфобусов: $\lceil \max\{p_n\} : V \rceil, n = \overline{1, k-1}$. Такой способ организации перевозки позволяет на каждый рейс формировать и высылать кассету минимально необходимого объема, что сокращает потери транспортного предприятия от неэффективного использования пассажироместимости.

Рисунок 4. – Организация перевозок в ИСП: определение пассажиронапряженности перегонов



Новизна организации перевозки согласно методике алгоритма «По наиболее пассажиронапряженному перегону»:

- динамическое определение пассажироместимости ТС в реальном времени;
- использование МК, сформированной в реальном времени, для определения пассажиронапряженности на каждом перегоне.

Таким образом, алгоритм обеспечивает гибкую адаптацию работы транспорта к изменяющемуся спросу, в отличие от традиционных статических моделей организации перевозок.

Подход позволяет точно определить наиболее загруженный участок маршрута и оптимально распределить транспортные ресурсы, формируя кассету инфобусов минимально необходимого объема. Это снижает издержки от неэффективного использования пассажироместимости.

Система оценки эффективности перевозок и баланса интересов транспортного предприятия и пассажиров. Важным аспектом поведения ИИСОП является адаптивный выбор в реальном времени оптимального плана перевозки. Выбор осуществляется с помощью ЦФ (функции потерь перевозки), которая представляет линейную комбинацию оценок потерь перевозки. Коэффициенты линейной комбинации – экспертные веса, регулирующие влияние конкретного вида потерь на оценку эффективности перевозки (10). Предложенная модель, используя экспертные веса, позволяет гибко настраивать систему приоритетов перевозки:

$$P(K_{НВ}, K_{РТ}, K_{ПО}, K_{ПП}) = \alpha K_{НВ} + \beta K_{РТ} + \gamma K_{ПО} + \phi K_{ПП} \rightarrow \min, \tag{10}$$

- где $K_{НВ}$ – коэффициент неиспользованной пассажироместимости ТС;
 $K_{РТ}$ – коэффициент разгонов–торможений;
 $K_{ПО}$ – коэффициент ожидания пассажиров;
 $K_{ПП}$ – коэффициент продолжительности поездки.

$$K_{НВ} = 1 - \left(\sum_{i=1}^{k-1} q_i l_i \right) : \left(\sum_{i=1}^{k-1} V l_i \right) = 1 - \left(\sum_{i=1}^{k-1} q_i l_i \right) : VL, \tag{11}$$

- где q_i – число пассажиров на перегоне следования i ;
 l_i – длина перегона i ;

V – объем транспортного средства;

L – длина маршрута.

Чем ниже значение коэффициента, тем эффективнее использовалась пассажировместимость транспортного средства во время рейса и тем ниже потери перевозчика, понесенные при перевозке.

$$K_{PT} = |J_n| : k, \quad (12)$$

где k – число остановок маршрута;

$|J_n|$ – мощность множества остановок, сделанных транспортным средством, при реализации плана перевозки.

Чем меньше разгонов–торможений во время рейса, тем меньше износ ТС. Таким образом, минимизация значения коэффициента K_{PT} повышает эффективность перевозки.

$$K_{ПО} = \left(\sum_{i=1}^{q_{\text{пасс}}} (T_{\text{ВО}_i} / q_{\text{пасс}}) \right) : T_{\text{НВО}}, \quad (13)$$

где $q_{\text{пасс}}$ – число всех пассажиров, перевезенных за рейс;

$T_{\text{ВО}_i}$ – время ожидания транспортного средства i -м пассажиром по всем пассажирам рейса;

$T_{\text{НВО}}$ – нормативное время ожидания (10–20 мин).

Чем ниже среднее время ожидания транспортного средства при перевозке, тем ниже значение $K_{ПО}$ и тем выше уровень пассажирского комфорта и меньше потери, которые несут пассажиры при перевозке. Таким образом, минимизация коэффициента $K_{ПО}$ приводит к минимизации потерь пассажиров при перевозке.

$$K_{ПП} = \left(\sum_{i=1}^{q_{\text{пасс}}} (T_{\text{ВПП}_i} / T_{\text{ВПП}_i^*}) \right) : q_{\text{пасс}}, \quad (14)$$

где $q_{\text{пасс}}$ – число всех пассажиров, перевезенных за рейс;

$T_{\text{ВПП}_i}$ – время поездки i -го пассажира при реализации плана перевозки (при этом транспортное средство может останавливаться не на всех остановках);

$T_{\text{ВПП}_i^*}$ – время поездки i -го пассажира при перевозке в обычном режиме в «традиционной» транспортной системе.

Чем меньше время, фактически потраченное пассажиром на поездку, тем меньше временные потери пассажира при перевозке, тем выше уровень комфорта пассажира. Как и в предыдущем случае, минимизация коэффициента влечет минимизацию потерь пассажиров от перевозки.

Особенностью оценки эффективности перевозки в ИСП является ее двухкомпонентность: перевозка оценивается с позиции интересов транспортного предприятия и пассажира. Причем их интересы противоположны. Так, увеличение времени ожидания пассажиром транспорта ведет к увеличению наполняемости транспортного средства и наоборот. К задаче эффективной организации транспортного процесса относится обеспечение баланса между этими частями системы, чтобы интересы каждой компоненты были максимально учтены.

Оценка эффективности перевозки и баланса интересов строится на векторной модели (рисунок 5), где \vec{P}_A – вектор потерь транспортного предприятия, координаты которого определяются как

$$\vec{P}_A = (\vec{0}; K_{\text{НВ}} + K_{\text{PT}}). \quad (15)$$

\vec{P}_P – вектор потерь транспортного предприятия, координаты которого определяются как

$$\vec{P}_P = (K_{\text{ПО}} + K_{\text{ПП}}; \vec{0}). \quad (16)$$

\vec{P} – радиус-вектор общих потерь перевозки, определяется как сумма вектора потерь транспортного предприятия и вектора потерь пассажиров:

$$\vec{P} = \vec{P}_A + \vec{P}_P; \quad (17)$$

$$|\vec{P}| = \sqrt{|\vec{P}_A|^2 + |\vec{P}_P|^2}. \quad (18)$$

Под линией баланса интересов (рисунок 5), понимается прямая, являющаяся геометрическим местом концов радиус-векторов общих потерь перевозки, для которых соблюден баланс между интересами перевозчика и пассажиров. Предлагается описывать линию баланса уравнением $y = kx, k \in [0; +\infty)$, где k – коэффициент экспертной оценки. В качестве базиса для последующей калибровки взято значение k , равное 1. Таким образом, системой критериев «идеальной перевозки» можно считать соотношение (18):

$$\begin{cases} |\vec{P}| = \sqrt{|\vec{P}_A|^2 + |\vec{P}_P|^2} \rightarrow \min; \\ \alpha = \arctan\left(\frac{|\vec{P}_A|}{|\vec{P}_P|}\right) \rightarrow \frac{\pi}{4}. \end{cases} \quad (19)$$

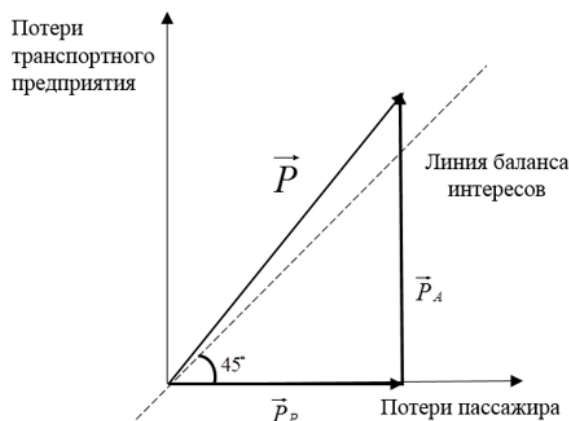


Рисунок 5. – Организация перевозок в ИСП: векторная модель оценки эффективности перевозки

Научная новизна предложенной модели оценки эффективности перевозки заключается:

– в разработке целевой функции, интегрирующей разнородные показатели потерь и позволяющей оценивать перевозку с учетом интересов как транспортного предприятия, так и пассажиров. Экспертные коэффициенты целевой функции позволяют гибко настраивать приоритеты при выборе оптимального плана перевозки;

– в разработке векторной модели оценки эффективности перевозки, позволяющей проводить анализ и характер перевозок посредством визуализации их эффективности.

Такой подход в оценке перевозок позволяет перейти от эмпирического управления к математически обоснованному и сбалансированному принятию решений в интеллектуальных транспортных системах.

Программное обеспечение ИИСОП (ПО ИИСОП). ПО ИИСОП реализует функционал, построенный на базе МО ИИСОП, обеспечивающий сбор, хранение и аналитическую обработку данных с целью осуществления адаптивной организации перевозок [5]. Представляет две взаимодействующие подсистемы: ССХД и СОП. ССХД обеспечивает сбор и хранение данных. Работа СОП циклична. Циклы работы системы запускаются с интервалом 5–30 с и состоят из последовательного выполнения трех процедур: процедуры проверки достаточности накопления заявок, процедуры нахождения ОПП и процедуры записи и пересылки ПП (рисунок 6). Завершение выполнения циклов происходит вместе с завершением работы ИИСОП в целом.

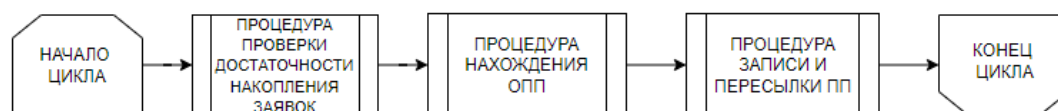


Рисунок 6. – Организация перевозок в ИСП: цикл работы СОП

Отличительной особенностью ПО ИИСОП является возможность автоматически реализовывать в фоновом режиме функционал:

- циклического сканирования массива необработанных заявок (на предмет выполнения критериев начала перевозки), обеспечивая тем самым проактивное (упреждающее) поведение системы;
- формирования в реальном времени на основе массива необработанных заявок матрицы корреспонденций, позволяя получать актуальную информацию о спросе на корреспонденции;

- переноса после определения рабочего ПП обработанных заявок в архив, что обеспечивает присутствие в МК только необработанных заявок;
- конкурентного выбора ОПП, оценку его эффективности и баланса интересов.

ПО ИИСОП позволяет добавлять новые алгоритмы, критерии начала перевозки и оценки эффективности, расширяя тем самым аналитические возможности ИИСОП. Среднее время нахождения оптимального плана перевозки ПО ИИСОП составляет 30 мс.

Результаты исследования эффективности организации перевозок посредством ИИСОП. Целью проведенных исследований работы ИИСОП является оценка эффективности пассажирских перевозок, организуемых ею (экспериментальные данные), в сравнении с перевозками, организованными «традиционным» способом (эталонные данные).

Скоростные и экспрессные перевозки оправданы на высокопоточных маршрутах, так как позволяют одновременно перевозить большой объем пассажиров, снижая затраты перевозчика и временные потери пассажиров. Исходя из этих соображений для исследований была смоделирована организация перевозок с помощью ИИИСОП на Московской линии метрополитена г. Минска. Моделирование пассажиропотока было выполнено с помощью специально разработанной системы имитации спроса на перевозку (СИСП) [4, с. 86–97]. СИСП в реальном времени генерировала заявки на перевозку и пересылала их в ИИСОП (ССХД). СОП с заданным интервалом в реальном времени анализировала накопленные заявки и при достаточном их количестве формировала экспериментальные данные: планы перевозок и оценки их эффективности, записывая их в ССХД. Для обеспечения сопоставимости результатов исследования эталонные данные (перевозка метро, организованная традиционным образом) были получены путем обработки того же набора заявок на перевозку (хранящиеся в ССХД), на котором строятся экспериментальные данные. Анализ экспериментальных и эталонных данных производился с помощью платформы R (рисунок 7).

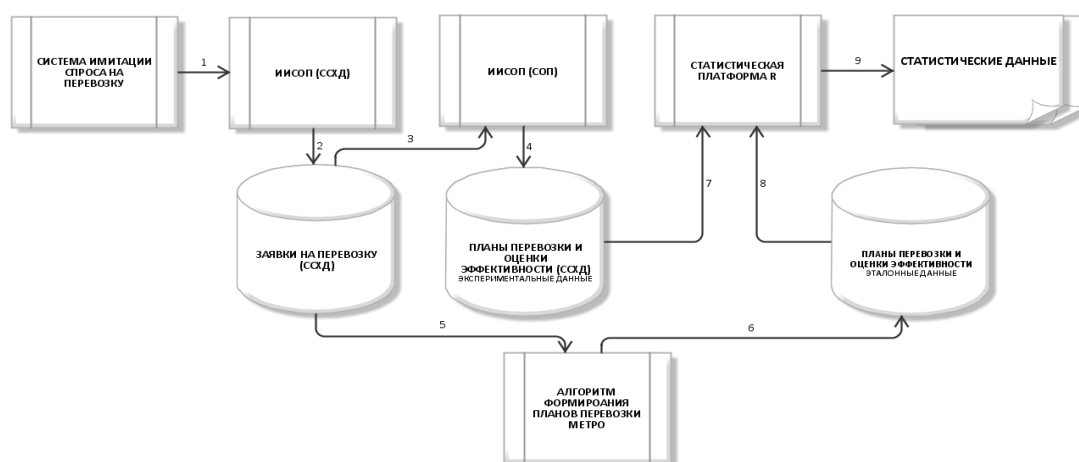


Рисунок 7. – Получение статистических данных исследования

В таблице приведены сводные статистические результаты сравнения медиан экспериментальных и эталонных данных. Сравнение выполнено через относительное отклонение (столбец 3) по каждой оценке эффективности перевозки и модулю вектора потерь перевозки. Медиана была выбрана в качестве показателя в силу своей робастности, то есть большей устойчивости к выбросам по сравнению со средним значением.

Таблица. – Сводные статистические результаты

Алгоритм	$K_{ИВ}$			$K_{РТ}$			$K_{ПО}$			$K_{ПП}$			$ \bar{P} $		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0,433	0,334	+30 %	0,449	1	-55%	0,307	0,473	-35%	0,53	1	-47 %	1,324	2,221	-40 %
2	0,714	0,334	+114 %	0,357	1	-64%	0,574	0,473	+21%	0,514	1	-49 %	1,266	2,221	-43 %
3	0,501	0,334	+50%	1	1	0%	0,613	0,473	+29%	1	1	0 %	2,221	2,221	0 %
4	0,461	0,334	+38 %	0,571	1	-43 %	0,525	0,473	+11%	0,559	1	-44 %	1,446	2,221	-35 %
Строки (алгоритмы): 1 – «По строке»; 2 – «По критическому элементу»; 3 – «По наиболее пассажиронапряженному перегону»; 4 – Комбинированная перевозка							Группа столбцов по каждой оценке эффективности: 1 – экспериментальные данные; 2 – эталонные данные (метро); 3 – относительное отклонение экспериментальных данных от эталонных								

Медианные значения $K_{ив}$ по эталонным и экспериментальным данным продемонстрировали более эффективное использование пассажироместности транспортного средства по сравнению с перевозкой метро: для комбинированной перевозки на 38 %; для алгоритма «По строке» на 30 %; для алгоритма «По критическому элементу» на 114 %; для алгоритма «По наиболее пассажиронапряженному перегону» на 50 %.

Медианные значения $K_{рТ}$ по эталонным и экспериментальным данным продемонстрировали снижение потерь от разгонов–торможений во время рейса по сравнению с перевозкой метро: для комбинированной перевозки на 43 %; для алгоритма «По строке» на 55 %; для алгоритма «По критическому элементу» на 64 %; для алгоритма «По наиболее пассажиронапряженному перегону» данный вид потерь равнялся потерям при перевозке метро, так как во время рейса посещались все остановки маршрута.

Среди всех показателей потерь лишь показатели $K_{по}$ по эталонным и экспериментальным данным продемонстрировали превышение потерь ожидания пассажиров во время рейса по сравнению с перевозкой метро: для комбинированной перевозки на 11 %; для алгоритма «По критическому элементу» на 21 %; для алгоритма «По наиболее пассажиронапряженному перегону» на 29 %. И только для алгоритма «По строке» потери ожидания ТС были ниже эталонных, причем на 35 %.

Медианные значения $K_{пП}$ по эталонным и экспериментальным данным продемонстрировали снижение потерь продолжительности поездки по сравнению с перевозкой метро: для комбинированной перевозки на 44 %; для алгоритма «По строке» на 47 %; для алгоритма «По критическому элементу» на 49 %; для алгоритма «По наиболее пассажиронапряженному перегону» данный вид потерь равнялся потерям при перевозке метро, так как во время рейса ТС и при той, и при другой перевозке посещались все остановки.

Медианные значения модуля вектора потерь продемонстрировали снижение совокупных потерь перевозки по сравнению с перевозкой метро: для комбинированной перевозки на 35 %; для перевозки, организованной по алгоритму «По строке» на 40 %; по алгоритму «По критическому элементу» на 43 %. Оба варианта перевозки – «По наиболее пассажиронапряженному перегону» и метро – в обычном режиме показали примерно равные медианные значения общих потерь.

Заключение. Предложена архитектура ИИСОП, отличающаяся от известных аналогов полной автоматической организацией адаптивных перевозок за счет автономного интеллектуального планирования, конкурентного выбора оптимального плана перевозки, организации комбинированного транспортного процесса. Имитационные испытания показали, что комбинированный транспортный процесс, сочетающий скоростные, экспрессные и обычные перевозки, позволяет существенно улучшить следующие параметры: полезное использование объема ТС выросло на 38 %, число разгонов–торможений снизилось на 43 % (что уменьшает износ), а время в пути сократилось на 44 %.

Предложено математическое обеспечение ИИСОП, обладающее следующими элементами новизны:

1) критерии начала организации перевозочного процесса, реализующие проактивный (упреждающий) компонент в поведении ИСП и тем самым отличающие ее от известных транспортных систем, которые работают по жесткому расписанию;

2) математические модели интеллектуальных алгоритмов организации перевозки, формирующие в реальном времени через серию итерационно–рекурсивных состояний планы перевозки с учетом оптимизации таких параметров, как объем транспортного средства, посещаемые остановки:

– интеллектуальный алгоритм «По строке» позволяет по сравнению с перевозкой, организованной традиционным способом, увеличить эффективность использования пассажироместности ТС на 30 %, снизить число разгонов–торможений на 55 %, время ожидания пассажиров на 35 %, время в пути на 47 %, общие потери перевозки на 40 %;

– интеллектуальный алгоритм «По критическому элементу» позволяет по сравнению с перевозкой, организованной традиционным способом, увеличить эффективность использования пассажироместности ТС на 114 %, снизить число разгонов–торможений на 64 %, время в пути на 49 %, общие потери перевозки на 43 %;

– интеллектуальный алгоритм «По наиболее пассажиронапряженному перегону» позволяет по сравнению с перевозкой, организованной традиционным способом, увеличить эффективность использования пассажироместности ТС на 50 %;

– комбинированная перевозка, базирующаяся на сочетании интеллектуальных алгоритмов, позволяет по сравнению с перевозкой, организованной традиционным способом, увеличить эффективность использования пассажироместности ТС на 38 %, снизить число разгонов–торможений на 43 %, время в пути – на 44 %, общие потери перевозки – на 35 %;

3) математическая модель системы оценки эффективности перевозок, включающая в себя:

– целевую функцию потерь, учитывающую показатели потерь перевозчика и пассажиров и реализующую механизм определения оптимального плана перевозки в реальном времени за значительно меньшее вычислительное время (среднее время поиска 30 мс), чем в известных аналогах;

– возможность сравнения перевозок разных рейсов через абсолютную величину общих потерь, что позволяет выполнять анализ транспортного процесса на макроуровне.

Предложено программное обеспечение ИИСОП, базирующееся на разработанном математическом обеспечении и отличающееся от аналогов автоматической реализацией контура «мониторинг – анализ – адаптивная реакция», которая обеспечивает адаптивное реагирование системы на стохастический спрос на перевозку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зенгбуш М. В., Белинский А. Ю., Дынкин А. Г. Пассажиропотоки в городах. – М.: Транспорт, 1974. – 136 с.
2. Hoang T., Di Paola D., Ohazulike A. Distributed Vision-Based Passenger Flow Monitoring System for Light Rail Networks // *Advances in Intelligent Traffic and Transportation Systems*. – 2023. – DOI: [10.3233/ATDE230009](https://doi.org/10.3233/ATDE230009).
3. Антошвили М. Е., Либерман С. Ю., Спирин И. В. Оптимизация городских автобусных перевозок. – М.: Транспорт, 1985. – 102 с.
4. Шуть В. Н., Швецова Е. В. Кассетно-конвейерная технология скоростных систем городских пассажирских перевозок = Cassette-Conveyor Technology of High-Speed Systems of City Passenger Transportation: монография. – Брест: БрГТУ, 2023. – 207 с.
5. Management Principles in Intelligent Passenger Transportation System / Shviatsova A., Wang H., Shuts V. et al. // *2024 Intelligent Technologies and Electronic Devices in Vehicle and Road Transport Complex (TIRVED)*. – IEEE, 2024. – С. 1–6. – DOI: [10.1109/TIRVED63561.2024.10769907](https://doi.org/10.1109/TIRVED63561.2024.10769907).
6. Швецова Е. В., Шуть В. Н. Алгоритм организации перевозок на основе критического элемента матрицы корреспонденций // *Транспорт Урала*. – 2023. – № 2 (77). – С. 34–40. – DOI: [10.20291/1815-9400-2023-2-34-40](https://doi.org/10.20291/1815-9400-2023-2-34-40).

Поступила 21.11.2025

INTELLIGENT INFORMATION SYSTEM FOR ORGANIZING TRANSPORTATION

A. SHVIATSOVA, V. SHUTS
(*Brest State Technical University*)

An intelligent information transportation management system (IITMS) is considered, which implements a new approach to the organization of the transport process, consisting in continuous automatic reproduction of the cycle «monitoring demand for transportation – data analysis – adaptive response of the transport system». The concept of an intelligent high-speed transportation system (IHSTS) is proposed as an IITMS management object. The basic principles of the IHSTS operation are considered. The mathematical support of the IITMS is considered through mathematical models of intelligent transportation management algorithms, trigger conditions for launching transportation, and a transportation efficiency assessment system that allows real-time search for the optimal transportation plan based on a competitive choice among the proposed transportation plans. The IITMS software is considered, the functionality of which is based on mathematical software. Experimental test results are presented, indicating the advantages of organizing transportation via IITMS.

