

MIESIĘCZNIK  
POŁOCKI.

№ 4(38), 2022

Т о м I.  
Р о к 1818.

*«Вестник Полоцкого государственного университета»  
продолжает традиции первого в Беларуси литературно-  
научного журнала «Месячник Полоцкий».*



---

---

## ВЕСТНИК ПОЛОЦКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА Серия С. Фундаментальные науки

В серии С научно-теоретического журнала публикуются статьи, прошедшие рецензирование, содержащие новые научные результаты в области информатики, вычислительной техники и управления, а также физико-математических наук.

---

---

## ВЕСНІК ПОЛАЦКАГА ДЗЯРЖАУНАГА УНІВЕРСІТЭТА Серыя С. Фундаментальныя навукі

У серыі С навукова-тэарэтычнага часопіса друкуюцца артыкулы, якія прайшлі рэцэнзаваанне, змяшчаюць новыя навуковыя вынікі ў галіне інфарматыкі, вылічальнай тэхнікі і кіравання, а таксама фізіка-матэматычных навук.

---

---

## HERALD OF POLOTSK STATE UNIVERSITY Series C. Fundamental sciences

Series C includes reviewed articles which contain novelty in research and its results in the field of computer science, computer engineering and management, as well as physical and mathematical sciences.

---

---

Журнал входит в Российский индекс научного цитирования.  
Электронная версия номера размещена на сайте <https://journals.psu.by/index.php/fundamental/index>.

**Адрес редакции:**  
Полоцкий государственный университет, ул. Блохина, 29, г. Новополоцк, 211440, Беларусь  
тел. + 375 (214) 59 95 44, e-mail: [vestnik@psu.by](mailto:vestnik@psu.by)

Отв. за выпуск: *С.А. Вабищевич.*  
Редактор *С.Е. Рясова.*

Подписано к печати 12.05.2022. Бумага офсетная 70 г/м<sup>2</sup>. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Ризография.  
Усл. печ. л. 12,79. Уч.-изд. л. 15,41. Тираж 100 экз. Заказ 305.

**ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ**

UDC 621

DOI 10.52928/2070-1624-2022-38-4-2-5

**SYSTEM OF VESSEL VIBRATIONAL DIAGNOSING**

**D. KECHIK, N. KOSMACH, P. RIABTSEV, R. TOLKACH, PhD I. DAVYDOV**  
(Belarussian state university of informatics and radioelectronics, Minsk)

*The purpose of the article is to propose the system of vessel diagnosing. Review of the currently used approaches has been conducted. Especial for vessel diagnosing issues were discussed. Diagnosing and maintenance system satisfying according requirements has been proposed. Industry 4.0 approaches and modern digital signal processing techniques have been applied. Future work plan has been proposed.*

**Keywords:** *vibrational diagnosing, Industry 4.0, vessel diagnosing.*

**Introduction.** Vessel propulsion set is a complex equipment and requires regular maintenance. Its unexpected failure fraught with high losses. Equipment state assessment relying on vibration signals and predictive maintenance have been shown to be effective in industry. Less works devoted to ship equipment vibrational diagnosing are available. The most commonly used methods for diagnosing of vessel propulsion are [1; 2]:

1. Vibration level monitoring.
2. Octave spectrum levels.
3. Vibration spectrum analysis.
4. Detection of pulses.

Vibration level characterizes general state of equipment and do not allow to identify defect or damaged unit. Octave spectrum analysis is more informative and can be used under conditions of varied or unknown shaft speed. Spectral analysis is widely used for faulty units identification. Pulse detection is usually used for bearing defects identification.

The commonly used in industry signal processing methods are successfully applied for vessel equipment diagnosing, but the equipment exploitation experience has revealed especial requirements for the diagnosing and maintenance system.

**Problem formulation.** Unlike the factory, vessels aggregate diagnosing is limited due to absence diagnostics specialist onboard, then operative data acquisition and processing is required [1; 2]. Then diagnosing system adjustment is possible for specialist and full amount of needed for maintenance information is available for sheep crew. At the same time, on shore diagnosing and maintenance services obtain this information simultaneously [2].

Exploitation conditions of vessel aggregates makes often convenient spectral analysis difficult. Propeller rotation speed vary due to water flow influence [1; 3; 4]. Speed variation has periodic component conditioned by blades manufacturing tolerances. But speed variation is rarely uniform due to cavitation in water flow. Another reason of non-steady vibration is rapidly changing of load and speed (due to bad weather, for example) [1]. The most dangerous effect is hunting of an alternator set governor. Then propulsion set diagnosing is the most complicated due to strong simultaneous amplitude and angle modulation. Monitoring of aggregates in transient modes (e.g. engine start and stop) is recommended [1]. Shaft frequency vary rapidly in this mode. The solution is application of frequency tracking and signal resampling methods that require installation of additional hardware or high computational resources. Synchronous resampling accuracy is reported to be not enough in many cases [1]. Exploitation of rotary equipment and vehicles experience has shown that speed and load variation affected statistical characteristics of vibration. This effect is also required to be compensated. Especially attention must be paid to preventing of system failures that are usually occur in transient operating modes [1].

Discussed problems require complex solution consisting of application of complicated algorithms of digital signal processing and thus deployment of powerful processing server and convenient off-line access to processing results. The solution must fulfill the requirements to resolve given problems:

- be fully automated from data acquisition to decision making (problem 1);
- update information about technical state of vessel equipment (problem 1);
- be able to conduct complicated DSP (problem 2, 3);
- update the simplest metrics of vibration fast (problem 1).

Development of automatic control systems require their unified integration with each other. The issues of incompatibility of different systems and data cleanup might be overcome [5].

**Purposed solution.** To resolve the problems and satisfy the requirements, the comprehensive solution is proposed. The general objective of the proposed system is condition monitoring and prescriptive maintenance

of the ship propulsion system in order to reduce the number of breakdowns, reduce downtime of ships, and increase the efficiency of their use. The architecture of the proposed system for condition monitoring and prescriptive maintenance will consist of 3 main parts:

1. *Data acquisition system* for the collection and transmission of the marine propulsion units telemetry data.
2. Cloud-based *analytical platform* for telemetry data processing and diagnostic report generation.
3. *User interface* for results representation.

*Data acquisition system* consists of the data transmitter and the number of sensors installed on marine propulsion units. It collects telemetry data on equipment condition (such as vibration, temperature, rotational speed, etc.) by predetermined schedule and transfers it to the cloud-based analytical platform for processing.

*The analytical platform* is accountable for detecting defects of the serviced equipment and generating reports with detailed maintenance prescriptions (instructions). The analytical platform consists of the number of algorithms for vibration and telemetry data processing. Conditions of equipment exploitation require application and adaptation of modern DSP algorithms. For example, it has been discussed above that conventional spectral analysis is not effective under conditions of significant speed variation. To overcome this issue, shaft frequency tracking and signal resampling is applied [6]. To reveal modulated and pulse signals produced by bearings and gearings, wavelet analysis [7] and its modifications, such as packet wavelet transform [8], sparse wavelet decomposition [9; 10] are applied. Additional arrangements are speed and load evaluation and their influence on informative features compensation. For example, it has been shown to be effective in statistical measures of vibration trending task [11]. As a consequence, the following data processing algorithms are applied:

- vibration statistics trending (RMS, peak factor, kurtosis, etc.);
- ISO-based analysis (ISO 10816, ISO 7919, ISO 15242, VDI 3834, ISO 1940);
- 1-,  $\frac{1}{3}$ -,  $\frac{1}{6}$ -octave spectrum analysis;
- frequency-domain analysis (spectrum and demodulated HF-spectrum);
- time-frequency domain analysis (wavelet analysis, correlogram analysis);
- time-domain analysis (vibration shock pulses recognition & classification);
- time synchronous averaging (TSA);
- order spectrum analysis;
- cepstral domain analysis;
- equipment load operating mode recognition & compensation;
- equipment speed operating mode recognition & compensation;
- shaft rotational speed tracking & signal resampling;
- shaft orbit analysis;
- history data processing (trend analysis, defects verification, prognosis);
- equipment remaining useful life (RUL) estimation & etc.

The algorithms are used to determine the speed operating mode of the marine, estimate and prognosis the technical condition of the propulsion unit, and form a prescription for its maintenance (if it is required).

*The user interface* in the form of a personal account. The developed system will be also integrated within ERP systems (i.e., MES, CMMS, etc.) to transfer the processing results (orders for maintenance) to them.

The diagnosing and maintenance system diagram is presented on Figure 1. The server-based software conducts processing of vibration, informative features extraction, long term prognosis and maintenance prescriptions. At the same time, vessel technical state and recommendations for ship crew are operatively updated. The system of enterprise equipment maintenance, integrated with context broker and enterprise automated control system has been proposed [12]. The context broker has been shown to be effective for integration unification between diagnosing and control systems. Modified system for marine diagnosis (Figure 2) includes integration with context broker that updates virtual entity of ship aggregates. Each unit state and according recommendations (replace in two month, emergency stop) are updated through broker and consumed by indication and maintenance systems.

**Future work plan.** The most of assigned tasks can be potentially solved relying on existing methods and frameworks being parts of proposed system. Tasks of system failures prevention and transient mode vibration analysis require new algorithms development.

1. Selection of a vessel and analysis of the kinematic diagram of its propulsion system.
2. Analysis of failures in the ship's propulsion system and justification of the business model of its maintenance.
3. Adaptation of the acquisition system to collect and transfer the data of vibration and rotational speed, justification of the number and characteristics of the sensors for reliable diagnosis.
4. Equipping propulsion units of the vessel with a telemetry data acquisition and transmission system. Deploy cloud storage.
5. Developing a digital twin of the marine propulsion system for vibration-based diagnostics.
6. Preconfiguration of the analytical platform for diagnosing the propulsion system based on the data being taken. Create a preliminary user account to display the processing results.
7. Adaptation of vibration analysis algorithms for fault detection of propulsion system. Research and development of the additional algorithms for the specific operation and maintenance of the propulsion system.

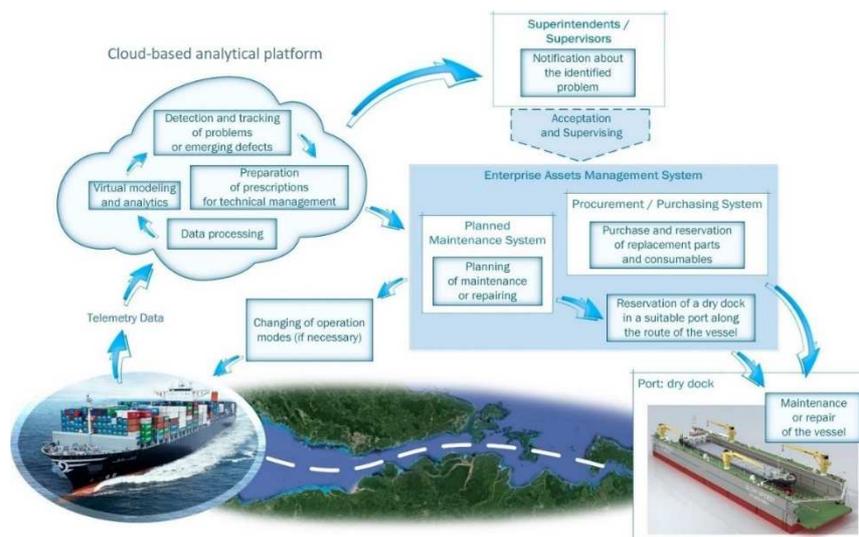


Figure 1. – Cloud-based system for vessel diagnosis

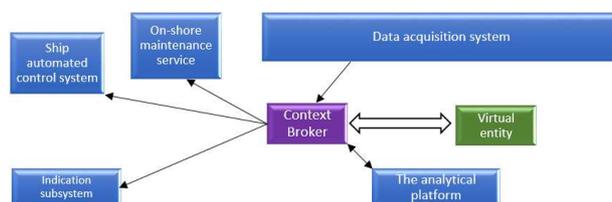


Figure 2. – Modified system for vessel diagnosis

8. Development of an indication system for detected faults (integration with ERP, push-notifications, etc.). Finalization of the user interface and the format of diagnostic reports.

9. Integration of diagnosing, telemetry and indication blocks and automated control systems with context broker.

10. Development of new algorithms of ship vessel diagnosing.

**Conclusions.** A review of vessel vibrational diagnosing problems and widely used solutions has been presented in this work. System of vessel diagnosing has been proposed. The system is fully automated, it operatively updates information about vessel technical state. Virtual entity metadata, consisting of informative features and diagnostic information, is updated. Automatic decision-making systems, onshore services and vessel state indication blocks receive the updates through context broker.

## REFERENCES

1. Barkov, A. V., Barkova, N. A., & Grishchenko, D. V. (2012). Bortovaya sistema diagnostirovaniya sudovykh mashin [Onboard system of vessel equipment diagnosing]. *Sovremennye tekhnologii avtomatizatsii bor'by za zhivuchest' korablei i sudov [Modern technologies of vessel and ship damage control]*. Saint-Petersburg: Institut avtomatizatsii protsessov bor'by za zhivuchest' korablya, sudna. (In Russ.).
2. Barkova, N. A., Barkov, A. V., & Fedorishchev, V. V. (2017). Distantionnaya diagnostika sudovykh mashin i oborudovaniya [Remote diagnostics of shipboard machinery and equipment]. *Sovremennye tekhnologii avtomatizatsii bor'by za zhivuchest' korablei i sudov [Modern technologies of vessel and ship damage control]* (254–259). Saint-Petersburg: Society of informatics, computational technic, connection and control systems. (in Russian).
3. Mangesh, V. L., Singh, Y. P., & Kumar, A. (2018). A Review of Marine Engine Vibration Performance Analysis and Counteract Measures. *IOSR J. of Mechanical and Civil Engineering*, 15(2) ver. II, 48–53. DOI: 10.9790/1684-1502024853.
4. Carlton, J. S., & Vlastic, D. (2005). Ship vibration and noise: Some topical aspects. *1<sup>st</sup> International Ship Noise and Vibration Conference*. London: Lloyd's Register.
5. Kechik, D. A. Davydov, I. G., Gerasimuk, Ya. V., Tsurko, A. V., & Smolev, M. A. (2020). Integratsiya sistemy diagnostiki promyshlennogo oborudovaniya s ekosistemami trenda Industry 4.0, postroennymi na osnove freimvorka FIWARE [Integration of the system of diagnostics of industrial equipment and ecosystems of Industry 4.0 trend built on the basis of FIWARE framework]. In V. A. Bogush [et al.] (Eds.), *Informatsionnye radiosistemy i radiotekhnologii [Information radiosystems and radiotechnologies]* (206–210). Minsk: BSUIR. (In Russ., abstr. in Engl.).
6. Zhang, X., Wen, G., & Wu, T. (2012). A new time synchronous average method for variable speed operating condition gearbox. *J. Vibroengineering*, 14(4), 1766–1774.
7. El Morsy, M. (2019). Fault Diagnosis Approach for Roller Bearings Based on Optimal Morlet Wavelet De-Noising and Auto-Correlation Enhancement. *SAE Int. J. Passeng. Cars – Mech. Syst.*, 12(2). DOI: [10.4271/06-12-02-0010](https://doi.org/10.4271/06-12-02-0010).

