

MIESIĘCZNIK
POŁOCKI.

Т о м I.
Р о к 1818.

*«Вестник Полоцкого государственного университета»
продолжает традиции первого в Беларуси литературно-
научного журнала «Месячник Полоцкий».*



ВЕСНІК ПОЛАЦКАГА ДЗЯРЖАУНАГА УНІВЕРСІТЭТА
Серыя С. Фундаментальныя навукі

У серыі С навукова-тэарэтычнага часопіса друкуюцца артыкулы, якія прайшлі рэцэнзаваўне, змяшчаюць новыя навуковыя вынікі ў галіне матэматыкі і інфарматыкі, фізікі.

ВЕСТНИК ПОЛОЦКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия С. Фундаментальные науки

В серии С научно-теоретического журнала публикуются статьи, прошедшие рецензирование, содержащие новые научные результаты в области математики и информатики, физики.

HERALD OF POLOTSK STATE UNIVERSITY
Series C. Fundamental sciences

Series C includes reviewed articles which contain novelty in research and its results in mathematics and computer science, physics.

Адрес редакции:

Полоцкий государственный университет, ул. Блохина, 29, г. Новополоцк, 211440, Беларусь
тел. + 375 (214) 53 34 58, e-mail: vestnik@psu.by

Отв. за выпуск В.А. Груздев, С.Г. Ехилевский, Э.М. Пальчик.

Редакторы Р.Н. Авласенок, О.В. Мальцева. Техн. редактор Р.Н. Авласенок.

Подписано к печати 28.09.2012. Бумага офсетная 70 г/м². Формат 60×84¹/₈. Ризография.

Усл. печ. л. 10,93. Уч.-изд. л. 13,17. Тираж 100 экз. Заказ 1744.

ИНФОРМАТИКА

UDC 004.932

SMOKE DETECTION ALGORITHM FOR VIDEO SURVEILLANCE SYSTEMS

N. BROVKO, R. BOGUSH
(Polotsk State University)

This paper presented an efficient and reliable smoke detection algorithm on the video sequences. The key components developed in this algorithm are slowly moving blobs detection, classification of the blobs obtained and smoke regions tracking. We use preprocessing, slowly moving areas and pixels segmentation in a current input frame based on adaptive background subtraction algorithm, merge of the slowly moving areas and pixels into blobs at a stage slowly moving blobs detection. Calculation of Weber contrast is applied to classification and the primary direction of smoke propagation is considered. On a tracking step we trace texture and color smoke features using Cam Shift algorithm. The performed experiments have shown that our smoke detector quickly and reliable finds out a smoke on a complex dynamic scene. Experimental results are presented.

Introduction

Early fire detection is a key critical task for fire alarm systems. Traditional fire detectors require a position of sensor in very close proximity to fire or smoke and usually do not provide information about fire location, size. So they may be not reliable and cannot be applied into open spaces and larger areas. Due to the rapid developments in digital camera technology and video processing techniques there is a big trend to replace conventional fire detection techniques with computer vision based systems. Video surveillance systems and fire alarm systems combination in the uniform decision of the visual control of space allows reducing final cost of the equipment considerably. Smoke detection is rather for fire alarm systems when large and open areas are monitored, because the source of the fire and flames cannot always fall into the field of view. However, smoke of an uncontrolled fire can be easily observed by a camera even if the flames are not visible. This results in early detection of fire before it spreads around.

For smoke detection on the video sequences use usually motion and color. Motion information provides a key as the precondition to locate the possible smoke regions. The algorithm of background subtraction is traditionally applied to movement definition in video sequence [1 – 4]. Common technique is using adaptive Gaussian Mixture Model to approximate the background modeling process [1; 2]. In [5] optical flow calculation is applied to detection of movement of a smoke. Lacks of the given approach are high sensitivity to noise and high computational cost. Algorithms based on color and dynamic characteristics of a smoke are applied for classification of the given moving blobs. In [6] the algorithm comparative evaluation of the histogram-based pixel level classification is considered. In this algorithm the training set of video sequences on which there is a smoke is applied to the analysis. However, methods based on preliminary training are dependence of quality of classification on a training set. It demands much of qualitative characteristics of processed video images. The area of decreased high frequency energy component is identified as smoke using wavelet transforms [1; 2]. However change of scene illumination can be contours degradation reason. Therefore such approach requires additional estimations. Color information is also used for identifying smoke in video. Smoke color at different stages of ignition and depending on a burning material is distributed in a range from almost transparent white to saturated gray and black. In [1] decrease in value of chromatic components U and V of color space YUV is estimated.

The smoke on video sequences is a typical example of dynamic textures [12]. Therefore for smoke detection in video methods of segmentation and recognition of dynamic structures can be used. The existing approaches to dynamic texture recognition are based on optical flow [13] and volume local binary patterns (VLBP) [14]. At calculation of an optical flow for performance in real time usually use a normal component of an optical flow. Therefore this approach is very sensitive to a noise. Other approaches to dynamic textures recognition this modeling of textures with volume local binary patterns (VLBP). VLBP are an extension of the Local Binary Pattern (LBP) operator widely used in ordinary texture analysis combining the motion and appearance.

For support of stability and reliability of smoke detection algorithm it is necessary to trace the smoke area found on a current frame on following frames. Various tracking algorithms can be for this purpose applied [16]. However the most popular are Mean Shift [17] and Cam Shift [18] algorithms because of the simplicity and efficiency.

In this paper we propose an effective algorithm for smoke detection on the color video sequences obtained from the stationary camera. Our algorithm consisted of three basic steps: slowly moving blobs detection, classification of the blobs obtained and tracking. We use preprocessing, slowly moving areas and

pixels segmentation in a current input frame based on adaptive background subtraction algorithm, merge of the slowly moving areas and pixels into blobs at a stage slowly moving blobs detection. Calculation of Weber contrast is applied to classification and the primary direction of smoke propagation is considered. On a tracking step we trace texture and color smoke features using Cam Shift algorithm.

1. Slowly moving areas and pixels segmentation

Slowly moving blobs detection consists of following basic steps: preprocessing; slowly moving areas and pixels segmentation in a current input frame based on adaptive background subtraction algorithm; merge of the slowly moving areas and pixels into blobs.

1.1. Frame preprocessing

The preprocessing block applies some methods of image processing which increase the performance of the proposed detection algorithm and reduce false alarms. Frame preprocessing block comprises three steps: grayscale transformation, histogram equalization and the discrete wavelet transform of the current input frame. Cameras and image sensors must usually deal not only with the contrast in a scene but also with the image sensors exposure to the resulting light in that scene. Histogram equalization is a most commonly used method for improvement of contrast image characteristics [7]. To resize the image and to remove high frequencies on horizontal, vertical and diagonal details the discrete wavelet transform to Haar basis is applied. Wavelet transform to Haar basis is simplest and fastest that [8] is important for systems of video processing. Figure 1 shows results for this step of algorithm.



Fig. 1. The current frame (a) and the discrete wavelet transform after grayscale transformation and histogram equalization (b)

1.2. Slowly moving areas and pixels segmentation

In the course of the distribution the smoke is gradually blended to a background. The adaptive algorithm of background subtraction offered by us considers this characteristic of a smoke and is based on the ideas stated in works [2; 9]. A background image B_{t+1} at time instant $t+1$ is recursively estimated from the image frame I_t and the background image B_t of the video [9]. Moving pixels are determined by subtracting the current frame from the background and threshold. Recursive threshold estimation is also described in [9]. In the course of the distribution the smoke is gradually blended to a background. Then the foreground F_t can be estimated as follows:

$$I_t(x, y) = \beta F_t(x, y) + (1 - \beta) B_t(x, y),$$

where β is a blending parameter between 0 and 1.

As the area of a smoke from a frame to a frame grows slowly that the pixels belonging to a smoke, quickly did not fix in a background, value of adaptation parameter α should be close to 1. Experimentally us the established values for smoke detection are $\alpha = 0,95$ and $0,2 \leq \beta \leq 1$.

1.3. Connected component analysis

On next step of algorithm for clearing of noise and connection of moving blobs the connected components analysis is used [7]. This form of analysis takes in a noisy input foreground. Morphological operations are applied to reduce the noise:

- 1) morphological opening to shrink areas of small noise:

$$S \circ B = (S(-)B) \oplus B,$$

where S – image; B – structuring element 3×3 ;

2) morphological closing to rebuild the area of surviving components that was lost in opening:

$$S \bullet B = (S \oplus B)(-)B,$$

where B – structuring element 3×3 .

Then search of all contours is carried out. Next it tosses the contours that are too small and approximate the rest with polygons. The figure 2 shows the results of adaptive background subtraction and connected components analysis.

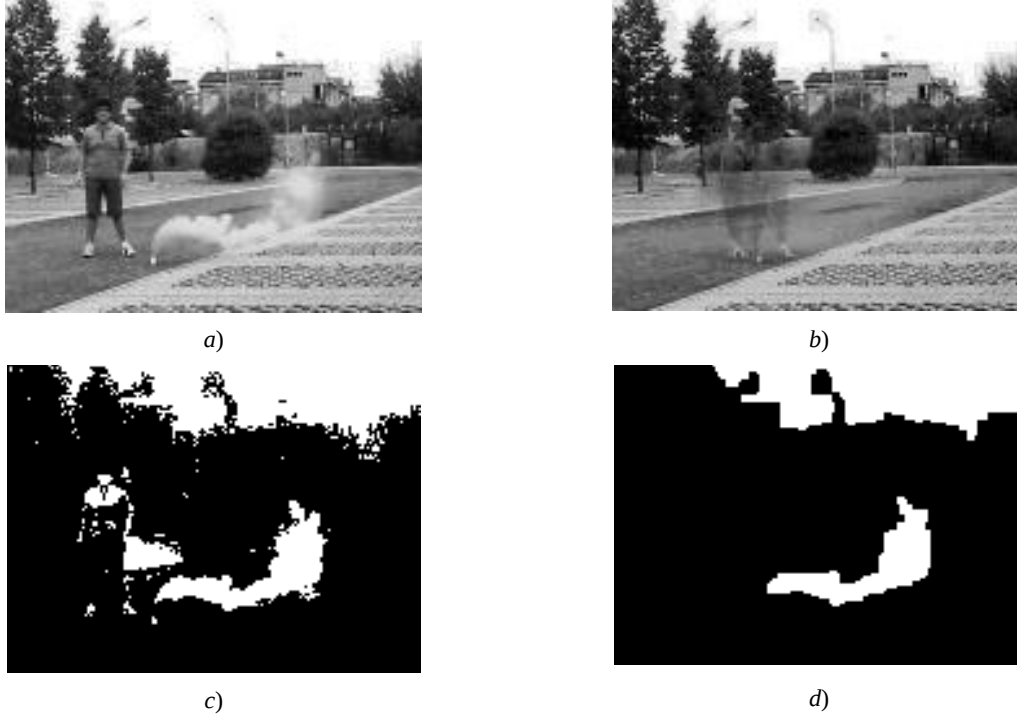


Fig. 2. The low frequency area after Haar transform of the current frame (a) and background (b) for this area, the noisy foreground (c) is completely clean up (d) by the connected components analysis

2. Moving blobs classification

At the beginning, when the temperature of the smoke is low, it is expected that the smoke will show color from the range of white-bluish to white [1]. So we can apply Otsu thresholding [10] to smoke segmentation of a current frame. Then the blocks matching approach is applied for pixels with value 1 in an Otsu mask. Blocks matching approach for optical flow calculation assumes that the frame is divided into small regions called blocks. It considers a primary direction of smoke propagation. In [11] it is shown, that global direction of smoke is $0 \dots 45^\circ$. This statement allows to simplify procedure blocks matching detection and, hence, considerably to reduce number of calculations. Blocks are typically square and contain some number of pixels. These blocks are not overlap. In our realization frames in the size 320×240 pixels divided into blocks 2×2 pixels. Block matching algorithm attempt to divide both the previous and current frames into such blocks and then compute the motion of these blocks. Our implementation uses a search in three directions of the original block $b_{x,y}^{prev}$ (in the previous frame) and compares the candidate new blocks $b_{x-1,y-1}^{curr}$, $b_{x,y-1}^{curr}$ and $b_{x+1,y-1}^{curr}$ (in the current frame) with the original. This comparison is calculated as follows:

$$F(b_{x,y}^{prev}, b_{x+k,y-1}^{curr})_{\substack{k \in \{-1;0;1\} \\ x,y \in [2;N]}} = \left(\frac{\min(I_{i,j}^{prev}, I_{i,j}^{curr})}{\max(I_{i,j}^{prev}, I_{i,j}^{curr})} \right),$$

where $I_{i,j}^{prev}$ is the intensity value of pixel on the previous frame, belonging to the block $b_{x,y}^{prev}$, $I_{i,j}^{curr}$ is the intensity value of pixel on the current frame, belonging to the block $b_{x,y}^{curr}$, N is count of blocks into which divided the previous and current frame.

The result of this step is a binary mask of moving on the current frame, where a value 1 corresponding the maximum value F . Figure 3 shows some examples for optical flow calculation.



Fig. 3. Otsu threshold mask (a) and the current (b) frame with moving vectors

From each blobs from previous steps we calculate Weber contrast C_w and percent ρ of blocks which have moved in primary direction of smoke:

$$C_w = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{F_t(x, y) - B_t(x, y)}{B_t(x, y)},$$

where $F_t(x, y)$ – value of pixel intensity (x, y) at time instant t , belonging to a blob; $B_t(x, y)$ – value of background pixel intensity (x, y) at time instant t under blob; n – number of the pixels belonging to a blob. If the blob has successfully checked out that we classify it as a smoke. Experimentally established values $C_w > 0,5$ and $\rho > 20\%$ allow distinguishing effectively a smoke from objects with similar behavior: a fog, shadows from slowly moving objects and patches of light.

3. Smoke regions tracking

On a tracking step we trace texture and color smoke features. For this we apply Cam Shift algorithm [18]. Smoke tracking is necessary to provide low level of false alarms and to reduce number not smoke detection. The Cam Shift algorithm uses continuously adaptive probability distributions. The essence of this tracker is region matching. The match criterion is similarity based on a color histogram.

In our realization Cam Shift algorithm based on the Local Binary Pattern (LBP) texture measure [15]. The basic LBP operator is a non-parametric 3×3 kernel which summarizes the local special structure of an image. It was first introduced by Ojala et al. [15] who showed the high discriminative power of this operator for texture classification. Local Binary Pattern robustness to monotonic gray-scale transformation, such as varying the brightness, contrast and illumination. The problem of smoke regions tracking at known initial position resolves at next frames as follows:

1) for smoke detection area is carried out LBP as follows. At a given pixel position (x_c, y_c) , LBP is defined as an ordered set of binary comparisons of pixel intensities between the center pixel and its eight surrounding pixels. The decimal form of the resulting 8-bit word (LBP code) can be expressed follows [15]:

$$LBP(x_c, y_c) = \sum_{i=0}^7 s(i_n - i_c) 2^n,$$

where corresponds to the gray value of the center pixel (x_c, y_c) , in to the gray values of the 8 surrounding pixels i_n , and function s is defined as [15]:

$$s(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \geq 0; \\ 0, & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

For LBP of object (smoke region) the histogram which is considered as the standard for tracking is under construction. The figure 4, a shows the LBP for the current frame;

2) at frame change it is necessary having object position on the previous frame and new position of object is necessary to find the reference histogram. Algorithm Cam Shift which is carrying out this procedure consists of following steps:

a) the search area in which smoke occurrence is supposed gets out. Initial position of search window which is defined by smoke position on the previous frame gets out;

b) by back projection algorithm of histograms for search area the image of probability P (figure 4, *b*) is under construction. It is iterative following steps are carried out;

c) in search window for image P the zeroth moment and first moments (the center of mass of the image pixel distribution) under following equations calculate:

$$M_{00} = \sum_x \sum_y I(x, y),$$

$$M_{10} = \sum_x \sum_y xI(x, y)$$

and

$$M_{01} = \sum_x \sum_y yI(x, y);$$

d) the found center of mass defines position of search window on the following iteration. The sizes of a window do not vary. Performance of steps 2.b and 2.c stops if distinctions in position of search window in the subsequently iterations are small;

e) the search window extends a little, and in it for image P the second moments which define definitive position and the size of traced object, under following equations are calculate:

$$M_{20} = \sum_x \sum_y x^2 I(x, y),$$

$$M_{02} = \sum_x \sum_y y^2 I(x, y).$$



a)



b)

Fig. 4. LBP (*a*) and the image of probability P (*b*) for the current frame

At quick changes of object position, the tracking algorithm can lose object. However for the ignition centre quick change of a location is not characteristic. Increase of smoke area occurs slowly. Therefore Cam Shift algorithm well approaches for smoke trace on frame sequences.

4. Results and discussion

The developed algorithm has been tested in real environment with implementation at personal computer (Pentium(R) DualCore CPU T4300, 2,1 GHz, RAM 1,96 GB). Our program is implemented using Visual C++ and an open source computer vision library OpenCV. The proposed algorithm has been evaluated using data set publicly available at the web address <http://signal.ee.bilkent.edu.tr/VisiFire/Demo/SampleClips.html> and <http://www.openvisor.org>. Test video sequences contain a smoke, moving people, moving transport, a complex

dynamic background, and also a number of video sequences are not contained by a smoke. Figure 5 shows some examples of smoke detection.

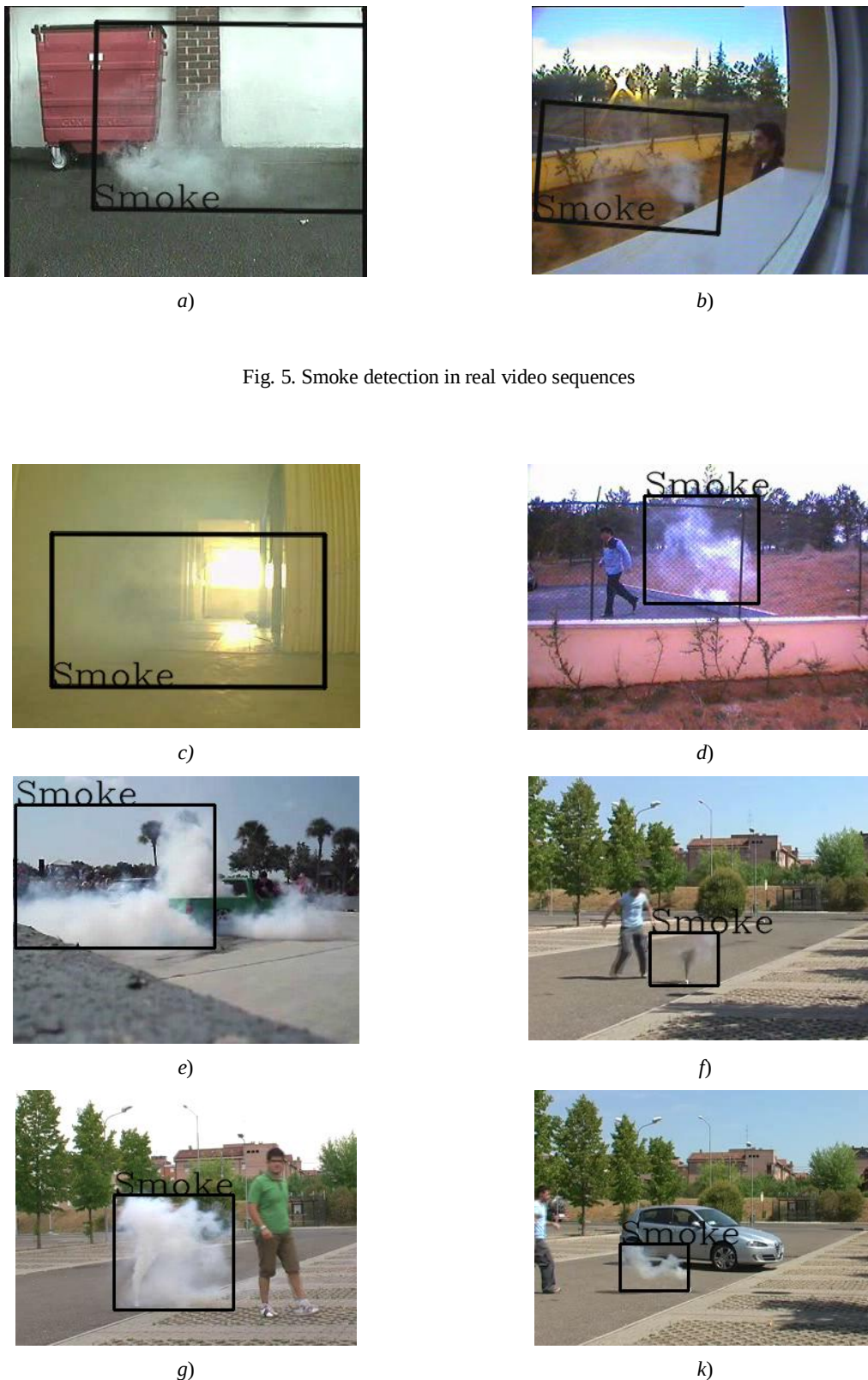


Fig. 5. Smoke detection in real video sequences

Fig. 5. Smoke detection in real video sequences

For each video sequence we calculate True Rate (TR) and False Rate (FR) as follows:

$$TR = \frac{CTR}{CS} \cdot 100 \%,$$

$$FR = \frac{CFR}{CNS} \cdot 100 \%,$$

where *CTR* – count of true found frames; *CS* – count of frames with a smoke; *CFR* – count of false found frames and *CNS* – count of frames without a smoke.

We have compared our approach and approach developed in Signal and image processing group from Bilkent University (<http://signal.ee.bilkent.edu.tr>). Results of smoke detection are presented in the Table where OAL and BAP are detection results for our algorithm and Bilkent approach respectively.

Compare smoke detection algorithms

Video seq. Fig. 5	TR (%)		FR (%)		Present rate	
	OAL	BAP	OAL	BAP	OAL	BAP
a	98	78	6	0	10/12	10/43
b	60	SNF	0	SNF	20/112	SNF
c	96	41	0	0	80/87	80/100
d	66	48	12	8	30/117	204/117
e	94	–	0	–	360/388	–
f	80	–	17	–	463/469	–
g	98	–	15	–	398/400	–
k	77	–	2	–	500/657	–

Present rate (the smoke was present with/ is found with) is number of frame where smoke was present in video and number of frame where smoke is found with algorithms. The designation SNF means that the smoke has not been found out by algorithm. Our algorithm has higher true of detection thanks to application of trace and allows to find out a smoke at earlier stage. If at the moment of occurrence on a scene the smoke moves slowly and is strongly rarefied (sequences b, d, k), it gradually includes in a background. Therefore in this case, we cannot directly find out a smoke and detection time is increasing (fig. 6, a). Also our algorithm cannot be used for wildfire detection (fig. 6, b) because the smoke area is small and a part of the smoke information is lost at a post processing stage.



a)



b)

Fig. 6. Examples not detection

Results of researches show, that the algorithm provides early smoke detection on a complex scene. Smoke detection is achieved in real time. The processing time per frame is about 31 ms. for frames with sizes of 320 by 240 pixels. It has low false alarm rate. The algorithm has small positive factor in cases when the smoke strongly dissipates and at long distribution to one direction joins in a background. However for problems of the early prevention of a fire more important is early alarm and low false alarm rate. Therefore our algorithm can be used in video surveillance systems for early detection of a fire.

5. Conclusion

We have presented in this paper an algorithm for smoke detection in video sequences. Our algorithm consisted of three basic steps: slowly moving blobs detection, classification of the blobs obtained and tracking.

We use preprocessing, slowly moving areas and pixels segmentation in a current input frame based on adaptive background subtraction algorithm, merge of the slowly moving areas and pixels into blobs at a stage slowly moving blobs detection. Calculation of Weber contrast is applied to classification and the primary direction of smoke propagation is considered. On a tracking step we trace texture and color smoke features using Cam Shift algorithm. The efficiency of our approach is illustrated and confirmed by our experimental videos.

REFERENCES

1. Piccinini, P., Calderara, S. and Cucchiara, R., 2008. Reliable smoke detection system in the domains of image energy and color. In: 15th International Conference on Image Processing, 1376 – 1379.
2. Toreyin, B. et al., 2005. Wavelet based real-time smoke detection in video. Signal Processing: Image communication, EURASIP, Elsevier. 20, 255 – 256.
3. DongKeun Kim and Yuan-Fang Wang, 2009. Smoke Detection in Video. World Congress on Computer Science and Information Engineering, 759 – 763.
4. Toreyin, B., Dedeoglu, Y. and Cetin A. E., 2006. Contour based smoke detection in video using wavelets. In: European Signal Processing Conference, 123 – 128.
5. Comez-Rodriuez, F. et al., 2003. Smoke Monitoring and measurement Using Image Processing. Application to Forest Fires. In: Automatic Target Recognition XIII, Proceedings of SPIE 5094, 404 – 411.
6. Kristini D., Jakovevi T., Stipaniev D., 2009. Histogram-Based Smoke Segmentation in Forest Fire Detection System. Information Technology and Control 38(3), 237 – 244.
7. Bradski, G. and Kachler, A., 2008. Learning OpenCV. O'Reilly Media.
8. Stolz, E., DeRose, T., Salesin, D., 1996. Wavelets for Computer Graphics: Theory and Applications. Morgan Kaufmann.
9. Collins, R.T., 1999. A System for Video Surveillance and Monitoring. In: Proc. of American Nuclear Society 8th Int. Topical Meeting on Robotics and Remote Systems, 68 – 73.
10. Otsu, N., 1979. A threshold selection method from gray-level histograms. IEEE Trans. Sys., Man., Cyber. 9, 62 – 66.
11. Rubaiyat Yasmin, 2009. Detection of Smoke Propagation Direction Using Color Video Sequences. International Journal of Soft Computing 4 (1), 45 – 48.
12. Torein, B.U., et al., 2007. Dynamic texture detection, segmentation and analysis. ACM International Conference on Image and Video Retrieval.
13. Chetverikov, D. and Peteri, R., 2005. A Brief Survey of Dynamic Texture Description and recognition. In: Proc. Int'l Conf. Computer Recognition Systems, 17 – 26.
14. Zhao, G. and Pietikainen, M., 2006. Local Binary Pattern Descriptions for Dynamic Texture Recognition. In: Proc. Int'l Conf. Pattern Recognition, Vol. 2, 211 – 214.
15. Ojala, T., Rietikainen, M. and Maenpaa, T., 2002. Multiresolution gray-scale and rotation invariant texture classification with local binary patterns. IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell 24(7), 971 – 987.
16. Yilmaz, A., Javed, O., 2006. Object tracking: A survey. ACM comput. Surv. 38(4).
17. Comaniciu, D., Meer, P., 2002. Mean shift: a robust approach toward feature space analysis. IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell 24(5), 603 – 619.
18. Bradski, G., 1998. Computer vision face tracking for use in perceptual user interface. Intel Technol. J. 2(2), 12 – 21.

Поступила 21.02.2012

УДК 51-76; 612.741.1; 612.76; 615.841

**МЕТОД И ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА УПРАВЛЯЕМОГО ИЗМЕНЕНИЯ
ДВИГАТЕЛЬНОГО НАВЫКА ЧЕЛОВЕКА
НА ОСНОВЕ МНОГОКАНАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОСТИМУЛЯЦИИ**

**Н.С. ДАВЫДОВА, канд. техн. наук, доц. А.Н. ОСИПОВ,
канд. техн. наук, доц. М.В. ДАВЫДОВ, М.М. МЕЖЕННАЯ
(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск)**

Исследуется проблема формирования у человека двигательного навыка с заданными параметрами, а также коррекции уже сформированного двигательного стереотипа в соответствии с требуемой структурой движения. Проанализированы физиологические механизмы организации и управления движениями в организме человека. Предложен метод управляемого изменения двигательного навыка человека на основе многоканальной электростимуляции, программа которой разрабатывается индивидуально и соответствует особенностям функциональной структуры движения человека и его двигательным способностям. Рассмотрена техническая система многоканальной электростимуляции с программным управлением параметрами стимулирующих сигналов и временной последовательностью их следования в соответствии с необходимой структурой формируемого или корректируемого двигательного навыка.

Введение. Во всех сферах своей деятельности человек сталкивается с необходимостью выполнения разных, порой довольно сложных, двигательных действий, которые представляют собой результат согласованной работы различных систем организма. Неоднократное выполнение одних и тех же действий (обучение) приводит к формированию двигательного навыка, т.е. к формированию новых нейронных связей, лежащих в основе программ конкретных двигательных актов [1].

Актуальной задачей для медицины, спорта, профессионально-трудовой деятельности является проблема формирования у человека двигательного навыка, соответствующего заранее заданным параметрам, а также коррекция уже сформированного двигательного стереотипа в соответствии с целевой функцией. Для решения данной задачи необходимо разработать методы управляемого изменения двигательного навыка. Возможность управляемого изменения двигательного навыка человека базируется на теории организации управления движениями в организме и теории функциональных систем [2; 3]. В общем случае управление движениями в организме человека основано на формировании в центральной нервной системе двигательных программ и их передаче по эфферентным путям к исполнительным органам – мышцам, отвечающим на поступление к ним нервных импульсов реакцией возбуждения, проявляющейся в виде механических и электрических феноменов. Одновременно в течение всего времени выполнения мышечной работы центральная нервная система получает сигналы обратной связи от мышц, других органов и систем организма, а также информацию об окружающей обстановке (через визуальные, звуковые анализаторы, вестибулярный аппарат и др.), на основании которых, при необходимости, происходит внесение коррекций в программу двигательного акта [4]. Так как на процесс выполнения движения существенное влияние оказывают сигналы обратной связи, соответственно, внешнее управление последними позволит формировать (или корректировать) двигательный навык человека в соответствии с требуемой структурой движения [5].

В представленной работе для управляемого изменения двигательного навыка человека предлагается многоканальная электростимуляция. Многоканальная электростимуляция позволяет искусственно моделировать работу мышечных групп человека в соответствии с заданным (эталонным) образом движения [6]. Однако программа электростимуляции должна отвечать индивидуальным особенностям функциональной структуры движения человека и его двигательным способностям. Это служит предпосылкой для формирования и закрепления физиологических паттернов движения в мозговых структурах управления двигательной деятельностью в соответствии с заданной индивидуальной программой [7]. Цель работы – разработка метода и технических средств управляемого изменения двигательного навыка человека на основе многоканальной электростимуляции. При этом программа многоканальной электростимуляции должна разрабатываться индивидуально для каждого исследуемого в соответствии с его двигательными способностями и уже сформированным двигательным стереотипом.

Основная часть. Для функциональной диагностики двигательных способностей человека и оценки уже сформированного двигательного стереотипа предлагается комплексный анализ пространственно-временной и иннервационной структуры движения. Так как любой двигательный навык имеет постоянный рисунок возбуждения мышц [8], возможно построение иннервационной структуры движения, которая представляет собой устойчивые сочетания активности мышц, используемые в конкретном движении. Анализ работы мышц при совершении двигательного акта осуществляется с помощью многоканальной интерференционной электромиографии (ЭМГ), которая позволяет исследовать биоэлектрическую активность заданного количества мышц одновременно [9]. В свою очередь пространственно-временная струк-

тура движения позволяет разбивать исследуемую двигательную деятельность на отдельные фазы и далее исследовать её не целиком, а по частям. В зависимости от типа исследуемого движения в качестве методов построения такой структуры двигательного упражнения могут быть использованы как видеосъемка, так и подография (ПДГ). Подография (регистрация моментов отрыва и касания различных отделов стопы с опорой) позволяет построить пространственно-временную структуру для упражнений, связанных с такими локомоциями, как ходьба, бег, прыжки. Видеосъемка, хотя и является менее точным методом (обладает меньшим разрешением по времени), позволяет представить информацию в наглядной форме. Такая совокупность временных, пространственных и амплитудных электромиографических характеристик получила название электромиографического портрета движения [6; 10].

Разработана методика и программно-технические средства для исследования иннервационной и пространственно-временной структуры движения на основе многоканальной электромиографии и подографии [11]. Методика включает: *синхронную регистрацию* заданного количества каналов электромиограммы (выбираются мышцы, преимущественно обеспечивающие исследуемую двигательную деятельность) и четырех каналов подограммы (регистрируются моменты отрыва и касания отдельно пятки и носка каждой ноги); *цифровую обработку* полученных сигналов ЭМГ и ПДГ и *построение* электромиографического портрета движения; *анализ* электромиографического портрета движения, который сводится к рассмотрению энергетического вклада каждой мышцы в формирование движения и оценке характера распределения усилий работающих мышц по фазам движения; *вычисление общих динамических характеристик* движения [12].

На рисунке 1, а показан пример ЭМГ портрета движения «прыжок вверх с места». На рисунке представлены нормированные электромиограммы мышц Rectus Femoris, Biceps Femoris, Gastrocnemius и Soleus правой ноги, а также показаны маркеры границ фаз движения, соответствующих временным моментам: «начало движения», «отрыв пятки», «отрыв носка», «касание носка», «касание пятки» и «конец движения». Для указанного движения выделены следующие фазы: фаза подседа (1) – от начала движения до отрыва пятки; фаза толчка (2) – от момента отрыва пятки до момента отрыва носка; фаза полета (3) – от момента отрыва носка до момента касания носка; фаза приземления (4) – от момента касания носка до момента касания пятки; фаза подъема (5) – от момента касания пятки до конца движения. На рисунке 1, б представлены кадры синхронной видеосъемки, соответствующие выделенным фазам движения.

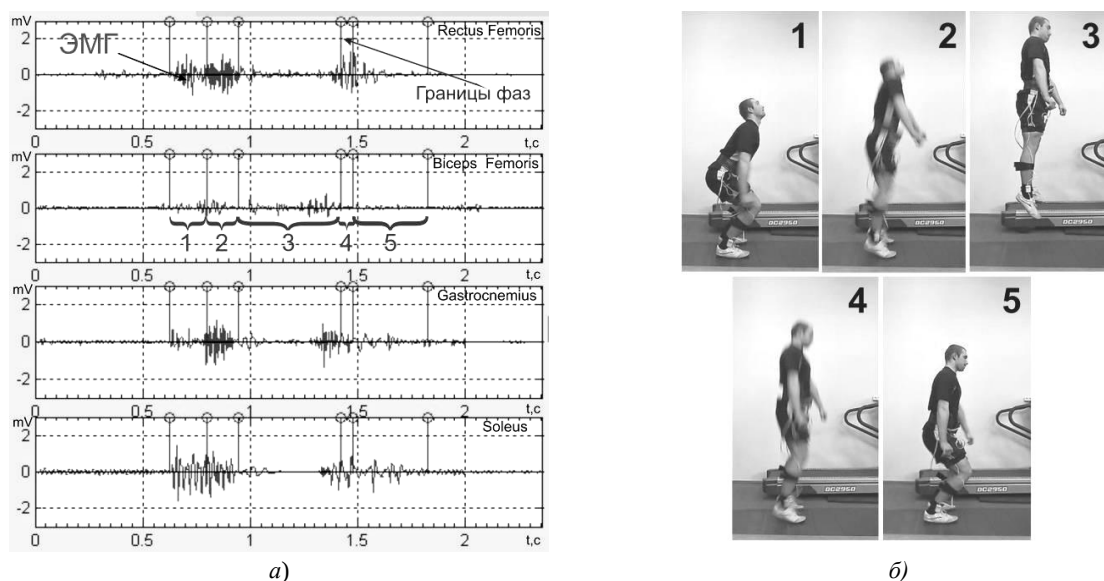


Рис. 1. Пример ЭМГ портрета движения «прыжок вверх с места» (а); кадры синхронной видеосъемки, соответствующие выделенным фазам движения (б): 1 – фаза подседа; 2 – фаза толчка; 3 – фаза полета; 4 – фаза приземления; 5 – фаза подъема

Разработка программы многоканальной электростимуляции осуществляется индивидуально на базе построенного ЭМГ портрета исследуемого движения по следующему алгоритму:

1. *Построение графика энергии ЭМГ и вычисление суммарной энергии ЭМГ для каждой мышцы* (рис. 2, б). График энергии ЭМГ каждой мышцы строится исходя из выражения:

$$E_{\text{ЭМГ}}^i = \frac{(x_i)^2}{n} \text{ (мВ}^2\text{)}, \quad (1)$$

где $E_{\text{ЭМГ}}^i$ – i -й дискретный отсчет сигнала энергии ЭМГ; x_i – амплитуда i -го дискретного отсчета сигнала ЭМГ; n – количество дискретных отсчетов.

Суммарная энергия ЭМГ каждой мышцы:

$$E_{\text{ЭМГ}} = \sum_{i=1}^n E_{\text{ЭМГ}}^i \text{ (мВ}^2\text{)}, \quad (2)$$

где $E_{\text{ЭМГ}}^i$ – i -й дискретный отсчет сигнала энергии ЭМГ; n – число дискретных отсчетов ЭМГ.

2. *Построение огибающей энергии ЭМГ для каждой мышцы* (рис. 2, в). Построение огибающей энергии ЭМГ осуществляется с помощью динамических окон, содержащих заданное пользователем число дискретных отсчетов (точек), и сдвигаемых по интерполируемому сигналу. Для каждого окна находится максимальная по амплитуде выборка сигнала и запоминается ее номер. Построение огибающей энергии ЭМГ осуществляется путем восстановления во времени найденных выборок исходного сигнала.

3. *Выделение значащих временных интервалов сосредоточения энергии ЭМГ для каждой мышцы* (рис. 2, г). Для корректного выбора времени стимуляции в соответствии с фазами исследуемого движения и интервалами сосредоточения энергии ЭМГ определяются значащие временные интервалы сигнала ЭМГ ($T_{\text{знач}}$), на которых сосредоточено более $k\%$ (предусмотрена возможность интерактивного изменения границы) от суммарной энергии ЭМГ сигнала. Для этого сигнал энергии ЭМГ делится на временные интервалы, границами которых являются локальные минимумы огибающей энергии ЭМГ. Критерий значимости выделенных временных интервалов:

$$E_{T_{\text{знач}}} \geq k \cdot E_{\text{ЭМГ}}, \quad (3)$$

где $E_{T_{\text{знач}}}$ – энергия ЭМГ, сосредоточенная в интервале $T_{\text{знач}}$; k – граница значимости ($0 \dots 1$), задаваемая как доля от суммарной энергии ЭМГ; $E_{\text{ЭМГ}}$ – суммарная энергия ЭМГ.

Граница значимости k выбирается с позиции соответствия значащих временных интервалов сосредоточения энергии ЭМГ фазам исследуемого движения;

4. *Определение окон стимуляции для каждой мышцы* (рис. 2, д). Для каждой мышцы на значащих временных интервалах сосредоточения энергии ЭМГ рассчитываются окна стимуляции. Критерий для определения ширины окон стимуляции – сосредоточение в окне более 90 % от $E_{T_{\text{знач}}}$ (суммарной энергии ЭМГ в рассматриваемом временном интервале $T_{\text{знач}}$):

$$E_{\text{стим}} \geq 0,9 E_{T_{\text{знач}}}, \quad (4)$$

где $E_{\text{стим}}$ – энергия ЭМГ, сосредоточенная в окне стимуляции; $E_{T_{\text{знач}}}$ – энергия ЭМГ, сосредоточенная в интервале $T_{\text{знач}}$.

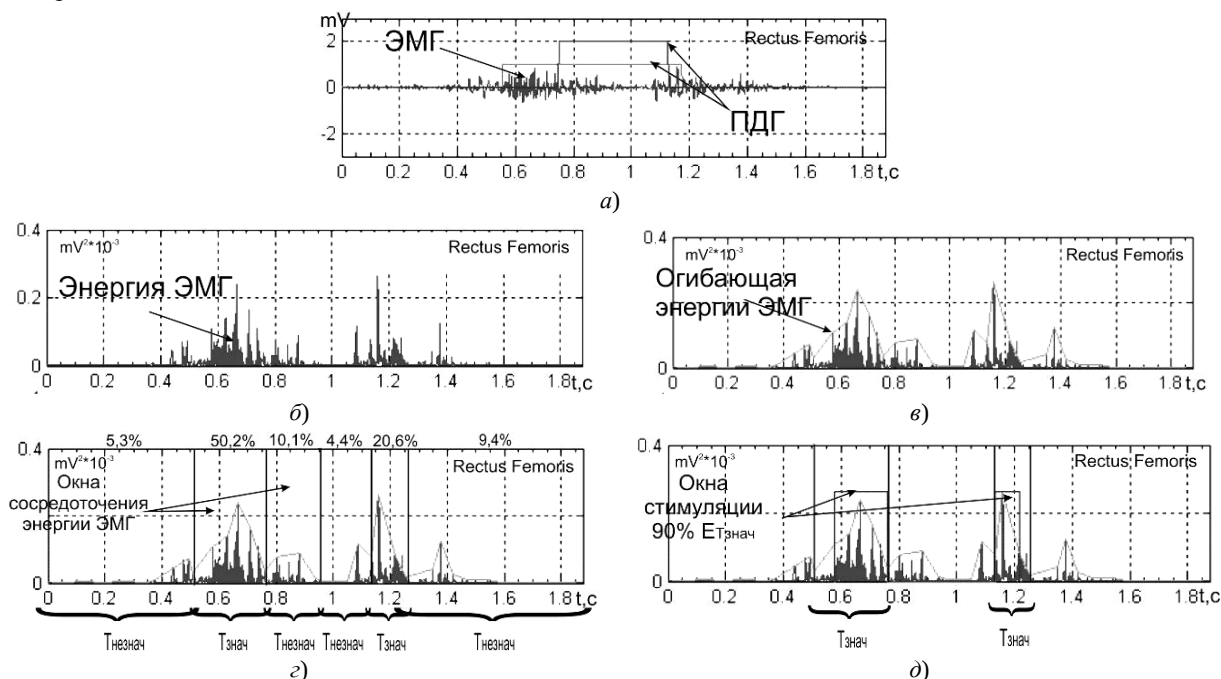


Рис. 2. Пример поэтапного построения индивидуальной программы электростимуляции мышцы Rectus Femoris для движения «прыжок вверх с места»: а – электромиограмма мышцы и подограмма правой ноги; б – график энергии сигнала ЭМГ; в – график огибающей энергии ЭМГ (интерполяция по 80 точкам); г – построение временных интервалов сосредоточения энергии ЭМГ (граница значимости 20 %); д – построение окон стимуляции

5. Расчет амплитуды стимулирующего сигнала для каждого окна стимуляции. Амплитуда стимулирующего сигнала определяется пропорционально энергии ЭМГ, сосредоточенной в окне стимуляции:

$$A^k = \frac{E_{\text{стим}}^k \cdot A_{\text{max}}}{E_{\text{стим}}^{\text{max}}} \quad (\text{В}), \quad (5)$$

где A^k – амплитуда стимулирующего сигнала для k -го окна стимуляции; $E_{\text{стим}}^k$ – значение энергии ЭМГ, сосредоточенной в k -м окне стимуляции; A_{max} – максимальная амплитуда стимуляции (В), значение которой задается интерактивно; $E_{\text{стим}}^{\text{max}}$ – наибольшее значение энергии ЭМГ в окне стимуляции среди всех рассматриваемых каналов.

На данном этапе возможно сохранение программы многоканальной электростимуляции как эталонной.

6. *Корректировка окон стимуляции.* С целью формирования нового двигательного навыка или коррекции уже сформированного двигательного стереотипа производится корректировка окон стимуляции на основе эталонных данных (эталонная программа стимуляции) или в соответствии с целевой функцией. При этом фиксируется выбранное окно стимуляции нужного канала, а остальные окна сдвигаются в соответствии с требуемой структурой движения.

Таким образом, в результате построения индивидуальной программы многоканальной электростимуляции на основе ЭМГ портрета движения человека для каждой мышцы определяется время начала и окончания стимулирующего воздействия, а также амплитуда сигнала электростимуляции.

На рисунке 3 представлен пример разработки индивидуальной программы многоканальной электростимуляции на основе ЭМГ портрета спортивного движения «прыжок вверх с места». Параметры разработки программы электростимуляции: ширина окна интерполяции сигнала энергии ЭМГ – 80 точек; граница значимости временных интервалов сосредоточения энергии ЭМГ – 30 %; ширина окна стимуляции – 90 %; корректировка окон стимуляции – на основе эталонной программы стимуляции.

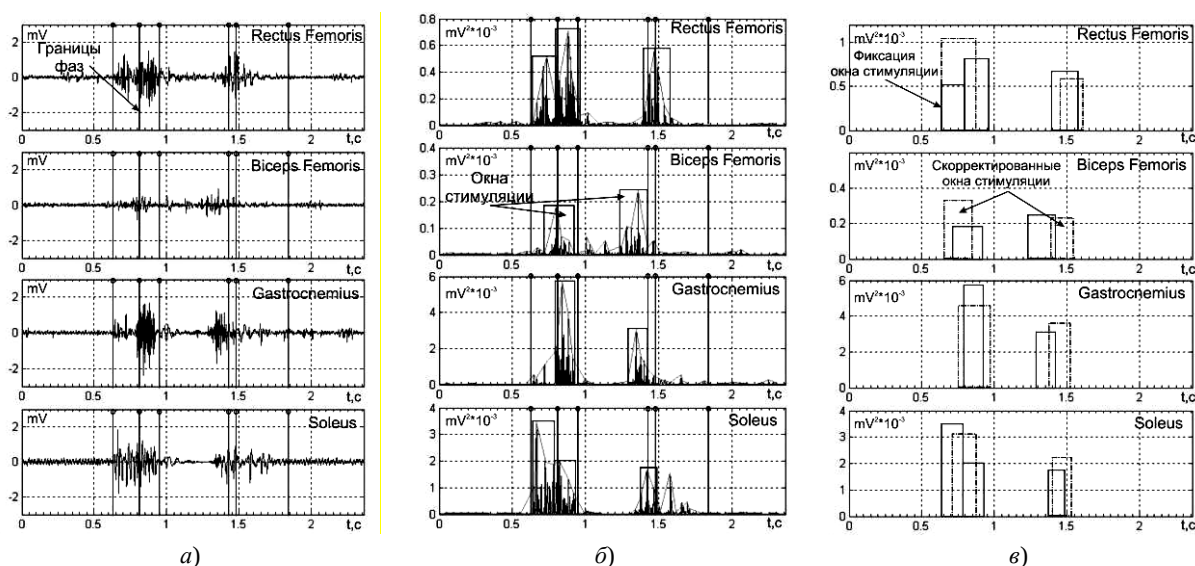


Рис. 3. ЭМГ образ движения «прыжок вверх с места» (а); индивидуальная программа многоканальной электростимуляции (б); корректировка окон стимуляции (в)

Исходя из разработанного алгоритма построения индивидуальной программы многоканальной электростимуляции на основе ЭМГ портрета движения человека предложена структурная схема технической системы многоканальной электростимуляции с программным управлением параметрами стимулирующих сигналов и временной последовательностью их следования в соответствии с необходимой структурой формируемого или корректируемого двигательного навыка (рис. 4).

Предложенная техническая система электростимуляции на начальном этапе проводит диагностику корректируемого двигательного навыка человека посредством многоканальной электромиографии (блок диагностики). Далее в блоке выделения окон стимуляции осуществляется построение индивидуальной программы многоканальной электростимуляции, при этом предусмотрена возможность задания пользователем критериев выделения окон стимуляции (ширина окна интерполяции сигнала энергии ЭМГ исследуемых мышц, граница значимости временных интервалов сосредоточения энергии ЭМГ исследуемых мышц, ширина окна стимуляции). В блоке корректировки окон стимуляции производится корректи-

ровка выделенных окон стимуляции на основе эталонных данных (блок эталонных программ стимуляции) или в соответствии с целевой функцией посредством пользовательского интерфейса. Кроме того, пользователь задает параметры стимулирующего сигнала: вид сигнала, частоту сигнала, максимальную амплитуду сигнала. С целью организации диалогового интерфейса с пользователем в течение всего времени разработки индивидуальной программы многоканальной электростимуляции осуществляется отображение текущей информации (устройство отображения информации). В свою очередь устройство управления служит для организации работы устройства в целом.

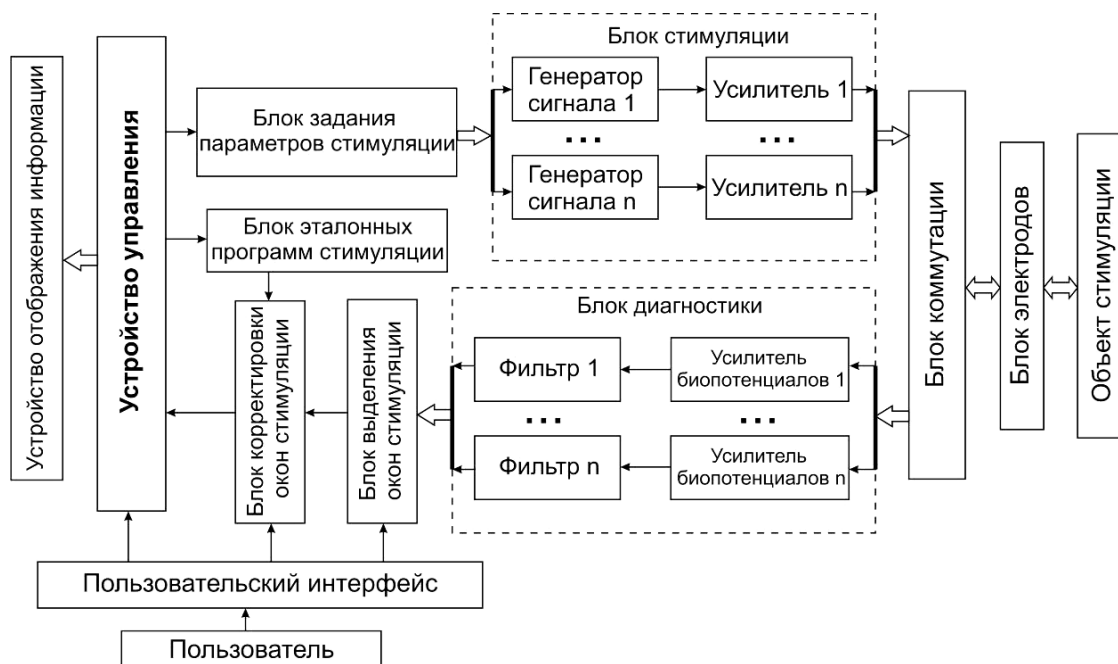


Рис. 4. Структурная схема технической системы многоканальной электростимуляции для управляемого изменения двигательного навыка человека

В соответствии с разработанной программой многоканальной электростимуляции и заданными параметрами стимулирующего сигнала (блок задания параметров стимуляции) блок стимуляции формирует стимулирующий сигнал для каждого канала с учетом временной структуры следования окон стимуляции и амплитуды стимулирующего сигнала в каждом окне стимуляции.

Для стимуляции и съема биоэлектрической активности мышц используются одни и те же пары электродов (блок электродов), подключаемые с помощью блока коммутации к блоку диагностики в режиме съема многоканальных электромиограмм и к блоку стимуляции – в режиме многоканальной электростимуляции.

Закключение. В результате проведенного исследования предложен метод управляемого изменения двигательного навыка человека на основе многоканальной электростимуляции, программа которой разрабатывается индивидуально и соответствует особенностям функциональной структуры движения человека и его двигательным способностям. Для функциональной диагностики двигательных способностей человека и оценки уже сформированного двигательного стереотипа предлагается комплексный анализ пространственно-временной и иннервационной структуры движения путем построения и анализа электромиографического портрета движения. Электромиографический портрет движения позволяет оценить функциональное состояние нервно-мышечного аппарата человека и межмышечную координацию, определить последовательность включения мышц в процессе выполнения движения и исследовать распределение усилий работающих мышц по фазам движения. Программа многоканальной электростимуляции разрабатывается индивидуально на базе построенного электромиографического портрета исследуемого движения с последующей корректировкой окон стимуляции в зависимости от целевой функции.

Рассмотрена техническая система многоканальной электростимуляции с программным управлением параметрами стимулирующих сигналов и временной последовательностью их следования в соответствии с необходимой структурой формируемого или корректируемого двигательного навыка. Техническая система реализует предложенный метод управляемого изменения двигательного навыка человека на основе многоканальной электростимуляции, программа которой разрабатывается индивидуально на базе электромиографического портрета исследуемого движения. Предложенная техническая система позволяет

проводить функциональную диагностику корректируемого двигательного навыка человека посредством многоканальной электромиографии, строить индивидуальную программу многоканальной электростимуляции в соответствии с двигательными особенностями человека и необходимой структурой корректируемого двигательного навыка и непосредственно проводить процедуру многоканальной электростимуляции.

Таким образом, предложенный метод и технические средства управляемого изменения двигательного навыка человека на основе многоканальной электростимуляции позволят искусственно смоделировать работу мышечных групп в соответствии с эталонным образом движения и целевой функцией с учетом особенностей функциональной структуры двигательного навыка человека и его двигательных способностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Покровский, В.М. Физиология человека / В.М. Покровский; под ред. В.М. Покровского, Г.Ф. Коротко. – М.: Медицина, 1997. – 448 с.
2. Анохин, П.К. Принципиальные вопросы общей теории функциональных систем / П.К. Анохин // Принципы системной организации функций. – М.: Наука, 1973. – С. 5 – 61.
3. Бернштейн, Н.А. Очерки по физиологии движений и физиологии активности / Н.А. Бернштейн; под общ. ред. О.Г. Газенко. – М.: Наука, 1990. – 492 с.
4. Коц, Я.М. Физиология мышечной деятельности: учебник для ин-тов физ. культуры / Я.М. Коц; под ред. Я.М. Коца. – М.: Физкультура и спорт, 1982. – 347 с.
5. Шамонина, О.Н. Совершенствование двигательной деятельности человека на основе совместного использования естественной и искусственной активизации мышц: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.04 / О.Н. Шамонина. – Хабаровск, 2005. – 24 с.
6. «Миотон» в управлении движениями / Л.С. Алев. – Киев: Наук. думка, 1980. – 143 с.
7. Витензон, А.С. Разработка метода и средств искусственной коррекции движений посредством электрической стимуляции мышц при патологической ходьбе / А.С. Витензон. – М.: ФЦЭРИ, 2002. – 241 с.
8. Персон, Р.С. Электромиография в исследованиях человека / Р.С. Персон. – М.: Медицина, 1969. – 125 с.
9. Гехт, Б.М. Теоретическая и клиническая электромиография / Б.М. Гехт. – Л.: Наука, 1990. – 229 с.
10. Биомеханическое и электромиографическое исследование ходьбы больных с последствиями позвоночно-спинальной травмы шейного отдела / Е.М. Миронов [и др.] // Вестн. травматологии и ортопедии им. Н.Н. Приорова. – 2005. – № 1. – С. 55 – 61.
11. Экспресс-диагностика функционального состояния нервно-мышечного аппарата спортсмена на основе построения и анализа электромиографического портрета прыжка / Н.С. Давыдова [и др.] // Инженерный вестник. – 2010. – № 2(30). – С. 86 – 91.
12. Методика оценки восстановления функционального состояния опорно-двигательного аппарата спортсмена в посттравматический период / Н.С. Давыдова [и др.] // Современные проблемы курортной терапии: материалы респ. науч.-практ. конф. – Гродно: ГрГМУ, 2010. – С. 170 – 174.

Поступила 23.01.2012

THE METHOD AND TECHNIQUE OF CONTROLLED MODIFICATION OF THE PERSON MOTION PATTERN ON THE BASIS OF MULTICHANNEL ELECTROSTIMULATION

N. DAVYDOVA, A. OSIPOV, M. DAVYDOV, M. MEZHENNAYA

The article is devoted a problem of forming and correction of the person motion pattern with the defined parameters. Physiological mechanisms of the human movement organization have been analyzed. The method of controlled modification of the person motion pattern has been offered. The method is based on the multichannel electrostimulation which program is developed individually. The program corresponds to features of functional structure of movement of the person and its motion abilities. The technical system of multichannel electrostimulation with program control of the parameters of stimulating has been considered.

УДК 621.391.8

**ОБНАРУЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ
И ОЦЕНКА ИХ ПЕРИОДА**

*д-р техн. наук, проф. В.К. ЖЕЛЕЗНЯК, А.В. БАРКОВ
(Полоцкий государственный университет)*

Рассматривается обнаружение периодических импульсных последовательностей и оценка их периода в канале утечки информации. Задачей является выделение периодической импульсной последовательности из шумов высокого уровня. Показано, что обнаружение импульсной последовательности обеспечивается в аддитивной смеси. Эксперименты выполнены моделированием периодической импульсной последовательности с добавлением аддитивных шумов, таких как белый шум, хаотическая импульсная последовательность, телеграфный сигнал. Решение задачи основано на преобразовании Фурье и априорной информации об особенностях спектра периодических импульсных последовательностей. Сравнение и оценка обнаружения осуществлены при помощи оптимального приема и порогового детектирования, выбор порога реализован по известным критериям оптимальности решений в задачах обнаружения сигналов.

Введение. Передача информации в настоящее время реализуется преимущественно в цифровом виде, и в будущем эта тенденция только усилится. Передаваемый сигнал представляется сложным, так как при цифровой передаче в него врезается сигнал синхронизации. Сигналы синхронизации – периодические импульсные последовательности. К сложным сигналам, в частности, относятся видеосигналы, цифровая речь, передача данных в цифровом виде. Структура видеосигнала – это сложный сигнал, который содержит в своем составе импульсы синхронизации, которые в совокупности представляют синхросмесь.

Обнаружение синхросигналов в шумах при оценке защищенности информации представляет признак, по которому принимают решение о наличии канала утечки. Считается, что цифровое сообщение имеет логическую форму двоичных единиц и нулей и с целью передачи проходит этап импульсной модуляции, в результате чего преобразуется в низкочастотные (импульсные) сигналы, или видеоимпульсы [1, с. 84]. Видеоинформацию накапливают, используя полученные данные о параметрах синхронизации. Накопление информации позволяет улучшить отношение сигнал-шум. Выделение синхронизирующих импульсов позволяет проводить синхронное накопление информации, например в виде видеокадров.

Так, телевизионный сигнал, получающийся при передаче статических изображений, т.е. неподвижных объектов, обладает своеобразной особенностью периодичности. При длительной передаче неподвижного изображения, телевизионный сигнал считается статическим с частотой кадров $f_{\text{кадр}}$ [2] и приблизительно периодическим, передаваемым с частотой полукадров, так как корреляционная связь соседних полукадров весьма высока.

Цель данного исследования – обнаружение импульсов синхронизации в шумах высокого уровня для обеспечения синхронного накопления статических кадров.

В работе [3] представлен принцип выделения потоков импульсных сигналов, основанный на совпадении последних и реализуемый с применением накопителей на линиях задержки с положительной обратной связью; недостатками рассмотренного принципа являются ограниченные функциональные возможности.

Обнаружение периодических импульсных последовательностей и оценка их периода опирается на измерение временных интервалов между моментами прихода смежных импульсов входного потока [4].

Решения поставленной задачи в этих работах не рассматривают возможность обнаружения сигнала в шумах высокого уровня, учитывают только влияние мешающих факторов импульсных последовательностей без учета помех в виде белого шума, кроме того, не учитывается возможность сложения амплитуд сигнала и шума.

Обнаружения периодических импульсных последовательностей и оценка их периода могут быть использованы в области измерительной и вычислительной техники, в устройствах совместного обнаружения и оценки параметров случайных потоков импульсов с дискретным временем обнаружения сигналов в канале утечки информации.

Алгоритм обнаружения периодических импульсных последовательностей. Алгоритм решения задачи состоит в том, что для обнаружения периодических импульсных последовательностей и оценки их периода производят измерение и оценку параметров зашумленного сигнала.

Спектр амплитуд периодической импульсной последовательности имеет ряд гармонических составляющих (рис. 1), при этом частота следования импульсов соответствует частоте первой гармоники [6, с. 32]. Генерируют прямоугольные импульсы с заданными параметрами амплитуды, частоты, скваж-

ности и генерируют шум. Прямоугольные импульсы исходного сигнала смешивают с шумом, получают зашумленный сигнал, полученная смесь моделирует канал утечки. Производят разделение сигнала на отрезки равной длительности. Далее осуществляют дискретное преобразование Фурье каждого отрезка зашумленного сигнала. Суммируют результаты преобразования по каждому отрезку по формуле:

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} FFT(S_n),$$

где N – количество отрезков сигнала равной длины; S_n – сигнал указанной длины; FFT – Фурье-преобразование сигнала; S – накопленное Фурье-преобразование отрезков сигнала.

По данным преобразования Фурье, полученного в результате накопления, формируют спектр амплитуд зашумленного сигнала, по которому определяют гармонику с наибольшей амплитудой, без учета значения нулевой гармоники. Частоту гармоники с наибольшей амплитудой сравнивают с частотой следования импульсов f исходного сигнала, обнуляют из спектра амплитуд его

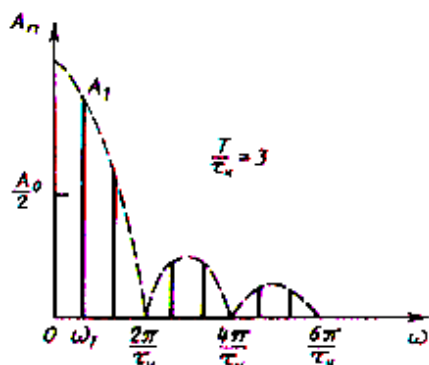


Рис. 1. Спектр амплитуд периодической импульсной последовательности

составляющие, не кратные частоте следования импульсов f исходного сигнала (частота является априорно известной информацией при генерации прямоугольных импульсов), и нулевую гармонику. Производят обратное дискретное преобразование Фурье обработанного (после обнуления) сигнала, сравнивают полученный сигнал с исходным, из которого удалена его постоянная составляющая. Делают вывод о соответствии полученного сигнала исходному, на основании чего принимают решение об обнаружении исходного сигнала. Сравнение и оценку обнаружения производят при помощи оптимального приема и порогового детектирования, выбор порога осуществляют по известным критериям оптимальности решений в задачах обнаружения сигналов [5, с. 33], а за оценку периодов обнаруженных импульсных последовательностей принимают частоту гармоники спектра амплитуд с наибольшей амплитудой, частота которой соответствует частоте следования импульсов.