Keywords: *Intelligent transportation management information system, intelligent transportation management algorithms, intelligent transportation systems, correspondence matrix, combined transportation, intelligent transportation management, infobus.*

ЭЛЕКТРОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ УСТАНОВКИ (ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ)

УДК 541.183

DOI 10.52928/2070-1624-2026-46-1-21-26

ПЛЕНКИ НЕГАТИВНОГО ФОТОРЕЗИСТА КМР E3502 НА КРЕМНИИ

*С. А. АБРАМОВ, канд. физ.-мат. наук Д. И. БРИНКЕВИЧ,
канд. физ.-мат. наук, доц. В. С. ПРОСОЛОВИЧ
(Белорусский государственный университет, Минск)*

*канд. физ.-мат. наук, доц. С. А. ВАБИЩЕВИЧ
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)*

*О. А. ЗУБОВА
(ОАО «ИНТЕГРАЛ» – управляющая компания холдинга «ИНТЕГРАЛ», Минск)*

*И. В. КОНДРУСЬ
(Национальный детский технопарк, Минск)*

Методом индентирования исследованы пленки негативных фоторезистов КМР E3502 толщиной 2,6–6,0 мкм, нанесенные на поверхность пластин кремния методом центрифугирования. Стабилизирующая обработка приводит к равномерному и однородному удалению остаточного растворителя из пленки. При этом пленка становится более плотной, что увеличивает ее прочностные и снижает упругопластические свойства, существенного изменения однородности пленки не наблюдается. Также стабилизирующая обработка повышает адгезию фоторезиста КМР E3502 к кремниевой подложке и приводит к увеличению значений микротвердости в ~ 1,5 раза. После ионного травления наблюдается резкое возрастание неоднородности пленки фоторезиста и сильное структурирование ее поверхности, появляется сплошной массив неровностей размером ~ 10 мкм. Значения микротвердости после ионного травления возрастают в 2,2 раза по сравнению с исходной пленкой, при этом наблюдается взрывной рост (более чем в 200 раз) дисперсии распределения значений микротвердости. В ионно-травленных пленках распределение величин микротвердости существенно уширяется и кардинально отличается от гауссова. Это обусловлено «взрывным» характером испарения молекул остаточного фоторезиста, приводящим к «вспучиванию» фоторезистивной пленки.

Ключевые слова: *негативный фоторезист КМР E3502, кремний, микроиндентирование, микротвердость.*

Введение. Обратная (Lift-off) литография обычно применяется для создания на подложке структур, формирование которых обычными методами литографии проблематично. Так, обратная литография используется при создании металлизации из драгоценных металлов, травление которых обычно является сложной задачей. При этом структура на кремниевой подложке формируется при удалении экспонированных участков фоторезиста (ФР) вместе с находящейся на них пленкой металла. Оставшаяся на подложке пленка металла полностью повторяет рисунок неэкспонированных областей [1]. В процессе обратной литографии используются негативные фоторезисты, к которым предъявляются повышенные требования по прочностным и адгезионным свойствам, а также по высокой температурной стойкости. Для определения оптимальных технологических режимов применения негативных ФР в литографических процессах важным является знание особенностей их физико-механических свойств. Ранее [2; 3] нами были проведены исследования физико-механических свойств фоторезистов NFR 016D4 (производства JSR, Токуо, Япония) и серии AZ nLOF (MicroChemicals GmbH, Германия). Определенный интерес для дальнейшего использования в технологических процессах представляет сравнение физико-механических характеристик фоторезистивных пленок разных производителей.

Целью настоящей работы являлось исследование методом индентирования физико-механических характеристик пленок негативного фоторезиста КМР E3502 (производитель Kempur Microelectronics Inc, Китай) на пластинах монокристаллического кремния и влияния на них внешних воздействий.

Методы исследования. Пленки негативного фоторезиста КМР E3502 наносились на поверхность пластин кремния методом центрифугирования [4]. Перед нанесением ФР пластины кремния подвергались стандартному циклу очистки поверхности в органических и неорганических растворителях. После формирования пленки ФР проводилась ее сушка при температуре 110 °С длительностью 60 с. Толщина фоторезистивных

пленок составляла 5,88 мкм. Измерение геометрической толщины пленок фоторезиста выполнялось на растровом электронном микроскопе HITACHI S-4800. Часть образцов с целью стабилизации подвергалась облучению светом с $\lambda = 404$ нм в течение 105 с и последующей сушке при 115 °С длительностью 60 с. Ионное травление осуществлялось в течение 20 мин в потоке ионов Ag^+ с энергией 160 эВ, скорость потока 6 см³/мин.

Микроиндентирование проводилось на приборе Micro Vickers Hardness Tester KASON 59-HV-W при комнатной температуре. В качестве индентора использовался алмазный наконечник в форме четырехгранной пирамиды с квадратным основанием (пирамида Виккерса). Нагрузка P на индентор составляла 10 г. При этом глубина проникновения индентора не превышала 60 % толщины фоторезистивной пленки, что позволяло минимизировать влияние подложки на полученный результат. Время выдержки под нагрузкой – 10 с. Выполнялись измерения восстановленной микротвердости (H). Использовалось программное обеспечение Basedcam, обеспечивающее вывод изображения на ПК с увеличением $\times 400$ ($\times 40$ объектив, $\times 10$ окуляр). Статистическая обработка проводилась по результатам 20 измерений на каждом образце. Измерение диагоналей для минимизации системной погрешности выполнялось несколькими методами (с помощью программного обеспечения Ivision и ImageJ). Программное обеспечение Ivision позволяет автоматически определять контур и диагонали отпечатка. При обработке по второму методу фотографии, полученные с помощью Basedcam, экспортировались в программу ImageJ, где происходила обработка изображения (повышение контраста, уменьшение шума) с последующим измерением диагоналей с помощью встроенных инструментов. Это обеспечивало погрешность измерений микротвердости менее 3 % (с доверительной вероятностью 0,95). Расчет восстановленной микротвердости производился по стандартной формуле

$$H = 1,891 \frac{P}{d^2}, \quad (1)$$

где P – нагрузка, Н;

d – средняя длина диагонали отпечатка, мм.

Экспериментальные результаты и их обсуждение. Микрофотографии поверхности пленок негативного фоторезиста КМР Е3502 приведены на рисунке 1. Поверхность исходной пленки однородная, рельеф поверхности достаточно гладкий, не наблюдается даже отдельных неровностей (рисунок 1, а). Стабилизирующая обработка не приводит к заметному изменению поверхности пленки. После ионного травления наблюдалось сильное структурирование поверхности пленки, появлялся сплошной массив неровностей размером ~ 10 мкм (рисунок 1, б).

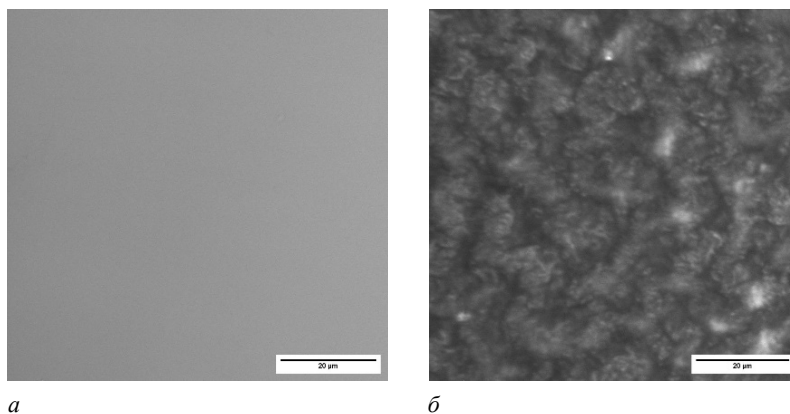


Рисунок 1. – Характерные микрофотографии поверхности пленок фоторезиста КМР Е3502: исходной (а) и травленной ионами Ag^+ с энергией 160 эВ (б)

О нарушении структуры пленки КМР Е3502 после ионного травления свидетельствуют также микрофотографии их поперечного сечения (рисунок 2). При этом толщина фоторезистивной пленки возрастает с 5,58 мкм в исходной (рисунок 2, а) до 6,66 мкм в ионно-травленной (рисунок 2, б). Одновременно после ионного травления резко возрастает неоднородность пленки фоторезиста по толщине. Полученные экспериментальные результаты свидетельствуют о «вспучивании» пленки в процессе ионного травления. Указанный эффект может быть обусловлен интенсивным испарением остаточного растворителя в пленке фоторезиста. Повышенное содержание остаточного растворителя в пленках КМР Е3502 толщиной 5,6–5,9 мкм может быть обусловлено тем, что указанный ФР предназначен для пленок толщиной $\sim 2,4$ мкм и стандартная сушка при температуре 110 °С длительностью 60 с после формирования пленки не приводит к полному удалению растворителя. Отметим, что дополнительная стабилизирующая термообработка толстых (~ 6 мкм) пленок

КМР E3502 приводила к снижению толщины пленки на 7 %, что вызвано испарением растворителя. Идентичный эффект при стабилизационной термообработке наблюдался ранее в толстых пленках негативного фоторезиста AZ nLOF2020 [5].

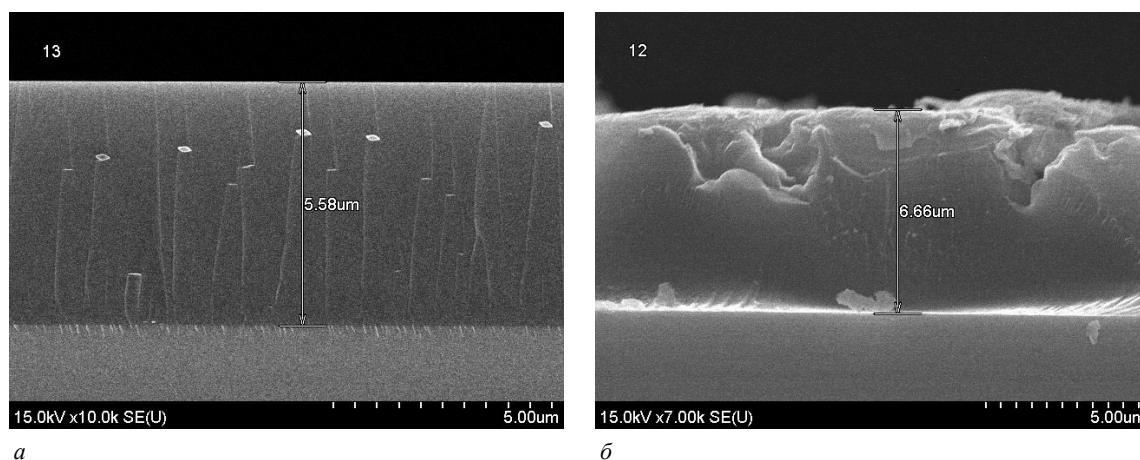


Рисунок 2. – Микрофотографии пленок фоторезистов КМР E3502 в растровом электронном микроскопе до (а) и после (б) ионного травления

На фотографиях отпечатков индентора в исходных и стабилизированных пленках фоторезиста КМР E3502 (рисунок 3) вокруг отпечатков индентора наблюдались светлые «ореолы», обусловленные, вероятнее всего, навалами («подъемом» поверхности), образующимися вследствие вытеснения материала фоторезиста из-под индентора. «Ореолы» обычно имеют форму, близкую к сферической и разделенную на сегменты трещинами, исходящими из углов отпечатка (рисунок 3, а, б). Некоторые трещины едва видны, что указывает на их определенное «затягивание» после снятия нагрузки. Вокруг отпечатка обычно наблюдается 4 сегмента различной площади (рисунок 3, а, б), но у отдельных отпечатков количество сегментов может уменьшаться до 3 или 2. Такое поведение, вероятнее всего, обусловлено отслоением пленки от подложки в процессе индентирования. В этом случае по площади «ореолов»/длине трещин, характеризующих величину отслоения пленки от подложки, можно судить об адгезии фоторезиста к кремниевой подложке [6]. Отметим, что после стабилизирующей обработки средняя площадь «ореолов» вокруг отпечатков снижалась на ~ 10 %. Таким образом, можно констатировать, что стабилизирующая обработка повышает адгезию фоторезиста к кремнию [7].

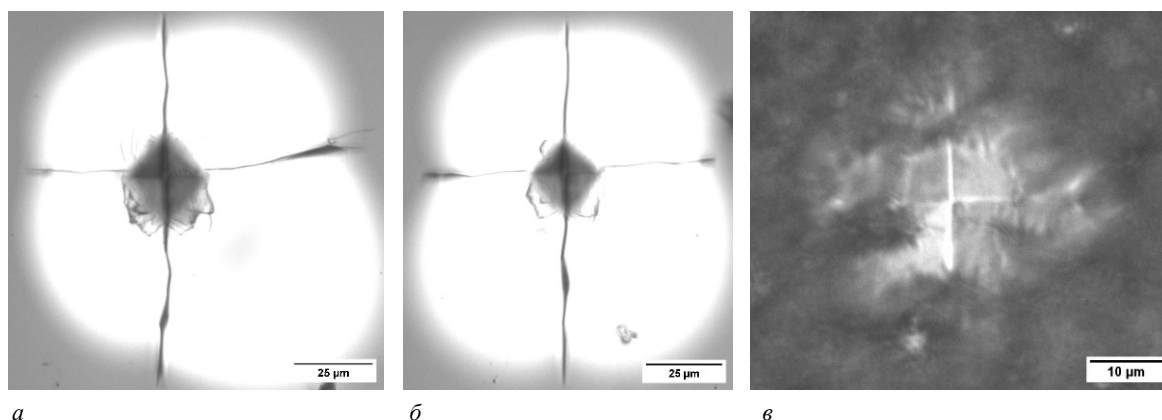


Рисунок 3. – Характерные микрофотографии отпечатков индентора в пленках фоторезиста КМР E3502: исходной (а), прошедшей стабилизирующую обработку (б) и травленной ионами Ag⁺ с энергией 160 эВ (в)

Форма отпечатков в исходных и стабилизированных пленках ФР близка к квадратной, его диагонали хорошо видны (рисунок 3 а, б). Это позволяло достаточно точно определить величину микротвердости пленок по формуле (1). Отметим, что в исходных пленках КМР E3502 наблюдается небольшая «размытость» сторон отпечатка (рисунок 3, а), которая указывает на наличие незначительной упругопластической трансформации отпечатка после снятия нагрузки. Стабилизирующая обработка практически полностью устраняла этот эффект; на микрофотографии стороны отпечатка четко обозначены (рисунок 3, б). Отметим,

что существенной анизотропии в исходных и стабилизированных пленках фоторезиста не наблюдалось. Размеры диагоналей в одном отпечатке различались незначительно: в среднем на 15 % в исходных и 10 % в стабилизированных пленках. Небольшое различие в этом параметре обусловлено, на наш взгляд, тем, что стабилизирующая обработка подавляет упругопластическую деформацию отпечатка.

На рисунке 4 показаны гистограммы микротвердости пленок фоторезиста. Распределение величин микротвердости в исходных и стабилизированных пленках ФР было близко к гауссову, что указывает на их высокую однородность. Стабилизирующая обработка приводила к увеличению значений микротвердости примерно в 1,5 раза, при этом значение дисперсии распределения увеличивалось примерно в 8 раз (таблица). Возрастала и асимметрия распределения значений микротвердости. Это указывает на небольшое снижение однородности и увеличение прочности фоторезистивной пленки в процессе стабилизирующей обработки.

Таблица. – Параметры распределений значений микротвердости в пленках КМР E3502

Параметр	Исходная	После стабилизирующей обработки	После ионного травления
Среднее значение, МПа	354,5	471	725
Дисперсия, (МПа) ²	259	2235	50429
Асимметрия, отн. ед.	0,02	0,22	0,57

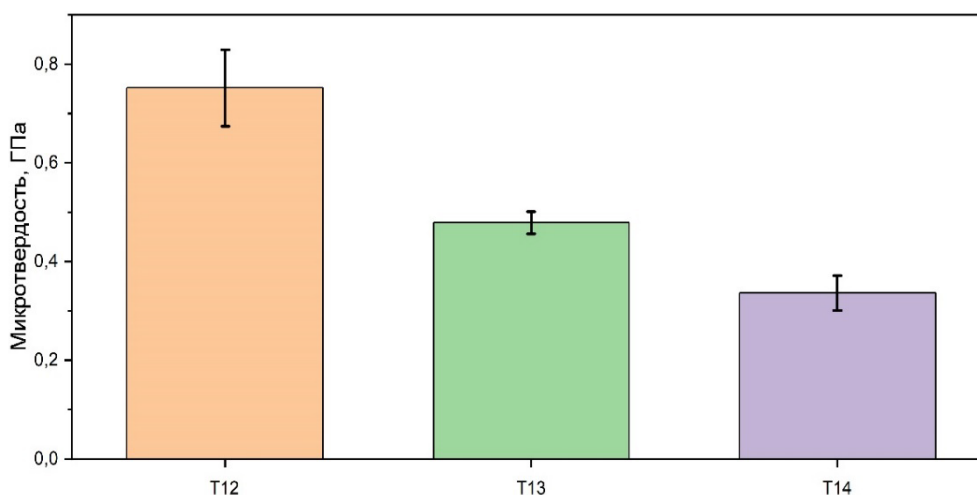


Рисунок 4. – Гистограммы микротвердости пленок фоторезиста КМР E3502: исходной (T12), прошедшей стабилизирующую обработку (T13) и травленной ионами Ar^+ с энергией 160 эВ (T14)

Ионное травление кардинально меняет прочностные свойства фоторезистивной пленки. Отпечаток индентора в ионно-травленных пленках достаточно сложно визуализировать (см. рисунок 3, в), вследствие высокой шероховатости поверхности. Форма отпечатка искажена и отличается от квадратной, размеры диагоналей одного отпечатка различаются (см. рисунок 3, в), наблюдается слабая асимметрия отпечатка, что может указывать на возникновение определенной анизотропии пленки. Кроме того, асимметрия отпечатков нестабильна и изменяется в достаточно широких пределах: отношение диагоналей одного отпечатка варьируется от 0,6 до 0,96 и носит случайный характер. «Ореолов», обусловленных отслоением пленки от подложки при индентировании, не наблюдается (см. рисунок 3, в). Вместе с тем диагонали отпечатка достаточно хорошо выражены и поддаются точному измерению. Значения микротвердости после ионного травления возрастают в 2,2 раза по сравнению с исходной пленкой, при этом наблюдается взрывной рост (более чем в 200 раз) дисперсии распределения значений микротвердости (см. таблицу). В ионно-травленных пленках распределение величин микротвердости существенно уширяется и кардинально отличается от гауссова. В нем можно выделить до трех областей с величиной микротвердости, различающейся в 1,5–2 раза. Такие распределения величин микротвердости ранее наблюдались в различных неоднородных материалах: монокристаллическом кремнии с дефектами упаковки и нейтронно-облученных эпитаксиальных пленках $CdTe$ ¹ [8; 9]. Ионное травление приводит к увеличению прочностных характеристик и возникновению значительной неоднородности пленки.

¹ Патент ВУ 20614 С2, МПК G 01N 19/08, H 01L 21/66. Способ определения наличия и размера дефектов в образце монокристаллического кремния: № а 20130764: заявлено 17.06.2013; опубл. 28.02.2015 / Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Бринкевич Д. И., Просолович В. С.; заявитель учреждение образования «Полоцкий государственный университет» (ВУ). – URL: <https://search.ncip.by/database/?page=3&target=29359> (дата обращения: 18.02.2026).

Полученные экспериментальные результаты могут быть объяснены с учетом процессов, протекающих с участием остаточного растворителя в фоторезистивной пленке. В спектрах стандартных растворителей для фенолформальдегидных фоторезистов наблюдаются полосы с максимумами при ~ 970 , 1110 , 1240 и 1740 см^{-1} , обусловленные асимметричными и симметричными валентными колебаниями С–О–С и С=О-связей в алифатических эфирах [10; 11]. По изменению интенсивности этих полос определяется присутствие остаточного растворителя. Наличие остаточного растворителя в различных пленках ФР наблюдалось ранее в работах [5; 10–13], причем для одной марки ФР обычно выполняется правило: чем толще пленки фоторезиста, тем выше содержание остаточного растворителя. Дополнительная сушка приводит к снижению интенсивности указанных выше полос и уменьшению толщины фоторезистивной пленки. Этот эффект наблюдался нами и для пленок КМР Е3502. Стабилизирующая обработка включала сушку при $115 \text{ }^\circ\text{C}$ и, соответственно, приводила к удалению остаточного растворителя из пленки. При этом пленка становится более плотной, что увеличивает ее прочностные и снижает упругопластические свойства. При сушке нагрев осуществлялся со стороны кремниевой подложки и растворитель плавно диффундировал от границы раздела кремний/фоторезист к поверхности фоторезиста, которая не была нарушена. Поскольку растворитель удалялся равномерно, существенного изменения однородности пленки не наблюдалось.

При ионном травлении картина иная. Подвод энергии осуществляется со стороны пленки, причем в значительно большем количестве, чем при нагреве. Кроме того, образование в процессе ионного травления углеродного слоя на поверхности фоторезистивной пленки препятствует испарению молекул растворителя из нее. Совокупность этих факторов приводит к тому, что начинается бурное «кипение» растворителя внутри пленки. Этот процесс приводит к сильному нарушению однородности ФР-пленки, наблюдавшемуся в эксперименте.

Закключение. Таким образом, экспериментально установлено, что стабилизирующая обработка приводит к равномерному и однородному удалению остаточного растворителя из пленки. При этом пленка становится более плотной, что увеличивает ее прочностные и снижает упругопластические свойства, существенного изменения однородности пленки не наблюдается. Также стабилизирующая обработка повышает адгезию фоторезиста КМР Е3502 к кремниевой подложке и приводит к увеличению значений микротвердости примерно в 1,5 раза. После ионного травления наблюдается резкое возрастание неоднородности пленки фоторезиста и сильное структурирование ее поверхности, появляется сплошной массив неровностей размером $\sim 10 \text{ мкм}$. Значения микротвердости после ионного травления возрастают в 2,2 раза по сравнению с исходной пленкой, при этом наблюдается взрывной рост (более чем в 200 раз) дисперсии распределения значений микротвердости. В ионно-травленных пленках распределение величин микротвердости существенно уширяется и кардинально отличается от гауссова. Это обусловлено «взрывным» характером испарения молекул остаточного фоторезиста, приводящим к «вспучиванию» фоторезистивной пленки.

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований «Современное материаловедение, перспективные материалы и новые технологии», подпрограмма 7.2 «Наноматериалы, наноструктуры и технологии».