8. Tian, J. Pecht, M., & Li, C. (2012). Diagnosis of rolling element bearing fault in bearing-gearbox union system using wavelet packet correlation analysis. *65<sup>th</sup> Meeting of the Machinery Failure Prevention Technology Soc. (MFPT2012)* (354–359). Dayton, OH, USA.
9. Aslamov, Y., Aslamov, A., Davydov, I., & Tsurko, A. (2019). Sparse Wavelet Decomposition with Redundant Dictionary for Vibration Waveform Analysis. *14<sup>th</sup> International Conference on Pattern Recognition and Information Processing* (6). Minsk: BSUIR.
10. Smith, E., & Lewicki, M. S. (2005). Efficient Coding of Time-Relative Structure Using Spikes. *Neural Computation*, (17), 19–45.
11. Kechik, D. A. (2020). Kompensatsiya izmeneniya moshchnosti vibroakusticheskogo signala pri izmenenii skorostnogo rezhima oborudovaniya. [Vibrational signal power variance compensation during equipment speed mode changing]. *Doklady BGUIR*, 18(5), 26–34. (In Russ., abstr. in Engl.).
12. Kechik, D., Davydov, I., Hierasimuk, Ya., Tsurko, A., & Smolev, M. (2021). Integration of the system of diagnostics of industrial equipment and enterprise asset management systems using FIWARE framework. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (4), 20–28.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Барков, А. В. Бортовая система диагностирования судовых машин / А. В. Барков, Н. А. Баркова, Д. В. Грищенко // Современные технологии автоматизации борьбы за живучесть кораблей и судов : первая науч.-практ. конф., СПб., 6 дек. 2012 г. / ОАО «Концерн «НПО «Аврора». – СПб., 2012.
2. Баркова, Н. А. Дистанционная диагностика судовых машин и оборудования / Н. А. Баркова, А. В. Барков, В. В. Федоричев // Информационная безопасность регионов России (ИБРР-2017) : юбилейная X с.-петерб. межрегион. конф., СПб., 1–3 нояб. 2017 г. / СПОИСУ. – СПб., 2017. – С. 254–259.
3. Mangesh, V. L. A Review of Marine Engine Vibration Performance Analysis and Counteract Measures / V. L. Mangesh, Y. P. Singh, A. Kumar // *IOSR J. of Mechanical and Civil Engineering*. – 2018. – Vol. 15, iss. 2, ver. II. – P. 48–53. – DOI: 10.9790/1684-1502024853.
4. Carlton, J. S. Ship vibration and noise: Some topical aspects / J. S. Carlton, D. Vlasic // *1<sup>st</sup> International Ship Noise and Vibration Conference*, London, June 20–21. – London, 2005. – 11 p.
5. Интеграция системы диагностики промышленного оборудования с экосистемами тренда Industry 4.0, построенными на основе фреймворка FIWARE / Д. А. Кечик [и др.] // Информационные радиосистемы и радиотехнологии : материалы Респ. науч.-практ. конф., Минск, 28–29 окт. 2020 г. / Белорус. гос. ун-т информатики и радиоэлектроники ; редкол. : В. А. Богуш [и др.]. – Минск, 2020. – С. 206–210.
6. Zhang, X. A new time synchronous average method for variable speed operating condition gearbox / X. Zhang, G. Wen, T. Wu // *J. Vibroengineering*. – 2012. – Vol. 14, № 4. – P. 1766–1774.
7. El Morsy, M. Fault Diagnosis Approach for Roller Bearings Based on Optimal Morlet Wavelet De-Noising and Auto-Correlation Enhancement / M. El Morsy // *SAE Int. J. Passeng. Cars – Mech. Syst.* – 2019. – Vol. 12, iss. 2. – DOI: [10.4271/06-12-02-0010](https://doi.org/10.4271/06-12-02-0010).
8. Tian, J. Diagnosis of rolling element bearing fault in bearing-gearbox union system using wavelet packet correlation analysis / J. Tian, M. Pecht, C. Li // *65<sup>th</sup> Meeting of the Machinery Failure Prevention Technology Soc. (MFPT2012)*. – Dayton, OH, USA, 2012. – P. 11.
9. Sparse Wavelet Decomposition with Redundant Dictionary for Vibration Waveform Analysis / Y.P. Aslamov [et al.] // *14<sup>th</sup> International Conference on Pattern Recognition and Information Processing*, Minsk, 21–23 May 2019 / BSUIR. – Minsk, 2019. – P. 354–359.
10. Smith, E. Efficient Coding of Time-Relative Structure Using Spikes / E. Smith, M.S. Lewicki // *Neural Computation*. – 2005. – № 17. – P. 19–45.
11. Кечик, Д. А. Компенсация изменения мощности виброакустического сигнала при изменении скоростного режима оборудования / Д. А. Кечик // Доклады БГУИР. – 2020. – Т. 18, № 5. – С. 26–34.
12. Integration of the system of diagnostics of industrial equipment and enterprise asset management systems using FIWARE framework / D. Kechik [et al.] // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки*. – 2021. – № 4. – С. 20–28.

Поступила 01.03.2022

#### СИСТЕМА ВИБРАЦИОННОЙ ДИАГНОСТИКИ СУДОВ

Д. А. КЕЧИК, Н. В. КОСМАЧ, П. Г. РЯБЦЕВ, Р. В. ТОЛКАЧ, И. Г. ДАВЫДОВ

*Цель настоящей работы – предложить систему диагностики морских судов. Проведен обзор используемых в настоящее время подходов. Рассмотрены специфические для диагностики судов проблемы. Предложена система диагностики и обслуживания судов, удовлетворяющая соответствующим требованиям, для чего использовались подходы тренда Индустрии 4.0 и современные методы цифровой обработки сигналов. Предложен план будущей работы.*

**Ключевые слова:** вибрационная диагностика, Индустрия 4.0, диагностика судов.

УДК 517.518.45

DOI 10.52928/2070-1624-2022-38-4-6-12

## МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ В ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РЕГРЕССИИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ

*д-р техн. наук, проф. С. Г. ЕХИЛЕВСКИЙ*, канд. физ.-мат. наук, доц. *О. В. ГОЛУБЕВА*,  
*О. Н. ЗАБЕЛЕНДИК*  
(Полоцкий государственный университет)

*Методами теории вероятностей обоснована лаконичная процедура, позволяющая выразить параметры полиномиальной регрессии условного математического ожидания через смешанные статистические моменты системы случайных величин. Реализованы примеры линейной и квадратичной регрессии. Во втором случае рассмотрение ограничено ситуацией, когда плотность вероятности случайного аргумента является четной функцией. Результат получен без громоздких выкладок, ибо при его получении использованы не начальные статистические моменты, возникающие в методе наименьших квадратов, а смешанные центральные моменты, отражающие вид регрессионной кривой. Показано, что в общем случае учет нелинейности корреляционной зависимости лишь усиливает неравенство, подтверждающее адекватность регрессионного приближения. Обоснована сходимость такой процедуры, если условное математическое ожидание не является полиномом по сути.*

**Ключевые слова:** *условное математическое ожидание, полиномиальная регрессия, смешанные статистические моменты.*

**Введение.** Обычно регрессию корреляционной зависимости случайных величин осуществляют методом наименьших квадратов [1], не имеющим никакого отношения к теории вероятностей. К тому же его использование в случае нелинейной регрессии приводит к системам линейных алгебраических уравнений высоких порядков и, как следствие, громоздким выкладкам. По этой причине получение регрессионных кривых, как правило, просто не рассматривается [2]. Вместе с тем известно [3; 4], что закон распределения случайной величины (или их системы) можно восстановить, пользуясь соответствующими статистическими моментами. В частности, такая процедура реализована в [5] при моделировании рабочего процесса респиратора на химически связанном кислороде. Это позволило не только выделить асимптотику процесса, но и определить поправки к ней, обусловленные асимметриями и эксцессами высших порядков. Аналогично в [6] метод статистических моментов позволил рассмотреть независимые повторные испытания как асимптотически гауссовский случайный процесс с дискретным временем и проиллюстрировать справедливость локальной теоремы Лапласа лишь в окрестности наиболее вероятного числа успехов.

В настоящей публикации методами теории вероятностей обосновывается процедура, позволяющая выразить параметры линии регрессии условного математического ожидания через статистические моменты системы случайных величин. Рассматриваются случаи линейной и квадратичной регрессии.

**Линейная регрессия корреляционной зависимости.** Рассмотрим двумерную случайную величину  $\{X, Y\}$  с возможными значениями  $(x, y)$ . Аппроксимируем условное математическое ожидание  $Y$  прямой линией

$$M(Y | X = x) = m_Y(x) \approx kx + b. \quad (1)$$

Ее параметры  $k$  и  $b$  выражаются через начальные и центральные моменты  $\{X, Y\}$  независимо от их числовых значений. Для упрощения процедуры получения такого выражения для  $b$  будем считать, что среднеквадратическое отклонение  $\sigma_X$  мало. В соответствии с неравенством Чебышева  $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{\sigma_X \rightarrow 0} P(|x - m_X| < \varepsilon) \geq \lim_{\sigma_X \rightarrow 0} (1 - \sigma_X^2 / \varepsilon) = 1.$$

Это значит, что плотность вероятности  $X$  превращается в  $\delta$ -функцию Дирака

$$\lim_{\sigma_X \rightarrow 0} f(x) = \delta(x - m_X),$$

поэтому

$$m_Y = \int_{-\infty}^{\infty} m_Y(x) f(x) dx = m_Y(m_X),$$

откуда с учетом (1) получим строгое равенство

$$b = m_y - k m_x, \quad (2)$$

ибо короткий участок ( $\sigma_x \rightarrow 0$ ) линии  $m_y(x)$  аппроксимируется прямой сколь угодно точно.

Подставив (2) в (1), сведем построение регрессионной прямой к отысканию ее углового коэффициента

$$m_y(x) - m_y \approx k(x - m_x). \quad (3)$$

По определению

$$m_y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x) dy, \quad (4)$$

где  $f(y|x)$  – условная плотность вероятности  $Y$ . Умножим условие ее нормировки  $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(y|x) dy$  на  $m_y$  и отнимем полученное от (4):

$$m_y(x) - m_y = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y) f(y|x) dy = \frac{1}{f(x)} \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y) f(x, y) dy. \quad (5)$$

Подставив (5) в (3), умножим результат на  $(x - m_x) f(x)$  и выполним интегрирование по  $x$ :

$$\mu_{XY} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy = k \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = k \sigma_x^2. \quad (6)$$

Отсутствие после интегрирования зависимости от  $x$  позволяет подбором  $k$  обеспечить строгое равенство в (6). Именно такой выбор обеспечивает минимальность среднего значения условной дисперсии  $Y$ , полученной в приближении линейной регрессии корреляционной зависимости, в чем можно убедиться<sup>1</sup> добавив к  $k$  произвольную поправку  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y - (k + \Delta)(x - m_x))^2 f(x, y) dx dy &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 f(y) dy}_{=\sigma_y^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y) dx}_{=1} - \\ &- 2(k + \Delta) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy}_{=k\sigma_x^2 \text{ (см. (6))}} + \\ &+ (k + \Delta)^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx}_{=\sigma_x^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(y|x) dy}_{=1} = \\ &= \sigma_y^2 - k^2 \sigma_x^2 + \Delta^2 \sigma_x^2 > \sigma_y^2 - k^2 \sigma_x^2, \end{aligned} \quad (7)$$

Данный результат допускает следующую интерпретацию. Правильный выбор значений  $k$  и  $b$  обеспечивает совпадение точного значения смешанного центрального момента 2-го порядка  $\mu_{XY}$  с полученным в приближении линейной регрессии корреляционной зависимости. Именно это обстоятельство исключает вклад в среднее значение условной дисперсии  $Y$ , обусловленный погрешностью, вносимой

<sup>1</sup> Именно это является обоснованием того, что параметры  $k$  и  $b$  можно определять методом наименьших квадратов на основе экспериментальных данных по измерению двумерной случайной величины  $\{X, Y\}$ .

в  $\mu_{XY}$  процедурой регрессии. При этом оставшаяся погрешность, связанная с процедурой регрессии, обусловлена только смешанными центральными моментами более высоких порядков. Чтобы избавиться от нее нужно добавлять в (1) новые параметры (повышать степень регрессионного полинома).

С учетом соотношения (6) для углового коэффициента  $k$  уравнение регрессии (3) примет вид

$$(m_Y(x) - m_Y) / \sigma_Y \approx r_{XY} (x - m_X) / \sigma_X, \quad (8)$$

где

$$r_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - m_X}{\sigma_X} \cdot \frac{y - m_Y}{\sigma_Y} f(x, y) dx dy = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (9)$$

– коэффициент линейной корреляции (центральный смешанный момент 2-го порядка приведенных случайных величин  $X$  и  $Y$ ).

Согласно (6), (7) и (9) количественной характеристикой разброса  $\{X, Y\}$  вокруг регрессионной прямой (8) является интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_Y - k(x - m_X))^2 f(x, y) dx dy = \sigma_Y^2 (1 - r_{XY}^2). \quad (10)$$

Вклад в правую часть (10) дает условная дисперсия  $\sigma_Y^2(x)$  и погрешность, возникающая при замене  $m_Y(x)$  прямой линией. Чтобы оценить адекватность такого приближения, определим точный вклад среднего значения  $\sigma_Y^2(x)$  в дисперсию  $Y$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_Y)^2 f(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(y - m_Y)^2 f(y) dy}_{=\sigma_Y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(x|y) dx}_{=1} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_Y(x) + m_Y(x) - m_Y)^2 f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (y - m_Y(x))^2 f(y|x) dy}_{\sigma_Y^2(x)} - \\ &\quad - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(m_Y(x) - m_Y) f(x) dx}_{=0} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(y - m_Y(x)) f(y|x) dy}_{=0} + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(m_Y(x) - m_Y)^2 f(x) dx}_{=1} \int_{-\infty}^{\infty} f(y|x) dy = M(\sigma_Y^2(x)) - 2 \cdot 0 \cdot 0 + D(m_Y(x)) \cdot 1, \end{aligned} \quad (11)$$

где учтены условия нормировки, а также определения математического ожидания

$$M(m_Y(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} m_Y(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{y f(y|x) dy}_{=m_Y(x)} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy = m_Y,$$

дисперсии

$$\int_{-\infty}^{\infty} (m_Y(x) - m_Y)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (m_Y(x) - M(m_Y(x)))^2 f(x) dx = D(m_Y(x)), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_Y^2(x) f(x) dx = M(\sigma_Y^2(x))$$

и равенство нулю центральных моментов первого порядка

$$\int_{-\infty}^{\infty} (y - m_Y(x)) f(y|x) dy = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x) dy}_{=m_Y(x)} - m_Y(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(y|x) dy}_{=1} = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (m_Y(x) - m_Y) f(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} m_Y(x) f(x) dx}_{M(m_Y(x))=m_Y} - m_Y \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}_{=1} = 0.$$

Согласно (11) и благодаря тому, что разброс  $\{X, Y\}$  вокруг условного математического ожидания меньше, чем вокруг регрессионной прямой

$$M(\sigma_Y^2(x)) = \sigma_Y^2 (1 - D(m_Y(x))/\sigma_Y^2) \leq \sigma_Y^2 (1 - r_{XY}^2).$$

Иными словами,

$$\eta^2 = D(m_Y(x))/\sigma_Y^2 \geq r_{XY}^2, \tag{12}$$

причем равенство возможно только в ситуации точного равенства (8), когда корреляция линейна по сути. В остальных случаях адекватность приближения (8) подтверждается силой неравенства

$$(\eta^2 - r_{XY}^2)/\eta^2 \ll 1. \tag{13}$$

Определенную согласно (12) величину  $\eta$  называют корреляционным отношением.

Если условие (13) нарушено, регрессия должна быть нелинейной, чтобы описывающий ее полином лучше «вписывался» в график условного матожидания  $m_Y(x)$ .

**Квадратичная регрессия корреляционной зависимости.** Если график  $m_Y(x)$  не содержит перегибов, усилить неравенство (13) позволяет квадратичная регрессия

$$m_Y(x) \approx ax^2 + bx + c. \tag{14}$$

Выразим ее параметры  $a, b, c$  через статистические моменты (в том числе и смешанные) системы случайных величин  $\{X, Y\}$ .

Для этого умножим (14) на плотность вероятности  $f(x)$  и выполним интегрирование по всем  $x$ . Точность полученного в результате такого усреднения равенства

$$m_Y = am_{X^2} + bm_X + c \tag{15}$$

при любых  $a$  и  $b$  обеспечивается соответствующим подбором значения  $c$ . Подставив его в (14), получим

$$m_Y(x) - m_Y \approx a(x^2 - m_{X^2}) + b(x - m_X). \tag{16}$$

Подставим (5) в (16), умножим результат на  $(x - m_X)f(x)$  и выполним интегрирование по  $x$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)(y - m_Y) f(x, y) dx dy = a \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - m_{X^2})(x - m_X) f(x) dx + b \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f(x) dx}_{=\sigma_X^2}. \tag{17}$$

Отсутствие после интегрирования зависимости от  $x$  позволяет подбором  $a$  и  $b$  обеспечить в (17) строгое равенство.

Преобразуем фигурирующий в правой части (17) интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - m_{X^2})(x - m_X) f(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x) dx}_{=m_{X^3}} - m_{X^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx}_{=m_X} - m_X \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - m_{X^2}) f(x) dx}_{=0}, \quad (18)$$

где учтено равенство нулю центрального момента первого порядка. В результате с учетом (17), (18) и (9) получим первое уравнение для определения  $a$  и  $b$

$$\sigma_X \sigma_Y r_{XY} = a(m_{X^3} - m_{X^2} m_X) + b \sigma_X^2. \quad (19)$$

Для получения второго уравнения осуществим аналогичную процедуру. После подстановки (5) в (16) умножим результат на  $(x^2 - m_{X^2}) f(x)$  и выполним интегрирование по  $x$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - m_{X^2})(y - m_Y) f(x, y) dx dy &\equiv \sigma_{X^2} \sigma_Y r_{X^2 Y} = \\ &= a \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - m_{X^2})^2 f(x) dx}_{=\sigma_{X^2}^2} + b \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - m_{X^2})(x - m_X) f(x) dx}_{=m_{X^3} - m_X m_{X^2}}, \end{aligned} \quad (20)$$

где последнее равенство записано с учетом (18).