Шум может быть различной структуры: белый, телеграфный сигнал, хаотическая импульсная последовательность (ХИП).

Хаотическую импульсную последовательность генерируем на основании случайного процесса, в качестве которого используем белый гауссовый шум. Вычисление некоторых характеристик выбросов случайных процессов (среднее число и дисперсия числа выбросов, распределение выбросов по длительности и др.) можно свести к рассмотрению аналогичных характеристик для случайных последовательностей импульсов (часто прямоугольной формы), получающихся в результате неинерционного нелинейного преобразования специального вида (ограничения) исходного случайного процесса [7].

Для преобразования белого гауссового шума в ХИП-сигнал используем смещенный идеальный симметричный ограничитель. Такой нелинейный элемент преобразует воздействующий на него случайный процесс в случайную последовательность биполярных импульсов с фиксированной высотой. При этом положительные выбросы случайной функции, превышающие уровень C , трансформируются в последовательность положительных прямоугольных импульсов, а интервалы между положительными выбросами – в последовательность отрицательных прямоугольных импульсов [7]. Различные шумы изменяют структуру сигнала и его спектр по-разному. Так, спектр белого шума равномерен по всей полосе частот. Спектр ХИП и телеграфный сигнал по своей форме подобны спектру периодической импульсной последовательности. Таким образом, большая часть энергии ХИП сосредоточена в полосе нижних частот, а как известно, до 90 % энергии периодических последовательностей содержится в первых трех лепестках огибающей спектра (см. рис. 1). Недостатком при генерации шумовых сигналов является ограниченная полоса генераторов шума, формируемых с помощью шумовых диодов. Спектральная плотность видеосигнала – широкополосная, спектр – композиционный. Таким образом, белый шум будет подавлять гармоники низких и высоких частот одинаковой энергией, при этом низкочастотные гармоники сигнала, которые содержат большую часть энергии, будут подавляться слабее, чем высокочастотные. Формирование маскирующего сигнала на базе ХИП имеет преимущество. Так, спектральная плотность такого сигнала превышает спектральную плотность шума, сформированного шумовыми диодами, кроме того, огибающие спектральной плотности видеосигнала и ХИП подобны. Спектр плотности ХИП полностью маскирует, белый шум не разрушает очертания крупнодетальных изображений. Сложение сигнала и шума позволяет получить аддитивную смесь, которая моделирует канал утечки информации. Преобразование Фурье представляет сигнал в частотной области, что позволяет оценить частоту следования импульсов и получить спектр смеси сигнал и шум, в которой обнуляют гармоники, соответствующие шумовому сигналу. После обнуления гармоник шума, которые не кратны частоте следования импульса, производят обратное преобразование Фурье. В результате получают сигнал с лучшим отношением сигнал-шум, что позволяет выделить исходную периодическую последовательность импульсов с большей достоверностью.

Возможная реализация обнаружения периодических импульсных последовательностей.

Структурная схема возможной реализации приведена на рисунке 2. Возможный вариант её технической реализации включает генератор 1 прямоугольных импульсов синхронизации единичной амплитуды и генератор 2 шума. К одному выходу генератора 1 последовательно подключен сумматор 3, к выходу генератора 2 – полосовой фильтр 4. К выходу сумматора подключен блок разделения сигнала 5 на равные по времени отрезки. К выходу блока 5 последовательно подключены: блок первого дискретного преобразования Фурье (ДПФ) 6; блок получения спектра амплитуд 7; блок определения максимальной амплитуды в спектре 8; блок фильтрации спектра удалением гармоник, не кратных частоте сигнала, и нулевой составляющей 9; первое обратное преобразование Фурье (ОДПФ) 10, блок выходного сигнала 11. К выходу блока 11 подключен блок 15, который осуществляет оптимальный прием сигнала. К другому выходу генератора 1 последовательно подключены второй блок дискретного преобразования Фурье (ДПФ) 12, фильтрация спектра удалением нулевой составляющей 13 и второе обратное преобразование Фурье (ОДПФ) 14. Выходы блоков 11 и 14 соединены с устройством 15 сравнения входного сигнала и выходного после фильтрации.

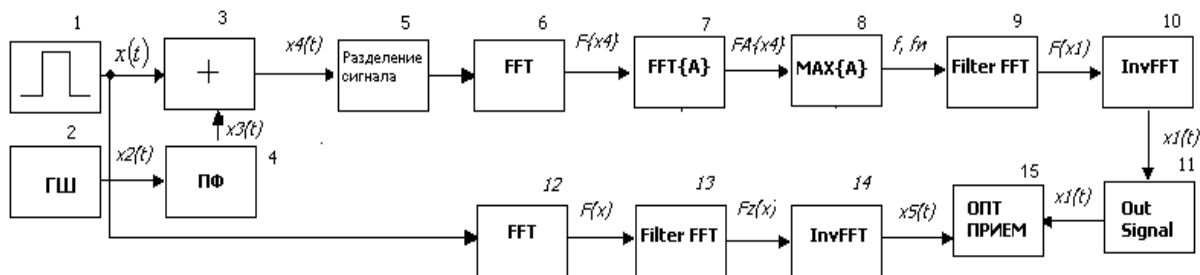


Рис. 2. Структурная схема

Обнаружение периодической импульсной последовательности в аддитивной смеси с шумом осуществляют следующим образом. Блоком 1 генерирует прямоугольные импульсы (рис. 3) с известными параметрами: A – амплитуда; f – частота следования импульсов; $T = 1/f$ – период следования импульсов; f_u – частота импульса; $T_u = 1/f_u$ – период импульса; T/T_u – скважность.

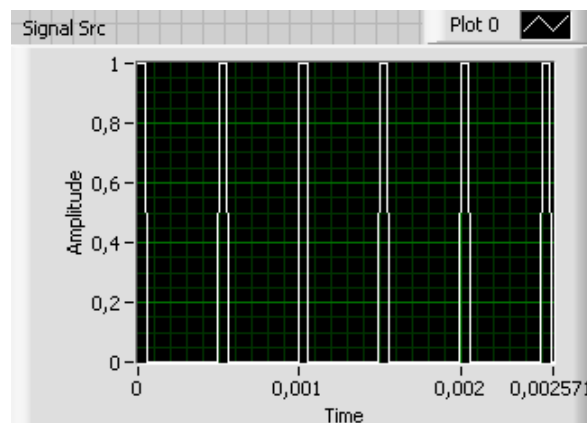


Рис. 3. Последовательность прямоугольных импульсов

Частота следования импульсов составляет 2 кГц, длительность импульса – 10 % его периода, т.е. 0,0001 с, амплитуда импульсов – 1 В, скважность – 10. В качестве шумового сигнала приведем белый гауссовый шум.

Прямоугольные импульсы исходного сигнала смешивают с шумом в сумматоре 3 (см. рис. 2), при этом шумовой сигнал в сумматор 3 подают через полосовой фильтр 4, который ограничивает его полосу, таким образом можно ограничить мощность шума. Блок 3 смешивает исходный сигнал и шум путем их сложения, в результате получаем зашумленный сигнал, который представляет собой аддитивную смесь сигнала и шума. Зашумленный сигнал моделирует канал утечки информации. Блок 5 производит разделение сигнала на отрезки равной длины, принимают отрезки длительностью 1 с при длительности всего сигнала 25 с. Количество накоплений сигнала получаем равным 25 накоплениям.

На рисунке 4 проиллюстрирован спектр зашумленного сигнала до накопления.

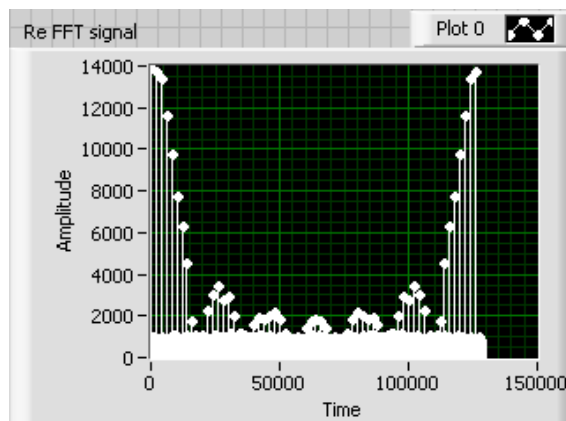


Рис. 4. Спектр зашумленного сигнала

Блок 6 производит преобразование Фурье зашумленного сигнала, получаем представление сигнала в частотной области. После накопления результатов Фурье-преобразования получаем спектр, показанный на рисунке 5.

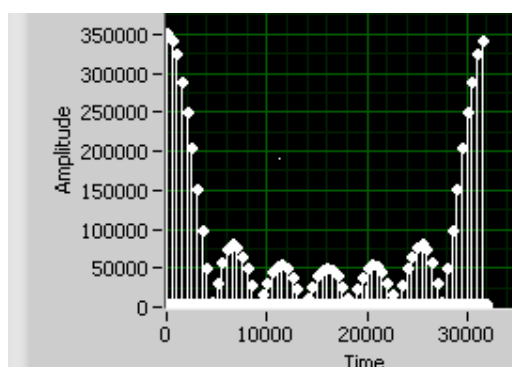


Рис. 5. Спектр зашумленного сигнала после накопления

Блок 7 выделяет спектр амплитуд зашумленного сигнала. По спектру амплитуд определяем гармонику с наибольшей амплитудой. Спектр показывает, что будет выделена гармоника частотой 2000 Гц. За оценку периода обнаруженной импульсной последовательности принимаем частоту гармоники спектра амплитуд с наибольшей амплитудой, выделение этой гармоники происходит в блоке 8. Этот параметр носит информативный характер, при правильном обнаружении данная частота будет соответствовать исходной f . Блок 9 производит фильтрацию спектра, обнуляя составляющие, не кратные основной частоте следования импульсов f (значение этой частоты принимают из априорных данных сигнала). Кратность частот определяем по формуле:

$$f_k = f \cdot k,$$

где k – номер гармоники ($k = 0, 1, 2, \dots, N$); f – частота следования импульсов.

Сигналы незначительно отличаются после фильтрации амплитудами и смещением на постоянную составляющую. Блок 10 выполняет обратное дискретное преобразование Фурье, результат преобразования представляет рисунок 6.

Если сравнить исходный сигнал и сигнал после обратного дискретного преобразования Фурье, видно, что сигнал восстановлен с некоторыми искажениями по форме, однако значительно отличается от зашумленного сигнала. Блок 11 представляет зашумленный сигнал во временной форме. Блок 12 производит преобразование Фурье исходной последовательности импульсов. Блок 13 удаляет из спектра исходного сигнала постоянную составляющую. Блок 15 служит для сравнения сигналов и принятия решения о выделении сигнала из шума о соответствии полученного сигнала исходному, может быть выполнен в виде взаимно корреляционного и порогового устройства. В блок сравнения подаются сигналы, и блок принимает решение о соответствии сигнала исходному. Соответствие сигнала исходному определяют с

помощью оптимального приема и порогового детектирования, выбор порога осуществляется по известным критериям оптимальности решений в задачах обнаружения сигналов [5, с. 33]. За оценку частоты следования импульсной последовательности принимают значение, которое получено в блоке 8, равное 2000 Гц, что соответствует исходному сгенерированному значению.

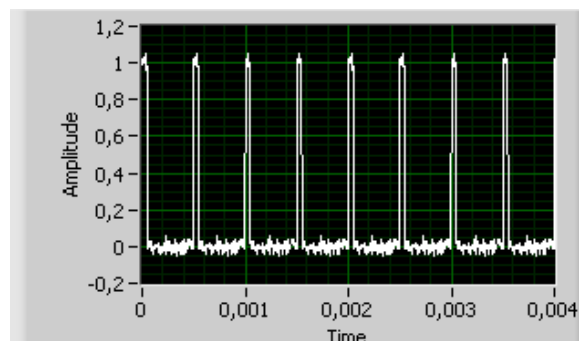


Рис. 6. Импульсная последовательность после ОДПФ

Заключение. Исследовано обнаружение периодических импульсных последовательностей и импульсов синхронизации в шумах высокого уровня при воздействии различных помех и выделение их из аддитивной смеси с шумом. Показана возможность обнаружения периодических импульсных последовательностей из шумов, что позволяет производить оценку параметров последовательности, восстанавливать исходные, зашумленные импульсы, принимать решение о соответствии восстановленного сигнала исходному сигналу.

Обнаружение и выделение периодических импульсных последовательностей позволяет проводить дальнейшую обработку видеосигнала с целью выделения информационной составляющей, речевой информации в цифровой форме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скляр, Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Б. Скляр; пер. с англ. – 2-е изд., испр. – М.: Издат. Дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
2. Пескин, А.Е. Мировое вещательное телевидение. Стандарты и системы: справочник / А.Е. Пескин, В.Ф. Труфанов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2004. – 308 с.
3. Лезин, Ю.С. Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов / Ю.С. Лезин. – М.: Сов. радио, 1969. – 320 с.
4. Патент Российской Федерации 2251704, МПК G01R23/02; опубл. 10.05.2005.
5. Помехоустойчивость информационных радиосистем управления: учеб. пособие / А.Г. Охонский [и др.]. – М.: МГАП «Мир книги», 1993. – 216 с.
6. Денисенко, А.Н. Статистическая теория радиотехнических систем / А.Н. Денисенко. – М.: АРИ, 2007. – 200 с.
7. Тихонов, В.И. Выбросы случайных процессов / В.И. Тихонов. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. – 392 с.

Поступила 02.03.2012

DETECTION OF PERIODIC PULSE SEQUENCES AND THEIR ESTIMATION PERIOD

V. ZHELEZNYAK, A. BARKOV

We consider the detection of periodic pulse sequences and estimation of their time in the channel information leakage. The objective is to allocate a periodic pulse sequence of high-level noise. Detection of a pulse sequence is provided in the additive mixture. The experiments were carried out simulations of the periodic pulse sequence with the addition of additive noise, such as white noise, the chaotic pulse train, a telegraph signal solution of the problem based on Fourier transform and prior information about the features of the spectrum of periodic pulse sequences. Comparison and evaluation of the detection is carried out with the best reception and detection threshold, the choice of threshold is carried out by the known criteria for optimal solutions in problems of signal detection.

УДК 004.7

МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК БЕСПРОВОДНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ОДНОРАНГОВЫХ СЕТЕЙ КАК КОМБИНАЦИЙ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОБЩЕЙ ПАМЯТЬЮ

И.А. АДУЦКЕВИЧ, канд. техн. наук, доц. В.С. САДОВ
(Белорусский государственный университет, Минск)

Исследуются характеристики беспроводных одноранговых сетей с использованием теории массового обслуживания. На основании проведенных исследований разработан алгоритм моделирования комбинации систем массового обслуживания требований случайного объема с ограниченным объемом общей памяти. Приведены результаты моделирования системы массового обслуживания с абсолютным приоритетом обслуживания требований двух классов в комбинациях с системами массового обслуживания с относительным приоритетом, справедливым разделением процессора (Egalitarian Process Sharing – EPS), произвольным ранним обнаружением (Random Early Detection – RED). Показано, что использование комбинаций систем массового обслуживания с общей памятью позволяет оптимизировать характеристики сети, предъявляемые для различных типов трафика.

Введение. Беспроводные одноранговые сети с ячеистой топологией используются в ситуации, когда необходимо организовать сеть между вычислительными устройствами в условиях отсутствия либо нежелательности использования инфраструктуры, обеспечивающей сетевое взаимодействие. В этом случае мобильные устройства могут создать временную сеть для обеспечения связи в данный момент времени, другими словами – организовать сеть «на лету». Беспроводные одноранговые децентрализованные самоорганизующиеся сети способны организовать обмен информацией без поддержки какой-либо фиксированной инфраструктуры. Каждый узел такой сети способен генерировать данные, адресованные любому другому узлу в сети. Все узлы сети при необходимости обеспечивают возможность ретрансляции данных конечному адресату. В общем случае беспроводная одноранговая сеть может быть подключена к другим сетям передачи данных через один или несколько узлов, выполняющих функцию шлюза. Поддержка многоскачковой передачи данных в беспроводных одноранговых сетях является ключевым отличием данного типа сетей от других беспроводных телекоммуникационных систем, в которых задачу управления потоками данных выполняют маршрутизаторы (точки доступа).

Область применения беспроводных одноранговых сетей можно определить исходя из преимуществ, которыми они обладают:

- 1) возможность быстрого развертывания и свертывания;
- 2) отсутствие затрат на фиксированную инфраструктуру;
- 3) уменьшение суммарных затрат энергии за счет многоскачковой передачи данных;
- 4) иерархические и распределенные механизмы управления и контроля;
- 5) возможность передачи данных узлам, находящимся за пределами видимости.

Данные сети могут найти широкое применение в различных сферах деятельности человека. Возможно создание небольших мобильных устройств, оборудованных видеокамерами, звуковыми датчиками, датчиками давления и т.д., которые могут быть развернуты в любой пересеченной местности, образуя, таким образом, беспроводные сенсорные сети для сбора информации о местоположении объектов, экологической информации и т.п. Минимальное конфигурирование и быстрое развёртывание позволяет применять данные сети в чрезвычайных ситуациях, таких как природные катастрофы и военные конфликты.

Моделирование беспроводных одноранговых сетей. В беспроводных одноранговых сетях любой узел может устанавливать соединение с несколькими другими узлами в зоне своего радиопокрытия, а также каждый узел, при необходимости, может выступать в роли ретранслятора для передачи данных до конечного получателя. Вне зависимости от способов радиопередачи и модели передвижения узлов топология спонтанной сети в любой фиксированный момент времени может быть представлена в виде графа [1]. Для описания спонтанных сетей с помощью графов узлы сети сопоставляются с вершинами графа, а соединения между узлами соответствуют ребрам графа (рис. 1).

Узлы в беспроводных одноранговых сетях передают данные, создаваемые в процессе работы устройств, подключенных к узлу (например, микрофон, различные датчики, видеокамера и т.д.), а также данные, принятые от соседних узлов для ретрансляции. Для простоты изложения будем называть их собственными данными, или трафиком, и ретранслируемыми данными соответственно. Исходя из этого об-

щее количество информации, передаваемое узлом, сильно зависит от такой характеристики сети, как среднее расстояние между узлами, другими словами, от среднего количества скачков между исходным узлом и узлом назначения.

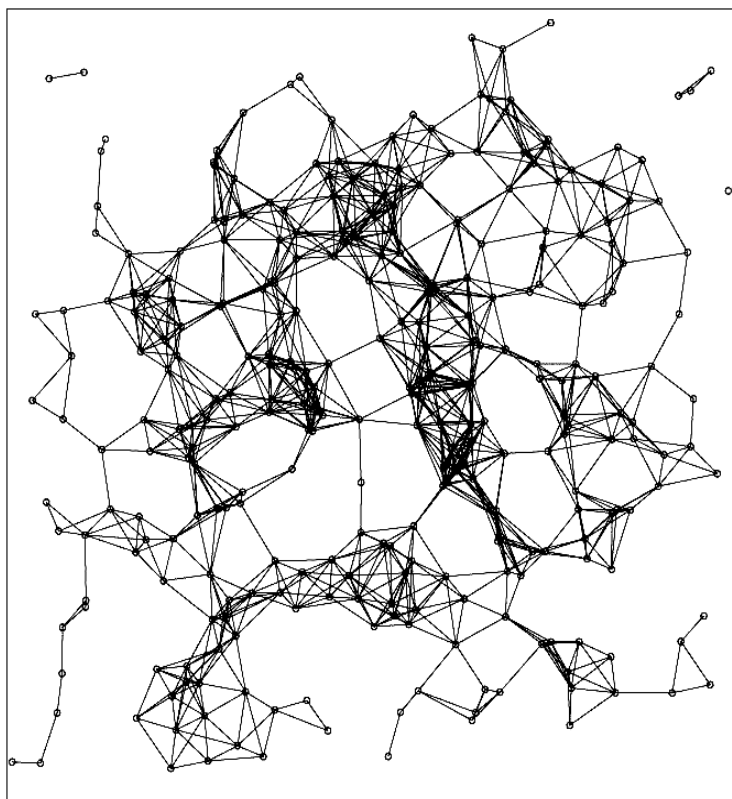


Рис. 1. Пример топологии беспроводной одноранговой сети
(точки на рисунке представляют собой узлы сети, а линии означают беспроводные соединения между узлами)

Обычно данные, создаваемые устройствами, подключенными к узлу, принято моделировать с помощью простейшего потока событий [2; 3]. Полагая, что все узлы сети идентичны (к ним подключены одни и те же устройства, генерирующие трафик), будем считать, что средние значения генерируемого собственного трафика для каждого узла за фиксированный промежуток времени одинаковы. Как известно, для простейшего потока событий интенсивность потока λ имеет смысл среднего числа событий, происходящих в единицу времени. Тогда вероятность того, что за промежуток t произойдет k событий, будет равна

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \quad (1)$$

Так как среднее расстояние между узлами в сети есть $E h$, то в среднем между любыми двумя узлами находится $E h - 1$ узлов-ретрансляторов. Поэтому для равномерно распределенных по всей зоне обслуживания сети узлов справедливо предположение, что любой узел в сети может быть ретранслятором трафика для любого другого узла с вероятностью $\frac{E h - 1}{N - 1}$, а ожидаемый поток событий будет равен $\frac{\lambda(E h - 1)}{N - 1}$. Учитывая, что любой узел в сети может быть ретранслятором для $N - 1$ других узлов, и принимая во внимание свойство суммы простейших потоков [2], интенсивность потока ретранслируемого трафика будет равна $\lambda(E h - 1)$. Очевидно, что суммарный трафик, передаваемый узлом, будет состоять из суммы собственного и ретранслируемого трафиков:

$$\Lambda = \lambda + \lambda(E h - 1) = \lambda E h. \quad (2)$$

Тогда вероятность того, что за время t узел передаст сообщение, будет равна

$$A(t) = 1 - e^{-\Lambda t} = 1 - e^{-\lambda E h t}. \quad (3)$$

Использование простейшего потока событий при моделировании трафика в сетях позволяет снизить вычислительную нагрузку при оценке пропускной способности и емкости сети. Однако необходимо учитывать влияние приоритетности пакетов, а также различных способов организации очередей и дисциплин обслуживания. Требования, накладываемые на различный тип трафика, приводят к необходимости выбора дисциплины обслуживания, которая лучшим образом позволит соблюдать установленный уровень качества обслуживания (QoS). Чаще всего параметры, фигурирующие в разнообразных определениях качества обслуживания, регламентируют следующие показатели работы сети [4]:

- пропускная способность;
- задержки передачи пакетов;
- уровень потерь и искажений пакетов;
- среднеквадратичное отклонение задержки – «джиттер».

В трафике любой сети можно выделить две основные части: полезный трафик, несущий информационные сообщения, и служебный трафик, обеспечивающий целостное функционирование сети. Полезный трафик может иметь различный характер, например, быть потоком пакетов телефонных сообщений, электронной почты, видеовещания, HTTP-пакетов, передающих Web-страницы, и т.п. Если передачу потоков разных приложений обеспечивает одна и та же сеть с едиными протоколами и законами управления, ее называют мультисервисной [5].

Характеристики различных систем массового обслуживания (далее – СМО) требований случайного объема с ограниченной памятью на сегодняшний день хорошо изучены в теории массового обслуживания [2]. Но поскольку современные сети являются мультисервисными, то для моделирования узлов таких сетей имеет смысл ввести комбинацию СМО с общей памятью для обработки различных типов трафика. Таким образом, общая динамическая память является одним из способов оптимизации работы всей сети, так как позволяет перераспределять память в реальном времени между устройствами, обрабатывающими различные виды трафика.

Модели комбинаций систем массового обслуживания с общей памятью. В рамках данного исследования были рассмотрены СМО $M/G/1/\infty(V)$, имеющие существенные различия по способу обработки требований, а именно:

- СМО с приоритетным обслуживанием (абсолютным и относительным) [6];
- СМО со справедливым разделением процессора (Egalitarian Process Sharing – EPS) [7; 8];
- СМО с произвольным ранним обнаружением (Random Early Detection – RED) [9];
- их комбинации.

Под комбинацией систем массового обслуживания будем понимать совместную работу описанных выше СМО, которые используют общую ограниченную память. При построении таких комбинаций СМО получение аналитического выражения их характеристик является крайне сложной задачей, так как необходимо учитывать влияние одной стохастической системы на другую. Поэтому в рамках проведенного исследования мы ограничились построением имитационных моделей.

В данной работе для построения исходного алгоритма моделирования и проверки его функционирования используется классическая СМО $M/M/1/\infty(V)$, с заранее известными характеристиками [2]. Этот алгоритм является основой для моделирования рассматриваемых комбинаций СМО.

Структура алгоритма базируется на особых состояниях СМО. Особыми являются состояния прихода нового либо завершения обслуживания ранее поступившего требования [10]. В момент завершения или прихода нового требования пересчитываются статистические данные СМО:

- вероятность потери требования;
- время нахождения требования в системе;
- среднеквадратичное отклонение времени ожидания в системе.

На рисунке 2 представлена общая структурная схема алгоритма.

Следует отметить, что при моделировании по разработанному алгоритму интенсивности входных потоков умножаются на среднее расстояние между узлами $E h$, тогда, используя выражения (2), можно получить интенсивность суммарного трафика, передаваемого узлом.

Загрузка системы ρ определяется как отношение интенсивности входного потока к среднему числу требований, обслуживаемых в течение единицы времени

$$\rho = \frac{\lambda E h}{\mu}.$$

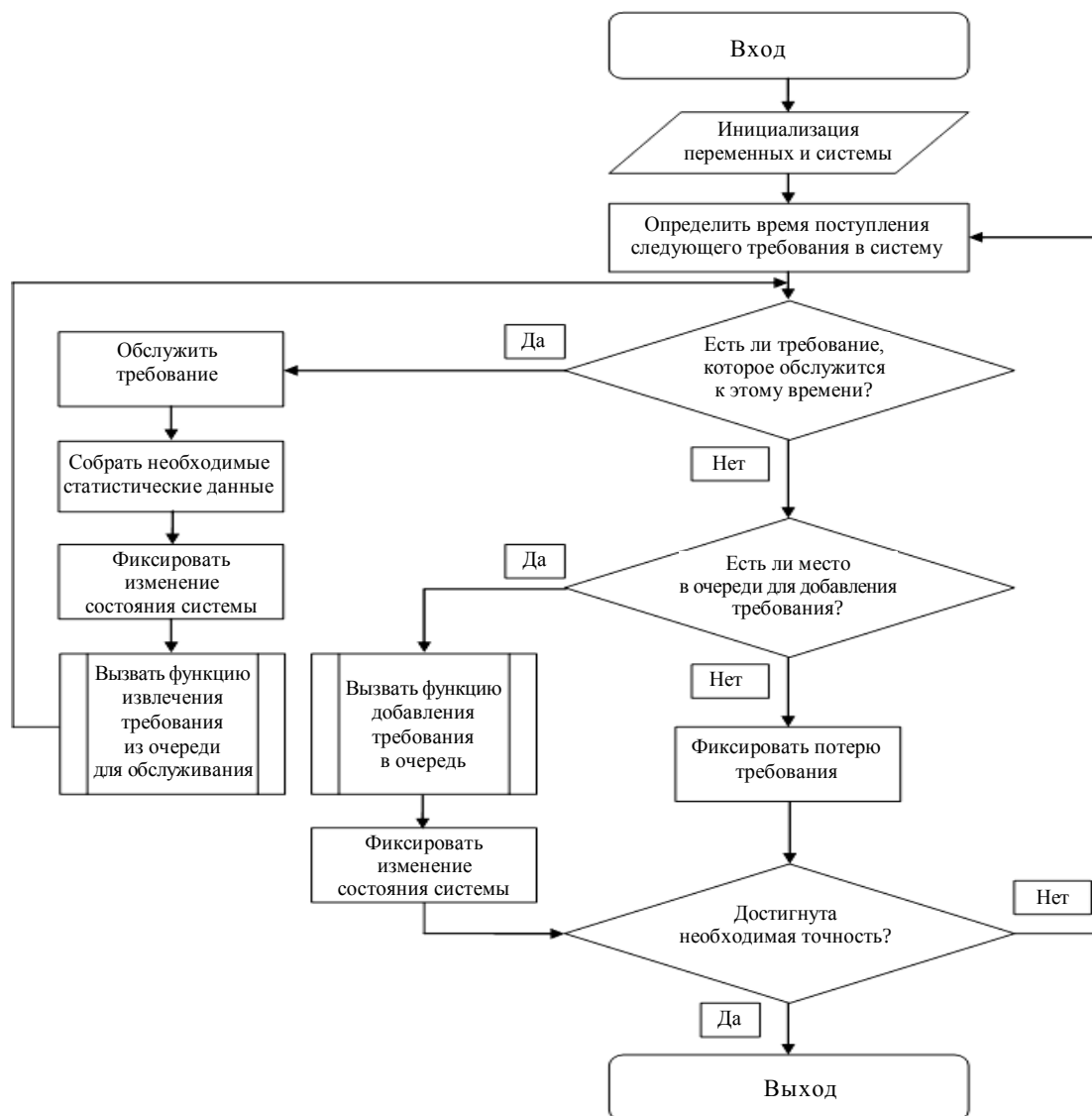


Рис. 2. Структурная схема имитационной модели функционирования системы массового обслуживания

Комбинация системы с абсолютным приоритетом с другими системами. Ниже представлен один из результатов моделирования с использованием разработанного алгоритма. Все отдельные системы характеризуются общими параметрами: время обслуживания не зависит от объема требования и имеет экспоненциальное распределение со средним значением времени обслуживания $\mu = 1$ требований в единицу времени. Объем требования имеет равномерное распределение с параметрами $a = 0,05$ и $b = 1,95$ единиц объема. Интенсивность поступающих на вход системы требований для непероритетных систем $\lambda = 0,2$ требований в единицу времени, для пероритетных систем $\lambda_1 = 0,15$ и $\lambda_2 = 0,05$. Стоит отметить, что общая интенсивность требований двух пероритетов остается постоянной – $\lambda = 0,2$ требований в единицу времени. Среднее расстояние между узлами сети изменяется в интервале $4,5 < E h < 5,3$. Для RED СМО значения верхнего и нижнего порогов интервала активного управления очередью приняты равными $c = 100$ и $d = 200$ соответственно, максимальная вероятность потерь для активного управления очередью $p_{\max} = 0,5$. Комбинация характеризуется общей ограниченной динамической памятью $V = 400$ единиц.

Рассмотрим значения, полученные в результате моделирования комбинаций СМО на примере влияния СМО с относительным приоритетом, справедливым разделением процессора, RED-системы на СМО с абсолютным приоритетом.

На рисунке 3 представлены зависимости вероятности потери требования p_{Π} в СМО с абсолютным приоритетом от загрузки системы ρ .

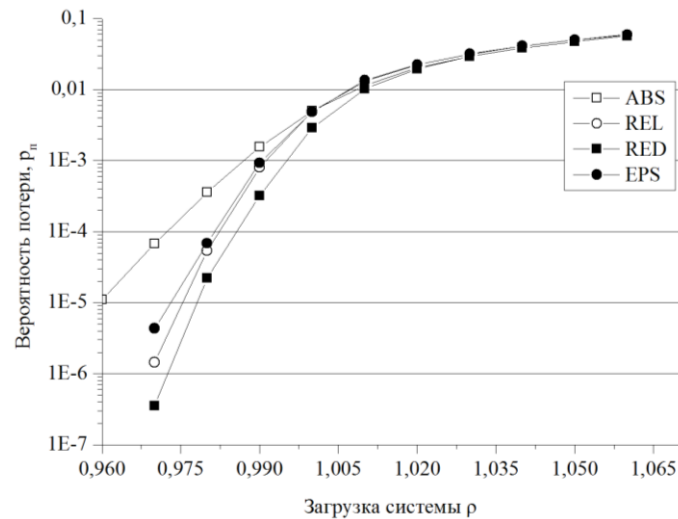


Рис. 3. Зависимость вероятности потери требования от загрузки СМО с абсолютным приоритетом:
 ABS – работа изолированной СМО; REL – работа в комбинации с СМО с относительным приоритетом;
 RED – работа в комбинации с RED-системой; EPS – работа в комбинации с СМО со справедливым разделением процессора

Как видно из результатов моделирования, при работе СМО с абсолютным приоритетом в комбинации с другими СМО при выполнении условия $\rho < 1$ можно достичь снижения вероятности потери требования, причем наиболее эффективно ведет себя комбинация с СМО RED. В данном случае предотвращается перегрузка памяти, и оставшаяся память используется второй СМО для размещения в очереди своих требований. При условии $\rho > 1$ вероятность потери требования для всех рассмотренных случаев ведет себя одинаково.

На рисунках 4 и 5 представлены зависимости времени нахождения требования первого и второго приоритетов в анализируемой СМО.

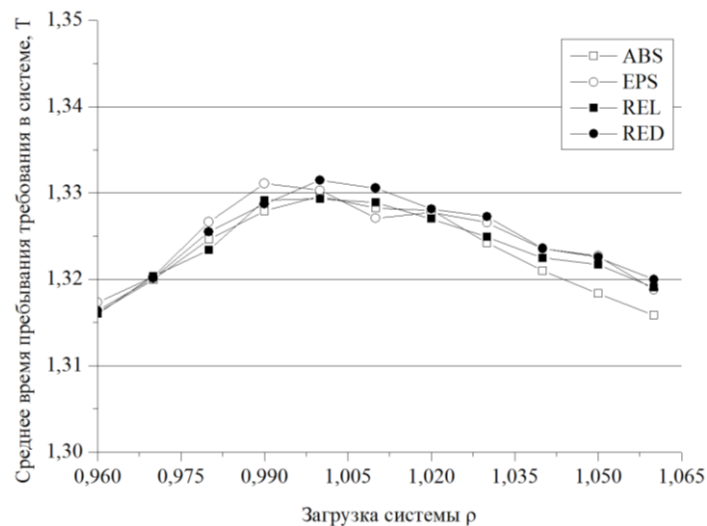


Рис. 4. Зависимость среднего времени нахождения требований первого приоритета от загрузки СМО с абсолютным приоритетом:
 ABS – работа изолированной СМО; EPS – работа в комбинации с СМО со справедливым разделением процессора;
 REL – работа в комбинации с СМО с относительным приоритетом; RED – работа в комбинации с RED-системой

При работе в комбинации системы практически не оказывают влияния на среднее время нахождения требований первого приоритета в области, где $\rho < 1$. При $\rho > 1$ наблюдается небольшое увеличение этого времени, что свидетельствует об увеличении средней длины очереди требований первого приоритета. Что касается среднего времени нахождения требования второго приоритета в системе, то использование общей памяти отрицательно влияет на него, что говорит об увеличении средней длины очереди этого требования. Наиболее сильное влияние на эти параметры в комбинации систем массового обслуживания оказывает СМО RED.

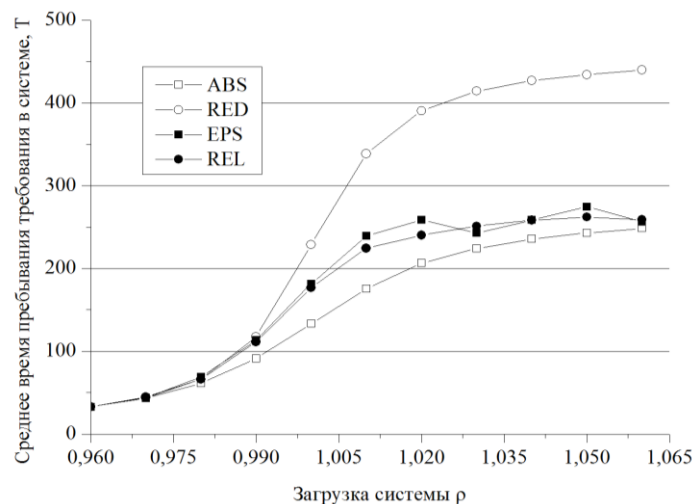


Рис. 5. Зависимость среднего времени нахождения требований второго приоритета от загрузки СМО с абсолютным приоритетом:

ABS – работа изолированной СМО; RED – работа в комбинации с RED-системой; EPS – работа в комбинации с СМО со справедливым разделением процессора; REL – работа в комбинации с СМО с относительным приоритетом

Заключение. В результате проведенного исследования определена степень влияния общей памяти на характеристики комбинаций различных СМО. Построенные имитационные модели систем массового обслуживания с различными дисциплинами обслуживания позволили оценить возможность улучшения характеристик сетей. Создана программная модель систем массового обслуживания на языке программирования Java. Исходные коды программы доступны по адресу: <https://mssmodel.svn.sourceforge.net/svnroot/mssmodel/>. Предложенный подход может быть применен к анализу беспроводных одноранговых сетей, для которых трафик может быть представлен простейшими потоками требований случайного объема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Райгородский, А.М. Модели случайных графов и их применения / А.М. Райгородский. – М. – Ижевск: НИЦ «РХД», 2009. – 325 с.
2. Тихоненко, О.М. Моделирование процессов и систем обработки информации / О.М. Тихоненко. – Минск: БГУ, 2008.
3. Бочаров, П.П. Теория массового обслуживания / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. – М.: Изд-во РУДН, 1995.
4. Кучерявый, А.Е. Сети связи следующего поколения / А.Е. Кучерявый, А.Л. Цуприков. – М.: ФГУП ЦНИИС, 2006. – 278 с.
5. Бурдин, А.В. Общие тенденции эволюции современных сетей связи / А.В. Бурдин. – М., РАН, 2006.
6. Адуцкевич, И.А. Система с ограниченной памятью и абсолютным приоритетом / И.А. Адуцкевич, О.М. Тихоненко // Электроника инфо. – 2009. – № 4. – С. 50 – 54.
7. Яшков, С.Ф. Эгалитарное разделение процессора / С.Ф. Яшков, А.С. Яшкова // Информационные процессы. – Т. 6, № 4. – 2006. – С. 396 – 444.
8. Тихоненко, О.М. Система обслуживания с разделением процессора и ограниченными ресурсами / О.М. Тихоненко // Автоматика и телемеханика. – № 5. – 2010. – С. 84 – 98.
9. Королькова, А.В. К вопросу о классификации алгоритмов RED / А.В. Королькова, Д.С. Кулябов, А.И. Черноианов // Вестн. РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». – № 3. – 2009. – С. 34 – 46.
10. Апанасович, В.В. Цифровое моделирование стохастических систем / В.В. Апанасович, О.М. Тихоненко. – Минск: Университетское, 1986. – 126 с.

Поступила 22.02.2012

COMBINATION OF QUEUING SYSTEMS WITH SHARED MEMORY AS A MODEL OF THE WIRELESS AD-HOC NETWORK

I. ADUTSKEVICH, V. SADOV

In this paper we study performance of the wireless ad-hoc networks with queuing system theory. We developed the algorithm for modeling a combination of queuing systems with non-homogenous customers and a limited amount of shared memory. We discuss the results acquired for queuing system with non-homogenous customers with absolute priority modeled in combination with different types of queuing system, namely, Egalitarian Process Sharing system, relative priority system, Random Early Detection system. Finally, we found that the use of shared memory can optimize the performance of network.

МАТЕМАТИКА

UDC 517.968

ON SOLUTIONS OF INTEGRAL EQUATIONS WITH REFLECTIONS

NGUYEN VAN MAU, NGUYEN THI GIANG
(Hanoi University of Science, Vietnam)

In this paper, we deal with some classes of singular integral equations on the real axes with reflections of the form

$$a_1(t)\varphi(t) + a_2(t)\varphi(-t) + \frac{b_+(t)}{\pi i} \int_{\square} \frac{t\varphi(\tau)d\tau}{\tau^2 - t^2} + \int_{\square} l(\tau, t)\varphi(\tau)d\tau = f(t) \quad (01)$$

and

$$a_1(t)\varphi(t) + a_2(t)\varphi(-t) + \frac{b_+(t)}{\pi i} \int_{\square} \frac{t\varphi(\tau)d\tau}{\tau^2 - t^2} + \int_{\square} l(\tau, t)\varphi(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^m \int_{\square} a_j(t)b_j(\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t). \quad (02)$$

By means of the Riemann boundary value problems and of the systems of linear algebraic equations, we give an algebraic method to obtain all solutions of equations (01) and (02) in a closed form. Note that some special cases of normal solvability of (01) have been considered in [2 – 3].

1. Introduction. Let $X = H^\mu(\square)$, $(0 < \mu \leq 1)$ be the Holder space on $\square$. Consider the following operators in X :

$$(l\varphi)(t) = \int_{\square} l(\tau, t)\varphi(\tau)d\tau, \quad (1.1)$$

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\square} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}, \quad (1.2)$$

where $l(\tau, t)$ is a given function satisfying the Holder condition in $(\tau, t) \in \square \times \square$.

Definition 1.1 (see [2; 4]). We say that the function $l(\tau, t)$ belongs to H_p^{++} ($1 < p < \infty$) if:

(a) $l(z, \zeta)$ is analytic in z and ζ is in the upper half-plane $\square^+$ (if one variable is fixed, then $l(\tau, t)$ is analytic in $\square^+ \cup \square$);

(b) $\int_{\square} |l(\tau + iy, x)|^r d\tau \leq \text{const}$, $r > 1$ for almost $x \in \square$, where constant is independent of y , $y \geq 0$;

(c) $\|l_y\|_{L_p \rightarrow L_p} < \text{const}$, where

$$(l_y\varphi)(x + iy) = \int_{\square} l(\tau, x + iy)\varphi(\tau)d\tau.$$

Write

$$(W\varphi)(t) = \varphi(-t), \quad Q_1 = \frac{1}{2}(I + W), \quad Q_2 = \frac{1}{2}(I - W); \quad (1.3)$$

$$P_1 = \frac{1}{2}(I + S), \quad P_2 = \frac{1}{2}(I - S). \quad (1.4)$$

It is easy to check that (see [2])

$$SW = -WS, \quad SQ_i = Q_jS, \quad WS_i = P_jW, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2;$$

$$X = X_1 \oplus X_2 = X^+ \oplus X^-, \quad X_j = Q_jX, \quad X^+ = P_1X, \quad X^- = P_2X. \quad (1.5)$$

We consider the solvability of the singular integral equations (in X) of the following form

$$a_1(t)\varphi(t) + a_2(t)\varphi(-t) + \frac{b_+(t)}{\pi i} \int_{\square} \frac{t\varphi(\tau)d\tau}{\tau^2 - t^2} + \int_{\square} l(\tau, t)\varphi(\tau)d\tau = f(t) \quad (1.6)$$

and

$$a_1(t)\varphi(t) + a_2(t)\varphi(-t) + \frac{b_+(t)}{\pi i} \int_{\square} \frac{t\varphi(\tau)d\tau}{\tau^2 - t^2} + \int_{\square} l(\tau, t)\varphi(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^m \int_{\square} a_j(t)b_j(\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t), \quad (1.7)$$

where $a_1, a_2, b_+, a_j, b_j \in X$ ($j = 1, 2, \dots, m$) are given.

2. The solvability of equation (1.6)

Rewrite the equation (1.6) in the form

$$a_+(t)(Q_1\varphi)(t) + a_-(t)(Q_2\varphi)(t) + b_+(t)(SQ_1\varphi)(t) + (l\varphi)(t) = f(t), \quad (2.1)$$

where Q_1, Q_2, S, l are the operators defined by (1.1) – (1.3) and $a_{\pm}(t) = a_1(t) \pm a_2(t)$. In this paper, we shall assume that

$$l(-\tau, t) = l(\tau, t), t \in \square. \quad (2.2)$$

It is easy to see that the equation (2.1) is equivalent to the system:

$$\begin{cases} A_1(t)(Q_1\varphi)(t) + C_2(t)(Q_2\varphi)(t) + B_2(t)(SQ_1\varphi)(t) + (Q_1lQ_1\varphi)(t) = f_1(t), \\ A_2(t)(Q_1\varphi)(t) + C_1(t)(Q_2\varphi)(t) + B_1(t)(SQ_1\varphi)(t) + (Q_2lQ_1\varphi)(t) = f_2(t), \end{cases}$$

and this is a consequence of the assumption (2.2), where

$$\begin{aligned} A_{1,2}(t) &= \frac{1}{2}(a_+(t) \pm a_+(-t)), B_{1,2}(t) = \frac{1}{2}(b_+(t) \pm b_+(-t)), \\ C_{1,2}(t) &= \frac{1}{2}(a_-(t) \pm a_-(-t)), f_{1,2}(t) = \frac{1}{2}(f(t) \pm f(-t)). \end{aligned}$$

Write $\varphi_1(t) = (Q_1\varphi)(t)$ and $\varphi_2(t) = (Q_2\varphi)(t)$, then $\varphi_j \in X_j$ for $j = 1, 2$. Hence, we get the following system in $X_1 \times X_2$:

$$\begin{cases} A_1(t)\varphi_1(t) + C_2(t)\varphi_2(t) + B_2(t)(SQ_1\varphi_1)(t) + (Q_1l\varphi_1)(t) = f_1(t), \\ A_2(t)\varphi_1(t) + C_1(t)\varphi_2(t) + B_1(t)(SQ_1\varphi_1)(t) + (Q_2l\varphi_1)(t) = f_2(t). \end{cases} \quad (2.3)$$

Lemma 2.1. *If (φ_1, φ_2) is a solution of the equation (2.3) in $X \times X$, then $(Q_1\varphi_1, Q_2\varphi_2)$ is its solution in $X_1 \times X_2$.*

Proof. Using the representation $\varphi_j = Q_1\varphi_j + Q_2\varphi_j$ we can write (2.3) in the form:

$$\begin{aligned} &A_1(t)(Q_1\varphi_1)(t) + C_2(t)(Q_2\varphi_2)(t) + B_2(t)(SQ_1\varphi_1)(t) + (Q_1lQ_1\varphi_1)(t) - f_1(t) = \\ &= -[A_1(t)(Q_2\varphi_1)(t) + C_2(t)(Q_1\varphi_2)(t) + B_2(t)(SQ_2\varphi_1)(t)] - \\ &= -[A_2(t)(Q_2\varphi_1)(t) + C_1(t)(Q_1\varphi_2)(t) + B_1(t)(SQ_2\varphi_1)(t)] = \\ &= A_2(t)(Q_1\varphi_1)(t) + C_1(t)(Q_2\varphi_2)(t) + B_1(t)(SQ_1\varphi_1)(t) + (Q_2lQ_1\varphi_1)(t) - f_1(t). \end{aligned}$$

Note that

$$\begin{aligned} A_1(t)(Q_1\varphi_1)(t) &= \frac{1}{2}Q_1(a_+(t)\varphi_1(t) + a_+(-t)\varphi_1(-t)) \in X_1, \\ C_2(t)(Q_2\varphi_2)(t) &= \frac{1}{2}Q_1(a_-(t)\varphi_2(t) - a_-(-t)\varphi_2(-t)) \in X_1, \\ B_2(t)(SQ_1\varphi_1)(t) &= \frac{1}{2}Q_1(b_+(t)(S\varphi_1)(t) - b_+(-t)(S\varphi_1)(-t)) \in X_1, \\ (Q_1lQ_1\varphi_1)(t) &\in X_1, f_1(t) = (Q_1f)(t) \in X_1, \\ A_1(t)(Q_2\varphi_1)(t) &= \frac{1}{2}Q_2(a_+(t)\varphi_1(t) + a_+(-t)\varphi_1(-t)) \in X_2, \\ C_2(t)(Q_1\varphi_2)(t) &= \frac{1}{2}Q_2(a_-(t)\varphi_2(t) + a_-(-t)\varphi_2(-t)) \in X_2, \\ B_2(t)(SQ_2\varphi_1)(t) &= \frac{1}{2}Q_2(b_+(t)(S\varphi_1)(t) - b_+(-t)(S\varphi_1)(-t)) \in X_2. \end{aligned}$$

Similarly, it is easy to see that all the left sides of this system belong to X_1 ; however, the right sides belong to X_2 . From (1.5), both sides are equal to zero, which was to be proved.

Thus, it is enough to consider the system (2.3) in the space $X \times X$ only.

From system (2.3), we have:

$$\begin{aligned} C_1(t)f_1(t) - C_2(t)f_2(t) &= [A_1(t)C_1(t) - A_2(t)C_2(t)]\varphi_1(t) + \\ &+ [C_1(t)B_2(t) - C_2(t)B_1(t)](S\varphi_1)(t) + C_1(t)(Q_1l\varphi_1)(t) - C_2(t)(Q_2l\varphi_1)(t), \\ A_1(t)f_2(t) - A_2(t)f_1(t) &= [A_1(t)C_1(t) - A_2(t)C_2(t)]\varphi_2(t) + \\ &+ [A_1(t)B_1(t) - A_2(t)B_2(t)](S\varphi_1)(t) + A_1(t)(Q_2l\varphi_1)(t) - A_2(t)(Q_1l\varphi_1)(t). \end{aligned}$$

2.1. Case of $A_1(t)C_1(t) - A_2(t)C_2(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Now we consider the case of $A_1(t)C_1(t) - A_2(t)C_2(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Then (2.3) can be rewritten in the form

$$\begin{cases} u(t)\varphi_1(t) + v(t)(S\varphi_1)(t) + Q_1[a_-(-t)(l\varphi_1)(t)] = C_1(t)f_1(t) - C_2(t)f_2(t), \\ u(t)\varphi_2(t) + v_1(t)(S\varphi_1)(t) + Q_2[a_+(-t)(l\varphi_1)(t)] = A_1(t)f_2(t) - A_2(t)f_1(t), \end{cases} \quad (2.4)$$

where

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2}[a_+(-t)a_-(t) + a_+(t)a_-(-t)] = Q_1[a_+(t)a_-(-t)], \\ v(t) &= \frac{1}{2}[b_+(t)a_-(-t) - a_-(t)b_+(-t)] = Q_2[b_+(t)a_-(-t)], \\ v_1(t) &= \frac{1}{2}[a_+(t)b_+(-t) + a_+(-t)b_+(t)] = Q_1[a_+(t)b_+(-t)]. \end{aligned}$$

THEOREM 2.1. Suppose that the function $l(\tau, t)$ satisfies the condition (2.2), i.e. $l(-\tau, t) = l(\tau, t)$ and

$$[u(t) + v(t)]^{-1}Q_1[a_-(-t)(l\varphi_1)(t)] \in H_p^{++}, \quad (2.5)$$

then the equation (2.5) admits all solutions in a closed form

$$\varphi(t) = (Q_1\varphi_1)(t) + (Q_2\varphi_2)(t),$$

where $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ is a solution of the system (2.4) in $X \times X$.

Proof. Put

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\square} \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

According to Sokhotski – Plemelj formula, we have

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) \\ (S\varphi_1)(t) = \Phi_1^+(t) + \Phi_1^-(t). \end{cases} \quad (2.6)$$

The first equation of system (2.4) can be written in the form (2.7)

$$u(t)[\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)] + v(t)[\Phi_1^+(t) + \Phi_1^-(t)] + Q_1[a_-(-t)l(\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t))] = C_1(t)f_1(t) - C_2(t)f_2(t).$$

By [1] (Lemma 5.1), we obtain $l\Phi_1^+(t) = 0, l\Phi_1^-(t) \in X^+$ and

$$\Phi_1^+(t) - \frac{Q_1[a_-(-t)l\Phi_1^-(t)]}{u(t) + v(t)} = \frac{u(t) - v(t)}{u(t) + v(t)} \Phi_1^-(t) + \frac{C_1(t)f_1(t) - C_2(t)f_2(t)}{u(t) + v(t)}. \quad (2.7)$$

Put

$$\begin{cases} \Phi^+(t) = \Phi_1^+(t) - \frac{Q_1[a_-(-t)l\Phi_1^-(t)]}{u(t) + v(t)} \in X^+, \\ \Phi^-(t) = \Phi_1^-(t), \end{cases} \quad (2.8)$$

we reduce the first equation of system (2.4) to the following Riemann boundary problem

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad (2.9)$$

where $G(t) = \frac{u(t)-v(t)}{u(t)+v(t)}$, $g(t) = \frac{C_1(t)f_1(t)-C_2(t)f_2(t)}{u(t)+v(t)}$.

Suppose that $u^2(t)-v^2(t)$ is a non-vanishing function on $\square$. Then $G(t), g(t) \in X$ and $G(t) \neq 0$ for any $t \in \square$. Put

$$\begin{aligned} i &= \text{Ind} G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\square} d \ln G(t), \\ \Gamma(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left[\left(\frac{\tau-i}{\tau+i} \right)^{-i} G(\tau) \right] \cdot \frac{d\tau}{\tau-z}, \\ X^+(z) &= e^{\Gamma^+(z)}, \quad X^-(z) = \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^{-i} e^{\Gamma^-(z)}. \end{aligned}$$

Using the results of Riemann boundary problem, we have to consider the following cases:

1. If $i \geq 0$ then the problem (2.9) is solvable and has the general solution given by formula

$$\Phi(z) = X(z) \left[\Psi(z) + \frac{P_{i-1}(z)}{(z+i)^i} \right], \quad (2.10)$$

where

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-z} \quad (2.11)$$

and $P_{i-1}(z) = p_1 + p_2 z + \dots + p_i z^{i-1}$ is a polynomial of degree $i-1$ with arbitrary complex coefficients.

2. If $i < 0$ then the necessary condition for the problem (2.9) to be solvable is that

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau+i)^k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -i.$$

Last conditions can be written as follows

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_1(\tau)f_1(\tau)-C_2(\tau)f_2(\tau)}{X^+(\tau)(u(\tau)+v(\tau))} \frac{d\tau}{(\tau+i)^k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -i. \quad (2.12)$$

If the condition (2.12) is satisfied then all solutions are given by formula

$$\Phi(z) = X(z)\Psi(z).$$

Hence, we have

$$\varphi_1(t) = \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = \Phi^+(t) + \frac{Q_1[a_-(-t)l\Phi^-(t)]}{u(t)+v(t)} - \Phi^-(t)$$

and $\varphi_2(t)$ is defined by (2.4). The proof is complete.

2.2. Case of $A_1(t)C_1(t) - A_2(t)C_2(t) \equiv 0$.

THEOREM 2.2. Suppose that the function $l(\tau, t)$ satisfies the condition (2.2), i.e. $l(-\tau, t) = l(\tau, t)$. Consider the case $u(t) \equiv 0$ and

$$\begin{cases} Q_2[b_+(t)a_-(-t)] \equiv 0, \\ Q_1[a_+(t)b_+(-t)] \equiv 0. \end{cases}$$

If it is the case, the equation (2.1) admits all solutions in a closed form

$$\varphi(t) = (Q_1\varphi_1)(t) + (Q_2\varphi_2)(t),$$

where $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ is a solution of the system (2.4) in $X \times X$.

Proof. Note that

$$\begin{aligned} C_1(t) f_1(t) - C_2(t) f_2(t) &= Q_1[a_-(t) f(-t)], \\ A_1(t) f_2(t) - A_2(t) f_1(t) &= Q_2[a_+(-t) f(t)] \end{aligned}$$

and (2.4) is equivalent to the system

$$\begin{cases} Q_1[a_+(t)a_-(-t)]\varphi_1(t) + Q_2[b_+(t)a_-(-t)](S\varphi_1)(t) + Q_1[a_-(-t)(l\varphi_1)(t)] = Q_1[a_-(t) f(-t)], \\ Q_1[a_+(t)a_-(-t)]\varphi_2(t) + Q_1[a_+(t)b_+(-t)](S\varphi_1)(t) + Q_2[a_+(-t)(l\varphi_1)(t)] = Q_2[a_+(-t) f(t)]. \end{cases} \quad (2.13)$$

The first equation of system (2.13) can be rewritten in the form

$$\begin{aligned} Q_1[a_+(t)a_-(-t)](Q_1\varphi_1)(t) + Q_2[b_+(t)a_-(-t)](Q_2S\varphi_1)(t) + \\ + Q_1[a_-(-t)(l\varphi_1)(t)] = Q_1[a_-(t) f(-t)]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$Q_1[a_+(t)a_-(-t)](Q_2\varphi_1)(t) + Q_2[b_+(t)a_-(-t)](Q_1S\varphi_1)(t) = 0. \quad (2.15)$$

Rewrite the second equation of system (2.13) in the form

$$\begin{aligned} Q_1[a_+(t)a_-(-t)](Q_2\varphi_2)(t) + Q_1[a_+(t)b_+(-t)](Q_2S\varphi_1)(t) + \\ + Q_2[a_+(-t)(l\varphi_1)(t)] = Q_2[a_+(-t) f(t)]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$Q_1[a_+(t)a_-(-t)](Q_1\varphi_2)(t) + Q_1[a_+(t)b_+(-t)](Q_1S\varphi_1)(t) = 0. \quad (2.17)$$

Note that

$$Q_1[a_+(t)a_-(-t)](Q_1\varphi_1)(t) = Q_1[a_+(t)a_-(-t)](Q_1\varphi_1)(t) \in X_1,$$

$$Q_2[b_+(t)a_-(-t)](Q_2S\varphi_1)(t) = Q_2[b_+(t)a_-(-t)](Q_2S\varphi_1)(t) \in X_2,$$

$$Q_1[a_+(t)a_-(-t)](Q_2\varphi_2)(t) = Q_2[a_+(t)a_-(-t)](Q_2\varphi_2)(t) \in X_2$$

and

$$Q_1[a_+(t)b_+(-t)](Q_2S\varphi_1)(t) = Q_1[a_+(t)b_+(-t)](Q_2S\varphi_1)(t) \in X_1.$$

Hence, equation (2.14) and (2.16) are equivalent to the systems:

$$\begin{cases} Q_1[a_+(t)a_-(-t)](Q_1\varphi_1)(t) + Q_1[a_-(-t)(l\varphi_1)(t)] = Q_1[a_-(t) f(-t)], \\ Q_2[b_+(t)a_-(-t)](Q_2S\varphi_1)(t) = 0; \\ Q_2[a_+(t)a_-(-t)](Q_2\varphi_2)(t) + Q_2[a_+(-t)(l\varphi_1)(t)] = Q_2[a_+(-t) f(t)], \\ Q_1[a_+(t)b_+(-t)](Q_2S\varphi_1)(t) = 0. \end{cases}$$

Under the assumption $u(t) \equiv 0$ i.e. $Q_1[a_+(t)a_-(-t)] \equiv 0$. If it is the case, equation (2.15) and equation (2.17) are equivalent to the system:

$$\begin{cases} Q_2[b_+(t)a_-(-t)](Q_1S\varphi_1)(t) \equiv 0, \\ Q_1[a_+(t)b_+(-t)](Q_1S\varphi_1)(t) \equiv 0. \end{cases}$$

Since $Q_2[b_+(t)a_-(-t)] \equiv 0$ and $Q_1[a_+(t)b_+(-t)] \equiv 0$, then equation (2.13) is equivalent to the system:

$$\begin{cases} a_+(t)a_-(-t)(Q_1\varphi_1)(t) + a_-(-t)(l\varphi_1)(t) = a_-(t) f(-t) + z_2(t), \\ a_+(t)a_-(-t)(Q_2\varphi_2)(t) + a_+(-t)(l\varphi_1)(t) = a_+(-t) f(t) + z_1(t), \end{cases} \quad (2.18)$$

where $z_1(t)$ is an arbitrary function in X_1 , $z_2(t)$ is an arbitrary function in X_2 .

a. Suppose that $a_+(t)a_-(-t) \neq 0, \forall t \in \square$.

Since $lQ_2\varphi_1 = 0$, system (2.18) can be written in the form

$$\begin{cases} a_+(t)a_-(-t)(Q_1\varphi_1)(t) + a_-(-t)(lQ_1\varphi_1)(t) = a_-(t) f(-t) + z_2(t), \\ a_+(t)a_-(-t)(Q_2\varphi_2)(t) + a_+(-t)(lQ_1\varphi_1)(t) = a_+(-t) f(t) + z_1(t). \end{cases} \quad (2.19)$$

Since $a_+(t)a_-(-t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, the first equation of the system (2.19) is solvable in a closed form, and $(Q_2\varphi_2)(t)$ is defined by the second equation of (2.19).