ЛИТЕРАТУРА

7. Наноматериалы и нанотехнологии / Под ред. В. Е. Борисенко, Н. К. Толочко – Мн.: Изд. центр БГУ, 2008. – С. 109–110.
8. Прочностные свойства фоторезистов для взрывной литографии / С. А. Вабищевич, Н. В. Вабищевич, Д. И. Бринкевич и др. // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2022. – № 4. – С. 49–55. – DOI: [10.52928/2070-1624-2022-38-4-49-55](https://doi.org/10.52928/2070-1624-2022-38-4-49-55).
9. Индентирование пленок негативных фоторезистов для обратной литографии / С. А. Вабищевич, Д. И. Бринкевич, В. С. Просолович и др. // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2025. – № 1(44). – С. 53–60. – DOI: [10.52928/2070-1624-2025-44-1-53-60](https://doi.org/10.52928/2070-1624-2025-44-1-53-60).
10. Модификация спектров отражения пленок диазохинон-новолачного фоторезиста при имплантации ионами бора и фосфора / Д. И. Бринкевич, А. А. Харченко, В. С. Просолович и др. // Микроэлектроника – 2019. – Т. 48, № 3. – С. 235–239. – DOI: [10.1134/S0544126919020029](https://doi.org/10.1134/S0544126919020029).
11. Stabilizing Treatment of Negative Photoresist Films of the AZ nLOF20XX Series on Silicon / V. S. Prosolovich, D. I. Brinkevich, E. V. Grinyuk et al. // Russian Microelectronics. – 2025. – Vol. 54, iss. 6. – P. 589–594. – DOI: [10.1134/S106373972560089X](https://doi.org/10.1134/S106373972560089X).
12. Adhesion of Irradiated Diazoquinone-Novolac Photoresist Films to Single-Crystal Silicon / S. A. Vabishchevich, S. D. Brinkevich, N. V. Vabishchevich et al. // High Energy Chemistry. – 2021. – Vol. 55, iss. 6 – P. 495–501. – DOI: [10.1134/S0018143921060151](https://doi.org/10.1134/S0018143921060151).
13. Лапшинов Б. А. Технология литографических процессов: учеб. пособие. – М.: МИЭМ, 2011. – 95 с.
14. Влияние фоновых примесей на формирование дефектов упаковки в пластинах кремния / Д. И. Бринкевич, В. С. Просолович, С. А. Вабищевич, А. Н. Петлицкий // Микроэлектроника. – 2006. – Т. 35, № 2. – С. 112–116.
15. Прочностные свойства нейтронно-облученных эпитаксиальных пленок CdTe / А. Т. Акобирова, С. А. Вабищевич, Н. В. Вабищевич и др. // Журнал БГУ. Физика. – 2018. – № 1. – С. 73–79.

16. Пленки фоторезистов серии AZ nLOF на монокристаллическом кремнии / Д. И. Бринкевич, Е. В. Гринюк, В. С. Просолович и др. // Микроэлектроника. – 2025. – Т. 54, № 1. – С. 55–63. – DOI: [10.31857/S0544126925010068](https://doi.org/10.31857/S0544126925010068).
17. Transformation of the Spectra of a Attenuated Total Reflection when Drying a Diazoquinone-Novolach Photoresist / D. I. Brinkevich, S. D. Brinkevich, A. N. Petlitsky, V. S. Prosolovich // Russian Microelectronics. – 2021. – Vol. 50, iss. 4. – P. 239–245. – DOI: [10.1134/S106373972104003X](https://doi.org/10.1134/S106373972104003X).
18. Fourier-IR spectroscopy of photoresist/silicon structures for explosive lithography / D. I. Brinkevich, E. V. Grinyuk, S. D. Brinkevich et al. // Journal of Applied Spectroscopy. – 2024. – Vol. 90, iss. 6, – P. 1223–1228. – DOI: [10.1007/s10812-024-01657-4](https://doi.org/10.1007/s10812-024-01657-4).
19. Пленки негативного фоторезиста AZ nLOF 5510, облученные электронами / С. А. Абрамов, Д. И. Бринкевич, В. С. Просолович и др. // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2025. – № 1(44). – С. 39–46. – DOI: <https://doi.org/10.52928/2070-1624-2025-44-1-39-46>.

Поступила 05.03.2026

KMP E3502 NEGATIVE PHOTORESIST FILMS ON SILICON

S. ABRAMOV, D. BRINKEVICH, V. PROSOLOVICH;
(Belarusian State University, Minsk)

S. VABISHCHEVICH;
(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

O. ZUBOVA
(“INTEGRAL” Joint Stock Company, Minsk)

I. KONDRUS
(National Children’s Technopark, Minsk).

Films of KMP E3502 negative photoresists with a thickness of 2.6–6.0 μm , deposited onto the surface of silicon wafers by centrifugation, were studied using the indentation method. Stabilizing treatment leads to uniform and homogeneous removal of residual solvent from the film. At the same time, the film becomes denser, which increases its strength and decreases its elastic-plastic properties; no significant change in the film homogeneity is observed. Also, the stabilizing treatment improves the adhesion of the KMP E3502 photoresist to the silicon substrate and leads to an increase in the microhardness values by ~ 1.5 times. After ion etching, a sharp increase in the heterogeneity of the photoresist film and strong structuring of the film surface are observed, with the appearance of a continuous array of irregularities with dimensions of $\sim 10 \mu\text{m}$. The microhardness values after ion etching increase by 2.2 times compared to the initial film, while an explosive increase (more than 200 times) in the dispersion of the distribution of microhardness values is observed. In ion-etched films, the distribution of microhardness values broadens significantly and deviates radically from Gaussian. This is due to the explosive nature of the evaporation of residual photoresist molecules, leading to "swelling" of the photoresist film.

Keywords: Negative photoresist KMP E3502, silicon, microindentation, microhardness.

УДК 541.183

DOI 10.52928/2070-1624-2026-46-1-27-33

**ИК-ФУРЬЕ СПЕКТРОСКОПИЯ ПЛЕНОК НЕГАТИВНОГО ФОТОРЕЗИСТА КМР E3502
НА МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ КРЕМНИИ**

*канд. физ.-мат. наук Д. И. БРИНКЕВИЧ, канд. физ.-мат. наук, доц. В. С. ПРОСОЛОВИЧ
(Белорусский государственный университет, Минск)*

*канд. физ.-мат. наук, доц. С. А. ВАБИЩЕВИЧ
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)*

*О. А. ЗУБОВА
(ОАО «ИНТЕГРАЛ» – управляющая компания холдинга «ИНТЕГРАЛ», Минск)*

*И. А. ВЛАСЕНКО
(АО «Фармпроект», Санкт-Петербург, Россия)*

Методом ИК-Фурье спектроскопии с использованием приставки для диффузного отражения исследованы пленки негативного фоторезиста КМР E3502 толщиной 2,62–5,9 мкм, нанесенные на поверхность пластин кремния методом центрифугирования. Наиболее интенсивные полосы поглощения в отражательно-абсорбционных спектрах фоторезистивных пленок КМР E3502 наблюдаются в диапазоне волновых чисел 1000–1800 см⁻¹ и характерны для фенолформальдегидной смолы. Анализ отражательно-абсорбционных спектров пленок КМР E3502 позволяет заключить, что их основным пленкообразующим компонентом является смесь фенолформальдегидных смол. В области волновых чисел 400–1000 см⁻¹ в тонких (2,62 мкм) пленках КМР E3502 наблюдалась широкая полоса с максимумом в области 650–700 см⁻¹, которая обусловлена процессами на границе раздела фоторезист/кремний. Показано, что при увеличении толщины фоторезистивной пленки от 2,62 мкм до 5,9 мкм кромоочный валик (утолщение у края пластины) увеличивается на порядок.

Ключевые слова: *негативный фоторезист КМР E3502, кремний, ИК-Фурье спектроскопия, фенолформальдегидная смола.*

Негативные фоторезисты КМР E3502, изготавливаемые компанией Kempur Microelectronics Inc, Китай, предназначены для использования в процессах обратной (lift-off) литографии и широко используются в субмикронных процессах (проектные нормы 0,6 мкм при толщине пленки 2,4 мкм) производства интегральных микросхем и светодиодов¹. Они разработаны под i-линию и рассчитаны для получения пленок толщиной 2,4–4 мкм. Фоторезисты КМР E3502 оптимизированы для нанесения пленок методом центрифугирования.

При экспонировании в фоторезистивной пленке протекают фотохимические реакции, скорость которых определяется компонентным составом фоторезиста (ФР). Это, в свою очередь, оказывает определяющее влияние на выбор оптимальных технологических режимов литографических процессов при изготовлении микросхем. Производитель обычно не указывает состав фоторезиста. Указанные обстоятельства определили актуальность настоящей работы.

Для исследования полимерных композитов обычно применяют метод ИК-Фурье спектроскопии, который позволяет получать количественную информацию о составе и структуре сложных органических композитов, поскольку колебания большинства молекулярных групп полимеров лежат в средней ИК-области [1; 2]. Оптические свойства пленок диазохинон-новолачных ФР на поверхности пластин монокристаллического кремния ранее исследовались методом нарушенного полного внутреннего отражения [3–6]. В работах [7; 8] показаны преимущества использования для этих целей отражательно-абсорбционной ИК-Фурье спектроскопии с использованием приставки для диффузного отражения. Наличие в этих спектрах широких интерференционных полос позволяет, кроме полос ИК-поглощения, дополнительно определять как толщину пленки, так и ее показатель преломления.

В настоящей работе приведены результаты исследования инфракрасных спектров пленок негативных фоторезистов КМР E3502 на кремнии методом отражательно-абсорбционной ИК-Фурье спектроскопии с использованием приставки для диффузного отражения и проведен их сравнительный анализ с другими ФР аналогичного назначения с целью оптимизации применения указанных ФР в литографических процессах производства интегральных микросхем.

Методы исследования. Пленки негативного фоторезиста КМР E3502 наносились на поверхность пластин кремния методом центрифугирования [9]. Перед нанесением ФР пластины кремния подвергались

¹ URL: Kempur.com/en/cate-16395-14073.html (дата обращения 20.02.2026).

стандартному циклу очистки поверхности в органических и неорганических растворителях. После формирования фоторезистивной пленки проводилась ее сушка при температуре 110 °С длительностью 60 с. Толщина фоторезистивных пленок варьировалась в пределах 2,62–5,90 мкм. Толщина пленки фоторезиста обратно пропорциональна корню квадратному от скорости вращения центрифуги и, таким образом, возможна ее регулировка в определенном диапазоне. Измерение геометрической толщины пленок ФР выполнялось на растровом электронном микроскопе HITACHI S-4800.

ИК-Фурье спектры структур ФР/Si регистрировались в диапазоне 400–3200 см⁻¹ при комнатной температуре спектрофотометром ALPHA (производитель Bruker Optik GmbH) [8]. Использовалась приставка для измерения диффузного отражения DRIFT. При этом спектры поглощения формировались в результате прохождения зондирующего ИК-излучения через слой фоторезиста в сторону кремниевой подложки, его зеркального отражения от подложки и обратного прохождения излучения через слой ФР. Разрешение было не хуже 4 см⁻¹. Коррекция фона проводилась перед каждым измерением.

Экспериментальные результаты и их обсуждение. Характерные отражательно-абсорбционные ИК-Фурье спектры фоторезистивных пленок КМР E3502 на монокристаллическом кремнии представлены на рисунках 1–3. Для определения величины кромочного валика измерения проводились на образцах, вырезанных из разных участков (края и центра) пластин кремния.

Наиболее интенсивные линии поглощения в пленках наблюдались в области волновых чисел 600–1750 см⁻¹. В пленках толщиной порядка 6 мкм (рисунок 1) они накладываются на первую (максимум при 880 см⁻¹) и вторую (максимум при ~ 1560 см⁻¹) интерференционные полосы. Это обстоятельство затрудняет достоверное определение интенсивности полос поглощения в указанном энергетическом диапазоне, а также оценку их изменений под влиянием внешних воздействий. При уменьшении толщины пленки интерференционные полосы уширяются и смещаются в область больших волновых чисел (рисунок 1, кривые 1 и 2). Для пленок толщиной 2,62 мкм первая интерференционная полоса имеет максимум при ~ 2000 см⁻¹ и находится за областью наиболее интенсивных линий поглощения фоторезистивной пленки КМР E3502 (рисунок 2), что позволяет достаточно уверенно определять положение и интенсивности полос поглощения и анализировать возможные их изменения при различных внешних (как радиационных, так и термических) воздействиях.

Наличие в отражательно-абсорбционных спектрах интерференционных полос позволяет при известном показателе преломления n фоторезистивной пленки определить ее толщину [8; 10]. Это дало возможность по сдвигу полос интерференции рассчитать величину кромочного валика (утолщения у края пластины) для пленок разной толщины (рисунки 2, 3). Оказалось, что при увеличении толщины пленки кромочный валик становится более заметным. Так, при толщине пленки 2,62 мкм он составлял ~ 0,03 мкм, или 1,1 % от толщины пленки. Увеличение толщины пленки до 5,7–5,9 мкм приводит к росту высоты кромочного валика на порядок – до 0,30–0,33 мкм, что составляет ~ 5,3–5,7 % от толщины пленки.

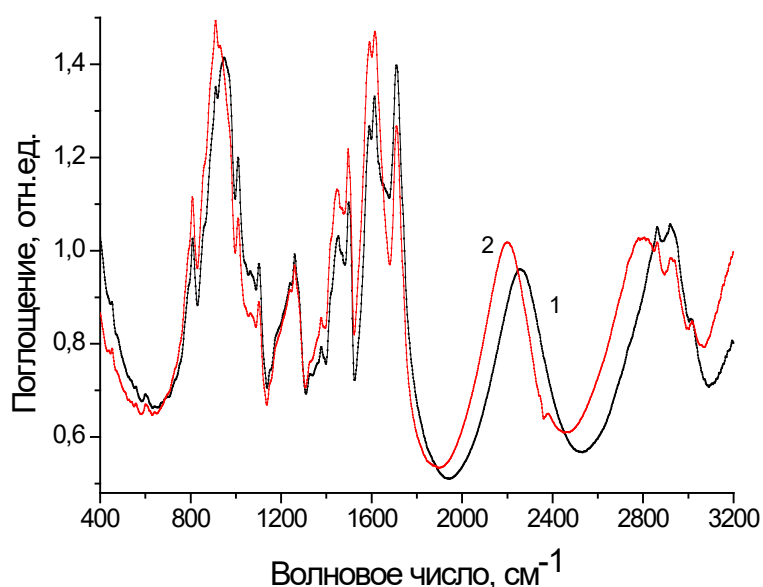


Рисунок 1. – Отражательно-абсорбционные ИК-Фурье спектры пленок негативного фоторезиста КМР E3502 толщиной 5,73 (1) и 5,91 (2) мкм, вырезанных из центра пластины

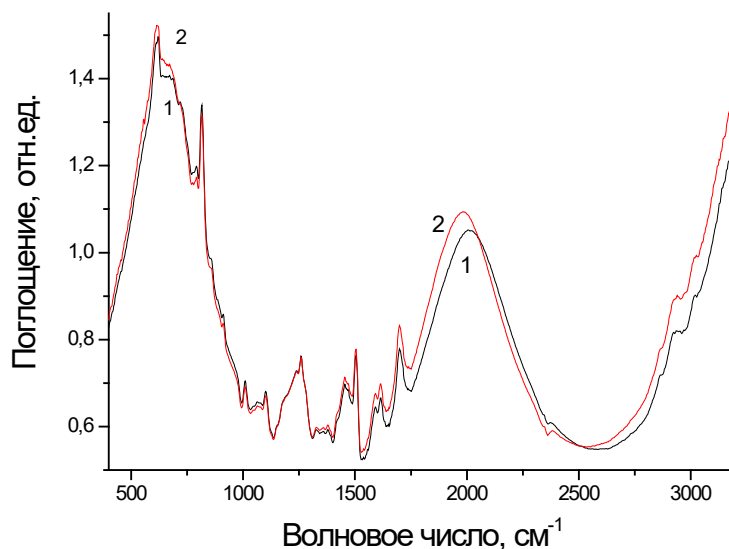


Рисунок 2. – Отражательно-абсорбционные ИК-Фурье спектры пленок негативного фоторезиста КМР E3502 толщиной 2,62 мкм. Образцы вырезались из центра (1) и края (2) пластины

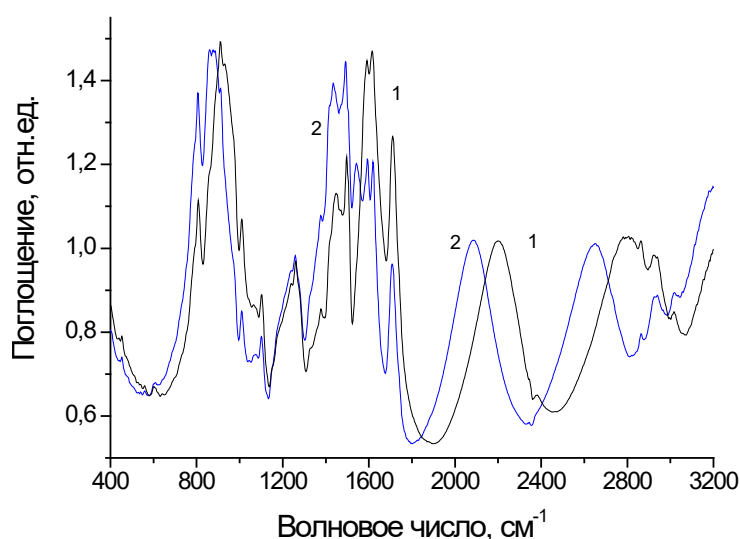


Рисунок 3. – Отражательно-абсорбционные ИК-Фурье спектры пленок негативного фоторезиста КМР E3502 толщиной 5,91 мкм. Образцы вырезались из центра (1) и края (2) пластины

Экспериментальные значения частот линий ИК-поглощения фоторезистивных пленок КМР E3502 и их соответствие различным функциональным группам приведены в таблице. Наиболее интенсивные полосы поглощения в спектрах фоторезистивных пленок КМР E3502 наблюдаются в диапазоне волновых чисел 1000–1800 см^{-1} и характерны для фенолформальдегидной смолы [12]. Эти полосы обусловлены валентными колебаниями ароматического кольца (максимум при 1510 см^{-1}), пульсационными колебаниями его углеродного скелета (сдвоенный максимум при 1595 и 1610 см^{-1}), а также колебаниями бензольного кольца (максимум при 1430 см^{-1}), связанного с CH_2 -мостиком [6; 10]. Это обстоятельство указывает на то, что основным пленкообразующим компонентом фоторезистивных пленок КМР E3502 является смесь фенолформальдегидных смол. Ранее аналогичные полосы наблюдались в других фоторезистивных пленках на основе фенолформальдегидных смол: диазохинон-новолачных позитивных ФП9150 и AZ-1350 J [4; 6] и негативных фенолформальдегидных NFR 016D4 и AZ nLOF 20XX [8; 13; 14].

Во всех ИК-Фурье спектрах пленок КМР E3502 наблюдалась интенсивная широкая структурированная полоса с несколькими максимумами в диапазоне 1150–1270 см^{-1} , профиль которой отличался от аналогичной полосы в других ФР на основе фенолформальдегидных смол (рисунок 4). Обусловлено это тем,

что в указанном спектральном диапазоне наблюдаются как колебания С–О- и С–С-связей растворителя, так и плоскостные деформационные колебания С–О-связей фенольной группы фенолформальдегидной смолы [6]. Здесь же наблюдаются полосы с максимумами при 1100 и 1170 см^{-1} , обусловленные поглощением в кремниевой подложке, интенсивность которых резко возрастает в тонких (2,62 мкм) пленках (рисунок 2). Так, полоса 1170 см^{-1} может быть вызвана естественным оксидом на поверхности кремния [11]. Вклад в полосу при 1100 см^{-1} могут также вносить колебания междоузельного кислорода в кремниевой подложке [11].

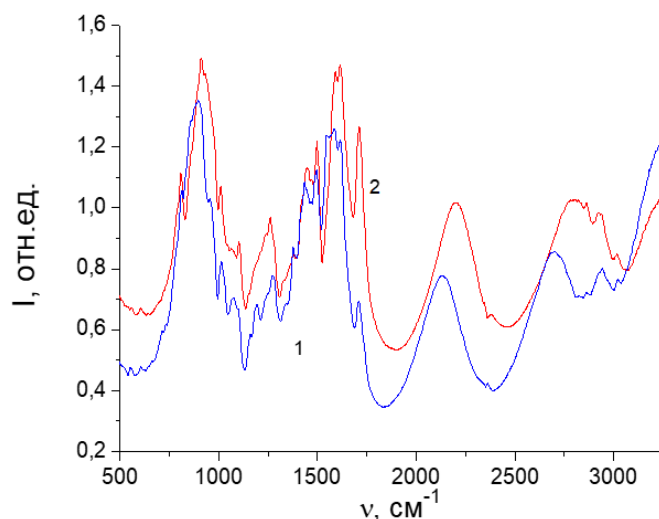


Рисунок 4. – Отражательно-абсорбционные спектры пленок толщиной 5,8 мкм негативных фоторезистов AZ nLOF2070 (1) и KMP E3502 (2)

В диапазоне волновых чисел 1700–1720 см^{-1} наблюдалась полоса, обусловленная валентными колебаниями $\text{C}=\text{O}_{\text{str}}$ в сложных ароматических эфирах. Ее интенсивность снижалась при сушке фоторезистивной пленки. Двойные $\text{C}=\text{O}$ -связи в структуре фенолформальдегидной смолы отсутствуют, поэтому, вероятнее всего, указанная полоса связана с остаточным растворителем. Кроме того, в ИК спектрах пленок KMP E3502 наблюдался также ряд полос средней и малой интенсивности в области волновых чисел 400–900 см^{-1} (таблица), энергетическое положение и принадлежность которых к функциональным группам были подробно рассмотрены ранее в [4; 6]. Наиболее интенсивной из них (как и в других фенолформальдегидных резистах) была обусловленная внеплоскостными деформационными колебаниями С–Н-связей ароматического кольца полоса с максимумом при 810 см^{-1} .

Таблица. – Экспериментальные значения частот ИК-поглощения функциональных групп в пленках негативного фоторезиста KMP E3502 на кремнии

Энергетическое положение	Интенсивность	Функциональная группа, тип колебаний	Примечание
1	2	3	4
610 см^{-1}	Переменная интенсивность	Решеточное поглощение кремния [11]	Усиливается при уменьшении толщины
790 см^{-1}	слабая	Внеплоскостные колебания С–Н-связей орто- и паразамещенного кольца [12]	
815 см^{-1}	сильная		
960 см^{-1}	слабая	С–О–С-связи [1; 2]	
1010 см^{-1}	средняя	Колебания С–С-связей [6]	
1100 см^{-1}	слабая	С–О–С-связи эфиров [1; 2], колебания междоузельного кислорода в кремниевой подложке [11]	
1170 см^{-1} 1180 см^{-1} 1240 см^{-1} 1256 см^{-1}	Сильная, основной максимум 1256 см^{-1}	Валентные колебания С–О- и Si–О-связей в кислородных преципитатах в кремнии [1; 11]	Широкая полоса с двумя максимумами 1256 и 1240 см^{-1} , перегибы при 1170 и 1180 см^{-1}
1380 см^{-1}	слабая	Деформационные плоскостные колебания ОН-связей [1; 2]	
1450 см^{-1}	средняя	Валентные колебания ароматического кольца, связанные с CH_2 -мостиком [12]	При 1420 см^{-1} перегиб

Окончание таблицы

1	2	3	4
1500 см ⁻¹	сильная	Валентные колебания ароматического кольца [1; 12]	
1595 см ⁻¹	сильная	Пульсационные колебания углеродного скелета ароматического кольца [1; 2]	Сдвоенный максимум, доминирует 1610 см ⁻¹
1610 см ⁻¹	сильная		
1710 см ⁻¹	сильная	С=О валентные колебания в сложных ароматических эфирах [1; 2]	
~ 2860 см ⁻¹	слабая	Симметричные валентные колебания СН ₂ - и СН ₃ -групп [2]	
2925 см ⁻¹	слабая	Асимметричные валентные колебания СН ₂ -групп [2]	
2940 см ⁻¹	слабая	Асимметричные валентные колебания СН ₃ -групп [1; 2]	Переменная интенсивность
3010 см ⁻¹	слабая	Валентные колебания СН-групп [2]	В части образцов рядом пик 3020 см ⁻¹ переменной интенсивности
~ 3350 см ⁻¹	средняя	О–Н валентные колебания, водородная связь [1; 2]	Широкая

В области валентных колебаний С–Н-связей в спектрах толстых (5,0–6,0 мкм) пленок КМР Е3502 на фоне четвертой интерференционной полосы наблюдались относительно низкоинтенсивные полосы поглощения, обусловленные асимметричными (максимум при 2925 см⁻¹) и симметричными (максимум при ~ 2870 см⁻¹) валентными колебаниями С–Н₂-связей (см. рисунки 1, 3). Наблюдались также валентные колебания С–Н-связей (слабоинтенсивная полоса с максимумом при ~ 3010 см⁻¹). В тонких пленках интенсивность указанных полос падала (см. рисунок 2). Отметим, что присущих позитивным фенолформальдегидным резистам полос поглощения, обусловленных колебаниями С–Н₃-связей, в спектрах пленок КМР Е3502 обнаружено не было.