Согласно (20) второе уравнение для определения  $a$  и  $b$ , записанное в компактной форме, имеет вид

$$\sigma_{X^2} \sigma_Y r_{X^2 Y} = a \sigma_{X^2}^2 + b(m_{X^3} - m_X m_{X^2}). \quad (21)$$

Решение системы двух линейных алгебраических уравнений (19), (21) позволяет в общем виде выразить неизвестные  $a$  и  $b$  через фигурирующие в ней статистические моменты закона распределения  $\{X, Y\}$  и завершить процедуру квадратичной регрессии корреляционной зависимости  $Y$  от  $X$ .

Чтобы упростить анализ полученных результатов, ограничим дальнейшее рассмотрение ситуаций, когда плотность вероятности  $X$  является четной функцией ( $f(-x) = f(x)$ ). В этом случае  $m_{X^3} = m_X = 0$  и согласно (19), (21)

$$b = \sigma_Y r_{XY} / \sigma_X, \quad a = \sigma_Y r_{X^2 Y} / \sigma_{X^2}, \quad (22)$$

что позволяет записать (16) в аналогичном (8) виде:

$$\frac{m_Y(x) - m_Y}{\sigma_Y} \approx r_{X^2 Y} \frac{x^2 - m_{X^2}}{\sigma_{X^2}} + r_{XY} \frac{x}{\sigma_X}. \quad (23)$$

Приближенное равенство (23) получено без громоздких выкладок, ибо мы отталкивались не от начальных статистических моментов, возникающих в методе наименьших квадратов, а от смешанных центральных моментов, отражающих вид регрессионной кривой.

Покажем, что нелинейность регрессии снижает среднеквадратический разброс  $Y$  вокруг ее графика (см. (16) по сравнению с полученным в линейном приближении (см. (10)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_Y - a(x^2 - m_{X^2}) - b(x - m_X))^2 f(x, y) dx dy = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (y - m_Y)^2 f(y) dy}_{=\sigma_Y^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y) dx}_{=1} -$$

$$\begin{aligned}
 & -2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(y - m_Y) \left( a(x^2 - m_{X^2}) + b(x - m_X) \right)}_{=a^2\sigma_{X^2}^2 + b^2\sigma_X^2 \text{ (см. (17), (20))}} f(x, y) dx dy + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \left( a(x^2 - m_{X^2}) + b(x - m_X) \right)^2 f(x) dx}_{=a^2\sigma_{X^2}^2 + b^2\sigma_X^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(y|x) dy}_{=1} = \\
 & = \sigma_Y^2 - a^2\sigma_{X^2}^2 - b^2\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \left( 1 - r_{X^2Y}^2 - r_{XY}^2 \right) < \sigma_Y^2 \left( 1 - r_{XY}^2 \right). \tag{24}
 \end{aligned}$$

При этом неравенство (12) приобретает вид

$$\eta^2 = D(m_Y(x)) / \sigma_Y^2 \geq r_{X^2Y}^2 + r_{XY}^2, \tag{25}$$

причем равенство возможно только в ситуации точного равенства (23), когда корреляция квадратична по сути.

В общем случае учет нелинейности корреляционной зависимости лишь усиливает неравенство, подтверждающее адекватность регрессионного приближения (см. (13))

$$\left( \eta^2 - r_{X^2Y}^2 - r_{XY}^2 \right) / \eta^2 < \left( \eta^2 - r_{XY}^2 \right) / \eta^2 \ll 1. \tag{26}$$

Если и этого недостаточно (например, график условного матожидания содержит точку перегиба), целесообразно заменить в (14) квадратный полином на кубический и т. д. Сходимость такой процедуры (если  $m_Y(x)$  не полином по сути) вытекает из того, что правая часть (26) неотрицательна по смыслу.

Разумеется, наличие  $f(x, y)$  позволяет непосредственно определить подлинную зависимость  $m_Y(x)$ . Необходимость в приближении (8) или (23) и, соответственно, критериях их адекватности (13), (26) возникает, когда о корреляции судят на основе экспериментальных данных по измерению  $\{X, Y\}$ . При этом приближенные числовые значения фигурирующих в (8), (13) и (23), (26) параметров ( $m_Y, m_X, \sigma_Y, \sigma_X, \eta, r_{XY}, m_{X^2}, \sigma_{X^2}, r_{X^2Y}$ ) получаются с помощью статистических оценок.

**Заключение.** Таким образом, методами теории вероятностей обоснована лаконичная процедура, позволяющая выразить параметры полиномиальной регрессии условного математического ожидания через смешанные статистические моменты системы случайных величин  $\{X, Y\}$ . Реализованы примеры линейной и квадратичной регрессии. Во втором случае рассмотрение ограничено ситуацией, когда плотность вероятности случайного аргумента  $X$  является четной функцией. Результат получен без громоздких выкладок, ибо при его получении использованы не начальные статистические моменты, возникающие в методе наименьших квадратов, а смешанные центральные моменты, отражающие вид регрессионной кривой. Показано, что в общем случае учет нелинейности корреляционной зависимости лишь усиливает неравенство, подтверждающее адекватность регрессионного приближения. Обоснована сходимость такой процедуры, если условное математическое ожидание не является полиномом по сути.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1972. – 368 с.
2. Коваленко, И. Н. Теория вероятностей и математическая статистика / И. Н. Коваленко, А. А. Филиппова. – М. : Высш. шк., 1973. – 368 с.
3. Пытьев, Ю. П. Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков / Ю. П. Пытьев, И. А. Шишмарев. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 252 с.
4. Contribution of excesses of the gamma distribution to the asymptotics of factorials with large arguments / S. G. Ekhilevskiy [et al.] // System analysis and information Technology. – 2019. – №1(15) – 2(16). – С. 119–125.
5. Ехилевский, С. Г. Теоретико-вероятностный подход к моделированию респиратора на химически связанном кислороде / С. Г. Ехилевский, О. В. Голубева, Е. П. Потапенко // Безопасность труда в промышленности. – 2020. – № 10. – С. 7–15.
6. Независимые повторные испытания как асимптотически гауссовский случайный процесс / С. Г. Ехилевский [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундам. науки. – 2016. – № 2. – С. 111–116.

#### REFERENCES

1. Gmurman, V. E. (1972) *Teoriya veroyatnoy i matematicheskoy statistiki [Theory of Probability and Mathematical Statistics]*. Moscow: Vysshaya shkola. (In Russ.).
2. Kovalenko, I. N., & Filippova, A. A. (1973). *Teoriya veroyatnoy i matematicheskoy statistiki [Theory of Probability and Mathematical Statistics]*. Moscow: Vysshaya shkola. (In Russ.).

3. Pyt'ev, Yu. P., & Shishmarev. I. A. (1983). *Kurs teorii veroyatnostei i matematicheskoi statistiki dlya fizikov [Course of Probability Theory and Mathematical Statistics for Physicists]*. Moscow: Publ. Mosk. un-ta. (In Russ.).
4. Ekhilevskiy, S. G., Golubeva, O. V., Zabelendik, O. N., & Struk, T. S. (2019) Contribution of excesses of the gamma distribution to the asymptotics of factorials with large arguments. *System analysis and information Technology*, 1(15) – 2(16), 119–125.
5. Ekhilevskiy, S. G., Golubeva, O. V., & Potapenko, E. P. (2020). Teoretiko-veroyatnostnyi podkhod k modelirovaniyu respiratora na khimicheski svyazannom kislorode. *Bezopasnost' truda v promyshlennosti [Labor safety in industry]*, (10), 7–15. (In Russ.).
6. Ekhilevskiy, S. G., Golubeva, O. V., Potapenko, E. P., & Rud'kova, T. S. (2016) Nezavisimye povtornye ispytaniya kak asimptoticheski gaussovskii sluchainyi protsess [Independent Retests as an Asymptotically Gaussian Stochastic Process]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (2), 111–116.

Поступила 17.03.2022

### THE METHOD OF STATISTICAL MOMENTS IN A POLYNOMIAL REGRESSION OF CORRELATION DEPENDENCE

S. EKHILEVSKIY, O. GOLUBEVA, O. ZABELENDIK

*The methods of probability theory substantiate a brief procedure that allows us to express the parameters of the polynomial regression of conditional mathematical expectation through mixed statistical moments of a system of random variables. Examples of linear and quadratic regression are implemented. In the second case, consideration is limited to the situation when the probability density of a random argument is an even function. The result was obtained without cumbersome calculations, since it was obtained using not the initial statistical moments resulting from the least squares method, but mixed central moments reflecting the type of regression curve. It is shown that in the general case, taking into account the nonlinearity of the correlation dependence only strengthens the inequality, which is the criterion for the adequacy of the regression approximation. The convergence of such a procedure is confirmed if the conditional expectation is not essentially a polynomial.*

**Keywords:** conditional mathematical expectation, polynomial regression, mixed statistical moments.

УДК 004.932

DOI 10.52928/2070-1624-2022-38-4-13-25

## ПРИНЦИПЫ ОРГАНИЗАЦИИ И АНАЛИЗ ПОДХОДОВ К ПОВЫШЕНИЮ ТОЧНОСТИ ПОВТОРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛЮДЕЙ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ ВИДЕОНАБЛЮДЕНИЯ

С. А. ИГНАТЬЕВА

(Полоцкий государственный университет)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9780-5731>

*Приведена классификация существующих систем повторной идентификации по таким критериям, как тип системы, количество и вид запросов, время работы. Рассмотрена общая схема, отражающая основной принцип работы систем повторной идентификации, а также основные подходы и методы для решения этой задачи с использованием сверточных нейронных сетей. Выполнено исследование существующих способов повышения точности работы алгоритмов и систем повторной идентификации. Проведен анализ влияния выбора гиперпараметров при обучении сверточных нейронных сетей на эффективность и динамику обучения алгоритма повторной идентификации.*

**Ключевые слова:** повторная идентификация человека, сверточные нейронные сети, скорость обучения, размер пакета.

**Введение.** Повторная идентификация человека является актуальной задачей компьютерного зрения и представляет собой процесс идентификации человека в другом месте или в другое время на кадрах, полученных с нескольких камер видеонаблюдения. В общем случае в системе повторной идентификации имеется один или несколько запросов. Для каждого запроса выделяются признаки, которые затем сравниваются с признаками из имеющейся выборки изображений, называемой галереей, и принимается решение относительно того, является ли изображение из галереи искомым человеком. При этом приходится сталкиваться с рядом проблем, среди которых можно выделить изменчивость внешнего вида человека в зависимости от угла обзора, степени освещенности, различного разрешения камер; разнообразие положений, занимаемых человеком в пространстве; окклюзии; сложный фон; смещение доменов и ненадежность генерации ограничительных прямоугольников, содержащих изображения человека. Все это приводит к появлению большого числа методов и подходов, направленных на повышение устойчивости системы к различным негативным влияниям.

Широкая область применения систем повторной идентификации человека обуславливает существование большого количества алгоритмов и подходов для решения этой задачи, и, соответственно, различные способы классификации таких систем. Так, по типу используемых наборов данных можно выделить закрытые (Close-world) системы повторной идентификации, использующие готовые наборы данных для обучения и тестирования, и открытые системы (Open-world), в которых галерея изображений постоянно пополняется новыми кадрами [1]. Закрытые системы обычно применяются в исследовательских целях и набор данных состоит из ограниченного количества видеопоследовательностей или изображений, полученных с нескольких камер видеонаблюдения. Данные в таких наборах аннотированы и подготовлены заранее, запрос присутствует в галерее. В открытых системах используется набор данных, который изменяется с течением времени по мере поступления новых записей с камер наблюдения, ограничительные рамки необходимо генерировать в режиме реального времени, данные для обучения – аннотировать. Такие системы наиболее приближены к реальным условиям.

В зависимости от количества запросов [2] системы повторной идентификации можно разделить на повторную идентификацию одного человека и множества людей. В первом случае в галерее набора данных требуется найти человека по запросу, и задача повторной идентификации сводится к задаче поиска, или проверке, присутствует ли искомый человек в галерее. Во втором – для каждого человека устанавливается уникальный идентификатор, затем определяется, на каких кадрах каждый из этих людей встречается снова, и задача повторной идентификации сводится к задаче классификации [3].

По типу входных данных [1] системы повторной идентификации можно разделить на однородные и неоднородные. При использовании однородных данных в качестве запросов используются изображения или видео, полученные с камер видеонаблюдения видимого диапазона. Если в качестве запроса используется текстовое описание искомого человека, изображение с инфракрасной камеры, рисунок или эскиз, то такие системы будут называться неоднородными.

В зависимости от времени работы системы идентификацию разделяют на краткосрочную повторную и долгосрочную. Так, если каждый человек в наборе данных не меняет внешний вид с течением времени, т.е. все время находится в одной и той же одежде, изменения внешности незначительны и обусловлены только возможным изменением наличия аксессуаров или вещей в руках, съемка осуществлялась в течение ограниченного промежутка времени, за которое человек не мог значительно изменить образ, то такая

система будет краткосрочной. Долгосрочная повторная идентификация направлена на способность повторно идентифицировать людей, даже если прошло уже значительное количество времени, за которое человек мог изменить внешний вид [4].

Разнообразие областей применения и большое число проблем, с которыми приходится сталкиваться при решении задачи повторной идентификации, определяет существование большого числа алгоритмических решений, направленных на повышение скорости работы и точности повторной идентификации. Целью данного исследования является сравнительный анализ современных подходов в этой области.

### 1. Общая схема системы повторной идентификации человека на кадрах с нескольких камер видеонаблюдения

В общем виде любая система повторной идентификации подразумевает наличие нескольких камер видеонаблюдения  $K$  (рисунок 1). Все видеопоследовательности, полученные с камер, подаются на детектор, с помощью которого из отдельных кадров извлекаются ограничительные рамки, содержащие изображения людей, которые размещаются в галерее. Исследовательские наборы данных часто содержат уже извлеченные ограничительные рамки, и в таком случае можно считать, что процесс детектирования людей и формирование галереи выполнен заранее. Для каждого обнаруженного человека формируется дескриптор и помещается в таблицу признаков. Извлечение признаков в случае закрытой исследовательской системы выполняется предварительно, в случае открытой системы – в режиме реального времени. Большинство современных систем повторной идентификации для извлечения отличительных признаков человека используют сверточные нейронные сети (СНС). Это позволяет быстро и эффективно извлекать признаки на изображениях. Для каждого поступающего запроса также формируется дескриптор и выполняется поиск в таблице признаков путем ранжирования таблицы по установленным критериям подобия. Наилучшие совпадения выдаются как результат повторной идентификации. В зависимости от выбранного типа системы результатом повторной идентификации может быть ранжированный список наиболее совпадающих с запросом изображений или видеопоследовательность, на которой размечены идентифицированные лица.

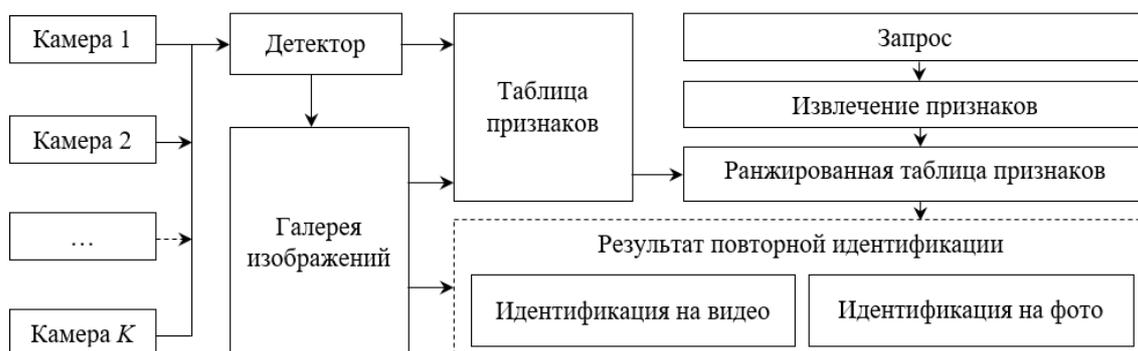


Рисунок 1. – Общая схема системы повторной идентификации человека

Для аннотированного набора данных  $S = \{(I_1, y_1), (I_2, y_2), \dots, (I_n, y_n)\}$ , где  $I_i$  – изображение,  $y_i$  – метка идентификатора,  $n$  – количество идентификаторов ( $1 \leq i \leq n$ ), необходимо извлечь эффективный вектор признаков  $f(\Theta; I_i)$ , чтобы во всем пространстве признаков  $\chi = \{x_i | x_i = f(\Theta; I_i), 1 \leq i \leq n\}$  расстояние между признаками для одинаковых идентификаторов было меньше, чем для людей с разными идентификаторами. Для этого необходимо стремиться к уменьшению ошибки  $E$  предсказания идентичности в  $S$ :

$$\min E(I_i, y_i) \in [y_i - g(f(I_i))],$$

где  $g$  – классификатор.