If it is the case, the solutions of (2.1) are of the form

$$\varphi(t) = (Q_1\varphi_1)(t) + (Q_2\varphi_2)(t),$$

where $(Q_1\varphi_1)(t), (Q_2\varphi_2)(t)$ is the solution of the system (2.19).

b. If $a_+(t_0) = 0, a_-(-t_0) \neq 0$, the necessary condition for the system (2.18) to be solvable is that

$$a_-(-t_0)(l\varphi_1)(t_0) = a_-(t_0)f(-t_0) + z_2(t_0)$$

$$a_+(-t_0)(l\varphi_1)(t_0) = a_+(-t_0)f(t_0) + z_1(t_0).$$

It follows

$$(l\varphi_1)(t_0) = \frac{a_-(t_0)f(-t_0) + z_2(t_0)}{a_-(-t_0)} = \frac{a_+(-t_0)f(t_0) + z_1(t_0)}{a_+(-t_0)}. \quad (2.20)$$

If the condition (2.20) is satisfied, since the solution belongs to Holder space $H^\mu(\mathbb{R})$, implies (2.18) has solution if $|M(t) - M(t_0)| = o(|t - t_0|^\mu)$, $\lim_{t \rightarrow t_0} M(t) = c_1 \in (-\infty, +\infty)$, where

$$M(t) = \frac{a_-(t)f(-t) + z_2(t) - a_-(-t)(l\varphi_1)(t)}{a_+(t)a_-(-t)}.$$

$|W(t) - W(t_0)| = o(|t - t_0|^\mu)$, $\lim_{t \rightarrow t_0} W(t) = c_2 \in (-\infty, +\infty)$, where

$$W(t) = \frac{a_+(-t)f(t) + z_1(t) - a_+(-t)(l\varphi_1)(t)}{a_+(t)a_-(-t)}.$$

If it is the case, then $(Q_1\varphi_1)(t_0) = c_1, (Q_2\varphi_2)(t_0) = c_2$.

c. If $a_-(-t_0) = 0$, the necessary condition for the system (2.18) to be solvable is that:

$$a_-(t_0)f(-t_0) + z_2(t_0) = 0,$$

$$a_+(-t_0)(l\varphi_1)(t_0) = a_+(-t_0)f(t_0) + z_1(t_0).$$

Since the solution belongs to Holder space $H^\mu(\mathbb{R})$, implies (2.18) has solution if

$$\left| \frac{a_-(t)f(-t) + z_2(t)}{a_+(t)a_-(-t)} - \frac{a_-(t_0)f(-t_0) + z_2(t_0)}{a_+(t_0)a_-(-t_0)} \right| = o(|t - t_0|^\mu),$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{a_-(t)f(-t) + z_2(t)}{a_+(t)a_-(-t)} = d_1 \in (-\infty, +\infty),$$

$|T(t) - T(t_0)| = o(|t - t_0|^\mu)$, $\lim_{t \rightarrow t_0} T(t) = d_2 \in (-\infty, +\infty)$, where

$$T(t) = \frac{a_+(-t)f(t) + z_1(t) - a_+(-t)(l\varphi_1)(t)}{a_+(t)a_-(-t)}.$$

If it is the case, then $(Q_1\varphi_1)(t_0) = c_1, (Q_2\varphi_2)(t_0) = c_2$ and the solutions $\varphi(t_0)$ of (2.1) are written in the form

$$\varphi(t_0) = (Q_1\varphi_1)(t_0) + (Q_2\varphi_2)(t_0).$$

3. The solvability of equation (1.7)

We consider the solvability of the singular integral equations (in X) of the following form

$$a_1(t)\varphi(t) + a_2(t)\varphi(-t) + \frac{b_+(t)}{\pi i} \int_{\square} \frac{t\varphi(\tau)d\tau}{\tau^2 - t^2} + \int_{\square} l(\tau, t)\varphi(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^m \int_{\square} a_j(t)b_j(\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t). \quad (3.1)$$

Denote by N_{b_j} , $j = 1, \dots, m$, the linear functionals on X defined as follows

$$(N_{b_j}\varphi) = \int_{\square} b_j(\tau)\varphi(\tau)d\tau, \varphi \in X.$$

Put $(N_{b_j}\varphi) = \lambda_j$, $j = 1, 2, \dots, m$. We reduce equation (3.1) to the following problem: find solutions φ of equation

$$a_1(t)\varphi(t) + a_2(t)\varphi(-t) + \frac{b_+(t)}{\pi i} \int_{\square} \frac{t\varphi(\tau)d\tau}{\tau^2 - t^2} + \int_{\square} l(\tau, t)\varphi(\tau)d\tau = f(t) - \sum_{j=1}^m \lambda_j a_j(t) \quad (3.2)$$

depended on the parameters $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ and fulfilled the following conditions

$$(N_{b_j}\varphi) = \lambda_j, j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.3)$$

Rewrite this equation in the form

$$a_+(t)(Q_1\varphi)(t) + a_-(t)(Q_2\varphi)(t) + b_+(t)(SQ_1\varphi)(t) + (l\varphi)(t) = f(t) - \sum_{j=1}^m \lambda_j a_j(t), \quad (3.4)$$

where $a_{\pm}(t) = a_1(t) \pm a_2(t)$. In the sequel, we shall assume that

$$l(-\tau, t) = l(\tau, t). \quad (3.5)$$

The equation (3.2) is equivalent to the system:

$$\begin{cases} A_1(t)(Q_1\varphi)(t) + C_2(t)(Q_2\varphi)(t) + B_2(t)(SQ_1\varphi)(t) + (Q_1 l\varphi)(t) = f_1^*(t), \\ A_2(t)(Q_1\varphi)(t) + C_1(t)(Q_2\varphi)(t) + B_1(t)(SQ_1\varphi)(t) + (Q_2 l\varphi)(t) = f_2^*(t), \end{cases}$$

and this is a consequence of the assumption (3.5), where

$$A_{1,2}(t) = \frac{1}{2}(a_+(t) \pm a_+(-t)), \quad B_{1,2}(t) = \frac{1}{2}(b_+(t) \pm b_+(-t)), \quad C_{1,2}(t) = \frac{1}{2}(a_-(t) \pm a_-(-t)),$$

$$f_{1,2}^*(t) = \frac{1}{2} \left\{ \left[f(t) - \sum_{j=1}^m \lambda_j a_j(t) \right] \pm \left[f(-t) - \sum_{j=1}^m \lambda_j a_j(-t) \right] \right\}.$$

Write $\varphi_1(t) = (Q_1\varphi)(t)$ and $\varphi_2(t) = (Q_2\varphi)(t)$, then $\varphi_j \in X_j$ for $j = 1, 2$. Hence, we get the following system in $X_1 \times X_2$:

$$\begin{cases} A_1(t)\varphi_1(t) + C_2(t)\varphi_2(t) + B_2(t)(S\varphi_1)(t) + (Q_1 l\varphi_1)(t) = f_1^*(t), \\ A_2(t)\varphi_1(t) + C_1(t)\varphi_2(t) + B_1(t)(S\varphi_1)(t) + (Q_2 l\varphi_1)(t) = f_2^*(t). \end{cases} \quad (3.6)$$

Lemma 3.1. If (φ_1, φ_2) is a solution of the equation (3.6) in $X \times X$, then $(Q_1\varphi_1, Q_2\varphi_2)$ is its solution in $X_1 \times X_2$.

Thus, it is enough to consider the system (3.6) in the space $X \times X$ only.

Now we consider the case $A_1(t)C_1(t) - A_2(t)C_2(t) \neq 0$, $\forall t \in \square$. Rewrite (3.6) in the form

$$\begin{cases} u(t)\varphi_1(t) + v(t)(S\varphi_1)(t) + Q_1[a_-(-t)(l\varphi_1)(t)] = C_1(t)f_1^*(t) - C_2(t)f_2^*(t), \\ u(t)\varphi_2(t) + v_1(t)(S\varphi_1)(t) + Q_2[a_+(-t)(l\varphi_1)(t)] = A_1(t)f_2^*(t) - A_2(t)f_1^*(t), \end{cases} \quad (3.7)$$

where

$$u(t) = \frac{1}{2}[a_+(-t)a_-(t) + a_+(t)a_-(-t)] = Q_1[a_+(t)a_-(-t)],$$

$$v(t) = \frac{1}{2}[b_+(t)a_-(-t) - a_-(t)b_+(-t)] = Q_2[b_+(t)a_-(-t)],$$

$$v_1(t) = \frac{1}{2}[a_+(t)b_+(-t) + a_+(-t)b_+(t)] = Q_1[a_+(t)b_+(-t)].$$

THEOREM 3.1. Suppose that the function $l(\tau, t)$ satisfies the condition (3.5), i.e. $l(-\tau, t) = l(\tau, t)$ and

$$[u(t) + v(t)]^{-1} Q_1[a_-(-t)(l\varphi_1)(t)] \in H_p^{++}, \quad (3.8)$$

then the equation (3.4) admits all solutions in a closed form

$$\varphi(t) = (Q_1\varphi_1)(t) + (Q_2\varphi_2)(t),$$

where $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ is a solution of the system (3.7) in $X \times X$.

Proof. Put

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\square} \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

according to Sokhotski-Plemelj formula, we have

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t), \\ (S\varphi_1)(t) = \Phi_1^+(t) + \Phi_1^-(t). \end{cases} \quad (3.9)$$

Put

$$\begin{cases} \Phi^+(t) = \Phi_1^+(t) - \frac{Q_1[a_-(-t)l\Phi_1^-(t)]}{u(t) + v(t)} \in X^+, \\ \Phi^-(t) = \Phi_1^-(t), \end{cases} \quad (3.10)$$

we reduce equation the first equation of system (3.7) to the following boundary problem: find pairs of analytic functions on upper and lower half plane $\Phi^+(z), \Phi^-(z)$ and satisfies

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad (3.11)$$

where

$$G(t) = \frac{u(t) - v(t)}{u(t) + v(t)}, \quad g(t) = \frac{C_1(t)f_1^*(t) - C_2(t)f_2^*(t)}{u(t) + v(t)}.$$

Suppose that $u^2(t) - v^2(t)$ is a non-vanishing on $\square$. Then $G(t), g(t) \in X$ and $G(t) \neq 0$ for any $t \in \square$. Put

$$i = \text{Ind} G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\square} d \ln G(t),$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left[\left(\frac{\tau - i}{\tau + i} \right)^{-i} G(\tau) \right] \frac{d\tau}{\tau - z},$$

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, X^-(z) = \left(\frac{z - i}{z + i} \right)^{-i} e^{\Gamma^-(z)}.$$

We have to consider the following cases:

1. If $i \geq 0$ then the problem (3.11) has general solution is given by formula:

$$\Phi(z) = X(z) \left[\Psi(z) + \frac{P_{i-1}(z)}{(z+i)^i} \right], \quad (3.12)$$

where

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} \quad (3.13)$$

and

$$P_{i-1}(z) = p_1 + p_2 z + \dots + p_i z^{i-1}, \quad (3.14)$$

is a polynomial of degree $i - 1$ with arbitrary complex coefficients.

2. If $i < 0$ then the necessary condition for the problem (3.11) to be solvable is that

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau+i)^k} = 0, k = 1, 2, \dots, -i.$$

This condition can be written as follows

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_1(\tau)f_1^*(\tau) - C_2(\tau)f_2^*(\tau)}{X^+(\tau)(u(\tau)+v(\tau))} \frac{d\tau}{(\tau+i)^k} = 0, k = 1, 2, \dots, -i. \quad (3.15)$$

If the condition (3.15) is satisfied then the solution is given by formula:

$$\Phi(z) = X(z)\Psi(z)$$

Hence, we have

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = \\ &= \Phi^+(t) + \frac{Q_1[a_-(t)l\Phi_1^-(t)]}{u(t)+v(t)} - \Phi^-(t) \end{aligned}$$

and $\varphi_2(t)$ is defined by (3.7).

We have

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-z} = B(z) - \sum_{j=1}^m \lambda_j A_j(z),$$

where

$$\begin{aligned} B(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}C_1(\tau)[f(\tau)+f(-\tau)] - \frac{1}{2}C_2(\tau)[f(\tau)-f(-\tau)]}{[u(\tau)+v(\tau)]X^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau-z}, \\ A_j(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}C_1(\tau)[a_j(\tau)+a_j(-\tau)] - \frac{1}{2}C_2(\tau)[a_j(\tau)-a_j(-\tau)]}{[u(\tau)+v(\tau)]X^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau-z}. \end{aligned}$$

1. If $i \geq 0$ then $\Phi(z) = X(z) \left[\Psi(z) + \frac{P_{i-1}(z)}{(z+i)^i} \right]$ and

$$\varphi_1(t) = \Phi^+(t) + \frac{Q_1[a_-(t)l\Phi^-(t)]}{u(t)+v(t)} - \Phi^-(t) = \omega(t) - \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(t) + \sum_{k=1}^i p_k e_k(t),$$

where

$$\omega(t) = X^+(t)B^+(t) - X^-(t)B^-(t) + \frac{Q_1\{a_-(t)l[X^-(t)B^-(t)]\}}{u(t)+v(t)}, \quad (3.16)$$

$$h_j(t) = X^+(t)A_j^+(t) + \frac{Q_1\{a_-(t)l[X^-(t)A_j^-(t)]\}}{u(t)+v(t)} - X^-(t)A_j^-(t), j = 1, \dots, m, \quad (3.17)$$

$$e_k(t) = \frac{X^+(t)t^{k-1}}{(t+i)^i} + \frac{Q_1\left\{a_-(t)l\left[\frac{X^-(t)t^{k-1}}{(t+i)^i}\right]\right\}}{u(t)+v(t)} - \frac{X^-(t)t^{k-1}}{(t+i)^i}, k = 1, \dots, i, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
(S\varphi_1)(t) &= \Phi_1^+(t) + \Phi_1^-(t) = \Phi^+(t) + \frac{Q_1[a_-(-t)l\Phi^-(t)]}{u(t)+v(t)} + \Phi^-(t) = \\
&= X^+(t)B^+(t) + X^-(t)B^-(t) + \frac{Q_1\{a_-(-t)l[X^-(t)B^-(t)]\}}{u(t)+v(t)} - \\
&- \sum_{j=1}^m \lambda_j \{X^+(t)A_j^+(t) + \frac{Q_1\{a_-(-t)l[X^-(t)A_j^-(t)]\}}{u(t)+v(t)} + X^-(t)A_j^-(t)\} + \\
&+ \sum_{k=1}^i p_k \left\{ \frac{X^+(t)t^{k-1}}{(t+i)^i} + \frac{Q_1\left\{a_-(-t)l\left[\frac{X^-(t)t^{k-1}}{(t+i)^i}\right]\right\}}{u(t)+v(t)} + \frac{X^-(t)t^{k-1}}{(t+i)^i} \right\}. \\
(l\varphi_1)(t) &= l[\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)] = -(l\Phi^-(t)) - \\
&- l[X^-(t)B^-(t)] + \sum_{j=1}^m \lambda_j l[X^-(t)A_j^-(t)] - \sum_{k=1}^i p_k l\left[X^-(t)\frac{t^{k-1}}{(t+i)^i}\right].
\end{aligned}$$

From (3.7), we have

$$\begin{aligned}
\varphi_2(t) &= [u(t)]^{-1} \{A_1(t)f_2^*(t) - A_2(t)f_1^*(t) - v_1(t)(S\varphi_1)(t) - Q_2[a_+(-t)(l\varphi_1)(t)]\} = \\
&= [u(t)]^{-1} \left\{ \frac{1}{2}A_1(t)[f(t) - f(-t)] - \frac{1}{2}A_2(t)[f(t) + f(-t)] - \right. \\
&- v_1(t) \left[X^+(t)B^+(t) + X^-(t)B^-(t) + \frac{Q_1\{a_-(-t)l[X^-(t)B^-(t)]\}}{u(t)+v(t)} \right] + Q_2[a_+(-t)l(X^-(t)B^-(t))] \Big\} - \\
&- \sum_{j=1}^m \lambda_j [u(t)]^{-1} \left\{ \frac{1}{2}A_1(t)[a_j(t) - a_j(-t)] - \frac{1}{2}A_2(t)[a_j(t) + a_j(-t)] - \right. \\
&- v_1(t) \left[X^+(t)A_j^+(t) + \frac{Q_1\{a_-(-t)l[X^-(t)A_j^-(t)]\}}{u(t)+v(t)} + X^-(t)A_j^-(t) \right] + Q_2[a_+(-t)l(X^-(t)A_j^-(t))] \Big\} + \\
&+ \sum_{k=1}^i p_k [u(t)]^{-1} \left\{ -v_1(t) \left[\frac{X^+(t)t^{k-1}}{(t+i)^i} + \frac{Q_1\left\{a_-(-t)l\left[\frac{X^-(t)t^{k-1}}{(t+i)^i}\right]\right\}}{u(t)+v(t)} + \frac{X^-(t)t^{k-1}}{(t+i)^i} \right] + \right. \\
&+ Q_2\left\{a_+(-t)l\left[\frac{X^-(t)t^{k-1}}{(t+i)^i}\right]\right\} \Big\} = \delta(t) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \theta_j(t) + \sum_{k=1}^i p_k \xi_k(t),
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= [u(t)]^{-1} \left\{ \frac{1}{2}A_1(t)[f(t) - f(-t)] - \frac{1}{2}A_2(t)[f(t) + f(-t)] - v_1(t) \times \right. \\
&\times \left[X^+(t)A_j^+(t) + \frac{Q_1\{a_-(-t)l[X^-(t)A_j^-(t)]\}}{u(t)+v(t)} + X^-(t)A_j^-(t) \right] + Q_2[a_+(-t)l(X^-(t)A_j^-(t))] \Big\}, \\
\theta_j(t) &= [u(t)]^{-1} \left\{ \frac{1}{2}A_1(t)[a_j(t) - a_j(-t)] - \frac{1}{2}A_2(t)[a_j(t) + a_j(-t)] - v_1(t) \times \right. \\
&\times \left[X^+(t)A_j^+(t) + \frac{Q_1\{a_-(-t)l[X^-(t)A_j^-(t)]\}}{u(t)+v(t)} + X^-(t)A_j^-(t) \right] + Q_2[a_+(-t)l(X^-(t)A_j^-(t))] \Big\},
\end{aligned}$$

$$j = 1, \dots, m.$$

$$\xi_k(t) = [u(t)]^{-1} \left\{ -v_1(t) \left\{ \frac{X^+(t)t^{k-1}}{(t+i)^i} + \frac{Q_1 \left\{ a_-(-t)l \left[\frac{X^-(t)t^{k-1}}{(t+i)^i} \right] \right\}}{u(t)+v(t)} + \frac{X^-(t)t^{k-1}}{(t+i)i} \right\} + \right. \\ \left. + Q_2 \left\{ a_+(-t)l \left[\frac{X^-(t)t^{k-1}}{(t+i)^i} \right] \right\} \right\}, \quad k = 1, \dots, i.$$

We have the solution of (3.2) is given by formula:

$$\varphi(t) = (Q_1\omega)(t) + (Q_2\delta)(t) - \sum_{j=1}^m \lambda_j [(Q_1h_j)(t) + (Q_2\theta_j)(t)] + \sum_{k=1}^i p_k [(Q_1e_k)(t) + (Q_2\xi_k)(t)]. \quad (3.19)$$

Substituting (3.19) into the condition (3.3), we obtain

$$\lambda_i = d_i - \sum_{j=1}^m \lambda_j e_{ij} + \sum_{k=1}^i p_k g_{ik}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.20)$$

where

$$d_i = N_{b_i} ((Q_1\omega)(t) + (Q_2\delta)(t)),$$

$$e_{ij} = N_{b_i} ((Q_1h_j)(t) + (Q_2\theta_j)(t)),$$

$$g_{ik} = N_{b_i} (Q_1e_k)(t) + (Q_2\xi_k)(t).$$

Put

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}_{m \times 1}, \quad P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \end{pmatrix}_{i \times 1}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}_{m \times 1}, \quad E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1m} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & e_{m2} & \cdots & e_{mm} \end{pmatrix}_{m \times m},$$

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1i} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mi} \end{pmatrix}_{m \times i}.$$

Now we write (3.20) in the form of matrix condition

$$(I + E)\Lambda = D - GP, \quad (3.21)$$

where I is the unit matrix.

From (3.21) we can say that the function φ determined by (3.19) is a solution of (3.1) if and only if $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ satisfies the following matrix condition

$$(I + E)\Lambda = D - GP.$$

2. If $i < 0$, then the equation (3.2) has solutions if and only if the condition (3.15) satisfied. If this is in case, then $p_{i-1}(t) \equiv 0$. So, all solutions of (3.2) are given by

$$\varphi(t) = (Q_1\varphi_1)(t) + (Q_2\varphi_2)(t), \quad (3.22)$$

where

$$\varphi_1(t) = \omega(t) - \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(t),$$

and $\omega(t), h_j(t)$ are determined by (3.16)

$$\varphi_2(t) = \delta(t) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \theta_j(t).$$

Hence, the solution φ determined by (3.22) is a solution of the equation (3.1) if $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ satisfies the following matrix condition

$$(I + E)\Lambda = D. \quad (3.23)$$

On the other hand, the condition (3.15) is of the form:

$$d'_k - \sum_{j=1}^m \lambda_j e'_{kj} = 0, k = 1, 2, \dots, -i, \quad (3.24)$$

where

$$d'_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}C_1(\tau)[f(\tau) + f(-\tau)] - \frac{1}{2}C_2(\tau)[f(\tau) - f(-\tau)]}{[u(\tau) + v(\tau)]X^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{(\tau + i)^k},$$

$$e'_{kj} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}C_1(\tau)[a_j(\tau) + a_j(-\tau)] - \frac{1}{2}C_2(\tau)[a_j(\tau) - a_j(-\tau)]}{[u(\tau) + v(\tau)]X^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{(\tau + i)^k}.$$

Put

$$D' = \begin{pmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ \vdots \\ d'_{-i} \end{pmatrix}_{-i \times 1}, \quad E' = \begin{pmatrix} e'_{11} & e'_{12} & \cdots & e'_{1m} \\ e'_{21} & e'_{22} & \cdots & e'_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e'_{-i1} & e'_{-i2} & \cdots & e'_{-im} \end{pmatrix}_{-i \times m}.$$

We write (3.24) in the form of matrix condition

$$E'\Lambda = D'. \quad (3.25)$$

Combining (3.23) and (3.25) we can say that the function φ determined by (3.22) is a solution of (3.1) if and only if $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ satisfy the following matrix condition

$$\begin{pmatrix} I + E \\ E' \end{pmatrix}_{(m-i) \times m} \times \Lambda = \begin{pmatrix} D \\ D' \end{pmatrix}_{(m-i) \times 1}.$$

This work is supported partially by the Vietnam National University Foundation QGTD0809.

REFERENCES

1. Nguyen Van Mau, 2007, *The theory of operators and singular integral equations*, HN Publish House.
2. Nguyen Van Mau, 2005, *Algebraic elements and boundary value problems*, VNU Publish House.
3. Nguyen Van Mau, 1989, *On solvability in a closed form of singular integral equations with analytic kernel and reflections*, Izv. Uchebn. Vyssh. Zaved., Mat. 5, 34 – 36.
4. Samko S.G., Vasilev I.L., 1985, *Singular integral equations with analytic kernels of potential type*, Dep. VINITI 3.

Поступила 24.02.2012

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ЗАДАННУЮ СИСТЕМУ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП

канд. физ.-мат. наук Т.В. ТИХОНЕНКО

(Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого)

В данной статье рассматриваются только конечные группы. Строение конечных групп в значительной степени зависит от наличия в них холловых подгрупп. Исследование холловых подгрупп в конечных группах дает возможность глубже понять их структуру. Этот вопрос привлекал внимание многих алгебраистов, таких как: Ф. Холл, Ф. Гросс, Э.М. Пальчик, С.А. Чунихин, В.П. Вдовин, Д.О. Ревин, В.Н. Тютянов, и других, которые получили ряд глубоких и интересных результатов при исследовании холловых подгрупп в конечных группах. Нами найдены композиционные факторы конечной группы, обладающей холловыми подгруппами, порядок которых делится на 2, 3 и t , где t – любой простой делитель порядка всей группы, отличный от чисел 2 и 3.

1. Введение. Все рассматриваемые в данной статье группы конечны, обозначения стандартны и соответствуют [1; 2]. Через $\pi(G)$ будем обозначать множество всех простых делителей порядка группы G ; будем говорить, что конечная группа G обладает свойством E_π , если она обладает холловой π -подгруппой, $\pi \subseteq \pi(G)$.

Система холловых подгрупп в конечной группе с заданными свойствами оказывает значительное влияние на ее строение. В настоящее время связь между холловыми подгруппами и строением основной группы достаточно хорошо изучена. Еще в 1956 году Ф. Холл [3] высказал гипотезу, что конечная группа, имеющая бипримарные холловы $\{p, q\}$ -подгруппы для всех простых делителей p и q ее порядка, является разрешимой. С использованием теоремы о классификации простых неабелевых групп справедливость этой гипотезы была доказана в 1982 году З. Арадом и М. Уордом [4]. В 2002 году данный результат был значительно усилен В.Н. Тютяновым [5], где было показано, что конечная группа G , обладающая свойством $E_{\{2,p\}}$ для всех $p \in \pi(G) \setminus \{2\}$, является разрешимой. Систематическое изучение существования холловых подгрупп в простых группах было проведено в работах В.П. Вдовина и Д.О. Ревина [6; 7].

В данном направлении получен следующий результат:

ТЕОРЕМА. Пусть G – конечная группа, обладающая свойством $E_{\{2,3,t\}}$ для всех $t \in \pi(G) \setminus \{2, 3\}$. Тогда любой неабелев композиционный фактор группы G принадлежит списку: A_5 , A_6 , $PSL_2(7)$, $PSL_2(8)$, $PSL_2(17)$, $PSL_3(3)$, $PSU_3(3)$, $PSU_4(2)$.

1.1. ЗАМЕЧАНИЕ. Порядки групп из списка, приведенного в заключении теоремы, делятся в точности на три простых числа и имеют вид $2^a 3^b t^c$, $t = 5, 7, 13$ или 17 . Для краткости назовем эти восемь групп K_3 -группами.

1.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Среди K_3 -групп только группы A_5 , $PSL_2(7)$ и $PSL_3(3)$ обладают холловой $\{2, 3\}$ -подгруппой.

Из теоремы и замечания 1.2 легко получается следующее:

1.3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть G – конечная группа, обладающая собственной холловой $\{2,3,t\}$ -подгруппой для всех $t \in \pi(G) \setminus \{2, 3\}$. Тогда любой неабелев композиционный фактор группы G принадлежит следующему списку: A_5 , $PSL_2(7)$, $PSL_3(3)$.

2. Предварительные результаты. Для доказательства основного результата нам необходимы следующие вспомогательные леммы:

2.1. ЛЕММА [6, следствие 2.2.4]. Пусть π – некоторое множество простых чисел. Подгруппа M знакопеременной группы A_n является холловой π -подгруппой тогда и только тогда, когда $M = M_0 \cap A_n$ для некоторой холловой π -подгруппы M_0 симметрической группы S_n .

2.2. ЛЕММА [7, теорема A4]. Пусть S_n – симметрическая группа степени n и $r < s \leq n$, где r и s – простые числа. Тогда S_n обладает свойством $E_{\{r,s\}}$ в том и только в том случае, если $r = 2$, $s = 3$, а $n = 3, 4, 5, 7, 8$.

2.3. ЛЕММА [6, таблица 5]. Пусть G – спорадическая группа или группа Титса. Если H собственная холлова π -подгруппа в группе G , где $|\pi| \geq 2$ и $2 \in \pi$, то группа G одна из следующих групп:

1. $G \cong M_{11}$
(a) $H \cong 3^2 : Q_8.2$ и $\pi = \{2, 3\}$; (b) $H \cong A_6.2$ и $\pi = \{2, 3, 5\}$;
2. $G \cong M_{22}$
(a) $H \cong 2^4 : A_6$ и $\pi = \{2, 3, 5\}$;
3. $G \cong M_{23}$
(a) $H \cong 2^4 : (3 \times A_4) : 2$ и $\pi = \{2, 3\}$; (b) $H \cong 2^4 : A_6$ и $\pi = \{2, 3, 5\}$;
(c) $H \cong 2^4 : (3 \times A_5) : 2$ и $\pi = \{2, 3, 5\}$; (d) $H \cong PSL_3(4) : 2_2$ и $\pi = \{2, 3, 5, 7\}$;
(e) $H \cong 2^4 : A_7$ и $\pi = \{2, 3, 5, 7\}$; (f) $H \cong M_{22}$ и $\pi = \{2, 3, 5, 7, 11\}$;

4. $G \cong M_{24}$
(a) $H \cong 2_6 : 3.S_6$ и $\pi = \{2, 3, 5\}$;
5. $G \cong J_1$
(a) $H \cong 2^3 : 3$ и $\pi = \{2, 3\}$; (b) $H \cong 2^3 : 7$ и $\pi = \{2, 7\}$;
(c) $H \cong 2 \times A_5$ и $\pi = \{2, 3, 5\}$; (d) $H \cong 2^3 : 3 : 7$ и $\pi = \{2, 3, 7\}$;
6. $G \cong J_4$
(a) $G \cong 2^{11} : (2^6 : 3.S_4)$ и $\pi = \{2, 3, 5\}$.

2.4. ЛЕММА [6, лемме 1.4.3]. Пусть π – некоторое множество простых чисел. Пусть G – группа лиева типа над полем $GF(q)$ характеристики $p \in \pi$ и группа G обладает свойством E_π . Тогда, если H – холлова π -подгруппа в группе G , верно одно из следующих утверждений:

- (1) $H = G$;
- (2) $\pi \cap \pi(G) \subseteq \pi(q-1) \cup \{p\}$, H содержится в некоторой подгруппе Бореля группы G , и любое простое число из $\pi \setminus \{p\}$ не делит порядок группы Вейля группы G ;
- (3) $p = 2$, $G = D_l(q)$, где число l является простым числом Ферма, $(l, q-1) = 1$, подгруппа H сопряжена с параболической подгруппой G_J , отвечающей множеству простых корней $J = \{r_2, r_3, \dots, r_l\}$;
- (4) $p = 2$, $G = {}^2D_l(q)$, где число $l-1$ является простым числом Мерсенна, $(l-1, q-1) = 1$, подгруппа H сопряжена с параболической подгруппой G_J , отвечающей множеству простых корней $J = \{r_2^1, r_3^1, \dots, r_{l-1}^1\}$;

(5) G изоморфна факторгруппе по некоторой центральной подгруппе группы $SL(V)$, где V – векторное пространство размерности n над полем $GF(q)$ характеристики p , H является образом в G относительно естественного гомоморфизма стабилизатора в $SL(V)$ ряда подпространств $0 = V_0 < V_1 < \dots < V_s = V$ таких, что $\dim V_i/V_{i-1} = n_i$, $i = 1, 2, \dots, s$, и выполнено одно из следующих условий:

- (a) n – нечетное простое число, $(n, q-1) = 1$, $s = 2$, $n_1, n_2 \in \{1, n-1\}$;
- (б) $n = 4$, $(2 \cdot 3, q-1) = 1$, $s = 2$, $n_1 = n_2 = 2$;
- (в) $n = 5$, $(2 \cdot 5, q-1) = 1$, $s = 2$, $n_1, n_2 \in \{2, 3\}$;
- (г) $n = 5$, $(2 \cdot 3 \cdot 5, q-1) = 1$, $s = 3$, $n_1, n_2, n_3 \in \{1, 2, 2\}$;
- (д) $n = 7$, $(5 \cdot 7, q-1) = 1$, $(3, q+1) = 1$, $s = 2$, $n_1, n_2 \in \{3, 4\}$;
- (е) $n = 8$, $(2 \cdot 5 \cdot 7, q-1) = 1$, $(3, q+1) = 1$, $s = 2$, $n_1 = n_2 = 4$;
- (ж) $n = 11$, $(2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11, q-1) = 1$, $(5, q+1) = 1$, $s = 2$, $n_1, n_2 \in \{5, 6\}$.

Напомним, что конечная группа, простые неабелевы композиционные факторы которой являются либо группами Шевалле, либо спорадическими группами, либо знакопеременными группами, называется *K-группой*.

2.5. ЛЕММА [4]. Пусть G – конечная K -группа. Если G обладает свойством $E_{\{2, p\}}$ для всех $p \in \pi(G) \setminus \{2\}$, то она разрешима.

2.6. ЛЕММА [8, теорема 3]. Пусть G – простая группа Шевалле и $G \notin \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}$. Тогда существует простой делитель порядка группы G , который не делит порядка ни одной собственной параболической подгруппы группы G .

3. Доказательство основного результата. Сначала покажем, что группа G , удовлетворяющая условиям теоремы, не является простой неабелевой группой.

Пусть G – минимальный контрпример к теореме. Тогда G – простая неабелева группа. Возможны следующие случаи.

1. $G \cong A_n$, $n \geq 7$.

Описание холловых подгрупп в симметрических группах S_n дают лемма 2.1 и лемма 2.2. Из этого описания следует, что группа A_n не удовлетворяет условиям теоремы.

2. G – спорадическая группа или группа Титса.

Из леммы 2.3 следует, что найдется такой простой делитель r порядка группы G , что группа G не обладает свойством $E_{\{2, 3, r\}}$.

3. G – группа лиевского типа над полем характеристики p .

Пусть H – собственная холлова $\{2, 3, t\}$ -подгруппа в группе G . Если выполняется пункт (1) леммы 2.4, то $|\pi(G)| = 3$, что невозможно по условию теоремы. Следовательно, выполняется один из пунктов (2) – (5) леммы 2.4. Во всех случаях H содержится в максимальной параболической подгруппе группы G .

По лемме 2.6 получаем, что порядок всякой собственной параболической подгруппы группы G взаимно прост с некоторым числом $r \in \pi(G)$, кроме случаев, когда $G \in \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}$.

Рассмотрим эти исключения.

а) $G \cong A_5(2)$. Холлова $\{2, 3, r\}$ -подгруппа H содержится в максимальной параболической подгруппе $A_4(2)$ и поэтому $(|G : A_4(2)|, 3) = 1$. Однако $(|G : P|, 3) = 3$ для всякой параболической подгруппы P группы G .

б) $G \in \{C_3(2), D_4(2)\}$. В этих случаях число 3 делит $|G : P|$ для любой параболической подгруппы P группы G . Противоречие получается так же, как и в пункте а).

- с) $G \cong {}^2A_3(2)$. В данном случае $|\pi(G)| = 3$, что невозможно по условию теоремы.

Таким образом, группа G не является простой неабелевой группой.

Рассмотрим N – минимальную нормальную подгруппу в неразрешимой группе G .

Пусть $S(G) \neq 1$ и $N \cong Z_p \times \dots \times Z_p$ – элементарная абелева p -группа. Рассмотрим фактор-группу G/N .

Если $p \notin \{2, 3\}$, то фактор-группа G/N удовлетворяет условиям теоремы. В силу минимальности контрпримера композиционные факторы в G/N принадлежат списку групп из заключения теоремы, значит, и композиционные факторы группы G принадлежат списку групп из заключения теоремы, что невозможно.

Пусть $p = 2$. Если N – холлова подгруппа в группе G , то $|G/N|$ – нечетное число. Значит, группа G – разрешимая, что невозможно. Следовательно, подгруппа N не является холловой подгруппой в группе G . Тогда фактор-группа G/N удовлетворяет условиям теоремы, и композиционные факторы в G/N принадлежат списку групп из заключения теоремы. Значит, и композиционные факторы группы G принадлежат списку групп из заключения теоремы. Противоречие.

Пусть $p = 3$. Если N – холлова подгруппа в группе G , то G/N является 3'-группой, а значит, в G/N существует холлова $\{2, t\}$ -подгруппа для любого $t \in \pi(G) \setminus \{2\}$. Тогда по лемме 2.5 фактор-группа G/N – разрешимая подгруппа, что невозможно. Пусть N не является холловой подгруппой в группе G . В этом случае фактор-группа G/N удовлетворяет условиям теоремы, и неабелевы композиционные факторы G/N принадлежат списку групп из заключения теоремы. Таким образом, композиционные факторы группы G принадлежат списку групп из заключения теоремы, что невозможно.

Тогда $S(G) = 1$. Рассмотрим $N \cong N_1 \times \dots \times N_k$, где N_i – изоморфные простые неабелевы группы, $i = 1, 2, \dots, k$.

Если $\{2, 3\} \in \pi(N)$ или $\{2, 3\} \in \pi(G/N)$, то подгруппы N и G/N удовлетворяют условиям теоремы. Следовательно, неабелевы композиционные факторы группы G принадлежат списку групп из заключения теоремы. Противоречие.

Если $2 \notin \pi(N)$, $3 \in \pi(N)$, то N – разрешимая подгруппа, что невозможно.

Если $3 \notin \pi(N)$, $2 \in \pi(N)$, то подгруппа N является 3'-группой. Поскольку подгруппа H – холлова в группе G , значит, $H \cap N$ – холлова подгруппа в подгруппе N , то есть в подгруппе N существует холлова $\{2, t\}$ -подгруппа для любого $t \in \pi(G) \setminus \{2\}$, и по лемме 2.5 подгруппа N – разрешимая, что невозможно. Последнее противоречие.

Таким образом, любой неабелев композиционный фактор группы G изоморфен одной из K_3 -групп. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert, B. Endliche Gruppen / B. Huppert. – Berlin: Springer-Verlag, 1967.
2. Горенштейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенштейн. – М.: Мир, 1985.
3. Hall, P. Theorems like Sylow's / P. Hall // Proc. London Math. Soc. – 1956. – V. 6(3). – P. 286 – 304.
4. Arad, Z. New criteria for the solvability of finite groups / Z. Arad, M. Ward // J. Algebra. – 1982. – Vol. 77. – P. 234 – 246.
5. Тютянов, В.Н. К гипотезе Холла / В.Н. Тютянов // Украинский математический журнал. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 1181 – 1191.
6. Вдовин, Е.П. Холловы подгруппы нечетного порядка конечных групп / Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин // Алгебра и логика. – 2002. – Т. 41, № 1. – С. 15 – 56.
7. Ревин, Д.О. Холловы подгруппы конечных групп: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.06 / Д.О. Ревин. – Новосибирск, 2008. – 232 л.
8. Тютянов, В.Н. Тройные факторизации в конечных группах / В.Н. Тютянов, Л.А. Шеметков // Докл. НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 4. – С. 52 – 56.

Поступила 23.11.2011

FINITE GROUPS WITH GIVEN SYSTEM OF HALL SUBGROUPS

T. TIHONENKO

All considered groups are finite in the paper. The structures of finite groups are depending on presence of Hall subgroups. Investigation of Hall subgroups of finite groups gives us an opportunity to understand their structure. These questions attracted attention many algebraists, such as Ph. Hall, F. Gross, E.M. Palchik, V.P. Vdovin, D.O. Revin, V.N. Tyutyaynov and others. These mathematicians got many profound and interesting results about the Hall subgroups of finite groups. Let finite group has Hall subgroups, which orders are divide into 2, 3 and t – is the any prime divisor of order of the finite group and t is not equal 2 and 3. The compositions factors of such finite group are found out in paper.

УДК 517.926+517.977

ОБ ОЦЕНКЕ ВЛИЯНИЯ МАТРИЦЫ КОШИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА УГЛОВЫЕ МЕРЫ ВЫПУКЛЫХ КОНУСОВ

канд. физ.-мат. наук А.А. КОЗЛОВ, А.Д. БУРАК
(Полоцкий государственный университет)

Рассматривается задача о влиянии матрицы Коши системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на множества векторов пространства $\mathbb{R}^n$, в том числе на выпуклые конусы. Даны оценки на угол между двумя любыми векторами, на длины векторов, а также доказательство отделимости от нуля углов между одним из векторов системы и подпространством, натянутым на другие векторы системы, полученной из линейно независимой совокупности векторов, при действии матрицей Коши.

Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами [1, с. 252].

Прежде чем формулировать задачу, рассматриваемую в работе, введём ряд необходимых в дальнейшем обозначений и определений. Обозначим через e_i , $i = \overline{1, n}$ векторы канонического ортонормированного базиса в евклидовом координатном пространстве $\mathbb{R}^n$, а через M_n – пространство вещественных матриц размерности $n \times n$ со спектральной операторной нормой, т.е. нормой, индуцируемой на M_n евклидовой нормой в $\mathbb{R}^n$.

Из свойства интегральной ограниченности матрицы A вытекает существование такого числа $a < 1$, что для всех $t \geq 0$ выполняется оценка

$$\int_t^{t+a} P A(\tau) P d\tau \leq a < +\infty.$$

Зафиксируем это число a .

Пусть $X(t, \tau) \in M_n$, $t, \tau \geq 0$, – матрица Коши [2, с. 72] системы (1). Используя лемму Гронвалла – Беллмана [2, с. 108], нетрудно показать, что при любых $k \in \mathbb{N}$ и $t, \tau \geq 0$ таких, что $|t - \tau| \leq k\sigma$, для матрицы Коши $X(t, \tau)$ выполняется оценка

$$P X(t, \tau) P \leq \exp(ak). \quad (2)$$

Кроме того, отсюда в силу верного для произвольной невырожденной матрицы $D \in M_n$ неравенства

$$|\det D| \leq P D P^{n-1} / P D^{-1} P \quad (3)$$

(доказательство см., например, в замечании 1 работы [3]) при всех $k \in \mathbb{N}$ вытекают соотношения:

$$\det X(t_0, t_0 + k\sigma) \leq P X(t_0, t_0 + k\sigma) P^{n-1} / P X(t_0 + k\sigma, t_0) P \leq \exp(nak). \quad (4)$$

Под выпуклым конусом будем понимать множество векторов $\Phi \subset \mathbb{R}^n$, для которых выполняются условия:

- 1) если $v_1, v_2 \in \Phi$, то $v_1 + v_2 \in \Phi$;
- 2) из $v \in \Phi$ при любом $\alpha \geq 0$ следует $\alpha v \in \Phi$.

Будем считать в дальнейшем, что вершина выпуклого конуса находится в нуле. Угловой мерой выпуклого конуса $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ назовем величину

$$S\Phi := \sup_{\xi_1, \xi_2 \in \Phi} S(\xi_1, \xi_2),$$

Заметим при этом, что выполняется включение $S\Phi \in [0, \pi]$.

Перейдём теперь к постановке задачи.

Выпуклый конус, очевидно, является множеством векторов в $\mathbb{R}^n$.

Действуя оператором Коши системы (1) на всевозможные векторы из конуса, получим новое множество векторов в $\mathbb{R}^n$.

Задача состоит в нахождении оценки сверху для угла между любыми двумя векторами из полученного множества, оценок на длины таких векторов, а также в доказательстве отделимости от нуля углов между одним из векторов системы и подпространством, натянутым на другие векторы системы, полученной из линейно независимой совокупности векторов при действии матрицей Коши.

Найденные соотношения в дальнейшем будут использованы при оценке управления, необходимого для доказательства глобальной управляемости [3] показателей Ляпунова [4] и других асимптотических характеристик [5 – 7] n -мерных линейных равномерно вполне управляемых [8; 9] систем (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

Обратимся к формулировке результатов, полученных в работе.

Следующая теорема устанавливает оценку на угловую меру выпуклого конуса, полученного под действием оператора Коши системы (1) на заданный выпуклый конус фиксированной угловой меры.

ТЕОРЕМА 1. Для произвольных чисел $k \in \mathbb{N}$, $t_0 \dots 0$, $0 < \varphi \dots \pi/2$ и выпуклого конуса $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ угловой меры φ множество $X(t_0, t_0 + k\sigma)\Phi$ является выпуклым конусом, причем если выполняется оценка $\exp((2n-2)ak)\varphi \dots 1$, то угловая мера ϕ этого конуса не превосходит величины $\arcsin(\varphi \exp((2n-2)ak))$.

Доказательство. Поскольку при всех $k \in \mathbb{N}$ и $t_0 \dots 0$ оператор Коши $X(t_0, t_0 + k\sigma)$ невырожден и линейен, а образ выпуклого конуса при невырожденном линейном отображении есть выпуклый конус, множество $X(t_0, t_0 + k\sigma)\Phi$ является выпуклым конусом для любых $k \in \mathbb{N}$ и $t_0 \dots 0$. При этом найдутся такие векторы $v_i \in \Phi$, $i = 1, 2$, для которых справедливы равенства $w_i = X(t_0, t_0 + k\sigma)v_i$, где $w_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, – такие единичные векторы, что выполняются соотношения:

$$S(w_1, w_2) = S(X(t_0, t_0 + k\sigma)\Phi) =: \phi.$$

Всюду далее для любых векторов $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \in \mathbb{R}^n$ через $L(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \subset \mathbb{R}^n$ будем обозначать подпространство, натянутое на эти векторы (линейную оболочку этих векторов [10, с. 373]). Возьмём такие векторы Pw_i , $P = 1$, $i = 3, n$, что выполняются соотношения

$$w_i \perp L(w_1, w_2, \dots, w_{i-1}). \quad (5)$$

В силу невырожденности оператора Коши $X(t_0, t_0 + k\sigma)$ найдутся такие векторы $v_i \in \mathbb{R}^n$, при которых для всех $i = \overline{1, n}$ справедливы равенства:

$$v_i = X(t_0, t_0 + k\sigma)^{-1}w_i.$$

Отсюда из определения векторов w_i , нормы векторного произведения векторов, а также оценки $S(v_1, v_2) \dots \varphi \dots \pi/2$, верной ввиду равенства $S\Phi = \varphi$ и включений $v_i \in \Phi$, $i = \overline{1, 2}$, с учетом соотношения (2) следуют неравенства:

$$\begin{aligned} & |\det[v_1, v_2, v_3, \dots, v_n]| = P v_1 P v_2 P v_3 \dots P v_n P |\sin S(v_1, v_2)| \times \\ & \times |\sin S(v_3, L(v_1, v_2))| \dots |\sin S(v_n, L(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}))| \dots \\ & \dots P v_1 P v_2 \dots P v_n P \sin \varphi \dots P X(t_0, t_0 + k\sigma)^{-1} P w_1 P \times \\ & \times P X(t_0, t_0 + k\sigma)^{-1} P w_2 P \dots P X(t_0, t_0 + k\sigma)^{-1} P w_n P \sin \varphi \dots \\ & \dots P X(t_0 + k\sigma, t_0) P \exp((n-1)ak) \sin \varphi \dots P X(t_0 + k\sigma, t_0) P \exp((n-1)ak) \varphi. \end{aligned}$$

Поэтому

$$|\det[v_1, v_2, \dots, v_n]| \dots P X(t_0 + k\sigma, t_0) P \exp((n-1)ak) \varphi. \quad (6)$$

Используя эту оценку, равенства $P w_i P = 1$, $i = \overline{1, n}$, $S(w_1, w_2) = \phi$, ортогональность (5), а также неравенства (3) и (6), получим соотношения:

$$\begin{aligned} \sin \phi &= P w_1 P w_2 P \dots P w_n P |\sin S(w_1, w_2)| = \\ &= P w_1 P w_2 P \dots P w_n P |\sin S(w_1, w_2)| \sin S(w_3, L(w_1, w_2)) | \dots \times \\ &\times |\sin S(w_n, L(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}))| = |\det[w_1, w_2, \dots, w_n]| = \\ &= |\det X(t_0, t_0 + k\sigma)| |\det[v_1, v_2, \dots, v_n]| = \\ &= P X(t_0, t_0 + k\sigma) P^{n-1} P X(t_0 + k\sigma, t_0) P^{-1} |\det[v_1, v_2, \dots, v_n]| = \\ &= P X(t_0, t_0 + k\sigma) P^{n-1} \exp((n-1)ak) \varphi \dots \exp((2n-2)ak) \varphi. \end{aligned}$$

Отсюда, если справедливо неравенство $\exp((2n-2)ak) \varphi \dots 1$, найдем оценку $\phi \dots \arcsin(\exp((2n-2)ak) \varphi)$. Теорема 1 доказана.

Решение задачи об отделённости от нуля углов между одним из векторов системы и подпространством, натянутым на другие векторы системы, полученной из линейно независимой совокупности векторов при действии матрицей Коши системы (1) устанавливает

ТЕОРЕМА 2. При любых числах $k \in \mathbb{N}$, $t_0 \dots 0$ и $0 < \varphi \dots \pi/2$ и единичных векторах

$$v_i(0) := v_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{1, n},$$

таких, что имеют место неравенства

$$\sin S(v_{i_1}, v_{i_2}) \dots \sin \varphi,$$

$$|\sin S(v_{i_1}, L(v_{i_2}, v_{i_3}, \dots, v_{i_k}))| \dots \sin \varphi, \quad i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}, \quad k = \overline{2, n},$$

$$i_q \neq i_r \quad \text{где} \quad q \neq r, \quad q, r \in \{1, \dots, n\},$$

для векторов $v_i(k) := X(t_0, t_0 + k\sigma) v_i$, $i = \overline{1, n}$, имеют место соотношения:

$$\exp(-ak) \dots P v_i(k) P \dots \exp(ak), \quad (7)$$

$$S(v_i(k), v_j(k)) \dots \sin \varphi \exp((2-2n)ak), \quad (8)$$

$$|\sin S(v_n(k), L(v_1(k), v_2(k), \dots, v_{n-1}(k)))| \dots (\sin \varphi)^{n-1} \exp(-2nak). \quad (9)$$

Кроме того, для векторов $v_i(k)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, справедлива оценка

$$|v_{11}(k)| + |v_{21}(k)| + \dots + |v_{n1}(k)| \dots \sin^{n-1} \varphi \exp((3-2n)ak)/(n-1)!. \quad (10)$$

(Здесь и всюду далее для любого $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ через η_{ri} , $i = \overline{1, n}$, обозначаются компоненты вектора $\eta_r \in \mathbb{R}^n$, т.е. $\eta_r := (\eta_{r1}, \eta_{r2}, \dots, \eta_{rn})^T$, значок T означает операцию транспонирования).

Доказательство. Справедливость соотношения (7) устанавливается из оценки

$$\exp(-ak) \dots P X(t_0 + k\sigma, t_0) P \dots \exp(ak),$$

вытекающей из неравенства (2).

Оценка (8) следует из теоремы 1, в которой вместо ϕ и $X(t_0, t_0 + k\sigma)$ следует положить φ и $X(t_0 + k\sigma, t_0)$ соответственно.

Формула (10) получается из верных для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ в силу определения векторов $v_i(k)$, $i = \overline{1, n}$, и неравенства (2) соотношений:

$$\begin{aligned} |\det[v_1(k), v_2(k), \dots, v_n(k)]| &= \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} (-1)^\tau v_{1\alpha_1}(k) \cdots v_{n\alpha_n}(k) \cdot \\ &\cdot (n-1)! (\max_{i=1, n, j=2, n} |v_{ij}(k)|)^{n-1} (|v_{11}(k)| + |v_{21}(k)| + \dots + |v_{n1}(k)|) \cdot \\ &\cdot (n-1)! (\max_{i=1, n} P v_i(k) P)^{n-1} (|v_{11}(k)| + |v_{21}(k)| + \dots + |v_{n1}(k)|) \cdot \\ &\cdot (n-1)! (\max_{i=1, n} P X(t_0, t_0 + k\sigma) P v_i P)^{n-1} (|v_{11}(k)| + |v_{21}(k)| + \dots + |v_{n1}(k)|) \cdot \\ &\cdot (n-1)! P X(t_0, t_0 + k\sigma) P^{n-1} (|v_{11}(k)| + |v_{21}(k)| + \dots + |v_{n1}(k)|) \cdot \\ &\cdot (n-1)! \exp((n-2)ak) P X(t_0, t_0 + k\sigma) P (|v_{11}(k)| + |v_{21}(k)| + \dots + |v_{n1}(k)|), \end{aligned}$$

где τ – знак перестановки $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$,

и

$$\begin{aligned} |\det[v_1(k), v_2(k), \dots, v_n(k)]| &= |\det X(t_0, t_0 + k\sigma)| |\det[v_1, v_2, \dots, v_n]| = \\ &= |\det X(t_0 + k\sigma, t_0)|^{-1} |\det[v_1, v_2, \dots, v_n]| \cdot \\ &\cdot P X(t_0 + k\sigma, t_0) P^{(n-1)} P X(t_0, t_0 + k\sigma) P v_1 P v_2 P \dots P v_n P \times \\ &\times |\sin S(v_1, v_2)| |\sin S(v_3, L(v_1, v_2))| \cdot \dots \cdot |\sin S(v_n, L(v_1, v_2, \dots, v_n))| \cdot \\ &\cdot P X(t_0, t_0 + k\sigma) P \exp(-(n-1)ak) \sin^{n-1} \varphi. \end{aligned}$$

Используя последнюю оценку для определителя $|\det[v_1(k), v_2(k), \dots, v_n(k)]|$, докажем неравенство (9). В силу формулы (2) и равенств $P v_i P = 1$, $i = \overline{1, n}$ имеем соотношения:

$$\begin{aligned} &|\sin S(v_n, L(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}))| \exp(nak) \cdot \\ &\cdot P X(t_0, t_0 + k\sigma) P^n |\sin S(v_n, L(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}))| = \\ &= P X(t_0, t_0 + k\sigma) P v_1 P X(t_0, t_0 + k\sigma) P v_2 P X(t_0, t_0 + k\sigma) P v_3 P \times \\ &\times \dots \times P X(t_0, t_0 + k\sigma) P v_n P |\sin S(v_n, L(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}))| \cdot \\ &\cdot P v_1(k) P v_2(k) P v_3(k) P \dots P v_n(k) P |\sin S(v_n, L(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}))| \cdot \\ &\cdot P v_1(k) P v_2(k) P v_3(k) P \dots P v_n(k) P |\sin S(v_n, L(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}))| \times \\ &\times \dots \times |\sin S(v_3, L(v_1, v_2))| |\sin S(v_1(k), v_2(k))| = |\det[v_1(k), v_2(k), \dots, v_n(k)]|. \end{aligned}$$

Отсюда и из оценки снизу на модуль определителя $|\det[v_1(k), v_2(k), \dots, v_n(k)]|$, установленной при доказательстве неравенства (10) теоремы 2, получим соотношения:

$$\begin{aligned} &\exp(nak) |\sin S(v_n, L(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}))| \cdot \\ &\cdot |\det[v_1(k), v_2(k), \dots, v_n(k)]| \cdot \end{aligned}$$

$$\dots \sin^{n-1} \varphi \exp(-(n-1)ak) P X(t_0, t_0 + k\sigma) P..$$

$$\dots \exp(-nak) \sin^{n-1} \varphi,$$

из которых и следует оценка (9), а с ней и доказательство теоремы 2.

Работа выполнена в рамках проекта Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф10М-032).

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б.Ф. Былов. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
2. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1998. – 472 с.
3. Макаров, Е.К. О глобальной управляемости центральных показателей линейных систем / Е.К. Макаров, С.Н. Попова // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 97–106.
4. Изобов, Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.А. Изобов // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – М.: ВИНТИ, 1974. – Т. 12. – С. 71–146.
5. Попова, С.Н. Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем / С.Н. Попова // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 12. – С. 1627–1636.
6. Попова, С.Н. Глобальная приводимость линейных управляемых систем к системам скалярного типа / С.Н. Попова // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 1. – С. 41–46.
7. Попова, С.Н. О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем / С.Н. Попова // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 8. – С. 1048–1054.
8. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control / R.E. Kalman // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. – 1960. – Vol. 5, № 1. – P. 102–119.
9. Тонков Е.Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизации линейной рекуррентной системы / Е.Л. Тонков // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 10. – С. 1804–1813.
10. Бортакровский, А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах: учеб. пособие / А.С. Бортакровский, А.В. Пантелеев. – М.: Высш. шк., 2005. – 591 с.

Поступила 28.02.2012

ABOUT THE ASSESSMENT OF THE IMPACT OF THE CAUCHY MATRIX OF LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS ON ANGULAR MEASURES OF CONVEX CONES

A. KOZLOV, A. BURAK

The task of the applying the operator Cauchy of the system of ordinary differential equations for vectors of the convex cones is considered in this research. An assessment for the angle between any two vectors from the cone received at such action, the assessments of the lengths of these vectors, as well as proof the separation from the zero of the angles between a vector of the system and the subspace spanned to the other vectors of the system, obtained from a linearly independent set of vectors under the action of the Cauchy matrix have been found in proofs of the theorems of this research.

УДК 517.546

О ЛИНЕЙНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ЧЕБЫШЕВСКОГО ТИПА

Д.Э. КИРЬЯЦКИС

(Гродненский государственный университет им. Я. Купалы)

Фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка может быть, а может и не быть системой Чебышева. В настоящей работе установлены признаки того, что фундаментальная система является системой Чебышева в круге E . Для этой цели рассматривается класс аналитических в круге E функций, каждая из которых имеет n нулей в этом круге. Для функций рассматриваемого класса установлены оценки модулей производных.

Система вещественных функций $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$, определенных на отрезке a, b , называется системой Чебышева на отрезке a, b , если для любых действительных значений $c_0, c_1, \dots, c_n$ (случай $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ исключается) каждый обобщенный многочлен

$$P(x) = c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x) + \dots + c_n u_n(x)$$

имеет на a, b не более n попарно различных корней.

Системы Чебышева встречаются во многих областях математического анализа. Различные интересные свойства функций вещественного переменного, образующих систему Чебышева, и их применение можно найти в книгах [1; 2].

Что касается теории чебышевских систем, определяемых в различных классах функций комплексного переменного, то здесь можно отметить книги [3 – 5], в которых рассматриваются вопросы приближения и интерполяции.

В последнее время обнаружилась тесная связь некоторых специальных систем Чебышева с разделенными разностями, с линейными дифференциальными уравнениями, с классами однолистных и многолистных функций, определяемых в различных областях комплексной плоскости. Здесь можно упомянуть работы [6 – 9].

Напомним определение системы Чебышева для голоморфных в области D функций.

Система голоморфных в области D функций

$$u_0(z), u_1(z), \dots, u_n(z)$$

называется системой Чебышева в этой области, если для любых комплексных чисел $c_0, c_1, \dots, c_n$ (случай $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ исключается) уравнение

$$c_0 u_0(z) + c_1 u_1(z) + \dots + c_n u_n(z) = 0$$

имеет в области D не более чем n попарно различных корней. Другими словами, указанная выше система называется системой Чебышева в области D , если любой обобщенный многочлен

$$P(z) = c_0 u_0(z) + c_1 u_1(z) + \dots + c_n u_n(z)$$

(случай $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ исключается) имеет не более чем n корней в области D [3].

Простым примером системы Чебышева является система, состоящая из функций $1, z, \dots, z^{n-1}, z^n$. Другим простым, но важным в геометрической теории функций, примером системы Чебышева является система, состоящая из двух функций $1, f(z)$, где $f(z)$ – однолистная в области D функция [7]. В этом случае легко понять, что разделенная разность первого порядка

$$[f(z); z_0, z_1] = \frac{f(z_0) - f(z_1)}{z_0 - z_1}$$

отлична от нуля для любых различных $z_0, z_1 \in D$.

Справедливо следующее более общее утверждение: для того чтобы система линейно независимых в области D голоморфных функций $1, z, \dots, z^{n-1}, f z$ была системой Чебышева в области D , необходимо и достаточно, чтобы разложенная разность n -го порядка

$$\left[f z ; z_0, \dots, z_n \right] = \frac{\left[f z ; z_0, \dots, z_{n-1} \right] - \left[f z ; z_1, \dots, z_n \right]}{z_0 - z_n} \neq 0$$

для любых попарно различных $z_0, \dots, z_n \in D$ [8]. Отсюда следует, что функция $f z$ является не более чем n -листной функцией в области D .

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n -го порядка

$$y^{(n)} z + g_{n-1} z y^{(n-1)} z + \dots + g_1 z y' z + g_0 z y z = 0, \quad (1)$$

где $g_0 z, \dots, g_{n-1} z$ – голоморфные в области D функции. Будем искать решения среди голоморфных в области D функций. Пусть

$$y_1 z, \dots, y_n z \quad (2)$$

фундаментальная система решений уравнения (1). Хорошо известно, что общее решение уравнения (1) записывается в виде

$$y z = c_1 y_1 z + \dots + c_n y_n z,$$

т.е. в виде линейной комбинации функций $y_1 z, \dots, y_n z$.

Назовем уравнение (1) дифференциальным уравнением чебышевского типа, если фундаментальная система (2) является системой Чебышева в области D . Другими словами, уравнение (1) является уравнением чебышевского типа, если любая голоморфная в области D функция $y z$, $y z \neq 0$, удовлетворяющая уравнению (1), имеет в области D не более $n-1$ корней.

Не любое дифференциальное уравнение (1) принадлежит типу Чебышева. Например, уравнение

$$y'' z - y' z = 0$$

будет чебышевского типа в круге $|z| < 1$ и не будет чебышевского типа в круге $|z| < 7$. Действительно, любая функция, удовлетворяющая данному уравнению, представима формулой $y z = c_1 + c_2 e^z$. При любых значениях c_1, c_2 , за исключением $c_1 = 0, c_2 = 0$, такая функция имеет не более одного корня в круге $|z| < 1$, однако в круге $|z| < 7$ она может иметь два корня.

Таким образом, линейное однородное дифференциальное уравнение n -го порядка может быть как чебышевского типа, так и не чебышевского типа. Это зависит от поведения его коэффициентов, а также от вида области D .

В данной работе мы рассматриваем условия, при выполнении которых фундаментальная система голоморфных в области D функций (2) решений линейного однородного дифференциального уравнения (1) является системой Чебышева в области D . В этой связи мы рассматриваем класс голоморфных в круге функций, имеющих в этом круге n нулей, устанавливаем формулу для производных k -порядка от этих функций, а также оцениваем модули k -тых производных. В качестве области D возьмем круг $|z| < R$. Предполагаем, что функции $g_0 z, \dots, g_{n-1} z$ являются голоморфными в круге $|z| < R$. Тогда решениями уравнения (1) будут также голоморфные в круге $|z| < R$ функции. Нам понадобится лемма об одном тождестве между многочленами, имеющими заданные корни.

Лемма 1. Пусть в круге $|z| < R$ взяты точки $a_1, \dots, a_n$. Образует многочлены $P_{n-j} z$, $j = 0, \dots, n$ и запишем их в виде

$$P_{n-j} z = \prod_{i=j+1}^n (a_i - z), \quad P_0 z \equiv 1.$$

Тогда справедливо тождество:

$$a_j - z C_{k+1}^{j-1} - C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z = \frac{k!}{j-2! k+1-j!} P_{n-j}^{k+1-j} z + C_k^{j-2} P_{n-j+1}^{k+2-j} z. \quad (3)$$

Здесь C_m^l – биномиальные коэффициенты и $2 \leq j \leq k+1$.

Доказательство. Имеем

$$a_j - z C_{k+1}^{j-1} - C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z = \frac{k!}{j-2! (k+1-j)!} P_{n-j}^{k+1-j} z + \\ + C_k^{j-2} - k+2-j P_{n-j}^{k+1-j} z + a_j - z P_{n-j}^{k+2-j} z.$$

Далее,

$$a_j - z C_{k+1}^{j-1} - C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z = \left(\frac{k!}{j-2! (k+1-j)!} - C_k^{j-2} - k+2-j \right) P_{n-j}^{k+1-j} z + \\ + a_j - z C_k^{j-2} P_{n-j}^{k+2-j} z.$$

Легко видеть, что

$$C_{k+1}^{j-1} - C_k^{j-1} = C_k^{j-2}, \quad \frac{k!}{j-2! (k+1-j)!} - C_k^{j-2} (k+2-j) = 0.$$

Отсюда следует справедливость тождества (3).