В области волновых чисел 400–1000 см⁻¹ в тонких пленках наблюдалась широкая полоса с максимумом в области 650–700 см⁻¹ (см. рисунок 2), которая отсутствовала в толстых пленках, что подтверждается сопоставлением рисунков 2 и 3. По своему энергетическому положению и форме она не является интерференционной. Она несимметрична: ее высокоэнергетическое плечо уширено по сравнению с низкоэнергетическим. Интенсивность этой полосы слабо зависит от местоположения в слитке. Ионное травление не изменяет ее энергетическое положение и интенсивность. Природа указанной полосы однозначно не определена. Вероятнее всего, ее наличие обусловлено процессами рассеяния/поглощения на границе раздела фоторезист/кремний. В отражательно-абсорбционных ИК-Фурье спектрах тонких (1–3 мкм) пленок негативных фенолформальдегидных фоторезистов других производителей (NFR 016D, JSR, Япония; AZ nLOF 5510, MicroChemicals GmbH, Германия) аналогичная полоса не наблюдалась [8]. Не было ее и в ИК-спектрах нарушенного полного внутреннего отражения позитивных диазохинон-новолачных фоторезистов [4; 15; 16].

На фоне указанной широкой полосы в диапазоне волновых чисел 400–1000 см⁻¹ наблюдались узкие полосы поглощения, наиболее интенсивные из которых имели максимумы при ~ 610 и 815 см⁻¹. Как отмечалось выше, полоса поглощения с максимумом при 815 см⁻¹ обусловлена внеплоскостными колебаниями С–Н-связей орто- и паразамененного бензольного кольца фенолформальдегидных смол [12]. Ее интенсивность слабо зависела от толщины фоторезистивной пленки. Интенсивность полосы с максимумом при 610 см⁻¹ возрастает при уменьшении толщины пленки, что подтверждается сопоставлением рисунков 1 и 2, а ее энергетическое положение соответствует решеточному поглощению монокристаллического кремния. Вышесказанное позволяет заключить, что данная полоса обусловлена решеточным поглощением кремниевой подложки.

Отражательно-абсорбционные ИК-Фурье спектры пленок КМР Е3502 близки к спектрам других негативных фоторезистов со схожими характеристиками (например, производимых компанией MicroChemicals GmbH, Германия), пленкообразующую основу которых составляют фенолформальдегидные смолы (рисунок 4). ИК-Фурье спектры поглощения этих ФР различаются в деталях. Это подтверждает предположение, сделанное в работе [8], о том, что основным компонентом КМР Е3502 является смесь фенолформальдегидных смол. Так, с одной стороны, интенсивность полос поглощения, связанных с валентными колебаниями СН- и СН₂-групп, выше в пленках КМР Е3502 по сравнению с другими фенолформальдегидными негативными ФР. В то же время в спектрах фоторезистов компании MicroChemicals GmbH доминируют колебания СН₃-группы, отсутствующие в пленках КМР Е3502. Интенсивность полос, обусловленных растворителем (полоса с максимумом при 1710 см⁻¹, характерная для валентных колебаний двойных С=О-связей в сложных алифатических эфирах [1; 2], и полосы при 1375, 1240 и 1180 см⁻¹, соответствующие колебаниям С–О-связей в эфирной группе [1; 2]) существенно выше в пленках КМР Е3502, чем в близких по характеристикам пленках

негативных фоторезистов NFR 016D4 и серии AZ nLOF 20XX. На их принадлежность к растворителю указывает снижение интенсивности этих полос при термообработке вплоть до исчезновения из спектра.

Отметим, что, несмотря на одинаковую толщину пленок негативных фоторезистов AZnLOF2070 и КМР Е3502, положения максимумов их интерференционных полос в спектрах (рисунок 4) смещены на $\approx 7\%$. Поскольку энергетическое положение максимумов интерференционных полос определяется выражением $m\lambda = 2nd$ (где m – номер максимума; λ – длина волны максимума; n – показатель преломления пленки; d – геометрическая толщина пленки), это указывает на различие в коэффициентах преломления данных фоторезистов. Наблюдаемое различие объясняется тем, что коэффициент преломления фенолформальдегидных смол может варьироваться в диапазоне $n = 1,56 - 1,65$ вследствие различной степени замещения ароматических колец фенола в полимере [17] и зависит от технологических особенностей их получения. Кроме того, значение n может изменяться при наличии других компонентов (в частности, остаточного растворителя) в пленках фоторезистов.

Различия в спектрах фоторезиста КМР Е3502 и его аналогов наблюдались также и в области пульсационных колебаний углеродного скелета ароматического кольца (сдвоенный максимум при 1595 см^{-1} и 1610 см^{-1}). Так, в ИК-спектрах пленок AZ nLOF2070 толщиной 5,9 мкм в этом диапазоне доминирует полоса при 1595 см^{-1} , а в пленках КМР Е3502 той же толщины интенсивности обоих пиков пульсационных колебаний сравнимы. О наличии в пленках фоторезиста AZ nLOF2070 взаимодействий, изменяющих силовые поля вблизи ароматических колец, свидетельствует смещение в низкоэнергетическую область полосы, обусловленной колебаниями бензольного кольца, связанного с CH_2 -мостиком [12]. Ее максимум в КМР Е3502 наблюдался при $\sim 1450\text{ см}^{-1}$, а в AZ nLOF2070 смещался к $\sim 1435\text{ см}^{-1}$, что может указывать на наличие сильной водородной связи по CH_2 -мостику в этом фоторезисте. Интенсивности и энергетическое положение остальных полос ИК-поглощения в пленках КМР Е3502 и его аналогов были близки.

Заключение. Экспериментально установлено, что в ИК-Фурье спектрах пленок КМР Е3502 наиболее интенсивными являются полосы валентных колебаний ароматического кольца, пульсационных колебаний углеродного скелета ароматического кольца, широкая структурированная полоса с несколькими максимумами в диапазоне $1150 - 1270\text{ см}^{-1}$ и полоса, связанная с CH_2 -мостиком. В области волновых чисел $400 - 1000\text{ см}^{-1}$ в тонких пленках наблюдалась широкая полоса с максимумом в области $650 - 700\text{ см}^{-1}$, которая обусловлена процессами на границе раздела фоторезист/кремний. Наличие в отражательно-абсорбционных спектрах пленок КМР Е3502 интерференционных полос позволяет определить их толщину, что было использовано для оценки однородности пленки по диаметру пластины. Показано, что при увеличении толщины фоторезистивной пленки кромочный валик (утолщение у края пластины) увеличивается от $\sim 0,03\text{ мкм}$ ($1,1\%$ от толщины пленки) при толщине пленки $2,62\text{ мкм}$ до $0,30 - 0,33\text{ мкм}$, ($\sim 5,3 - 5,7\%$ от толщины пленки) при толщине пленки $5,7 - 5,9\text{ мкм}$. Анализ отражательно-абсорбционных спектров пленок КМР Е3502 позволяет однозначно утверждать, что основным пленкообразующим компонентом фоторезиста является смесь фенолформальдегидных смол.

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований «Современное материаловедение, перспективные материалы и новые технологии», подпрограмма 7.2 «Наноматериалы, наноструктуры и технологии».

ЛИТЕРАТУРА

1. Преч Э., Бюльманн Ф., Аффольтер К. Определение строения органических соединений. Таблицы спектральных данных. – М.: Мир: БИНОМ. Лаб. знаний, 2006. – 439 с.
2. Тарасевич Б. Н. ИК спектры основных классов органических соединений: справ. материалы. – М.: МГУ, 2012. – 55 с.
3. Трансформация спектров нарушенного полного внутреннего отражения в процессе сушки диазохинон-новолачного фоторезиста / Д. И. Бринкевич, С. Д. Бринкевич, А. Н. Петлицкий, В. С. Просолович // Микроэлектроника. – 2021. – Т. 50, № 4. – С. 274–280. – DOI: [10.31857/S0544126921040037](https://doi.org/10.31857/S0544126921040037).
4. Garcia I. T. S., Zawislak F. C., Samios D. The effects of nuclear and electronic stopping powers on ion irradiated novolac-diazoquinone films // Applied Surface Science. – 2004. – Vol. 228, iss. 1–4. – P. 63–76. – DOI: [10.1016/j.apsusc.2003.12.027](https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2003.12.027).
5. Brinkevich D. I., Brinkevich S. D., Prosolovich V. S. Ion Implantation in Diazoquinone–Novolac Photoresist // High Energy Chemistry. – 2022. – Vol. 56, iss. 4. – P. 270–276. – DOI: [10.1134/s0018143922040051](https://doi.org/10.1134/s0018143922040051).
6. Modification of Diazoquinone–Novolac Photoresist Films beyond the Region of Implantation of B^+ Ions / S. D. Brinkevich, E. V. Grinyuk, D. I. Brinkevich, V. S. Prosolovich // High energy chemistry. – 2020. – Vol. 54, iss. 5. – P. 342–351. – DOI: [10.1134/S0018143920050045](https://doi.org/10.1134/S0018143920050045).
7. Инфракрасная Фурье-спектроскопия диффузного отражения пленок негативных фоторезистов серии AZ nLOF на монокристаллическом кремнии / Д. И. Бринкевич, В. С. Просолович, В. В. Колос и др. // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2024. – № 2(43). – С. 34–40. – DOI: [10.52928/2070-1624-2024-43-2-34-40](https://doi.org/10.52928/2070-1624-2024-43-2-34-40).
8. Отражательно-абсорбционная ИК Фурье-спектроскопия фоторезистивных пленок на кремнии / Д. И. Бринкевич, Е. В. Гринюк, В. С. Просолович и др. // Приборы и методы измерений. – 2025. – Т. 16, № 1. – С. 69–76. – DOI: [10.21122/2220-9506-2025-16-1-69-76](https://doi.org/10.21122/2220-9506-2025-16-1-69-76).

9. Модификация спектров отражения пленок диазохинон-новолачного фоторезиста при имплантации ионами бора и фосфора / Д. И. Бринкевич, А. А. Харченко, В. С. Просолович и др. // Микроэлектроника – 2019. – Т. 48, № 3. – С. 235–239. – DOI: [10.1134/S0544126919020029](https://doi.org/10.1134/S0544126919020029).
10. Stabilizing Treatment of Negative Photoresist Films of the AZ nLOF20XX Series on Silicon / V. S. Prosolovich, D. I. Brinkevich, E. V. Grinyuk et al. // Russian Microelectronics. – 2025. – Vol. 54, iss. 6. – P. 589–594. – DOI: [10.1134/S106373972560089X](https://doi.org/10.1134/S106373972560089X).
11. Attenuated Total Reflection Spectra of Nitrided SiO₂/Si Structures / V. B. Odzhaev, A. N. Pyatlitski, V. S. Prosolovich et al. // Journal of Applied Spectroscopy. – 2022. – Vol. 89, iss. 4. – P. 665–670. – DOI: [10.1007/s10812-022-01408-3](https://doi.org/10.1007/s10812-022-01408-3).
12. Poljansek I., Sebenik U., Krajnc M. Characterization of phenol-urea-formaldehyde resin by inline FTIR spectroscopy // Journal of Applied Polymer Science. – 2006. – Vol. 99, iss. 5, – P. 2016–2028. – DOI: [10.1002/app.22161](https://doi.org/10.1002/app.22161).
13. Инфракрасная Фурье-спектроскопия структур фоторезист/кремний, используемых для обратной литографии / Д. И. Бринкевич, Е. В. Гринюк, С. Д. Бринкевич и др. // Журнал прикладной спектроскопии. – 2023. – Т. 90, № 6. – С. 863–869.
14. Пленки фоторезистов серии AZ nLOF на монокристаллическом кремнии / Д. И. Бринкевич, Е. В. Гринюк, В. С. Просолович и др. // Микроэлектроника. – 2025. – Т. 54, № 1. – С. 55–63. – DOI: [10.31857/S0544126925010068](https://doi.org/10.31857/S0544126925010068).
15. Brinkevich D. I., Brinkevich S. D., Prosolovich V. S. Ion Implantation in Diazoquinone–Novolac Photoresist // High Energy Chemistry. – 2022. – Vol. 56, iss. 4. – P. 270–276. – DOI: [10.1134/s0018143922040051](https://doi.org/10.1134/s0018143922040051).
16. Frustrated total internal reflection spectra of diazoquinone-novolac photoresist films / S. D. Brinkevich, D. I. Brinkevich, V. S. Prosolovich et al. // Journal of Applied Spectroscopy. – 2021. – Vol. 87, iss. 6 – P. 1072–1078. – DOI: [10.1007/s10812-021-01111-9](https://doi.org/10.1007/s10812-021-01111-9).
17. Аскадский А. А., Кондрашенко В. И. Компьютерное материаловедение полимеров: в 2 т. – М.: Научный мир, 1999. – Т. 1: Атомно-молекулярный уровень. – 544 с.

Поступила 06.03.2026

FTIR SPECTROSCOPY OF KMP E3502 NEGATIVE PHOTORESIST FILMS ON MONOCRYSTALLINE SILICON

D. BRINKEVICH, V. PROSOLOVICH
(Belarusian State University, Minsk)

S. VABISHCHEVICH
(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

O. ZUBOVA
(«INTEGRAL» Joint Stock Company, Minsk)

I. VLASENKO
(«Pharmproject», Saint-Petersburg)

Films of negative photoresist (FR) KMP E3502 with a thickness of 2.62–5.9 microns deposited on the surface of silicon wafers by centrifugation have been studied by IR-Fourier spectroscopy using a diffuse reflection attachment. The most intense absorption bands in the reflective absorption spectra of KMP E3502 photoresistive films are observed in the wavelength range of 1000–1800 cm⁻¹ and are characteristic of phenol-formaldehyde resin. Analysis of the reflection and absorption spectra of KMP E3502 films suggests that the main film-forming component of KMP E3502 photoresistive films is a mixture of phenol-formaldehyde resins. In the region of wave numbers 400–1000 cm⁻¹, a wide band with a maximum in the region of 650–700 cm⁻¹ was observed in thin (2.62 μm) KMP E3502 films, which is caused by processes at the photoresist/silicon interface. It is shown that with an increase in the thickness of the photoresistive film from 2.62 microns to 5.9 microns, the edge roller (thickening at the edge of the plate) increases by an order of magnitude.

Keywords: negative photoresist KMP E3502, silicon, IR-Fourier spectroscopy, phenol-formaldehyde resin.

УДК 621.317.335.3

DOI 10.52928/2070-1624-2026-46-1-34-39

МИКРОВОЛНОВАЯ ТЕХНОЛОГИЯ СРАВНИТЕЛЬНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТЕРИАЛОВ

*д-р техн. наук, проф. А. В. ГУСИНСКИЙ, д-р техн. наук, проф. М. В. ТУМИЛОВИЧ,
канд. техн. наук, доц. Н. А. ПЕВНЕВА, канд. физ.-мат. наук В. Н. РОДИОНОВА,
В. А. ШУТОВИЧ*

(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск)

канд. техн. наук О. В. ТАНАНА

(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

Разработаны метод и физико-технические принципы активной непараметрической идентификации объектов исследования в многомодовых резонансных СВЧ-системах для сравнительной идентификации материалов (твердых, жидких, газообразных) с целью мониторинга исходных (промежуточных) материалов при производстве (эксплуатации) продукции, которая позволяет быстро (время измерения – несколько минут) без использования расходных материалов определить с высокой точностью (количество определяемых параметров от 3 до 15) отличие от образца (эталона) как в лабораторных условиях, так и в непрерывном технологическом процессе, что способствует повышению надежности и увеличению срока эксплуатации изделий.

Ключевые слова: *сверхвысокие частоты, многомодовые резонаторы, электродинамические характеристики, идентификация материалов.*

Введение. Уровень разработки и внедрения новых технологий в наукоемкие сферы промышленности характеризуется не только объемом производства и ассортиментом выпускаемой продукции, но также показателями ее качества. Высокое качество обеспечивается повышенным уровнем контроля продукции, в частности, диагностикой материалов, из которых она изготовлена. Трудоемкость контроля качества некоторых изделий в промышленности и разработка новых материалов составляет 15–20 % общих трудозатрат на их изготовление. Значимость и актуальность идентификации объектов исследования подтверждается тем, что этот вид деятельности за последние десятилетия стал объектом регламентирования в нормативных документах: законах, стандартах и правилах. В производственных системах качества идентификация технологических материалов позволяет определить возможные места появления дефектов, проводить оперативный и систематический анализ причин дефектов и выработку корректирующих действий. Разработка метода многомодовой резонансной идентификации и контроля материалов обеспечивает высокий уровень тождественности и подлинности объекта исследования с высокой степенью достоверности на основе выявления и измерения перечня существенных признаков благодаря применению многомодового (до 8 типов колебаний и 24 частотных, амплитудных параметров и параметров добротности) режима работы высокочастотного СВЧ-резонатора.

Резонансная частота и добротность резонатора напрямую зависят от диэлектрических характеристик исследуемых объектов [1–3]. Характеристикой конденсированного вещества (газов, жидкостей, твердых тел) в СВЧ-диапазоне является комплексная диэлектрическая проницаемость образца. Использование резонаторов для изучения этих параметров позволяет существенно повысить чувствительность измерений за счет усиления СВЧ-поля в образце вещества, а также за счет возможности прецизионного измерения частотных сдвигов в резонаторах большой добротности [4]. Образец может занимать весь объем, или часть объема резонатора, или же помещаться в виде небольшого образца в определенном месте резонатора – в максимум электрического СВЧ-поля.

Резонансные методы для исследования веществ отражены в некоторых работах [5–7], но измерения на одной частоте вызывают неоднозначность получаемых результатов.

Предлагаемый нами метод многомодовой резонансной идентификации позволяет избежать данной неоднозначности.

Состояние исследований в данной области. В производственных системах качества идентификация технологических материалов позволяет определить возможные места появления дефектов, проводить оперативный и систематический анализ причин дефектов и выработку корректирующих действий. Важным фактором, влияющим на работоспособность изделий микроэлектроники, является присутствие фоновых, неконтролируемых примесей (технологических примесей). Их наличие в сочетании с изменяющимися условиями эксплуатации может приводить к отказам в работе интегральных микросхем. Применение микроволновой технологии сравнительной идентификации материалов (твердых, жидких, газообразных) для мониторинга исходных (промежуточных) материалов при производстве (эксплуатации) продукции позволяет быстро (время измерения несколько минут) без использования расходных материалов определить с высокой точностью (количество определяемых параметров от 3 до 15) отличие от образца (эталона) как в лабораторных

условиях, так и в непрерывном технологическом процессе, что способствует повышению надежности и увеличению срока эксплуатации изделий.

Современные измерительные методы определения значений показателей для идентификации диэлектрических материалов в микроэлектронике можно условно разделить на оптические (включая спектрометрию), радиометрические, термометрические и ряд других [8–10]. Все используемые на практике в настоящее время измерительные методы трудоемки, а проведение измерений занимает значительное время. Анализ продукции ведущих мировых производителей электронных компонентов (Honeywell, Michelin, Texas Instruments Transense, Motorola, Murata, RFSAW, Fujitsu, Vishay, Epcos и др.) позволяет выявить основные тенденции и перспективы развития метрологического обеспечения качества идентификация технологических материалов микроэлектроники. В стратегической программе исследований технологической платформы «СВЧ технологии», принятой в Российской Федерации, разработка комплексов специального назначения и высокоточного метрологического оборудования (в области СВЧ-радиоприборостроения) отнесена к классу особо важных. В Республике Беларусь, в связи с открытием новых радиофизических специальностей в ряде вузов, наращиванием мощностей ряда предприятий микроэлектроники и радиотехники, актуальны разработка и создание нового класса метрологического оборудования, чему в стандартах и правилах придается первостепенное значение.

Метод активной непараметрической идентификации объектов исследования в многомодовых резонансных СВЧ-системах. Данный метод основан на измерении изменений резонансных характеристик многомодового резонатора:

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_1} = \frac{\epsilon' g}{2};$$

$$\frac{1}{Q_0} - \frac{1}{Q_1} = (\epsilon'') g,$$

где ω_1 и ω_0 – резонансные частоты резонатора (с исследуемым объектом и без него), ГГц;
 ϵ' и ϵ'' – действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости образца;
 Q_0 – добротность пустого резонатора;
 Q_1 – добротность резонатора с исследуемым образцом;
 g – коэффициент заполнения резонатора.

Инженерный расчет резонаторов проводится по диаграмме типов колебаний (рисунок 1), которая представляет собой графическое изображение уравнения

$$(f_p D)^2 = \left(\frac{cx_{lm}}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{cn}{2}\right)^2 \left(\frac{D}{L}\right)^2,$$

где f_p – резонансная частота резонатора, ГГц;
 D – диаметр резонатора, мм;
 L – длина резонатора, мм;
 c – скорость света, м/с;
 n – число полуволн, укладываемых вдоль оси резонатора при резонансе;
 x_{lm} – значения корней Бесселевых функций или их производных в зависимости от типа колебаний.

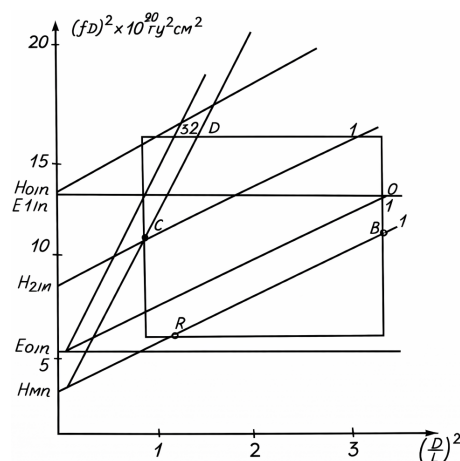


Рисунок 1. – Диаграмма типов колебаний цилиндрического резонатора

Задавая необходимые параметры f_p , D , L и выбрав рабочий тип колебаний (основной тип колебаний, который будет иметь собственную добротность порядка 40 000), выполнили расчет геометрических размеров экспериментального образца резонатора.