Качество извлеченных признаков зависит от распределения и разнообразия данных в  $S$  [5].

Использование СНС для извлечения признаков приводит к необходимости обучения модели, а для улучшения надежности извлекаемых признаков во время обучения и увеличения точности работы системы повторной идентификации уже обученной модели используются различные подходы.

При обучении для улучшения точности повторной идентификации можно подобрать оптимальные гиперпараметры, использовать увеличение обучающей выборки, аугментацию данных, подобрать наиболее эффективную функцию потерь, архитектуру СНС или рассматривать изображение не целиком, а разделяя его на фрагменты.

Для уже обученной модели улучшить работу алгоритма можно подбором наиболее эффективного способа ранжирования таблицы признаков, повторным ранжированием, учетом дополнительной информации о времени и месте съемки, атрибутах. Под атрибутами понимают семантическую информацию о человеке, имеющую значение для его идентификации: цвет и вид одежды, длину волос, сумки, рюкзаки, очки и другие значимые детали внешности.

## 2. Подходы для повышения точности систем повторной идентификации человека

**2.1 Изменение гиперпараметров.** На скорость и качество обучения СНС для извлечения признаков при решении любых задач компьютерного зрения, в том числе и задачи повторной идентификации, оказывают влияние выбранные перед началом обучения гиперпараметры, к которым можно отнести скорость обучения, ее изменение в процессе обучения, количество эпох, размер пакета, технические характеристики оборудования, на котором выполняют обучение.

Скорость обучения показывает, насколько изменяются весовые коэффициенты при каждом обновлении весов при обучении СНС. Существуют различные подходы, которые используют планировщики скорости обучения, позволяющие изменять скорость в процессе обучения по истечении определенного промежутка времени или по определенным критериям.

В [6] рассматривается механизм снижения скорости ADEL, предлагается отслеживать степень изменения весов и снижать скорость обучения каждый раз, когда веса перестают изменяться скачкообразно, т.е. когда изменения весов колеблются около локального минимума и снижение скорости обучения в этот момент позволяет обеспечить более быструю сходимость модели.

В [7] предлагается динамический механизм, состоящий из трех режимов изменения скорости обучения  $\eta$ , которые зависят от кривизны  $\lambda_0$  поверхности функции потерь. Первая фаза изменения скорости – ленивая фаза, когда скорость обучения имеет относительно небольшое значение  $\eta > \frac{2}{\lambda_0}$ , из-за чего с шагом  $t$  изменение скорости остается практически постоянным в начале обучения. Вторая фаза – фаза катапульты, где скорость обучения принимает значения  $\frac{2}{\lambda_0} < \eta < \eta_{\max}$ . На этом этапе наблюдается экспоненциальный рост потерь и при этом быстрое уменьшение кривизны до тех пор, пока она не стабилизируется на значении  $\lambda_{\text{final}} < \frac{\eta}{2}$ . Как только выполняется это условие, достигается плоский минимум. И последняя фаза – фаза расхождения: когда скорость обучения превышает значение  $\eta_{\max}$  модель перестает обучаться. Кроме того, в [7] выдвигается предположение, которое затем подтверждается исследованиями, что использование больших скоростей обучения позволяет находить плоские минимумы, которые обобщаются лучше, чем резкие минимумы. К этому же, по мнению авторов, приводит и использование небольших пакетов для обучения.

Влияние размера пакета изображений за один проход по СНС исследуется в работе [8], где отмечается, что стремление к распараллеливанию вычислений обусловлено ускорением времени обучения модели и для наиболее эффективного ускорения необходимо увеличивать размер пакета. Однако это приводит к снижению сходимости модели, и в связи с этим размер пакета обычно выбирается в диапазоне от 16 до 64. В [8] предлагается стратегия, согласно которой в процессе обучения постепенно увеличивается размер минипакета и скорость обучения. Такой подход позволяет получить точность, близкую к точности с фиксированным небольшим размером пакета, при этом улучшая масштабируемость и снижая время обучения.

**2.2 Формирование и увеличение обучающей выборки.** На точность алгоритма повторной идентификации при обучении оказывают влияние размер, разнообразие и качество обучающей выборки. Формирование набора данных для обучения и тестирования – трудоемкий и дорогостоящий, с точки зрения оплаты труда, процесс. При этом следует помнить о существовании такой проблемы, как сдвиг домена [9; 10], когда наблюдается значительное снижение точности повторной идентификации при использовании системы в условиях, стилистически отличающихся от обучающей выборки. Частичным решением данной проблемы может быть объединение разных наборов данных, что рассматривается в [11; 12], в том числе и из необходимого домена [11; 13].

При использовании существующих наборов данных для обучения СНС, кроме проблемы сдвига домена, приходится сталкиваться с проблемой защиты персональных данных. Кроме того, некоторые наборы данных являются закрытыми: авторы предоставляют для исследований только извлеченные из изображений признаки [14], часть из которых можно использовать с ограничениями [15–17], т.е. при публикациях исследований авторы просят соблюдать конфиденциальность студентов, изображения которых использовались. Распространение подобных наборов данных возможно только при согласовании с авторами. Некоторые наборы данных (например, набор данных MTMC17 [18]) в настоящее время не доступен для исследований, DukeMTMC-ReID [19] был отозван из публичного доступа из-за нарушений гражданских прав,

прав человека и частной жизни студентов университета Duke, изображения которых использовались при формировании набора данных<sup>1</sup>.

В связи с тем, что при создании набора данных необходимо явное согласие всех участников, некоторые исследователи для формирования обучающей выборки используют синтетически сгенерированные изображения. В [20] предлагается к рассмотрению синтетический набор данных для повторной идентификации людей MOTSynth, для создания которого использовались видеопоследовательности из игры Grand Theft Auto V (GTA-V), имитирующей город с жителями в трехмерном пространстве. Авторы вручную разместили точки обзора камеры, спланировали маршруты и перемещения пешеходов, установили параметры, связанные с поведением людей, характерным для людных мест. Использовались 597 различных моделей пешеходов, для которых случайным образом менялась одежда, рюкзаки, сумки, маски, прически и бороды. Это позволило получить более 9519 уникальных пешеходов. Приведенные авторами результаты показывают, что обучение на синтетическом наборе позволяет повысить точность реидентификации на 6,9% в метрике mAP по сравнению с использованием для обучения набора данных Market1501 [21] и на 2,5% в метрике mAP при обучении на объединенном наборе данных Market1501 и CUHK03 [16].

В [5] рассматривается алгоритм генерации синтетических изображений для решения задачи адаптации домена. Для создания трехмерных реалистичных изображений людей используется MakeHuman<sup>2</sup>, а для моделирования видеонаблюдения – платформа Unreal Engine 4 (UE4)<sup>3</sup> с возможностью регулирования условий съемки (ночная, в помещении, на улице), количества окклюзий людей, скорости ходьбы. Используется большое число деталей внешности, таких как маски, очки, наушники, головные уборы. На сгенерированных людях используются реальные изображения одежды, что отличает данный подход от существующих методов. При генерации намеренно добавляются люди с похожей внешностью и небольшими отличительными особенностями. Приводятся исследования, которые показывают, что использование сгенерированного набора данных показывает большую точность Rank1 при междоменном тестировании на наборе данных MTMC17, чем при использовании других синтетических наборов данных, таких как SOMAset [22], SyRI [23], PersonX [24], RandPerson [25]. Результаты подтверждаются при тестировании на Market1501 и DukeMTMC-ReID.

Главным преимуществом использования синтетических наборов данных является то, что при их формировании используется автоматическая генерация аннотаций, тогда как при формировании наборов данных из реальных изображений этот процесс обычно осуществляется вручную, что трудоемко, времязатратно и дорого.

Эффективным решением для повышения точности повторной идентификации является аугментация данных. Под аугментацией понимают увеличение обучающей выборки на основе только уже имеющихся данных. Самыми простыми методами аугментации являются различные преобразования изображений, такие как поворот, отражение, изменение размера, контраста, яркости, вариации цветовой составляющей, различная степень размытия и другие аналогичные манипуляции. Для повышения устойчивости к окклюзиям применяется метод «случайного стирания» [26], при котором прямоугольный фрагмент изображения, размер и форма которого выбираются случайным образом, заполняется нулевыми или случайными значениями (рисунок 2). Для задачи повторной идентификации тестирование этого метода аугментации осуществлялось на наборах данных Market1501, DukeMTMC-ReID и CUHK03. Результаты исследований показали, что в некоторых случаях (например, при тестировании на CUHK03) такой способ позволяет повысить точность почти на 9% в метрике Rank1 и примерно на 7% в метрике mAP. При тестировании на Market1501 и DukeMTMC-ReID результаты были скромнее: для разных алгоритмов повторной идентификации с различными СНС для извлечения признаков точность повторной идентификации Rank1 и mAP удавалось повысить от 1 до 4%.



Рисунок 2. – Примеры применения метода аугментации данных «Случайное стирание»

<sup>1</sup> Duke MTMC [Electronic resource]. URL: [https://exposing.ai/duke\\_mtmc](https://exposing.ai/duke_mtmc).

<sup>2</sup> Makehuman community. Makehuman, 2020 [Electronic resource]. URL: <http://www.makehumancommunity.org>.

<sup>3</sup> Epic Games Incorporated. Unreal engine, 2020 [Electronic resource]. URL: <https://www.unrealengine.com>.

Более сложным методом аугментации данных является использование генеративно-сопоставительных сетей (Generative Adversarial network – GAN), которые используются для генерации правдоподобных изображений на основе уже имеющихся данных. Генеративно-сопоставительная сеть представляет собой алгоритм машинного обучения, в основе которого лежит комбинация двух нейронных сетей, одна из которых генерирует правдоподобные изображения, а другая пытается определить, являются ли изображения на ее входе подлинными. Применительно к задаче повторной идентификации использование GAN может быть направлено на улучшение способности извлечения эффективных признаков [27] или на решение проблем со смещением доменов [28].

В [27] рассматривается проблема, характерная для систем повторной идентификации, применяемых в реальных условиях, когда возможно присутствие различных факторов, ухудшающих качество полученных с камер видеонаблюдения изображений, таких как невысокий уровень освещения, низкое разрешение, влияние погодных условий. Так, например, если в момент наблюдения идет дождь, то система, обученная на данных, полученных при других условиях, не сможет с высокой точностью интерпретировать извлеченные признаки, и существует вероятность, что большое число извлеченных признаков будет учитывать сходства не между разными людьми, а между одинаковыми ухудшающими качество изображения факторами. Для решения этой проблемы необходимо изучить признаки различных влияний, ухудшающих качество изображений, однако это является сложной и некорректной задачей, так как в реальных условиях не может быть никаких аннотаций для описания этих факторов, а в обучающей выборке может не быть эталонных примеров. Для извлечения устойчивых к ухудшающим факторам изображений признаков авторы используют GAN для синтеза изображений с заранее известной степенью деградации.

В [28] GAN применяется для аугментации данных, однако в отличие от аналогичных систем авторы предлагают добавлять в обучающую выборку не все сгенерированные изображения, а только те, которые позволяют повысить точность повторной идентификации. Для этого отбрасываются изображения, которые имеют схожие признаки с уже сгенерированными ранее изображениями, т.к. они могут снижать качество обучения, т.е. увеличивать время и при этом приводить к разбалансировке при обобщении. Для решения этой проблемы используется метод Local Outlier Factor (LOF), который контролирует плотность сгенерированных изображений, и в случае высокой плотности схожих сгенерированных изображений часть из них случайным образом отбрасывается. Такой подход позволяет не только повысить точность повторной идентификации, но и значительно повысить устойчивость системы к смещению домена. Так, в [28] приводятся результаты сравнения с другими алгоритмами, направленными на решение проблемы смещения домена. Предложенный подход позволяет получить точность повторной идентификации, соизмеримую с современными подходами.

**2.3 Функции потерь.** Процесс обучения нейронной сети для эффективного извлечения признаков заключается в корректировке весовых коэффициентов с целью уменьшения значения функции потерь  $L$ . Функция потерь отражает разницу между полученным результатом и ожидаемым, т.е. величину ошибки. Для задачи повторной идентификации наиболее распространенными являются кросс-энтропийная функция потерь (Cross-entropy loss) [10; 13; 29; 20] и триплетные потери (Triplet loss) [30; 31; 4; 32]. Отличительной чертой триплетных потерь является рассмотрение двух пар изображений: положительной ( $y_a = y_p$ ), когда изображения принадлежат одному и тому же человеку, и отрицательной ( $y_a \neq y_n$ ), когда два изображения принадлежат разным людям. Т.е. учитывается расстояние  $d_{a,p}$  между признаками для положительной пары и расстояние  $d_{a,n}$  между признаками разных людей. Чтобы сеть не только увеличивала расстояние между признаками разных людей, но и уменьшала расстояние для одинаковых, вводится коэффициент регуляризации  $m$ :

$$L = \sum_{\substack{a,p,n \\ y_a=y_p \neq y_n}} \max([m + d_{a,p} - d_{a,n}], 0).$$

Для повышения точности повторной идентификации иногда используют несколько функций потерь. В [33] для определения наиболее эффективных признаков и наиболее значимых атрибутов предлагается две функции потерь: функция потерь метрического разделения  $L_d$  и функция потерь приоритетных атрибутов  $L_p$ :

$$L = L_d + \alpha L_{p1} + \beta L_{p2},$$

где

$$L_d = \left| d_{i,j} - \sum_{k=1}^M d_{i,j}^k \right|$$

– функция потерь метрического разделения, основная задача которой состоит в том, чтобы разложить расстояние  $d_{i,j}$ , заданное целевой моделью, на вклады атрибутов в общий вектор признаков.  $d_{i,j}^k$  – расстояние между

$x_i$  и  $x_j$  для  $k$ -го из  $M$  атрибутов. Функция потерь приоритетных атрибутов  $L_p$  состоит из двух частей:  $L_{p1}$  – определяющей вклад общих атрибутов, и  $L_{p2}$ , определяющей вклад индивидуальных особенностей:

$$L_{p1} = \max \left( 0, \left( \frac{M_E}{M} \right)^v - \sum_{e=1}^{M_E} \frac{d_{i,j}^e}{\hat{d}_{i,j}} \right) + \max \left( 0, \sum_{c=1}^{M-M_E} \frac{d_{i,j}^c}{\hat{d}_{i,j}} - 1 + \left( \frac{M_E}{M} \right)^v \right);$$

$$L_{p2} = \sum_{e=1}^{M_E} \max \left( 0, e^{-\lambda} \frac{\left( \frac{M_E}{M} \right)^v}{M_E} - \frac{d_{i,j}^e}{\hat{d}_{i,j}} \right) + \sum_{c=1}^{M-M_E} \max \left( 0, \frac{d_{i,j}^c}{\hat{d}_{i,j}} - e^{\lambda} \frac{1 - \left( \frac{M_E}{M} \right)^v}{M - M_E} \right),$$

где  $\hat{d}_{i,j} \approx \sum_{k=1}^M d_{i,j}^k$  – предсказанное значение расстояния между признаками;

$M_E$  – количество уникальных атрибутов.

**2.4 Подбор архитектуры СНС.** В большинстве исследований, нацеленных на решение задачи повторной идентификации человека, при тестировании алгоритма используются различные архитектуры СНС, в числе которых встречается ResNet-50 в [11; 33; 34], DenseNet-121 [4; 29], MobileNetV2 [34]. Некоторые исследователи приводят результаты сравнения работы предлагаемых алгоритмов с использованием различных архитектур СНС для извлечения признаков. Так, в [4] выполняется сравнение ResNet-50 и DenseNet-121, где DenseNet-121 позволяет получить лучшие показатели точности в метриках Rank1 и mAP. В [33] оцениваются ResNet-34, ResNet-50 и ResNrt-101 и показывается, что увеличение глубины сети положительно сказывается на точности повторной идентификации. В [29] проводится сравнение точности работы для PCB [35], ResNet-50 и DenseNet-121. Анализ результатов этих экспериментов показывает, что наибольшей точностью в метриках Rank1 и mAP обладает PCB (Rank1 = 94,0, mAP = 82,8), затем идут DenseNet-121 (Rank1 = 90,8, mAP = 76,9) и ResNet-50 (Rank1 = 87,7, mAP = 72,2).