Пусть в круге $|z| < R$ заданы точки $a_1, \dots, a_n$ и $y(z)$ – голоморфная в этом круге функция. Обозначим

$$\Psi_n(z) = \int_{a_n}^z a_n - \zeta^{n-1} y^n(\zeta) d\zeta, \\ \Psi_j(z) = \int_{a_j}^z \frac{a_j - \zeta^{j-1}}{a_{j+1} - \zeta} \Psi_{j+1}(\zeta) d\zeta, \quad j=1, 2, \dots, n-1.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $y(z)$ – голоморфная в круге $|z| < R$ функция и $y(a_1) = \dots = y(a_n) = 0$. Тогда справедлива формула

$$y^k(z) = \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j}(z) \Psi_j(z) a_j - z^{-j+1}, \quad k=0, 1, \dots, n-1. \quad (4)$$

Доказательство. Докажем формулу (4) с помощью индукции по k . При $k=0$ формула (4) справедлива. Предположим, что формула (4) справедлива при некотором $k > 0$, и докажем ее справедливость при $k+1$, т.е.

$$y^{k+1}(z) = \sum_{j=1}^{k+2} C_{k+1}^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j}(z) \Psi_j(z) a_j - z^{-j+1}, \quad (5)$$

или

$$y^{k+1}(z) = \sum_{j=1}^{k+2} C_{k+1}^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j}(z) \Psi_j(z) a_j - z^{-j+1} = \sum_{j=1}^{k+1} C_{k+1}^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j}(z) \Psi_j(z) a_j - z^{-j+1} + \\ + P_{n+k-2}(z) \Psi_{k+2}(z) a_{k+2} - z^{-k-1}. \quad (6)$$

Возьмем от функции $y^k(z)$, заданной формулой (4), производную и покажем, что $y^{k+1}(z)$ совпадает с правой частью (6).

Имеем

$$y^{k+1}(z) = \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j}(z) \Psi_j(z) a_j - z^{-j+1} + \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j}(z) \Psi_j'(z) a_j - z^{-j+1} + \\ + \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j}(z) \Psi_j'(z) a_{j-1} - z^{-j}.$$

Далее,

$$y^{n+1} z = \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z \Psi_j z a_j - z^{-j+1} + \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j} z \Psi_{j+1} z a_{j+1} - z^{-j-1} + \\ + \sum_{j=2}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j} z \Psi_j z j-1 a_j - z^{-j}. \quad (7)$$

Используя формулу

$$\Psi'_j z = \frac{a_j - z^{j-1}}{a_{j+1} - z} \Psi_{j+1} z,$$

получим

$$y^{n+1} z = \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z \Psi_j z a_j - z^{-j+1} + \sum_{j=1}^k C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j} z \Psi_{j+1} z a_{j+1} - z^{-j-1} + \\ + P_{n+k-2} z \Psi_{k+2} z a_{k+2} - z^{-k-1} + \sum_{j=2}^k C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j} z \Psi_j z j-1 a_j - z^{-j}.$$

С помощью (6) и (7) получим

$$\sum_{j=1}^{k+1} C_{k+1}^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z \Psi_j z a_j - z^{-j+1} = \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z \Psi_j z a_j - z^{-j+1} + \\ + \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j} z \Psi_{j+1} z a_{j+1} - z^{-j-1} + \sum_{j=2}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j} z \Psi_{j+1} z j-1 a_j - z^{-j}.$$

Далее,

$$\sum_{j=2}^{k+1} C_{k+1}^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z \Psi_{j+1} z a_j - z^{-j+1} + C_{k+1}^0 P_{n-1}^{k+1} \Psi_1 z a_1 - z^0 = \\ = \sum_{j=2}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z \Psi_{j+1} z a_j - z^{-j+1} + C_k^0 P_{n-1}^{k+1} \Psi_1 z a_1 - z^0 + \\ + \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j} z \Psi_{j+1} z a_{j+1} - z^{-j-1} + \sum_{j=2}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j} z \Psi_j z j-1 a_j - z^{-j}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=2}^{k+1} C_{k+1}^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z \Psi_j z a_j - z^{-j+1} = \sum_{j=2}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z \Psi_j z a_j - z^{-j+1} + \\ + \sum_{j=2}^{k+1} C_k^{j-2} P_{n-j+1}^{k+2-j} z \Psi_j z a_j - z^{-j} + \sum_{j=2}^{k+1} C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+1-j} z \Psi_j z j-1 a_j - z^{-j}.$$

Итак,

$$\sum_{j=2}^{k+1} C_{k+1}^{j-1} - C_k^{j-1} P_{n-j}^{k+2-j} z \Psi_j z a_j - z^{-j+1} = \\ = \sum_{j=2}^{k+1} C_k^{j-1} j-1 P_{n-j}^{k+1-j} z \Psi_j z a_j - z^{-j+1} + \sum_{j=2}^{k+1} C_k^{j-2} j-1 P_{n-j+1}^{k+2-j} z \Psi_j z a_j - z^{-j}.$$

Если теперь перенести в одну сторону и воспользоваться леммой 1, то придем к выводу, что формула (6) справедлива, значит, и справедлива формула (5). Но тогда справедлива и теорема 1.

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся еще следующие леммы.

Лемма 2. Для любого z из круга $|z| \leq r$ справедливо неравенство

$$\left| P_{n-j}^{k+1-j} z \right| \leq \frac{n-j!}{n-k-1!} R + |z|^{n-k-1}, \quad j=1, \dots, k+1.$$

Доказательство. Перепишем многочлен $P_{n-j} z$ в виде

$$P_{n-j} z = -1^{n-j} h_1 z \dots h_{n-j} z,$$

где $h_1 z = z - a_{j+1}, \dots, h_{n-j} z = z - a_n$.

По формуле Лейбница получим

$$P_{n-j}^{k+1-j} z = -1^{n-j} \sum \frac{k+1-j!}{m_1! \dots m_{n-j}!} h_1^{m_1} z \dots h_{n-j}^{m_{n-j}} z,$$

где сумма берется так, что

$$m_1 \geq 0, \dots, m_{n-j} \geq 0, \text{ и } m_1 + \dots + m_{n-j} = k+1-j.$$

Так как $h_i^0 z = h_i z$ и $h_i^1 z = 1$, то $h_i^l z = 0$, если $l > 1$, и мы берем только те m_i , которые принимают значения 0 или 1. Тогда из этого следует, что среди чисел $m_1, \dots, m_{n-j}$ будет $k+1-j$ единиц и $n-k-1$ нулей. В этом случае легко получим

$$\left| P_{n-j}^{k+1-j} z \right| < \frac{k+1-j!}{k+1-j!} \frac{n-j!}{n-k-1!} R + |z|^{n-k-1} = \frac{n-j!}{n-k-1!} R + |z|^{n-k-1}, \quad j=1, \dots, k+1,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. Справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{n-j!}{k+1-j!} = \frac{n!}{k!} \frac{1}{n-k}.$$

Доказательство. Разделим обе части предполагаемого равенства на $n-k-1!$ и докажем равенство

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{n-j!}{k+1-j!} \frac{1}{n-k-1!} = \frac{n!}{k!} \frac{1}{n-k},$$

т.е. равенство

$$\sum_{j=1}^{k+1} C_{n-j}^{k+1-j} = C_{n-1}^k + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_{n-k}^1 + C_{n-k-1}^0 = C_n^k.$$

Имеем

$$\begin{aligned} C_{n-1}^k + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_{n-k}^1 + C_{n-k-1}^0 &= C_{n-k}^0 + C_{n-k}^1 + C_{n-k+1}^2 + C_{n-k+2}^3 + \dots + C_{n-k+k-1}^k = \\ &= C_{n-k+1}^1 + C_{n-k+1}^2 + C_{n-k+2}^3 + \dots + C_{n-k+k-1}^k = C_{n-k+2}^2 + C_{n-k+2}^3 + \dots + C_{n-k+k-1}^k. \end{aligned}$$

Применяя формулу

$$C_{n-k+m}^m + C_{n-k+m}^{m+1} = C_{n-k+m+1}^{m+1}$$

при $m=0, m=1, \dots, m=k-1$, убеждаемся в справедливости леммы 3.

Лемма 4. Для любого z из круга $|z| \leq r$ справедливо неравенство:

$$\left| \Psi_j z \right| \leq \frac{j-1!}{n!} |y^n z_0| \left| a_j - z \right|^j, \quad j=1, 2, \dots, n$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство

$$|\Psi_n z| \leq \frac{n-1!}{n!} |y^n z_0| |a_n - z|^n. \quad (8)$$

В самом деле, согласно определению имеем

$$\Psi_n z = \int_{a_n}^z (a_n - \zeta)^{n-1} y^n \zeta d\zeta.$$

Сделаем замену

$$\zeta = z - a_n t + a_n,$$

где $0 \leq t \leq 1$ и $d\zeta = -a_n dt$.

Тогда получим

$$\Psi_n z = - (a_n - z)^n \int_0^1 t^{n-1} y^n (z - a_n t + a_n) dt.$$

Значит,

$$|\Psi_n z| \leq |a_n - z|^n |y^n z_0| \int_0^1 t^{n-1} dt = \frac{n-1!}{n!} |a_n - z|^n |y^n z_0|,$$

и неравенство (8) доказано.

Из (8) для любого ξ с условием $|\xi| \leq r$ следует неравенство

$$\frac{|\Psi_n \xi|}{|a_n - \xi|^n} \leq \frac{n-1!}{n!} |y^n z_0| \text{ для любого } |\xi| \leq r.$$

Докажем теперь неравенство

$$|\Psi_{n-1} z| \leq \frac{n-2!}{n!} |y^n z_0| |a_{n-1} - z|^{n-1}. \quad (9)$$

Согласно определению

$$\Psi_{n-1} z = \int_{a_{n-1}}^z (a_{n-1} - \zeta)^{n-2} \frac{\Psi_n \zeta}{a_n - \zeta} d\zeta.$$

Делая замену $\zeta = z - a_{n-1} t + a_{n-1}$, где $0 \leq t \leq 1$ и $d\zeta = -a_{n-1} dt$, получаем

$$\Psi_{n-1} z = - (a_{n-1} - z)^{n-1} \int_0^1 t^{n-2} \frac{\Psi_n (z - a_{n-1} t + a_{n-1})}{a_n - z - a_{n-1} t + a_{n-1}} dt.$$

Далее, имеем

$$|\Psi_{n-1} z| \leq |y^n z_0| |a_{n-1} - z|^{n-1} \frac{n-1!}{n!} \int_0^1 t^{n-2} dt = \frac{n-2!}{n!} |a_{n-1} - z|^{n-1} |y^n z_0|,$$

и неравенство (9) доказано.

Из (9) для любого ξ с условием $|\xi| \leq r$ следует неравенство

$$\frac{|\Psi_{n-1} \xi|}{|a_{n-1} - \xi|^{n-1}} \leq \frac{n-2!}{n!} |y^n z_0|.$$

Продолжая указанный процесс, убеждаемся в справедливости леммы 4.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $g_0(z), \dots, g_{n-1}(z)$ – голоморфные в круге $|z| < R$ функции. Если для любого z из круга $|z| < R$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{R+|z|^{n-k}}{(n-k)!} |g_k(z)| \leq 1, \quad (10)$$

то дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(z) + g_{n-1}(z) y^{(n-1)}(z) + \dots + g_1(z) y'(z) + g_0(z) y(z) = 0 \quad (11)$$

есть уравнение типа Чебышева, т.е. фундаментальная система дифференциального уравнения (11) является системой Чебышева в круге $|z| < R$.

Доказательство. Пусть условие (10) выполнено. Предположим, что дифференциальное уравнение (11) не является уравнением чебышевского типа. Тогда найдется голоморфная в круге $|z| < R$ функция $y(z)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению (11) и имеет n нулей $a_1, \dots, a_n$ в круге $|z| < R$, т.е. $y(a_1) = \dots = y(a_n) = 0$. Возьмем минимального размера замкнутый круг $|z| \leq r$, который содержит все точки $a_1, \dots, a_n$. Ясно, что $r < R$. В круге $|z| \leq r$ функция $|y^{(n)}(z)|$ имеет максимум в некоторой точке z_0 . Применяя теорему 1 и леммы 2–4, легко убедиться в том, что

$$|y^{(k)}(z)| < |y^{(n)}(z_0)| \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} \frac{(n-j)!}{(n-k-1)!} \frac{(j-1)!}{n!} (R+|z|)^{n-k} = \frac{R+|z|^{n-k}}{(n-k)!} |y^{(n)}(z_0)|,$$

если z принадлежит кругу $|z| \leq r$. Теперь из (1) следует, что

$$|y^{(n)}(z)| < |y^{(n)}(z_0)| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R+|z|^{n-k}}{(n-k)!} |g_k(z)|, \quad (12)$$

если z принадлежит кругу $|z| \leq r$. Полагая в (12) $z = z_0$, имеем

$$1 < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R+|z_0|^{n-k}}{(n-k)!} |g_k(z_0)|.$$

Получили противоречие, которое и доказывает теорему 2.

Следствие 1. Если

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2R^{n-k}}{(n-k)!} |c_k| \leq 1,$$

то дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(z) + c_{n-1} y^{(n-1)}(z) + \dots + c_1 y'(z) + c_0 y(z) = 0$$

с числовыми комплексными коэффициентами $c_{n-1}, \dots, c_0$ является уравнением чебышевского типа в круге $|z| < R$.

Возьмем систему

$$1, z, \dots, z^{n-2}, f(z) \quad (13)$$

голоморфных в круге $|z| < R$ функций. С помощью этих функций составим однородное линейное дифференциальное уравнение n -го порядка вида

$$y^{(n)}(z) - \frac{f^{(n)}(z)}{f^{(n-1)}(z)} y^{(n-1)}(z) = 0. \quad (14)$$

Очевидно функции (13) образуют фундаментальную систему решений уравнения (14).

Следствие 2. Если для любого z из круга $|z| < R$ выполняется неравенство

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{n-1!}{R+|z|} \left| f^{(n-1)}(z) \right|,$$

то дифференциальное уравнение (14) является уравнением чебышевского типа. Другими словами, система функций (13) является системой Чебышева в круге $|z| < R$.

Следствие 3. Если для любого z из круга $|z| < R$ выполняется неравенство

$$\left| g_0(z) \right| \leq \frac{n-1!}{R+|z|^n},$$

то дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(z) + g_0(z)y(z) = 0$$

является уравнением чебышевского типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн, М.Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. – М.: Наука, 1973. – 552 с.
2. Карлин, С. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике / С. Карлин, В. Стадден. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
3. Смирнов, В.И. Конструктивная теория функций комплексного переменного / В.И. Смирнов, Н.А. Лебедев. – М.: Наука, 1964. – 439 с.
4. Гончаров, В.А. Теория интерполирования и приближения функций / В.А. Гончаров. – М.: Наука, 1954. – 328 с.
5. Гельфонд, А.О. Исчисление конечных разностей / А.О. Гельфонд. – М.: Наука, 1967. – 376 с.
6. Голузин, Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г.М. Голузин. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
7. Кирьяцкис, Д.Э. О некоторых свойствах аналитических функций, образующих систему Чебышева / Д.Э. Кирьяцкис // Весн. Гродзенск. дзярж. ун-та. Сер. 2. Матэматыка. – 2011. – № 2(111). – С. 5 – 14.
8. Кирьяцкис, Д.Э. О некоторых свойствах системы Чебышева, связанной с разделенной разностью n -го порядка / Д.Э. Кирьяцкис // Изв. Смоленск. гос. ун-та. – 2011. – № 4(16). – С. 155 – 165.
9. Кирьяцкис, Д. Об одной чебышевской системе рациональных функций / Д. Кирьяцкис // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. – Смоленск, 2005. – С. 131 – 132.

Поступила 01.03.2012

ABOUT LINEAR HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATION AND THE CHEBYSHEV SYSTEM

D. KIRJACKIS

The fundamental system of solutions of linear homogeneous differential equations of n -th order may or may not be a Chebyshev system. In this paper, mounted signs that the fundamental system is a system of Chebyshev in the circle. For this purpose, we consider a class of analytic functions in a circle, each of which has n zeros in the circle. For functions of this class of modules, the estimates of derivatives.

UDC 517.9

ON THE OSCILLATION AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR FOR A HIGER ORDER NEUTRAL DIFFERENCE EQUATION

DINH CONG HUONG
(Quy Nhon University, Vietnam);
NGUYEN VAN MAU
(Hanoi University of Science, Vietnam)

In this paper, the oscillation and asymptotic behavior of the higer order neutral difference equation $\Delta^k(x_n + \delta_n x_{n-\tau}) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(n) F(x_{n-m_i}) = 0$, $n = 0, 1, \dots$ are investigated.

1. Introduction. The properties of solutions of neutral difference equations has been studied extensively in recent years; (see for example the work in [1 – 10] and the references cited therein). In [3], we obtained some results for the oscillation and the convergence of solutions of neutral difference equation of the form

$$\Delta(x_n + \delta x_{n-\tau}) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(n) F(x_{n-m_i}) = 0, \quad (1)$$

for $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ for some $n_0 \in \mathbb{N}$, where $r, m_1, m_2, \dots, m_r$ are fixed positive integers, the functions $\alpha_i(n)$ are defined on $\mathbb{N}$ and the function F is defined on $\mathbb{R}$. In [1], the author obtained some results for the oscillation and the convergence of solutions of higer order neutral difference equation of the form

$$\Delta^k(x_n + \delta_n x_{n-\tau}) + q_n F(x_{n-\sigma}) = 0 \quad (2)$$

with some restrictions on the function F , the sequences $(q_n), (\delta_n)$.

Motivated by the work above, in this paper, we aim to study the oscillation and convergence of solutions of higer order neutral difference equation

$$\Delta^k(x_n + \delta_n x_{n-\tau}) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(n) F(x_{n-m_i}) = 0, \quad (3)$$

for $n \in \mathbb{N}$, where $k, \tau, r, m_1, m_2, \dots, m_r$ are fixed positive integers and the functions $\alpha_i(n)$ are defined on $\mathbb{N}$, $\alpha_i(n) \geq 0$, and are not eventually identically zero, the continuous function $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is such that $xF(x) > 0$ for all $x \neq 0$. Moreover, with respect to (3), we assume that there exists a function $G: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that G is continuous and nondecreasing and satisfies the inequality

$$G(xy) \geq MG(x)G(y) \quad \text{for } x, y > 0,$$

where M is a positive constant,

$$|F(x)| \geq G(x), \quad \frac{G(x)}{x} \geq N > 0$$

and $xG(x) > 0$ for $x \neq 0$.

Put $A = \max\{\tau, m_1, \dots, m_r\}$. Then, by a solution of (3) we mean a function which is defined for $n \geq -A$ and satisfies the equation (3) for $n \in \mathbb{N}$. Clearly, if

$$x_n = a_n, \quad n = -A, -A+1, \dots, -1, 0$$

are given, then (3) has a unique solution, and it can be constructed recursively.

A nontrivial solution $(x_n)_{n \geq n_0}$ of (3) is called *oscillatory* if for any $n_1 \geq n_0$ there exists $n_2 \geq n_1$ such that $x_{n_2} x_{n_2+1} \leq 0$. The difference equation (3) is called *oscillatory* if all its solutions are oscillatory. Otherwise, it is called *nonoscillatory*.

2. The results. To begin with, we get theorem following.

THEOREM 2.1 [2] (Discrete Kneser's Theorem). Let $(x_n)_{n \geq n_0}$ be such that $x_n > 0$ with $\Delta^k x_n$ of constant sign for all $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ and not identically zero. Then, there exists an integer m , $0 \leq m \leq k$ with $k+m$ odd for $\Delta^k x_n \leq 0$ or $k+m$ even for $\Delta^k x_n \geq 0$ and such that:

$m \leq k-1$ implies $(-1)^{m+i} \Delta^i x_n > 0$ for all $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $m \leq i \leq n-1$;

$m \geq 1$ implies $(-1)^{m+i} \Delta^i x_n > 0$ for all $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $1 \leq i \leq m-1$.

Corollary 2.2 [2]. Let $(x_n)_{n \geq n_0}$ be such that $x_n > 0$ with $\Delta^k x_n \leq 0$ for all $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ and not identically zero. Then, there exists a large integer $n_1 \geq n_0$ such that for all $n \geq n_1$

$$x_n \geq \frac{1}{(k-1)!} \Delta^{k-1} x_{2^{k-m-1}n} (n-n_1)^{(k-1)}.$$

THEOREM 2.3. Assume that

$$\frac{(\tilde{m}+1)^{\tilde{m}+1}}{\tilde{m}^{\tilde{m}}} \sum_{i=1}^r \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_i(n) > 1, \quad (4)$$

where $\alpha_i(n) \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq r$ and $\tilde{m} = \min_{1 \leq i \leq r} m_i$. Then, the inequality

$$\Delta x_n + \sum_{i=1}^r \alpha_i(n) x_{n-m_i} \leq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

has no eventually positive solution.

Proof. Assume, for the sake of contradiction, that (4) has a solution (x_n) with $x_n > 0$ for all $n \geq n_1$, $n_1 \in \mathbb{N}$.

Setting $v_n = \frac{x_n}{x_{n+1}}$ and dividing this inequality by x_n , we obtain

$$\frac{1}{v_n} \leq 1 - \sum_{i=1}^r \alpha_i(n) \prod_{\ell=1}^{m_i} v_{n-\ell}, \quad (5)$$

where $n \geq n_1 + m$, $m = \max_{1 \leq i \leq r} m_i$.

Clearly, (x_n) is nonincreasing with $n \geq n_1 + m$, and so $v_n \geq 1$ for all $n \geq n_1 + m$. From (4) and (5) we see that (v_n) is a above bounded sequence. Putting $\liminf_{n \rightarrow \infty} v_n = \beta$, we get

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{\beta} \leq 1 - \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^r \alpha_i(n) \prod_{\ell=1}^{m_i} v_{n-\ell},$$

or

$$\frac{1}{\beta} \leq 1 - \sum_{i=1}^r \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_i(n) \cdot \beta^{m_i}. \quad (6)$$

Since

$$\beta^{m_i} \geq \beta^{\tilde{m}}, \quad \forall i = \overline{1, r},$$

we have

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_i(n) \beta^{m_i} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_i(n) \beta^{\tilde{m}}, \quad \forall i = \overline{1, r}$$

and

$$1 - \sum_{i=1}^r \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_i(n) \beta^{m_i} \leq 1 - \sum_{i=1}^r \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_i(n) \beta^{\tilde{m}}.$$

From (6) we have

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^r \alpha_i(n) \leq \frac{\beta-1}{\beta^{\tilde{m}+1}}.$$

But

$$\frac{\beta-1}{\beta^{\tilde{m}+1}} \leq \frac{\tilde{m}^{\tilde{m}}}{(\tilde{m}+1)^{\tilde{m}+1}},$$

so

$$\frac{(\tilde{m}+1)^{\tilde{m}+1}}{\tilde{m}^{\tilde{m}}} \sum_{i=1}^r \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_i(n) \leq 1,$$

which contradicts condition (4). Hence, the inequality

$$\Delta x_n + \sum_{i=1}^r \alpha_i(n) x_{n-m_i} \leq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

has no eventually positive solution. The proof is complete.

THEOREM 2.4. Let k be even. Assume that $0 \leq \delta_n < 1$, $n \geq n_0$ and

$$\frac{(\tilde{m}+1)^{\tilde{m}+1}}{\tilde{m}^{\tilde{m}}} M^2 NG \left(\frac{1}{(k-1)!} \right) \sum_{i=1}^r \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_i(n) G \left(1 - \delta_{n-m_i} \left(\frac{n-m_i}{2^{n-1}} \right)^{(k-1)} \right) > 1, \quad (7)$$

where $\tilde{m} = \min_{1 \leq i \leq r} m_i$. Then, the equation (3) is oscillatory.

Proof. Let (x_n) be a nonoscillatory solution of (3) with $x_n > 0, x_{n-\tau} > 0$ and $x_{n-m_i} > 0$ for all $n \geq n_0 \geq N_0$ and $i = 1, 2, \dots, r$. Setting $z_n = x_n + \delta_n x_{n-\tau}$, we get $z_n \geq x_n > 0$ and

$$\Delta^k z_n = - \sum_{i=1}^r \alpha_i(n) F(x_{n-m_i}) < 0, \quad n \geq n_0. \quad (8)$$

It follows from Theorem 2.1 that

$$\Delta^{k-1} z_n > 0, \quad k \geq 2, n \geq n_0. \quad (9)$$

We will prove that $\Delta z_n < 0$ eventually. This is obvious from the equation (3) in the case $k = 1$. For $k \geq 2$, we suppose on the contrary that $\Delta z_n > 0$ for $n \geq n_1 \geq n_0$. Then

$$(1 - \delta_n) z_n \leq z_n - \delta_n z_{n-\tau} = x_n - \delta_n \delta_{n-\tau} x_{n-2\tau} \leq x_n \quad (10)$$

for $n \geq n_2 \geq n_1$. Since (z_n) is positive and increasing, it follows from Corollary 2.2 and (10) that

$$x_n \geq (1 - \delta_n) z_n \geq \frac{1 - \delta_n}{(k-1)!} \left(\frac{n}{2^{k-1}} \right)^{(k-1)} \Delta^{k-1} z_n, \quad n \geq 2^{k-1} n_2. \quad (11)$$

From (11) for $n \geq n_3 \geq n_2$, we obtain

$$\begin{aligned} F(x_{n-m_i}) &\geq G(x_{n-m_i}) \\ &\geq G \left(\frac{1 - \delta_{n-m_i}}{(k-1)!} \left(\frac{n-m_i}{2^{k-1}} \right)^{(k-1)} \Delta^{k-1} z_{n-m_i} \right) \\ &\geq M^2 NG \left(\frac{1}{(k-1)!} \right) G \left((1 - \delta_{n-m_i}) \left(\frac{n-m_i}{2^{k-1}} \right)^{(k-1)} \right) \Delta^{k-1} z_{n-m_i}. \end{aligned}$$

Put $w_n = \Delta^{k-1} z_n$, $n \geq n_0$. From (8) we have

$$\Delta w_n + \sum_{i=1}^r \alpha_i(n) M^2 NG \left(\frac{1}{(k-1)!} \right) G \left((1 - \delta_{n-m_i}) \left(\frac{n-m_i}{2^{k-1}} \right)^{(k-1)} \right) w_{n-m_i} \leq 0. \quad (12)$$

We see that (w_n) is an eventually positive solution of (12). But, in view of the condition (7), this is a contradiction to Theorem 2.3. Hence, $\Delta z_n < 0$ eventually.

Since $\Delta z_n < 0$ eventually, in Theorem 2.1 we must have $m = j = 0$, and

$$(-1)^i \Delta^i z_n > 0, \quad 0 \leq i \leq k-1, \quad n \geq n_0. \quad (13)$$

If k is even, (13) implies a contradiction to (9). The proof is complete.

THEOREM 2.5. Let k be odd. Assume that $0 \leq \delta_n \leq \sigma < 1$, $n \geq n_0$ where σ is a constant and

$$\frac{(\tilde{m}+1)^{\tilde{m}+1}}{\tilde{m}^{\tilde{m}}} M^2 NG(P) \sum_{i=1}^r \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_i(n) G\left(\left(\frac{n-m_i}{2^{k-1}}\right)^{(k-1)}\right) > 1, \quad (14)$$

for every $P \in (0,1)$, $\tilde{m} = \min_{1 \leq i \leq r} m_i$. Then, every solution of (3) either oscillates or tends to zero as $n \rightarrow \infty$.

Proof. Assume that (x_n) does not tend to zero as $n \rightarrow \infty$. Using proceeding as in the proof of Theorem 2.4, we have $\Delta z_n < 0$ eventually. This implies that $z_n \rightarrow \ell$ as $n \rightarrow \infty$, where $0 < \ell < \infty$. Then, there exists $\varepsilon > 0$ and an integer $n_4 > n_0$ such that

$$0 < \varepsilon < \ell \frac{1-\sigma}{1+\sigma} < \ell$$

and

$$\ell - \varepsilon < z_n \leq z_{n-\tau} < \ell + \varepsilon, \quad n \leq n_4. \quad (15)$$

Thus, from (10) and (15), we find for $n \geq n_4$ that

$$x_n \geq z_n - \delta_n z_{n-\tau} \geq z_n - \sigma z_{n-\tau} > \ell - \varepsilon - \sigma(\ell + \varepsilon) > \frac{\ell - \varepsilon - \sigma(\ell + \varepsilon)}{\ell + \varepsilon} z_n.$$

Let $m = j$ be as in Corollary 2.2. We have

$$z_n = \frac{z_n}{z_{2^{j+1-k}n}} z_{2^{j+1-k}n} > \frac{\ell - \varepsilon}{\ell + \varepsilon} z_{2^{j+1-k}n}, \quad n \geq n_5 > n_4. \quad (16)$$

Combining (15) and (16) and using Corollary 2.2, we get for $n \geq n_6 > n_5$ that

$$\begin{aligned} x_n &> \frac{\ell - \varepsilon - \sigma(\ell + \varepsilon)}{\ell + \varepsilon} \cdot \frac{\ell - \varepsilon}{\ell + \varepsilon} z_{2^{j+1-k}n} \\ &\geq \frac{\ell - \varepsilon - \sigma(\ell + \varepsilon)}{\ell + \varepsilon} \cdot \frac{\ell - \varepsilon}{\ell + \varepsilon} \frac{(2^{j+1-k}n - n_6)^{(k-1)}}{(k-1)!} \Delta^{k-1} z_n \\ &\geq \frac{\ell - \varepsilon - \sigma(\ell + \varepsilon)}{\ell + \varepsilon} \cdot \frac{\ell - \varepsilon}{\ell + \varepsilon} \cdot \frac{1}{(k-1)!} 2^{(j+1-k)(k-1)} (n - 2^k n_6)^{(k-1)} \Delta^{k-1} z_n. \end{aligned}$$

Thus, for $n \geq 2^{k+1}n_6 + k - 2$ it follows that

$$\begin{aligned} x_n &\geq \frac{\ell - \varepsilon - \sigma(\ell + \varepsilon)}{\ell + \varepsilon} \cdot \frac{\ell - \varepsilon}{\ell + \varepsilon} \cdot \frac{1}{(k-1)!} 2^{(j+1-k)(k-1)} \frac{1}{2^{k-1}} (n)^{(k-1)} \Delta^{k-1} z_n \\ &\geq \frac{\ell - \varepsilon - \sigma(\ell + \varepsilon)}{\ell + \varepsilon} \cdot \frac{\ell - \varepsilon}{\ell + \varepsilon} \cdot \frac{1}{(k-1)!} 2^{(j-k)(k-1)} \Delta^{k-1} z_n. \end{aligned} \quad (17)$$

It can easily be seen that $\frac{\ell - \varepsilon - \sigma(\ell + \varepsilon)}{\ell + \varepsilon} \cdot \frac{\ell - \varepsilon}{\ell + \varepsilon} \cdot \frac{1}{(k-1)!} 2^{(j-k)(k-1)} = P \in (0,1)$.

By (17), for $n \geq n_7 > n_6$, we obtain

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i(n) F(x_{n-m_i}) \geq \sum_{i=1}^r \alpha_i(n) M^2 NG(P) G\left(\left(\frac{n-m_i}{2^{k-1}}\right)^{(k-1)}\right) \Delta^{k-1} z_{n-m_i}.$$

Put $w_n = \Delta^{k-1} z_n$, $n \geq n_0$. We see that (w_n) is an eventually positive solution of

$$\Delta w_n + \sum_{i=1}^r \alpha_i(n) M^2 NG(P) G\left(\left(\frac{n-m_i}{2^{k-1}}\right)^{(k-1)}\right) w_{n-m_i} \leq 0.$$

In view of the condition (14), this is a contradiction to Theorem 2.3. The proof is complete.

THEOREM 2.6. Assume that $-1 < -\sigma \leq \delta_n \leq 0$, $n \geq n_0$ where σ is a constant and the condition (14) in Theorem 2.5 is satisfied. Then, every solution of (3) either oscillates or tends to zero as $n \rightarrow \infty$.

Proof. Let (x_n) be a nonoscillatory solution of (3) with $x_n > 0, x_{n-\tau} > 0$ and $x_{n-m_i} > 0$ for all $n \geq n_0 \geq N_0$ and $i = 1, 2, \dots, r$. Assume, furthermore, that (x_n) does not tend to zero as $n \rightarrow \infty$. Setting $z_n = x_n + \delta_n x_{n-\tau}$, we get $z_n \leq x_n$ and

$$\Delta^k z_n = -\sum_{i=1}^r \alpha_i(n) F(x_{n-m_i}) < 0, \quad n \geq n_0. \quad (18)$$

We claim that $\Delta x_n \leq 0$ eventually. Suppose on the contrary that $\Delta z_n > 0$ for $n \geq n_1 > n_0$. Then, for $n \geq n_2 > n_1$, we have

$$z_n \geq x_n + \delta_n x_n \geq (1 - \sigma)x_n > 0. \quad (19)$$

Thus, inequality (9) follows from Theorem 2.1. Since (x_n) is unbounded, it follows from (19) that (z_n) is also unbounded, and hence $\Delta z_n > 0$, $n \geq n_2$. Applying Corollary 2.2, we find

$$x_n \geq z_n \geq \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{n}{2^{k-1}} \right)^{(k-1)} \Delta^{k-1} z_n, \quad n \geq 2^{k-1} n_2. \quad (20)$$

Therefore, in view of (20), for $n \geq n_3 > n_2$ we obtain

$$\begin{aligned} F(x_{n-m_i}) &\geq G(x_{n-m_i}) \\ &\geq M^2 N G \left(\left(\frac{1}{(k-1)!} \right) G \left(\frac{n-m_i}{2^{k-1}} \right)^{(k-1)} \right) \Delta^{k-1} z_{n-m_i}. \end{aligned}$$

It follows from (9) and the above inequality that $\Delta^{k-1} z_n$ is an eventually positive solution of

$$\Delta w_n + \sum_{i=1}^r \alpha_i(n) M^2 N G \left(\frac{1}{(k-1)!} \right) G \left(\frac{n-m_i}{2^{k-1}} \right)^{(k-1)} w_{n-m_i} \leq 0.$$

In view of the condition (14), this is a contradiction to Theorem 2.3. Hence, $\Delta x_n \leq 0$ eventually. This implies that $x_n \rightarrow \ell$ as $n \rightarrow \infty$, where $0 < \ell < \infty$.

Since $z_n = x_n + \delta_n x_{n-\tau}$, we get

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} z_n = (1 + \liminf_{n \rightarrow \infty} \delta_n) \ell \geq (1 - \sigma) \ell.$$

Hence, (z_n) is eventually positive and (9) holds. Since $z_n \leq x_n$ and (x_n) is nonincreasing eventually, (z_n) is also nonincreasing eventually. Thus, $z_n \rightarrow \ell_1$ as $n \rightarrow \infty$, where $0 < \ell_1 < \infty$. Given $\varepsilon \in (0, \ell_1)$, there exists an integer $n_4 > n_0$ such that

$$\ell_1 - \varepsilon < z_n < \ell_1 + \varepsilon, \quad n \geq n_4. \quad (21)$$

Let $m = j$ be as in Corollary 2.2. For $n \geq n_5 > n_4$, using (21) and Corollary 2.2 successively, we obtain

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{z_n}{z_{2^{j+1-k}n}} z_{2^{j+1-k}n} \\ &> \frac{\ell_1 - \varepsilon}{\ell_1 + \varepsilon} z_{2^{j+1-k}n} \\ &\geq \frac{\ell_1 - \varepsilon}{\ell_1 + \varepsilon} \frac{(2^{j+1-k}n - n_5)^{(k-1)}}{(k-1)!} \Delta^{k-1} z_n \\ &\geq \frac{\ell_1 - \varepsilon}{\ell_1 + \varepsilon} \frac{1}{(k-1)!} 2^{(j+1-k)(k-1)} (n - 2^n n_5)^{(k-1)} \Delta^{k-1} z_n. \end{aligned}$$

It follows that for $n \geq 2^{k+1}n_5 + k - 2$,

$$\begin{aligned} z_n &\geq \frac{\ell_1 - \varepsilon}{\ell_1 + \varepsilon} \cdot \frac{1}{(k-1)!} 2^{(j+1-k)(k-1)} \frac{1}{2^{k-1}} (n)^{(k-1)} \Delta^{k-1} z_n \\ &\geq \frac{2^{(j-k)(k-1)}(\ell_1 - \varepsilon)}{(\ell_1 + \varepsilon)(k-1)!} \cdot \left(\frac{n}{2^{k-1}} \right)^{(k-1)} \Delta^{k-1} z_n. \end{aligned} \quad (22)$$

It is easily seen that $\frac{2^{(j-k)(k-1)}(\ell_1 - \varepsilon)}{(\ell_1 + \varepsilon)(k-1)!} \in (0, 1)$. By (22), for $n \geq n_6 > n_5$, we get

$$\begin{aligned} F(x_{n-m_i}) &\geq G(x_{n-m_i}) \geq G(z_{n-m_i}) \\ &\geq M^2 NG \left(\left(\frac{2^{(j-k)(k-1)}(\ell_1 - \varepsilon)}{(\ell_1 + \varepsilon)(k-1)!} \right) G \left(\frac{n-m_i}{2^{k-1}} \right)^{(k-1)} \right) \Delta^{k-1} z_{n-m_i}. \end{aligned}$$

It follows from (9) and the above inequality that $\Delta^{k-1} z_n$ is an eventually positive solution of

$$\Delta w_n + \sum_{i=1}^r \alpha_i(n) M^2 NG \left(\frac{2^{(j-k)(k-1)}(\ell_1 - \varepsilon)}{(\ell_1 + \varepsilon)(k-1)!} \right) G \left(\frac{n-m_i}{2^{k-1}} \right)^{(k-1)} w_{n-m_i} \leq 0.$$

In view of the condition (14), this is a contradiction to Theorem 2.3. The proof is complete.

THEOREM 2.7. Let k be even. Assume that $\delta_n \equiv 1$, $n \geq n_0$ and $\sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{i=1}^r \alpha_i(\ell) = \infty$. Then, the equation (3) is oscillatory.

Proof. Let (x_n) be a nonoscillatory solution of (3) with $x_n > 0, x_{n-\tau} > 0$ and $x_{n-m_i} > 0$ for all $n \geq n_0 \geq N_0$ and $i = 1, 2, \dots, r$. Setting $z_n = x_n + x_{n-\tau}$, we get $z_n > 0$, $n \geq n_0$ and the inequalities (8) and (9) are satisfied. Summing (3) from n_0 to $n-1$ and using (9), we obtain

$$\Delta^{k-1} z_{n_0} = \sum_{\ell=n_0}^{n-1} \sum_{i=1}^r \alpha_i(\ell) F(x_{\ell-m_i}) + \Delta^{k-1} z_n > \sum_{\ell=n_0}^{n-1} \sum_{i=1}^r \alpha_i(\ell) N x_{\ell-m_i},$$

which implies

$$\sum_{\ell=n_0}^{\infty} \sum_{i=1}^r \alpha_i(\ell) x_{\ell-m_i} < \infty. \quad (23)$$

Next, we prove that if $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$, then $\sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{i=1}^r \alpha_i(\ell) < \infty$. Indeed, suppose the contrary that

$\sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{i=1}^r \alpha_i(\ell) = \infty$. Put $L = \inf_{\ell > n_0} x_{\ell-m_i}, i = 1, 2, \dots, r$. Then, we have

$$\sum_{\ell=n_0}^{\infty} \sum_{i=1}^r \alpha_i(\ell) x_{\ell-m_i} \geq L \sum_{\ell=n_0}^{\infty} \sum_{i=1}^r \alpha_i(\ell) = \infty,$$

which contradicts (23).

Since k is even, from Theorem 2.1, we see that $m = j$ is odd and hence $\Delta z_n > 0$, $n \geq n_0$. Therefore,

$$0 < z_n - z_{n-\tau} = x_n - x_{n-2\tau}, \quad n \geq n_1 > n_0,$$

or $x_n > x_{n-2\tau}$, $n \geq n_1$. This implies $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$. We have seen that this leads to $\sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{i=1}^r \alpha_i(\ell) < \infty$, which is a

contradiction to $\sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{i=1}^r \alpha_i(\ell) = \infty$. The proof is complete.

THEOREM 2.8. Let k be odd. Assume that $\delta_n \equiv 1$, $n \geq n_0$ and $\sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{i=1}^r \alpha_i(\ell) = \infty$. Then, every solution of (3) either oscillates or tends to zero as $n \rightarrow \infty$.

Proof. Let (x_n) be a nonoscillatory solution of (3) with $x_n > 0$, $x_{n-\tau} > 0$ and $x_{n-m_i} > 0$ for all $n \geq n_0 \geq N_0$ and $i = 1, 2, \dots, r$. Assume, furthermore, that (x_n) does not tend to zero as $n \rightarrow \infty$. From Theorem 2.1, we see that $m = j$ is even. If $j > 2$, then we obtain $\Delta z_n > 0$, $n \geq n_0$. Proceeding as in the proof of Theorem 2.7, we obtain a contradiction. If $j = 0$, then from Theorem 2.1 we have $\Delta z_n < 0$, $n \geq n_0$. Thus, $z_n \rightarrow \ell$ as $n \rightarrow \infty$, where $0 < \ell < \infty$. For $\varepsilon \in (0, \ell)$, there exists an integer $n_1 > n_0$ such that

$$z_n = x_n + x_{n-\tau} > \ell - \varepsilon > 0, \quad n \geq n_1.$$

Hence, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$. Proceeding as in the proof of Theorem 2.7, we obtain $\sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{i=1}^r \alpha_i(\ell) < \infty$, which is a contradiction to $\sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{i=1}^r \alpha_i(\ell) = \infty$. The proof is complete.

This work is supported partially by the Vietnam National University Foundation QGTD0809.

REFERENCES

1. R.P. Agarwal, E. Thandapani and P.J.Y. Wong, Oscillation of higher order neutral difference equation, *Appl. Math. Letters* 10 (1997), 71 – 78.
2. R.P. Agarwal, Difference calculus with applications to difference equations, in *General Inequalities* 4, cd. W. Walter, ISNM 71, *Birkhauser Verlag*, Basel, (1984), 95 – 110
3. Dinh Cong Huong, Oscillation and Convergence for a Neutral Difference Equation, *VNU Journal of Science, Mathematics-Physics* 24 (2008) 133 – 143.
4. R.K. Brayton and R.A. Willoughby, On the numerical integration of a symmetric system of difference differential equations of neutral type, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 18 (1967).
5. L.H. Huang and J.S. Ju, Asymptotic behavior of solutions for a class of difference equation, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 204 (1996).
6. I.G. E. Kordonis and C.G. Philos, Oscillation of neutral difference equation with periodic coefficients, *Computers. Math. Applic.* Vol. 33 (1997).
7. B.S. Lalli and B.G. Zhang and J.Z. Li, On the oscillation of solutions and existence of positive solutions of neutral delay difference equation, *J. Math. Anal. Appl.* Vol. 158 (1991).
8. B.S. Lalli and B.G. Zhang, On existence of positive solutions bounded oscillations for neutral delay difference equation, *J. Math. Anal. Appl.* Vol. 166 (1992).
9. B.S. Lalli and B.G. Zhang, Oscillation and comparison theorems for certain neutral delay difference equation, *J. Austral. Math. Soc.* Vol. 34 (1992).
10. B.S. Lalli, Oscillation theorems for certain neutral delay difference equation, *Computers. Math. Appl.* Vol. 28 (1994).

Получена 24.02.2012

ФИЗИКА

УДК 533.9.01

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОХОЖДЕНИЯ ЭНЕРГИИ СВЧ-ПОЛЯ В ПЛАЗМУ ВОЗБУЖДАЕМОГО РАЗРЯДА

*д-р техн. наук С.В. БОРДУСОВ, С.И. МАДВЕЙКО**(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск)*

Изучение вопроса о проникновении СВЧ-волны ($f = 2,45 \pm 0,05$ ГГц) в центр возбуждаемого ею газового разряда в кислороде в плазмотроне, построенном на базе резонатора прямоугольного типа, проводилось применительно к задаче СВЧ-плазмохимической обработки кремниевых пластин. Исследование выполнялось тремя независимыми методами: с использованием термомпар; по данным показаний введенного в разряд «активного зонда»; измерением электрическими зондами электропроводности пространства, изолированного от плазменного объема. Результаты проведенных экспериментов указывают на то, что при уровнях плотности потока СВЧ-мощности в разрядном объеме порядка $0,06 \dots 0,08$ Вт/см³ происходит проникновение СВЧ-поля в объем зоны разряда. Этот эффект необходимо учитывать при организации процессов плазмохимической обработки (влияние СВЧ-поля на параметры обрабатываемых структур, «загрузочный» эффект, проектирование распределенной системы подвода СВЧ-энергии к зоне обработки, формирующуюся определенную структуру распределения СВЧ-поля в зоне плазмообразования и т.д.) и анализе результатов обработки материалов и структур, подверженных воздействию СВЧ-энергии.

Введение. В процессе проведения экспериментов по удалению фоторезиста с поверхности кремниевых пластин при групповой обработке установлен специфический характер проявления эффекта «загрузки». Это является следствием как частичного поглощения поступающей в область СВЧ-резонатора мощности электромагнитной волны материалом с высоким значением тангенса угла диэлектрических потерь (кремний), так и изменения добротности резонатора. Поэтому по мере увеличения количества обрабатываемых в камере плазмотрона полупроводниковых пластин необходимо увеличивать мощность подводимого СВЧ-излучения. Поскольку СВЧ-магнетроны средней мощности технологического назначения имеют максимальную мощность порядка $0,8 \dots 1,5$ кВт, возникает необходимость поиска стимулирующих воздействий на процесс групповой СВЧ-плазмохимической обработки материалов.

В связи с требованием повышения эффективности промышленного производства микроэлектронных устройств актуальной является задача разработки плазменных источников, обеспечивающих проведение процессов на обрабатываемых поверхностях большой площади и с высокими технологическими характеристиками [1 – 3]. Этим требованиям отвечают СВЧ-плазменные разряды, основным преимуществом которых является возможность формирования плазменных объемов со сравнительно высокой электронной плотностью ($n_e \approx 10 \cdot 10$ см⁻³) и большого диаметра (до $15 \dots 20$ см). Достоинством этих разрядов является также отсутствие электродов, исключающее загрязнение реакционной среды и бомбардировку обрабатываемых материалов энергетическими ионами. Важно и более простое согласование разрядного объема с источником СВЧ-энергии по сравнению с ВЧ-плазменными устройствами при относительной простоте устройств генерации СВЧ-мощности.

Однако развитие микроволновой плазменной техники и технологии сдерживается отсутствием промышленных общедоступных СВЧ-плазменных установок, дефицитностью многих элементов и устройств СВЧ-генераторных приборов, модуляторов, циркуляторов, согласованных нагрузок и т.п. Кроме того, при создании СВЧ-технологического оборудования необходимо правильно конструировать и изготавливать тракты передачи СВЧ-мощности, обеспечивающие выполнение требований безопасной эксплуатации техники, использующей микроволновое излучение.

Поскольку эффективность процессов плазмообразования и поддержания стабильного газового разряда в значительной степени связана с величиной напряженности электрической составляющей электромагнитного поля $E_{эфф}$ в зоне разряда [4; 5], особый интерес представляют СВЧ-плазмтроны резонаторного типа, в которых значительное возрастание напряженности поля электромагнитной волны в зоне плазмообразования обеспечивается не повышением мощности источника СВЧ-энергии, а за счет конструктивных решений системы формирования СВЧ-поля. При этом возможны следующие варианты конструктивно-технических решений с использованием устройств резонаторного типа: с частичным заполнением плазмой резонирующего объема, с заполнением плазмой всего резонирующего объема и с разделением резонирующего и реакционного объемов вакуум-плотной перегородкой с элементами электромагнитной связи [6].

В научном плане СВЧ-устройства резонаторного типа с характерным размером разрядной области, превышающим длину возбуждающей плазму электромагнитной волны, изучены недостаточно. Сведения о систематических исследованиях параметров, качественного состава и свойств плазмы СВЧ-разрядов объемом более 6000 см^3 в реакционно-разрядных камерах резонаторного типа в области низких давлений в литературе отсутствуют. Известные технические решения устройств резонаторного типа требуют всестороннего исследования с целью совершенствования и оптимизации их конструктивного исполнения, разработки инженерных методов расчета элементов разрядных узлов и выработки научно обоснованных рекомендаций по их применению в различных процессах вакуумно-плазменной обработки материалов.

Особый интерес при разработке процессов СВЧ-плазменной обработки материалов представляет вопрос о проникновении СВЧ-полей в область газового разряда. Этот эффект необходимо учитывать по следующим причинам:

- 1) СВЧ-поля в случае наличия в объеме плазмы материалов с высокими диэлектрическими потерями могут взаимодействовать с ними, приводя к уменьшению величины СВЧ-мощности, вкладываемой в разряд;
- 2) СВЧ-волны могут переотражаться в плазменном объеме, приводя к изменению параметров разряда; СВЧ-поля в этом случае могут инициировать протекание плазменных реакций на поверхности разряда «ионизированный газ – твердое тело».

Методика эксперимента. Изучение вопроса о проникновении СВЧ-волны с $f = 2,45 \pm 0,05 \text{ ГГц}$ в центр возбуждаемого ею газового разряда проводилось для кислородного разряда в плазмотроне с резонатором прямоугольного типа СВЧ-плазменной установки, внешний вид которой представлен на рисунке 1.

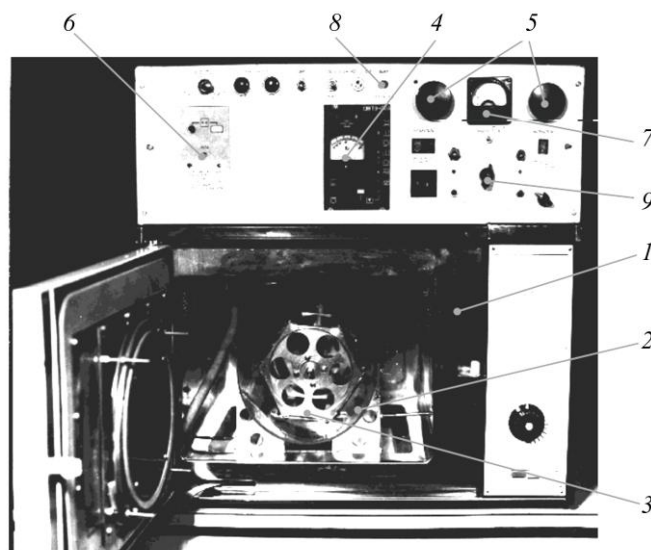


Рис. 1. Макетный образец малогабаритной СВЧ-плазмохимической установки с аппликатором на базе резонатора прямоугольной формы:

- 1 – прямоугольный резонатор; 2 – кварцевый реактор; 3 – подложкодержатель; 4 – вакуумметр 13 ВТЗ-003;
- 5 – натекатели; 6 – датчик расхода газа ДРГ-3; 7 – датчик индикации горения разряда;
- 8 – световод визуального контроля разряда; 9 – система автоматики, задающая длительность циклов обработки

Установка может использоваться на операциях очистки подложек интегральных микросхем, удаления фоторезистивных покрытий, лаков и мастик, плазмохимического осаждения пленок, модификации поверхности материалов, деталей и узлов сложной формы [7 – 9].

При проведении экспериментов величина удельной подводимой к разряду мощности находилась в диапазоне $0,06 \dots 0,08 \text{ Вт/см}^3$. Выбор плазмообразующего газа обусловлен перспективой технологического применения исследуемого плазмотрона, а режимы исследования (давление газа, мощность и т.д.) – условиями оптимальной организации технологического процесса удаления фоторезиста с точки зрения разрядных условий и конструктивной особенности СВЧ-плазмохимической установки (в частности, габаритных размеров СВЧ-генератора).

Исследование проводилось тремя независимыми методами: с использованием термопар; по данным показаний активного зонда, вводимого в разряд; измерением электрическими зондами электропроводности пространства, находящегося внутри плазменного объема, но электрически изолированного от него.

В качестве датчиков температуры использовались термопары хромель-копель. Исходя из условий снижения инерционности показаний термопар, приближения их температуры к температуре объекта измерения, механической прочности и конструктивных особенностей устройства ввода термопар в разряд,

диаметр проволок был выбран равным 0,2 мм. Контактный спай выполнялся в соответствии с общепринятыми требованиями и при работе с капсулами имел сферическую форму. Диаметр спая составлял 0,5 мм. Обработка результатов измерений проводилась в соответствии с методикой, изложенной в [10]. Для снижения погрешности измерений соединительные и компенсационные проводники не использовались, свободные концы термопар подключались непосредственно к регистрирующим приборам, в качестве которых использовались самописцы типа КСП-4.

Исследования нагрева порошкообразного кремния и ситалла в объеме плазмы СВЧ-разряда СВЧ-полем и под действием термического нагрева от разогретой спирали и в термошкафу проводились с использованием конструкций, представленных на рисунках 2 и 3. Кремний и ситалл были выбраны как тестовые материалы, первый хорошо поглощает СВЧ-поле и нагревается, а другой СВЧ-энергию не поглощает.

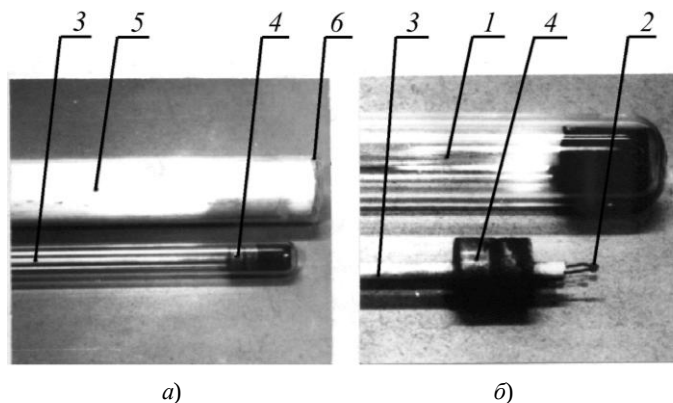


Рис. 2. Диагностическая система для исследования нагрева порошкообразных материалов при атмосферном давлении:

- а – общий вид; б – термопара в увеличенном масштабе;
1 – кварцевая трубка; 2 – термопара; 3 – керамическая трубка;
4 – фторопластовые шайбы; 5 – фторопластовый чехол; 6 – кварцевый экран

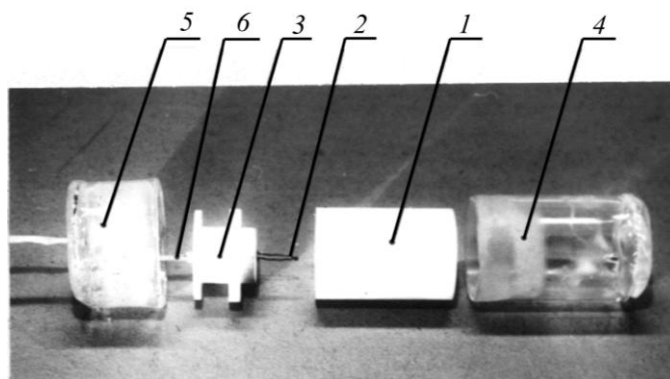


Рис. 3. Капсула для исследования нагрева порошкообразных материалов:

- 1 – фторопластовая капсула; 2 – термопара; 3 – крышка; корпус 4 и крышка 5 кварцевого чехла;
6 – термостойкие диэлектрические трубки

В первой конструкции (см. рис. 2) определенное количество предварительно взвешенного порошка засыпалось в кварцевую трубку 1, герметично заваренную с одного конца. Порошок уплотнялся, затем измерялся и рассчитывался его объем в уплотненном состоянии. В порошок вводился спай термопары 2, пропущенной через керамическую трубку 3, осевое положение которой в кварцевом цилиндре жестко фиксировалось с помощью нескольких фторопластовых шайб 4. Фторопластовые шайбы, кроме того, служили для уменьшения теплоотвода из порошка, препятствовали изменению его плотности и занимаемого объема. Для повышения термостабилизации и снижения нагрева порошка за счет конвекции и теплопередачи из плазмы на всю длину кварцевого цилиндра в разрядной камере надевались фторопластовый чехол 5, с толщиной стенки 7 мм и экран 6 из кварцевого стекла. Вакуумное уплотнение проводилось по наружной поверхности кварцевой трубки 1. Данная конструкция использовалась для выяснения вклада нагрева материалов в объеме плазмы СВЧ-разряда за счет энергии СВЧ-поля и установления факта проникновения СВЧ-поля в центр разрядного объема. Для аналогичных целей служила и конструкция, представленная на рисунке 3. Ее отличие от предыдущей в том, что порошок находился при том же ва-

кууме, что и газ в разрядной камере. Объем порошка, засыпаемого во фторопластовую капсулу 1, был строго фиксирован. Для предотвращения возникновения разряда в капсуле она полностью заполнялась уплотненным порошком и плотно закрывалась крышкой 3. Детали кварцевого чехла 4 и 5 служили для защиты фторопласта от плазменного воздействия. Концы термопар находились в термостойких диэлектрических трубках.

Обработка результатов измерений проводилась с помощью формулы [11]:

$$P_{cp} = \frac{Q_T}{t} = \frac{C_{t^0} \Theta}{t}, \quad (1)$$

где P_{cp} – измеряемая средняя мощность СВЧ-сигнала, Вт; Q_T – количество теплоты, Дж; C_{t^0} – теплоемкость рабочего тела, Дж/°С; Θ – приращение температуры рабочего тела, °С; t – время, с.

В данном случае мы пренебрегали излучением теплоты в окружающую среду и предполагали, что нагрев порошка происходит только за счет СВЧ-энергии. Эти допущения являются вполне обоснованными теоретически, так как толщина стенок фторопластовых конструкций составляла 7 мм, толщина кварца – 2 мм, а расчеты проводились по данным измерений, полученным в течение первых 10...15 с. Для расчетов ослабления СВЧ-сигнала, доходящего до центра разряда, использовалась следующая формула [12]:

$$P = E^2 f \cdot \frac{\epsilon_r \cdot tg\delta}{1,8 \cdot 10^{10}}, \quad (2)$$

где P – удельная СВЧ-мощность, рассеиваемая в единице объема диэлектрика, Вт/м³; E – напряженность электрической составляющей электромагнитной волны, В/м; f – частота волны, Гц; ϵ_r – диэлектрическая проницаемость материала порошка; $tg\delta$ – тангенс угла диэлектрических потерь материала.

В качестве электрического зонда, измеряющего локальное значение электрической составляющей электромагнитного поля, использовался отрезок гибкого коаксиального кабеля с волновым сопротивлением 50 Ом (рис. 4), внешний проводник которого выполнен из медной трубки, а внутренний – из одножильного медного провода. Пространство между проводниками заполнено гибким диэлектриком – фторопластом. С одной стороны кабеля 1 сформирован активный зонд, представляющий собой отрезок центрального внутреннего проводника диаметром 1,4 мм, выступающего из внешнего проводника на $l = 5$ мм, что много меньше длины волны исследуемых колебаний. Зонд вводился в реакционно-разрядную камеру через герметичные вводы, расположенные по торцам плазмотронов. Для защиты активного зонда от воздействия плазмы на него надевался фторопластовый колпачок 2, который закрывался кварцевым чехлом 3. На втором конце кабеля смонтирован 50-омный кабельный разъем, посредством которого активный зонд соединялся либо с ваттметром МЗ-28, либо через аттенуатор с детекторной секцией МЗ3402-3, сигнал с которой подавался на вход запоминающего осциллографа С8-ИЗ. На зонде наводился СВЧ-сигнал, величина которого пропорциональна амплитуде составляющей электрического поля, направленной вдоль выступающего центрального проводника.

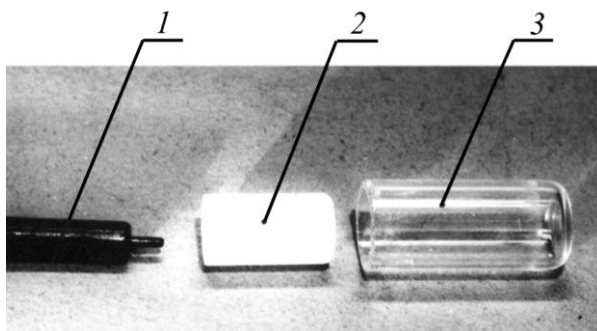


Рис. 4. Внешний вид зонда
для измерения локального распределения электрической составляющей СВЧ-поля:
1 – коаксиальный кабель; 2 – фторопластовый колпачок; 3 – кварцевый чехол

Локальные измерения электропроводности электрически изолированного замкнутого объема внутри плазмы проводились зондами, выполненными в виде плоских электродов 1 из нержавеющей стали размером 10×10 мм² (рис. 5), расположенными симметрично на фиксированном расстоянии друг от друга. Проволочные концы 2 зондов пропускались через керамическую трубку, помещенную в металлический чехол 3 из нержавеющей стали. С торца, выходящего за пределы разрядной камеры, самовулканизирую-

щимся компаундом КЛТ-30 производилось вакуумное уплотнение и электрическая изоляция входа проволочек в стальную трубку. Вакуумное уплотнение ввода трубки в разрядную камеру с возможностью возвратно-поступательного перемещения осуществлялось с помощью несложной системы прижимов, находящихся на торцевых крышках плазмотронов со стороны откачки газов. Проволочные выводы 2 и нерабочие стороны электродов 1 покрывались смесью пудры Al_2O_3 и силикатного клея. Этот состав после высыхания образовывал прочное диэлектрическое покрытие, обладающее хорошим сцеплением с нержавеющей сталью. Так как изучаемый разряд имеет пульсирующий характер, то все измерения проводились с помощью запоминающего осциллографа С8-13, на который подавался сигнал с измерительного резистора $R = 10,11 \text{ Ом}$, включенного в цепь протекания зондового тока. В ряде экспериментов по анализу взаимодействия СВЧ-полей с плазмой возбуждаемого ими разряда электрические зонды 1 закрывались кварцевым чехлом 4, плотно входящим во фторопластовый фиксатор 5, одетый на стальную трубку 3. Таким образом, осуществлялась изоляция зондов от плазмы разряда в реакционной камере. Эксперименты с такой конструкцией позволяли проанализировать механизм возбуждения разряда в центре разрядной камеры.