Конструкция резонатора. Расчет резонатора проводился на основном типе колебаний H_{11n} . Возбуждение резонаторов на волне H_{11n} ведется с боковой поверхности магнитной связью, то есть петлей (центр петли связи расположен на расстоянии $\lambda/4$ от короткозамыкающей крышки). По результатам расчетов разработана конструкторская документация и изготовлен образец резонатора, макет которого показан на рисунке 2.



Рисунок 2. – Многомодовый неперестраиваемый цилиндрический резонатор

Одной из сложных задач, возникающих при разработке многомодовых резонаторов, является согласование резонатора на нескольких типах колебаний (как на основном, так и на сопутствующих). Для решения этой задачи выполнен расчет оптимального возбуждения многомодовой резонансной СВЧ-системы.

Размеры петли связи подбираются экспериментально на самой высокодобротной моде резонатора (обычно это среднее по индексу n колебание, из присутствующих в резонаторе) для получения КСВ $< 1,1$. Резонатор был «недосвязан» для колебаний с нижним значением индекса n и «пересвязан» для колебания с верхним индексом n .

При измерениях спектральных характеристик многомодового резонатора использовался векторный анализатор цепей Anritsu MS4644B. На рисунке 3 представлен спектр резонансных частот многомодового неперестраиваемого высокодобротного резонатора с широкополосным устройством связи.

На экране векторного анализатора цепей показаны результаты коэффициента отражения четырех типов колебаний высокодобротного резонатора в диапазоне частот 1,7–3,0 ГГц.

С использованием данного многомодового неперестраиваемого высокодобротного резонатора выполнен комплекс исследований характеристик жидких и твердых материалов электродинамическими методами [11].

Проведено исследование электрофизических параметров жесткости воды. Исследовались образцы дистиллированной воды, ультрачистой воды, воды с различной жесткостью. Образцы отличаются друг от друга по электрофизическим параметрам и характеризуются собственной частотой, амплитудой и добротностью многомодового СВЧ-резонатора (рисунок 4).

На рисунке 5 приведены результаты исследования солевой концентрации воды. Исследовались образцы дистиллированной воды с различной концентрацией соли. Образцы отличаются друг от друга по электрофизическим параметрам и характеризуются собственной частотой, амплитудой и добротностью многомодового СВЧ-резонатора.

Установлена зависимость физико-химических характеристик идентифицируемых объектов (концентрации химических растворов) от электродинамических характеристик многомодовых резонансных СВЧ-систем (резонансной частоты и коэффициента поглощения). Как показали исследования, наибольшую эффективность дает применение резонаторов для сравнительных измерений близких по составу образцов или для высокочувствительного контроля различных физических и структурных параметров (концентрации, состава, примесей, плотности и т. д.) жидких сред.

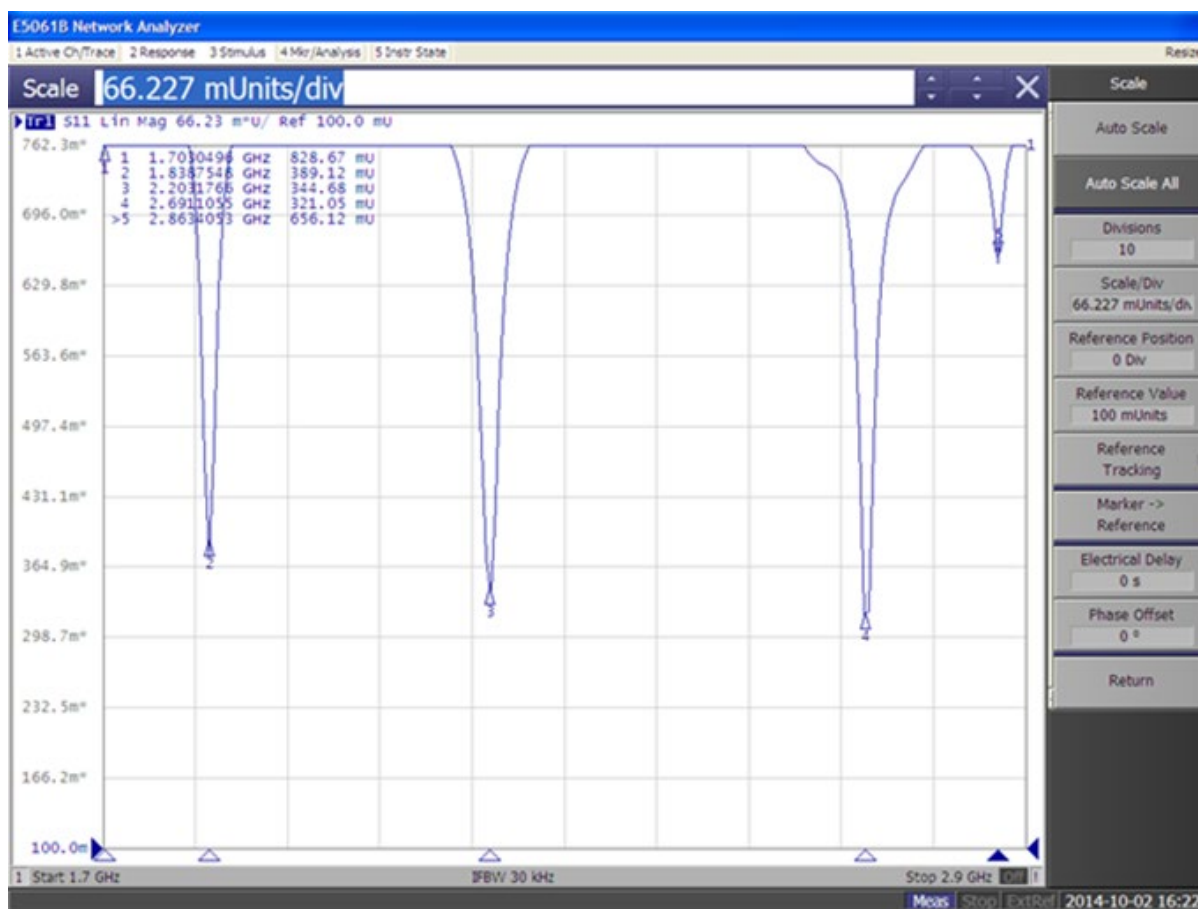


Рисунок 3. – Резонансные частоты многомодового неперестраиваемого высокодобротного резонатора с широкополосным устройством связи

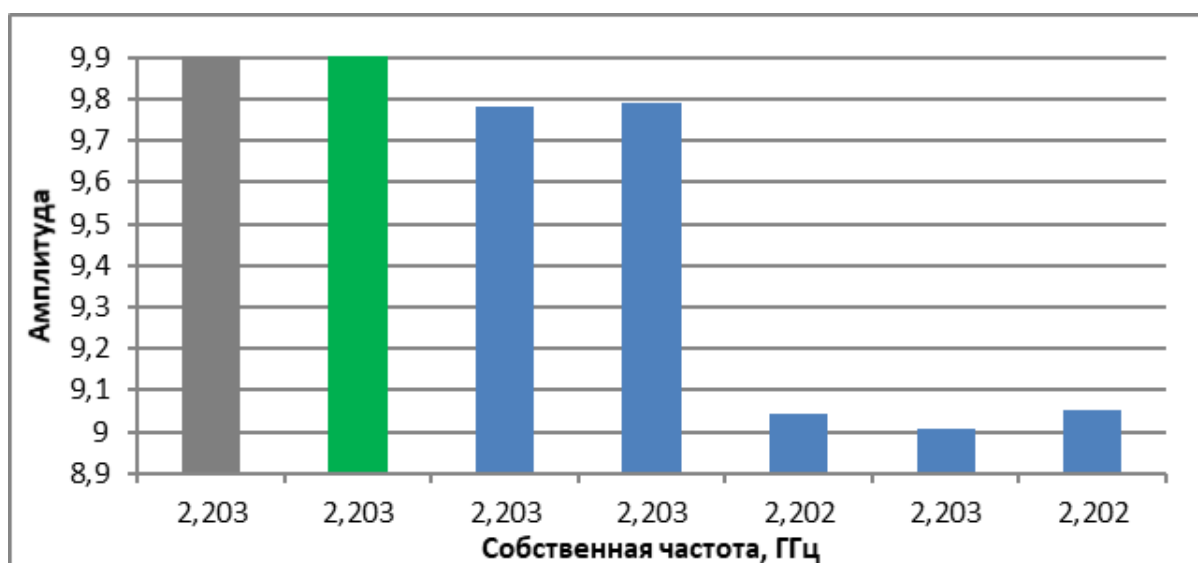


Рисунок 4. – Амплитуды и собственные частоты образцов воды с различной жесткостью



Рисунок 5. – Амплитуды и собственные частоты образцов воды с различной концентрацией соли

Заключение. Выполнен расчет многомодовой резонансной СВЧ-системы и ее оптимального возбуждения. Разработана конструкторская документация, изготовлены резонатор и его устройства связи. Разработаны физико-технические принципы построения измерительного тракта схемы многомодовой резонансной идентификации и контроля материалов. Установлена зависимость физико-химических характеристик идентифицируемых объектов от электродинамических характеристик многомодовых резонансных СВЧ-систем.

Метод многомодовой резонансной идентификации и контроля материалов обеспечивает достоверное подтверждение тождественности и подлинности объекта исследования на основе выявления и измерения комплекса существенных признаков благодаря применению многомодового режима работы высокочастотного СВЧ-резонатора (до 8 типов колебаний и 24 параметра частотных, амплитудных и добротности).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 621 с.
2. Электродинамика специальных высокочастотных резонансных систем и микроволновые технологии / В. А. Карпович, Г. Я. Слепян, В. Н. Родионова и др. // *Фундаментальные и прикладные физические исследования*. 2002–2009 гг.: сб. науч. тр.; под ред. проф. В. Г. Барышевского. – Мн.: БГУ, 2009. – С. 291–321.
3. Комплект измерительных сверхвысокочастотных резонаторов / В. Н. Родионова, В. А. Карпович, О. В. Танана, Т. В. Гаевская // *Приборы и техника эксперимента*. – 2013. – № 3. – С. 1–6.
4. Танана О. В., Карпович В. А., Слепян Г. Я. Метод определения комплексной диэлектрической проницаемости композитных наноматериалов по электродинамическим параметрам СВЧ-резонаторов // *Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика*. – 2013. – № 2. – С. 28–31.
5. Егоров В. И. Резонансные методы исследования диэлектриков на СВЧ // *ПТЭ*. – 2007. – № 2. – С. 5–38.
6. Певнева Н. А., Гусинский А. В., Гурский А. Л. СВЧ метод определения диэлектрических свойств жидкостей // *Доклады БГУИР*. – 2012. – № 5(67). – С. 46–50.
7. Лабутин С. А., Лопаткин А. В. Резонаторная система с в.ч.-измерений комплексной диэлектрической проницаемости материалов // *ПТЭ*. – 1998. – № 3. – С. 166–167.
8. Barsoukov E., MacDonald J. R. *Impedance spectroscopy: theory, experiment, and applications*. – Hoboken: Wiley-Interscience, 2005. – 595 p.
9. Бояршинова А. К., Фишер А. С. *Теория инженерного эксперимента: текст лекций*. – Челябинск: ЮУрГУ, 2006. – 85 с.
10. Dorman J. L., Fionari D., Trons E. // *Advances in Chemical Physics*. – 1997. – Vol. XCVIII. – P. 283–477.
11. Гусинский А. В., Певнева Н. А., Родионова В. Н. Резонансные методы технического контроля и диагностики материалов для устройств микро-, опто- и СВЧ-электроники // III междунар. науч.-техн. конф. «Микро-, опто- и СВЧ-электроника – 2025», 14–17 октября 2025 года, г. Минск / Нац. акад. наук Беларуси, Гос. науч.-производ. объединение «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника»; редкол.: М. В. Богданович, И. В. Семченко, А. Ю. Панарин, А. Л. Чиж. – Минск, 2025. – С. 30–32.

Поступила 12.01.2026

**MICROWAVE TECHNOLOGY
FOR COMPARATIVE IDENTIFICATION OF MATERIALS****A. GUSINSKIY, M. TUMILOVICH, N. PEVNEVA,
V. RODIONOVA, V. SHUTOVICH****(Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk)****O. TANANA****(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)**

A method and the physical-technical principles of active nonparametric identification of research objects in multimode microwave resonant systems have been developed for comparative material identification (solid, liquid, and gaseous). This method enables rapid (measurement time of several minutes) and reagent-free determination of deviations from a reference sample (standard) with high accuracy (the number of determined parameters ranges from 3 to 15) both in laboratory conditions and in continuous technological processes. Its application contributes to increased reliability and extended service life of products through monitoring of initial and intermediate materials during production (or operation).

Keywords: *microwave frequencies, multimode resonators, electrodynamic characteristics, material identification.*

УДК 621.3.083.2, 004.942

DOI 10.52928/2070-1624-2026-46-1-40-46

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСОКОДОБРОТНОГО
БИКОНИЧЕСКОГО ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА**

*д-р техн. наук, проф. А. В. ГУСИНСКИЙ, д-р техн. наук, проф. М. В. ТУМИЛОВИЧ,
канд. техн. наук, доц. Н. А. ПЕВНЕВА, канд. физ.-мат. наук В. Н. РОДИОНОВА,
В. А. ШУТОВИЧ*

(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск)

канд. техн. наук О. В. ТАНАНА

(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

Проведено численное моделирование биконического резонатора (БР) в CST Microwave Studio в частотном диапазоне 24–40 ГГц. Решена краевая задача определения собственных колебаний биконического резонатора. Получена частотная зависимость коэффициентов отражения и передачи биконического резонатора от геометрических размеров.

Ключевые слова: СВЧ-диапазон, СВЧ-резонаторы, биконический резонатор, добротность, коэффициенты отражения и передачи, диэлектрики, относительная диэлектрическая проницаемость, тангенс угла диэлектрических потерь.

Введение. Одной из приоритетных научных задач микро- и нанoeлектроники является поиск и освоение новых материалов для приборов функциональной микро-, опто-, нано- и СВЧ-электроники. В настоящее время радиоэлектроника представляет собой обширную область науки и техники, которая стремительно развивается, охватывая новые сферы применения. Можно выделить следующие направления ее развития: разработка и создание новой элементной базы в уже освоенных частотных диапазонах; освоение новых частотных диапазонов, включая создание радиоэлектронных систем с новыми свойствами и характеристиками, а также элементной базы и средств метрологического обеспечения для них; разработка новых научных и технических решений, обеспечивающих повышение качества продукции, связанной с радиоэлектроникой; совершенствование метрологического обеспечения в целях повышения эффективности управления современными изделиями радиоэлектроники¹. Одной из наиболее важных технических задач является разработка методов и измерительной аппаратуры в миллиметровом диапазоне для измерения параметров новых материалов. В настоящее время точные и надежные бесконтактные методы измерения диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь материалов в широком интервале частот СВЧ- и КВЧ-диапазона разработаны в недостаточной степени. Существующие методы измерения диэлектрической проницаемости материалов с использованием измерительных линий не позволяют в полной мере обеспечить автоматизацию измерений [1].

В соответствии с ГОСТ Р 8.623–2015 методы измерения диэлектрических свойств материалов в СВЧ-диапазоне делятся на две группы: резонансные и широкополосные². Резонансные методы используют для исследования диэлектрических свойств вещества в диапазоне частот от 0,6 до 120 ГГц. Они основываются на измерении изменения параметров резонатора: сдвига его резонансной частоты и уменьшения добротности при контакте с исследуемым образцом³.

Резонаторы являются важнейшими узлами радиотехнических систем СВЧ: на их основе строятся многие частотно-избирательные устройства. Широкое применение резонаторы нашли в измерительной технике СВЧ-диапазона для измерения различных электрических и неэлектрических величин [2].

Резонансные методы характеризуются высокой точностью и применяются при измерении материалов с малыми потерями [3]. В резонансных методах измерение параметров происходит только на собственных резонансных частотах используемого СВЧ-резонатора. При размещении в полости резонатора исследуемого образца происходит изменение его собственной резонансной частоты и добротности, что и позволяет вычислить значения относительной диэлектрической проницаемости ϵ и тангенса угла диэлектрических потерь $\text{tg}\delta$ [4]. Традиционно в данных методах используются металлические объемные резонаторы (прямоугольные или цилиндрические).

¹ Гусинский А. В. Средства измерений миллиметрового диапазона длин волн на основе обобщенной модели многополосника: дис. д-ра техн. наук: 05.11.08. – Мн., 2022. – 279 л.

² ГОСТ Р 8.623–2015. Относительная диэлектрическая проницаемость и тангенс угла диэлектрических потерь твердых диэлектриков. Методики измерений в диапазоне сверхвысоких частот. – М.: Стандартинформ, 2016. – 35 с.

³ Measuring Dielectric Properties Using Keysight's Materials Measurement Solutions / Keysight Technologies. – URL: <https://www.rftest.co.nz/assets/Downloads/Accessible/Keysight/72a0707b1f/KEYSIGHT-Materials-Measurement.pdf>, свободный (дата обращения: 24.11.2025).

Моделирование биконического резонатора в миллиметровом диапазоне длин волн. С целью повышения добротности и упрощения установки в резонатор исследуемых образцов мы разработали модифицированную конструкцию резонатора на отрезках нерегулярных волноводов, сечение которых уменьшается от центра к краям, – так называемый биконический резонатор. На рисунке 1 приведены обозначения длин конической L_1 и цилиндрической L_2 частей БР.

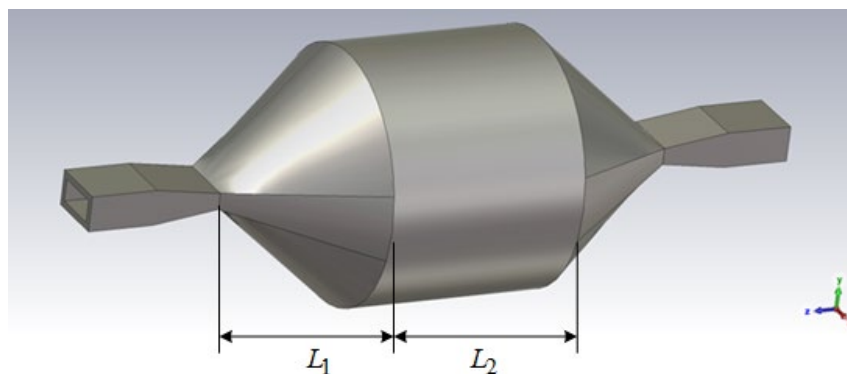


Рисунок 1. – Биконический резонатор

Выбор биконической формы резонатора обусловлен его повышенной добротностью (Q) по сравнению с цилиндрическими резонаторами, а также простотой размещения исследуемого образца.

Коническая форма обеспечивает плавное изменение импеданса и оптимальное распределение поля, что минимизирует краевые эффекты и омические потери на торцевых стенках, в отличие от плоских торцевых стенок у цилиндрических резонаторов. Высокая собственная добротность (Q_0) резонатора критически важна для точного измерения малых диэлектрических потерь исследуемых материалов.

Биконическая форма используется в сочетании с центральной цилиндрической частью, формируя резонансную камеру. Цилиндрическая центральная камера разделена на две части, одна из которых плотно вставляется в другую на регулируемое расстояние. Это позволяет варьировать объем резонатора, и, соответственно, изменять резонансную частоту. Данное конструктивное решение упрощает ввод и позиционирование исследуемых образцов внутри резонатора. Также для удобства работы с объектами диаметр одной цилиндрической вставки выбран равным 36 мм, другой – 35 мм. Толщина стенки составляет 1 мм. Кроме того, данная геометрия позволяет использовать конус как элемент настройки. С помощью него можно влиять на типы мод, распространяющиеся внутри резонатора.

Основным преимуществом использования данного резонатора является то, что вектор E напряженности электромагнитного поля перпендикулярен направлению распространения электромагнитной волны. Резонаторы данного типа можно создавать на волноводах любого сечения. На практике наиболее часто применяют резонаторы на базе волновода круглого сечения с азимутально-симметричными колебаниями H_{0np} .

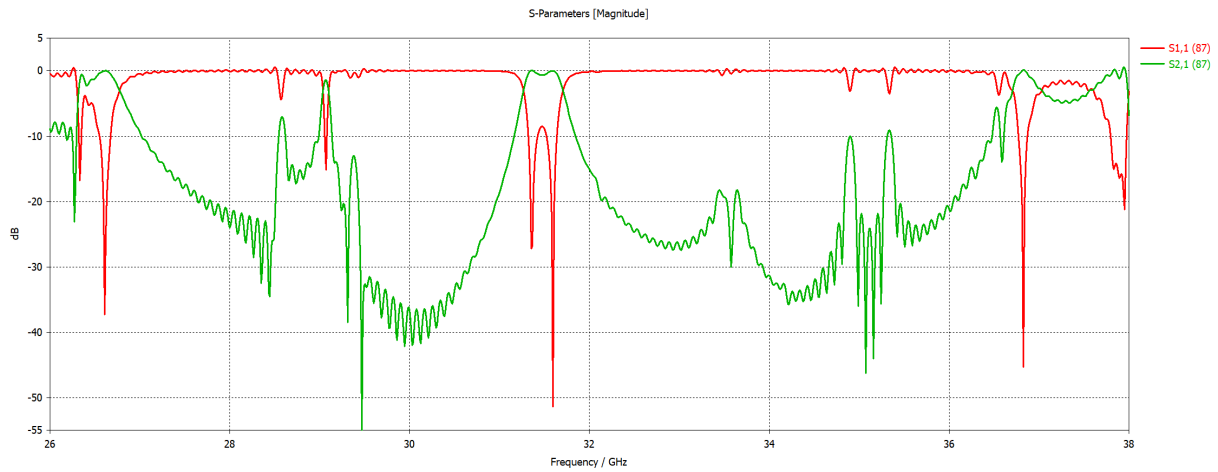
В таких резонаторах удастся получить максимально высокую добротность благодаря малым продольным токам в металлических стенках. Наличие отверстий в запердельных областях обеспечивает возможность размещения исследуемых образцов во внутренней полости резонатора, что и способствует применению биконических резонаторов в измерительной технике.

При математическом моделировании биконического резонатора можно использовать упрощенные выражения для расчета собственных частот с большими углами при вершинах конических элементов по двум симметричным точкам, расположенным на границах взаимно пересекающихся частичных областей, имеющих форму сферического сектора.