Кроме распространенных архитектур рассматриваются также их модификации: например, в [36] рассматривается влияние функции активации в СНС ResNet-50, DenseNet-121 на точность повторной идентификации. Функция активации влияет как на динамику обучения, так и на точность работы обученной модели. Результаты исследований подтверждают, что использованием вместо стандартной функции активации ReLU таких функций, как GeLU, Swish и Mish, можно повысить точность повторной идентификации. Дополнительные исследования показали, что применение этих функций увеличивает время обучения модели и при этом не позволяет получить достаточно стабильный результат. К числу предпочтительных функций активации для решения задачи повторной идентификации можно отнести GeLU и ReLU.

В [34] исследуется влияние способа нормализации данных на выходе сверточных слоев и предлагается MetaBIN (Meta Batch-Instance Normalization), которая использует комбинацию двух подходов: пакетную нормализацию и нормализацию экземпляров [37]. Пакетная нормализация позволяет получать информацию о различных стилях изображений в пакете, однако это может приводить к снижению точности повторной идентификации в невидимых доменах. Нормализация образцов отфильтровывает информацию о стиле, но вместе с тем может быть удалена и полезная информация. Для решения этих двух проблем вводится обучаемый параметр, который позволяет найти баланс между двумя подходами к нормализации и тем самым не только повысить точность повторной идентификации, но и сделать систему более устойчивой при работе в другом домене.

Для решения специфических задач, например, для неоднородных систем повторной идентификации, как в [38], где используются изображения с инфракрасной и камеры видимого диапазона, предлагается новая архитектура СНС MCLNet (Modality Confusion Learning Network). MCLNet основывается на частично-разделенной двухпоточной сети. Для повышения устойчивости системы к разнородным данным последовательно извлекаются признаки, характерные для каждой модальности по отдельности, а затем общие признаки. Так как видимые и инфракрасные образцы имеют разное распределение признаков и не могут быть согласованы для сравнения, сеть обучается игнорировать информацию о модальности и пытается извлекать общие представления для человека. Чтобы не упустить важные особенности разных людей, создается механизм запутывания обучения, в результате чего межмодальное несоответствие сводится к минимуму, а межмодальное сходство максимизируется.

В [4] также предлагается своя архитектура СНС RCSANet (Clothing Status Awareness Network), но для решения задачи долгосрочной повторной идентификации. Обычно методы, применяемые для решения подобной задачи, предполагают, что по прошествии определенного количества времени человек сменил одежду, прежде чем снова попасть в поле зрения камеры, однако такие подходы неэффективны, если в указанный промежуток времени человек не переоделся, и точность работы систем долгосрочной

повторной идентификации значительно снижается для таких людей. Для этого в [4] предлагается RCSANet, которая упорядочивает описание пешеходов и внедряет описание о состоянии одежды. RCSANet представляет собой двухпоточную систему, основанную на DenseNet-121, и включает ICE-поток (Inter-Class Enforcement), который позволяет максимизировать межклассовые различия для каждого человека, а также ICR-поток (Intra-Class appearance Regularization), который используется для упорядочивания признаков, полученных в ICE с учетом информации о том, имела ли место смена одежды. Предложенный подход позволил получить точность повторной идентификации в метрике Rank1 100% и 97,2% в случаях, когда смена одежды не осуществлялась, и 48% mAP, 50,2% Rank1, когда в тестовой выборке присутствовали люди, сменившие одежду.

**2.5 Разделение изображения на фрагменты.** Для повышения точности повторной идентификации некоторые исследователи предлагают рассматривать изображение человека не целиком, а по частям. Например, в [35] предлагается горизонтальное разделение изображения на 6 равных частей и изучение каждой части изображения по отдельности. Такой подход получил название Part-based Convolutional Baseline (PCB) и является надстройкой над СНС, деление выполняется не для самого изображения, а после первого сверточного слоя. Такой подход позволяет повысить точность повторной идентификации на 1–2% в метриках Rank1 и mAP. Недостатком является требование к расположению и содержанию каждой части, т.е. ЧЕЛОВЕК должен принимать строго вертикальное положение и части изображения должны располагаться в «правильных» местах. Ошибки генерации ограничительных рамок, когда часть человека оказывается обрезана, могут приводить к ошибкам идентификации.

В [39] рассматривается алгоритм повторной идентификации человека, основанный на рассмотрении человека по частям тела. Так, с помощью HR-Net [40] извлекаются ключевые точки человека, а затем исследуются признаки в окрестностях каждой ключевой точки. Данный подход направлен на уменьшение влияния окклюзий, и для решения этой проблемы при сопоставлении векторов признаков не учитываются признаки для тех ключевых точек, которые оказались скрыты.

В [32] рассматривается подход, схожий с двумя рассмотренными выше. Изображение разделяется на 6 горизонтальных частей, при этом для каждой из частей сеть пытается предсказать, есть ли на данном участке видимая часть человека. Если фрагмент изображения содержит видимые части человека, то с помощью оценщика поз AlphaPose [41] определяются ключевые точки человека и при предсказании, является ли обнаруженный человек искомым, признаки невидимых частей подавляются, что позволяет повысить точность повторной идентификации человека и увеличить устойчивость системы к окклюзиям.

**2.6 Ранжирование признаков.** Для поиска наилучших совпадений изображений галереи с запросом применяется ранжирование таблиц признаков, что представляет собой процесс пересортировки векторов признаков для всех изображений тестовой выборки таким образом, чтобы вверху таблицы находились векторы признаков, имеющие наибольшее сходство с дескриптором запроса. Для определения расстояния между вектором  $x_p$  изображения  $p$  запроса и вектором признаков  $x_{g_i}$  изображения  $g_i$  в галерее  $G = \{g_i | i = 1, 2, \dots, N\}$  из  $N$  изображений могут использоваться подходы, представленные в таблице 1.

Таблица 1. – Методы определения расстояния между векторами признаков

$d(p, g_i) = \frac{x_p \cdot x_{g_i}}{\ x_p\  \ x_{g_i}\ }$	Косинусное расстояние (Cosine distance) [29; 13]
$d(p, g_i) = \ x_p - x_{g_i}\ _2^2$	Расстояние Евклида (Euclidean distance) [21; 4; 9; 12]
$d(p, g_i) = (x_p - x_{g_i})^T M^{-1} (x_p - x_{g_i}),$ где $M$ – матрица ковариаций	Расстояние Махаланобиса (Mahalanobis distance) [42]
$d(p, g_i) = 1 - \frac{ R^*(p, k) \cap R^*(g_i, k) }{ R^*(p, k) \cup R^*(g_i, k) },$ где $R^*(p, k)$ и $R^*(g_i, k)$ – множества ближайших соседей	Расстояние Джакара для $k$ -ближайших соседей (Jaccard distance) [42]

Для повышения точности повторной идентификации иногда используют повторное ранжирование, т.е. после первой сортировки по определенному алгоритму выполняется повторное ранжирование. Так, в [42] для первоначального ранжирования используется расстояние Махаланобиса. Из ранжированной таблицы выбираются первые  $k$  изображений из списка и включаются в множество кандидатов  $k$ -обратных ближайших соседей  $R(p, k)$ , после чего выполняется повторное ранжирование с использованием расстояния Джакара.

В [21] также применяется алгоритм повторного ранжирования. Сначала на основании расстояния Евклида выполняется первичное ранжирование векторов признаков, а затем из ранжированной таблицы  $S(p, g)$  выбираются  $k$  первых результатов и для каждого из них выполняется поиск в галерее, в результате чего формируются новые ранжированные таблицы  $S(r_i, g)$ . Каждой новой таблице присваивается весовой коэффициент  $\frac{1}{i+1}$ , где  $i=1, \dots, k$ , и итоговая повторно ранжированная таблица признаков вычисляется как взвешенная сумма

$$S^*(p, g) = S(p, g) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i+1} S(r_i, g).$$

**2.7 Использование дополнительной информации.** Еще одной возможностью увеличения точности повторной идентификации является использование дополнительной информации, которая предоставляется с набором данных в виде аннотаций или может быть извлечена автоматически при формировании ограничительных рамок: например, такая информация, как камера, с которой получено изображение (дает понимание о месте съемки) и номер кадра (позволяет получить сведения о времени съемки). Использование подобной информации предлагается в алгоритме повторной идентификации в [29]. Предложенный подход является двухпоточной системой, которая учитывает как визуальную составляющую, так и пространственно-временную. С помощью нейронной сети (DenseNet-121, ResNet-50 или PCB) извлекаются визуальные признаки объектов, пространственно-временная информация (т.е. номер камеры и номер кадра) содержится в названиях самих файлов. После ранжирования таблицы визуальных признаков из нее удаляются векторы признаков изображений, которые нерелевантны по пространственно-временным характеристикам, т.е. для тех людей, которые не могли в это время быть в этом месте. Для этого применяются гистограммы Парзена и логистическое сглаживание.

Алгоритмы повторной идентификации в большинстве случаев непрозрачны и приводят лишь к расстоянию между признаками людей. В [33] проводится исследование и предлагается подход, позволяющий определить и визуализировать признаки, которые система рассматривала при принятии решения о сходстве или различии людей. Данный подход дает ответы на вопросы о том, какие именно признаки для двух лиц были значимыми и какой вклад в этой разнице вносит каждый атрибут. Это достигается применением метода AMD (Attribute-guided Metric Distillation), который представляет собой интерпретатор, подключаемый к целевой модели для оценки вклада каждого атрибута и визуализации наиболее значимых деталей. Интерпретатор учится разделять расстояние между признаками различных людей на основе атрибутов, а также вводится функция потерь, которая позволяет сосредоточиться на характерных отличительных признаках. Эксперименты показывают, что такой подход позволяет не только визуализировать значимые признаки, но и способствует дополнительному улучшению точности повторной идентификации в целевых моделях. Приводятся также исследования, показывающие повышение точности повторной идентификации при тестировании алгоритма на междоменных данных.

### 3. Исследование влияния выбора гиперпараметров на точность реидентификации

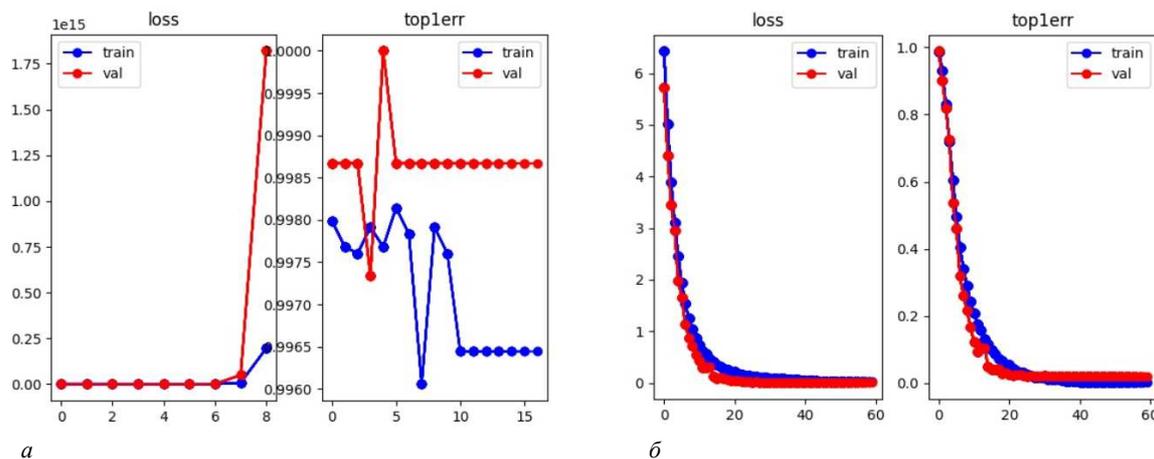
Гиперпараметры, выбранные перед началом обучения определяют динамику и качество обучения СНС. В таблице 2 представлены результаты обучения СНС ResNet-50 на наборе данных Market1501 с размером пакета 16 и различной скоростью обучения. Для эксперимента начальная скорость устанавливалась в интервале от 0,01 до 0,2 и с помощью планировщика скорости уменьшалась после 40-й эпохи в 0,01 раза. В качестве алгоритма повторной идентификации использовалась модель<sup>4</sup>, реализованная на фреймворке ruTorch, где в качестве функции потерь применялись кросс-энтропийные потери, а для ранжирования признаков использовалось косинусное расстояние. Обучение осуществлялось на персональном компьютере с основными характеристиками: Intel Core i5 3.11 GHz, 16 Gb RAM, Nvidia GeForce RTX-3060 6 Gb.

Таблица 2. – Влияние скорости обучения на точность повторной идентификации

Скорость обучения	Rank1	Rank5	Rank10	mAP	Время обучения
0,01	72,5059	88,6283	92,2830	46,8359	87 м 31 с
0,03	81,3242	92,4287	95,0416	57,6058	88 м 02 с
0,05	81,7696	92,3990	95,3682	59,5859	87 м 56 с
0,07	82,8979	93,2007	95,3385	59,7440	87 м 20 с
0,09	82,5713	92,7850	95,6354	60,1919	88 м 12 с
0,1	82,6990	93,0226	95,3682	61,7585	88 м 09 с

<sup>4</sup> Person reID baseline PyTorch [Electronic resource]. URL: [https://github.com/layumi/Person\\_reID\\_baseline\\_pytorch](https://github.com/layumi/Person_reID_baseline_pytorch).

Результаты экспериментов показали, что увеличение скорости обучения позволяет повысить точность повторной идентификации и практически не влияет на время обучения модели. Однако высокая скорость обучения может приводить к взрывным градиентам, явлению, когда веса сети обновляются слишком быстро и значение функции потерь стремительно увеличивается, что и произошло в наших экспериментах при начальной скорости 0,2 (рисунок 3, а). Потери принимают значения порядка  $10^{15}$  уже после 7-й эпохи обучения и далее продолжают увеличиваться, что приводит к невозможности дальнейшего обучения модели. Для сравнения приведены графики обучения при скорости 0,1 (рисунок 3, б), где потери и ошибка top-1 уменьшаются в процессе обучения.



а – график обучения со скоростью 0,2; б – график обучения со скоростью 0,1

Рисунок 3. – Графики обучения модели повторной идентификации с разной скоростью

Для исследования влияния размера пакета при обучении начальная скорость обучения равна 0,09. Несмотря на то, что при скорости 0,1 точность модели повторной идентификации выше, риск взрывных градиентов остается. Результаты экспериментов с разным размером пакета приведены в таблице 3.

Таблица 3. – Влияние размера пакета изображений при обучении на точность повторной идентификации

Размер пакета	Rank1	Rank5	Rank10	mAP	Время обучения
8	0,02969	0,08314	0,18409	0,02020	104 м 45 с
16	82,5713	92,7850	95,6354	60,1919	88 м 12 с
32	80,0178	91,7755	94,8634	56,9912	80 м 08 с
64	75,7423	90,4691	94,0024	51,0595	77 м 10 с

Из таблицы 3 видно, что увеличение размера пакета позволяет уменьшить время обучения, но снижает точность обученной модели. Выбор небольшого пакета для обучения не позволяет получить сети достаточную обобщающую способность, и приводит к тому, что точность повторной идентификации меньше 1%.

Таким образом, было установлено, что оптимальными параметрами для обучения на наборе данных Market1501 являются размер пакета 16 и скорость обучения 0,09.

**Заключение.** В результате анализа методов и подходов для повторной идентификации человека рассмотрены различные алгоритмические решения, направленные на повышение точности повторной идентификации и уменьшение влияния существующих проблем.

Для повышения устойчивости системы повторной идентификации к углам обзора камер, степени освещенности, схожести различных людей, вариативности внешнего вида одного и того же человека с разных ракурсов используются методы увеличения обучающей выборки и аугментация данных. Для решения проблемы смещения доменов применяются генеративно-состязательные сети (GAN), способы нормализации, синтетические наборы данных. Устойчивость к окклюзиям обеспечивается разделением изображений на фрагменты и применением методов аугментации. Комбинации различных подходов позволяют повышать точность повторной идентификации в целом.

При выборе гиперпараметров, функции потерь, функции активации и метода ранжирования признаков для определения наиболее эффективного подхода требуются дополнительные эмпирические исследования, т.к. при тестировании на разных наборах данных и СНС показатели точности могут отличаться.