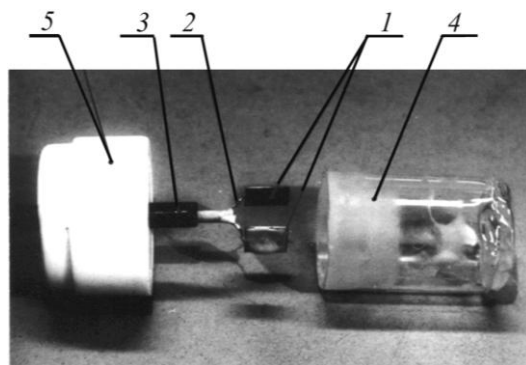


Рис. 5. Диагностическая система измерения электропроводности плазмы:
1 – плоские электроды; 2 – проволочные выводы зондов; 3 – металлический чехол;
4 – кварцевый чехол; 5 – фторопластовый фиксатор

Результаты и их обсуждение. Факт проникновения СВЧ-энергии в центр разрядного объема для типовых технологических режимов обработки пластин подтверждается экспериментальными результатами.

Результаты обработки данных по динамике и степени нагрева порошкообразного кремния во фторопластовой капсуле (см. рис. 3) в реакторе установки с прямоугольным резонатором, пример которой приведен на рисунке 6, показали, что рассчитанное по формуле (1) отношение СВЧ-мощности, поглощаемой кремнием без возбуждения разряда и в плазме разряда в O_2 при давлении $p = 133 \text{ Па}$, составляет 3,3.

Воспользовавшись формулой (2), можно рассчитать, что напряженность электрической составляющей поля в месте нахождения кремния при наличии разряда в 1,83 раза меньше, чем в поле волны без разряда. В расчетах был учтен эффект нагрева порошка кремния в интервале времени с момента поступления СВЧ-мощности в разрядный объем до возникновения разряда и после его погасания.

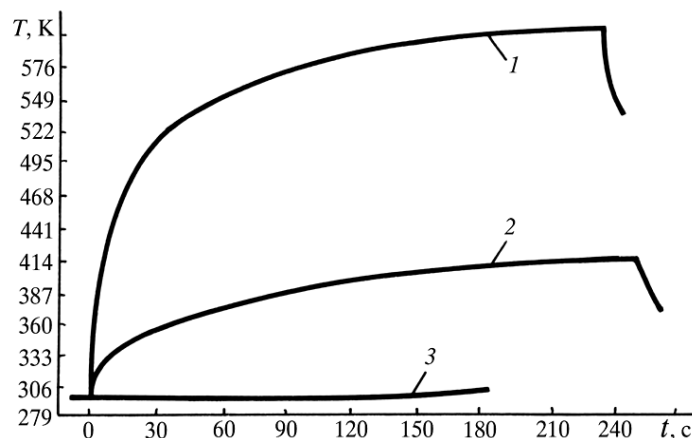


Рис. 6. Динамика нагрева порошка кремния во фторопластовой капсуле:
1 – под действием СВЧ-поля в воздухе, $W = 650 \text{ Вт}$;
2 – в кислородном разряде, давление $p = 140 \text{ Па}$, $W = 650 \text{ Вт}$; 3 – в термощкафу при $T = 560 \text{ К}$ в воздухе

Аналогичные результаты были получены и в экспериментах с порошком кремния, находящимся в кварцевом вводе (см. рис. 2). Пример экспериментальных данных, которые использовались преимущественно при анализе тепловых потоков в разрядной камере, приведен на рисунке 7.

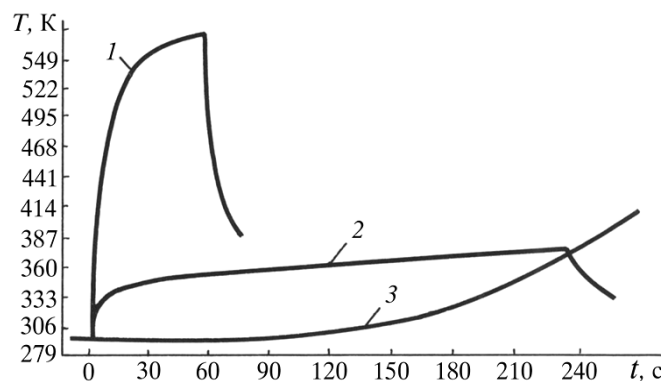


Рис. 7. Динамика нагрева порошка кремния в кварцевом вводе с фторопластовым термочехлом:

1 – под действием СВЧ-поля, $W = 650$ Вт; 2 – в кислородном разряде, $W = 650$ Вт;
3 – нагрев от спирали, $P_{\text{нагр}} = 500$ Вт

На рисунке 8 и рисунке 9 представлены показания активного зонда, введенного в реактор установки с прямоугольным резонатором, сигналы с которого регистрировались измерителем мощностью МЗ-28.

На рисунке 8 приведены показания зонда (в единицах мощности по данным МЗ-28) в диапазоне давлений кислорода при постоянной величине СВЧ-мощности, подводимой к разряду.

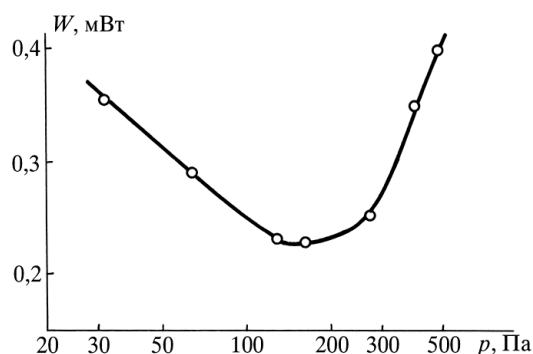


Рис. 8. Показания активного зонда в разряде O_2 в зависимости от давления газа (по данным МЗ-28)

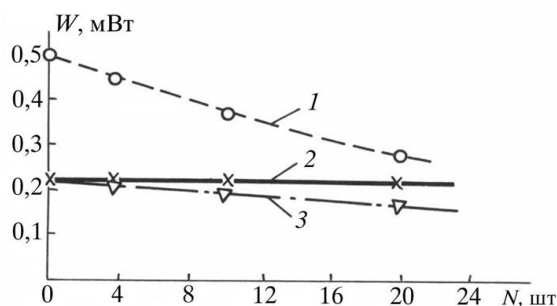


Рис. 9. Зависимость показаний активного зонда от количества кремниевых и ситалловых пластин (по данным МЗ-28):

1 – без разряда, кремниевые пластины $\varnothing 76$ мм;
2 – разряд в O_2 , давление $p = 140$ Па, пластины из ситалла (60×48) мм;
3 – разряд в O_2 , давление $p = 140$ Па, кремниевые пластины $\varnothing 76$ мм

Минимальное прохождение СВЧ-волны регистрируется при давлении кислорода $p \approx 140$ Па, что соответствует данным [4] об оптимальных условиях пробоя этого газа и максимальным скоростям удаления фоторезиста, полученным нами при проведении технологических экспериментов [13; 14]. Для этого дав-

ления сняты представленные на рисунке 9 показания зависимости величины СВЧ-энергии в центре разрядного объема от количества пластин при наличии и в отсутствие (при атмосферном давлении) плазмы. Поведение линий 1 и 3 объясняется тем, что происходит поглощение кремниевыми пластинами части СВЧ-энергии, поступающей в разрядную камеру. Линия 2 отражает показания активного зонда при размещении в разрядной зоне пластин из ситалла, который практически не поглощает СВЧ-энергию.

О проникновении СВЧ-энергии в центр разрядного объема свидетельствуют и результаты исследований, проведенных с электрическими зондами. На рисунке 10 показаны сигналы, полученные при проведении совместной регистрации тока через зонды и оптического свечения разряда, воспринимаемого фотоэлектронным умножителем ФЭУ-28, ориентированным через боковую поверхность реактора на зонды.

На рисунке 10, *в* показаны сигналы, полученные с электрических зондов без кварцевого чехла вокруг них (см. рис. 5). Приведенные на рисунке 10, *а* сигналы получены при наличии вокруг зонда кварцевого чехла, электрически изолирующего их от внешнего плазменного объема. Разрядные условия в обоих экспериментах одинаковы. Наличие электрического тока между зондами в случае их экранировки говорит о том, что напряженность поля СВЧ-волны, достигающего центра разрядного объема, достаточна для возбуждения самостоятельного разряда внутри кварцевого экрана и образования токопроводящего слоя между электродами зондов. В отсутствие плазмы при наличии СВЧ-поля в зоне реактора (при атмосферном давлении) измерительные приборы никаких сигналов в зондовой цепи не отмечали. Это свидетельствует о том, что регистрируемый осциллографом С8-13 сигнал обусловлен наличием плазменного тока, а не наводками от СВЧ-полей. Различия в амплитуде сигналов (и токового, и оптического) без чехла и с чехлом могут быть связаны с локальным изменением параметров плазмы (за счет рекомбинационных процессов на поверхности экрана, вторичных эмиссионных процессов и т.д.).

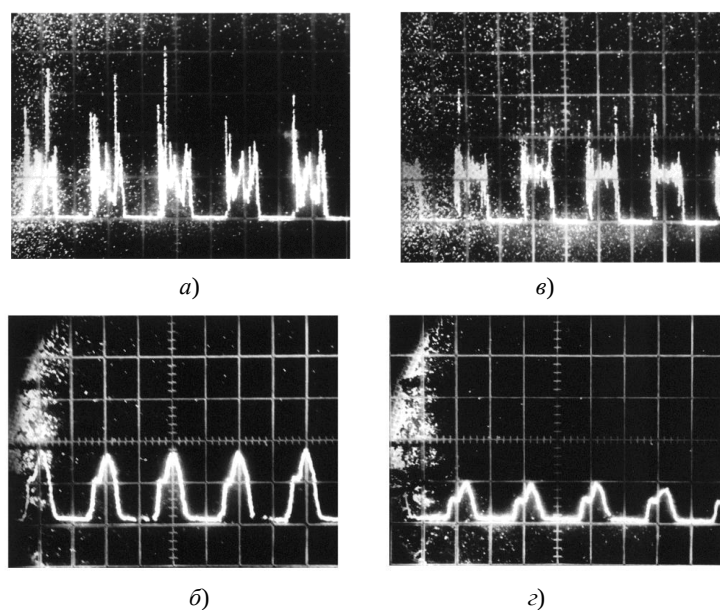


Рис. 10. Сигналы электрических зондов с кварцевым чехлом (*а*) и без чехла (*б*) и соответствующие им оптические импульсы разряда в O_2 (*в*, *з*). Давление O_2 $p = 140$ Па; мощность $W = 700$ Вт; *а*, *в* – развертка по вертикали – 20 мВ/дел.; по горизонтали – 10 мс/дел.; *б*, *з* – развертка по вертикали – 5 мВ/дел.; по горизонтали – 10 мс/дел.

Заключение. Результаты проведенных экспериментов указывают на то, что при «технологически» приемлемых уровнях плотности потока СВЧ-мощности в разрядный объем ($0,06 \dots 0,08$ Вт/см³) наблюдается проникновение СВЧ-поля в объем зоны разряда. Этот эффект необходимо учитывать при организации процессов плазмохимической обработки (влияние СВЧ-поля на параметры обрабатываемых структур, «загрузочный» эффект, проектирование распределенной системы подвода СВЧ-энергии к зоне обработки, формирующаяся определенная структура распределения СВЧ-поля в зоне плазмообразования и т.д.) и анализе результатов обработки материалов и структур, подверженных воздействию СВЧ-энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Электрофизические процессы и оборудование в технологии микро- и нанoeлектроники: моногр. / А.П. Достанко [и др.]; под ред. акад. НАН Беларуси А.П. Достанко и д-ра техн. наук А.М. Русецкого. – Минск: Бестпринт, 2011. – 216 с.

2. Бордусов, С.В. Плазменные СВЧ-технологии в производстве изделий электронной техники / С.В. Бордусов; под ред. А.П. Достанко. – Минск: Бестпринт, 2002. – 452 с.
3. Microwave Discharges: Fundamentals and Applications. 3-rd International Workshop, Abbaye Royale de Fontevraud, France, 20 – 25 April, 1997 // Journal de Physique IV. – 1998. – Vol. 8, Pr. 7. – 421 p.
4. Мак-Доналд, А. Сверхвысокочастотный пробой в газах / А. Мак-Доналд. – М.: Мир, 1969. – 212 с.
5. Физические основы электрического пробоя газов / А.Ф. Дьяков [и др.]. – М.: Изд-во МЭИ, 1990. – 400 с.
6. Бордусов, С.В. Классификация СВЧ-плазмотронов для производства изделий электронной техники / С.В. Бордусов // Электронная обработка материалов. – 2002. – № 1(213). – С. 79 – 82.
7. Бордусов, С.В. Конструктивные особенности установки и технологические процессы СВЧ-плазменной обработки материалов в условиях низкого вакуума / С.В. Бордусов // Материалы, технологии, инструменты. – 2001. – Т. 6, № 4. – С. 62 – 64.
8. Plasma-Preen Cleaner/Etcher (Patent Pending) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.terauniversal.com/cleaning-systems/plasma-preen-cleaners.php>. – Дата доступа: 01.02.2012.
9. Bordusau, S.V. Investigation of the influence of the discharge chamber “loading” effect on the optical characteristics of resonator type microwave plasmatron / S.V. Bordusau, S.I. Madveika // Acta Technica. – 2011. – № 56. – P. 284 – 290.
10. Преображенский, В.П. Теплотехнические измерения и приборы: учебник для вузов по спец. «Автоматизация теплоэнергетических процессов» / В.П. Преображенский. – 3-е изд. – М.: Энергия, 1978. – 704 с.
11. Билько, М.И. Измерение мощности на СВЧ / М.И. Билько, А.К. Томашевский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1986. – 168 с.
12. Тареев, Б.М. Физика диэлектрических материалов: учеб. пособие для вузов / Б.М. Тареев. – М.: Энергоиздат, 1982. – 320 с.
13. Бордусов, С.В. Исследование влияния эффекта «загрузки» разрядной камеры на оптические характеристики СВЧ-плазмотрона резонаторного типа / С.В. Бордусов, С.И. Мадвейко // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. В. Промышленность. Прикладные науки. – 2010. – № 8. – С. 103 – 106.
14. Мадвейко, С.И. Процесс плазмохимического удаления фоторезистивных пленок в СВЧ-плазмохимической установке с резонатором прямоугольного типа / С.И. Мадвейко // Нанотехнологии-2010: материалы междунар. науч.-техн. конф., Геленджик, 19 – 24 сент. 2010 г. – С. 227 – 229.

Поступила 08.01.2012

INVESTIGATION OF THE MICROWAVE ENERGY PENETRATION IN GAS DISCHARGE PLASMA

S. BODRUSOV, S. MADVEIKO

The investigation of the penetration of the microwave energy ($f = 2,45 \pm 0,05$ GHz) in the center of the oxygen gas discharge in the plasmatron of the resonant type was carried out on example of microwave plasma chemical processing of silicon plates. The investigation was performed by three independent methods: using a thermocouple were investigated temperature characteristics of the microwave discharge; according to data of the «active probe» which was injected in the volume of discharge chamber; using an electric probe which was placed in the volume of plasma for measuring the electrical conductivity of the space. The experimental results indicate that for the levels of microwave power flux density in the discharge volume in the range of $0.06...0.08$ W/cm³ the microwave field is entered in the volume of the discharge zone. This effect must be taken into account when organizing the processes of plasma-chemical treatment (the effect of microwave field on the parameters of the processed structures, «loading effect», the design a system for supplying microwave energy to the treatment area, forms and character of distribution of the microwave field in the gas discharge area, etc.) and for analysis results of processing of materials and semiconductor structures which may be exposed to microwave energy.

УДК 621.382.002

**ФОРМИРОВАНИЕ ПОКРЫТИЙ ИОННО-ЛУЧЕВЫМ РАСПЫЛЕНИЕМ
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МИШЕНЕЙ**

Е.В. ТЕЛЕШ, канд. техн. наук Н.К. КАСИНСКИЙ, канд. техн. наук В.С. ТОМАЛЬ
(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск)

Рассмотрены особенности распыления диэлектрических мишеней пучками ускоренных ионов. Показано, что ускоряющее напряжение на аноде, ток разряда, мощность разряда и ток компенсатора – основные факторы, влияющие на скорость нанесения пленок. Увеличение разрядного тока приводит к снижению электрической прочности и увеличению диэлектрической проницаемости. Установлено, что ток компенсатора незначительно влияет на величину диэлектрической проницаемости, в то же время тангенс угла диэлектрических потерь существенно зависит от этого тока. Увеличение тока компенсатора и повышение энергии распыляющих ионов вызывают увеличение электрической прочности пленок. Полученные покрытия показали высокую прозрачность в видимом и ближнем инфракрасном диапазонах, что свидетельствует о высокой плотности их структуры. Определены режимы ионного источника для получения пленок с наилучшими параметрами.

Введение. До 60-х годов XX века исследование процесса распыления осуществлялось в основном на металлических мишенях. Работы с диэлектриками были исключением. Это было связано с необходимостью нейтрализации поверхностного заряда диэлектрической мишени, накапливающегося после бомбардировки ее заряженными частицами. Создание систем ВЧ-распыления [1] позволило осуществить распыление и непроводящих мишеней. Решению этой технической задачи также способствовала разработка автономных ионных источников [2].

Основные закономерности процесса распыления диэлектриков определяются физической сущностью явления и носят универсальный характер. Поскольку ионная бомбардировка мишеней неизбежно вызывает нагрев последних, то особое внимание уделяется определению температурной зависимости характеристик процесса распыления. Увеличение скорости распыления можно объяснить наличием механизма разрушения, состоящего в испарении из термических пиков. При магнетронном ВЧ-распылении диэлектриков установлено, что 75 % энергии бомбардирующих частиц идет на нагрев мишени и только 1 % переходит в энергию распыленных фрагментов. Отмечается падение скорости распыления с увеличением толщины мишени. Для достижения однородного распределения температуры с целью поддержания и воспроизведения однородного состава и толщины пленок мишень должна быть однородной по составу и структуре. Границы области эрозии мишени зависят от технологических параметров – раздвигаются с уменьшением давления и увеличением ускоряющего потенциала, что связывают с ростом длины свободного пробега электронов при падении давления и ускоряющего потенциала.

Одной из основных характеристик распылительной способности бомбардирующего иона является его энергия, так как именно она определяет эффективность разрушения материала мишени. Для диэлектриков типичная энергетическая зависимость коэффициента распыления имеет экстремальный характер. С увеличением энергии эффективность распыления растет, достигая максимума, а затем начинает падать за счет увеличения глубины проникновения иона.

На рисунке 1, а представлена зависимость скорости распыления стекла К8 и кварца от ВЧ-напряжения и, соответственно, от энергии распыляющих ионов [3]. Следует отметить, что повышение энергии ионов с целью интенсификации процесса распыления неизбежно ведет к увеличению разогрева бомбардируемого образца, и температурная зависимость скорости распыления может полностью сгладить энергетическую зависимость.

Важной характеристикой процесса распыления диэлектриков является плотность ионного тока j . Влияние j на скорость обработки ряда оптических материалов в атмосфере аргона показано на рисунке 1, б. Зависимость очевидная, так как с увеличением числа бомбардирующих ионов растет количество выбитых из мишени частиц вещества. При дальнейшем увеличении j рост скорости распыления замедлен, поскольку большие токи при $U = \text{const}$ возможно реализовать лишь путем увеличения давления газа, а следовательно, усиления роли обратной диффузии. Существенным технологическим фактором, оказывающим существенное влияние на эффективность процесса распыления, является состав рабочей газовой среды. Для получения воспроизводимых значений скоростей распыления необходимо обеспечить высокий уровень чистоты рабочего газа и степень откачки рабочей камеры. Экспериментально показано, что при проведении процесса распыления при остаточном давлении $\sim 10^{-1}$ Па пренебречь влиянием остаточной атмосферы возможно, если предварительная откачка вакуумной камеры производится до давления не выше 10^{-3} Па. При этом подаваемый в рабочую камеру газ следует подвергать сушке. Общее давление

рабочего газа оказывает сильное влияние на скорость роста. Увеличение давления приводит к возрастанию тока разряда и усилению обратного рассеяния распыленных частиц, а также уменьшению числа энергетических частиц за счет столкновений. Скорость роста первоначально увеличивается с давлением рабочего газа за счет большего потока первичных ионов, но затем снижается из-за рассеяния распыленных атомов.

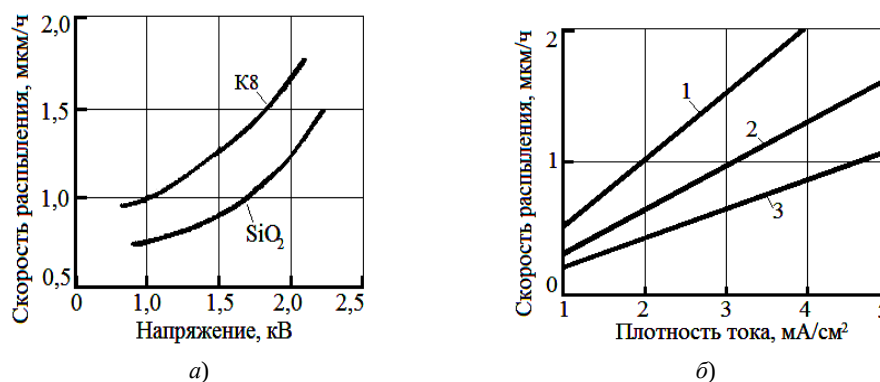


Рис. 1. Зависимость скорости распыления стекла К8 и кварца от величины ВЧ-напряжения (а) и от плотности ионного тока (б) для стекла К8 (1), кварца (2) и сапфира (3)

При получении пленок оксидов с составом, близким к стехиометрическому, чаще всего рабочим газом служит смесь аргона и кислорода. Необходимость введения кислорода связана с его преимущественным распылением с мишени и возможностью удаления из камеры через вакуумную систему. Введение в аргон небольшого количества кислорода дает значительное уменьшение скорости роста пленок двуокиси кремния.

При распылении диэлектрических мишеней необходимо нейтрализовать положительный заряд на их поверхности. Для этого требуется обеспечить достаточно точную регулировку и стабильность эмиссионного электронного потока с катода-компенсатора. При нанесении диэлектрических покрытий происходит встраивание наведенного заряда в растущие пленки, что вызывает нестабильность характеристик границ раздела в пленочных структурах.

Ионно-лучевое распыление (ИЛР) предпочтительно для формирования тонкопленочных диэлектрических покрытий [4]. В отличие от других ионных методов, при ИЛР практически можно гарантировать перенос состава оксидной мишени в покрытие. Достоинством ИЛР является высокая степень контролируемости основных рабочих параметров, высокий рабочий вакуум, пространственное разделение областей генерации плазмы и непосредственной конденсации материала, минимальное воздействие вторичных электронов на подложки, отсутствие высокого напряжения на мишени. За рубежом для реализации данного метода чаще всего применяют ионные источники Кауфмана [5].

В данной работе для распыления диэлектрических мишеней нами будет использован ионный источник на базе ускорителя с анодным слоем. Задача исследований – изучение зависимости скорости нанесения, состава, характеристик пленок от режимов распыления мишени из кварца.

Экспериментальные результаты и их обсуждение. В наших исследованиях ионно-лучевое напыление диэлектрических слоёв осуществлялось на модернизированной установке вакуумного напыления УРМ.3.279.017. Распыляемая мишень (рис. 2) представляла собой диск из кварца (ТУ О284409-108-85). Диаметр мишени составлял 70 мм, толщина – 10 мм. Мишень закреплялась на водоохлаждаемом основании. Нейтрализация положительного заряда на мишени и подложке осуществлялась за счет термоэмиссии электронов с прямонакального вольфрамового катода.



Рис. 2. Внешний вид мишеней из кварца

Диэлектрические покрытия формировались на подложках из кремния марки КДБ, ориентацией (111), стекла К8 и ТФ-5. В качестве рабочих газов использовались аргон газообразный, чистый марки «А», ГОСТ 10157-73 и кислород ГОСТ 8331-78. Толщина пленок определялась по таблице цветности. С целью измерения основных электрофизических характеристик формировались структуры Al/SiO₂/Si. Толщина алюминиевой пленки составляла 300 нм. Измерение диэлектрической проницаемости (ϵ) и тангенса угла диэлектрических потерь ($\tan \delta$) проводили на приборе Е7-8, а величину E_{np} – на характериографе TR-4805. С целью выяснения состава и стехиометрии напыленных диэлектрических покрытий проводилось измерение ИК-спектров пропускания, которые регистрировались двухлучевым ИКС-29 в спектральной области 1400...400 см⁻¹. Оптические спектры пропускания и отражения пленок определялись на приборе SPECTROVISOR в диапазоне от 400 до 1250 нм.

Как отмечалось ранее, необходимым условием распылением оксидных мишеней является компенсация положительного заряда на мишени. Объемный положительный заряд на мишени препятствует бомбардировке ускоренными ионами и снижает скорость распыления. Однако следует учитывать, что наносимое покрытие на подложке также подвергается воздействию вторичных ионов и накапливает положительный заряд. Это может привести к изменению параметров оксидной пленки, в частности, к увеличению пористости за счет электростатического притягивания пыли и других загрязнений, которые имеются внутри вакуумной камеры. Кроме того, заряд на заземленной подложке может привести к пробое растущей пленки диэлектрика. Поэтому необходимо исследовать процессы компенсации как на мишени, так и на подложке.

Распыление кварцевой мишени проводилось ионами аргона. Ускоряющее напряжение составляло 3 кВ, ток разряда – 100 мА. В качестве подложки использовался специальный датчик-коллектор, который представлял собой металлический диск диаметром 70 мм. На одной из поверхностей диска были просверлены глухие отверстия глубиной 8 и диаметром 3 мм. Это необходимо для предотвращения запыления металла оксидом кремния. В отсутствие термоэлектронов подложка подвергается воздействию ионных потоков значительной плотности (до 10 мА). При наличии термокомпенсатора происходит уменьшение тока коллектора до нуля при $I_k = 10,8$ А, затем наблюдается небольшой рост электронного тока, а при $I_k > 11,5$ А происходит полная компенсация ионов на подложке.

При исследовании режимов компенсации заряда на мишени в качестве последней использовался диск из меди диаметром 80 мм. Ускоряющее напряжение на аноде составляло 4 кВ, тока разряда – 120 мА. Схема эксперимента показана на рисунке 3, а. При отсутствии компенсации происходило уменьшение ионного тока, а при I_k порядка 18 А поток термоэлектронов полностью компенсировал ток ионов на мишени (рис. 3, б).

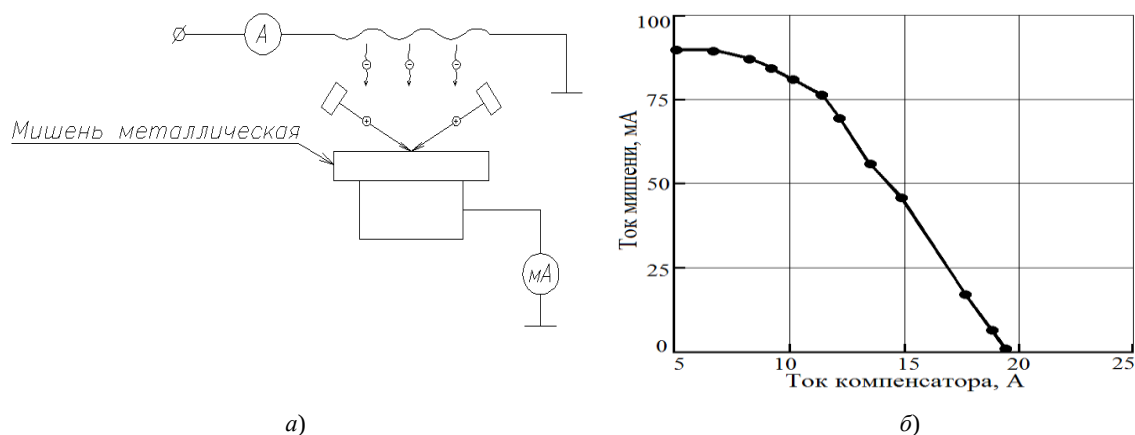


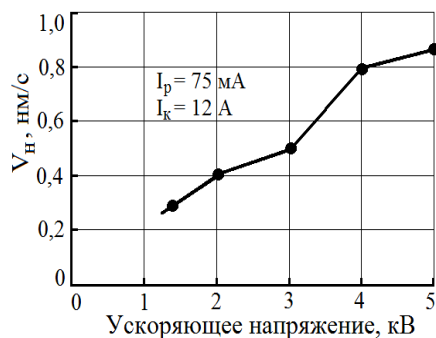
Рис. 3. Схема компенсации ионного потока, приходящего на мишень (а), и зависимость тока мишени от тока компенсатора (б)

Скорость нанесения покрытий – важный технологический показатель, характеризующий как метод формирования покрытий, так и параметры последних. Поэтому необходимо изучить влияние режимов распыления на скорость нанесения.

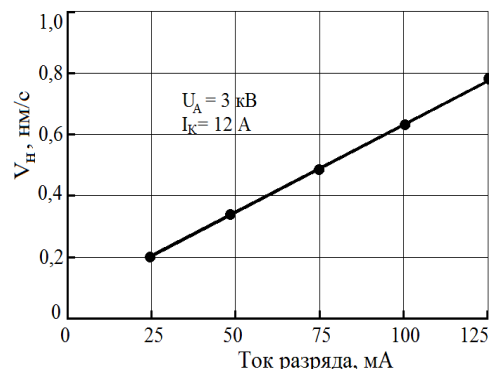
Основными параметрами, которые влияют на скорость, являются ускоряющее напряжение на аноде U_a (энергия ионов), ток разряда I_p (плотность ионного тока на мишени), мощность разряда P и ток компенсатора I_k . Результаты исследований представлены на рисунках 4 – 5.

Установлено, что скорость практически линейно возрастает с увеличением U_a , I_p и P и находится в пределах 0,2...0,8 нм/с. При токе компенсатора до 4 А скорость практически не меняется, при $I_k > 5$ А

происходит постепенное увеличение скорости, а при $I_k = 11 \dots 12$ А наблюдается стабилизация на уровне 0,8 нм/с, дальнейшее повышение тока компенсатора не приводит к росту V_H .

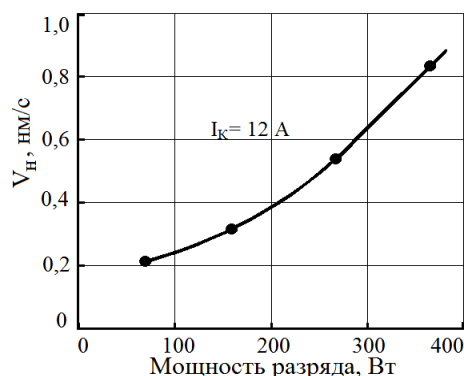


а)

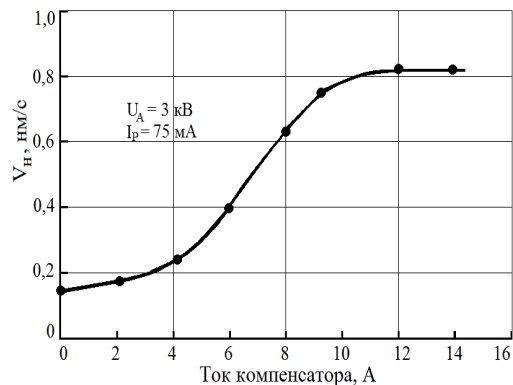


б)

Рис. 4. Зависимость скорости нанесения пленок от ускоряющего напряжения на аноде (а) и тока разряда (б)



а)



б)

Рис. 5. Зависимость скорости нанесения пленок от мощности разряда (а) и тока компенсатора (б)

Процесс нейтрализации связан с конкретной компоновкой оборудования рабочей камеры, диаметром накаливающего катода и токами ионного пучка. В ходе исследований было установлено, что заряд на подложке нейтрализуется полностью при компенсации 40...60 % тока ионного пучка, приходящего на мишень. При этом скорость распыления кварцевой мишени достигает максимума и при дальнейшем увеличении процента компенсации ионного тока на мишень остается постоянной. В то же время полная компенсация заряда мишени требует более сильного нагрева нити накала катода-нейтрализатора, что приводит к нежелательному разогреву подложек и сокращению срока службы катода.

Таким образом, проведенные эксперименты позволили определить оптимальный ток через компенсатор. Он должен находиться в диапазоне 12...14 А.

Исходя из полученных результатов, наиболее оптимальными режимами работы ионного источника будут следующие: $U_a = 3 \dots 4$ кВ; $I_p = 100 \dots 120$ мА; $P = 300 \dots 320$ Вт; $I_k = 12$ А.

Свойства пленок однозначно зависят от их состава и структуры. Эталонной диэлектрической пленки двуокиси кремния SiO_2 считается покрытие, полученное термическим окислением. На этапе исследования техпроцесса ионно-лучевого формирования слоев двуокиси кремния ставилась задача достижения максимального соответствия составов пленки и распыляемой мишени.

С целью идентификации состава и определения стехиометрии полученных пленок проводились измерения ИК-спектров пропускания. Спектры регистрировались двухлучевым спектрофотометром ИКС-29 в спектральной области $1400 \dots 400$ см^{-1} (7,14...25 мкм). В этом диапазоне все полученные пленки имели три характерные полосы поглощения: полосу около $\nu_s = 450$ см^{-1} , соответствующую валентным симметричным колебаниям $\text{Si} \rightarrow \text{O} \leftarrow \text{Si}$; полосу около $\nu_{as} = 1085$ см^{-1} , соответствующую валентным антисимметричным колебаниям $\text{Si} \leftarrow \rightarrow \text{O} \leftarrow \text{Si}$; полосу около $\delta_{as} = 800$ см^{-1} , соответствующую деформационным дважды вырожденным колебаниям $\text{Si} - \text{O} - \text{Si}$.

В настоящее время процесс образования наносимой извне пленки двуокиси кремния чаще всего описывается двумя следующими моделями.

Согласно «модели смешения» образующаяся пленка представляет собой двухфазную смесь кремния и двуокиси кремния. В этом случае изменение соотношения Si/SiO_2 должно приводить к изменению интенсивности полос поглощения, соответствующих нормальным колебаниям кислородного мостика $\text{Si}-\text{O}-\text{Si}$.

В рамках «модели с произвольными связями» пленка представляет собой однофазную статистическую смесь из пяти произвольно связанных тетраэдров Si_5 , Si_4O , Si_3O_2 , Si_2O_3 и SiO_4 , количественное соотношение между которыми определяет стехиометрию пленки. В последнем случае изменение соотношения между компонентами статистической смеси должно приводить к частотному сдвигу полос поглощения. Смещение основной полосы поглощения ν_{as} в низкочастотную область говорит об ухудшении стехиометрии пленки. Смещение полосы деформационных колебаний δ_{as} в область высоких частот может быть связано с уменьшением среднего статистического угла связи $\text{Si}-\text{O}-\text{Si}$.

Пленки диоксида кремния, сформированные термическим окислением, имеют три характерные полосы поглощения, соответствующие нормальным колебаниям кислородного мостика $\text{Si}-\text{O}-\text{Si}$: около 450 см^{-1} , 800 см^{-1} , 1085 см^{-1} . При этом смещение основной полосы поглощения в высокочастотную область вплоть до 1085 см^{-1} говорит об увеличении композиционного индекса до $x = 2$. Полученные в наших экспериментах покрытия имели полосы поглощения около 445 см^{-1} , 800 см^{-1} и $1030\text{--}1040\text{ см}^{-1}$, причем положение основной полосы поглощения не зависит от ускоряющего напряжения (рис. 6). При увеличении тока компенсатора от 7 до 12 А максимум смещается в высокочастотную область, при этом композиционный индекс возрастает от 1,45 до 1,6; ток разряда при нанесении покрытий составлял около 100 мА.

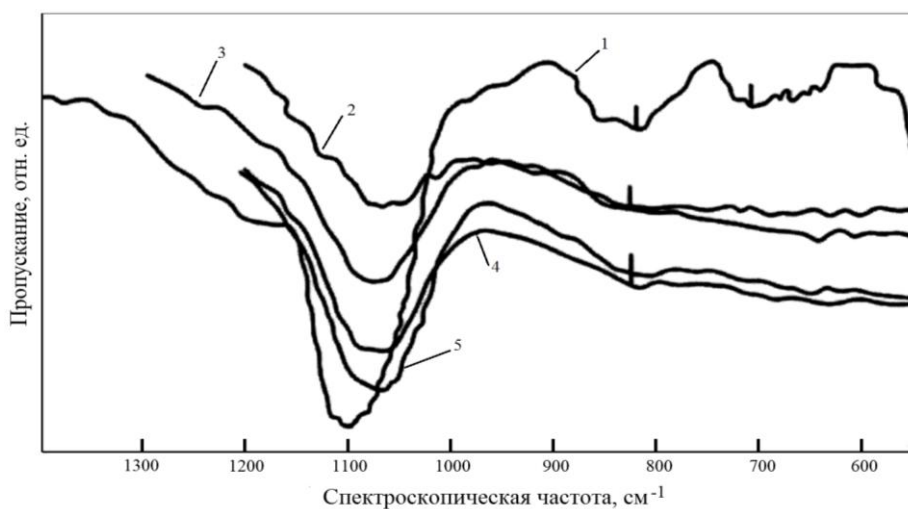


Рис. 6. Влияние режимов распыления на ИК-спектры пленок SiO_2

1 – пленка, полученная низкотемпературным окислением;

2 – $U_a = 3\text{ кВ}$; $I_k = 6\text{ А}$; 3 – $U_a = 3\text{ кВ}$; $I_k = 12\text{ А}$; 4 – $U_a = 2\text{ кВ}$; $I_k = 10\text{ А}$; 5 – $U_a = 4\text{ кВ}$; $I_k = 10\text{ А}$

На рисунке 7 приведены ИК-спектры пропускания SiO_x -пленок, полученных ионно-лучевым распылением в смесях ($\text{Ar} + \text{O}_2$). Для удобства рассмотрения спектры сдвинуты друг относительно друга по оси ординат. Различные добавки кислорода приводят к заметному частотному сдвигу основной полосы поглощения ν_{as} . В меньшей степени изменяется частота δ_{as} и практически не изменяется ν_s . Такое поведение ИК-спектра свидетельствует в пользу «модели с произвольными связями», причем недостаток кислорода в пленке существенным образом влияет на частоту антисимметричных колебаний [6].

Установлено, что положение полосы валентных антисимметричных колебаний ν_{as} , а также частотные интервал между антисимметричными валентными и деформационными колебаниями $\Delta\nu$ сложным образом зависят от процентного содержания кислорода в смеси. Добавки кислорода свыше 20 % позволяют получать SiO_x -пленки со значением композиционного индекса не менее 1,9. Однако при этом в ИК-спектрах полученных пленок появляется и постепенно возрастает поглощение около 930 см^{-1} , соответствующее колебаниям $\text{Si}-\text{H}$ связей. Появление водорода в пленках, вероятнее всего, свидетельствует о пористой структуре конденсата, что ухудшает диэлектрические свойства пленок. Существует и другая причина, по которой увеличение процентного содержания кислорода в смеси нежелательно – замена аргона кислородом в ионном пучке приводит к снижению скорости нанесения пленок. Эти негативные явления становятся незначительными при малых добавках кислорода. Было обнаружено улучшение

стехиометрии формируемых SiO_x -пленок при содержании кислорода в смеси $\sim 8\%$, о чем свидетельствует максимальный сдвиг основной полосы поглощения ν_{as} в область высоких частот и увеличение частотного интервала $\Delta\nu$ до значения 260 см^{-1} .

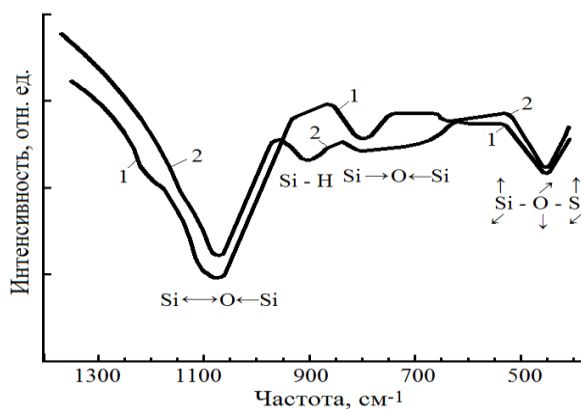


Рис. 7. Влияние состава рабочего газа на положение полосы поглощения пленок:
1 – Ar + 8 % O_2 ; 2 – Ar + 45 % O_2

Кислород первичного ионного пучка внедряется в приповерхностные слои мишени и распыляется наравне с кремнием и кислородом исходной атомарной матрицы мишени SiO_2 . Увеличение концентрации кислорода в пучке свыше 8 % согласно предлагаемому механизму должно приводить к дальнейшему улучшению стехиометрии и росту дефектности пленок, если считать, что дефекты структуры зарождаются на месте десорбированных атомов кислорода.

Как следует из анализа спектров пропускания пленок, увеличение концентраций кислорода в пучке действительно приводит к росту дефектности (появление поглощения, соответствующего колебаниям Si – H связей). Однако увеличения композиционного индекса $x \gg 2$ не происходит, что, вероятнее всего, связано с изменением механизма формирования поверхностного состава распыляемой двухкомпонентной мишени. Таким образом, дегидрированные $\text{SiO}_{1,92}$ пленки, полученные ионно-лучевым распылением в смеси (Ar + 8 % O_2), по своему стехиометрическому составу близки к термоокисленным пленкам, в то же время температура кремниевых подложек в процессе нанесения не превышала 423 К.

Исследовалось влияние степени компенсации, ускоряющего напряжения на аноде и тока разряда на диэлектрическую проницаемость ϵ , тангенс угла диэлектрических потерь $\text{tg}\delta$ и на электрическую прочность $E_{пр}$. Толщина пленок составляла 150...200 нм. Результаты измерений приведены в таблице.

Влияние режимов распыления на электрофизические характеристики пленок SiO_2

Номер образца	Режимы напыления			Диэлектрическая проницаемость, ϵ	Тангенс угла диэлектрических потерь, $\text{tg}\delta$	Электрическая прочность, $E_{пр}$, В/см
	U_a , кВ	I_k , А	I_p , мА			
1	3,0	11,0	75	3,3	0,02	$1,2 \cdot 10^6$
2	3,0	11,0	100	3,7	0,09	$1,6 \cdot 10^6$
3	3,0	11,0	120	4,2	0,02	$6 \cdot 10^5$
4	2,0	11,0	50	3,8	0,015	$6 \cdot 10^5$
5	4,0	11,0	100	3,2	0,010	$4,6 \cdot 10^6$
6	5,0	14,0	150	3,2	0,017	$2,5 \cdot 10^6$
7	3,0	9,5	100	3,6	0,013	$1 \cdot 10^6$
8	3,0	12,0	100	3,6	0,026	$1,6 \cdot 10^6$
9	3,0	11,0	100	3,1	0,019	$4 \cdot 10^6$
10	3,0	11,0	100	4,3	0,015	$1,8 \cdot 10^6$

Анализ результатов позволяет сделать следующие **выводы**. Увеличение разрядного тока приводит к снижению электрической прочности и увеличению диэлектрической проницаемости. По всей видимости, это связано с уменьшением плотности покрытий. Влияние величины разрядного тока на тангенс угла диэлектрических потерь неоднозначно. Повышение энергии распыляющих ионов, а следовательно, и энергии распыленных атомов мишени вызывает увеличение электрической прочности, причем максимальное значение электрической прочности соответствует ускоряющему напряжению 4 кВ. Дальнейшее

увеличение ускоряющего напряжения U_a до 5 кВ вызывает снижение электрической прочности пленки. Как правило, покрытия, сформированные при повышенных значениях этого напряжения, обладают и меньшим значением тангенса потерь $\operatorname{tg}\delta$. Ток компенсатора незначительно влияет на величину диэлектрической проницаемости. В то же время тангенс угла диэлектрических потерь существенно зависит от тока компенсатора I_k . Его повышение также способствует увеличению электрической прочности.

Для исследования оптических параметров диоксида кремния нанесение покрытий осуществлялось на подложки из оптических стекол К8 и ТФ-5. Толщина пленок составляла 200 нм. Режимы формирования были следующими: остаточное давление – $1 \cdot 10^{-3}$ Па; давление кислорода – $6 \cdot 10^{-3}$ Па; давление аргона – $5 \cdot 10^{-4}$ Па; ток термокомпенсатора – 12 А; ускоряющее напряжение – 4 кВ; ток разряда – 105 мА.

Для измерения коэффициента пропускания пленки наносились на стекло К8, а для измерения коэффициента отражения – на стекло ТФ-5 (тяжелый флинт). Покрытия показали высокую прозрачность в видимом и ближнем инфракрасном диапазонах. Анализ спектров отражения позволил определить коэффициент преломления, который составил 1,46, что близко к коэффициенту преломления плавленого кварца ($n = 1,45$). Это свидетельствует о высокой плотности структуры покрытия. Последнее было подтверждено также изучением скорости травления в р-травителе, которая составила около 1,4...1,6 нм/мин. Образцы пленок SiO_2 , нанесенные как на кремниевые, так и на стеклянные подложки, успешно прошли тесты на адгезию с использованием отрыва липкой ленты.

Таким образом, проведенные исследования показали пригодность ионно-лучевого распыления диэлектрических оксидных мишеней для формирования качественных слоев диэлектриков для применения в микроэлектронике и оптике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hickmott, T.W. Stoichiometry and atomic defects in rf-sputtered SiO_2 / T.W. Hickmott, J.E. Baglin // J. Appl. Phys. – 1979. – V. 50 (1). – P. 317 – 323.
2. Плазменная металлизация в вакууме / А.П. Достанко [и др.]. – Минск: Наука и техника, 1983. – 279 с.
3. Dugdale, R.A. Trans. Br. Ceram. Soc. / R.A. Dugdale // S.O. Ford. – 1999. – V. 65. – P. 165.
4. Varasi, M. Deposition of optical thin films by ion beam sputtering / M. Vasari, C. Misiano, L. Lasaponara // Thin Solid Films. – 1984. – V. 117. – P. 163 – 172.
5. Kane, S.M. Characteristics of ion-beam-sputtered thin films / S.M. Kane, K.Y. Ahn // J. Vac. Sci. Technol. – 1979. – V. 16(2). – P. 171 – 174.
6. Инфракрасный спектральный анализ SiO_x -пленок, полученных ионно-лучевым распылением кварцевых мишеней / А.П. Достанко [и др.]. // Журнал прикладной спектроскопии. 1989. – Т. 50, № 3. – С. 436 – 439.

Поступила 02.03.2012

COATINGS FORMATION BY ION BEAM SPUTTERING OF DIELECTRIC TARGETS

E. TELESH, N. KASINSKY, V. TOMAL

Features of a sputtering of dielectric targets by beams of the accelerated ions are viewed. It is shown, that an accelerating voltage on the anode, a discharge current, power of discharge and a compensator current – the major factors influencing deposition rate of films. The magnification of a discharge current result ins to decrease in breakdown strength and inductivity magnification. It is positioned, that the compensator current inappreciably influences quantity of inductivity, at the same time loss angle essentially depends on this current. The magnification of a current of the compensator and pinch of energy of sputtering ions cause magnification of breakdown strength of films. The received coats have shown a high transparency in visible and short-range infrared bands that testifies to high density of their structure. Modes of the ion source for reception of films with the best parametres are spotted.

УДК 546.28:621.315.592

МИКРОПРОЧНОСТНЫЕ СВОЙСТВА МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО КРЕМНИЯ, ВЫРАЩЕННОГО ПРИ НАЛОЖЕНИИ НА РАСПЛАВ СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

канд. физ.-мат. наук **Д.И. БРИНКЕВИЧ**
(Белорусский государственный университет, Минск);
Н.В. ВАБИЩЕВИЧ, канд. физ.-мат. наук, доц. **С.А. ВАБИЩЕВИЧ**
(Полоцкий государственный университет)

Методом микроиндентирования исследованы монокристаллы кремния, полученные по методу Чохральского при наложении на расплав комбинированных переменных и стационарных магнитных полей. Экспериментально показано, что микропрочностные характеристики монокристаллического кремния (микротвердость H , микрохрупкость Z , коэффициент вязкости разрушения K_{IC} и эффективная энергия разрушения γ) зависят от условий выращивания (наложения магнитных полей). Обнаружены существенные различия микропрочностных свойств образцов, вырезанных из нижних и верхних частей одного и того же слитка. Особенности микропрочностных свойств монокристаллического кремния обусловлены различиями в дефектно-примесном составе исследовавшихся пластин.

Введение. Кремний является базовым материалом современной микроэлектроники, к которому предъявляются высокие требования по чистоте материала и однородности распределения его электрофизических параметров, что определяет необходимость активных поисков перспективных технологий выращивания и обработки материалов с целью оптимизации их эксплуатационных параметров [1]. Для кремния перспективным является получение монокристаллов при наложении на расплав магнитного поля (M-Si) [2 – 3]. Изменение условий конвекции в расплаве кремния оказывает влияние на состояние всего дефектно-примесного ансамбля в монокристалле. Так, например, наложение на расплав магнитных полей позволяет весьма эффективно управлять процессами сегрегации кислорода и варьировать в широких пределах профили его распределения как по длине слитка, так и по его диаметру [3 – 6].

Цель настоящей работы – исследование влияния условий выращивания (наложение на расплав сложных электромагнитных полей) на микропрочностные характеристики кремния.

Методика эксперимента. Монокристаллы кремния выращивались по методу Чохральского при наложении на расплав комбинированных (вертикальное + горизонтальное) переменных и стационарных магнитных полей. Слиток 09-10 (параметры образца см. в таблице ниже) выращивался во вращающемся магнитном поле. Рост монокристаллов осуществлялся на одной установке в идентичных условиях (масса загрузки, легатуры, тепловой режим и т.д.). При этом изменялись только условия наложения электромагнитных полей. Удельное сопротивление всех исследовавшихся образцов было ~ 10 Ом·см. Все слитки подвергались так называемому «стабилизирующему» отжигу при температуре 600 °С длительностью 30 мин для удаления термодоноров, вводящихся в монокристалл в процессе выращивания [4]. Пластины толщиной 2 мм вырезались с верхнего (В) и нижнего (Н) торцов слитков (таблица). Все пластины подвергались идентичной химико-механической полировке. Измерение концентрации междоузельного кислорода проводилось по полосе ИК-поглощения при 1106 см⁻¹ [7].

Микроиндентирование проводилось на приборе ПМТ-3 по стандартной методике при комнатной температуре. В качестве индентора использовался алмазный наконечник в форме четырехгранной пирамиды с квадратным основанием и углом при вершине $\alpha = 136^\circ$. Нагрузка (P) на индентор варьировалась в пределах 50...200 г. На всех пластинах индентирование проводилось в центре (I), на середине радиуса (C) и на краю (K) пластины (таблица). При измерении для каждой экспериментальной точки на поверхность образца наносилось не менее 50 отпечатков. Обработка результатов измерений проводилась с использованием методов математической статистики [8]. Это обеспечивало погрешность измерений микротвердости (H) менее 2,5 % (с доверительной вероятностью 0,95). Микрохрупкость Z определялась по стандартной 5-балльной методике [9]. Значения коэффициента вязкости разрушения K_{IC} и эффективной энергии разрушения γ рассчитывались по средней длине радиальных трещин в углах отпечатков [10] согласно формулам (1):

$$K_{IC} = 0,016 \left(\frac{E}{H} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{P}{L^{\frac{3}{2}}}; \quad \gamma = \frac{K_{IC}^2}{2E}, \quad (1)$$

где E – модуль Юнга (для кремния $E = 1,5 \cdot 10^{11}$ Па); L – длина трещины.

Погрешность измерений не превышала 8 %.

Экспериментальные результаты и их обсуждение. Во всех исследованных образцах наблюдалось нормальное (гауссово) случайное распределение измеряемых величин микротвердости (длины диагонали отпечатка). Полуширина случайного распределения величин H варьировалась в диапазоне 1,9...2,1 %, что близко к значениям, характерным для промышленных марок кремния (Cz-Si), полученных традиционным методом Чохральского [11]. Корреляции микропрочностных свойств монокристаллов с концентрацией междоузельного кислорода в диапазоне $N_O = (6...12) \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ установлено не было. Не было обнаружено и существенной зависимости указанных характеристик от места измерения на пластине (край, центр, середина радиуса) – различия близки к погрешности измерения (таблица).

Параметры образцов, подвергавшихся индентированию

Слиток	Ориентация	Положение в слитке	$N_O \cdot 10^{-17}, \text{ см}^{-3}$	$\Delta N_O, \%$	Положение на пластине	H, ГПа	Z, бал.	$K_{IC}, \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$	$\gamma, \text{ Па} \cdot \text{м}$
						Нагрузка 100 г			
09-03	<100>	В	6,6	17,0	К	10,2	2,5	1,65	8,9
					С	10,3	2,5	1,6	8,6
					Ц	10,2	2,45	1,6	8,6
		Н	7,1	3,0	К	10,4	2,2	1,8	10,3
					С	10,45	2,3	1,8	10,4
					Ц	10,45	2,2	1,9	10,9
09-01	<111>	В	7,6	16,0	К	11,4	2,8	1,5	7,3
					С	11,5	2,9	1,5	7,4
					Ц	11,5	2,8	1,45	7,0
09-10	<111>	Н	6,9	2,5	К	12,1	2,5	1,7	9,5
					С	12,0	2,5	1,8	10,1
					Ц	12,0	2,6	1,75	9,9
09-31	<111>	В	11,9	13,0	К	11,7	2,9	1,4	6,8
					С	11,75	2,9	1,4	6,6
					Ц	11,7	3,0	1,4	6,7
		Н	11,7	6,0	К	12,0	2,5	1,65	8,9
					С	12,05	2,45	1,6	8,6
					Ц	11,95	2,5	1,65	8,8

Обнаружена сильная зависимость микротвердости от ориентации монокристалла. Так, микротвердость пластин, вырезанных из монокристаллов с ориентацией <100>, была меньше на 10...15 %, чем пластин с ориентацией <111>. Указанный эффект наблюдался ранее на пластинах традиционного Cz-Si [12] и связан с более плотной упаковкой решетки кремния вдоль направления <111>.

Вид зависимостей микротвердости от нагрузки (рис. 1, 2) существенно изменялся от монокристалла к монокристаллу. Эффект приповерхностного упрочнения [13], характерный для монокристаллов традиционного Cz-Si и заключающийся в уменьшении величины микротвердости на 10...20 % при увеличении нагрузки от 50 до 100 г, наблюдался далеко не для всех образцов. Для большинства образцов, вырезанных из верхних частей слитков, микротвердость, измеренная при нагрузке 50 г, была близка или даже ниже H , измеренной при нагрузке 100 г.

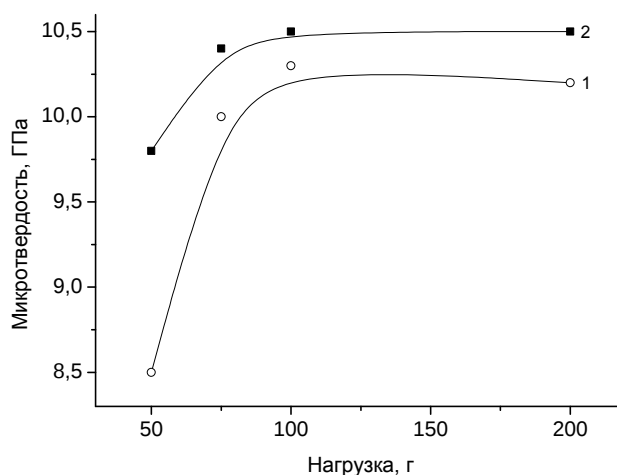


Рис. 1. Зависимость микротвердости от нагрузки для пластинок, вырезанных из верхней (1) и нижней (2) частей слитка 09-03 с ориентацией <100>

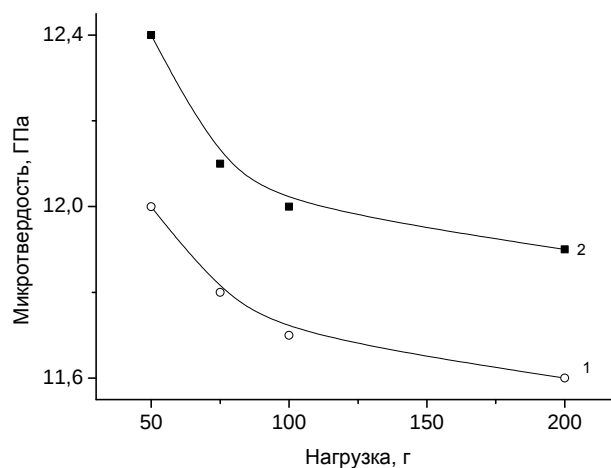


Рис. 2. Зависимость микротвердости от нагрузки для пластин, вырезанных из верхней (1) и нижней (2) частей слитка 09-31 с ориентацией $\langle 111 \rangle$

Отметим также, что микротвердость образцов, вырезанных из нижней части слитка, несколько выше, чем образцов, вырезанных из верхней части того же слитка. Указанный эффект наблюдался как для монокристаллов с ориентацией $\langle 100 \rangle$ (см. рис. 1), так и для слитков с ориентацией $\langle 111 \rangle$ (см. рис. 2).

Зависимости микрохрупкости от нагрузки имели вид, характерный для непластичных (твердых) монокристаллов – Z растет с увеличением нагрузки (рис. 3, 4).

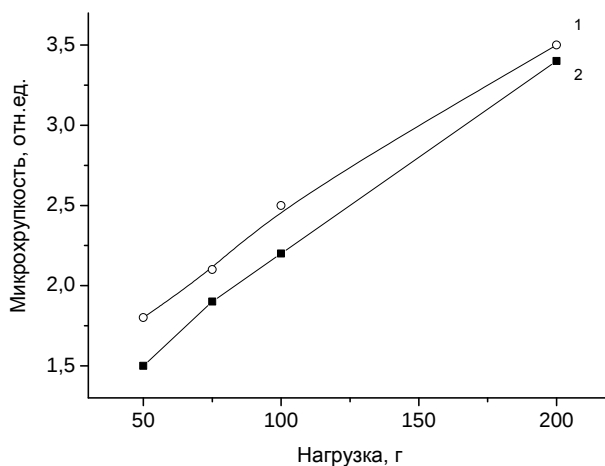


Рис. 3. Зависимость микрохрупкости от нагрузки для пластин, вырезанных из верхней (1) и нижней (2) частей слитка 09-03 с ориентацией $\langle 100 \rangle$

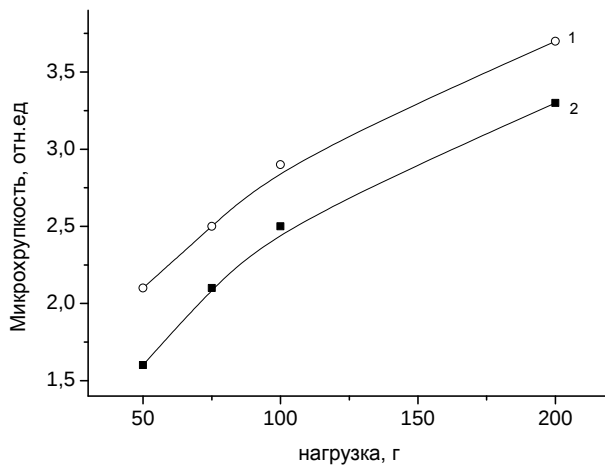


Рис. 4. Зависимость микрохрупкости от нагрузки для пластин, вырезанных из верхней (1) и нижней (2) частей слитка 09-31 с ориентацией $\langle 111 \rangle$

Значения микрохрупкости исследовавшихся монокристаллов были близки к значениям, характерным для традиционного Cz-Si [14]. Отметим, что значения микрохрупкости у пластин, вырезанных из нижних частей слитков, несколько ниже, чем у пластин, вырезанных из верхних частей тех же слитков как с ориентацией $\langle 100 \rangle$ (см. рис. 3), так и с ориентацией $\langle 111 \rangle$ (см. рис. 4).

Установлено, что ростовые кислородсодержащие дефекты увеличивают микрохрупкость монокристаллического кремния. Так, в кремнии, выращенном при наложении на расплав слабого вертикального магнитного поля с индукцией $B = 0,05$ Тл и содержащем указанные дефекты [15], значения микрохрупкости Z составляли 4,0...4,2 балла при нагрузке 200 г, в то время как в исследовавшихся в данной работе слитках, полученных при наложении на расплав скрещенных электромагнитных полей, величина микрохрупкости не превышала 3,5 баллов при той же нагрузке (см. рис. 3, 4).

Трещиностойкость K_{IC} (как и эффективная энергия разрушения γ) снижалась с ростом нагрузки (рис. 5, 6) для всех исследовавшихся образцов. Значения K_{IC} исследовавшихся монокристаллов были близки к значениям, характерным для традиционного Cz-Si [14]. Коэффициент вязкости разрушения K_{IC} и эффективная энергия разрушения γ несколько выше в слитках с ориентацией $\langle 100 \rangle$, особенно при больших нагрузках 100...200 г (сравни рис. 5, 6 и данные в таблице). Как и для микротвердости, диапазон изменения коэффициента вязкости разрушения K_{IC} (трещиностойкости) от слитка к слитку увеличивается при снижении нагрузки. Так, при $P = 50$ г значения K_{IC} для разных пластин варьировались в пределах от 1,2 до 2,5 МПа·м^{1/2}, а для $P = 200$ г диапазон изменения снижался и составил 1,0...1,6 МПа·м^{1/2}. Трещиностойкость K_{IC} несколько выше у пластин, вырезанных из нижних частей слитков, для обоих исследовавшихся ориентаций слитков (рис. 5, 6).