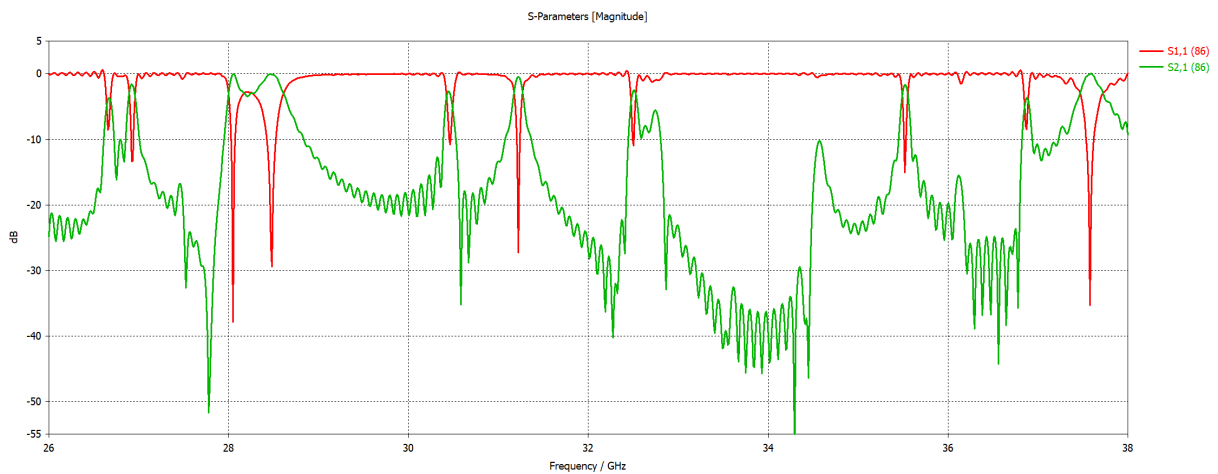
Результаты математического моделирования БР. Целью настоящей работы являлось вычисление собственных частот биконического резонатора. Получено уравнение для собственных частот биконического резонатора для азимутально-симметричного поперечного электрического поля при произвольном числе пар точек коллокации. Уравнение сводится к двум уравнениям, решение которых требует гораздо меньших вычислительных затрат по сравнению с исходным. В решениях одного из двух уравнений допускаются моды, симметричные относительно плоскости симметрии резонатора, а решения другого допускают антисимметричные моды. Применение метода эталонных уравнений в рамках квазирегулярного одномодового приближения позволяет получать приближенные оценки значений резонансной частоты азимутально-симметричных колебаний БР [5; 6].

Моделирование БР в диапазоне частот 24–40 ГГц выполнялось в пакете CST Microwave Studio (подпрограмма расчета в частотной области Frequency Domain Solver для решения широкополосных задач).

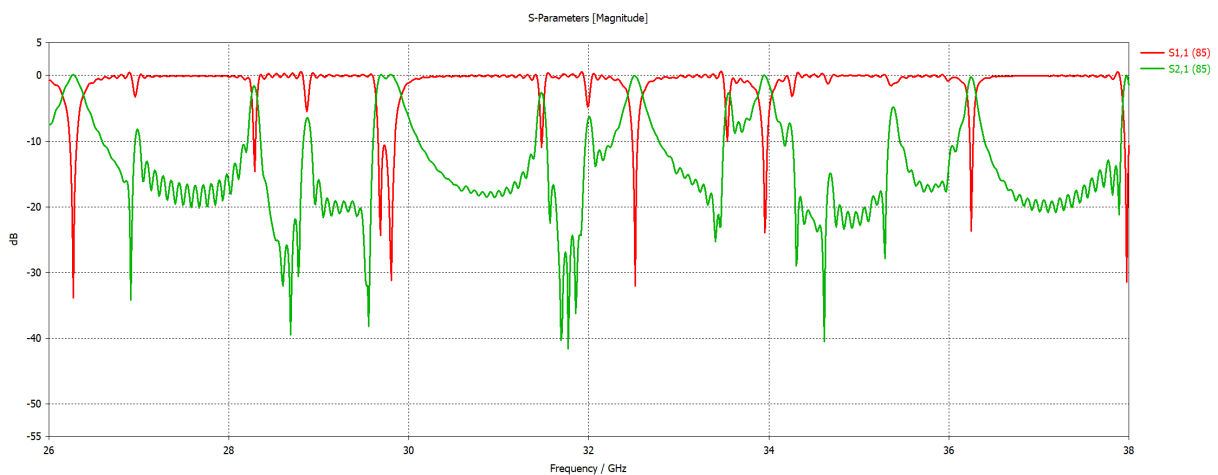
Расчет проводился для резонатора с внутренним диаметром $D = 36$ мм, постоянным значением $L_1 = 12$ мм и изменяющимся L_2 . Результаты моделирования представлены на рисунке 2 (красная кривая соответствует комплексному коэффициенту отражения S_{11} , зеленая – коэффициенту передачи S_{21}).



а



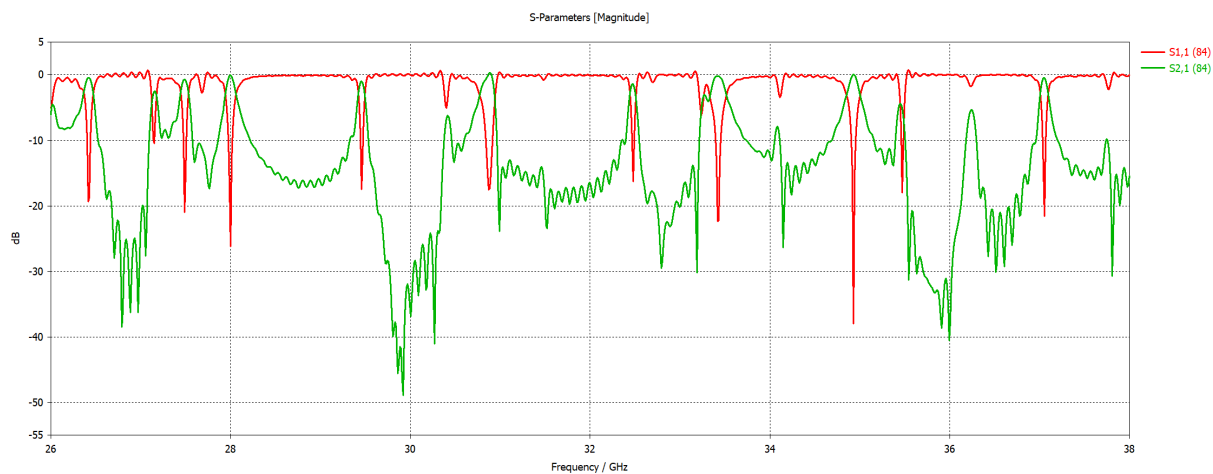
б



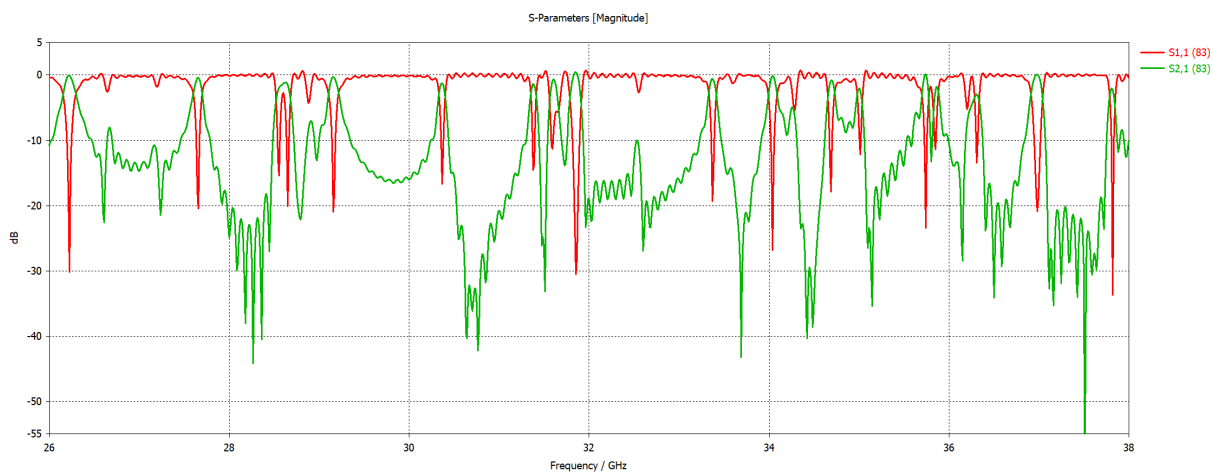
в

а – при $L_2 = 4$ мм; б – при $L_2 = 6$ мм; в – при $L_2 = 8$ мм

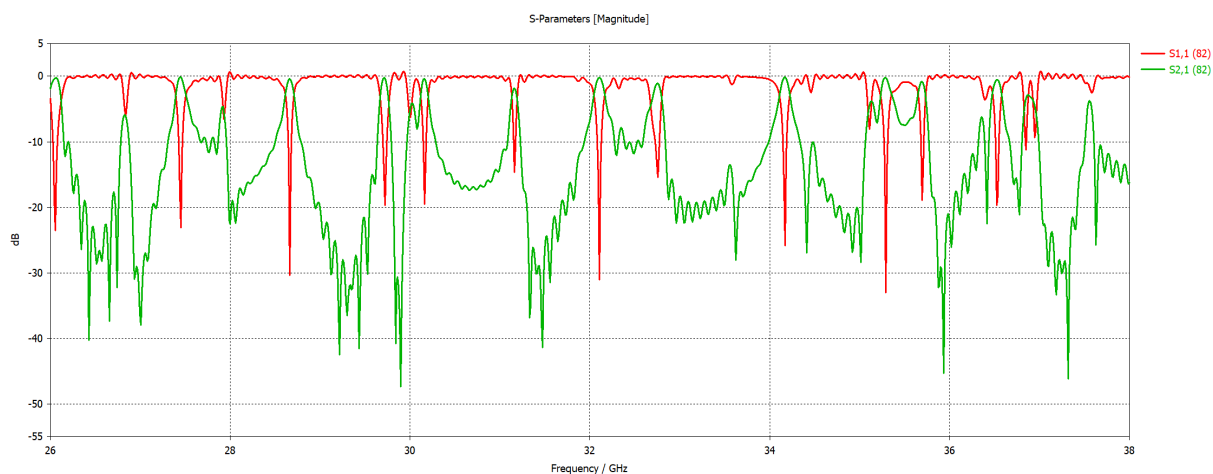
Рисунок 2. – Результаты моделирования частотных зависимостей коэффициентов отражения и передачи биконического резонатора (начало)



z



д



e

z – при $L_2 = 10$ мм; д – при $L_2 = 12$ мм; e – при $L_2 = 14$ мм

Рисунок 2. – Результаты моделирования частотных зависимостей коэффициентов отражения и передачи биконического резонатора (окончание)

Из проведенных расчетов прослеживаются следующие зависимости:

1. При увеличении L_1 снижаются пики параметра S_{11} . Они находятся в диапазоне 0 ... -20дБ.
2. При увеличении L_2 :
 - усиливается «рябь» параметра S_{11} возле отметки 0 дБ;
 - снижаются пики параметра S_{11} ;
 - растет количество пиков параметра S_{11} .

Для проходных измерительных резонаторов характерно применение слабой связи с трактом, обеспечивающей коэффициент передачи от резонатора ($25 \div 35$) дБ, что подтверждается расчетами. Лучшие результаты достигнуты для отверстия связи $7,2 \times 0,5$ мм при размерах резонатора $D = 36$ мм, $L_1 = 12$ мм и $L_2 = 8$ мм. Собственная добротность такого резонатора на колебании H_{013} составляет 90 000, а нагруженная добротность (при условии идеального согласования с трактом) – около 30 000. На рисунке 3 приведены частотно-зависимые комплексные коэффициенты передачи (S_{21}) и отражения (S_{11}) такого БР.

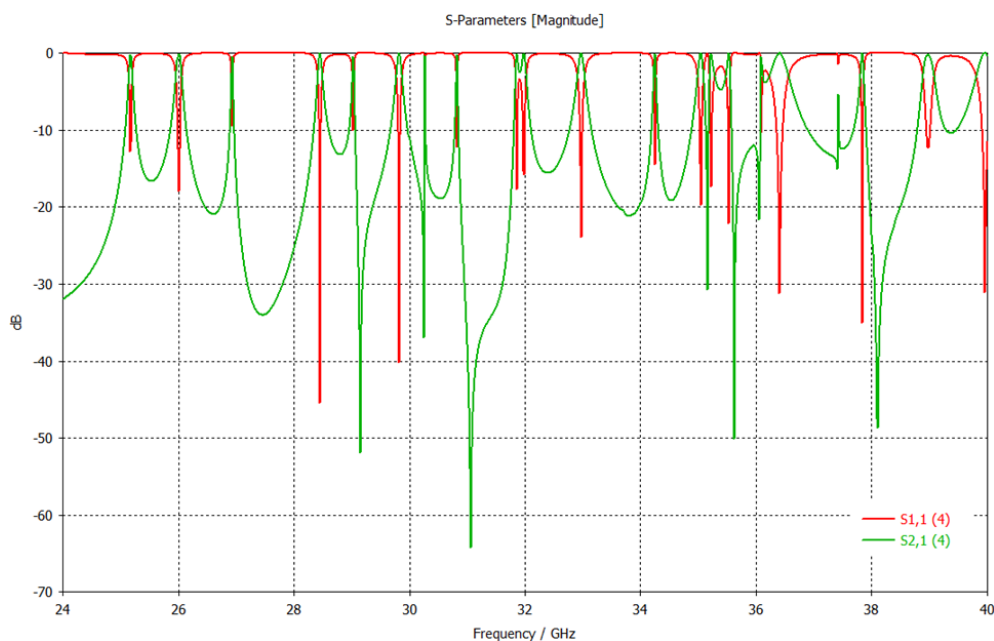


Рисунок 3. – Частотная зависимость коэффициентов отражения и передачи биконического резонатора, выбранного для макетирования

С увеличением добротности наблюдается рост плотности спектра собственных колебаний биконического резонатора. Биконические резонаторы могут быть реализованы на волноводах с различным сечением, однако на практике чаще всего используются резонаторы на основе волноводов с круглым сечением, поддерживающих азимутально-симметричные колебания H_{0np} . В таких резонаторах достигается максимальная добротность, что обусловлено минимальными продольными токами в металлических стенках. При достижении диаметром отверстия связи БР определенных предельных значений, которые могут быть охарактеризованы значением радиуса основания конических составляющих резонатора, добротность резонатора значительно снижается. В разработанной нами конструкции резонатора при измерениях на колебаниях типа H_{0np} образец выполняется в виде цилиндрического диска и располагается между разъемными частями цилиндрической полости БР.

Вычисление $\text{tg} \delta$ сводится к измерению добротности резонатора с веществом и вычислению Q_m . Для определения Δ необходимо измерить добротность пустого резонатора.

Известно следующее выражение для Q [7]:

$$Q = \frac{pD + \frac{1}{\varepsilon} L}{\frac{\Delta}{a} \left(\frac{1}{\beta^2 + k^2} \right) \left[k^2 (pD + L) + \beta p + \beta_0^2 \right] + pD \text{tg} \delta}, \quad (1)$$

где $D = 2d - \frac{1}{\beta} \sin 2\beta d$;

$$L = 2l - \frac{1}{\beta_0} \sin 2\beta_0 l;$$

$$p = \left(\frac{\sin \beta_0 l}{\sin \beta d} \right)^2;$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{кр}};$$

α – радиус резонатора, мм;

d – толщина диэлектрика, мм;

l – длина части резонатора, заполненной воздухом, мм;

Δ – глубина проникновения поля, мм;

β – фазовая постоянная в части резонатора, заполненной диэлектриком;

β_0 – фазовая постоянная в части резонатора, заполненной воздухом;

ϵ – диэлектрическая проницаемость.

Когда потери в диэлектрике пренебрежимо малы, $Q = Q_m^1$ (Q_m^1 – добротность, которую имел бы резонатор при заполнении его идеальным диэлектриком без потерь, имеющим такую же относительную диэлектрическую проницаемость, как и реальный диэлектрик). Если потери малы, можно считать, что $Q_m^1 \approx Q_m$. Экспериментально измеряется Q_m . Из формулы (1) при измеренном Q_m можно вычислить Δ .

Заключение. Решена краевая задача определения собственных колебаний биконического резонатора. Получены зависимости электродинамических характеристик комплексных коэффициентов передачи (S_{21}) и отражения (S_{11}) биконического резонатора от его геометрических параметров. Применение метода эталонных уравнений в рамках квазирегулярного одномодового приближения позволило получить приближенные оценки значений резонансной частоты азимутально-симметричных колебаний БР. Абсолютная погрешность вычислений резонансной частоты для БР с углом при вершине 45° не превышает 3 %, а погрешность вычисления относительного изменения частоты при этом не превышает 0,5 %, что удовлетворяет применению такого резонатора в измерительной технике СВЧ-диапазона для измерения относительной диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Певнева Н. А., Гурский А. Л., Кострикин А. М. Использование метода цилиндрического стерженька и векторного анализатора цепей для определения диэлектрической проницаемости материалов в СВЧ диапазоне // Доклады БГУИР. – 2019. – № 1 (119). – С. 56–61.
2. Улучшенный резонаторный метод для измерения комплексной диэлектрической проницаемости материалов / М. П. Пархоменко, Д. С. Калёнов, Н. А. Федосеев и др. // Радиотехника и электроника. – 2017. – Т. 62, № 7. – С. 651–656.
3. Егоров В. Н. Резонансные методы исследования диэлектриков на СВЧ // Приборы и техника эксперимента. – 2007. – № 2. – С. 5–38.
4. Беляев А. А., Беспалова Е. Е., Паярель С. М. Особенности измерения диэлектрических характеристик с помощью щелевого резонатора // Труды ВИАМ. – 2017. – № 9 (57). – Ст. 8. – DOI: [10.18577/2307-6046-2017-0-9-8-8](https://doi.org/10.18577/2307-6046-2017-0-9-8-8).
5. Простой метод определения собственных частот биконического резонатора / М. В. Андреев, О. О. Дробахин, Д. Ю. Салтыков и др. // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2017. – Т. 60, № 12. – С. 717–724.
6. Применение теории R-функций к задачам дифракции термоупругих волн на объектах сложной формы / В. Ф. Кравченко, В. И. Пустовойт, В. Л. Рвачев, Н. Д. Сизова // Доклады Российской Академии наук. – 2000. – Т. 372, № 2. – С. 487–489.
7. Шестопапов В. П., Яцук К. П. Методы измерения диэлектрической проницаемости веществ на сверхвысоких частотах // Успехи физических наук. – 1961. – Т. 74, вып. 4. – С. 721–755.

Поступила 03.02.2026

MODELING OF A HIGH-Q BICONICAL MEASURING RESONATOR

**A. GUSINSKIY, M. TUMILOVICH, N. PEVNEVA,
V. RODIONOVA, V. SHUTOVICH**

(Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk)

O. TANANA

(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

A numerical simulation of a biconic resonator (BR) was performed using the finite difference method in the frequency range of 24–40 GHz. An investigation was conducted on the dependence of the resonator's

eigenfrequencies on the angle at the vertices of the conical elements. The results of the studies were compared with those obtained from finite element method calculations. A boundary value problem for determining the eigenmodes of the biconic resonator was solved. The frequency dependence of the reflection and transmission coefficients of the biconic resonator was obtained.

Keywords: *microwave range, microwave resonators, biconic resonator, Q-factor, reflection and transmission coefficients, dielectrics, relative permittivity, tangent of the dielectric loss angle.*

УДК 621.371: 550.837.6

DOI 10.52928/2070-1624-2026-46-1-47-54

**ЗАКОНОМЕРНОСТИ ДВУХВОЛНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН СО СРЕДОЙ НАД УГЛЕВОДОРОДАМИ***канд. техн. наук, доц. В. Ф. ЯНУШКЕВИЧ, И. С. РУСЕЦКИЙ,**В. И. РАСКИН, Д. С. СИВАЦКИЙ**(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)**канд. техн. наук, доц. К. БАБАМУРАТОВ**(Термезский государственный университет инженерии и агротехнологий, Узбекистан)*

Проведен анализ взаимодействия электромагнитных волн с поверхностным слоем над углеводородами в режиме двухволнового воздействия с преобладанием низкочастотной составляющей излучающего сигнала. Исследованы действительные части и фазы суммарной и разностной компонент тензоров диэлектрической проницаемости поверхностного слоя над углеводородами. Определены зависимости модулей и фаз поверхностного импеданса среды над углеводородами от частоты высокочастотной составляющей излучающего сигнала. Проведен расчет частот электронно-циклотронного и электронно-плазменного резонансов, которые позволяют повысить точность поиска месторождений нефти и газа за счет расширения режимов тестирования. Установлено, что для двухволнового режима отсутствуют резонансы модулей поверхностного импеданса поверхностного слоя над углеводородами в отличие от режимов одночастотного взаимодействия. Полученные результаты моделирования характеристик поверхностного слоя над углеводородами можно рекомендовать для применения в радиотехнических системах для георазведки углеводородных залежей.

Ключевые слова: углеводородная залежь, поверхностный слой, двухволновой сигнал, электромагнитные волны.

Введение. Актуальность разработки методов поиска и идентификации месторождений нефти и газа обусловлена их ключевой ролью в экономическом развитии государства. Поиск новых перспективных объектов требует применения современных методов исследований, таких как CSEM. Данные методы особенно эффективны для обнаружения залежей, поскольку электрическое сопротивление заполненных углеводородами резервуаров на порядок выше, чем у резервуаров, заполненных рассолом [1]. Метод зондирования становлением поля в ближней зоне используется для исследования геологических разрезов и показал высокую эффективность при проведении нефтегазописковых работ в комплексе с сейсморазведочными методами [2]. Технология электромагнитной разведки и мониторинга широко применяется в таких областях, как добыча угля, воды, нефти, газа, геотермальной энергии, инженерия, разработка ресурсов, а также в научных и экологических исследованиях [3]. Широко применяются методы электрорезонансного зондирования в экологических, геолого-геофизических и инженерно-геологических исследованиях [4]. Апробированы методы, основанные на сравнении характеристик антенных излучателей, имеющих противоположное направление вращения вектора поляризации, и последующей оценке входных сопротивлений и/или коэффициента эллиптичности [5].

Получили распространение технологии, в рамках которых в качестве альтернативного метода исследования природы «воздушной волны» предлагается использование переходной CSEM и анализ соответствующих временных рядов [6]. Достоверность обнаружения углеводородных залежей (УВЗ) можно повысить за счет регистрации их собственного излучения [7]. Методы на основе применения двухчастотных, модулированных и импульсных сигналов расширяют возможности диагностики поверхностного профиля над углеводородами [8]. Данные методы актуальны для систем мониторинга подземных хранилищ газа [9]. Анализ двухчастотного взаимодействия электромагнитных волн (ЭМВ) с анизотропными средами над углеводородами в низкочастотном и высокочастотном режимах сигнала приведен в работе [10].

Изучены характеристики среды над скоплениями углеводородов при воздействии частотно-модулированных сигналов в зависимости от несущей частоты, индекса частотной модуляции для правой и левой поляризации ЭМВ [11]. Исследовано влияние изменения концентрации частиц на частотные характеристики коэффициентов отражения от поверхности анизотропных сред над углеводородами [12]. Результаты экспериментов позволили получить удовлетворительные данные для интересующих глубин, которые доказывают необходимость различения горизонтальной и вертикальной проводимостей для максимально согласованной 3D-инверсии CSEM [13].