Проведенные исследования влияния скорости обучения и размера пакета на точность повторной идентификации показали, что уменьшение размера пакета и увеличение скорости может повысить точность повторной идентификации, но при этом большая скорость обучения делает модель неустойчивой к взрывным градиентам, а небольшой размер пакета увеличивает время обучения и снижает обобщающую способность нейронной сети.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Deep Learning for Person Re-identification: A Survey and Outlook / M. Ye [et al.] // IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence. – 2021. – DOI: [10.1109/TPAMI.2021.3054775](https://doi.org/10.1109/TPAMI.2021.3054775).
2. Person Re-Identification across Data Distributions Based on General Purpose DNN Object Detector / R. Mihaescu [et al.] // Algorithms. – 2020. – № 13. – DOI: [10.3390/a13120343](https://doi.org/10.3390/a13120343).
3. Set-based classification for person re-identification utilizing mutual-information / H. Liu [et al.] // 2013 IEEE International Conference on Image Processing. – 2013. – P. 3078–3082. – DOI: [10.1109/ICIP.2013.6738634](https://doi.org/10.1109/ICIP.2013.6738634).
4. Clothing Status Awareness for Long-Term Person Re-Identification / Y. Huang [et al.] // 2021 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision. – 2021. – P. 11895–11904. – DOI: [10.1109/ICCV48922.2021.01168](https://doi.org/10.1109/ICCV48922.2021.01168).
5. UnrealPerson: An Adaptive Pipeline towards Costless Person Re-identification / T. Zhang [et al.] // 2021 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – 2021. – P. 11501–11510. – DOI: [10.1109/CVPR46437.2021.01134](https://doi.org/10.1109/CVPR46437.2021.01134).
6. Lewkowycz, A. How to decay your learning rate / A. Lewkowycz // ArXiv, abs/2103.12682. – 2021. – DOI: [10.48550/arXiv.2103.12682](https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.12682).
7. The large learning rate phase of deep learning: the catapult mechanism / A. Lewkowycz [et al.] // ArXiv, abs/2003.02218. – 2020. – DOI: [10.48550/arXiv.2003.02218](https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.02218).
8. Improving Scalability of Parallel CNN Training by Adjusting Mini-Batch Size at Run-Time / S. Lee [et al.] // 2019 IEEE International Conference on Big Data (Big Data). – 2019. – P. 830–839. – DOI: [10.1109/BigData47090.2019.9006550](https://doi.org/10.1109/BigData47090.2019.9006550).
9. Unsupervised Domain Adaptation with Noise Resistible Mutual-Training for Person Re-identification / F. Zhao [et al.] // ECCV. – 2020. – DOI: [10.1007/978-3-030-58621-8\\_31](https://doi.org/10.1007/978-3-030-58621-8_31).
10. Luo, C. Generalizing Person Re-Identification by Camera-Aware Invariance Learning and Cross-Domain Mixup / C. Luo, C. Song, Z. Zhang. // ECCV. – 2020. – DOI: [10.1007/978-3-030-58555-6\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-030-58555-6_14).
11. Style Normalization and Restitution for Generalizable Person Re-Identification / X. Jin [et al.] // 2020 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – 2020. – P. 3140–3149. – DOI: [10.1109/cvpr42600.2020.00321](https://doi.org/10.1109/cvpr42600.2020.00321).
12. Generalizable Person Re-Identification by Domain-Invariant Mapping Network / J. Song [et al.] // 2019 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – 2019. – P. 719–728. – DOI: [10.1109/CVPR.2019.00081](https://doi.org/10.1109/CVPR.2019.00081).
13. Ihnatsyeva, S. Joint Dataset for CNN-based Person Re-identification / S. Ihnatsyeva, R. Bohush, S. Ablameyko // Pattern Recognition and Information Processing (PRIP'2021) Proceedings of the 15<sup>th</sup> International Conference, 21–24 Sept. 2021, Minsk, Belarus / United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus. – Minsk. – 2021. – P. 33–37.
14. Open-set Person Re-identification / S. Liao [et al.] // ArXiv, abs/1408.0872. – 2014. – DOI: [10.48550/arXiv.1408.0872](https://doi.org/10.48550/arXiv.1408.0872).
15. Li, W. Human Reidentification with Transferred Metric Learning. / W. Li, R. Zhao, X. Wang, // ACCV. – 2012. – DOI: [10.1007/978-3-642-37331-2\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-37331-2_3).
16. Li, W. Locally Aligned Feature Transforms across Views / W. Li, X. Wang // 2013 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2013. – P. 3594–3601. – DOI: [10.1109/CVPR.2013.461](https://doi.org/10.1109/CVPR.2013.461).
17. DeepReID: Deep Filter Pairing Neural Network for Person Re-identification / W. Li [et al.] // 2014 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2014. – P. 152–159. – DOI: [10.1109/CVPR.2014.27](https://doi.org/10.1109/CVPR.2014.27).
18. QPerson Transfer GAN to Bridge Domain Gap for Person Re-identification / L. Wei [et al.] // 2018 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – P. 79–88. – 2018. – DOI: [10.1109/CVPR.2018.00016](https://doi.org/10.1109/CVPR.2018.00016).
19. Performance Measures and a Data Set for Multi-target, Multi-camera Tracking / E. Ristani [et al.] // ArXiv, abs/1609.01775. – 2016. – DOI: [10.1007/978-3-319-48881-3\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-48881-3_2).
20. MOTSynth: How Can Synthetic Data Help Pedestrian Detection and Tracking? / M. Fabbri [et al.] // 2021 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV). – 2021. – P. 10829–10839. – DOI: [10.1109/iccv48922.2021.01067](https://doi.org/10.1109/iccv48922.2021.01067).
21. Scalable Person Re-identification: A Benchmark. / L. Zheng [et al.] // 2015 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). – 2015. – P. 1116–1124. – DOI: [10.1109/ICCV.2015.133](https://doi.org/10.1109/ICCV.2015.133).
22. Looking beyond appearances: Synthetic training data for deep CNNs in re-identification / I. B. Barbosa [et al.] // ArXiv, abs/1701.03153. – 2018. – DOI: [10.1016/i.cviu.2017.12.002](https://doi.org/10.1016/i.cviu.2017.12.002).
23. Bağ, S. Domain Adaptation through Synthesis for Unsupervised Person Re-identification / S. Bağ, P. Carr, J. Lalonde // ECCV. – 2018. – DOI: [10.1007/978-3-030-01261-8\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-01261-8_12).
24. Sun, X. Dissecting Person Re-Identification From the Viewpoint of Viewpoint / X. Sun, L. Zheng // 2019 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – P. 608–617. – 2019. – DOI: [10.1109/CVPR.2019.00070](https://doi.org/10.1109/CVPR.2019.00070).
25. Wang, Y. Surpassing Real-World Source Training Data: Random 3D Characters for Generalizable Person Re-Identification / Y. Wang, S. Liao, L. Shao // Proceedings of the 28<sup>th</sup> ACM International Conference on Multimedia. – 2020. – DOI: [10.1145/3394171.3413815](https://doi.org/10.1145/3394171.3413815).
26. Random Erasing Data Augmentation. / Z. Zhong [et al.] // AAAI. – 2020. – DOI: [10.1609/AAAI.V34I07.7000](https://doi.org/10.1609/AAAI.V34I07.7000).
27. Real-World Person Re-Identification via Degradation Invariance Learning. / Y. Huang [et al.] // 2020 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – P. 14072–14082. – 2020. – DOI: [10.1109/cvpr42600.2020.01409](https://doi.org/10.1109/cvpr42600.2020.01409).

28. Exploring the Quality of GAN Generated Images for Person Re-Identification / Y. Jiang [et al.] // Proceedings of the 29<sup>th</sup> ACM International Conference on Multimedia. – 2021. – DOI: [10.1145/3474085.3475547](https://doi.org/10.1145/3474085.3475547).
29. Spatial-Temporal Person Re-identification. / G. Wang [et al.] // ArXiv, abs/1812.03282. – 2019. – DOI: [10.1609/aaai.v33i01.33018933](https://doi.org/10.1609/aaai.v33i01.33018933).
30. Hermans, A. In Defense of the Triplet Loss for Person Re-Identification / A. Hermans, L. Beyrer, B. Leibe // ArXiv, abs/1703.07737. – 2017. – DOI: [10.48550/arXiv.1703.07737](https://doi.org/10.48550/arXiv.1703.07737).
31. Triplet Loss with Channel Attention for Person Re-identification / D. Organisciak [et al.] // J. WSCG. – No. 27. – 2019. – DOI: [10.24132/JWSCG.2019.27.2.9](https://doi.org/10.24132/JWSCG.2019.27.2.9).
32. Learning to Know Where to See: A Visibility-Aware Approach for Occluded Person Re-identification. / J. Yang [et al.] // Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision. – 2021. – P. 11885–11894. – DOI: [10.1109/ICCV48922.2021.01167](https://doi.org/10.1109/ICCV48922.2021.01167).
33. Explainable Person Re-Identification with Attribute-guided Metric Distillation / X. Chen [et al.] // 2021 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV). – 2021. – P. 11793–11802. – DOI: [10.1109/ICCV48922.2021.01160](https://doi.org/10.1109/ICCV48922.2021.01160).
34. Meta Batch-Instance Normalization for Generalizable Person Re-Identification / S. Choi [et al.] // 2021 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – 2021. – P. 3424–3434. – DOI: [10.1109/CVPR46437.2021.00343](https://doi.org/10.1109/CVPR46437.2021.00343).
35. Beyond Part Models: Person Retrieval with Refined Part Pooling / Y. Sun [et al.] // ECCV. – 2018. – DOI: [10.1007/978-3-030-01225-0\\_30](https://doi.org/10.1007/978-3-030-01225-0_30).
36. Игнатъева, С. А. Сравнительный анализ функций активации и их влияние на точность ре-идентификации людей с использованием сверточных нейронных сетей / С. А. Игнатъева // Современные проблемы математики и вычислительной техники : сб. материалов XII Респ. науч. конф. молодых ученых и студентов, Брест, 18–19 нояб. 2021 г. / Брест. гос. техн. ун-т. – Брест, 2021. – С. 44–48.
37. Ulyanov, D. Instance Normalization: The Missing Ingredient for Fast Stylization / D. Ulyanov, A. Vedaldi, V.S. Lempitsky // ArXiv, abs/1607.08022. – 2016. – DOI: [10.48550/arXiv.1607.08022](https://doi.org/10.48550/arXiv.1607.08022).
38. Cross-Modality Person Re-Identification via Modality Confusion and Center Aggregation. / X. Hao [et al.] // 2021 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV). – 2021. – P. 16383–16392. – DOI: [10.1109/ICCV48922.2021.0160](https://doi.org/10.1109/ICCV48922.2021.0160).
39. High-Order Information Matters: Learning Relation and Topology for Occluded Person Re-Identification / G. Wang [et al.] // 2020 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – 2020. – P. 6448–6457. – DOI: [10.1109/CVPR42600.2020.00648](https://doi.org/10.1109/CVPR42600.2020.00648).
40. Deep High-Resolution Representation Learning for Human Pose Estimation / K. Sun [et al.] // 2019 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – 2019. – P. 5686–5696. – DOI: [10.1109/CVPR.2019.00584](https://doi.org/10.1109/CVPR.2019.00584).
41. RMPE: Regional Multi-person Pose Estimation / H. Fang [et al.] // 2017 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). – 2017. – P. 2353–2362. – DOI: [10.1109/ICCV.2017.256](https://doi.org/10.1109/ICCV.2017.256).
42. Re-ranking Person Re-identification with k-Reciprocal Encoding / Z. Zhong [et al.] // 2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – 2017. – P. 3652–3661. – DOI: [10.1109/CVPR.2017.389](https://doi.org/10.1109/CVPR.2017.389).

## REFERENCES

1. Ye, M., Shen, J., Lin, G., Xiang, T., Shao, L., & Hoi, S.C. (2021). Deep Learning for Person Re-identification: A Survey and Outlook. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, PP. DOI: [10.1109/TPAMI.2021.3054775](https://doi.org/10.1109/TPAMI.2021.3054775).
2. Mihaescu, R., Chindea, M., Paleologu, C., Carata, S., & Ghenescu, M. (2020). Person Re-Identification across Data Distributions Based on General Purpose DNN Object Detector. *Algorithms*, 13(12), 343. DOI: [10.3390/a13120343](https://doi.org/10.3390/a13120343).
3. Liu, H., Qin, L., Cheng, Z., & Huang, Q. (2013). Set-based classification for person re-identification utilizing mutual-information. *2013 IEEE International Conference on Image Processing* (3078–3082). DOI: [10.1109/ICIP15918.2013](https://doi.org/10.1109/ICIP15918.2013).
4. Huang, Y., Wu, Q., Zhong, Y., & Zhang, Z. (2021). Clothing Status Awareness for Long-Term Person Re-Identification. *2021 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision* (11895–11904). DOI: [10.1109/ICCV48922.2021.01168](https://doi.org/10.1109/ICCV48922.2021.01168).
5. Zhang, T., Xie, L., Wei, L., Zhuang, Z., Zhang, Y., Li, B., & Tian, Q. (2021). UnrealPerson: An Adaptive Pipeline towards Costless Person Re-identification. *2021 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)* (11501–11510). DOI: [10.1109/CVPR46437.2021.01134](https://doi.org/10.1109/CVPR46437.2021.01134).
6. Lewkowycz, A. (2021). How to decay your learning rate. *ArXiv, abs/2103.12682*. DOI: [10.48550/arXiv.2103.12682](https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.12682).
7. Lewkowycz, A., Bahri, Y., Dyer, E., Sohl-Dickstein, J., & Gur-Ari, G. (2020). The large learning rate phase of deep learning: the catapult mechanism. *ArXiv, abs/2003.02218*. DOI: [10.48550/arXiv.2003.02218](https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.02218).
8. Lee, S., Kang, Q., Madireddy, S., Balaprakash, P., Agrawal, A., Choudhary, A.N., ... Liao, W. (2019). Improving Scalability of Parallel CNN Training by Adjusting Mini-Batch Size at Run-Time. *2019 IEEE International Conference on Big Data (Big Data)* (830–839). DOI: [10.1109/BigData47090.2019.9006550](https://doi.org/10.1109/BigData47090.2019.9006550).
9. Zhao, F., Liao, S., Xie, G., Zhao, J., Zhang, K., & Shao, L. (2020). Unsupervised Domain Adaptation with Noise Resistant Mutual-Training for Person Re-identification. *ECCV*. DOI: [10.1007/978-3-030-58621-8\\_31](https://doi.org/10.1007/978-3-030-58621-8_31).
10. Luo, C., Song, C., & Zhang, Z. (2020). Generalizing Person Re-Identification by Camera-Aware Invariance Learning and Cross-Domain Mixup. *ECCV*. DOI: [10.1007/978-3-030-58555-6\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-030-58555-6_14).
11. Jin, X., Lan, C., Zeng, W., Chen, Z., & Zhang, L. (2020). Style Normalization and Restitution for Generalizable Person Re-Identification. *2020 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)* (3140–3149). DOI: [10.1109/cvpr42600.2020.00321](https://doi.org/10.1109/cvpr42600.2020.00321).
12. Song, J., Yang, Y., Song, Y., Xiang, T., & Hospedales, T.M. (2019). Generalizable Person Re-Identification by Domain-Invariant Mapping Network. *2019 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, (719–728). DOI: [10.1109/CVPR.2019.00081](https://doi.org/10.1109/CVPR.2019.00081).