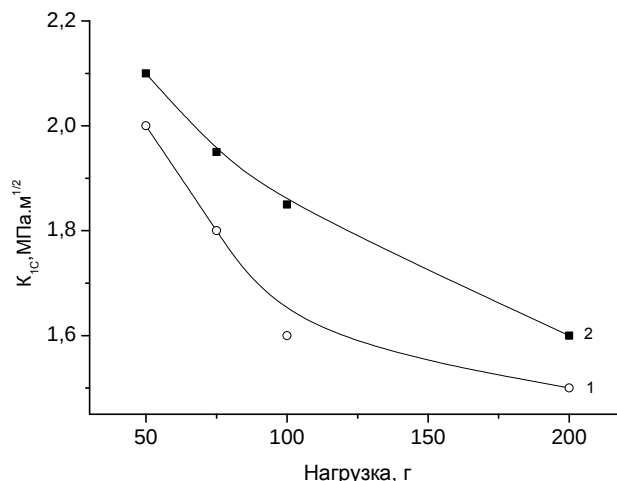


Рис. 5. Зависимость коэффициента вязкости разрушения K_{IC} от нагрузки для пластин, вырезанных из верхней (1) и нижней (2) частей слитка 09-03 с ориентацией $\langle 100 \rangle$

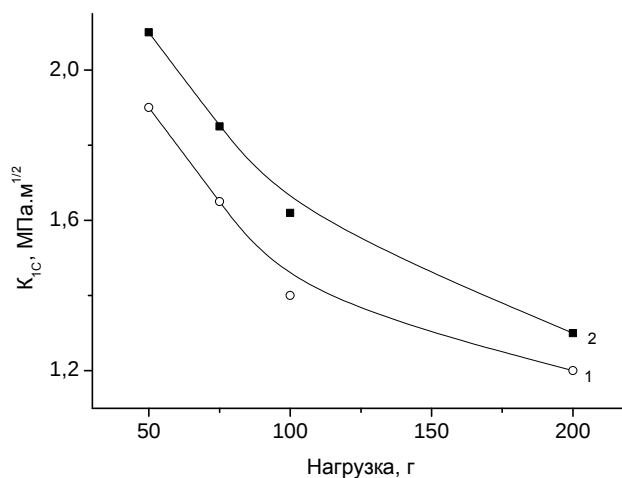


Рис. 6. Зависимость коэффициента вязкости разрушения K_{IC} от нагрузки для пластин, вырезанных из верхней (1) и нижней (2) частей слитка 09-31 с ориентацией $\langle 111 \rangle$

Следует отметить, что наличие ростовых кислородсодержащих дефектов приводило к некоторому снижению трещиностойкости монокристаллического кремния. Так, в кремнии с ориентацией $\langle 100 \rangle$, выращенном при наложении на расплав слабого вертикального магнитного поля с индукцией $B = 0,05$ Тл и содержащем указанные дефекты, значения K_{IC} варьировались в диапазоне $1,3 \dots 1,37$ МПа·м^{1/2} [15] при нагрузке 200 г, в то время как в исследовавшихся в настоящей работе слитках с той же ориентацией, полученных при наложении на расплав скрещенных электромагнитных полей, величина K_{IC} составляла $\sim 1,6$ МПа·м^{1/2} при той же нагрузке (см. рис. 3, 4).

Таким образом, анализ экспериментальных данных позволяет сделать следующие *выводы*.

Все прочностные характеристики (микротвердость H , микрохрупкость Z , коэффициент вязкости разрушения K_{IC} и эффективная энергия разрушения γ) существенным образом зависят от условий выращивания (наложения магнитных полей). Изменения указанных параметров от слитка к слитку достигали $10 \dots 30$ %, что существенным образом превышало погрешность измерения ($\sim 2,5$ % для микротвердости). Причем наиболее отчетливо это проявлялось при малых нагрузках. Увеличение нагрузки нивелировало различие в микропрочностных характеристиках различных слитков. Наблюдаются существенные различия микропрочностных свойств образцов, вырезанных из нижних и верхних частей одного и того же слитка.

Отмеченные выше особенности микропрочностных свойств обусловлены различиями в дефектно-примесном составе исследовавшихся пластин. В нижних частях слитков концентрация технологических примесей существенно выше вследствие эффекта отеснения указанных примесей в расплав в процессе выращивания. Как известно [16], междоузельные технологические примеси упрочняют кристалл, что проявлялось в увеличении микротвердости H и трещиностойкости K_{IC} пластин, вырезанных из нижних частей слитков.

Наложение на расплав магнитных полей позволяет эффективно управлять процессами конвекции в расплаве и, соответственно, варьировать дефектно-примесный состав выращенного монокристалла. С другой стороны, дефектно-примесный состав оказывает существенное влияние на микропрочностные свойства. Таким образом, варьируя дефектно-примесный состав монокристалла путем наложения на расплав магнитных полей, возможно управление указанными свойствами выращенных монокристаллов.

Существенные колебания микропрочностных свойств исследовавшихся монокристаллов при малых нагрузках (рис. 1, 2) обусловлены, вероятнее всего, высокотемпературной обработкой (600 °С, 30 мин) исследовавшихся пластин, проводившейся для удаления так называемых «ростовых» термодоноров [4]. Высокотемпературная термообработка, как известно [17], приводит к релаксации напряжений, которые способствуют упрочнению приповерхностной области платин. Эти напряжения возникают вследствие механических нарушений структуры монокристалла в процессе резки и шлифовки и не могут быть полностью устранены последующей химико-механической полировкой пластин. Интенсивность этой релаксации, проявляющейся как снижение микротвердости H при малых нагрузках, различна в разных кристаллах вследствие различий в их дефектно-примесном составе.

Заключение. Экспериментально показано, что микропрочностные характеристики монокристаллического кремния (микротвердость H , микрохрупкость Z , коэффициент вязкости разрушения K_{IC} и эффективная энергия разрушения γ) зависят от условий выращивания (наложения магнитных полей). Обнаружены существенные различия микропрочностных свойств образцов, вырезанных из нижних и верхних частей одного и того же слитка. Отмеченные выше особенности микропрочностных свойств обусловлены различиями в дефектно-примесном составе исследовавшихся пластин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мильвидский, М.Г. Полупроводниковые материалы в современной электронике / М.Г. Мильвидский. – М.: Наука, 1986. – 144 с.
2. Vizman, D. Comparison of the predictions from 3D numerical simulation with temperature distributions measured in Si Czochralski melts under the influence of different magnetic fields / D. Vizman, J. Friedrich, G. Muller // J. Crystal Growth. – 2001. – V. 230, № 1 – 2. – P. 73 – 80.
3. Kakimoto, K. Oxygen distribution in silicon melt under inhomogeneous transverse-magnetic fields / K. Kakimoto // J. Crystal Growth. – 2001. – V. 230, № 1 – 2. – P. 100 – 107.
4. Подавление процессов генерации термодоноров в монокристаллическом кремнии, выращенном в магнитном поле / Э.П. Бочкарев [и др.] // Доклады АН СССР. – 1990. – Т. 313, № 5. – С. 1117 – 1120.
5. Tomzig, E. Application of dynamic and combined magnetic fields in the 300 mm silicon single-crystal growth / E. Tomzig [and others] // Mater. Sci. Semicond. Process. – 2002. – V. 5, № 4 – 5. – P. 347 – 351.
6. Kakimoto, K. Effects of rotating magnetic fields on temperature and oxygen distributions in silicon melt / K. Kakimoto // J. Crystal Growth. – 2002. – V. 237 – 239. – P. 1785 – 1790.

7. Ильин, М.А. Определение содержания кислорода и углерода в кремнии / М.А. Ильин, В.Я. Коварский, А.Ф. Орлов // Заводская лаборатория. – 1884. – Т. 50, № 1. – С. 24 – 32.
8. Калоша, В.К. Математическая обработка результатов эксперимента / В.К. Калоша, С.И. Лобко, Т.С. Чикова. – Минск: Высш. шк., 1991. – 164 с.
9. Концевой, Ю.А. Пластичность и прочность полупроводниковых материалов и структур / Ю.А. Концевой, Ю.М. Литвинов, Э.А. Фаттахов. – М.: Радио и связь, 1982. – 240 с.
10. Колесников, Ю.В. Механика контактного разрушения / Ю.В. Колесников, Е.М. Морозов. – М.: Наука, 1989. – 220 с.
11. Вабищевич, С.А. О методике измерения прочностных характеристик полупроводниковых материалов / С.А. Вабищевич, Н.В. Вабищевич, Д.И. Бринкевич // Проблемы проектирования и производства радиоэлектронных средств: сб. материалов V междунар. науч.-техн. конф., 29 – 30 мая 2008 г.: в 3-х т. – Новополоцк: ПГУ, 2008. – Т. II. – С. 200 – 203.
12. Глазов, В.М. Микротвердость металлов и полупроводников / В.М. Глазов, В.Н. Вигдорович. – М.: Металлургия, 1969. – 248 с.
13. О распределении величины микротвердости по глубине образца / А.Б. Герасимов [и др.] // Физика твердого тела. – 1999. – Т. 41, № 7. – С. 1225 – 1227.
14. Вабищевич, С.А. Физико-механические свойства кремния, облученного электронами и нейтронами / С.А. Вабищевич, Н.В. Вабищевич, Д.И. Бринкевич // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2010. – № 3. – С. 109 – 114.
15. Ростовые кислородсодержащие дефекты в кремнии, выращенном в слабом вертикальном магнитном поле / Д.И. Бринкевич [и др.] // Микроэлектроника. – 2011. – Т. 40, № 4. – С. 309 – 312.
16. Vabishchevich, S.A. Microhardness of silicon sheets, subjected to gettering treatment / S.A. Vabishchevich, N.V. Vabishchevich, D.I. Brinkevich // J. Advanced Materials. – 2005. – V. 12, № 2. – P. 125 – 128.
17. Микромеханические свойства слоев кремния, имплантированных ионами бора и фосфора / С.А. Вабищевич [и др.] // Взаимодействие излучений с твердым телом: материалы 9 междунар. конф., Минск, 20 – 22 сент. 2011 г. – Минск: Издат. Центр БГУ, 2011. – С. 104 – 106.

Поступила 20.01.2012

MICROSTRENGTH PROPERTIES OF SILICON SINGLE CRYSTAL RECEIVED FROM THE MELT UNDER THE INFLUENCE OF COMBINED MAGNETIC FIELDS

D. BRINKEVICH, N. VABISCHEVICH, S. VABISCHEVICH

Silicon single crystals received by Czochralski method from the melt under the influence of combined dynamic and steady magnetic fields were investigated by microindention method. It is experimentally shown, that microstrengten characteristics of silicon single crystal (microhardness H , microfragility Z , factor of viscosity of destruction K_{IC} and effective energy of destruction γ) depend on conditions of receipt (parameters of magnetic fields). Essential distinctions of microstrengten properties of the samples which have been cut out from the bottom and top parts of the same ingot are found out. The specified features of microstrengten properties are caused by distinctions in defect-impurity structure of investigated wafers.

УДК 550.837.75:553.98

ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПОДСТИЛАЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ В РЕЖИМЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА

канд. техн. наук, доц. В.Ф. ЯНУШКЕВИЧ, А.А. ЗДАНОВИЧ,
Д.О. ШОСТАК, Ю.А. ЩАДЕНКОВ
(Полоцкий государственный университет)

Представлен теоретический анализ взаимодействия электромагнитных волн в режиме гармонического сигнала с подстилающей поверхностью, расположенной над углеводородной залежью. Приведены результаты расчетов электродинамических параметров среды над залежами нефти и газа в зависимости от вариации характеристик исследуемой поверхности. Показано влияние физических свойств пород-коллекторов на тензор диэлектрической проницаемости. Представлены результаты расчетов частотных зависимостей тензора диэлектрической проницаемости подстилающей поверхности. Проведенный теоретический анализ электродинамических параметров среды над углеводородами позволяет оптимизировать параметры сигналов и используемых радиотехнических систем для поиска и оконтуривания границ залежей. Даны рекомендации по оптимизации характеристик электромагнитных волн. Результаты исследований могут быть использованы в области геофизики, радиолокации.

Введение. Актуальность рассматриваемых в настоящей работе задач заключается в повышении точности определения границ и уровня идентификации залежей углеводородов, залегающих на значительных глубинах от земной поверхности. При анализе существующих теоретических исследований обнаружения углеводородных залежей (УВЗ) следует обратить внимание на улучшение методов оптимизации структуры электромагнитных волн (ЭМВ) для решения задач поиска и идентификации УВЗ [1].

Эти задачи жестко связаны с моделированием специфической среды, возникающей над залежами, в результате которого оптимизируются частотные, поляризационные, амплитудные, модуляционные и другие параметры сигналов. Немаловажным при этом являются вопросы, касающиеся оптимизации условий распространения ЭМВ относительно исследуемой поверхности, а также определение числа используемых контролируемых источников излучения в условиях действия помех и сформированных электромагнитных излучений [2].

При разработке новых методов электроразведки приходится считаться со всё усложняющимися задачами, связанными с электроразведочными работами на истощающихся месторождениях, глубоко залегающими и многослойными (с малой мощностью) залежами, выделением границ скоплений и проявлений углеводородов, находящихся под мощными непроницаемыми покрывками [3].

Теоретический анализ. В данной работе проведена систематизация результатов анализа распространения радиоволн в средах над УВЗ в режиме гармонического сигнала в зависимости от характеристик подстилающих поверхностей.

Как известно, тензор диэлектрической проницаемости среды над УВЗ имеет вид [1]:

$$\begin{cases} \hat{\epsilon}_1 = \epsilon_r - j \cdot \frac{\sigma_r}{\omega \cdot \epsilon_0} + \sum_{i=1}^2 \left\{ \omega_{pi}^2 \cdot \frac{\omega_{ri}^2 - \omega^2 - v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{ri}^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \omega^2 \cdot v_i^2} \cdot \left[1 - j \cdot \frac{\omega_{ri}^2 + \omega^2 + v_i^2}{\omega_{ri}^2 - v_i^2 - \omega^2} \cdot \frac{v_i}{\omega} \right] \right\}; \\ \hat{\epsilon}_2 = \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{pi}^2}{(v_i^2 + \omega_{ri}^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \omega^2 \cdot v_i^2} \cdot \frac{\omega_{ri}}{\omega} \cdot [\omega^2 - v_i^2 - \omega_{ri}^2 - j \cdot 2 \cdot \omega \cdot v_i] \right\}; \\ \hat{\epsilon}_3 = \epsilon_r - j \cdot \frac{\sigma_r}{\omega \cdot \epsilon_0} \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{ri}}{v_i^2 + \omega^2} \cdot \left[1 + j \cdot \frac{v_i}{\omega} \right] \right\}, \end{cases} \quad (1)$$

где ϵ_r , σ_r – относительная диэлектрическая проницаемость и удельная электрическая проводимость среды над УВЗ; ω – круговая частота ЭМВ ($\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$); $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая проницаемость вакуума; ω_{pi} , ω_{ri} – плазменная и гиротропная частоты; v_i – частота столкновений частиц.

Представим реальную залежь углеводородов (рис. 1) в виде среды 4, погруженной в среду с порами (среда 2), имеющую границу раздела OX с воздушным пространством (среда 1). Залежь находится на границе ΔZ от границы раздела сред 1 – 2 и имеет мощность Z_1 и протяженность X_1 .

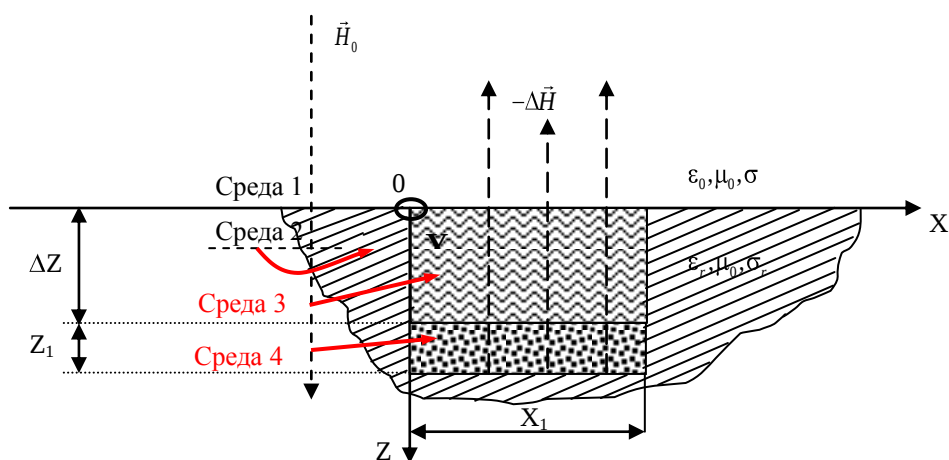


Рис. 1. Модель разреза геологического профиля над УВЗ

Для определения глубины залегания УВЗ представляет интерес компонента $\dot{\epsilon}_3$ тензора (1). Поскольку геологические объекты отличаются по электропроводности, по магнитной и диэлектрической проницаемости, следовательно, отличие физических пород-коллекторов, в которых находятся УВЗ, для различных месторождений будет иметь существенный разброс. Поэтому был проведен анализ составляющей тензора $\dot{\epsilon}_3$ в зависимости от ϵ_r , σ_r , ν_e , от концентрации электронов и ионов $N_e = N_u$ и от частоты зондирующего сигнала ω .

Результаты и их обсуждение. Графики частотных зависимостей компоненты тензора $|\dot{\epsilon}_3|$ приведены на рисунках 2, 3.

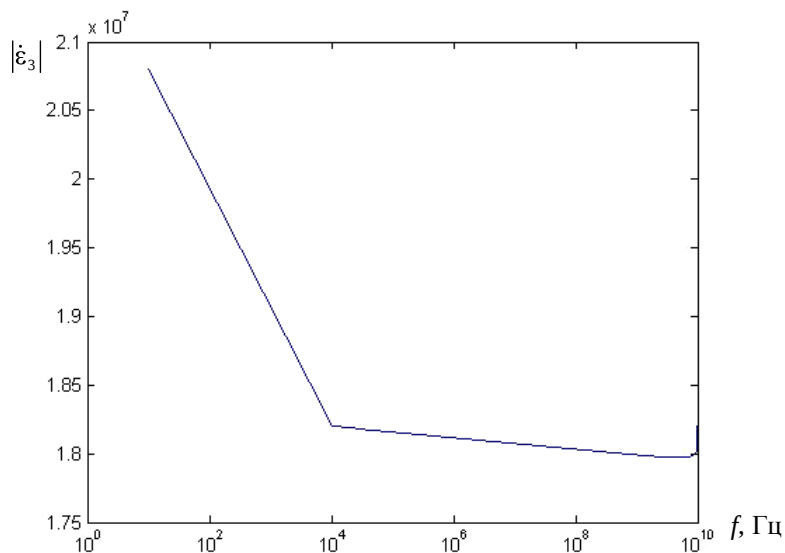


Рис. 2. Частотная зависимость модуля тензора диэлектрической проницаемости $|\dot{\epsilon}_3| = \psi(f)$

Модуль диэлектрической проницаемости плавно уменьшается от величины $2,08 \cdot 10^7$ на частоте 10 Гц до значения $1,82 \cdot 10^7$ при $f = 10^4$ Гц. При дальнейшем увеличении частоты зондирующего сигнала $|\dot{\epsilon}_3|$ практически постоянен, принимая величину $1,82 \cdot 10^7$ на частоте 10^{10} Гц. С одной стороны, наблюдается более равномерный характер частотной зависимости модуля компоненты тензора диэлектрической про-

нищаемости на отрезке частот ($10^4 \dots 10^{10}$) Гц, но с другой – ЭМВ данного диапазона сильно затухают в поверхности земли и для определения глубины залегания УВЗ практически непригодны, за исключением начального участка этого диапазона, соответствующего примерно ($10^1 \dots 10^4$) Гц. Фаза составляющей тензора уменьшается от $-1,08$ рад на частоте $1 \cdot 10^1$ Гц до $-1,58$ рад при $f = 10^4$ Гц и с дальнейшим ростом частоты остается такой же по величине. Таким образом, следует выделить значение частоты $f = 10^4$ Гц, на которой происходит стабилизация фазы. Данное обстоятельство может быть использовано в новых методах электроразведки. Таким образом, отрезок частот ($10^1 \dots 10^4$) Гц можно рекомендовать для разработки методов определения глубины нахождения месторождений нефти и газа, однако на данном участке следует учитывать частотную неравномерность модуля тензора диэлектрической проницаемости.

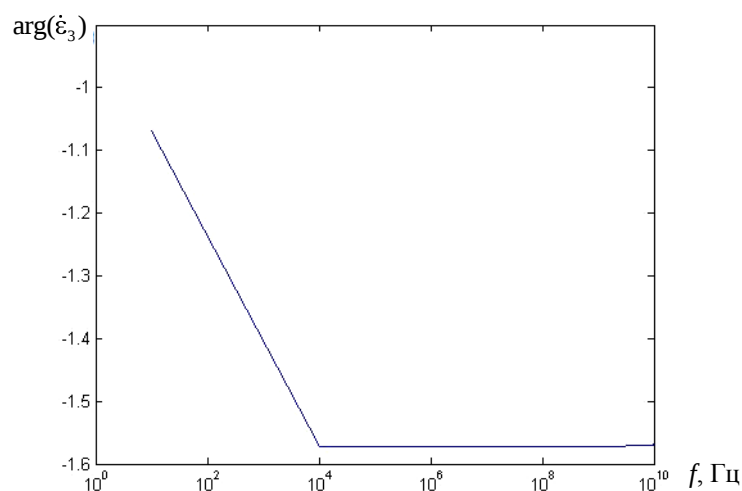


Рис. 3. Частотная зависимость фазовой составляющей тензора диэлектрической проницаемости $\arg(\dot{\epsilon}_3) = \psi(f)$

На рисунках 4, 5 представлены зависимости модуля и фазы компоненты тензора $\dot{\epsilon}_3$ от удельной проводимости среды над УВЗ σ_r .

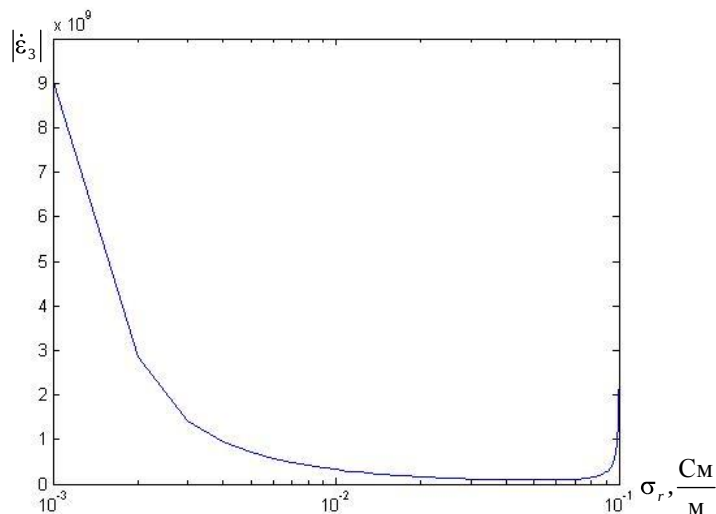


Рис. 4. Влияние проводимости среды на модуль тензора диэлектрической проницаемости $|\dot{\epsilon}_3| = \psi(\sigma_r)$

Для сред с низкой проводимостью величина $|\dot{\epsilon}_3|$ уменьшается от значения $9 \cdot 10^9$ при $\sigma_r = 1 \cdot 10^{-3}$ См/м до $1 \cdot 10^9$ для $\sigma_r = 0,6 \cdot 10^{-2}$ См/м. Практически равномерный характер $|\dot{\epsilon}_3|$ наблюдается на отрезке $\sigma_r = (1 \cdot 10^{-2} \dots 0,8 \cdot 10^{-1})$ См/м. При увеличении проводимости среды до значения $1 \cdot 10^{-1}$ См/м происходит резкое увеличение модуля тензора диэлектрической проницаемости до $2 \cdot 10^9$. Фазовая компонента

увеличивается от $-1,5$ рад при $\sigma_r = 1 \cdot 10^{-3}$ См/м до 3 рад для $\sigma_r = 1 \cdot 10^{-1}$ См/м. При этом следует выделить три характерных участка. Практически линейный рост $\arg \dot{\epsilon}_3$ до 0 рад происходит на отрезке $\sigma_r = (1 \cdot 10^{-3} \dots 9 \cdot 10^{-2})$ См/м. Фаза имеет более равномерный характер при увеличении проводимости до $1 \cdot 10^{-2}$ См/м. При дальнейшем увеличении проводимости фазовая компонента нелинейно возрастает.

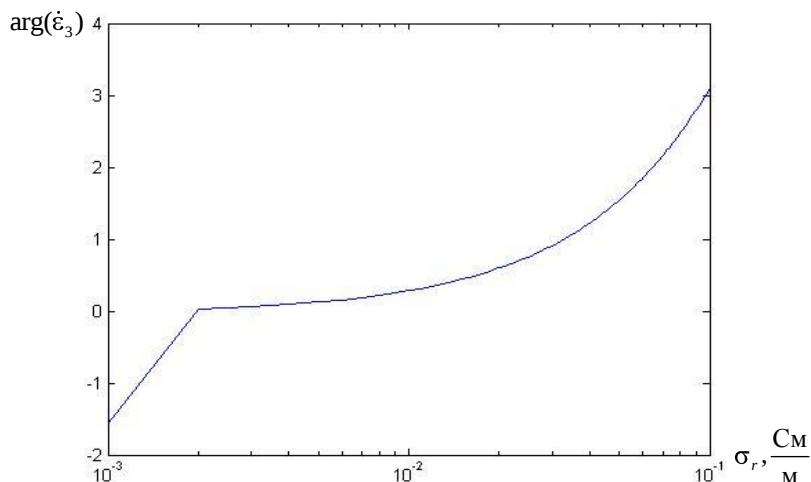


Рис. 5. Влияние проводимости среды на фазовую составляющую тензора диэлектрической проницаемости $\arg(\dot{\epsilon}_3) = \psi(\sigma_r)$

На рисунке 6 представлена зависимость фазы компоненты тензора $|\dot{\epsilon}_3|$ от концентрации частиц. Установлено, что на модуль величина N_e не влияет, при этом фаза увеличивается практически линейно с ростом концентрации частиц. При низких значениях N_e наблюдается скачкообразное изменение $\arg \dot{\epsilon}_3$ от $-1,5$ рад до $0,3$ рад.

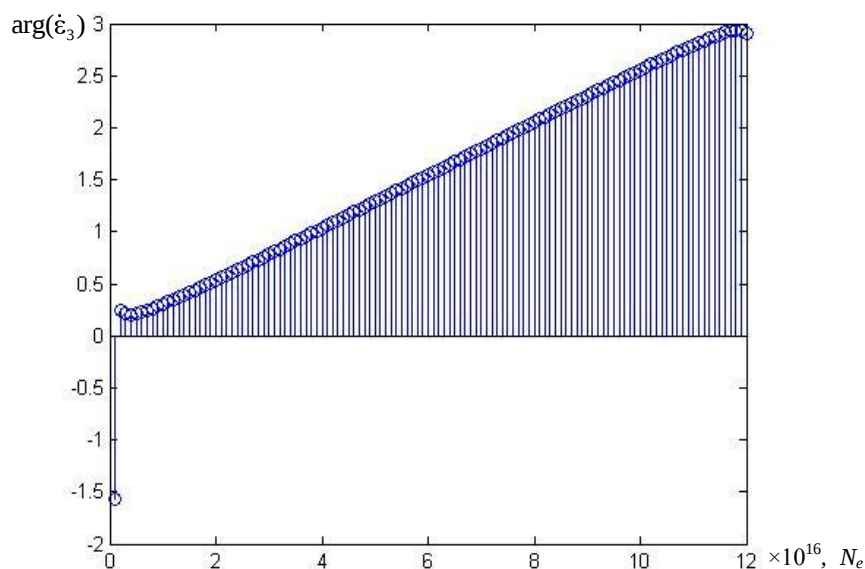


Рис. 6. Влияние концентрации частиц на фазовую составляющую тензора диэлектрической проницаемости $\arg(\dot{\epsilon}_3) = \psi(N_e)$

Установлено, что на модуль фазы компоненты тензора $\dot{\epsilon}_3$ величина ν_e не влияет, при этом фаза увеличивается практически линейно от $-2,8$ до $-0,4$ рад. Наблюдается уменьшение $\arg \dot{\epsilon}_3$ от $-1,5$ до $-2,8$ рад на отрезке $\nu_e = (3 \cdot 10^8 \dots 3,5 \cdot 10^8)$ с⁻¹.

Были проведены численные исследования компоненты тензора диэлектрической проницаемости от величины ϵ_r . Установлено, что для используемых на практике значений диэлектрической проницаемости $\epsilon_r = 5 \dots 10$ $\text{Re } \dot{\epsilon}_3 = \epsilon_r$, а величина $|\dot{\epsilon}_3|$ постоянна для всех значений диэлектрической проницаемости и для соответствующей частоты зондирующей ЭМВ может быть определена по графику, изображенному на рисунке 2.

Заключение

Проведен анализ электродинамических параметров среды над УВЗ в режиме гармонического сигнала в зависимости от характеристик подстилающей поверхности. Показано влияние физических свойств пород-коллекторов, в которых находятся залежи нефти и газа, на тензор диэлектрической проницаемости.

Результаты исследования вариаций электродинамических параметров потока частиц и магнито-диэлектрического наполнителя на процесс взаимодействия анизотропной среды над УВЗ и ЭМВ свидетельствуют о необходимости изменения амплитудно-временных и характеристик воздействующих колебаний для повышения достоверности при решении задач поиска и выделения границ УВЗ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Москвичев, В.Н. Исследование взаимодействия электромагнитных волн с углеводородной залежью / В.Н. Москвичев // Радиотехника и электроника. – Минск: Выш. шк., 1989. – Вып. 18. – С. 91 – 96.
2. Гололобов, Д.В. Взаимодействие электромагнитных волн и углеводородных залежей / Д.В. Гололобов. – Минск: Бестпринт, 2009. – 186 с.
3. Фролов, А.Д. Поиски нефтегазовых месторождений радиоволновыми методами / А.Д. Фролов, В.Д. Озеров // Региональная разведка и промысловая геофизика. – М.: ВИЭМС, 1969. – № 19. – С. 32.

Поступила 23.11.11

EFFECT OF CHARACTERISTICS OF THE UNDERLYING SURFACE ON ELECTRODYNAMIC PARAMETERS OF THE ANISOTROPIC MEDIUM IN THE HARMONIC SIGNAL MODE

V. YANUSHKEVICH, A. ZDANOVICH, D. SHOSTAK, Y. SHCHADENKOV

The article presents the results of a theoretical analysis of the interaction of electromagnetic waves in the mode of a harmonic signal with the underlying surface below the hydrocarbon deposits. The results of calculations of the electrodynamic parameters of the environment above the oil and gas deposits, depending on the variation characteristics of the surface. Shows the influence of the physical properties of solids the collectors on the permittivity tensor. The results of calculations of the frequency dependence the permittivity tensor of the underlying surface. Theoretical analysis of the electrodynamic parameters of the environment of hydrocarbons contributes to optimizing the parameters of signals and radio systems used to search for and delineation of the boundaries of deposits. Recommendations are given for optimizing the characteristics of electromagnetic waves. The research results can be used in geophysics, radiolocation.

УДК 681.883.67:621.396,677.81.012.12

ШИРОКОУГОЛЬНОЕ СКАНИРОВАНИЕ РЕФЛЕКТОРНЫМИ АНТЕННАМИ**канд. техн. наук, доц. В.Ф. ПЕЛЕВИН***(Могилевский государственный университет продовольствия)*

Рассматриваются рефлекторные антенны, позволяющие осуществлять секторный и круговой обзор пространства. Приведено описание рефлекторной антенны геликоидного типа, формирующей одним рефлектором веер статических характеристик направленности в азимутальной плоскости в секторе до 360 градусов. Получены математические выражения, описывающие геометрическую форму отражающей поверхности рефлектора. Выведены формулы для расчета характеристики направленности антенны в приближении Кирхгофа. Рассчитаны и проанализированы полевые характеристики антенны в зависимости от изменения её параметров. Представлены конструкции антенн геликоидного типа с различными функциональными возможностями.

Введение. Отражение звука и света от зеркальных и фокусирующих поверхностей исследовалось и находило применение достаточно давно. С развитием радиотехники отражение и фокусировка электромагнитных волн находит широкое применение в создании рефлекторных антенн в радиолокации [1 – 9]. Эти же явления в аналогичных целях используются с применением звуковых волн в акустике и гидролокации [10 – 15]. Распространение электромагнитных и звуковых волн описывается соответственно векторными уравнениями Максвелла и скалярными уравнениями Гельмгольца, однако когда размеры тел велики по сравнению с длиной волны, решения электромагнитных и акустических задач совпадают при приведении в соответствие граничных условий [16].

Антенна радиолокационной станции (РЛС) является её основным элементом и определяет её характеристики и назначение. В большинстве случаев для РЛС требуется антенна, которая концентрирует излучаемую энергию в малом пространственном угле и принимает энергию, отраженную от цели с этого направления. Это позволяет решать задачи телеметрии, навигации, картографирования, обнаружения подземных ископаемых, определения пространственных координат цели и её сопровождения. Антенны радиолокационной станции могут устанавливаться как стационарно на земной поверхности, так и на различных носителях: автомашинах, самолетах, вертолетах, кораблях. Для оперативного обнаружения и определения направления движения цели осуществляется широкоугольное сканирование пространства узкой парциальной характеристикой направленности (ХН) в азимутальной плоскости (АП) в секторе углов до 360° и в угломестной плоскости (УП) до 90°. В основном это осуществляется с помощью РЛС кругового обзора (КО), которые в настоящее время занимают первое место среди активных средств обнаружения вследствие малого времени обследования всего горизонта, возможности обнаруживать и сопровождать несколько целей, определяя координаты каждой из них. Наибольшие преимущества имеют РЛС кругового обзора со статическим веером ХН, быстро переключаемых или одновременно существующих в пространстве. Они позволяют увеличить скорость обзора пространства, накапливать в приёмном тракте энергию отраженного от цели сигнала в течение всего времени его существования, а следовательно, обладают большой помехоустойчивостью.

В РЛС кругового обзора для обнаружения целей в основном используются многоэлементные (плоские, цилиндрические или сферические) фазированные антенные решетки, позволяющие формировать ХН различных видов и управлять ими с помощью электронных блоков [5; 6]. Однако при оценке таких характеристик, как вес, стоимость, надежность, сложность изготовления и эксплуатации, во многих случаях антенны такого типа теряют свои преимущества по сравнению с рефлекторными антеннами (РА). Современные достижения в области электроники и цифровой техники позволяют при создании РЛС кругового обзора с РА упростить её конструкцию и возложить часть её функций (избирательность, помехоустойчивость, первичную обработку сигналов и др.) на электронную часть РЛС и совмещенную с ней ЭВМ. Кроме указанных преимуществ РА обладают возможностью получения высокой направленности с сохранением направленных свойств в широкой полосе частот. Они также позволяют формировать ХН различной формы и управлять ими; имеют малые активные потери и высокий КПД [9; 10]. К недостаткам РА следует отнести большие габариты, особенно на низких частотах, практически обязательное наличие обтекателя (для антенн, устанавливаемых на носителях) и малоэффективность в режиме излучения (в некоторых случаях это может компенсироваться обработкой принимаемого отраженного от цели сигнала). С увеличением длины волны у них падает разрешающая способность и коэффициент усиления (КУ) антенны. Увеличение частоты всегда улучшает фокусирующие свойства рефлекторов в связи с отсутствием у них хроматической аберрации.

1. Рефлекторные антенны, осуществляющие широкоугольное сканирование

К таким антеннам относятся параболические, усеченные параболические, цилиндрические параболические антенны, широкоугольные рефлекторные антенны секторного (сферическая и сферопараболическая) и кругового обзора.

Параболическая антенна используется для формирования игольчатых ХН. Раскрыв её D связан с шириной ХН $\Delta\theta_{0,5}^\circ$ соотношением [4]:

$$D = \frac{(50 - 70)\lambda}{\Delta\theta_{0,5}^\circ}, \quad (1)$$

где λ – длина волны.

Характеристика направленности РА с параболическим рефлектором и направленным излучателем с ХН $R_{эл}(\psi)$ описывается следующим выражением [15]:

$$R(\theta) = \frac{\int_0^{\psi_1} J_0(2kF \cdot \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \cdot \sin \theta) \cdot R_{эл}(\psi) \cdot \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} d\psi}{\int_0^{\psi_1} R_{эл}(\psi) \cdot \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} d\psi}, \quad (2)$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка; ψ – угол между осью параболоида и направлением прихода волны; ψ_1 – угол раскрытия рефлектора.

Для определения эффективности использования раскрытия РА вводят коэффициент использования поверхности (КИП) ν [2; 4 – 7], равный

$$\nu = \frac{K\lambda^2}{4\pi S}, \quad (3)$$

где K – коэффициент концентрации; S – площадь апертуры антенны.

Коэффициент концентрации (КК) антенны характеризует её энергетическую эффективность и рассчитывается с учётом её ХН $R(\theta, \varphi)$ по формуле [4]:

$$K = \frac{4\pi}{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} R^2(\theta, \varphi) \cdot \sin \theta d\varphi d\theta}, \quad (4)$$

где φ и θ определяют направление ХН в азимутальной и угломестной плоскостях сферической системы координат.

В этих антеннах затеняющее действие излучателя приводит к росту боковых лепестков (БЛ) с нечетными номерами, уменьшению ширины главного лепестка и искажению ХН. Сканирование ХН осуществляется смещением излучателя из фокуса F на величину $\Delta y \ll F$ перпендикулярно оптической оси на угол β [4]:

$$\beta = \arcsin \frac{\Delta\varphi}{kD}, \quad (5)$$

где $\Delta\varphi = k \cdot \Delta y$ – максимально допустимое фазовое искажение на краю апертуры; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число. Величина смещения Δy не превышает две-три ширины ХН.

В несимметрично усечённых параболических РА отсутствует затенение раскрытия рефлектора излучателем, что уменьшает уровень БЛ и увеличивает КК и КУ антенны. Их недостатком является асимметрия амплитудного распределения в раскрытии, что может приводить к асимметрии ХН, её расширению, уменьшая КИП и КК. Расчет ХН несимметрично усечённых параболических антенн в приближении Кирхгофа изложен в работах [8; 12]. Эти антенны позволяют формировать веер ХН в секторе 30...40°, однако при повороте ХН значительно возрастают БЛ (с 7 до 20 %) и падает КК антенны на 25...30 %. Для осуществления сканирования ХН в УП излучатели выносят из фокуса и располагают в местах максимальной концентрации лучей в абберационных треугольниках [12].

Цилиндрические параболические РА позволяют формировать веерные ХН с большой разницей в ширине ХН в главных плоскостях и осуществлять сканирование в плоскости образующей цилиндра (в АП) до 30...60° без её искажения в УП. В несимметрично усеченных этих антеннах отсутствует затенение рефлектора излучателем, а амплитудное распределение в УП убывает обратно пропорционально корню квадратному из расстояния до излучателя, что дает более равномерное распределение поля в раскрытии цилиндра и более острую ХН в этой плоскости, чем в параболической антенне [2; 9].

Рассмотренные параболические РА могут осуществлять широкоугольное сканирование узкими ХН в секторе $90 \dots 360^\circ$ в АП только при использовании механического привода, что и используется в большинстве РЛС.

К широкоугольным РА относятся антенны секторного (сферическая и сферопараболическая) и кругового обзора.

Сферическая антенна применяется для формирования узких и веерных ХН [1; 2; 5 – 7; 9]. Она представляет собой часть сферической поверхности радиуса R и описывается уравнением в декартовой системе координат [5]:

$$(x - R)^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (6)$$

Ширина её ХН определяется выражением (1), а максимальный раскрыв описывается следующим образом:

$$D_{\max} = 2R \cdot \sin\left(\frac{\beta_0}{2} + \arcsin \frac{D}{2R}\right), \quad (7)$$

где β_0 – сектор сканирования.

Глубина рефлектора сферической антенны

$$l_{\text{эф}} = R - \sqrt{R^2 - \frac{D^2}{4}}. \quad (8)$$

Сферическая антенна обеспечивает сканирование ХН в АП без искажения в широком секторе углов (до $90 \dots 120^\circ$) в силу своей симметрии относительно центра кривизны, при перемещении излучателя по концентрической относительно рефлектора фокальной дуге окружности. При этом у сферического рефлектора облучается только та часть его поверхности, которая необходима для формирования ХН требуемой ширины, а остальная поверхность не используется, вследствие чего он имеет малый КИП [2].

Для уменьшения влияния фазовых ошибок на ХН в сферической антенне фокусное расстояние в АП выбирают равным

$$F = \frac{R}{2} - \frac{l_{\text{эф}}}{4}. \quad (9)$$

У сферической антенны ХН шире, а уровень БЛ выше, чем у параболической с таким же раскрывом.

Полевые характеристики, аналогичные сферической РА, формирует сферопараболическая РА, которая образуется вращением параболы вокруг оси, перпендикулярной оси симметрии параболы, вершина которой обращена в сторону от оси вращения, по окружности с радиусом $R = 2F$ [2; 6; 17]. Такая антенна представляет собой параболический тор и совмещает в себе фокусирующие свойства параболического рефлектора с широкоугольными свойствами сферического рефлектора, т.е. позволяет осуществлять обзор в широком секторе пространства без искажения ХН в АП, а в УП обеспечивает формирование плоского фронта волны. Однако плоскость раскрыва сферопараболической антенны не является строго синфазной, и для уменьшения фазовых ошибок в раскрыве требуется выбор оптимальных геометрических размеров в УП согласно выражению (9). Её характеристика направленности и КК могут быть определены по формулам [13]:

$$R(\theta) = \left| \frac{q^2 J_0(\delta_c \tau_0) J_1(q \tau_0) - q \delta_c J_0(q \tau_0) J_1(\delta_c \tau_0)}{(q^2 - \delta_c^2) J_1(q \tau_0)} \right|, \quad (10)$$

$$K = 32 \left(\frac{\pi F}{\lambda} \right)^2 \frac{\left[\int_0^{\tau_0} J_0(q \tau) \tau d\tau \right]^2}{\int_0^{\tau_0} J_0^2(q \tau) \tau d\tau}, \quad (11)$$

где $\tau_0 = tg \frac{\alpha_t}{4}$; $\delta_c = 2 \cdot kF \sin \theta$; $2\alpha_t = 2 \arctg \frac{D}{2(F - l_{\text{эф}})}$ – рабочий угол раскрыва рефлектора; q находится из

выражения $J_0(q \tau_0) = \frac{0,25}{1 + \tau_0}$; $J_0(x)$ и $J_1(x)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно.

Для устранения затенения излучателем рефлектора в УП рефлектор выполняется несимметрично усеченным. Сектор сканирования сферопараболической антенны в АП составляет 120° . Эти антенны, расположенные под углом 120° друг к другу, могут осуществлять круговой обзор пространства.

2. Расчет рефлекторных антенн в приближении Кирхгофа

Расчет ХН рефлекторных антенн в процессе сканирования проводится апертурным методом в приближении Кирхгофа, т.е. в области основного лепестка и ближайших БЛ [2]. Для расчета характеристики направленности РА необходимо вычислить значение потенциала поля отраженной от поверхности рефлектора волны $\varphi_{omp}(r)$ в дальней зоне антенны, который может быть найден в результате решения задачи дифракции падающей волны на поверхности S этой антенны. Связь между значением потенциала φ в точке наблюдения и значением потенциала на излучающей поверхности S можно найти на основании формулы Грина:

$$\iiint_V (U, \Delta\varphi - \varphi \Delta U_1) dV = \iint_S \left(U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}_0} - \varphi \frac{\partial U_1}{\partial \bar{n}_0} \right) dS, \quad (12)$$

где $\bar{n}_0$ – внешняя нормаль к поверхности S , а функции φ и U_1 удовлетворяют уравнениям Гельмгольца.

Если вспомогательной функцией U_1 , являющейся функцией Грина, служит поле точечного источника в свободном пространстве, значение потенциала внутри области в любой точке r можно определить по значениям φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}_0}$ на заданной поверхности S по формуле Кирхгофа – Гюйгенса [7; 16]:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}_0} \cdot \frac{e^{jkr}}{r} - \varphi \frac{\partial}{\partial \bar{n}_0} \left(\frac{e^{jkr}}{r} \right) \right] dS. \quad (13)$$

При размерах излучающей поверхности и её радиуса кривизны значительно больших длины волны можно установить приближенно связь между величинами φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}_0}$. Если при этом дифрагированным полем в области геометрической тени можно пренебречь, тогда для дальней зоны получим формулу приближения Кирхгофа [15; 16]:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}_0} \cdot \frac{e^{jkr}}{r} (1 + \cos \theta) dS. \quad (14)$$

Если излучение происходит в пределах малого телесного угла и отклонение от нормали к слабоизогнутой поверхности мало, то $\cos \theta \approx 1$ и формула приближения Кирхгофа принимает вид, адекватный первой интегральной формуле Гюйгенса:

$$\varphi_{omp}(r) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}_0} \cdot \frac{e^{jkr}}{r} dS, \quad (15)$$

а для двумерной области аналогичная формула приближения Кирхгофа имеет вид:

$$\varphi_{omp}(r) = \frac{j}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}_0} H_0^{(1)}(kr) dx, \quad (16)$$

где $H_0^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля нулевого порядка первого рода.

3. Широкоугольные рефлекторные антенны геликоидного типа

Для обнаружения целей в АП при круговом обзоре пространства разработана винтовая несимметрично усеченная сферопараболическая рефлекторная антенна в виде параболического геликоида. Она относится к широкоугольным РА и позволяет формировать веер одинаковых статических ХН в АП при минимальном их искажении в секторе до 360° вследствие сохранения постоянства эффективной апертуры, а также управлять ХН в УП.

Отражающая поверхность рефлектора геликоидной антенны представляет собой поверхность, образованную вращением усеченной параболы вокруг вертикальной оси, перпендикулярной оси симметрии параболы, вершина которой обращена в сторону от оси вращения, по винтовой линии [18], (рис. 1, а). Радиус вращения выбирают равным удвоенному фокусному расстоянию параболы $R = 2F$, при этом излучатели вынесены за пределы раскрыва рефлектора и расположены на фокальной дуге радиуса r_0 . Шаг h

винтовой поверхности определяется сектором сканирования ХН в УП и выбирается так, чтобы исключить затеняющее действие излучателей и рефлектора, расположенных на диаметрально противоположенной стороне РА, на формируемую ХН.

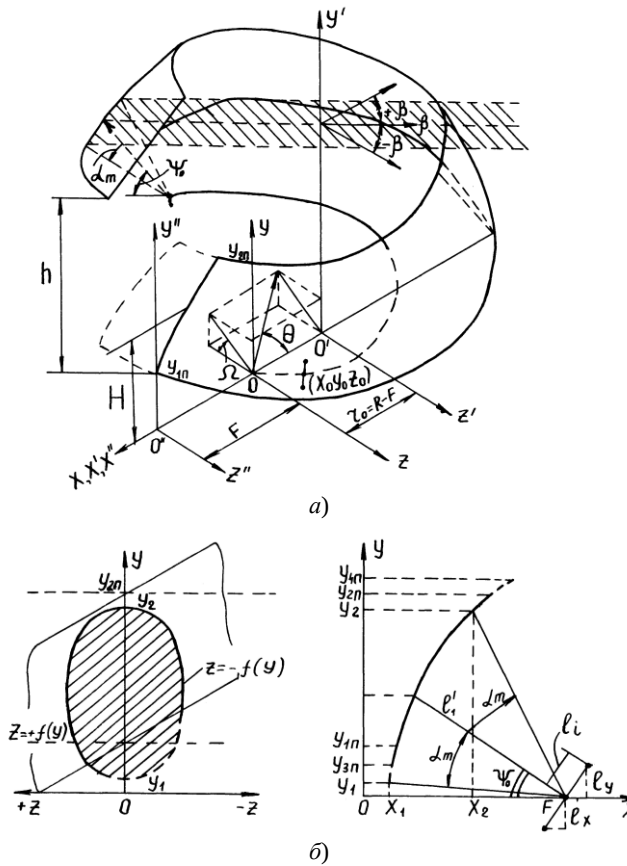


Рис. 1. Геометрия задачи:

а – к выводу пространственной ХН геликоидной РА; б – определение пределов интегрирования в УП

Уравнение поверхности параболического геликоида получим, перенеся уравнение параболы с фокусным расстоянием F в плоскости $x''O''y''$ вдоль оси $O''x''$ на расстояние R в систему координат x', y', z' и решая полученное выражение параболы $(y')^2 = 4F(R - x')$ совместно с уравнением винтовой поверхности с центром в точке O' :

$$x' = u_0 \cos v, \quad z' = u_0 \sin v, \quad y' = C'v + f(u_0), \quad (17)$$

где $f(u_0) = \sqrt{4F(R - u_0)}$, $u_0 = \sqrt{(x')^2 + (z')^2}$, $v = \arctg \frac{z'}{x'}$.

Переходя к системе координат x, y, z с началом в точке O' (фокус параболы F) и учитывая, что $x' = x - R + F$, $y' = y$, $z' = z$, получим уравнение поверхности параболического геликоида $P(x, y, z)$ в первом октанте декартовой системы координат:

$$y = C' \arctg \frac{z}{x - R + F} + \sqrt{4F(R - \sqrt{(x + F - R)^2 + z^2})}, \quad (18)$$

или в общем виде [18]:

$$(x + F - R)^2 - \left[R^2 - \frac{\left(y - C' \arctg \frac{z}{x + F - R} \right)^2}{4F} \right]^2 + z^2 = 0, \quad (19)$$

где $C' = \frac{h}{2\pi}$.

Потенциал поля, создаваемый геликоидной РА в точке наблюдения в дальней зоне, может быть определен из выражения (15). На поверхность рефлектора S падает плоская волна, нормаль к фронту которой образует с осью x угол θ (рис. 1, a). Потенциал этой волны с точностью до постоянного и временного сомножителей можно записать в виде

$$\varphi = \exp(jk\Delta), \quad (20)$$

где $\Delta = x \cos \theta + y \sin \theta \sin \Omega + z \sin \theta \cos \Omega$ – разность хода в сферической системе координат.

Производную от потенциала волны по нормали $\bar{n}_0$ запишем в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(n_0, \hat{x}) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(n_0, \hat{y}) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(n_0, \hat{z}). \quad (21)$$

Вычислим направляющие косинусы внешней нормали к поверхности геликоида $P(x, y, z)$ по формулам:

$$\cos(n_0, \hat{x}_i) = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x_i} \left\{ \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x_i} \right]^2 \right\}^{-1/2}, \quad (22)$$

где $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$, и выразим их через $\cos(n_0, \hat{x})$:

$$\cos(n_0, \hat{y}) = \frac{\partial P / \partial y}{\partial P / \partial x} \cdot \cos(n_0, \hat{x}), \cos(n_0, \hat{z}) = \frac{\partial P / \partial z}{\partial P / \partial x} \cdot \cos(n_0, \hat{x}). \quad (23)$$

Подставим результаты вычислений (23) в выражение (21) с учетом (20), учитывая, что

$$dS \cdot \cos(n_0, \hat{x}) = dydz, \quad (24)$$

где dS – элемент поверхности геликоида, получим согласно первой интегральной формуле Гюйгенса (15) потенциал волны, отраженной от поверхности параболического геликоида [19]:

$$\varphi_{omp} = \frac{jk}{2\pi} \iint_S \frac{\exp Q}{r} \left\{ \cos \theta + \sin \theta \sin \Omega \frac{[(x+F-R)^2 + z^2] \zeta}{(x+F-R) + C'z\zeta} + \sin \theta \cos \Omega \frac{[z - C'(x+F-R)\zeta]}{(x+F-R) + C'z\zeta} \right\} dydz, \quad (25)$$

где $Q = jk[x \cos \theta + y \sin \theta \sin \Omega + z \sin \theta \cos \Omega - r]$, $\zeta = \sqrt{\frac{R - \sqrt{(x+F-R)^2 + z^2}}{F[(x+F-R)^2 + z^2]}}$.

В формуле (15) величину r , входящую в выражение, которое является функцией Грина, выразим через координаты излучателей (x_{0i}, y_{0i}, z_{0i}) :

$$r = \sqrt{(x - x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2 + (z - z_{0i})^2}. \quad (26)$$

В выражении (25) интегрирование ведется по поверхности рефлектора. Для определения пределов интегрирования необходимо выразить переменную x в виде функций от y и z в явном виде. При небольших углах раствора ХН излучателя $2\alpha_m$ справедлива замена:

$$\arctg \frac{z}{x+F-R} \approx \frac{z}{x+F-R}. \quad (27)$$

Тогда из выражения (19), записанного в виде многочлена, решая который относительно x приближенным методом Ньютона, получим выражение для x в зависимости от других координат:

$$x = R - F - \sqrt{L_0^2 - z^2} + \frac{C'z}{2F} \cdot \frac{\sqrt{L_0^2 - z^2} \left[(L_0^2 - z^2)L_0 - \frac{(C')^2 z^2}{4F} \right] + \frac{(C')^2 z}{2} \left[(L_0^2 - z^2) \left(R - \frac{3y^2}{4F} \right) - \frac{(C')^2 z^2}{8F} \right]}{\sqrt{L_0^2 - z^2} \left[\left(R - \frac{3y^2}{4F} \right) \frac{(C')^2 z^2}{2F} + (L_0^2 - z^2)^2 \right] + \frac{3yzC'}{F} \left[(L_0^2 - z^2)L_0 - \frac{(C')^2 z^2}{4F} \right]}, \quad (28)$$

где $L_0 = R - \frac{y^2}{4F}$.

Если излучатель имеет симметричную ХН шириной $2\alpha_m$, то его можно аппроксимировать круговым конусом с центральным углом $2\alpha_m$ (рис. 1, б, справа). Вершина конуса находится в фокусе F усеченной параболы, а его ось наклонена под углом ψ_0 к фокальной оси параболы. Тогда уравнение конуса в общем виде можно записать следующим образом:

$$A_1 x^2 + 2B_0 x + C_1 + z^2 = 0, \quad (29)$$

где $A_1 = \sin^2 \psi_0 - \cos^2 \psi_0 \operatorname{tg}^2 \alpha_m$; $B_0 = y \sin \psi_0 \cos \psi_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_m)$; $C_1 = y^2 (\cos^2 \psi_0 - \sin^2 \psi_0 \operatorname{tg}^2 \alpha_m)$.

Решая совместно уравнение конуса (29) и геликоида (19), получим трансцендентное уравнение линии их пересечения на плоскости yOz , т.е. найдем зависимость $z = f(y)$, что позволит определить пределы интегрирования по внутреннему интегралу в выражении (25).

Определим x из уравнения (29):

$$x_{1,2} = B_1 \pm \sqrt{D_3 - \frac{z^2}{A_1}}, \quad (30)$$

где $B_1 = \frac{B_0}{A_1}$; $D_3 = \frac{B_0^2}{A_1^2} - \frac{C_1}{A_1}$.

Подставим значения $x_{1,2}$ в (19) и получим после преобразований систему уравнений:

$$C_2^2 \xi_1^4 - 2C_2 C_3 \xi_1^3 + D_4 \xi_1^2 + 2L_0 C_3 \xi_1 - b_2 = 0, \quad (31)$$

где $b_2 = D_5 + D_6 z^2 \pm 2K_1 \sqrt{D_3 - \frac{z^2}{A_1}}$; $K_1 = F - R - B_1$; $\xi_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{K_1 \pm \sqrt{D_3 - \frac{z^2}{A_1}}}$; $D_5 = K_1^2 + D_3 - L_0^2$;

$$C_2 = \frac{(C')^2}{4F}; \quad C_3 = \frac{C'y}{2F}; \quad D_4 = C_3^2 - 2L_0 C_2; \quad D_6 = 1 - \frac{1}{A_1}.$$

Пределы внешнего интеграла y_1 и y_2 определяются пересечением в плоскости yOx образующих конуса ХН излучателя $x_{1,2} = K_{2,3} y_{1,2}$ с границами усеченной параболы $y^2 = 4F(x + F)$ в УП (рис. 1, б, слева). Тогда

$$y_{1,2} = 2F \sqrt{K_{2,3}^2 + 1}, \quad (32)$$

где коэффициенты $K_{2,3} = -\operatorname{ctg}(\psi_0 \pm \alpha_m)$ определяются из уравнения конуса (29) при $z = 0$.

Границы $y_{3,4П}$ отражающей поверхности рефлектора в УП определяются из решения уравнения проекции винтовой поверхности на плоскость yOz :

$$\sin \frac{2\pi}{h} (y_{3,4П} - y_{1,2П}) = \frac{z}{R - \frac{y_{1,2П}^2}{4F}}.$$

Получим

$$y_{3,4П} = y_{1,2П} + \frac{h}{2\pi} \arcsin \frac{z}{R - \frac{y_{1,2П}^2}{4F}}, \quad (33)$$

где $y_{1,2П} = \sqrt{4Fx_{1,2П}}$ – границы усеченной параболы в УП при $h = 0$.

Выражение для потенциала поля, создаваемого РА геликоидного типа, примет вид:

$$\Phi_{omp} = \frac{jk}{2\pi} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z=f(y)}^{z=-f(y)} \frac{\exp Q}{r} \left[\cos \theta + \sin \theta \sin \Omega \frac{(x_1^2 + z^2)\zeta}{x_1 + C'z\zeta} + \sin \theta \cos \Omega \frac{z - C'x_1\zeta}{x_1 + C'z\zeta} \right] dy dz. \quad (34)$$

Граничные значения y_1^* и y_2^* внешнего интеграла вычисляются из условия:

если $y_1 \leq y_{3П}$, то $y_1^* = y_{3П}$; $y_2 \leq y_{4П}$, то $y_2^* = y_2$;

$y_1 > y_{3П}$, то $y_1^* = y_1$; $y_2 > y_{4П}$, то $y_2^* = y_{4П}$.

Характеристика направленности геликоидной антенны рассчитывается следующим образом:

$$R(\theta, \Omega) = \left| \frac{\Phi_{omp}}{\Phi_{omp, max}} \right| \quad (35)$$

при $\Omega = 0^\circ$ в АП и при $\Omega = 90^\circ$ в УП.

По формулам (34) и (35) были рассчитаны ХН геликоидной антенны в АП и УП (рис. 2 и 3), а также установлены зависимости направленных свойств от её параметров [19]. С увеличением шага h винтовой поверхности рефлектора максимум ХН антенны в УП смещается от оси симметрии антенны в сторону подъема винтовой поверхности, при этом в АП с увеличением h происходит незначительное увеличение ширины ХН и уровня БЛ, а КИП уменьшается, что вызвано наличием фазовых искажений, возникающих вследствие наличия пространственной кривизны отражающей поверхности рефлектора [20]. В УП смещение максимума ХН и её сужение незначительны.

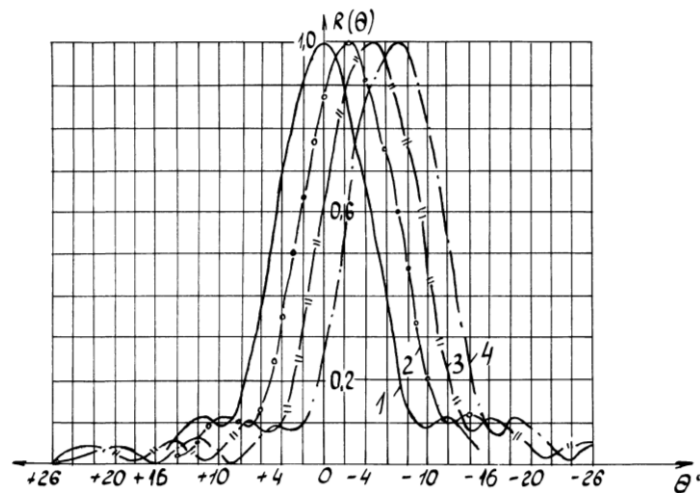


Рис. 2. Зависимости изменения ХН геликоидной РА в АП ($\Omega = 0^\circ$) от шага винтовой поверхности ($\alpha_m = 30^\circ$; $\beta = 0^\circ$; 1 – $h/\lambda = 0$; 2 – $h/\lambda = 5$; 3 – $h/\lambda = 10$; 4 – $h/\lambda = 15$)

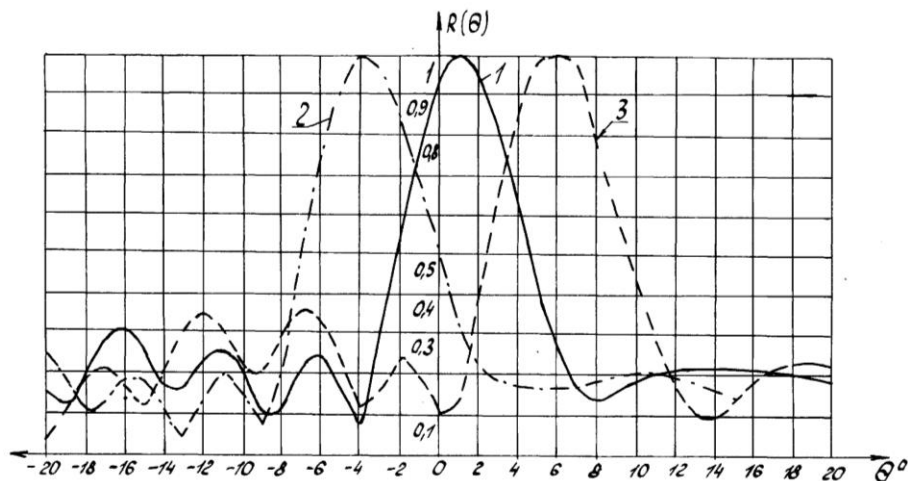


Рис. 3. Зависимость изменения ХН геликоидной РА в УП ($\Omega = 90^\circ$) от угла β ($\alpha_m = 30^\circ$; $h/\lambda = 10$; 1 – $\beta = 0^\circ$; 2 – $\beta = 5^\circ$; 3 – $\beta = -5^\circ$)

Сферопараболическая РА является частным случаем геликоидной РА при шаге винтовой поверхности $h = 0$. В этом случае выражение (19) принимает вид:

$$(x + F - R)^2 - \left(R - \frac{y^2}{4F} \right)^2 + z^2 = 0, \quad (36)$$

а ХН этой РА может быть также рассчитана по формулам (34) и (35).