Важно обосновать выбор алгоритмов интерпретации, особенно учитывая, что процедуры прямого моделирования электромагнитного зондирования с контролируемым источником, как правило, существенно ограничены и не получили широкого распространения [14]. Комплексирование методов разведки повышает

точность обнаружения УВЗ [15; 16]. При исследовании поверхностных слоев над углеводородами учитываются тензорные свойства диэлектрической проницаемости среды [17; 18].

Методика исследований. Целью данной работы является установление закономерностей поведения характеристик поверхностного слоя над УВЗ в режиме воздействия на него двухволновой ЭМВ.

Для разработки радиотехнических методов поиска углеводородов представляет интерес установление отличий двухчастотного и двухволнового режимов взаимодействия ЭМВ с приповерхностным геологическим слоем над углеводородами.

Рассмотрим взаимодействие в режиме двухволновой ЭМВ вида

$$e(t) = e_1(t, z) + e_2(t, z); \quad (1)$$

$$e_1(t) = E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1 - k_1 z); \quad (2)$$

$$e_2(t) = E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2 - k_2 z), \quad (3)$$

где $E_1, E_2, \omega_1 = 2\pi f_1, \omega_2 = 2\pi f_2$ – амплитуды и частоты двух ЭМВ соответственно;

φ_1, φ_2 – начальные фазы;

k_1, k_2 – волновые числа первой и второй ЭМВ;

z – направление распространения радиоволн.

Следует отметить принципиальное отличие двухволновой ЭМВ от двухчастотного сигнала. Формирование сигнала вида (1) осуществляется двумя независимыми источниками колебаний, которые генерируют две ЭМВ, распространяющиеся в среде со своими значениями волновых чисел k_1 (2) и k_2 (3).

Режим двухчастотного взаимодействия характеризуется источником ЭМВ, генерирующим сигнал в виде суммы двух колебаний [8]. Таким образом, отличие данных режимов заключается в том, что в режиме двухволновой ЭМВ осуществляется пространственное взаимодействие анизотропной среды и зондирующего сигнала.

Был проведен анализ изменения электродинамических параметров среды при применении двух принципиально отличающихся режимов взаимодействия. Тензор диэлектрической проницаемости среды над УВЗ представлен в [19]. Рассмотрено взаимодействие ЭМВ с залежью для случая воздействия двухволнового сигнала в режиме мощного НЧ-колебания с коэффициентами отношения амплитуд и частот

$$\begin{cases} k_E \ll 1; \\ k_\omega \ll 1. \end{cases} \quad (4)$$

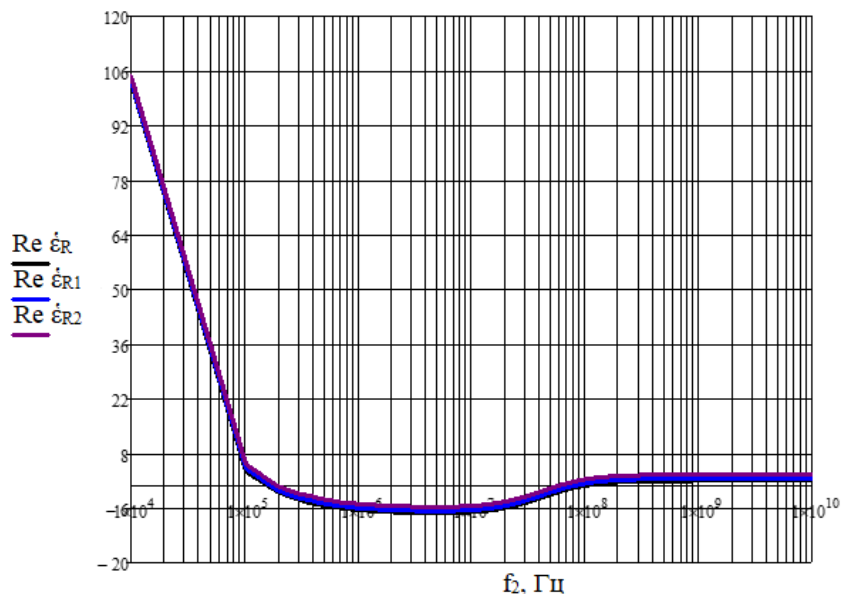
Сопrotивление поверхностного слоя над углеводородами представляет собой симметричную матрицу. В результате анализ сводится к определению двух компонент, которые рассчитываются по следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{11} = \dot{Z}_{22} &= -\frac{1}{2j\sqrt{\dot{\epsilon}_R \dot{\epsilon}_L}} (\sqrt{\dot{\epsilon}_R} - \sqrt{\dot{\epsilon}_L}); \\ \dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} &= \frac{1}{2\sqrt{\dot{\epsilon}_R \dot{\epsilon}_L}} (\sqrt{\dot{\epsilon}_R} + \sqrt{\dot{\epsilon}_L}). \end{aligned} \quad (5)$$

Для расчетов использованы компоненты тензора $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3$; комбинационные составляющие тензора для правой и левой поляризации ЭМВ $\dot{\epsilon}_R, \dot{\epsilon}_L$; гиротропная частота ω_{Ti} ; плазменная частота ω_{Pi} , частота столкновительных процессов ν_i ; относительная диэлектрическая проницаемость анизотропной среды $\dot{\epsilon}_r$; проводимость поверхностного слоя σ_r ; диэлектрическая постоянная ϵ_0 [8].

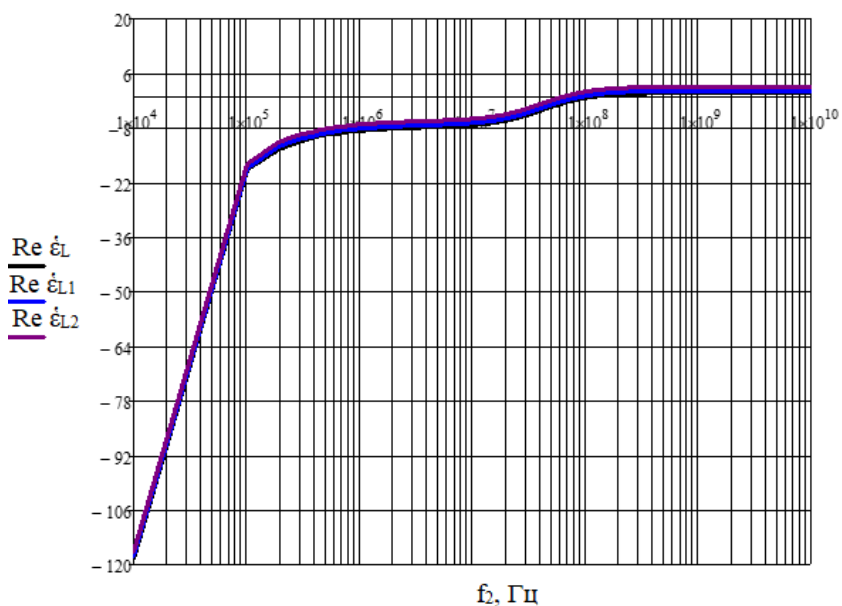
Результаты исследований. Теоретический анализ действительных частей суммарной и разностной компонент тензоров диэлектрической проницаемости поверхностного слоя над углеводородами выполнен для разности начальных фаз двух ЭМВ $\Delta\varphi = 0$ [19]. Данные зависимости показаны на рисунках 1, 2.

Как видно из рисунка 1, действительная составляющая $\text{Re} \dot{\epsilon}_R$ имеет две точки перехода через нуль на частотах $f_{2\Pi}$ и $f_{2\Pi}$, соответствующих электронному циклотронному и электронному плазменному резонансам.



$\text{Re}(\dot{\epsilon}_R(f_2))$ – для $\epsilon_r = 10, k_\omega = 10^{-1}, k_E = 10^{-1}$; $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{R1}(f_2))$ – для $\epsilon_r = 15, k_\omega = 10^{-1}, k_E = 10^{-1}$;
 $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{R2}(f_2))$ – для $\epsilon_r = 25, k_\omega = 10^{-1}, k_E = 10^{-1}$

Рисунок 1. – Зависимости действительной части суммарной компоненты тензора диэлектрической проницаемости поверхностного слоя над углеводородами от частоты f_2 ($N_e = 10^{16} \text{ м}^{-3}, N_i = 10^{18} \text{ м}^{-3}$)



$\text{Re}(\dot{\epsilon}_L(f_2))$ – для $\epsilon_r = 10, k_\omega = 10^{-1}, k_E = 10^{-1}$; $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{L1}(f_2))$ – для $\epsilon_r = 15, k_\omega = 10^{-1}, k_E = 10^{-1}$;
 $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{L2}(f_2))$ – для $\epsilon_r = 25, k_\omega = 10^{-1}, k_E = 10^{-1}$

Рисунок 2. – Зависимости действительной части разностной компоненты тензора диэлектрической проницаемости поверхностного слоя над углеводородами от частоты f_2 ($N_e = 10^{16} \text{ м}^{-3}, N_i = 10^{18} \text{ м}^{-3}$)

В работе [8] приведены результаты исследований для концентраций электронов и ионов $N_e = 10^{16} \text{ м}^{-3}, N_i = 10^{16} \text{ м}^{-3}$. Был проведен расчет частот электронно-циклотронного и электронно-плазменного резонансов, представленных в таблице (при концентрациях частиц $N_e = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ и $N_i = 10^{18} \text{ м}^{-3}$).

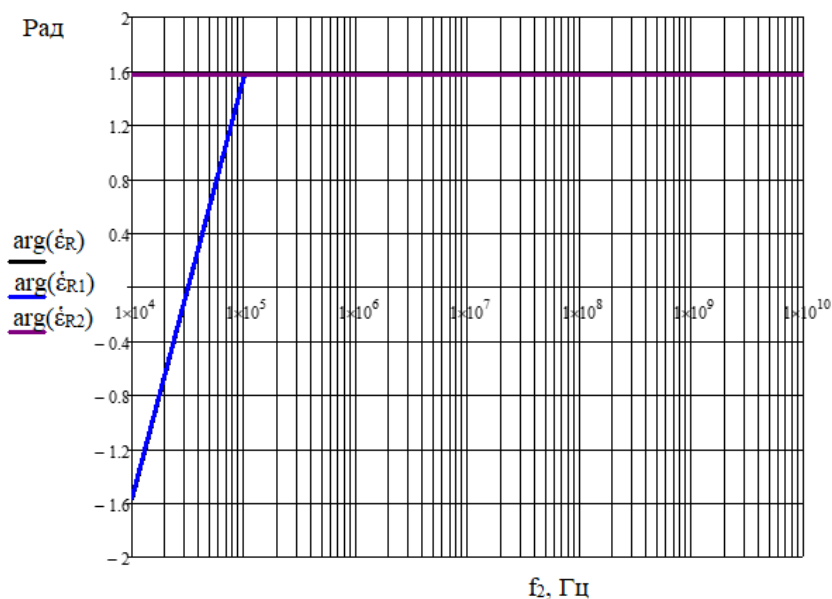
Таблица. – Расчетные значения частот f_2 бигармонического сигнала, при которых $\text{Re}(\dot{\epsilon}_R(f_2)) = 0$

k_ω	k_E	ϵ_r	$f_{2ц}$, Гц	$f_{2п}$, Гц
10^{-1}	10^{-1}	10	$15,1 \cdot 10^4$	$114 \cdot 10^6$
10^{-1}	10^{-1}	15	$16,1 \cdot 10^4$	$90 \cdot 10^6$
10^{-1}	10^{-1}	20	$17,5 \cdot 10^4$	$75 \cdot 10^6$
10^{-3}	10^{-1}	25	$18,5 \cdot 10^4$	$65 \cdot 10^6$
10^{-3}	10^{-1}	30	$20,0 \cdot 10^4$	$55 \cdot 10^6$

Установлено, что по сравнению с двухчастотным режимом происходит увеличение частот электронно-циклотронного и электронно-плазменного резонансов. Частоты электронно-циклотронного и электронно-плазменного резонансов находятся в диапазоне $150 \dots 200$ кГц и $55 \dots 114$ МГц соответственно.

Приведенные графики показывают, что anomальное поведение напряженности поля ЭМВ над УВЗ следует ожидать на частотах, соответствующих $f_{2ц}$ и $f_{2п}$. Отражение сигнала от поверхностного слоя над углеводородами будет наблюдаться на всех частотах, кроме частот резонансного взаимодействия. Путем изменения соотношения частот и амплитуд двух сигналов можно получить резонансные эффекты взаимодействия, причем в роли одного из сигналов может быть применена акустическая волна [8].

Фаза комбинационного элемента тензора диэлектрической проницаемости почвенно-грунтового слоя над углеводородами для правой поляризации (рисунок 3) изменяется только для $\epsilon_r = 15$ в диапазоне частот $f_2 = (10^4 \dots 10^5)$ Гц (для левой поляризации зависимости идентичны).

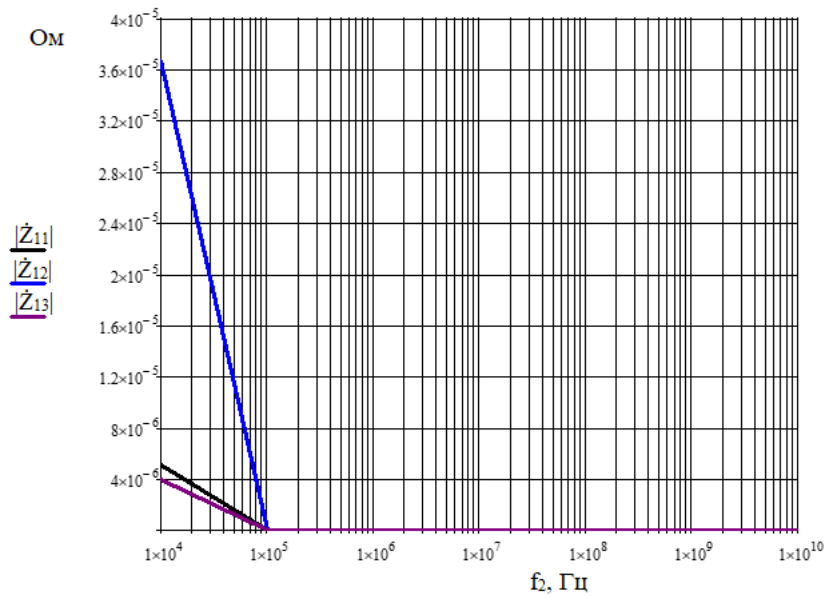


$\arg(\dot{\epsilon}_R(f_2))$ – для $\epsilon_r = 10$, $k_\omega = 10^{-1}$, $k_E = 10^{-1}$; $\arg(\dot{\epsilon}_{R1}(f_2))$ – для $\epsilon_r = 15$, $k_\omega = 10^{-1}$, $k_E = 10^{-1}$;
 $\arg(\dot{\epsilon}_{R2}(f_2))$ – для $\epsilon_r = 25$, $k_\omega = 10^{-1}$, $k_E = 10^{-1}$

Рисунок 3. – Зависимости фазы суммарной компоненты тензора диэлектрической проницаемости поверхностного слоя над углеводородами от частоты f_2 ($N_e = 10^{16} \text{ м}^{-3}$, $N_i = 10^{18} \text{ м}^{-3}$)

Результаты моделирования зависимости модуля и фазы компонент поверхностного импеданса поверхностного слоя над углеводородами \dot{Z}_{11} и \dot{Z}_{21} от частоты f_2 показаны на рисунках 4–7. Для модуля \dot{Z}_{11} происходит влияние данной частоты в диапазоне $f_2 = (10^4 \dots 10^5)$ Гц, причем для концентраций $N_e = 10^{16} \text{ м}^{-3}$, $N_i = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ зависимости модуля и фазы компонент поверхностного импеданса поверхностного слоя над углеводородами \dot{Z}_{11} имеют идентичный вид, за исключением численных значений. Фаза компоненты поверхностного импеданса \dot{Z}_{11} изменяется в диапазоне частот $f_2 = (10^4 \dots 10^5)$ Гц для $\epsilon_r = 15$

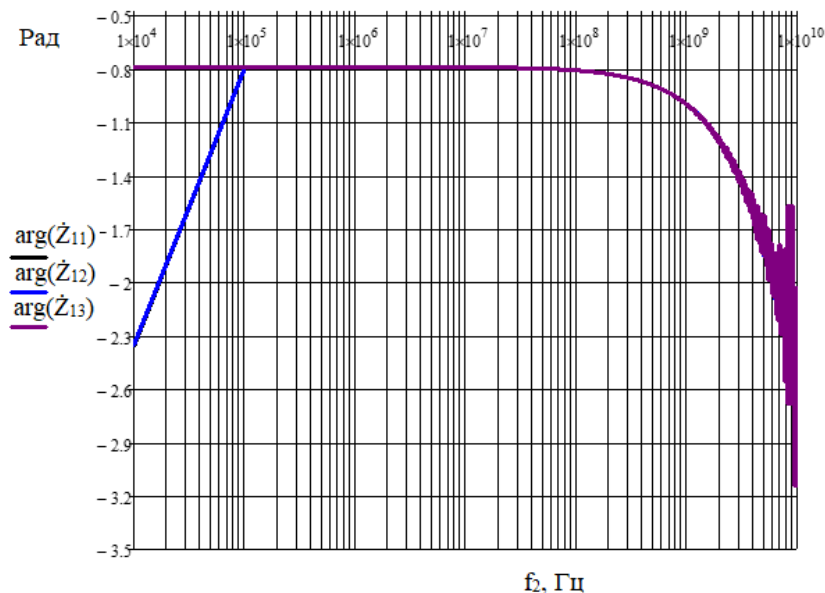
и в диапазоне частот $f_2 = (10^8 \dots 10^{10})$ Гц для всех значений диэлектрической проницаемости поверхностного слоя над углеводородами.



$$|\dot{Z}_{11}(f_2)| \text{ — для } \epsilon_r = 10, k_\omega = 10^{-1}, k_E = 10^{-1}; \quad |\dot{Z}_{12}(f_2)| \text{ — для } \epsilon_r = 15, k_\omega = 10^{-1}, k_E = 10^{-1};$$

$$|\dot{Z}_{13}(f_2)| \text{ — для } \epsilon_r = 25, k_\omega = 10^{-1}, k_E = 10^{-1}$$

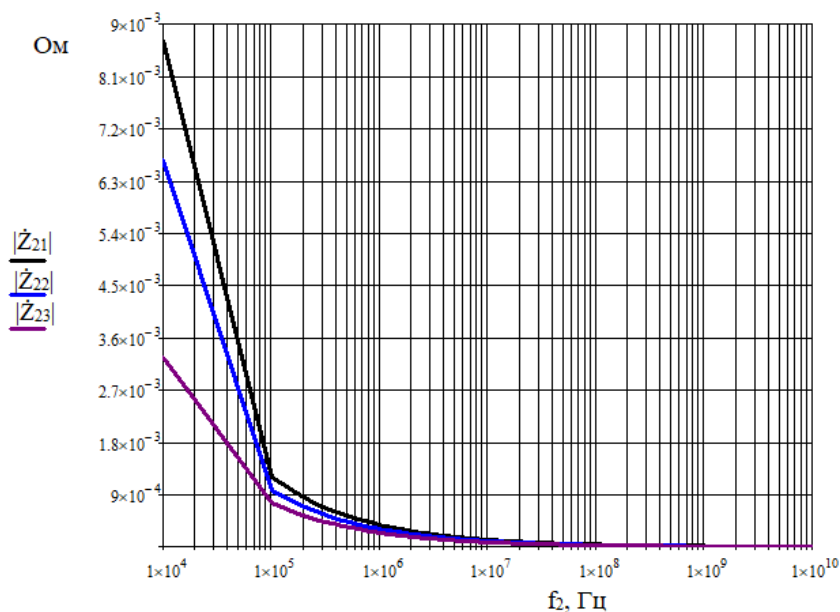
Рисунок 4. – Зависимости модуля компоненты поверхностного импеданса \dot{Z}_{11} поверхностного слоя над углеводородами от частоты f_2 ($N_e = 10^{16} \text{ м}^{-3}, N_i = 10^{18} \text{ м}^{-3}$)



$$\arg(\dot{Z}_{11}(f_2)) \text{ — для } \epsilon_r = 10, k_\omega = 10^{-1}, k_E = 10^{-1}; \quad \arg(\dot{Z}_{12}(f_2)) \text{ — для } \epsilon_r = 15, k_\omega = 10^{-1}, k_E = 10^{-1};$$

$$\arg(\dot{Z}_{13}(f_2)) \text{ — для } \epsilon_r = 25, k_\omega = 10^{-1}, k_E = 10^{-1}$$

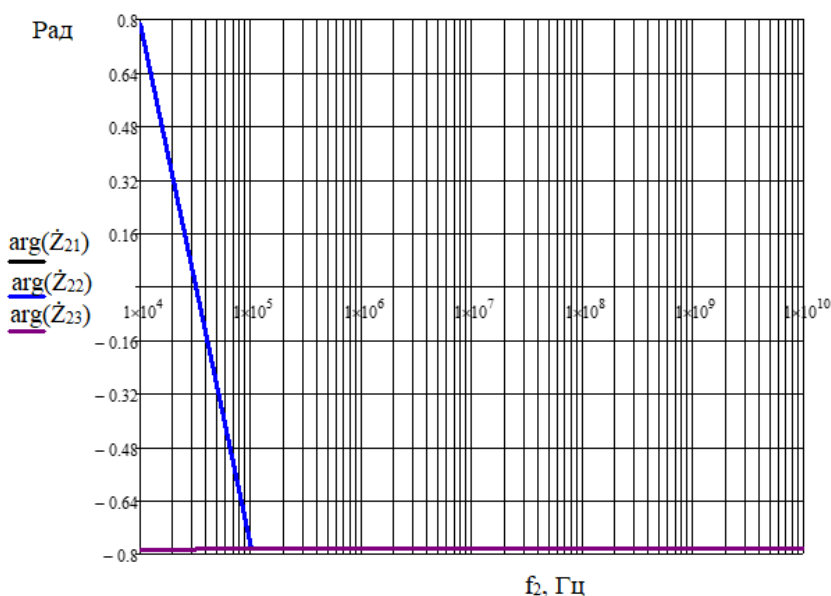
Рисунок 5. – Зависимости фазы компоненты поверхностного импеданса \dot{Z}_{11} поверхностного слоя над углеводородами от частоты f_2 ($N_e = 10^{16} \text{ м}^{-3}, N_i = 10^{18} \text{ м}^{-3}$)



$$|\dot{Z}_{21}(f_2)| \text{ – для } \varepsilon_r = 10, k_\omega = 10^{-1}, k_E = 10^{-1}; \quad |\dot{Z}_{22}(f_2)| \text{ – для } \varepsilon_r = 15, k_\omega = 10^{-1}, k_E = 10^{-1};$$

$$|\dot{Z}_{23}(f_2)| \text{ – для } \varepsilon_r = 25, k_\omega = 10^{-1}, k_E = 10^{-1}$$

Рисунок 6. – Зависимости модуля компоненты поверхностного импеданса \dot{Z}_{21} поверхностного слоя над углеводородами от частоты f_2 ($N_e = 10^{16} \text{ м}^{-3}$, $N_i = 10^{16} \text{ м}^{-3}$)



$$\arg(\dot{Z}_{21}(f_2)) \text{ – для } \varepsilon_r = 10, k_\omega = 10^{-1}, k_E = 10^{-1}; \quad \arg(\dot{Z}_{22}(f_2)) \text{ – для } \varepsilon_r = 15, k_\omega = 10^{-1}, k_E = 10^{-1};$$

$$\arg(\dot{Z}_{23}(f_2)) \text{ – для } \varepsilon_r = 25, k_\omega = 10^{-1}, k_E = 10^{-1}$$

Рисунок 7. – Зависимости фазы компоненты поверхностного импеданса \dot{Z}_{21} поверхностного слоя над углеводородами от частоты f_2 ($N_e = 10^{16} \text{ м}^{-3}$, $N_i = 10^{18} \text{ м}^{-3}$)

Для модуля \dot{Z}_{21} происходит влияние частоты в диапазонах $f_2 = (10^4 \dots 10^5) \text{ Гц}$ с большей крутизной характеристики и $f_2 = (10^5 \dots 10^7) \text{ Гц}$ с меньшей крутизной характеристики, причем для концентраций

$N_e = 10^{16} \text{ м}^{-3}$, $N_i = 10^{18} \text{ м}^{-3}$ зависимости модуля и фазы компонент поверхностного импеданса поверхностного слоя над углеводородами \dot{Z}_{21} имеют идентичный вид, за исключением численных значений. Фаза компоненты поверхностного импеданса \dot{Z}_{21} изменяется в диапазоне частот $f_2 = (10^4 \dots 10^5) \text{ Гц}$ для $\varepsilon_r = 15$.