13. Ihnatsyeva, S., Bohush, R., & Ablameyko, S. (2021). Joint Dataset for CNN-based Person Re-identification. *Pattern Recognition and Information Processing (PRIP'2021) Proceedings of the 15<sup>th</sup> International Conference* (33–37). Minsk: United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus.
14. Liao, S., Mo, Z., Hu, Y., & Li, S. (2014). Open-set Person Re-identification. *ArXiv, abs/1408.0872*. DOI: [10.48550/arXiv.1408.0872](https://doi.org/10.48550/arXiv.1408.0872).
15. Li, W., Zhao, R., & Wang, X. (2012). Human Reidentification with Transferred Metric Learning. *ACCV*. DOI: [10.1007/978-3-642-37331-2\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-37331-2_3).
16. Li, W., & Wang, X. (2013). Locally Aligned Feature Transforms across Views. *2013 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition* (3594–3601). DOI: [10.1109/CVPR.2013.461](https://doi.org/10.1109/CVPR.2013.461).
17. Li, W., Zhao, R., Xiao, T., & Wang, X. (2014). DeepReID: Deep Filter Pairing Neural Network for Person Re-identification. *2014 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition* (152–159). DOI: [10.1109/CVPR.2014.27](https://doi.org/10.1109/CVPR.2014.27).
18. Wei, L., Zhang, S., Gao, W., & Tian, Q. (2018). Person Transfer GAN to Bridge Domain Gap for Person Re-identification. *2018 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition* (79–88). DOI: [10.1109/CVPR.2018.00016](https://doi.org/10.1109/CVPR.2018.00016).
19. Ristani, E., Solera, F., Zou, R.S., Cucchiara, R., & Tomasi, C. (2016). Performance Measures and a Data Set for Multi-target, Multi-camera Tracking. *ArXiv, abs/1609.01775*. DOI: [10.1007/978-3-319-48881-3\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-48881-3_2).
20. Fabbri, M., Brasó, G., Maugeri, G., Cetintas, O., Gasparini, R., Osep, A., ... Cucchiara, R. (2021). MOTSynth: How Can Synthetic Data Help Pedestrian Detection and Tracking? *2021 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV)* (10829–10839). DOI: [10.1109/iccv48922.2021.01067](https://doi.org/10.1109/iccv48922.2021.01067).
21. Zheng, L., Shen, L., Tian, L., Wang, S., Wang, J., & Tian, Q. (2015). Scalable Person Re-identification: A Benchmark. *2015 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)* (1116–1124). DOI: [10.1109/ICCV.2015.133](https://doi.org/10.1109/ICCV.2015.133).
22. Barbosa, I. B., Cristani, M., Caputo, B., Roghhaugen, A., & Theoharis, T. (2018). Looking beyond appearances: Synthetic training data for deep CNNs in re-identification. *ArXiv, abs/1701.03153*. DOI: [10.1016/j.cviu.2017.12.002](https://doi.org/10.1016/j.cviu.2017.12.002).
23. Bık, S., Carr, P., & Lalonde, J. (2018). Domain Adaptation through Synthesis for Unsupervised Person Re-identification. *ECCV*. DOI: [10.1007/978-3-030-01261-8\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-01261-8_12).
24. Sun, X., & Zheng, L. (2019). Dissecting Person Re-Identification From the Viewpoint of Viewpoint. *2019 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)* (608–617). DOI: [10.1109/CVPR.2019.00070](https://doi.org/10.1109/CVPR.2019.00070).
25. Wang, Y., Liao, S., & Shao, L. (2020). Surpassing Real-World Source Training Data: Random 3D Characters for Generalizable Person Re-Identification. *Proceedings of the 28<sup>th</sup> ACM International Conference on Multimedia*. DOI: [10.1145/3394171.3413815](https://doi.org/10.1145/3394171.3413815).
26. Zhong, Z., Zheng, L., Kang, G., Li, S., & Yang, Y. (2020). Random Erasing Data Augmentation. *AAAI*. DOI: [10.1609/AAAI.V34I07.7000](https://doi.org/10.1609/AAAI.V34I07.7000).
27. Huang, Y., Zha, Z., Fu, X., Hong, R., & Li, L. (2020). Real-World Person Re-Identification via Degradation Invariance Learning. *2020 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)* (14072–14082). DOI: [10.1109/cvpr42600.2020.01409](https://doi.org/10.1109/cvpr42600.2020.01409).
28. Jiang, Y., Chen, W., Sun, X., Shi, X., Wang, F., & Li, H. (2021). Exploring the Quality of GAN Generated Images for Person Re-Identification. *Proceedings of the 29<sup>th</sup> ACM International Conference on Multimedia*. DOI: [10.1145/3474085.3475547](https://doi.org/10.1145/3474085.3475547).
29. Wang, G., Lai, J., Huang, P., & Xie, X. (2019). Spatial-Temporal Person Re-identification. *ArXiv, abs/1812.03282*. DOI: [10.1609/aaai.v33i01.33018933](https://doi.org/10.1609/aaai.v33i01.33018933).
30. Hermans, A., Beyer, L., & Leibe, B. (2017). In Defense of the Triplet Loss for Person Re-Identification. *ArXiv, abs/1703.07737*. DOI: [10.48550/arXiv.1703.07737](https://doi.org/10.48550/arXiv.1703.07737).
31. Organisciak, D., Riachy, C., Aslam, N., & Shum, H. (2019). Triplet Loss with Channel Attention for Person Re-identification. *J. WSCG*, 27. DOI: [10.24132/JWSCG.2019.27.2.9](https://doi.org/10.24132/JWSCG.2019.27.2.9).
32. Yang, J., Zhang, J., Yu, F., Jiang, X., Zhang, M., Sun, X., ... Zheng, W. S., (2021) Learning to Know Where to See: A Visibility-Aware Approach for Occluded Person Re-identification. *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision* (11885–11894). DOI: [10.1109/ICCV48922.2021.01167](https://doi.org/10.1109/ICCV48922.2021.01167).
33. Chen, X., Liu, X., Liu, W., Zhang, X., Zhang, Y., & Mei, T. (2021). Explainable Person Re-Identification with Attribute-guided Metric Distillation. *2021 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV)* (11793–11802). DOI: [10.1109/ICCV48922.2021.01160](https://doi.org/10.1109/ICCV48922.2021.01160).
34. Choi, S., Kim, T., Jeong, M., Park, H., & Kim, C. (2021). Meta Batch-Instance Normalization for Generalizable Person Re-Identification. *2021 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)* (3424–3434). DOI: [10.1109/CVPR46437.2021.00343](https://doi.org/10.1109/CVPR46437.2021.00343).
35. Sun, Y., Zheng, L., Yang, Y., Tian, Q., & Wang, S. (2018). Beyond Part Models: Person Retrieval with Refined Part Pooling. *ECCV*. DOI: [10.1007/978-3-030-01225-0\\_30](https://doi.org/10.1007/978-3-030-01225-0_30).
36. Ignat'eva, S. A. (2021). Sravnitel'nyj analiz funkcij aktivacii i ih vliyanie na tochnost' re-identifikacii lyudej s ispol'zovaniem svertochnyh nejronnyh setej [Comparative activation functions analysis and their impact on the person re-identification accuracy using convolutional neural networks], *Sovremennye problemy matematiki i vychislitel'noj tekhniki [Modern problems of mathematics and computer technology]* (44–48). Brest: BrSTU (In Russ.).
37. Ulyanov, D., Vedaldi, A., & Lempitsky, V. S. (2016). Instance Normalization: The Missing Ingredient for Fast Stylization. *ArXiv, abs/1607.08022*. DOI: [10.48550/arXiv.1607.08022](https://doi.org/10.48550/arXiv.1607.08022).
38. Hao, X., Zhao, S., Ye, M., & Shen, J. (2021). Cross-Modality Person Re-Identification via Modality Confusion and Center Aggregation. *2021 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV)* (16383–16392). DOI: [10.1109/ICCV48922.2021.01160](https://doi.org/10.1109/ICCV48922.2021.01160).
39. Wang, G., Yang, S., Liu, H., Wang, Z., Yang, Y., Wang, S., ... Sun, J. (2020). High-Order Information Matters: Learning Relation and Topology for Occluded Person Re-Identification. *2020 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)* ((6448–6457). DOI: [10.1109/CVPR42600.2020.00648](https://doi.org/10.1109/CVPR42600.2020.00648).

40. Sun, K., Xiao, B., Liu, D., & Wang, J. (2019). Deep High-Resolution Representation Learning for Human Pose Estimation. *2019 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)* (5686–5696). DOI: [10.1109/CVPR.2019.00584](https://doi.org/10.1109/CVPR.2019.00584).
41. Fang, H., Xie, S., Tai, Y., & Lu, C. (2017). RMPE: Regional Multi-person Pose Estimation. *2017 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)* (2353–2362). DOI: [10.1109/ICCV.2017.256](https://doi.org/10.1109/ICCV.2017.256).
42. Zhong, Z., Zheng, L., Cao, D., & Li, S. (2017). Re-ranking Person Re-identification with k-Reciprocal Encoding. *2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)* (3652–3661). DOI: [10.1109/CVPR.2017.389](https://doi.org/10.1109/CVPR.2017.389).

Поступила 31.03.2022

## ORGANIZATION PRINCIPLES AND APPROACHES ANALYSIS TO IMPROVING THE PERSON RE-IDENTIFICATION ACCURACY IN DISTRIBUTED VIDEO SURVEILLANCE SYSTEMS

S. IHNATSYEVA

*The paper presents a classification of existing re-identification systems according to such criteria as system type, requests number and type, and operating time. The general scheme is discussed, which reflects the basic operation principle of re-identification systems, and the main approaches and methods for solving this problem using convolutional neural networks are considered. The study ways existing to improve re-identification algorithms and systems accuracy has been carried out. The influence analysis hyperparameters choice in convolutional neural networks training on the efficiency and dynamics re-identification algorithm training is carried out.*

**Keywords:** person re-identification, convolutional neural networks, learning rate, batch size.

УДК 681.3.05

DOI 10.52928/2070-1624-2022-38-4-26-31

## АЛГОРИТМ И ПРОГРАММА ЧИСЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ, РЕАЛИЗУЮЩИЕ МЕТОД РОЯ ЧАСТИЦ

*канд. техн. наук, доц. А. Ф. ОСЬКИН*  
(Полоцкий государственный университет);  
*Д. А. ОСЬКИН*

(Белорусский государственный экономический университет, Минск)

*Рассматривается один из методов численной оптимизации, реализующий так называемый метод роя частиц. Предлагается модификация метода, основанная на разбиении итерационного процесса вычисления на два этапа. Для ускорения вычислений и снижения их сложности. на первом этапе целевая функция заменяется упрощенной моделью, что позволяет быстро определить примерную область локализации экстремума. Окончательное решение ищется в найденной области локализации, с использованием исходной целевой функции. Описывается консольное приложение, реализующее алгоритм и приводятся результаты численных экспериментов, выполненных с помощью данного приложения.*

**Ключевые слова:** численная оптимизация, метод роя частиц, программная реализация метода роя частиц.

**Введение.** Метод роя частиц (Particle Swarm Optimization – PSO) – один из многочисленной группы методов искусственного интеллекта, получившей название «Методы роевого интеллекта». Он применяется для численного решения оптимизационных задач и наиболее эффективен в случае сложных целевых функций.

Впервые идея метода была изложена в статье Дж. Кеннеди (J. Kennedy) и Р. Эберхарта (R. Eberhart) [1].

Исходно метод разрабатывался как инструмент для имитационного моделирования социального поведения, так как один из его авторов, Джеймс Кеннеди, – известный социальный психолог. Однако затем было замечено, что метод может быть эффективно использован для решения задач оптимизации. Алгоритм был упрощен и дальнейшее его развитие пошло именно в этом направлении.

По итогам своих исследований Дж. Кеннеди и Р. Эберхарт выпустили книгу «Swarm Intelligence» [2] («Роевой интеллект»), в которой описываются многие философские аспекты метода роя частиц и так называемого «роевого интеллекта».

Серьезный вклад в развитие метода роя частиц внес Р. Поли [3; 4], который показал, что этот метод является наиболее простым методом эволюционного программирования, обеспечивающим наиболее высокую скорость сходимости в случае удачного подбора управляющих параметров.

Метод роя частиц – итеративный процесс. Его работа в классической версии алгоритма может быть описана следующей системой уравнений<sup>1</sup> [5]:

$$\begin{aligned}v_i(t+1) &= w \cdot v_i(t) + [c_1 \cdot r_1 \cdot (p_i(t) - x_i(t))] + [c_2 \cdot r_2 \cdot (g(t) - x_i(t))] \\x_i(t+1) &= x_i(t) + v_i(t+1)\end{aligned}$$

где  $v_i(t+1)$  – скорость  $i$ -й частицы роя в момент  $t+1$ . Полу жирное выделение здесь означает, что скорость частицы – это вектор, а не просто скалярное значение;

$w$  – константа, моделирующая инерцию в движении частицы;

$v_i(t)$  – текущая скорость  $i$ -й частицы;

$c_1, r_1$  – константы, задаваемые модельером:  $c_1$  – это так называемая персональная или локальная весовая доля, отображающая вклад данной частицы в общий процесс моделирования,  $r_1$  – случайная переменная в диапазоне  $[0, 1]$ ;

$p_i(t)$  – лучшая позиция  $i$ -й частицы на данный момент;

$x_i(t)$  – текущая позиция  $i$ -й частицы;

$c_2, r_2$  – константы, задаваемые модельером:  $c_2$  – социальная или глобальная весовая доля,  $r_2$  – случайная переменная в диапазоне  $[0, 1]$ ;

<sup>1</sup> Искусственный интеллект. Метод роя частиц. [Электронный ресурс]. URL: <https://docs.microsoft.com/ru-ru/archive/msdn-magazine/2011/august/artificial-intelligence-particle-swarm-optimization>.

$g(t)$  – лучшая позиция на данный момент для любой из частиц роя;

$x_i(t+1)$  – новая позиция  $i$ -й частицы роя.

Как показано в [1–3], такой процесс сходится и приводит к нахождению экстремума оптимизируемой функции.

Основным достоинством метода роя частиц является отсутствие каких-либо особых требований к целевой функции. Для нахождения экстремума по этому алгоритму не требуется вычислять производные целевой функции, функция может иметь разрывы как первого, так и второго рода или вообще представлять собой набор экспериментальных данных.

Алгоритм прост по своей сути и может быть легко запрограммирован.

При удачном подборе параметров, сходимость алгоритма довольно высока.

К главному недостатку метода следует отнести необходимость расчета целевой функции для произвольной точки пространства решений, что, в случае сложной целевой функции, может привести к недопустимым затратам машинного времени в процессе поиска решения.

Нами разработан алгоритм, позволяющий обойти эту проблему. Описанию этого алгоритма и посвящена настоящая статья.

Модифицированный алгоритм метода роя частиц. Существуют многочисленные модификации метода роя частиц. Чаще всего улучшения работы алгоритма добиваются путем соответствующего подбора параметров. Мы предлагаем другой подход. Как было указано выше, одним из недостатков метода роя частиц является необходимость многократного вычисления значений целевой функции. Для упрощения вычислительного процесса и ускорения вычислений мы предлагаем разделить алгоритм на два этапа.

На первом этапе целевая функция заменяется ее упрощенной моделью в соответствии с разработанным нами подходом, описанным в работе [5]. Это позволяет существенно сократить объем вычислений и быстро локализовать область искомого экстремума.

На втором этапе мы возвращаемся к исходной целевой функции и ищем решение задачи в области, локализованной на первом этапе.

Таким образом, предлагаемый нами алгоритм будет состоять из следующих шагов:

- 1) построение модели целевой функции с использованием аддитивного или мультипликативного алгоритмов [5];
- 2) генерация роя из  $n$  частиц, случайным образом разбросанных по области поиска решения;
- 3) поиск решения с использованием классического алгоритма метода роя частиц и модели целевой функции;
- 4) определение границ области локализации решения;
- 5) генерация роя из  $n$  частиц, случайным образом разбросанных по найденной на предыдущем шаге области локализации решения;
- 6) поиск решения с использованием классического алгоритма метода роя частиц и исходной целевой функции;
- 7) если выполняется критерий останова, то переход к шагу 8, иначе – переход к шагу 6;
- 8) вывод координат положения лучшей частицы как результата решения оптимизационной задачи;
- 9) конец.

В соответствии с предложенным алгоритмом нами было написано консольное приложение на языке программирования C++, позволившее провести ряд численных экспериментов и оценить эффективность предлагаемого подхода.

**Численные эксперименты.** Оценка качества работы алгоритмов оптимизации осуществляется, как правило, путем проверки на специальных наборах тестовых функций. Такие наборы легко найти в Интернете. Мы воспользуемся виртуальной библиотекой тестовых функций и наборов данных, представленной S. Surjanovic и D. Bingham из университета Симона Файзера (Канада), которая расположена по адресу <http://www.sfu.ca/~ssurjano>.

При проведении экспериментов будем использовать следующие параметры роя. Число частиц в рое – 20, число итераций – 10.

**Функция Растригина**  $f(x_1, x_2) = 20 + [x_1^2 - 10 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot x_1)] + [x_2^2 - 10 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot x_2)]$ . Функция Растригина имеет несколько локальных минимумов. Функция сильно мультимодальная, но локальные минимумы регулярно распределены по области определения функции. На рисунке 1 показан график двумерной функции Растригина. Мы также представляем таблицу 1 с координатами первых десяти частиц роя, рассчитанными на первой, третьей и пятой итерациях.