Существенное расширение сектора обзора в УП с одновременным формированием веера СХ в АП может быть осуществлено РА геликоидного типа с параболической образующей в АП [21]. В такой антенне поверхность рефлектора образована перемещением усеченной параболы, лежащей в АП, параллельно самой себе, вдоль оси цилиндрической винтовой линии, перпендикулярной этой плоскости, так, что вершина параболы, обращенной вогнутостью к оси, перемещается по данной винтовой линии (рис. 4). При этом раскрыв параболы 4 параллелен диаметральной плоскости РА и не превышает по размеру величину фокусного расстояния F параболы. Рефлектор этой антенны при сечении его АП имеет своим следом параболу, а в УП – прямую. Оси ХН излучателей лежат в параллельных АП и ориентированы в них на середины усеченных парабол. Таким образом, парциальные ХН, сформированные рефлектором антенны, являются касательными к цилиндрической поверхности радиуса $R = 2F$. Шаг винтовой поверхности рефлектора определяется шириной ХН в АП и числом каналов (излучателей) в РА. В АП излучатели вынесены из раскрыва своих усеченных парабол, не затеняя его, что позволяет формировать широкую ХН рефлекторной антенны в УП, а в АП – статический веер ХН.

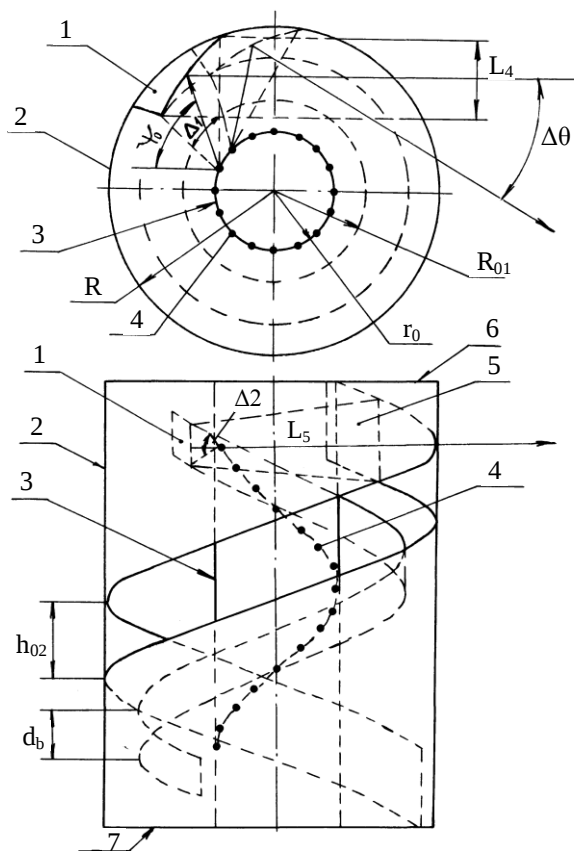


Рис. 4. Геликоидная рефлекторная антенна с параболической образующей в азимутальной плоскости

В рассмотренных РА излучающие элементы являются обратимыми, т.е. могут работать как в режиме излучения, так и в режиме приема. Для упрощения формы поверхности широкоугольной геликоидной РА с образующей в АП в виде усеченной параболы последнюю заменяют частью дуги окружности радиуса $R = 2F$, усеченной в тех же пределах, что и парабола [22], что возможно при допустимых фазовых ошибках (наличие сферической аберрации) для длиннофокусных рефлекторов.

Заключение

Рассмотрены рефлекторные антенны, которые могут быть использованы для широкоугольного обзора пространства в азимутальной плоскости. Показано, что для этой цели могут быть использованы односторонние антенны как с простым профилем рефлектора, но требующие механического сканирования, так и антенны, имеющие сложную геометрию рефлектора (геликоидного вида).

Широкоугольные рефлекторные антенны способны осуществлять обзор пространства в азимутальной плоскости в секторе до 360° включительно. Они обладают осевой симметрией и формируют в

заданном секторе углов в азимутальной плоскости статический веер ХН. Такие антенны в основном не являются апланатическими, т.е. имеющими при сканировании минимальные искажения (не имеющие кубических искажений), но они во всём секторе углов сканирования сохраняют форму ХН и уровень больших лепестков. Рефлекторные антенны этого типа являются однозеркальными, в связи с чем общий размер рефлектора, определяемый сектором обзора, существенно зависит от ширины ХН в азимутальной плоскости. В угломестной плоскости рефлектор в большинстве случаев – несимметрично усеченный, что позволяет построить рефлекторную антенну кругового обзора с гораздо меньшей степенью искажений парциальных ХН как за счет уменьшения степени кривизны рефлектора, так и за счет устранения затевающего действия излучателя.

Сравнительные характеристики цилиндрических приемоизлучающих систем и систем, построенных из рефлекторных антенн, приведены в таблице (для акустического варианта). Цилиндрические антенны осуществляют ненаправленное излучение в азимутальной плоскости.

Сравнительные характеристики антенн и антенных систем кругового обзора при ширине ХН в азимутальной плоскости $\Delta\theta_{0,5} = 2^\circ$ и в угломестной плоскости $\Delta\phi_{0,5} = 10^\circ$ на одной рабочей частоте

Тип антенной системы кругового обзора	Число ярусов	Число рефлекторов (излучателей) в ярусе	Диаметр системы	Высота системы	Уровень БЛ в АП, %	Вес системы	Надежность	Трудоемкость изготовления	Стоимость
Цилиндрическая антенная система с ХН, формируемыми отдельными излучателями	1	180	D_λ	H_λ	22	P_λ	0,998	K_λ	C_λ
	3	60	$0,33 D_\lambda$	$2,2 H_\lambda$	22	$1,2 P_\lambda$	0,998	$1,2 K_\lambda$	$1,2 C_\lambda$
Цилиндрическая антенная система с веером статических ХН	3	28	$0,02 D_\lambda$	$2,2 H_\lambda$	15	$0,5 P_\lambda$	0,995	$0,3 K_\lambda$	$0,5 C_\lambda$
Система из 12 усеченных параболоидов с сектором сканирования в АП с $\Omega = 30^\circ$	1	12	$0,11 D_\lambda$	$0,65 H_\lambda$	18	$0,36 P_\lambda$	0,999	$0,1 K_\lambda$	$0,05 C_\lambda$
	3	4	$0,06 D_\lambda$	$2 H_\lambda$	18	$0,36 P_\lambda$	0,999	$0,1 K_\lambda$	$0,05 C_\lambda$
Система из 3-х сферопараболоидов с $\Omega = 120^\circ$ в АП	1	3	$0,1 D_\lambda$	$0,65 H_\lambda$	7	$0,2 P_\lambda$	0,999	$0,17 K_\lambda$	$0,02 C_\lambda$
	3	1	$0,06 D_\lambda$	$2 H_\lambda$	7	$0,2 P_\lambda$	0,999	$0,17 K_\lambda$	$0,02 C_\lambda$
Геликоид		1	$0,06 D_\lambda$	$2,2 H_\lambda$	7	$0,18 P_\lambda$	0,999	$0,2 K_\lambda$	$0,02 C_\lambda$

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзенберг, Г.З. Антенны УКВ / Г.З. Айзенберг, В.Г. Ямпольский, О.Н. Терешин. – М.: Связь, 1977. – Т. 2. – 288 с.
2. Бахрах, Л.Д. Зеркальные сканирующие антенны: Теория и методы расчета / Л.Д. Бахрах, Г.К. Галимов. – М.: Наука, 1981. – 302 с.
3. Гинзбург, В.М. Расчет параболических антенн / В.М. Гинзбург, И.Н. Белова. – М.: Сов. Радио, 1959. – 250 с.
4. Драбкин, А.Л. Антенно-фидерные устройства / А.Л. Драбкин, В.Л. Зузенко, А.Г. Кислов. – М.: Сов. радио, 1974. – 536 с.
5. Кюн, Р. Микроволновые антенны / Р. Кюн; под ред. проф. М.П. Долуханова. – Л.: Судостроение, 1967. – 517 с.
6. Справочник по радиолокации / под ред. П.И. Дудника. – М.: Связь, 1977. – Т. 2: Радиолокационные антенные устройства. – 440 с.
7. Фрадин, А.З. Антенно-фидерные устройства / А.З. Фрадин. – М.: Связь, 1977. – 440 с.
8. Шабров, А.А. Некоторые особенности направленных свойств несимметрично усеченных параболических антенн / Радиотехника и электроника. – Наука, 1966. – Т. 11, вып. 10. – С. 1872 – 1875.
9. Ямайкин, В.Е. Основы проектирования антенных устройств СВЧ / В.Е. Ямайкин; под ред. А.В. Рунова; Воен. инж. зенитн. училище ПВО. – Минск, 1972. – Ч. 1 – 2. – 485 с.

10. Каневский, И.Н. Фокусирование звуковых и ультразвуковых волн / И.Н. Каневский. – М.: Наука, 1977. – 336 с.
11. Пелевин, В.Ф. Исследование несимметрично усеченной сферопараболической фокусирующей антенны с веером характеристики направленности / В.Ф. Пелевин, В.И. Кривцун // Вопросы кораблестроения. Сер. Спец. гидроакустика. – 1980. – Вып. 31. – С. 72 – 79.
12. Орлов, Л.В. Расчет и проектирование антенн гидроакустических рыбопоисковых станций / Л.В. Орлов, А.А. Шабров. – М.: Пищевая промышл., 1974. – 275 с.
13. Прохоров, В.Г. Рефлекторная антенна с широким секторным обзором / В.Г. Прохоров // Вопр. кораблестроения. Сер. Спец. гидроакустика. – 1984. – Вып. 16. – С. 54 – 58.
14. Розенберг, Л.Д. Звуковые фокусирующие системы / Л.Д. Розенберг. – М.: Изд-во АН СССР, 1949. – 112 с.
15. Тюрин, А.М. Теоретическая акустика / А.М. Тюрин. – Л.: ВМОЛА, 1917. – 443 с.
16. Шендеров, Е.Л. Волновые задачи гидроакустики / Е.Л. Шендеров. – Л.: Судостроение, 1972. – 348 с.
17. Жук, М.С. Проектирование линзовых, сканирующих, широкодиапазонных антенн и фидерных устройств / М.С. Жук, Ю.Б. Молочков. – М.: Энергия, 1973. – 439 с.
18. Акустическая рефлекторная антенная система Пелевина: а. с. 218737 СССР, МКИ G 01 S 15/02, H 01 Q 19/10 / В.Ф. Пелевин (СССР). – № 3090919; заявл. 3.05.84; опубл. 11.01.85.
19. Пелевин, В.Ф. Несимметрично усеченный параболический геликоид с веером характеристик направленности / В.Ф. Пелевин // Вопр. кораблестроения. Сер. Спец. гидроакустика. – 1985. – Вып. 55. – С. 113 – 119.
20. Пелевин, В.Ф. Фазовые искажения несимметрично усеченной винтовой сферопараболической антенны: Библ. аннот. указатель / В.Ф. Пелевин, Е.В. Казакова // Судостроение. – М., 1986. – Вып. 4. – 8 с. – Деп. в ЦНИИ «Румб», ДР – 719.
21. Акустическая рефлекторная антенная система: а. с. 303152 СССР, МКИ G 01 S 15/02, H 01 Q 19/10 / В.Ф. Пелевин (СССР). – № 3172473; заявл. 02.06.87; опубл. 1.10.89.
22. Акустическая рефлекторная антенная система: а. с. 320624 СССР, МКИ G 01 S 15/02 / В.Ф. Пелевин (СССР). – № 4523360; заявл. 27.11.89; опубл. 01.11.90.

Поступила 15.11.2011

WIDE-ANGLE SCANNING BY REFLECTING ANTENNAS

V. PELEVIN

The reflex antennas observed in paper allows to realize the sector-shaped and circle browse of space. The exposition of the reflex antenna by gelicoide type shapes by one reflector a fan of static characteristics of directivity in an azimuth plane in sector to 360°. The mathematical expressions presenting the geometrical form of the reflecting surface of the reflector are gained. Formulas for calculation of the directional characteristic of the antenna in the Kirchhoffs approach are deduced. Field performances of the antenna depends on variation of its parameters are calculated and parsed. Constructions of gelicoide type antennas with various functionality are presented.

УДК 621.396

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОБЪЕКТА МЕТОДАМИ НЕЛИНЕЙНОЙ РАДИОЛОКАЦИИ

В.М. ЧЕРТКОВ, канд. техн. наук, доц. С.В. МАЛЬЦЕВ
(Полоцкий государственный университет)

Рассмотрены особенности трансформации спектра зондирующего сигнала. Установлены самые выгодные с энергетических и информационных позиций частоты для анализа структуры спектра переизлученного зондирующего сигнала. Проведен сравнительный анализ технологий идентификации нелинейных объектов. Представлен новый метод, обеспечивающий повышение вероятности правильной идентификации типа нелинейности объекта на основе электрофизических свойств. Показана сплайн-функция аппроксимируемых табличных данных вольт-амперной характеристики диода I307G. Приводятся результаты восстановления вольт-амперной характеристики для диода Д220.

Введение. Возможность дистанционного определения электрофизических свойств объекта возникла в 70-е годы прошлого столетия. Ее физической основой является эффект нелинейного рассеяния электромагнитных волн, присущий определенному классу объектов и проявляющийся в появлении в рассеянном объектом поле спектральных компонент, отсутствующих в поле, падающем на него. Это позволяет обнаружить их на фоне отражений от окружающей объекты среды при ее зондировании электромагнитными волнами и в ряде случаев дистанционно получить информацию о динамике электрофизических процессов в объекте и окружающей его среде. Причина возникновения нелинейного рассеяния – наличие в объектах элементов с нелинейными электрическими свойствами (несовершенные электрические контакты металлических конструкций, полупроводниковые элементы). Исследование этого явления сохраняет свою остроту и привлекает внимание специалистов и в настоящее время [1].

Изучение эффекта нелинейного рассеяния радиоволн на радиоэлектронной аппаратуре и ее компонентов в целях их обнаружения – наиболее актуальное для освоения в техническом отношении направление. В отличие от линейной, в нелинейной радиолокации информация об обнаруживаемом объекте определяется его способностью спектрального преобразования зондирующего сигнала и переотражения его на гармониках частоты зондирования. Эти явления возможны при наличии в составе объекта элементов с нелинейными вольт-амперными характеристиками (ВАХ). Такие элементы по природе своего возникновения условно могут быть разделены на «искусственные» и «естественные». Под «искусственными» будем понимать полупроводниковые приборы искусственного происхождения, содержащие р-п-переход (например, диоды, транзисторы и т.п.); под «естественными» – естественного происхождения (точечные и плоскостные металлические контакты, корродирующие поверхности и т.п.).

Способы обнаружения и идентификации нелинейного объекта

Традиционные методы идентификации нелинейных объектов (полупроводников или точечных и плоскостных металлических контактов) основываются главным образом на двух особенностях [2]:

- разности уровней второй и третьей гармоник, переизлученных нелинейными объектами;
- нестабильности вольт-амперной характеристики точечных и плоскостных металлических контактов при механическом воздействии.

Классический способ обнаружения нелинейного объекта с распознаванием типа нелинейности основан на приеме отклика по двум каналам на второй и третьей гармониках вторичного электромагнитного поля и идентификации типа нелинейного объекта по соотношению амплитуд переотраженных сигналов [3 – 5]. Особенность данного способа состоит в том, что в ряде случаев при обнаружении нелинейности типа металл – окисел – металл (естественных нелинейностей) уровень третьей гармоники сигнала отклика превышает уровень сигнала отклика на второй гармонике частоты зондирующего сигнала, а при обнаружении объекта с устойчивым р-п-переходом (искусственных нелинейностей) уровень второй гармоники превышает уровень третьей гармоники. Следовательно, основным недостатком этого способа является большое количество ложных срабатываний, вызванных сложными металлическими предметами, не содержащими электронных компонентов, и как следствие, низкая вероятность правильной идентификации типа нелинейного объекта.

Другой метод идентификации типа нелинейности – *способ обнаружения нелинейного объекта с распознаванием типа нелинейности* [6], основанный на излучении зондирующего сигнала, промодулированного по пилообразному закону в направлении на нелинейный объект, приеме и регистрации сигнала отклика по двум каналам на второй и третьей гармониках частоты вторичного электромагнитного поля.

Идентификация типа нелинейности производится по соотношению уровней амплитуд канальных сигналов, а дополнительная модуляция позволяет определить зависимость амплитуды сигнала отклика от

амплитуды зондирующего сигнала и по ее виду уточнить тип нелинейности. За счет введения дополнительной модуляции по амплитуде зондирующего сигнала обеспечивается получение дополнительной информации о типе нелинейности. В результате достигается уменьшение количества ложных срабатываний и, как следствие, повышение вероятности распознавания типа нелинейного объекта [6]. Основным недостатком приведенного метода – сложность технической реализации, в частности высокие требования к линейности передающего каскада.

Сущность предлагаемого нами способа идентификации нелинейного объекта заключается в том, что при переизлучении электромагнитного поля объектом в зависимости от его электрофизических свойств происходит восстановление подавленной несущей, т.е. возникает дополнительная гармоника, характеризующая квадратность вольт-амперной характеристики объекта.

Идентификация объекта

В качестве имитатора нелинейности рассмотрим вибратор, нагруженный на полупроводниковый диод (в данном случае – I307G). Аппроксимация ВАХ нелинейного элемента осуществляется степенными полиномами третьей степени – кусочно-степенным способом (сплайн-функция [7]).

Аппроксимируемый интервал разбивается на отрезки $[x_{i-1}, x_i]$. На каждом отрезке определяется отдельный полином третьей степени, который имеет непрерывные первую и вторую производные. Такая сплайн-функция обеспечивает совпадения значений в конце текущего и следующего отрезка и непрерывность первой и второй производных в точках соединения.

На рисунке 1 представлена сплайн-функция аппроксимируемых табличных данных ВАХ диода I307G. Структура спектра после переизлучения зондирующего сигнала нелинейным объектом проиллюстрирована на рисунке 2 [8].

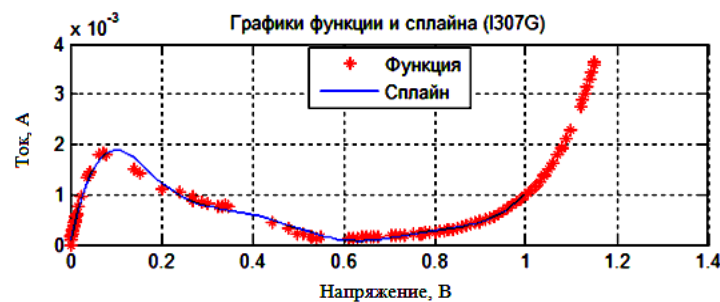


Рис. 1. Вольт-амперная характеристика диода I307G и сплайн-функция аппроксимации

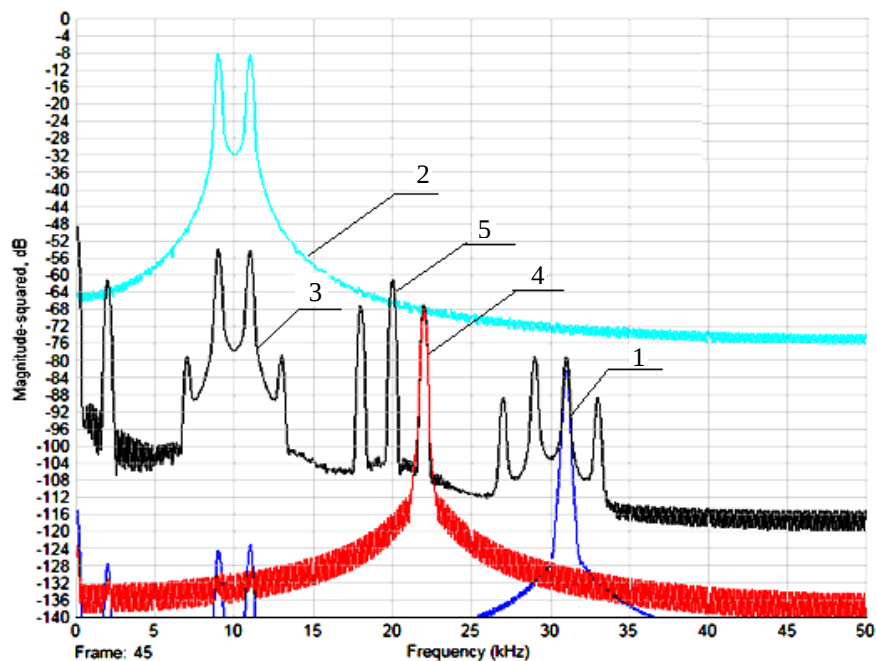


Рис. 2. Структура спектра переизлученного зондирующего сигнала:

1 – отклик на третьей субгармонике; 2 – спектр зондирующего сигнала; 3 – спектр переизлученного зондирующего сигнала; 4 – отклик на второй субгармонике; 5 – восстановленная несущая на второй гармонике

Спектр переизлученного сигнала характеризуется следующими особенностями:

- происходит восстановление подавленной несущей на частоте второй гармоники, причем уровень восстановленного сигнала превосходит боковые гармоники на величину не менее 8 дБ. При этом на боковых гармониках фазовая манипуляция исчезает, спектр сигнала принимает вид, характерный для амплитудной модуляции;

- в диапазоне третьей гармоники не происходит восстановления подавленной несущей. Спектр содержит набор гармоник, отстоящих от утроенной несущей на величины $\Delta\omega$ и $3\Delta\omega$. При этом фазовая манипуляция сохраняется для данных гармоник. Уровень боковой компоненты, отстоящей на величину $\Delta\omega$ от частоты $3\omega_0$, превосходит примерно на 9,5 дБ компоненту, отстоящую на величину $3\Delta\omega$.

Анализируя структуру спектра переизлученного зондирующего сигнала при каждом изменении мощности излучения, можно рассчитать значение каждого коэффициента степенного полинома, аппроксимирующего ВАХ нелинейного элемента. Точность определения вида нелинейности будет зависеть от выбранного дискрета изменения мощности излучения. Важно отметить, что полное восстановление вида нелинейности требует достаточно большого диапазона изменения используемых токов и напряжений. При использовании постоянных или квазигармонических сигналов это способно привести нелинейный элемент к разрушению.

На рисунке 3 представлена зависимость изменения коэффициентов степенного полинома от мощности. По характеру изменения коэффициентов полинома можно судить о виде нелинейности объекта, тем самым добиться вероятности правильной идентификации, близкой к единице.

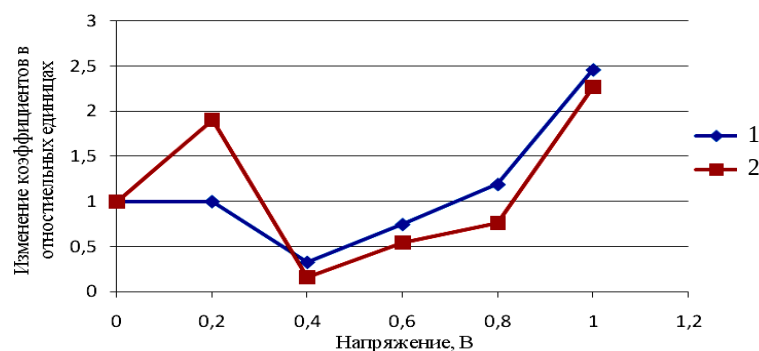


Рис. 3. Изменение коэффициентов степенного полинома, аппроксимирующего ВАХ нелинейного объекта:

- 1 – описывает изменение квадратичного коэффициента;
- 2 – описывает изменение кубического коэффициента

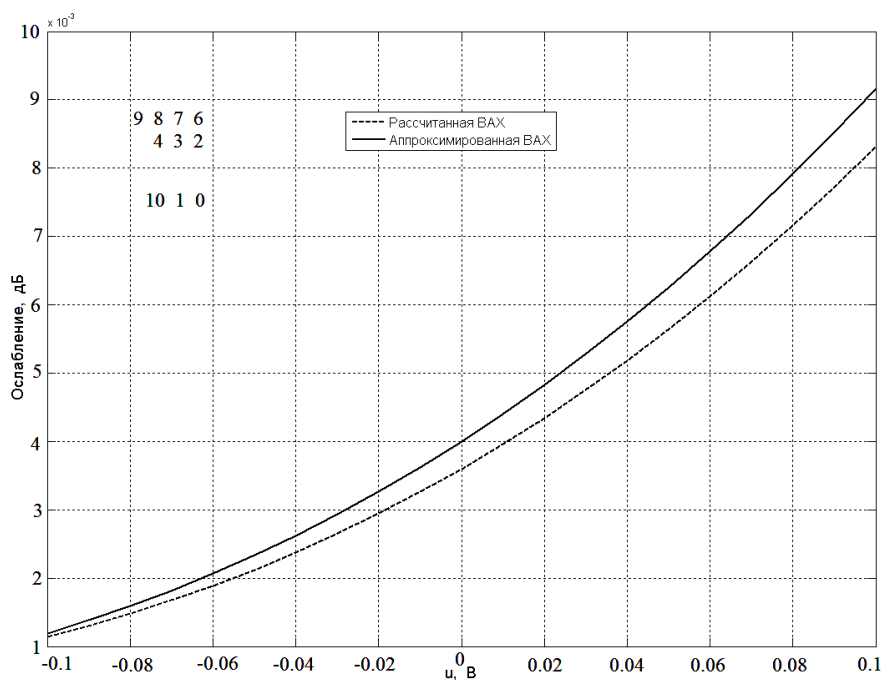


Рис. 4. Рассчитанная и аппроксимированная ВАХ, полученные в результате эксперимента для диода Д220

Из результатов исследования, представленных на рисунке 4, видно, что восстановленная вольт-амперная характеристика диода Д220 имеет форму, в точности повторяющую форму, заданную аппроксимирующим степенным полиномом (сплайн-функцией), но, возможно, с некоторым систематическим смещением. Причина этого смещения состоит в том, что излучаемое поле не содержит в себе постоянной составляющей. Таким образом, при прямом использовании предложенного алгоритма восстановление возможно только с точностью до некоторой константы.

Заключение

Рассмотрены особенности трансформации спектра зондирующего сигнала, позволяющие оптимизировать структуру нелинейного локатора. Установлены самые выгодные с энергетических и информационных позиций частоты для анализа структуры спектра переизлученного зондирующего сигнала.

Повышение достоверности идентификации нелинейных объектов обеспечивается за счет того, что в качестве зондирующего сигнала используют сигнал с подавленной несущей частотой (DSB), с управляемым изменением мощности излучения, регистрацией амплитуд третьей и второй гармоник и амплитуды восстановленной удвоенной несущей частоты на второй гармонике. По виду зависимости осуществляют идентификацию типа нелинейности. Таким образом достигается повышение надежности идентификации нелинейного объекта, тем самым уменьшается количество ложных срабатываний и, как следствие, повышается вероятность распознавания типа объекта с нелинейными электрофизическими свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбачев, А.А. Взаимодействие электромагнитных волн с «нелинейными» объектами / А.А. Горбачев, Е.П. Чигин // *Нелинейный мир*. – 2006. – Т. 4, № 7 – 9. – С. 348 – 354.
2. Семенов, Д.В. Нелинейная радиолокация: концепция «NR» / Д.В. Семенов // *Специальная техника*. – 1998. – № 3 – 4.
3. Штейншлегер, В.Б. Нелинейное рассеяние радиоволн металлическими объектами / В.Б. Штейншлегер // *Успехи физических наук*. – 1984. – Т. 142, вып. 1. – С. 131.
4. Притыко, С.М. Нелинейная радиолокация: принцип действия, область применения, приборы и системы / С.М. Притыко // *Системы безопасности*. – 1995. – № 6. – С. 52.
5. Вернигоров, Н.С. Нелинейный локатор – эффективное средство обеспечения безопасности в области утечки информации / Н.С. Вернигоров // *Защита информации. Конфидент*. – 1996. – № 1. – С. 67.
6. Способ обнаружения нелинейного объекта с распознаванием типа нелинейности: пат. № 2205419 Россия, G 08 B 13/28 / С.Н. Панычев, Н.Т. Хакимов; заявл. 20.04.2001; опубл. 27.05.2003 // *Бюл.* № 15.
7. Чертков, В.М. Использование фазоманипулированного сигнала в задачах нелинейной радиолокации / С.В. Мальцев, В.М. Чертков // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Фундаментальные науки*. – 2010. – № 3. – С. 129 – 134.
8. Калиткин, Н.Н. Среднеквадратичная аппроксимация сплайнами / Н.Н. Калиткин, Л.В. Кузьмина // *Математическое моделирование*. – Т. 9, № 9. – 1997. – С. 106 – 116.

Поступила 28.02.2012

DETERMINATION OF OBJECT'S ELECTROPHYSICAL PROPERTIES BY METHODS OF NON-LINEAR RADIOLOCATION

V. CHERTKOV, S. MALTSEV

The transformation's features of the spectrum of the signal are considered in the paper. The most favorable frequencies for analyzing the spectrum's structure of re-emitted signal of the probe are established. A comparative analysis of technologies for identification of nonlinear objects was made. A new method, which increases the probability of correct identifying the type of nonlinearity of the object according to their electrophysical properties, is shown. A spline-function is represented by approximated tabular data of the current-voltage characteristics of the diode I307G. The results for the recovery of the current-voltage characteristics of the diode Д220 are presented.

УДК 621.315.5; 621.318.1

**ЭКРАНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
НА ОСНОВЕ ПОРОШКООБРАЗНОГО ШУНГИТА****д-р техн. наук, проф. Л.М. ЛЫНЬКОВ, М.Ш. МАХМУД****(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск);****канд. техн. наук Е.А. КРИШТОПОВА****(Минский государственный высший радиотехнический колледж)**

Представлены результаты исследования характеристик ослабления и отражения электромагнитного излучения экранами на основе порошкообразного минерала шунгита, содержащего графитоподобный глобулярный углерод, в диапазоне частот 8...12 ГГц. Изучено влияние концентрации порошкообразного шунгита и геометрических неровностей поверхности экрана на коэффициент отражения. Определена оптимальная с точки зрения минимума коэффициента отражения величина концентрации порошкообразного шунгита в многослойном экране. Показано, что геометрические неровности конструкции позволяют снизить величину коэффициента отражения экранов электромагнитного излучения с –6...–14 до –6...–18 дБ.

Введение. В современном мире проблема контроля электромагнитной обстановки для обеспечения нормального функционирования радиоэлектронных устройств, защиты информации и экологической безопасности является весьма актуальной. Одно из решений данной проблемы – экранирование электромагнитных излучений с помощью специальных материалов и конструкций [1; 2].

Наиболее эффективными с точки зрения подавления электромагнитных излучений являются металлические экраны. Однако их использование ограничивается тем, что они «работают на отражение» и поэтому создают помехи работающему в помещении радиоэлектронному оборудованию и неблагоприятную для здоровья персонала электромагнитную среду [2; 3]. Поэтому для изготовления экранов электромагнитного излучения используют неметаллические компоненты и композиционные материалы, реализующие различные механизмы потерь: диэлектрические и магнитные потери, дисперсию, дифракцию, интерференцию и внутренние переотражения электромагнитных волн, вызывающие дополнительно ослабление энергии электромагнитной волны вследствие рэлеевского рассеяния, сложения волн в противофазе и др. [2; 4 – 6].

Для обеспечения широкого диапазона рабочих частот экранов электромагнитных излучений применяются многослойные конструкции [2 – 4; 7], а также конструкции с геометрическими неоднородностями поверхности [2 – 4; 7; 10]. Основными недостатками большинства существующих конструкций экранов электромагнитного излучения являются значительная масса и габариты, что может быть преодолено благодаря использованию порошкообразных наполнителей при сохранении технологичности их изготовления и эффективности экранирования.

В качестве порошкообразных наполнителей экранов электромагнитного излучения широкое применение нашли материалы, обладающие магнитными свойствами и имеющие высокую электропроводность, диэлектрики с высокими значениями магнитной проницаемости и полупроводники. Наиболее распространёнными являются металлические и ферритовые порошки, технический углерод и фуллерены. Инкорпорирование указанных материалов в виде порошков в связующие диэлектрические вещества позволяет создавать композиционные экраны электромагнитного излучения с требуемым значением ослабления энергии электромагнитного излучения в рабочем диапазоне частот и температур [3; 8 – 10].

Перспективным порошкообразным наполнителем для создания экранов электромагнитного излучения представляется углеродсодержащий минерал шунгит [3; 10; 11]. Порошкообразный шунгит используется в качестве модифицирующей технологически активной добавки при производстве композиционных материалов и способствуют улучшению технических и эксплуатационных характеристик изделий на их основе [3; 11].

Целью настоящего исследования явилось получение эффективных экранов электромагнитного излучения для защиты информации от несанкционированного перехвата, обеспечения условий безопасного труда персонала с радиоэлектронным оборудованием и электромагнитной совместимости путем управления концентрацией наполнителя и формирования геометрических неровностей поверхности экрана.

1. Методика, оборудование и аппаратура исследования, характеристика исходного материала

Шунгит – природный материал с равномерным распределением высокодисперсных кристаллических силикатных частиц размером в среднем около 1 мкм в аморфной графитоподобной углеродной матрице с элементами глобулярной структуры. Между углеродом и силикатами в материале имеется исключительно развитый (около 20 м²/г) и плотный контакт [12]. Остальные составляющие шунгита – оксиды

металлов железо- и алюмосиликаты и т.д. [13] – также могут содержать микровключения сульфидов металлов Fe_2S , NiS , Ni_2FeS_4 и др. Предполагается присутствие вкраплений типа углерод – карбид металла – металл [14].

По мнению исследователей [12], в большинстве случаев элементарным фрагментом структуры шунгитового углерода является глобула с размерами $\sim 100 \text{ \AA}$. Элементы структуры могут быть окружены случайной сеткой атомов углерода и атомами примесей, они могут быть ориентированы как случайным образом, так и собираться в пачки, волокна, пакеты, слои, т.е. упорядочены настолько, что может проявляться анизотропия физических свойств. Предполагается, что углерод присутствует в цепочечном виде и характеризуется устойчивыми связями типа $-\text{C}\equiv\text{C}-$ и $=\text{C}=\text{C}=$ [13]. В углеродных глобулах распределены вода, микроэлементы, дифильная битумоидная органика, фуллерены в форме C_{60} и C_{70} и нанотрубки (рис. 1) [12].

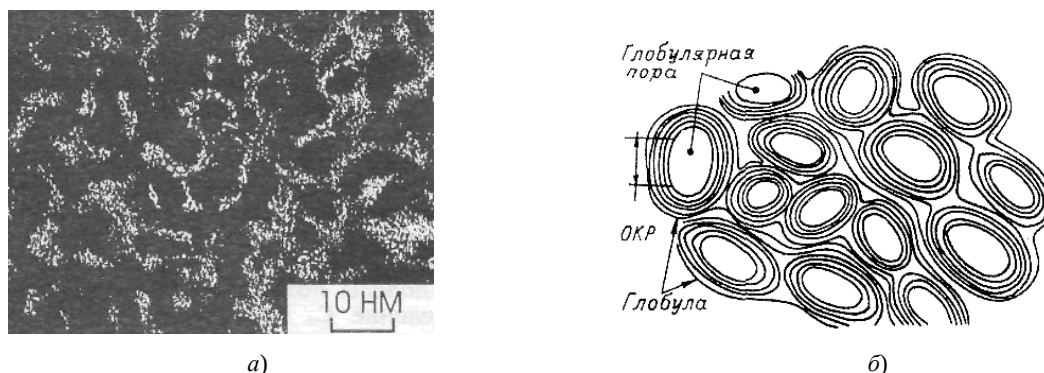


Рис. 1. Электронно-микроскопический снимок шунгитового углерода на просвет (а) и соответствующая ему модель глобулярного строения (б) [15]

В таблице приведен химический состав шунгита, предоставленного НПК «Карбон-Шунгит» для данной работы.

Химический состав шунгита [16]

SiO_2	TiO_2	Al_2O_3	FeO	MgO	CaO	Na_2O	K_2O	S	C	$\text{H}_2\text{O}_{\text{крст.}}$ (в хлорите и слюдах)
57,0	0,2	4,0	2,5	1,2	0,3	0,2	1,5	1,2	29,0	4,2

Шунгит является проводником, и при комнатной температуре его удельное сопротивление составляет $3,29 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}\cdot\text{см}$ [17].

Для эксперимента были изготовлены образцы многослойных экранов электромагнитного излучения двух конструкций – плоский и с геометрическими неровностями поверхности в виде пирамид. Также изготовили несколько образцов экранов электромагнитного излучения с плоской поверхностью с различными концентрациями порошкообразного шунгита с целью изучения их влияний на характеристики ослабления и отражения электромагнитного излучения. Все они были сформированы по принципу четвертьволнового экрана электромагнитных излучений со следующим чередованием слоев: первый слой толщиной 1 мм – порошкообразный шунгит, закрепленный в акриловом связующем; второй слой – целлюлозное полотно толщиной 2 мм; третий слой – металлический отражатель (алюминиевая фольга толщиной 9 мкм).

Четвертьволновой экран электромагнитного излучения может работать как идеальный поглотитель в случае нормального падения электромагнитной волны, если волновое сопротивление резистивного слоя равно сопротивлению свободного пространства ($377 \text{ Ом}/\text{м}^2$), а толщина диэлектрического слоя равна нечетному количеству четвертей длины волны [7]:

$$d = \frac{\lambda}{4} + \frac{n\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где d – толщина диэлектрического слоя, м; λ – длина волны электромагнитного излучения, м.

Для изучения влияния геометрии поверхности экрана на его характеристики ослабления и отражения был изготовлен образец экрана с геометрическими неровностями поверхности, который представлял собой модуль из 25 элементов пирамидальной формы (5×5), форма сечения которых приведе-

на на рисунке 2. В качестве подложки выбрана промышленно выполненная целлюлозная форма. Каждый отдельный элемент может быть описан размерами основания (квадрат со стороной $G_L = 30$ мм), высотой $P_H = 36$ мм и размерами усечения вершины (в основании – квадрат со стороной $T_L = 8$ мм). Размеры геометрических неровностей основания экрана соизмеримы с длинами волн в исследуемом диапазоне частот 8...12 ГГц. Образец экрана представлял собой целлюлозное основание с нанесенным на него слоем порошкообразного шунгита в акриловом связующем толщиной 1,5 мм.

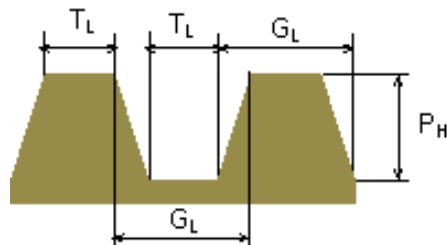


Рис. 2. Форма сечения основания поверхности экрана с геометрическими неровностями поверхности

Оценка эффективности экранирования уровня электромагнитных излучений исследуемых образцов проводилась в лабораторных условиях с помощью измерительного комплекса SNA 0,01-18 в диапазоне частот 8...12 ГГц, выбранном с учетом дальнейшего применения экранов электромагнитного излучения. При проведении измерений исследуемый образец экрана закреплялся между фланцев волноводов измерительного тракта, как показано на рисунке 3.

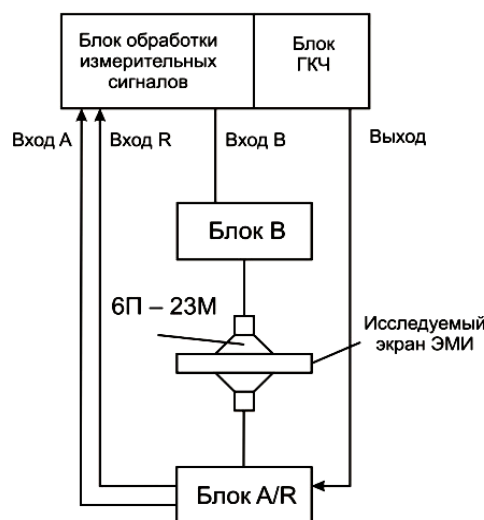


Рис. 3. Схема измерения модулей коэффициентов передачи S_{21} и отражения S_{11} образцов экранов электромагнитного излучения

Измерения проводились как отдельно образца экрана, так и образца с металлическим отражателем. В ходе измерений были получены частотные зависимости коэффициентов передачи S_{21} (по модулю равны значению ослабления электромагнитного излучения) и отражения S_{11} .

2. Результаты и обсуждение

Для реализации низкого значения коэффициента отражения экрана необходимо, чтобы первый слой конструкции имел относительно высокую электропроводность, но ниже, чем у металлов, что достигается подбором соотношения связующего и порошкообразного шунгита. Отражение энергии электромагнитной волны происходит вследствие следующих факторов: диэлектрических потерь в первом слое, многократных переотражений электромагнитной волны между двумя электропроводными слоями и интерференционной компенсации электромагнитных волн, отраженных от различных слоев (рис. 4).

Установлено, что все экраны с плоской поверхностью подавляют энергию электромагнитного излучения в диапазоне частот 8...12 ГГц на величину не менее 35...40 дБ. Без металлического отражателя значение ослабления электромагнитных излучений составляет не более 8 дБ.

Для образцов экранов была исследована возможность управления значением коэффициента отражения S_{11} путем изменения концентрации порошкообразного шунгита в объеме конструкции. Экспериментально полученные частотные зависимости коэффициентов отражения равномерны в диапазоне частот 8...12 ГГц, поэтому оценить влияние концентрации можно по значениям коэффициента отражения середины диапазона, равным 10 ГГц, что проиллюстрировано рисунком 5.

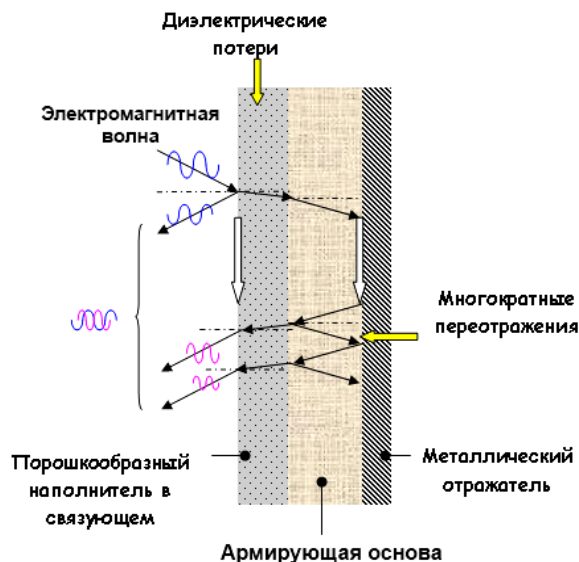


Рис. 4. Схема затухания электромагнитной волны в объеме многослойного экрана электромагнитных излучений

Установлено, что лучший результат коэффициента отражения S_{11} получен для концентрации порошкообразного шунгита 20 ± 5 объем. % и составляет -14 ± 1 дБ. Во всем исследуемом частотном диапазоне коэффициент отражения S_{11} изменяется от -8 до -14 дБ.

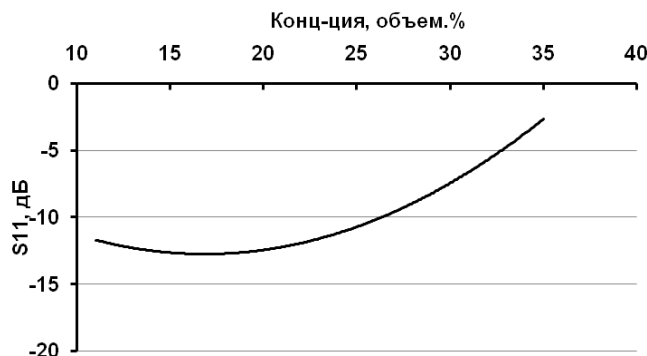


Рис. 5. Зависимость коэффициента отражения S_{11} от изменения концентрации порошкообразного шунгита в конструкции экрана электромагнитного излучения

Для изучения влияния геометрии неровностей поверхности на характеристики ослабления и отражения электромагнитного излучения экранами был исследован образец с геометрическими неровностями поверхности. Экспериментально полученные частотные характеристики отражения такого экрана приведены на рисунке 6.

Установлено, что при практически одинаковом с предыдущими образцами значении ослабления электромагнитного излучения величина коэффициента отражения экрана зависит от частоты электромагнитного излучения, имеет резонансный характер, обусловленный размерами геометрических неровностей поверхности, и увеличивается при установке за экраном металлического отражателя с $-8...-16$ до $-6...-18$ дБ. Причем, если в соответствии с формулой резонансов для четвертьволнового экрана (1) резонансы должны наблюдаться на частотах 8,3 ГГц (максимум поглощения) и 11,1 ГГц (максимум

отражения), то вследствие пирамидальной поверхности резонансов становится больше, они появляются реже с ростом частоты.

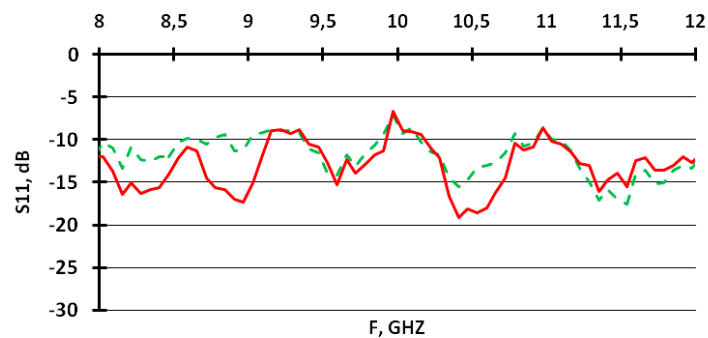


Рис. 6. Частотная зависимость коэффициента отражения S_{11} в диапазоне частот 8...12 ГГц:
пунктирная линия – экран электромагнитного излучения без металлического отражателя,
сплошная линия – экран электромагнитного излучения с установленным за ним металлическим отражателем

Закключение

Установлено, что при использовании металлического отражателя все образцы экранов подавляют электромагнитное излучение на величину не менее 35 дБ. Оптимальная с точки зрения минимума коэффициента отражения величина концентрации порошкообразного шунгита в многослойном экране электромагнитного излучения составляет 20 объем. %. Порошкообразный шунгит вследствие своего сложного химического состава и структуры одновременно обладает электропроводностью и обеспечивает диэлектрические потери, что делает перспективным его использование в качестве наполнителя экранов электромагнитного излучения.

Показано, что введение в конструкцию экрана электромагнитного излучения геометрических неровностей поверхности позволяет снизить величину коэффициента отражения с $-6...-14$ до $-6...-18$ дБ. Управляя концентрацией порошкообразного шунгита в акриловом связующем, используя многослойные конструкции экранов электромагнитного излучения, и создавая конструкцию с геометрическими неровностями поверхности, соизмеримыми с длиной волны падающего электромагнитного излучения, возможно получение эффективных экранов электромагнитных излучений для различных применений (защита информации от утечки по электромагнитному каналу, обеспечение электромагнитной совместимости, создание безопасных условий труда персонала, работающего с радиоэлектронным оборудованием и т.д.).

Представленные материалы – результат исследований по выполняемому совместному белорусско-монгольскому проекту фонда фундаментальных исследований БРФФИ № Ф10Мн-001 «Физико-химический, мультифрактальный и микроструктурный анализ углеродных материалов для их рационального использования в промышленности».

ЛИТЕРАТУРА

1. Шапиро, Д.Н. Основы теории электромагнитного экранирования / Д.Н. Шапиро. – Л.: Энергия, 1975. – 112 с.
2. Электромагнитные излучения. Методы и средства защиты / В.А. Богуш [и др.]; под ред. Л.М. Лынькова. – Минск: Бестпринт, 2003. – 406 с.
3. Углеродсодержащие минералы и области их применения / Т.В. Борботько [и др.]. – Минск: Бестпринт, 2009. – 156 с.
4. Шнейдерман, Я.А. Новые радиопоглощающие материалы / Я.А. Шнейдерман // Зарубежная радиоэлектроника. – 1969. – № 6. – С. 101 – 124.
5. Knott, E.F. Radar Cross Section / E.F. Knott, J.F. Shaeffer, M.T. Tuley. – Norwood, MA., USA: Artech House, Inc., 1993. – 611 p.
6. Маковецкий, П.В. Отражение радиолокационных сигналов. Лекции / П.В. Маковецкий, В.Г. Васильев. – Л.: ЛИАП, 1975. – 50 с.
7. Säily, J. Studies on specular and non-specular reflectivities of radar absorbing materials (RAM) at submillimetre wavelengths / J. Säily, A.V. Räisänen. – Espoo, Finland: Helsinki University of Technology Radio Laboratory Publications, 2003. – 56 p.

8. Iha, V. Composite based on waste-ferrites as microwave absorbers / V. Iha, A. Banthia // Indian J. Phys. – 1989. – Vol. 63, № 5. – P. 514 – 525.
9. Chung, D.D.L. Materials for Electromagnetic Interference Shielding / D.D.L. Chung // Journal of Materials Engineering and Performance. – 2000. – № 9(3). – P. 350 – 354.
10. Лыньков, Л.М. Микроволновые и оптические свойства многофункциональных экранов электромагнитного излучения на основе порошкообразного шунгита / Л.М. Лыньков, Т.В. Борботько, Е.А. Криштопова // Современные методы и технологии создания и обработки материалов: материалы 4-й междунар. науч.-техн. конф., Минск, 19 – 21 окт. 2009 г. – Минск, 2009. – С. 23 – 25.
11. Радиопоглощающие свойства гибких экранов электромагнитного излучения на основе порошкообразного шунгита / Л.М. Лыньков [и др.] // Сб. науч. ст. Военной акад. Респ. Беларусь. – 2008. – № 15. – С. 57 – 61.
12. Соловьева, А.Б. Органическое вещество шунгитовых пород / А.Б. Соловьева, Н.Н. Глаголев, Н.А. Зайченко // Углеродсодержащие формации в геологической истории: тез. докл. междунар. симпоз., Петрозаводск, 2 – 7 июня 1998 г. – Петрозаводск: Карельский науч. центр Рос. акад. наук; Ин-т геологии, 2000. – С. 131 – 133.
13. Березкин, В.И. Исследование структуры природного стеклоуглерода шунгитов методом рамановской спектроскопии / В.И. Березкин, Ю.В. Холодкевич, В.Ю. Давыдов // Углеродсодержащие формации в геологической истории: тез. докл. междунар. симпоз., Петрозаводск, 2 – 7 июня 1998 г. – Петрозаводск: Карельский науч. центр Рос. акад. наук; Ин-т геологии, 2000. – С. 111.
14. Зайденберг, А.З. Микроэлементный состав шунгитов первой разновидности / А.З. Зайденберг // Сб. тез. докл. 7-й конф. по ХТТ России и стран СНГ, 1996 г. – М., 1996. – С. 66 – 67.
15. Волков, И.А. Версия о фуллереновой природе пористости глобулярных шунгитов Карелии / И.А. Волков, И.А. Кушмар // Углеродсодержащие формации в геологической истории: тез. докл. междунар. симпоз., Петрозаводск, 2 – 7 июня 1998 г. – Петрозаводск: Карельский науч. центр Рос. акад. наук; Ин-т геологии, 2000. – С. 121 – 124.
16. Характеристики и свойства шунгита / Карбон-шунгит [Электронный ресурс]. – 2011. – Режим доступа: <http://www.shungit.ru/shungit/harakteristiki.html>.
17. Березкин, В.И. Эффект Холла в природном стеклоуглероде шунгитов / В.И. Березкин, П.П. Константинов, С.В. Холодкевич // Физика твердого тела. – 1997. – Т. 39, № 10. – С. 1783 – 1786.

Поступила 27.02.2012

ELECTROMAGNETIC RADIATION POWDER MINERALS BASED SHIELDS

L. LYNKOV, M. MAHMUD, E. KRYSHTOPOVA

The results of the studies of the characteristics of attenuation and reflection of electromagnetic radiation shields performed from powder mineral shungite containing globular graphite carbon, in the range of 8...12 GHz are given. The effect of the concentration of shungite and geometric irregularities of the shield's surface on the values of the reflection coefficient are investigated. It is shown that with using a metal reflector, all the samples attenuate electromagnetic radiation by the amount not less than 35 dB. The optimum in terms of minimum reflectance value of the concentration of shungite in a multi-layer shield is found. It is shown that using geometrical irregularities of the shield's surface can reduce the reflection coefficient from –6...–14 to –6...–18 dB.

УДК 538.3

СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАВИСИМОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ДВОЙНИКОВ ОТ ВЕЛИЧИНЫ ВНЕШНЕЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ

канд. физ.-мат. наук, доц. О.М. ОСТРИКОВ

(Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого)

Разработан способ определения взаимосвязи между величиной сосредоточенной нагрузки и длиной клиновидного двойника при различных значениях его ширины. Установлено, что при малых нагрузках рост длины двойников происходит более медленно, чем при более высоких нагрузках. При более высоких нагрузках (более 25 МПа) зависимость длины двойника от внешнего деформирования приобретает линейный характер. Результаты получены с использованием дислокационной модели двойника, рассматриваемого на таком масштабном уровне, когда распределение двойникоующих дислокаций на границах считается дискретным. На этом масштабном уровне энергия клиновидного двойника является суперпозицией упругой (или собственной) энергии, энергии взаимодействия двойникоующих дислокаций и энергии дефекта упаковки. При этом не рассматривается поверхностная энергия границы двойника, так как на данном масштабном уровне понятие непрерывной границы раздела теряет смысл.

В настоящее время накоплен обширный экспериментальный материал по исследованию механического двойникования кристаллов методом локализованного дозированного деформирования поверхности [1] – [5]. Экспериментально были установлены основные закономерности развития клиновидных двойников в монокристаллах в зависимости от интенсивности внешнего деформирующего воздействия. Эти результаты требуют теоретического физического обоснования на основе современных представлений о двойниковании кристаллов.

Целью данной работы стал вывод математического соотношения, связывающего геометрические параметры двойников с величиной внешней сосредоточенной нагрузки для получения возможности ведения сравнительного анализа полученных экспериментальных и теоретических результатов.

В работе [6] был предложен способ расчета энергии клиновидного двойника, находящегося у поверхности кристалла. Согласно предложенному способу, энергия клиновидного двойника, приходящаяся на суммарную длину всех двойникоующих дислокаций, определяется из соотношения:

$$\frac{W}{\sum L_o} = \frac{W_y}{\sum L_o} + \frac{W_{\text{вз}}}{\sum L_o} + \frac{\gamma}{\sum L_o}, \quad (1)$$

где $\frac{W_y}{\sum L_o}$ – упругая энергия двойникоующих дислокаций, приходящаяся на суммарную длину всех двойникоующих дислокаций; $\frac{W_{\text{вз}}}{\sum L_o}$ – энергия взаимодействия между двойникоующими дислокациями; $\frac{\gamma}{\sum L_o}$ – энергия дефектов упаковки, так как двойникоующие дислокации являются частичными дислокациями Шокли.

Вектор Бюргерса ($\vec{b}$) частичных дислокаций Шокли можно разложить на две составляющие: винтовую ($\vec{b}_v$) и краевую ($\vec{b}_{kp}$). Тогда упругая энергия двойникоующих дислокаций, приходящаяся на суммарную длину всех двойникоующих дислокаций, согласно проведенным в [6] расчетам определяется по формуле:

$$\frac{W_y}{\sum L_o} = \frac{\mu}{2\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \left(b_e^2 \ln \frac{L-id}{b_e} + \frac{b_{kp}^2}{1-\nu} \ln \frac{L-id}{b_{kp}} \right) + \frac{\mu}{4\pi} \left(b_e^2 \ln \frac{\alpha L}{b_e} + \frac{b_{kp}^2}{1-\nu} \ln \frac{\alpha L}{b_{kp}} \right). \quad (2)$$

Здесь L – длина двойника; d – проекция на ось OX отрезка R , соединяющего две соседние дислокации; μ – модуль сдвига; i – индекс суммирования; N – число двойникоующих дислокаций на двойниковой границе.

Для перехода в (2) к макроскопическим параметрам в [6] использовалось соотношение:

$$d = \frac{L}{N-1}. \quad (3)$$

Энергия взаимодействия двойникующих дислокаций в [6] определялась по формуле:

$$\begin{aligned} \frac{W_{вз}}{\sum L_0} = & - \left[\frac{\mu}{\pi} \frac{b_{kp}^2}{1-\nu} \sum_{i=1}^N N-i \ln \frac{i \sqrt{L^2 + \frac{H^2}{4}}}{b_{kp} N-1} + b_{\epsilon}^2 \sum_{i=1}^N N-i \ln \frac{i \sqrt{L^2 + \frac{H^2}{4}}}{b_{\epsilon} N-1} \right] + \\ & + \frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{b_{kp}^2}{1-\nu} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \ln \frac{jH + \sqrt{iL^2 + \left(\frac{2j+i}{2}H\right)^2}}{b_{kp} N-1} + b_{\epsilon}^2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \ln \frac{jH + \sqrt{iL^2 + \left(\frac{2j+i}{2}H\right)^2}}{b_{\epsilon} N-1} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где H – ширина двойника у устья.

Доля энергии клиновидного двойника, связанная с наличием у двойникующих дислокаций дефекта упаковки, находится по формуле [6]:

$$\frac{\gamma}{\sum L_0} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{b_{kp}^2 + b_{\epsilon}^2}{1-\nu} \frac{N \sqrt{d^2 + h^2}}{d_0} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{b_{kp}^2 + b_{\epsilon}^2}{1-\nu} \frac{N}{d_0} \frac{1}{N-1} \sqrt{L^2 + \frac{H^2}{4}}, \quad (5)$$

где d_0 – равновесная ширина расщепленной дислокации.

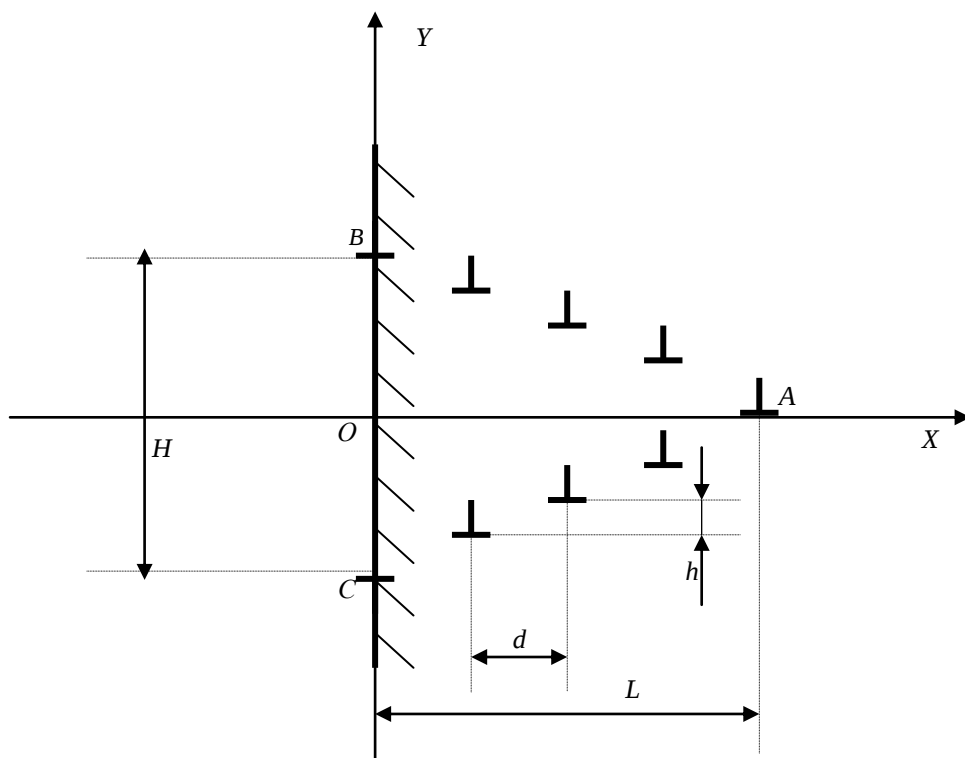


Рис. 1. Схематическое изображение взаимного расположения двойникующих дислокаций в расчетной мезоскопической модели клиновидного двойника

Если в точке O на рисунке 1 вдоль оси OX действует сосредоточенная сила, то ее энергию можно рассчитать по формуле [7]:

$$U = \int U_0 dV, \quad (6)$$

где V – объем, а

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2) - \frac{\mu}{E} \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \frac{1}{G} \sigma_{xy}^2. \quad (7)$$

В данном соотношении компоненты тензора напряжений могут быть определены из выражений [8];

$$\sigma_{xx} = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{y^2}{x^2 + y^2} \frac{Px + Qy}{x^2 + y^2} \right); \quad \sigma_{yy} = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{Px + Qy}{x^2 + y^2} \right); \quad \sigma_{xy} = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \frac{Px + Qy}{x^2 + y^2} \right). \quad (8)$$

Если принять длину двойникующих дислокаций равной длине двойника L , то можно записать

$$\sum L_d = 2NL. \quad (9)$$

Тогда, если принять, что вся энергия деформирования идет на формирование двойника, справедливым становится равенство:

$$\frac{W}{\sum L_d} = \frac{W}{2NL} = \frac{U}{2NL}, \quad (10)$$

где

$$\frac{U}{2NL} = \frac{1}{2N} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty U_0(x, y) dx dy. \quad (11)$$

Тогда нетрудно показать, что при $Q = 0$

$$P = \sqrt{\frac{\pi^2 H}{4aJ_p} \left(-\frac{W}{\sum L_d}(L, H) \right)}, \quad (12)$$

где

$$J_p = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{1}{2E} \frac{x^2(x^4 + y^4)}{(x^2 + y^2)^4} + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\nu}{E} \right) \frac{x^4 y^2}{(x^2 + y^2)^4} \right] dx dy. \quad (13)$$

Аналогично при $P = 0$

$$Q = \sqrt{\frac{\pi^2 H}{4aJ_Q} \left(-\frac{W}{\sum L_d}(L, H) \right)}, \quad (14)$$

где

$$J_Q = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{1}{2E} \frac{y^2(x^4 + y^4)}{(x^2 + y^2)^4} + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\nu}{E} \right) \frac{x^2 y^4}{(x^2 + y^2)^4} \right] dx dy. \quad (15)$$

Результаты расчетов представлены на рисунке 2. Расчеты велись для двойника в кристалле железа. Принималось: $H = 5$ мкм; $N = 10^4$; $d_0 = 3$ нм; $E = 170$ ГПа; $\mu = 81$ ГПа; $\nu = 0,29$; $\alpha = 4$; $a = 0,25$ нм; $b_{кр} = b_e = 0,124$ нм. Было установлено, что $P = Q$ при различных значениях L и H .