Следует отметить, что, в отличие от двухчастотного режима, в двухволновом режиме отсутствуют резонансы модулей поверхностного импеданса поверхностного слоя над углеводородами \dot{Z}_{11} и \dot{Z}_{21} .

Таким образом, для режима низкочастотного взаимодействия двухволновых сигналов с поверхностным слоем над углеводородами установлены закономерности изменения компонент поверхностного импеданса данных слоев \dot{Z}_{11} и \dot{Z}_{21} от характеристик зондирующих сигналов f_2 , k_E , k_ω , определяющих параметры двух воздействующих на анизотропную среду сигналов. Данные параметры могут варьироваться в широких пределах, вызывая различный электродинамический отклик слоя над углеводородами, причем, в отличие от двухчастотного взаимодействия, электродинамические характеристики среды над углеводородами для данных компонент имеют принципиальные отличия.

Зондирование анизотропных сред двухволновыми ЭМВ в режимах с правой и левой круговыми поляризациями позволяет повысить производительность методов электроразведки и увеличить информативность за счет получения дополнительных данных по исследуемому геологическому профилю местности. Определение диэлектрической проницаемости, проводимости, глубины и поверхностного импеданса слоя над углеводородами возможно за счет конкретных значений расстояний между передатчиком и приемником (что исключает зависимость этих параметров от длины трассы) и конкретизации электродинамических моделей УВЗ. При этом учитываются влажность, климатические и сезонные условия, а также физические свойства среды: пористость, проницаемость, цементирующие вещества и механические характеристики пород скелета, количество и минерализация пластовой воды в порах и др.

Заключение. На основании проведенного анализа можно сделать следующие выводы:

- действительные составляющие компонент тензора диэлектрической проницаемости поверхностного слоя над углеводородами для ЭМВ с правой и левой круговыми поляризациями в режиме двухволнового взаимодействия имеют идентичный вид, за исключением численных значений;
- по сравнению с двухчастотным режимом происходит увеличение частот электронно-циклотронного и электронно-плазменного резонансов для концентраций $N_e = 10^{16} \text{ м}^{-3}$, $N_i = 10^{18} \text{ м}^{-3}$;
- для двухволнового режима отсутствуют резонансы модулей поверхностного импеданса поверхностного слоя над углеводородами \dot{Z}_{11} и \dot{Z}_{21} ;
- измерение фазы компоненты поверхностного импеданса \dot{Z}_{11} в диапазоне частот $f_2 = 10^8 \dots 10^{10} \text{ Гц}$ может быть использовано для поиска углеводородов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gabrielsen P. T., Shantsev D. V., Fanavoll S. 3D CSEM for hydrocarbon exploration in the Barents Sea // EAGE 5th Saint Petersburg conference & exhibition. – 2012. – P. 1–5.
2. Интерпретация данных зондирования методом становления поля в ближней зоне с учетом индукционно-вызванной поляризации при площадных нефтегазопроисловых исследованиях на юге Сибирской платформы / С. В. Компаниец, Н. О. Кожевников, Е. В. Мурзина, В. С. Емельянов // Науки о Земле и недропользование. – 2019. – Т. 42, № 2. – С. 151–164. – DOI: [10.21285/2541-9455-2019-42-2-151-164](https://doi.org/10.21285/2541-9455-2019-42-2-151-164).
3. Research on 3D Time-Lapse Electric Field Inversion Algorithm for Controlled Source Audio-Frequency Magnetotelluric Method / Q. Sun, H. Tan, W. Wan, Q. Hu // Appl. Sci. – 2024. – Vol. 14, iss. 4. – Art. ID 1560. – DOI: <https://doi.org/10.3390/app14041560>.
4. Electric-resonance sounding method and its application for, geological-geophysical and engineering-geological investigations / S. P. Levashov [et al.] // 66nd EAGE Conference and Technical Exhibition, Paris, France, 7–10 June 2003 (CD-ROM Abstracts volume).
5. Гололобов Д. В., Москвичев В. Н. Использование поляризационных свойств зондирующего сигнала при диагностике плазмоподобных сред // Радиотехника и электроника. – Мн.: Выш. школа. – 1994. – Вып. 22. – С. 66–74.
6. Weiss C. J. The fallacy of the “shallow-water problem” in marine CSEM exploration // Geophysics. – 2007. – Vol. 72, iss. 6. – P. A93–A97.
7. Хасанов Д. И. Введение в электроразведку: пособие для самостоятельного изучения для слушателей курсов повышения квалификации специальности «Геофизика». – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – 75 с.
8. Янушкевич В. Ф. Электромагнитные методы поиска и идентификации углеводородных залежей. – Новополюк: ПГУ, 2017. – 232 с.
9. Нордин В. В., Белкина Н. В. Система мониторинга калининградского подземного хранилища // Техничко-технологические проблемы сервиса. – 2014. – № 2 (28). – С. 34–37.

10. Interaction of two-frequency electromagnetic waves with anisotropic media over hydrocarbon accumulation / V. F. Yanushkevich, D. A. Dauhiala, A. L. Adamovich et al. // Journal of Physics: Conference Series. – 2022. – Vol. 2373, iss. 5. – Art. ID 052016. – DOI: [10.1088/1742-6596/2373/5/052016](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2373/5/052016).
11. Characteristics of anisotropic media over hydrocarbons in the mode of frequency-modulated signals / V. F. Yanushkevich, D. A. Dauhiala, T. V. Maladzechkina // Journal of Physics: Conference Series. – 2022. – Vol. 2373, iss. 5. – Art. ID 052026. – DOI: [10.1088/1742-6596/2373/5/052026](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2373/5/052026).
12. Завадский С. А. Оценка частотных характеристик коэффициентов отражения при изменении концентрации частиц // Современные проблемы радиотехники и телекоммуникаций «РТ-2010»: материалы 6-й Междунар. молодежной науч.-техн. конф. / г. Севастополь (19–24 апр. 2010 г.). – Севастополь: СевНТУ, 2011. – С. 65.
13. Commer, M. Massively parallel electrical-conductivity imaging of hydrocarbons using the IBM Blue Gene/L supercomputer IBM / M. Commer, G. A. Newman, J. J. Carazzone et al. // Journal of Research and Development. – 2008. – Vol. 52, iss. 1. – P. 93–103. – DOI: [10.1147/rd.521.0093](https://doi.org/10.1147/rd.521.0093).
14. Boerner D. E. Controlled source electromagnetic deep sounding: theory, results and correlation with natural source results: Invited Review Paper for the 10th Workshop on EM Induction Ensenada Mexico // Surveys in Geophysics. – 1991. – Vol. 13. – P. 435–488.
15. Никитин А. А., Хмелевской В. К. Комплексирование геофизических методов: учебник для вузов. – Тверь: ГЕРС, 2004. – 294 с.
16. Гололобов Д. В. Взаимодействие электромагнитных волн и углеводородных залежей. – Мн.: Бестпринт, 2009. – 185 с.
17. Взаимодействие ЧМ-сигналов с анизотропной средой / Д. В. Гололобов [и др.] // Проблемы проектирования и производства радиоэлектронных средств: сб. материалов II Междунар. науч.-техн. конф. / г. Новополоцк (15–17 мая 2002 г.). – Новополоцк: ПГУ, 2002. – С. 300–303.
18. Moskvichew V. N. Interraction of electromagnetic waves (EMW) with anisotropic inclusion in communication line // 9th Microw. Conf. NICON – 91, Rydzyna, May 20–22, 1991. – Vol. 1. – P. 240–244.
19. Янушкевич В. Ф., Кременя К. И. Анализ двухволнового взаимодействия электромагнитных волн с анизотропными средами над углеводородными залежами // Мн.: Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-тэхнічных навук. – 2015. – № 2. – С. 111–115.

Поступила 30.01.2026

REGULARITIES OF TWO-WAVE INTERACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES WITH THE MEDIUM ABOVE HYDROCARBONS

V. YANUSHKEVICH, I. RUSSETSKY, V. RASKIN, D. SIVATSKY
(*Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk*)

K. BABAMURATOV
(*Termez Institute of Engineering and Technology, Uzbekistan*)

An analysis of the interaction of electromagnetic waves with the surface layer above hydrocarbons was conducted using a two-wave interaction with a predominantly low-frequency component of the radiating signal. The real parts and phases of the sum and difference components of the permittivity tensors of the surface layer above hydrocarbons were investigated. The dependences of the moduli and phases of the surface impedance of the medium above hydrocarbons on the frequency of the high-frequency component of the radiating signal were determined. The frequencies of the electron cyclotron and electron-plasma resonances were calculated, which allow for increased accuracy in oil and gas field exploration by expanding the testing modes. It was found that for the two-wave interaction mode, there are no resonances in the moduli of the surface impedance of the surface layer above hydrocarbons compared to the two-frequency interaction mode. The obtained results of modeling the characteristics of the surface layer above hydrocarbons can be recommended for use in radiotechnical systems for geological exploration of hydrocarbon deposits.

Keywords: hydrocarbon deposit, surface layer, two-wave signal, electromagnetic waves.

МАТЕМАТИКА

УДК 512.641:519.612.4

DOI 10.52928/2070-1624-2026-46-1-55-59

ПОИСК КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ МАТРИЦЫ ОБЩЕГО ВИДА

д-р техн. наук, проф. С. Г. ЕХИЛЕВСКИЙ,
канд. физ.-мат. наук, доц. О. В. ГОЛУБЕВА, О. Н. ЗАБЕЛЕНДИК
 (Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

д-р техн. наук, проф. М. Г. МУСТАФИН
 (Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II, Россия)

Обоснована процедура сведения трехмерной задачи о собственных векторах матрицы к двумерному случаю. Предложен алгоритм поиска корней кубического уравнения, основанный на преобразовании элементов трехмерной матрицы при повороте системы координат. Показано, что в качестве критерия вещественности корней уравнения можно использовать симметричность исходной матрицы, что позволяет соответствующим подбором ее элементов связать инварианты матрицы с коэффициентами решаемого уравнения.

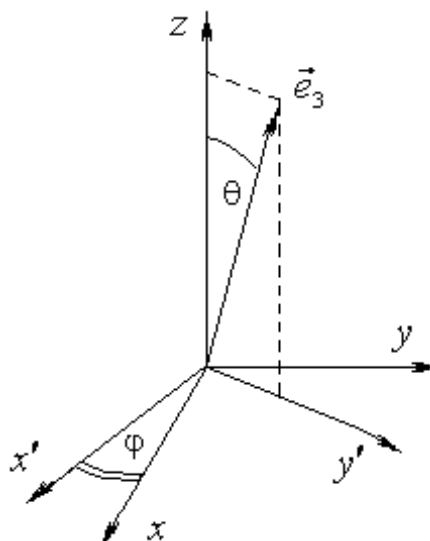
Ключевые слова: преобразование трехмерных матриц при пространственном повороте системы координат, критерий вещественности корней кубического уравнения.

Введение. Обычно при определении собственных значений и собственных векторов симметричной матрицы ограничиваются двумерным случаем или трехмерным, но с простым видом характеристического уравнения [1–3]. Причина заключается в сложности поиска корней характеристического уравнения третьей степени с произвольными коэффициентами. Целью данной публикации является обоснование процедуры сведения трехмерной задачи о собственных векторах симметричной матрицы общего вида к двумерному случаю. Для этого предложен алгоритм поиска корней кубического уравнения, основанный на преобразовании элементов трехмерной матрицы при повороте системы координат.

Преобразование матриц при повороте системы координат к базису собственных векторов (сведение **трехмерного случая к двумерному**). Очевидно (рисунок), что в общем случае двумя поворотами системы координат ось OZ можно направить вдоль собственного вектора \vec{e}_3 симметричной матрицы

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & g \\ e & g & c \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Рисунок. – Поворот оси Oz системы координат вдоль собственного вектора \vec{e}_3



Вначале выполним поворот на угол φ вокруг оси oz :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \hat{C}(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где

$$\hat{C}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

– матрица первого поворота [4]. При этом

$$\hat{A} \rightarrow \hat{A}' = \hat{C}(\varphi) \cdot \hat{A} \cdot \hat{C}^{-1}(\varphi), \quad (4)$$

где $\hat{C}^{-1}(\varphi) = \hat{C}(-\varphi)$ – матрица, обратная $\hat{C}(\varphi)$.

Затем новую (штрихованную) систему координат (см. рисунок) поворачиваем на угол θ вокруг оси ox' :

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \hat{D}(\theta) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где

$$\hat{D}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6)$$

– матрица второго поворота. При этом

$$\hat{A}' \rightarrow \hat{A}'' = \hat{D}(\theta) \cdot \hat{A}' \cdot \hat{D}^{-1}(\theta) = \hat{D}(\theta) \cdot \hat{C}(\varphi) \cdot \hat{A} \cdot \hat{C}^{-1}(\varphi) \cdot \hat{D}^{-1}(\theta), \quad (7)$$

где $\hat{D}^{-1}(\theta) = \hat{D}(-\theta)$ – матрица, обратная $\hat{D}(\theta)$.

По правилу умножения матриц

$$\hat{D}(\theta) \cdot \hat{C}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}; \quad (8)$$

$$\hat{C}^{-1}(\varphi) \cdot \hat{D}^{-1}(\theta) = (\hat{D}(\theta) \cdot \hat{C}(\varphi))^T, \quad (9)$$

где T – знак транспонирования.

С учетом (1), (7) – (9)

$$\hat{A}_{31}'' = \sin \theta \left[(a-b) \sin \varphi \cos \varphi + d(\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) \right] + \cos \theta (e \cos \varphi + g \sin \varphi) = \hat{A}_{13}''; \quad (10)$$

$$\hat{A}_{32}'' = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(e \sin \varphi - g \cos \varphi) + \sin \theta \cos \theta (c - a \sin^2 \varphi - b \cos^2 \varphi + 2d \sin \varphi \cos \varphi) = \hat{A}_{23}''; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_{33}'' = & \sin \theta \sin \varphi (a \sin \varphi \sin \theta - d \cos \varphi \sin \theta + e \cos \theta) - \sin \theta \cos \varphi (d \sin \varphi \sin \theta - \\ & - b \cos \varphi \sin \theta + g \cos \theta) + \cos \theta (a \sin \varphi \sin \theta - d \cos \varphi \sin \theta + e \cos \theta). \end{aligned} \quad (12)$$

Из системы уравнений

$$\hat{A}_{31}'' = 0, \quad \hat{A}_{32}'' = 0 \tag{13}$$

с помощью (10), (11) можно определить углы поворотов системы координат, нужные для направления оси oz вдоль собственного вектора \vec{e}_3 матрицы \hat{A} , а затем, подставив найденные значения φ и θ в (12), вычислить собственное значение λ_3 матрицы \hat{A} , являющееся корнем характеристического уравнения третьей степени

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & d & e \\ d & b-\lambda & g \\ e & g & c-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

Таким образом, трехмерный случай задачи о приведении симметричной матрицы к диагональному виду сводится к двумерному. Третий поворот (вокруг оси oz') обнуляет остальные (\hat{A}_{21}'' и \hat{A}_{12}'') недиагональные элементы.

Преобразование матриц при повороте системы координат и поиск корней кубического уравнения. Описанная процедура сведения к двумерному случаю трехмерной задачи о приведении симметричной матрицы к диагональному виду может рассматриваться как метод решения кубического уравнения общего вида с тремя вещественными корнями

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0. \tag{15}$$

Используя свойства определителей [5], с помощью (14) свяжем фигурирующие в (15) коэффициенты с элементами матрицы \hat{A} :

$$I_1 = a + b + c, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e \\ e & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & g \\ g & c \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & g \\ e & g & c \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Дальнейшее сводится к подбору значений элементов матрицы \hat{A} , обеспечивающих выполнение фигурирующих в (16) равенств. Заметим, что возможность подбора может рассматриваться как критерий наличия у уравнения (15) трех вещественных корней.

Проиллюстрируем изложенное формулировкой условий примера о приведении трехмерной симметричной матрицы к диагональному виду. Для этого решим обратную задачу: для данных φ и θ подбором элементов матрицы \hat{A} обеспечим выполнение равенств (13). Согласно (10), (11) вид (13) существенно упрощается при $\theta = \pi/4$. Пусть при этом $\varphi = \pi/6$. В результате система уравнений (13) примет вид

$$\begin{cases} (a-b)\frac{\sqrt{3}}{4} - d\frac{1}{2} + e\frac{\sqrt{3}}{2} + g\frac{1}{2} = 0; \\ c - a\frac{1}{4} - b\frac{3}{4} + d\frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \end{cases}$$

из которого следует приемлемость для рассматриваемых углов следующих значений элементов матрицы \hat{A} :

$$a = e = 1, \quad d = g = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad b = c = 3. \tag{17}$$

Таким образом, условие примера о поиске собственных значений и векторов матрицы имеет вид

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 3 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 3 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Согласно (15), (16) ему соответствует характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + \frac{40}{3}\lambda - \frac{16}{3} = 0. \quad (19)$$

Его корень найдем, подставив в (12) $\theta = \pi/4$, $\varphi = \pi/6$ и подобранные значения (17) элементов матрицы \hat{A} :

$$\begin{aligned} \lambda_3 = \hat{A}_{33}^* &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2\sqrt{2}} - 3 \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{8} (4 + 12 + 16) = 4. \end{aligned}$$

В качестве проверки подставим найденное собственное значение в (14). В результате с учетом (18) получим

$$\begin{vmatrix} -3 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \end{vmatrix} = -3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 + 1 + \frac{1}{3} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Покажем вещественность остальных собственных значений. Для этого выделим в левой части (19) $\lambda - 4$ в качестве множителя

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + \frac{40}{3}\lambda - \frac{16}{3} = \left(\lambda^2 - 3\lambda + \frac{4}{3} \right) (\lambda - 4) = 0,$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{4}{3}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{11}{12}}.$$

Нетрудно убедиться в сохранности инвариантов матрицы (см. (15), (16), (19)) после ее приведения к диагональному виду

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7, \quad I_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_1 \cdot \lambda_3 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \frac{40}{3}, \quad I_3 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \frac{16}{3}.$$

Заключение. Таким образом, обоснована процедура сведения трехмерной задачи о собственных векторах матрицы к двумерному случаю. Предложен алгоритм поиска корней кубического уравнения, основанный на преобразовании элементов трехмерной матрицы при повороте системы координат. Показано, что в качестве критерия вещественности корней уравнения можно использовать симметричность исходной матрицы, что позволяет соответствующим подбором ее элементов связать инварианты матрицы с коэффициентами решаемого уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2010. – 278 с.
2. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник. – М.: Физматлит, 2009. – 309 с.
3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия: учебник. – М.: Физматлит, 2019. – 224 с.
4. Ильин В. А., Ким Г. Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М.: МГУ, 1998, – 320 с.
5. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 512 с.

Поступила 11.02.2026

**FINDING THE ROOTS OF THE CHARACTERISTIC EQUATION
OF AN ARBITRARY THREE-DIMENSIONAL SYMMETRIC MATRIX**

S. EKHILEVSKIY, O. GOLUBEVA, O. ZABELENDIK
(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

M. MUSTAFIN
(Empress Catherine II Saint Petersburg Mining University, Russia)

The procedure for reducing the three-dimensional problem of finding the eigenvectors of the matrix to the two-dimensional case is justified. Disclosed is an algorithm for finding roots of a cubic equation based on transformation of elements of a three-dimensional matrix during rotation of a coordinate system. It is shown that the symmetry of the original matrix can be used as a criterion for the reality of the roots of the equation, which allows us to correlate the invariants of the matrix with the coefficients of the solved equation by appropriate selection of matrix elements.

Keywords: *transformation of three-dimensional matrices during spatial rotation of the coordinate system, a criterion for the reality of the roots of a cubic equation.*

СОДЕРЖАНИЕ

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

- Краснопрошин В. В., Мацкевич В. В.** Эффективное обучение нейронных сетей на основе выбора начального решения..... 2
- Швецова Е. В., Шуть В. Н.** Интеллектуальная информационная система организации перевозок 10

ЭЛЕКТРОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ УСТАНОВКИ (ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ)

- Абрамов С. А., Бринкевич Д. И., Просолович В. С., Вабищевич С. А., Зубова О. А., Кондрусь И. В.**
Пленки негативного фоторезиста КМР Е3502 на кремнии 21
- Бринкевич Д. И., Просолович В. С., Вабищевич С. А., Зубова О. А., Власенко И. А.**
ИК-Фурье спектроскопия пленок негативного фоторезиста КМР Е3502 на монокристаллическом кремнии..... 27
- Гусинский А. В., Тумилович М. В., Певнева Н. А., Родионова В. Н., Шutowич В. А., Танана О. В.**
Микроволновая технология сравнительной идентификации материалов 34
- Гусинский А. В., Тумилович М. В., Певнева Н. А., Родионова В. Н., Шutowич В. А., Танана О. В.**
Моделирование высокочастотного биконического измерительного резонатора..... 40
- Янушкевич В. Ф., Русецкий И. С., Раскин В. И., Сивацкий Д. С., Бабамуратов К.** Закономерности двухволнового взаимодействия электромагнитных волн со средой над углеводородами..... 47

МАТЕМАТИКА

- Ехилевский С. Г., Голубева О. В., Забелендик О. Н., Мустафин М. Г.** Поиск корней характеристического уравнения трехмерной симметричной матрицы общего вида 55