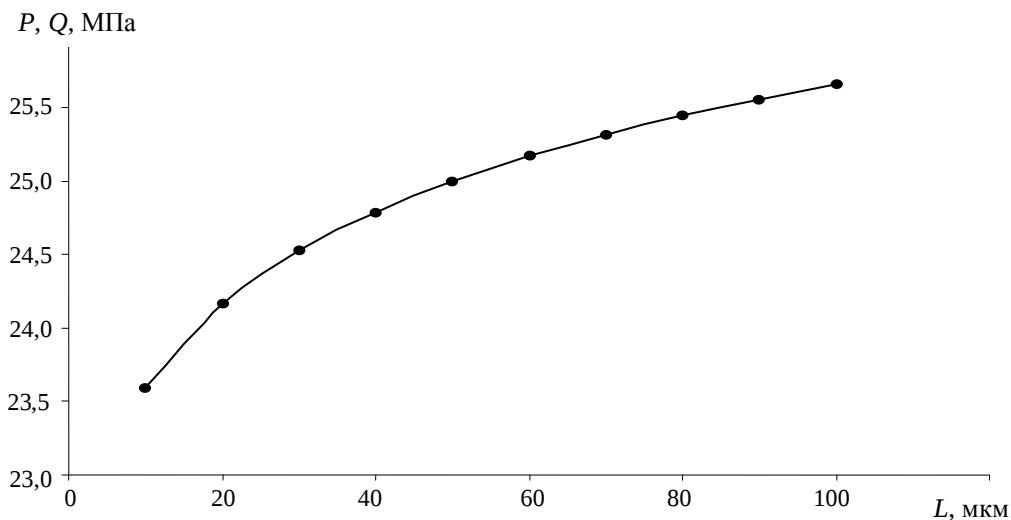


Рис. 2. Связь величины сосредоточенной нагрузки с длиной клиновидного двойника, полученная на основании расчета энергетического баланса

Из рисунка 2 видно, что с ростом величины сосредоточенной нагрузки длина двойника растет, что находится в хорошем согласии с известными экспериментальными данными [9 – 12]. При малых нагрузках рост длины двойников происходит более медленно, чем при более высоких нагрузках. Вероятно, это связано с большими энергетическими затратами на двойникование на начальных его стадиях из-за высокой роли на этом этапе энергии дефекта упаковки. При более высоких нагрузках (более 25 МПа) зависимость длины двойника от внешнего деформирования приобретает линейный характер. Это и наблюдается на эксперименте в исследуемом интервале нагрузок в рамках погрешности измерений [11].

Заключение. На основании энергетических расчетов получена связь между величиной сосредоточенной нагрузки и длиной клиновидного двойника при различных значениях его ширины. Установлено, что с ростом величины сосредоточенной нагрузки длина двойника увеличивается по приблизительно линейному закону, что хорошо согласуется с известными экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Классен-Неклюдова, М.В. Механическое двойникование кристаллов / М.В. Классен-Неклюдова. – М.: АН СССР, 1960. – 262 с.
2. Остриков, О.М. Закономерности развития клиновидных двойников в монокристаллах висмута, подвергнутых полисинтетическому двойникованию / О.М. Остриков // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 3. – С. 208 – 216.
3. Остриков, О.М. Форма клиновидных двойников в локально деформируемых ионноимплантированных монокристаллах висмута / О.М. Остриков // Изв. высш. учеб. заведений. Черная металлургия. – 2006. – № 9. – С. 5 – 7.
4. Остриков, О.М. Влияние импульсного электрического тока большой плотности на особенности двойникования монокристаллов висмута / О.М. Остриков // Физика и химия обработки материалов. – 2003. – № 1. – С. 12 – 15.
5. Остриков, О.М. Влияние импульсов электрического тока на работу источников двойнивающих дислокаций в монокристаллах висмута / О.М. Остриков // Инженерно-физический журнал. – 1999. – Т. 72, № 3. – С. 592 – 594.
6. Остриков, О.М. Расчет энергии нанодвойника клиновидной формы в рамках дислокационной мезоскопической модели / О.М. Остриков // Журнал технической физики. – 2008. – Т. 78, № 2. – С. 58 – 62.
7. Хирт, Дж. Теория дислокаций / Дж. Хирт, И. Лоте. – М.: Атомиздат, 1972. – 600 с.
8. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
9. Остриков, О.М. Кинетика образования клиновидных двойников в кристаллах висмута, облученных нерастворимыми в матрице мишени ионами / О.М. Остриков // Физика металлов и металловедение. – 1999. – Т. 87, № 5. – С. 78 – 82.
10. Остриков, О.М. Экспресс-методика определения вклада двойникования и скольжения в пластическую деформацию монокристаллов при индентировании / О.М. Остриков // Физика металлов и металловедение. – 2000. – Т. 89, № 5. – С. 106 – 109.
11. Остриков, О.М. Физические закономерности двойникования при воздействии внешних ортогональных друг другу электрических и магнитных полей, прикладываемых к монокристаллам висмута, облученных ионами бора / О.М. Остриков // Журнал технической физики. – 2000. – Т. 70, № 12. – С. 39 – 42.
12. Косевич, В.М. Исследование двойникования металлических кристаллов с помощью сосредоточенной нагрузки / В.М. Косевич, В.И. Башмаков // Физика металлов и металловедение. – 1960. – Т. 9, № 2. – С. 288 – 293.

Поступила 31.10.2011

WAY OF DEFINITION OF DEPENDENCE OF GEOMETRICAL PARAMETRES OF TWINS FROM SIZE OF THE EXTERNAL CONCENTRATED LOADING

O. OSTRIKOV

The way of definition of interrelation between size of the concentrated loading and length wedge kind the twin is developed at various values of its width. It is established that at small loadings growth of length of twins occurs more slowly, than at higher loadings. At higher loadings (more than 25 МПа) dependence of length of the twin on external deformation gets linear character. Results are received with use dislocation model of the twin considered at such scale level when distribution twin dislocations on borders is considered discrete. At this scale level energy wedge kind the twin is superposition elastic (or own) energy, energy of interaction twin dislocations and energy of defect of packing. Thus superficial energy of border of the twin as at the given scale level the concept of continuous border of section loses meaning is not considered.

УДК 530:536.75+621.762

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ОТЖИГА В УСЛОВИЯХ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ НА СТРУКТУРНЫЕ И ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ШУНГИТОВОГО УГЛЕРОДА

д-р техн. наук, проф. М.Л. ХЕЙФЕЦ, д-р техн. наук, проф. В.К. ЖЕЛЕЗНЯК, С.В. КУХТА
(Полоцкий государственный университет);
канд. техн. наук В.Т. СЕНИУТЬ
(Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси, Минск);
канд. пед. наук, доц. С.Н. АНКУДА
(Минский государственный высший радиотехнический колледж);
д-р техн. наук, проф. А.Г. КОЛМАКОВ
(Институт металлургии и материаловедения им. А.А. Байкова РАН, Москва);
д-р физ.-мат. наук, проф. Х. ЦООХУУ, д-р физ.-мат. наук, проф. Л. ЭНХТУР
(Монгольский национальный университет, Улан-Батор)

Представлены результаты исследований влияния отжига в условиях высоких температур и давлений на структуру и фазовый состав шунгитового углерода. Показано, что при высокотемпературном отжиге в восстановительной и окислительной атмосфере и последующей термобарической обработке при высоких давлениях наблюдается трансформация исходных глобул шунгитового углерода в кристаллиты полиэдрической формы. Получено увеличение размеров нанокристаллитов шунгитового углерода при частичном разрушении шунгитовых глобул с их графитизацией.

Введение. Традиционные методы улучшения термомеханических и электрофизических свойств конструкционных и функциональных материалов в значительной мере достигли своего предела. Резерв повышения характеристик качества материалов состоит в целенаправленном формировании в них структуры, например путем введения в матрицу наноразмерных модифицирующих добавок. Широкое применение для этих целей получили углеродные наноматериалы (фуллерены, углеродные нанотрубки, ультрадисперсные алмазы детонационного синтеза) [1; 2].

Шунгитовый углерод, структуру которого составляют глобулярные или эллипсоидные многослойные частицы размерами 6...10 нм, имеющие внутреннюю полость, также может быть отнесен к данному классу углеродных наноматериалов с ресурсом порядка $25 \cdot 10^{10}$ тонн [3]. Шунгитовые порошки используются в качестве модифицирующей технологически активной добавки при производстве композиционных материалов и способствуют улучшению технических и эксплуатационных характеристик изделий на их основе [4]. Свойства наноматериалов в значительной степени зависят от их микро- и наноструктуры, поэтому значительный научный и практический интерес представляет изучение изменений, происходящих на различных структурных уровнях в шунгитовом углероде в результате его обработки в условиях высоких статических давлений и температур.

Высокая микропористость и развитая поверхность в сочетании с прочностными свойствами определяют широкие возможности промышленного применения шунгитового углерода. Он является эффективным катализатором процессов гидрогенизации при низких температурах и в реакциях кислотно-основного типа, например в дегидротации вторичных спиртов, многофункциональным наполнителем органических полимеров и неорганических связующих. На основе шунгитовых пород разработаны конструкционные строительные материалы: бетон, мастика и кладочный раствор, которые могут быть использованы для экранирования электромагнитного излучения [3; 5].

1. Методика, оборудование и аппаратра исследования, характеристика исходного материала

Оборудование термобарической обработки. Изучались образцы шунгитовой породы месторождения Шуньга (Карелия, Россия) с содержанием углерода 40, 90 и 96...98 %. Термическую обработку образцов шунгита осуществляли в печи «Naber» с программируемой установкой режимов в различных газовых средах: аммиак (NH_3); углекислый газ (CO_2) при температуре 1000 °С, время изотермической выдержки составляло 1 час.

Термобарическую обработку образцов шунгита осуществляли в аппарате высокого давления «наковальня с лункой» в диапазоне давлений 1,0...3,5 ГПа. В качестве среды, передающей давление, служил контейнер из литографского камня, внутри которого помещался трубчатый графитовый нагреватель с исследуемым материалом [5]. Для оценки давления в камере синтеза использовали метод калибровки при комнатной температуре, основанный на сопоставлении усилия пресса и давления полиморфного превра-

щения в реперном веществе. В качестве реперов использовали висмут (Bi). Измерение температуры осуществляли без приложения давления с помощью хромель-алюмелевой термопары.

Аппаратура исследования. Структура поверхности шунгита исследовалась в контактном режиме на атомно-силовом микроскопе (АСМ) ND-206 (ОДО «МикроТестМашины», Беларусь). Рентгеноструктурные исследования выполнялись на дифрактометре общего назначения ДРОН-3.0 в CuK_α -монохроматизированном излучении, вторичная монохроматизация осуществлялась пиролитическим графитом с вращением образца в собственной плоскости. Микроструктурные исследования образцов осуществлялись с помощью оптического микроскопа «Микро-200» (ПО «Планар», Беларусь). Измерение электрического сопротивления образцов шунгита проводили на приборе E7-8 LCR с чувствительностью 0,001 Ом.

Методика мультифрактальной параметризации. Для количественного описания структуры поверхности разрушения образцов шунгита использовали оригинальную методику мультифрактальной параметризации структур [6].

Наиболее информативными мультифрактальными характеристиками являются обобщенные энтропии (размерности) Реньи D_q , которые позволяют оценить термодинамические условия формирования изучаемых структур, а также эффективные количественные характеристики их однородности f_q и упорядоченности Δ_q [7; 8]. При сравнении большие значения D_q соответствуют более неравновесным условиям формирования структур, большие значения f_q – отвечают более равномерному распределению единичных элементов рассматриваемой структуры в евклидовом пространстве, охватывающем эту структуру, а увеличение Δ_q для исследуемой серии структур показывает, что в них становится больше периодической составляющей.

В ходе дискретной аппроксимации составляющие изучаемой структуры выделялись на изображении черным цветом, а остальные – белым. В результате получали компьютерные черно-белые изображения в виде графических файлов формата bmp. Вычисление мультифрактальных характеристик – $f(\alpha)$ -спектров и D_q -спектров размерностей Реньи – с проверкой их корректности производилось для набора величин $q \in [-100, +100]$.

Из исследуемых аппроксимированных изображений поверхности разрушения размером 10×10 мкм вырезали по 3...5 участков (что соответствовало матрице 360×360 пикселей). Мультифрактальные характеристики для структуры получали как средние значения их величин для вырезанных участков. Среднеквадратичные отклонения рассчитывали для вероятности 95 %. Поскольку при мультифрактальном анализе рассматривается распределение заданной величины на геометрическом носителе, то в данном случае изучали распределение единичных элементов структуры поверхности разрушения. Черным пикселям на аппроксимированных изображениях соответствовали границы кристаллитов и поры (минимальная толщина границ составляла 5 пикселей). Перед расчетами все изображения структур приводились к одному масштабу.

Термомеханические и электрофизические характеристики шунгитовых пород. Единственное месторождение шунгитовых пород, Зажогинское, находится в Медвежьегорском районе Республики Карелия (Россия). Производственная мощность предприятия по добыче и переработке шунгита – 200 тыс. тонн в год. Зажогинское месторождение представлено шунгитами следующего состава, масс. %: углерод – 30...98; кварц – до 45; сложные силикаты (слюды, хлориды) – до 20; сульфиты – до 3.

Породы в пределах Зажогинского месторождения достаточно стабильны по составу и физическим свойствам: плотность 2,1...2,4 г/см³; пористость до 5 %; прочность на сжатие 100...150 МПа; электропроводимость до 1500 Ом/м; теплопроводность 3,8 Вт/м·К; среднее значение коэффициента термического расширения в интервале температур 20...600 °С составляло $12 \cdot 10^{-6}$ 1/град.

Поверхность дробленых, молотых и тонкомолотых материалов на основе шунгита Зажогинского месторождения обладает биполярными свойствами, поэтому шунгитовые наполнители способны смешиваться без исключения со всеми связующими как органической, так и неорганической природы.

Шунгитовая порода обладает сорбционными, каталитическими, бактерицидными свойствами, биологической активностью, способностью поглощать и нейтрализовать электромагнитные излучения высоких частот. Благодаря высокой химической стойкости, свойственной стеклоуглероду, и активности, характерной для кокса, шунгитовый углерод может заменить различные углеродные материалы. Однако до настоящего времени не определены режимы обработки шунгита, позволяющие получить стабильные свойства, характерные для стеклоуглерода и кокса [10].

2. Структурное строение шунгитовых пород

Природные шунгиты представляют собой силикатные образования, содержащие естественный углерод в количествах от единиц до 99,6 %. Эти неупорядоченные структуры характеризуются разнообразием состава и наряду с углеродом содержат кварц, оксиды металлов, алюмосиликаты, слюду и др. Все составляющие распределены в шунгитовой матрице равномерно, размер силикатных включений составляет 0,5...5 мкм [3; 10]. Микроскопические исследования позволили установить специфичность структу-

ры шунгитного углерода, которая состоит в том, что вследствие высокоразвитой межфазной границы между основными компонентами шунгитовой породы – углеродом и кремнеземом – эти фазы образуют взаимопроникающие сетки. Поэтому в каждой частице порошка шунгитовой породы присутствуют углеродная и минеральная составляющие (рис. 1).

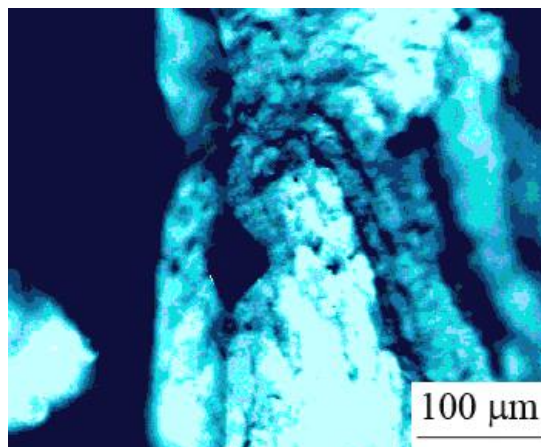


Рис. 1. Микроструктура образца шунгитового углерода

По данным электронно-микроскопических исследований (рис. 2, а, б, в; 3 а, б, в), основным элементом строения шунгитового вещества является глобула, представляющая собой углеродную частицу, по форме близкую к шаровидной, с размерами приблизительно 6...10 нм (рис. 2, а). Глобулы в свою очередь объединяются в сфероподобные образования с размерами 100...300 нм (рис. 2, б). Глобулярный углерод образует полиэдрические агрегаты размерами 0,5...1 мкм (рис. 2, в).

Между глобулами находится углерод, обеспечивающий их связи. Структура глобул подобна «луковичной» форме углерода, образующейся при температуре свыше 1000 °С при отжиге наноалмазов де-тонационного синтеза в вакууме [2; 5].

Методами просвечивающей электронной микроскопии высокого разрешения и масс-спектрометрии в шунгитовом углероде фиксируется присутствие фуллеренов, что подтверждается путем коллоидной экстракции с использованием полярных растворителей следовых количеств фуллерена C₆₀ [3]. Выявлено морфологическое подобие глобулы шунгитового углерода и фуллерена: наличие внутренней полости и двумерная гексагональноподобная ячейка углеродных атомов с характерной анизотропией искажений.

Следует отметить, что указанная «луковичная» форма углерода устойчива к графитизации – при высокотемпературном отжиге вплоть до 2800 °С шунгитовый углерод практически не графитизируется. В общем случае области когерентного рассеяния соответствуют областям однотипного расположения слоев глобулярных элементов, а слои со значительным искажением, обеспечивающие связь между глобулами, образуют случайную сетку [3].

Аппроксимированные по методике мультифрактальной параметризации структуры изучаемых образцов (рис. 2, г, д, е; рис. 3 г, д, е) сравнивали с соответствующими АСМ-изображениями (рис. 2, а, б, в; рис. 3 а, б, в). Основные рассчитанные мультифрактальные характеристики структур приведены в таблице 1.

Таблица 1

Мультифрактальные характеристики поверхности разрушения образцов шунгита

Образец	Мультифрактальные характеристики структуры		
	Δ_{100}	f_{100}	D_{100}
Исходные образцы	$0,27 \pm 0,08$	$0,3 \pm 0,2$	$1,55 \pm 0,04$
Образцы после термобарического спекания при давлении 1,5 ГПа и температуре 1200 °С в течение 10 с	$0,33 \pm 0,04$	$0,3 \pm 0,1$	$1,53 \pm 0,02$
Образцы после отжига в восстановительной атмосфере при 1000 °С с изотермической выдержкой в течение 1 ч и термобарического спекания при 1,5 ГПа и 1200 °С в течение 10 с	$0,29 \pm 0,03$	$0,3 \pm 0,1$	$1,58 \pm 0,07$
Образцы после отжига в окислительной атмосфере при 1000 °С с изотермической выдержкой 1 ч и термобарического спекания при 1,5 ГПа и 1200 °С в течение 15 с	$0,26 \pm 0,07$	$0,29 \pm 0,09$	$1,52 \pm 0,03$

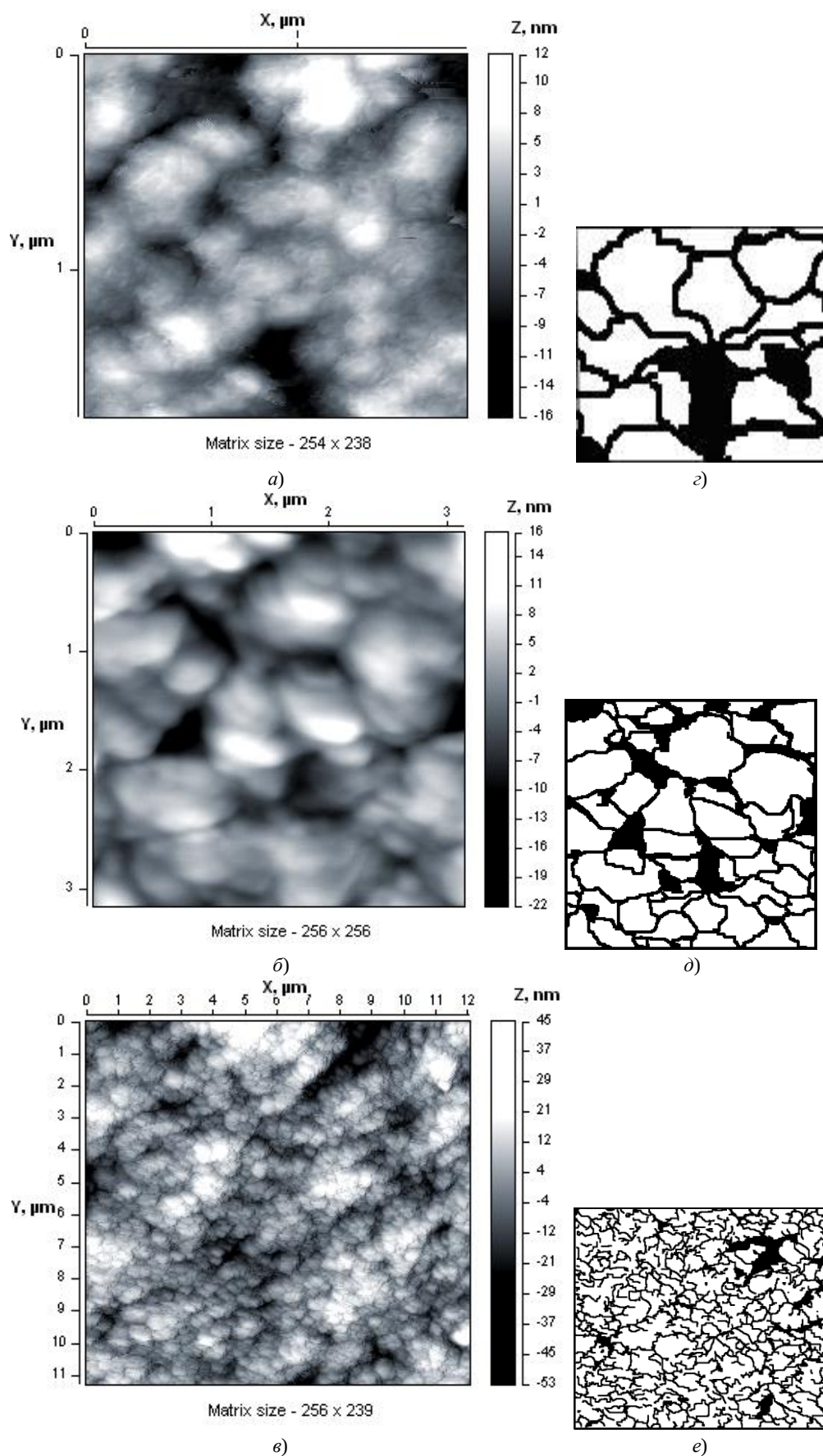


Рис. 2. АСМ-изображения структуры излома (а – в) и аппроксимированные структуры (з – е) исходных образцов шунгита с содержанием углерода 96...98 %; размер поля сканирования: 1,5 мкм (а); 3 мкм (б); 12 мкм (в)

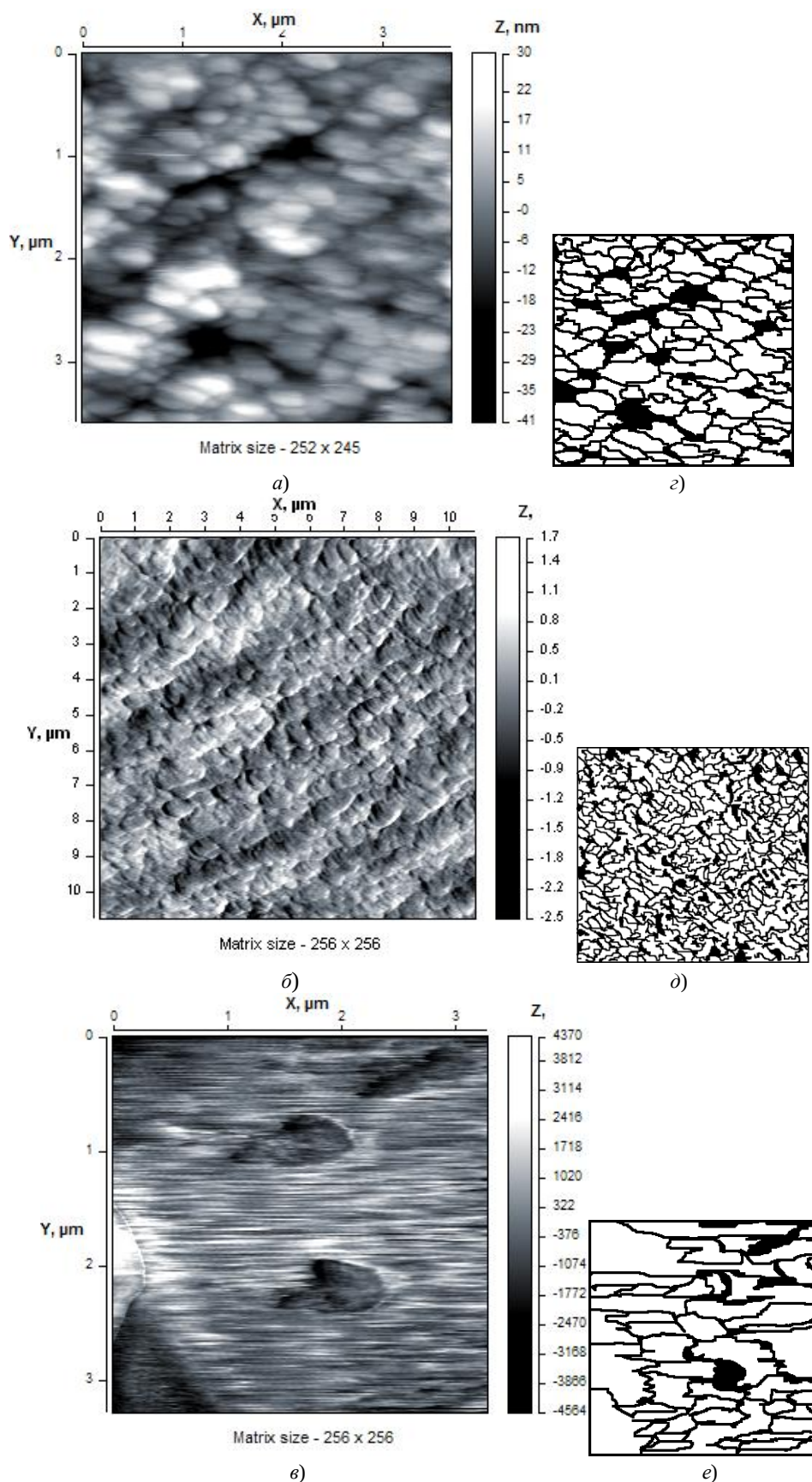


Рис. 3. АСМ-изображения структуры излома (а – в) и соответствующие аппроксимированные структуры образцов шунгита (г – е) после термобарического спекания при давлении 1,5 ГПа и температуре 1200 °С (а, г); после отжига в восстановительной атмосфере и термобарического спекания (б, д); после отжига в окислительной атмосфере и термобарического спекания (в, е); размер поля сканирования: 3 мкм (а, в); 12 мкм (б, д)

3. Влияние вида обработки на структуру и электрофизические характеристики шунгита

Термобарическая обработка. Термообработка до температуры 1000 °С при нормальном давлении в инертной атмосфере не приводит к изменению структурных параметров шунгитового углерода. Сравнительный анализ структуры исходного образца шунгита и образца после термобарической обработки в аппарате высокого давления при давлении 1,5 ГПа и температуре 1200 °С в течение 10 с показал, что на макроструктурном уровне видимых изменений в материале не произошло [11].

Показатель однородности структуры f_{100} по сравнению с исходными образцами не изменяется (см. табл. 1). При этом после отжига внутри исходных полиэдрических агрегатов размером 1...2 мкм (см. рис. 2, б) наблюдается формирование овализованных частиц на основе глобул размером 100...200 нм (см. рис. 3, а) с направленным характером структуры. Этот эффект вызывает рост периодической составляющей в структуре, что находит отражение в некотором увеличении показателя упорядоченности Δ_{100} . Значение D_{100} остается практически в том же интервале, что свидетельствует о протекании в сходных термодинамических условиях процессов разрушения исходных образцов шунгита и образцов после термобарической обработки.

При исследовании влияния термообработки в восстановительной или окислительной атмосферах на структуры шунгита, установлено, что в ходе предварительного термического отжига может наблюдаться перестройка наноструктурных элементов. Это указывает на метастабильность структур шунгитового углерода.

Термообработка в восстановительной атмосфере. АСМ-изображение структуры скола образца шунгита с содержанием углерода 96...98 % после отжига в восстановительной атмосфере аммиака при температуре 1000 °С в течение 1 ч и последующего термобарического отжига при давлении 1,5 ГПа и температуре 1200 °С в течение 10 с приведено на рисунке 3, б.

Слияние овализованных глобул происходит с образованием полиэдрических частиц порядка 0,5 мкм (см. рис. 3, б). Аналогичные перестройки наблюдаются на частицах углеродных саж, но происходят они при более высоких температурах (1000 и 2800 °С – для шунгита и сажи соответственно).

Внешне структура поверхности разрушения становится похожа на структуру исходных образцов. Дополнительная упорядоченность в структуре, связанная с наличием направленных овализованных частиц, исчезает, и показатель упорядоченности структуры Δ_{100} снижается. Однако вследствие присутствия определенной волновой составляющей в структуре (см. рис. 3, б) значение Δ_{100} выше, чем у остальных образцов. Показатель однородности f_{100} близок к таким у исходных образцов. В то же время разрушение шунгита со структурой полиэдрических частиц, имеющих меньший размер по сравнению с исходными образцами и образцами после термобарической обработки, происходит в более неравновесных условиях (некоторое увеличение показателя D_{100}). Это может быть связано с большей прочностью этих образцов вследствие мелкозернистости (появление разрушающей трещины происходит при больших значениях напряжения и скорости ее роста выше, чем в других образцах). Сходный эффект наблюдался для высокопрочных материалов [12; 13].

Проведенный рентгеноструктурный анализ образцов шунгита показал, что отжиг в восстановительной атмосфере аммиака не приводит к образованию графитоподобного углерода, поэтому рост частиц шунгитного углерода заторможен (рис. 3, б).

Термообработка в окислительной атмосфере. АСМ-изображение структуры скола образца шунгита с содержанием углерода 96...98 % после отжига в окислительной атмосфере углекислого газа (CO_2) при температуре 1000 °С в течение 1 ч и последующего термобарического отжига при давлении 1,5 ГПа и температуре 1200 °С в течение 15 с приведено на рисунке 3, в.

По росту структур (см. рис. 3, в) наблюдаются дальнейшие изменения в материале и образование достаточно крупных частиц призматической формы размером 6...10 мкм с гладкой поверхностью, обладающих четкой огранкой.

Образование крупных частиц призматической формы и без выраженного направленного характера приводит к появлению структуры достаточно похожей на структуру исходных образцов. Показатели упорядоченности Δ_{100} и однородности f_{100} такой структуры разрушения располагаются в том же интервале, что и соответствующие показатели для исходных образцов. Значение D_{100} близко к его значению для исходных образцов и образцов после термобарической обработки в результате того, что процессы разрушения протекают в сходных условиях.

После предварительного отжига в окислительной атмосфере углекислого газа наблюдается появление рефлексов графита, причем с увеличением времени отжига интенсивность рефлексов увеличивается, что свидетельствует о разрушении углеродных глобул в шунгите, формировании графитоподобного углерода и его рекристаллизации при последующей термобарической обработке (см. рис. 3, в).

Электрофизические характеристики шунгита после термобарической обработки. На образцах после предварительного термического отжига в восстановительной атмосфере и термобарической обработки в аппарате высокого давления проводили измерение электросопротивления. Установлено, что

термобарическая обработки шунгита с содержанием углерода 90 % при давлениях до 3 ГПа в диапазоне температур до 1100 °С существенно не влияет на значения электрического сопротивления образцов, равные 0,2...0,3 Ом, что свидетельствует о фазовой стабильности шунгитового углерода в указанных условиях. Рост электросопротивления до 40...80 Ом отмечен в случае использования шунгита с более низким содержанием углерода (40 %), что связано с влиянием включений непроводящих соединений, присутствующих в данном виде шунгита. После предварительного отжига шунгита с различным содержанием углерода в окислительной атмосфере углекислого газа при температуре до 1000 °С наблюдается появление рефлексов графита, причем с увеличением времени отжига с 1 до 3 часов интенсивность рефлексов увеличивается. При этом происходит разрушение углеродных глобул в шунгите, формирование графитоподобного углерода и его рекристаллизация при последующей термобарической обработке, что также приводит к снижению электрического сопротивления материала по сравнению с неотожженными образцами. Данные измерений электрического сопротивления приведены в таблице 2.

Таблица 2

Электрическое сопротивление образцов шунгита после отжига и термобарической обработки

№ образца	Содержание углерода в образце, масс. %	Атмосфера отжига	Режимы термобарической обработки	Сопротивление, Ом
1	40	Восстановительная	P = 3,0 ГПа T = 1100 °С t = 10 с	R _{прямое} = 80 R _{обратное} = 40
2	90	Восстановительная	P = 1,0 ГПа T = 500 °С t = 10 с	R _{прямое} = 0,3 R _{обратное} = 0,2
3	90	Восстановительная	P = 3,0 ГПа T = 1100 °С t = 10 с	R _{прямое} = 0,2 R _{обратное} = 0,25

Разработанная технология термического высокотемпературного отжига шунгитового углерода в окислительной или восстановительной атмосфере в сочетании с термобарической обработкой может быть использована в промышленных условиях при получении наполнителя для полимеров различной полярности с заданными электрофизическими и механическими характеристиками.

Выводы:

1) высокотемпературный отжиг оказывает активное влияние на структуру шунгитового углерода: наблюдается слияние глобул с образованием более крупных, увеличение размеров кристаллитов шунгитового углерода и частичное разрушение шунгитовых глобул с их графитизацией;

2) при высокотемпературном отжиге в восстановительной (NH₃) и окислительной (CO₂) атмосферах с последующей термобарической обработкой при высоких давлениях и температурах наблюдается трансформация исходных глобул в кристаллы кубической (полиэдрической) формы, при этом размер исходных глобулярных образований увеличивается после отжига и обработки более чем на порядок (с 0,1...0,3 до 5...10 мкм);

3) наилучшие сочетания структурных характеристик и ожидаемых прочностных показателей обеспечивает комплексная обработка шунгитовой породы с высоким содержанием углерода (96...98 %), включающая отжиг в восстановительной атмосфере при 1000 °С с изотермической выдержкой в течение 1 ч и термобарическое спекание при 1,5 ГПа и 1200 °С в течение 10 с;

4) высокотемпературный отжиг и термобарическая обработка шунгита с содержанием углерода 90 % при давлениях 1...3 ГПа в диапазоне температур до 1100 °С существенно не влияет на значения электрического сопротивления образцов, равные 0,2...0,3 Ом, что свидетельствует о фазовой стабильности шунгитового углерода в указанных условиях. Рост электросопротивления более чем на два порядка отмечен в случае использования шунгита с содержанием углерода 40 %, что связано с влиянием непроводящих примесей.

Представленные материалы – результат исследований по выполняемому совместному белорусско-монгольскому проекту фонда фундаментальных исследований БРФФИ № Ф10Мн-001 «Физико-химический, мультифрактальный и микроструктурный анализ углеродных материалов для их рационального использования в промышленности».

ЛИТЕРАТУРА

1. Технологии конструкционных наноструктурных материалов и покрытий / П.А. Витязь [и др.]; под общ. ред. П.А. Витязя и К.А. Солнцева. – Минск: Беларус. наука, 2011. – 283 с.

2. Модифицирование материалов и покрытий наноразмерными алмазосодержащими добавками / П.А. Витязь [и др.]; под общ. ред. П.А. Витязя. – Минск: Белорус. наука, 2011. – 522 с.
3. Шунгитовый углерод и его модифицирование / Н.Н. Рожкова [и др.] // Журнал Рос. хим. о-ва им. Д.И. Менделеева. – 2004. – Т. XLVIII, № 5. – С. 107 – 115.
4. Шунгиты – новое углеродистое сырье / под ред. В.А. Соколова, Ю.К. Калинина, Е.Ф. Дюккиева. – Петрозаводск: КНЦ РАН, 1984. – 239 с.
5. Витязь, П.А. Синтез и применение сверхтвердых материалов / П.А. Витязь, В.Д. Грицук, В.Т. Сеньют. – Минск: Белорус. наука, 2005. – 359 с.
6. Встовский, Г.В. Введение в мультифрактальную параметризацию структур материалов / Г.В. Встовский, А.Г. Колмаков, И.Ж. Бунин. – Ижевск: Науч.-изд. центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 116 с.
7. Колмаков, А.Г. Использование положений системного подхода при изучении структуры, особенностей пластической деформации и разрушения металлов / А.Г. Колмаков // Металлы. – 2004. – № 4. – С. 98 – 107.
8. Колмаков, А.Г. Использование концепций системного подхода при изучении деформации и разрушения металлических материалов / А.Г. Колмаков // Нелинейный мир. – 2006. – Т. 4, № 3. – С. 126 – 136.
9. Исследование влияния термобарической обработки на структуру углеродного наномодификатора на основе шунгита / П.А. Витязь [и др.] // Машиностроение и техносфера XXI века: сб. тр. XVIII МНТК, Севастополь, 12 – 17 сент. 2011 г.: в 4 т. Т. 1. – Донецк: Дон НТУ, 2011. – С. 137 – 139.
10. Kovalevski, V.V. The Karelian shungite: unique geological occurrence, unusual structure and properties, new practical applications / V.V. Kovalevski, V.A. Melezhih // Applied Mineralogy in Research, Economy, Technology, Ecology and Culture, 2000; D. Rammlair [et al.] (Eds.). – The Netherlands: A.A. Balkema/Rotterdam/Brookfield. – V. 1. – P. 363 – 366.
11. Влияние термобарической обработки на макро-, мезо- и микроструктуру углеродных материалов шунгитовой породы / П.А. Витязь [и др.] // Вестник фонда фундаментальных исследований. – 2011. – № 3. – С. 75 – 83.
12. Особенности деформации и разрушения композиционного материала на основе высокопрочной мартенситно-стареющей стали с быстрозакаленным поверхностным слоем из сплава $\text{Co}_{69}\text{Fe}_4\text{Cr}_4\text{Si}_{12}\text{B}_{11}$ / М.А. Севостьянов [и др.] // Деформация и разрушение материалов. – 2010. – № 3. – С. 28 – 35.
13. Колмаков, А.Г. Влияние магнетронного покрытия из стали 12Х18Н10Т на деформацию и разрушение мартенситно-стареющей стали при статическом растяжении / А.Г. Колмаков // Деформация и разрушение материалов. – 2006. – № 1. – С. 21 – 28.

Поступила 24.02.2012

EFFECT OF TEMPERATURE ANNEALING IN THE CONDITIONS OF HIGH PRESSURES ON STRUCTURAL AND ELECTROPHISICAL CHARACTERISTICS OF SCHUNGITE CARBON

**M. KHEIFETZ, V. ZHELEZNIK, S. KOUKHTA, V. SENYUT,
S. ANKOUDA, A. KOLMAKOV, H. TSOOHUU, L. ENKHTOR**

In the work the results of research of influence of high temperature annealing and high pressure treatment upon structure and phase structure of schungite carbon are presented. It is shown, that at high-temperature annealing in oxidizing atmosphere and following high pressure treatment the transformation of the initial globules of schungite carbon into the polyhedral crystallites is observed. The increase in the sizes of nanocrystallites of schungite carbon and partial destruction of schungite globules and their graphitization is thus taken place.

УДК 681.2.082

СДВИГОВАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ФЕРРОМАГНИТНОГО ПОРОШКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

канд. техн. наук Н.С. ХОМИЧ, О.П. КОРОГОДА
(Научно-инженерное предприятие «Полимаг», Минск);

канд. техн. наук В.А. МАНСУРОВ
(Белорусский государственный медицинский университет, Минск);
А.Ю. ЛУГОВИК
(Белорусский национальный технический университет, Минск)

Исследуется сдвиговая деформация ферромагнитного порошка в магнитном поле. Показано, что при магнитно-абразивной обработке в области контакта с обрабатываемой поверхностью сдвигается слой, где присутствует наибольшая интенсивность деформации. Плоскость сдвига при этом параллельна плоскости измерительного узла. Представлено моделирование напряженно-деформированного состояния цепочки частиц порошка. На основе модели идеально пластического тела развиты основные аспекты оптимального проектирования, приспособляемости, динамики упругопластичного и жестко-пластичного тела. Определены механические свойства ферромагнитного порошка, структурированного магнитным полем, на основе которых построены конститутивные соотношения, пригодные для расчета напряженно-деформированного состояния как функции напряжений, деформации, плотности и индукции магнитного поля.

Введение. В настоящее время представляет большой интерес использование магнитного поля в различных процессах обработки. При магнитно-абразивной обработке магнитное поле играет определяющую роль в формировании магнитно-абразивного инструмента, представляющего собой порошковую среду [1]. Для оптимизации работы магнитно-абразивного инструмента необходимо иметь представление о силах и давлениях, действующих на обрабатываемый материал со стороны инструмента [2]. Прямые измерения не дают качественного представления о процессах, происходящих в зоне контакта инструмента и поверхности. Это представление можно получить из расчета напряженно-деформированного состояния магнитно-абразивного инструмента [3].

Расчет напряженно-деформированного состояния неоднородных сред может быть выполнен с использованием феноменологической теории механики сплошных сред [4]. При этом подразумевается, что в данном случае среда является квазигомогенной. Термин «квазигомогенные среды» предполагает допущение, что за характерное время основного процесса не успевают произойти изменения в относительном движении фаз и компонентов. Направление магнитного поля задает и направление характерных структур данной среды. В этом случае уравнения равновесия сплошной среды выглядят следующим образом:

$$\nabla \sigma + \rho \cdot F = 0, \quad (1)$$

где σ – тензор напряжения; ρ – плотность; F – вектор единичной массовой силы.

Инерционные силы здесь не рассматриваются. Для решения этой задачи необходимо установить зависимость между механическими напряжениями σ и деформациями ε : $f \sigma, \varepsilon = 0$, так называемое конститутивное соотношение.

Фундаментальным свойством гранулированной (порошковой) среды, которое отличает ее от твердых и жидких сред, является сжимаемость, т.е. способность частиц изменять свою упаковку. Существует несколько специфических свойств гранулированных сред: 1) явление дилатансии – способность расширяться при сдвиге; 2) гистерезис напряжений по причине сил трения в среде. Гистерезис является причиной неопределенности расчета напряженно-деформированного состояния гранулированной среды.

Важной характеристикой гранулированной среды, определяющей ее прочность, является коэффициент бокового давления ζ – отношение приращения давления в направлении действия силы к приращению давления в направлении, перпендикулярном действию силы:

$$\zeta = \frac{d\sigma_{xx}}{d\sigma_{yy}}, \quad (2)$$

или в интегральной форме $\sigma_{xx} = \zeta \cdot \sigma_{yy} + c$. Среды, у которых константа интегрирования $c = 0$, называют сыпучими, $c \neq 0$ – связанными средами.

Экспериментальная установка и методика измерения. Согласно поставленной цели исследования особенности сдвиговой деформации порошковой среды в зазоре между параллельными плоскостями для различных величин зазора h , значений индукции магнитного поля, размера частиц порошка и плотности их размещения в зазоре.

Для исследования механических свойств магнитно-абразивного инструмента к измерительному узлу прибора предъявляется ряд специфических требований. Во-первых, измерительный узел должен обеспечивать в рабочей области магнитное поле требуемой величины и средства для его изменения. Во-вторых, конфигурация измерительного узла должна быть по возможности близка к реальным схемам магнитно-абразивной обработки. С учетом этих требований был спроектирован и изготовлен измерительный узел, состоящий из двух одинаковых элементов, реализующих известную схему механических измерений, реализующую деформацию сдвига при кручении типа плоскость – плоскость. Схема узла представлена на рисунке 1.

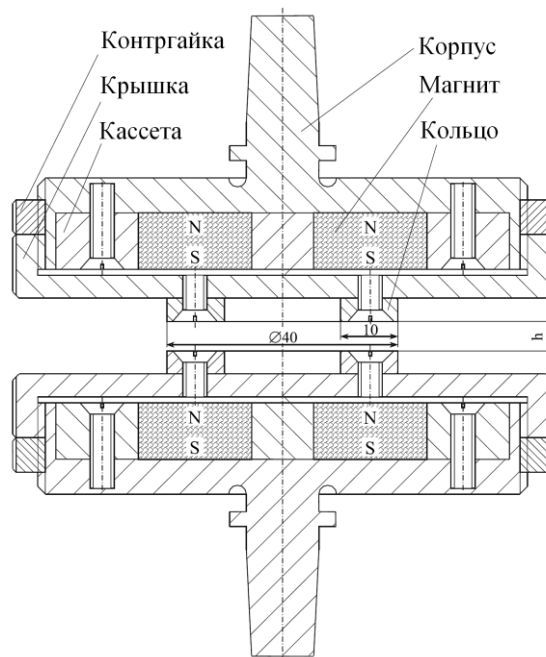


Рис. 1. Конструкция измерительного узла

В зазоре узла между кольцевыми стальными плоскостями создавалось однородное магнитное поле, в котором размещалась исследуемая среда. Для того чтобы избежать проскальзывания, плоскости выполнены шероховатыми. Постоянные магниты располагались в немагнитной кассете, которая размещалась в корпусе, присоединенном к измерительному прибору при помощи конусного соединения. Рабочие плоскости, образованные двумя стальными кольцами, концентрировали поле магнитов в исследуемой среде. Величина магнитной индукции в зазоре регулировалась изменением расстояния между магнитами, для чего стальные кольца были закреплены на крышках, перемещающихся относительно магнитов по резьбе. В нужном положении крышки жестко закреплялись при помощи контргаек.

Степень однородности магнитного поля соответствует однородности поля в катушке Гельмгольца. Направления магнитного поля и сдвига взаимно перпендикулярны.

Нижний элемент измерительного узла (см. рис. 1) поворачивался на угол α с постоянной угловой скоростью.

Напряжения, обусловленные сдвиговой деформацией порошковой среды в зазоре, вызывали поворот верхнего элемента на некоторый угол β , при этом происходило закручивание калиброванного торсиона с жесткостью $C = 0,197 \text{ Н·м/рад}$.

Результаты измерений и их обсуждение. Сдвиговая деформация вычислялась как $\varepsilon = (\alpha - \beta) r_2/h$, где $(\alpha - \beta)$ – разность углов поворота нижней и верхней плоскостей измерительного узла; r_2 – внешний радиус измерительного узла; h – расстояние между плоскостями измерительного узла. Тангенциальное напряжение сдвига рассчитывалось как $\sigma = 2C\beta r/\pi(r_2^4 - r_1^2)$; C – жесткость торсиона; r_1 – внутренний радиус измерительных плоскостей.

В качестве материала использовался ферромагнитный порошок зернистостью 160/100 мкм, магнитная индукция в рабочем зазоре составляла 0,2 Тл.

Исследования проводились при различной плотности частиц в инструменте. Результаты измерений представлены на рисунке 2.

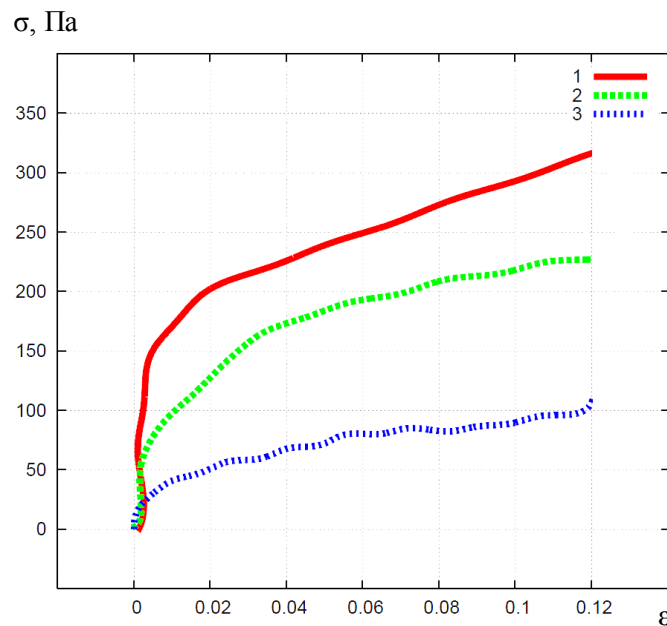


Рис. 2. Диаграмма напряжение – деформация при сдвиге при различных степенях заполнения измерительного узла:
1 – $V/V_0 = 1,6/1,6$; 2 – $V/V_0 = 1,6/2,7$; 3 – $V/V_0 = 1,6/5,3$;
 V – насыпной объем порошка; V_0 – объем рабочего зазора

Из рисунка 2 видно, что диаграмма напряжение – деформация имеет вид, характерный для пластической деформации с упрочнением. Диаграмма напряжение – деформация хорошо аппроксимируется схемой из двух участков:

- 1) отрезка, соответствующего упругому поведению;
- 2) отрезка, соответствующего пластическому состоянию.

Обычно в теории пластичности идеализируется сложное поведение реальных материалов в виде различных моделей. В данном случае имеет место модель упругопластического материала.

Постоянные величины, характеризующие развитие механических напряжений, при сдвиге показаны в таблице.

Механические свойства магнитно-абразивного порошка (индукция поля 0,2 Тл)

Степень заполнения измерительного узла	Модуль сдвига упругой деформации G_{xy} , КПа	Модуль упрочнения σ_u/ϵ_u , КПа	Предельное упругое напряжение σ' , Па	Предельная упругая деформация ϵ'
1	26	1,2	180	0,0004
0,6	5,6	1,0	84	0,0004
0,3	3,7	0,46	43	0,0004

Моделирование напряженно-деформированного состояния цепочки частиц порошка. Основной вопрос, возникающий при оценке условий достижения предела прочности, связан с установлением соотношения между пластическими напряжениями при различных схемах нагружения образца (сдвиг, растяжение и др.), т.е. в нахождении функций всех критических компонентов тензора напряжений (критерия текучести). В случае изотропного материала эти критические значения являются функциями инвариантов тензора напряжений.

На основе модели идеально пластического тела развиты основные аспекты оптимального проектирования, приспособляемости, динамики упругопластичного и жесткопластичного тела.

Согласно теории малых упругопластических деформаций зависимость модуля упругости [5] при сдвиге от текущей деформации:

$$\sigma_{xx} - \sigma = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} \cdot \varepsilon_{xx} - \varepsilon; \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} \varepsilon_{xy}; \quad \sigma_u = \Phi \varepsilon_u; \quad \sigma = 3K\varepsilon; \quad K = \text{const},$$

где $\sigma = \sigma_{ii}/3$; $\varepsilon = \varepsilon_{ii}/3$; $\sigma_u = \sqrt{\sigma_{ij} \cdot \sigma_{ij}}$; $\varepsilon_u = \sqrt{\varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}}$.

Отметим, что существуют различные подходы к описанию поведения упрочняющихся пластических тел. Теории скольжения рассматривают материал как полукристаллический агрегат с равновероятным распределением форм и размеров зерен в элементарном объеме тела, в котором выделяются преимущественно линии скольжения. Вклад отдельных поверхностей скольжения в пластическое деформирование определяется в некоторой интегральной форме [6].

Рассмотрим магнитно-абразивный инструмент. Наличие магнитного поля заставляет частицы среды выстраиваться вдоль силовых линий, образуя цепочки частиц, так называемую магнитно-абразивную щетку (рис. 3).

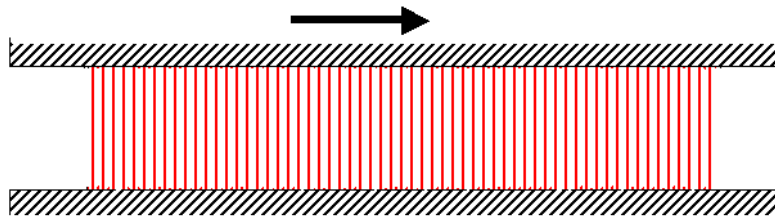


Рис. 3. Магнитно-абразивная щетка

Примечание. Стрелка показывает направление деформации. Направление магнитного поля перпендикулярно деформации.

Совокупное действие этих цепочек определяет макроскопические механические свойства порошковой системы. Такую среду можно отнести к связанной гранулированной среде. Деформация данной среды приведет к изгибу цепочек частиц. Очевидно, что при больших величинах деформации цепочка может разорваться. Поскольку магнитное поле является структурообразующим фактором, оборванная цепочка присоединится к ближайшей оборванной цепочке. В пользу такой гипотезы говорит наличие значительной шумовой составляющей в пластической области, причем чем выше уровень деформации, тем выше уровень шума. Следовательно, пластическая деформация в среде объясняется началом хаотического относительного перемещения частиц цепочки от одной к другой. Другой факт, подтверждающий данную гипотезу, основан на том, что предельная упругая деформация не зависит от степени заполнения рабочего зазора (см. таблицу).

Представляет интерес рассмотреть напряженно-деформированное состояние отдельной цепочки частиц в упругой постановке. Эта задача исследовалась при помощи пакета ELCUT, разработанной ПК ТООР (Россия). Уравнения движения среды для этого случая записаны в терминах напряжений (1). Нормальное напряжение в направлении, перпендикулярном к плоскости модели, в задачах плосконапряженного состояния по определению равно нулю. В качестве условий закрепления использовалось жесткое закрепление с заранее заданным смещением, которое варьировалось в пределах области упругой деформации и немного превышало этот предел. Результатами расчета являлись: перемещения, деформации, координатные и главные компоненты тензора напряжений, эквивалентные напряжения по теории прочности Мизеса.

Критерий прочности Мизеса (потенциальная энергия формоизменения) записывается в виде

$$\sigma = \sqrt{0,5 \left[\sigma_1 - \sigma_2^2 + \sigma_2 - \sigma_3^2 + \sigma_3 - \sigma_1^2 \right]},$$

где σ_1 , σ_2 и σ_3 – главные напряжения, упорядоченные по убыванию.

Геометрически цепочка представлялась бесконечно длинной пластиной высотой 1,2 мм и толщиной 0,2 мм. Цепочка характеризовалась упругими свойствами (см. таблицу). Коэффициент Пуассона являлся варьируемым параметром в пределах от 0,1 до 0,25. Основой для выбора такого диапазона явилось предположение о связанности данной порошковой среды.

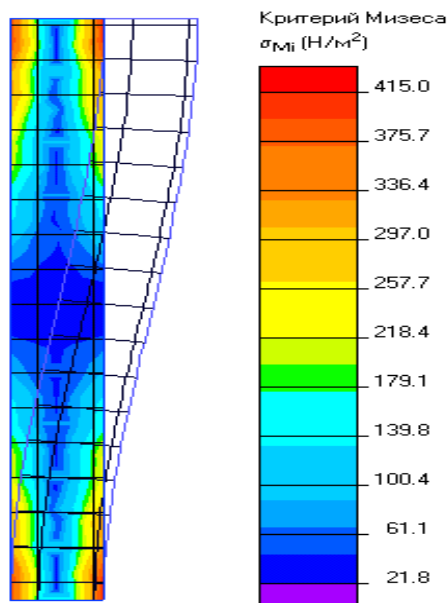


Рис. 4. Результаты моделирования

Закключение. При магнитно-абразивной обработке в области контакта с обрабатываемой поверхностью сдвигается слой, где присутствует наибольшая интенсивность деформации. Плоскость сдвига при этом параллельна плоскости измерительного узла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хомич, Н.С. Магнитно-абразивная обработка изделий: моногр. / Н.С. Хомич. – Минск: БНТУ, 2006. – 218 с.
2. Коррекция формы плоских прецизионных поверхностей с использованием процесса программно-управляемого полирования на базе метода магнитно-абразивной обработки / Н.С. Хомич [и др.] // Материалы, технологии, инструменты. – 2010. – Т. 15, № 2. – С. 9 – 13.
3. Тарасова, А.Ю. Реодинамика магнитно-абразивного материала в зазоре между параллельными плоскостями / А.Ю. Тарасова, Н.С. Хомич, Б.М. Хусид // Весці Акадэміі навук Беларусі. – 1991. – № 1. – С. 100 – 107.
4. Победря, Б.Е. Основы механики сплошной среды / Б.Е. Победря, Д.В. Георгиевский. – М.: Физматлит, 2006. – 272 с.
5. Ильюшин, А.А. Некоторые вопросы теории пластических деформаций / А.А. Ильюшин // Прикладная математика и механика. – 1943. – Т. 7, № 4. – С. 245 – 272.
6. Кузнецов, Е.Е. К построению теории малых упругопластических деформаций / Е.Е. Кузнецов, И.Н. Матченко, Н.М. Матченко // Механика предельного состояния. – 2010. – Т. 8, № 2. – С. 288 – 295.

Поступила 07.02.2012

SHEAR DEFORMATION OF THE FERROMAGNETIC POWDER IN A MAGNETIC FIELD

N. HOMICH, O. KOROGODA, V. MANSUROV, A. LUGOVIK

In this paper, the mechanical properties of the ferromagnetic powder structured by a magnetic field are defined and the constructive decisions based on these properties are made. It is shown that under magnetic abrasive machining in the area of contact with the working surface the layer where the most intensity of deformation is found shifts. The shear area at that is parallel to the plane of the metrical unit. Modelling of the strain-stress distribution of the powder particles chains is presented. Based on the perfectly plastic body model focal points of optimal projecting, adaptability, dynamics elastic-plastic and hard-plastic body are developed. The achieved solution is suitable for a deflected mode calculation as the function of stress, deformation, density and magnetic induction.

СОДЕРЖАНИЕ

ИНФОРМАТИКА

<i>Brovko N., Bogush R.</i> Smoke detection algorithm for video surveillance systems	2
<i>Давыдова Н.С., Осипов А.Н., Давыдов М.В., Меженная М.М.</i> Метод и технические средства управляемого изменения двигательного навыка человека на основе многоканальной электростимуляции	10
<i>Железняк В.К., Барков А.В.</i> Обнаружение периодических импульсных последовательностей и оценка их периода.....	16
<i>Адуцкевич И.А., Садов В.С.</i> Моделирование характеристик беспроводных информационных одноранговых сетей как комбинаций систем массового обслуживания с общей памятью	21

МАТЕМАТИКА

<i>Nguyen Van Mau, Nguyen Thi Giang</i> On solutions of integral equations with reflections	27
<i>Тихоненко Т.В.</i> Конечные группы, содержащие заданную систему холловых подгрупп.....	39
<i>Козлов А.А., Бурак А.Д.</i> Об оценке влияния матрицы Коши системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на угловые меры выпуклых конусов.....	42
<i>Кирьяцкис Д.Э.</i> О линейном дифференциальном уравнении чебышевского типа	47
<i>Dinh Cong Huong, Nguyen Van Mau</i> On the oscillation and asymptotic behavior for a higher order neutral difference equation.....	55

ФИЗИКА

<i>Бордусов С.В., Мадвейко С.И.</i> Исследование характеристик прохождения энергии СВЧ-поля в плазму возбуждаемого разряда.....	62
<i>Телеш Е.В., Касинский Н.К., Томаль В.С.</i> Формирование покрытий ионно-лучевым распылением диэлектрических мишеней	70
<i>Бринкевич Д.И., Вабищевич Н.В., Вабищевич С.А.</i> Микропрочностные свойства монокристаллического кремния, выращенного при наложении на расплав сложных электромагнитных полей	77
<i>Янушкевич В.Ф., Зданович А.А., Шостак Д.О., Щаденков Ю.А.</i> Влияние характеристик подстилающих поверхностей на электродинамические параметры анизотропной среды в режиме гармонического сигнала	83
<i>Пелевин В.Ф.</i> Широкоугольное сканирование рефлекторными антеннами	88
<i>Чертков В.М., Мальцев С.В.</i> Определение электрофизических свойств объекта методами нелинейной радиолокации.....	99
<i>Лыньков Л.М., Махмуд М.Ш., Криштопова Е.А.</i> Экраны электромагнитного излучения на основе порошкообразного шунгита.....	103
<i>Остриков О.М.</i> Способ определения зависимости геометрических параметров двойников от величины внешней сосредоточенной нагрузки	109
<i>Хейфец М.Л., Железняк В.К., Кухта С.В., Сеньют В.Т., Анкуда С.Н., Колмаков А.Г., Цоохуу Х., Энхтур Л.</i> Влияние температурного отжига в условиях высоких давлений на структурные и электрофизические характеристики шунгитового углерода	113
<i>Хомич Н.С., Корогода О.П., Мансуров В.А., Луговик А.Ю.</i> Сдвиговая деформация ферромагнитного порошка в магнитном поле	121