Глобальный минимум функции имеет координаты [0, 0] и был найден на пятой итерации. Исходное положение частиц и изменение их положения в процессе работы программы иллюстрируется рисунками 2–5.

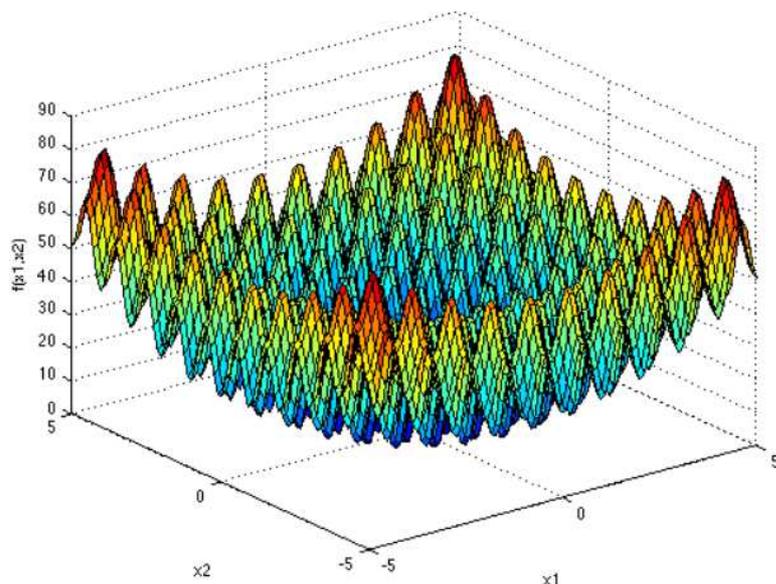
Рисунок 1. – Функция Растригина<sup>2</sup>

Таблица 1. – Изменение положения частиц в процессе работы программы. Целевая функция – функция Растригина

		Первые десять частиц роя										Исходное расположение частиц
$x_1$	$x_2$	4,00	-1,00	1,00	1,00	-3,00	5,00	-3,00	-2,00	0,00	2,00	
		-5,00	1,00	-1,00	-4,00	4,00	5,00	-5,00	0,00	3,00	5,00	
Первая итерация												
$x_1$	$x_2$	-2,00	0,50	-0,50	-0,50	1,50	-2,50	1,50	1,00	0,00	-1,00	Первая итерация
		1,00	-2,00	-1,00	0,50	-3,50	-4,00	1,00	-1,50	-3,00	-4,00	
Третья итерация												
$x_1$	$x_2$	1,00	-0,25	0,25	0,25	-0,75	1,25	-0,75	-0,50	0,00	0,50	Третья итерация
		-2,00	-0,50	-1,00	-1,75	0,25	0,50	-2,00	-0,75	-1,03	0,50	
Пятая итерация												
$x_1$	$x_2$	0,25	-0,06	0,06	0,06	-0,19	0,31	-0,19	-0,13	0,00	0,13	Пятая итерация
		-0,50	-0,13	-0,25	-0,44	0,06	0,13	-0,50	-0,19	0,00	0,13	

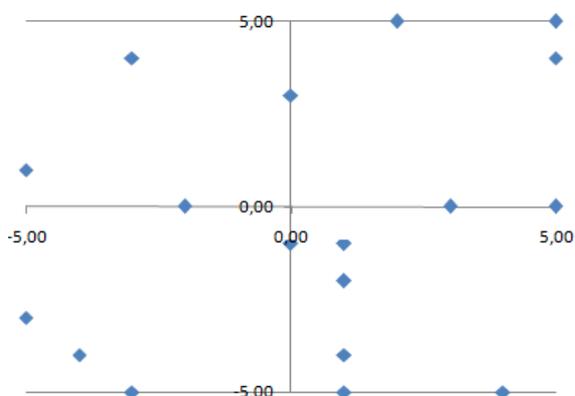


Рисунок 2. – Исходное положение частиц

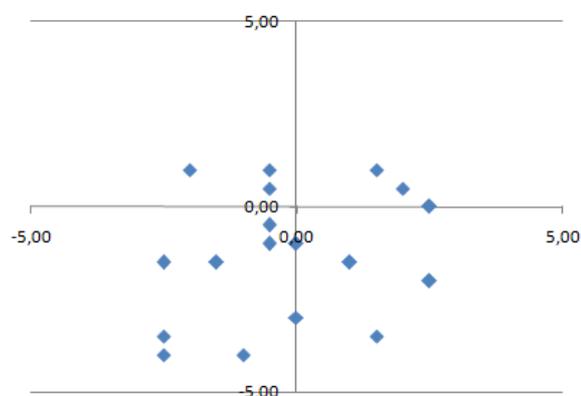


Рисунок 3. – Положение частиц после 1-й итерации

<sup>2</sup> Virtual Library of Simulation Experiments [Electronic resource]. URL: <https://www.sfu.ca/~ssurjano/index.html>.

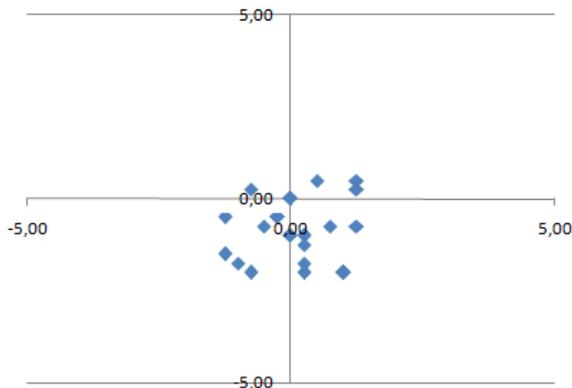


Рисунок 4. – Положение частиц после 3-й итерации

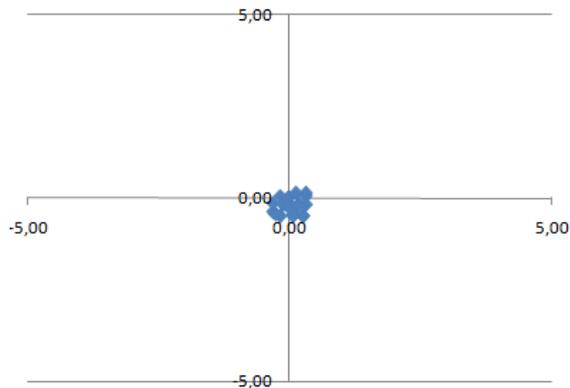


Рисунок 5. – Положение частиц после 5-й итерации

**Функция Химмельблау**  $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1^2 + x_2^2 - 7)^2$ <sup>3</sup>. Это мультимодальная функция двух переменных. Имеет четыре равнозначных локальных минимума

$$f(3, 2) = 0;$$

$$f(-2, 805118..., 3, 131312...) = 0;$$

$$f(-3, 779310..., -3, 283186...) = 0;$$

$$f(3, 584428..., -1, 848126...) = 0,$$

локальный максимум с координатами

$$f(-0, 270845..., -0, 923039...) = 181, 716...$$

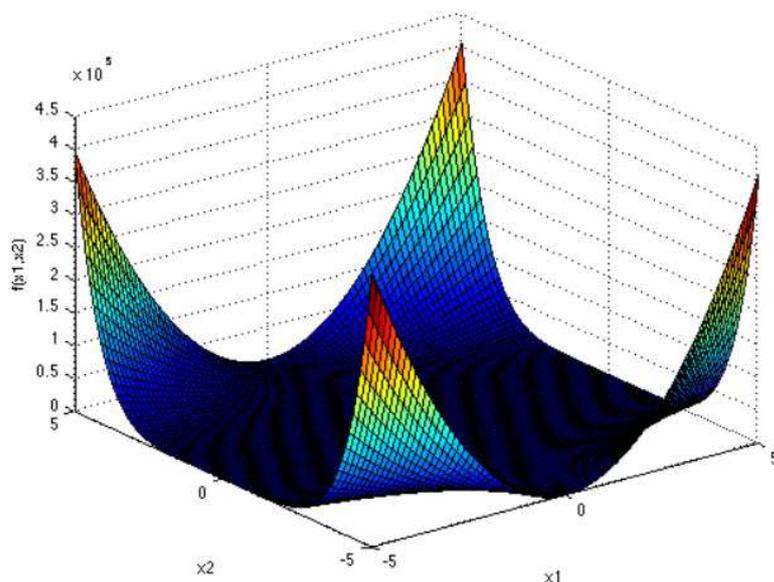
Изменяя начальные параметры расчета, можно найти все четыре локальных минимума. В таблице 2 приведены результаты расчета для одного из анализируемых вариантов.

Таблица 2. – Изменение положения частиц в процессе работы программы. Целевая функция – функция Химмельблау

		Первые десять частиц роя										Исходное расположение частиц
$x_1$	$x_2$	11,00	37,00	-31,00	-45,00	-23,00	14,00	-23,00	27,00	-21,00	32,00	
$x_1$	$x_2$	-34,00	-7,00	21,00	-10,00	10,00	47,00	-30,00	14,00	-1,00	-24,00	
$x_1$	$x_2$	-4,00	2,50	-14,50	-18,00	-12,50	-3,25	-12,50	0,00	-12,00	1,25	Первая итерация
$x_1$	$x_2$	-9,25	-2,50	4,50	-3,25	1,75	11,00	-8,25	2,75	-1,00	-6,75	
$x_1$	$x_2$	1,81	3,44	-0,81	-1,69	-0,31	2,00	-0,31	2,81	-0,19	3,13	Третья итерация
$x_1$	$x_2$	-1,00	0,69	2,44	0,50	1,75	4,06	-0,75	2,00	1,06	-0,38	
$x_1$	$x_2$	2,56	2,97	1,91	1,69	2,03	2,61	2,03	2,81	2,06	2,89	Пятая итерация
$x_1$	$x_2$	1,25	1,67	2,11	1,63	1,94	2,52	1,31	2,00	1,77	1,41	
$x_1$	$x_2$	3,02	3,04	2,98	2,96	2,98	3,02	2,98	3,03	2,99	3,04	Девятая итерация
$x_1$	$x_2$	1,91	1,94	1,96	1,93	1,95	1,99	1,91	1,96	1,94	1,92	

<sup>3</sup> Virtual Library of Simulation Exoeriments [Electronic resource]. URL: <https://www.sfu.ca/~ssurjano/index.html>.

**Функция Биля**  $f(x_1, x_2) = (1,5 - x_1 + x_1 \cdot x_2)^2 + (2,25 - x_1 + x_1 \cdot x_2^2)^2 + (2,625 - x_1 + x_1 \cdot x_2^3)^2$ <sup>4</sup>. Это мультимодальная функция с острыми пиками в углах области определения. Глобальный минимум функции  $f(3,0,5) = 0$ .

Рисунок 6. – Функция Биля<sup>5</sup>

В таблице 3 приведены координаты первых десяти частиц для первой, третьей и пятой итераций.

Таблица 3. – Изменение положения частиц в процессе работы программы. Целевая функция – функция Биля

		Первые десять частиц роя									
$x_1$	0,00	-2,00	3,00	-3,00	2,00	-2,00	1,00	3,00	4,00	3,00	Исходное расположение частиц
$x_2$	1,00	-1,00	1,00	-3,00	1,00	3,00	-1,00	4,00	0,00	1,00	
$x_1$	1,50	2,50	0,00	3,00	0,50	2,50	1,00	0,00	-0,50	0,00	Первая итерация
$x_2$	-2,00	-1,00	-2,00	0,00	-2,00	-3,00	-1,00	-3,50	-1,50	-2,00	
$x_1$	3,00	3,25	2,63	3,38	2,75	3,25	2,88	2,63	2,50	2,63	Третья итерация
$x_2$	0,25	0,50	0,25	0,75	0,25	0,00	0,50	-0,13	0,38	0,25	
$x_1$	2,91	2,97	2,81	3,00	2,84	2,97	2,88	2,81	2,78	2,81	Пятая итерация
$x_2$	0,44	0,50	0,44	0,56	0,44	0,38	0,50	0,34	0,47	0,44	

### Заключение.

1. Полученные результаты подтверждают высокую эффективность разработанного алгоритма.
2. Алгоритм обладает высокой скоростью сходимости, что делает возможным получение приемлемого решения даже при малом числе итераций.
3. Имеющиеся параметры позволяют управлять вычислительным процессом и находить все экстремумы целевой функции.
4. Следующим шагом в развитии алгоритма может стать применение при его построении идей эволюционного программирования – разбиение исходного роя частиц на подрои и организация конкурентной борьбы между подроями.

<sup>4</sup> Virtual Library of Simulation Experiments [Electronic resource]. URL: <https://www.sfu.ca/~ssurjano/index.html>.

<sup>5</sup> Там же.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kennedy, J. Particle swarm optimization / J. Kennedy, R. Eberhart // Proceedings of ICNN'95 – International Conference on Neural Networks. – 1995. – Vol. 4. – P. 1942–1948. – DOI: [10.1109/ICNN.1995.488968](https://doi.org/10.1109/ICNN.1995.488968).
2. Kennedy, J. Swarm Intelligence / J. Kennedy, R. C. Eberhart. – Morgan Kaufmann, 2001. – 541 p.
3. Poli, R. An analysis of publications on particle swarm optimisation applications / R. Poli // Technical Report CSM-469 / Department of Computer Science, University of Essex, UK. – 2007. – 57 p.
4. Poli, R. Analysis of the Publications on the Applications of Particle Swarm Optimisation / R. Poli // J. of Artificial Evolution and Applications. – 2008. – P. 1–10. – DOI: [10.1155/2008/685175](https://doi.org/10.1155/2008/685175).
5. Оськин, А. Ф. Алгоритмы приближения элементов матрицы компонентами двух векторов / А. Ф. Оськин // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2004, – № 4. – С. 73–76.

## REFERENCES

1. Kennedy, J., & Eberhart, R. (1995) Particle swarm optimization. *Proceedings of ICNN'95 – International Conference on Neural Networks: Vol. 4* (1942–1948). DOI: [10.1109/ICNN.1995.488968](https://doi.org/10.1109/ICNN.1995.488968).
2. Kennedy, J., & Eberhart, R.C. (2001) *Swarm Intelligence*. Morgan Kaufmann.
3. Poli, R. (2007) An analysis of publications on particle swarm optimisation applications. *Technical Report CSM-469*. Department of Computer Science, University of Essex, UK.
4. Poli, R. (2008) Analysis of the Publications on the Applications of Particle Swarm Optimisation. *Journal of Artificial Evolution and Applications*, 1–10. DOI: [10.1155/2008/685175](https://doi.org/10.1155/2008/685175).
5. Os'kin, A. F. (2004) Algoritmy priblizheniya elementov matritsy komponentami dvukh vektorov [Algorithms for Approximation of Matrix Elements by Components of Two Vectors] *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (4), 73–76. (In Russ., abstr. in Engl.).

Поступила 22.03.2022

## NUMERICAL OPTIMIZATION ALGORITHM AND PROGRAM IMPLEMENTING THE PARTICLE SWAR OPTIMIZATION

**A. OSKIN, D. OSKIN**

*One of the numerical optimization methods is considered, which implements the so-called particle swarm method. A modification of the method based on the division of the iterative calculation process into two stages is proposed. To speed up calculations and reduce their complexity, at the first stage, the objective function is replaced by a simplified model, which allows you to quickly determine the approximate area of extremum localization. The final solution is sought in the found localization area, using the original objective function. A console application that implements the algorithm is described and the results of numerical experiments performed using this application are presented.*

**Keywords:** numerical optimization, particle swarm method, software implementation of the particle swarm method.

УДК 004.032.26

DOI 10.52928/2070-1624-2022-38-4-32-37

## КЛИЕНТ-СЕРВЕРНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ПАРКОВКАМИ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ДАННЫХ СИСТЕМ ВИДЕОНАБЛЮДЕНИЯ

*А. В. ХОДОСЕВИЧ, канд. техн. наук, доц. Р. П. БОГУШ  
(Полоцкий государственный университет)*

*Представлена веб-система для контроля и управления парковками на основе анализа изображений, формируемых видеокамерами наблюдения. Для сегментации парковочных мест разработан алгоритм, позволяющий автоматически определять координаты парковочных мест на кадрах видео с использованием адаптивного алгоритма бинаризации Оцу и алгоритма Хафа для обнаружения линий. Классификация парковочных мест по типу занятости выполняется с применением сверточной нейронной сети ResNet50. Приведены особенности реализации серверной части, описана разработанная диаграмма классов и их основное назначение. Клиентская часть системы представляет собой адаптивный веб-сайт, доступ к которому можно получить с помощью персонального компьютера или мобильного устройства. Показаны примеры основных функциональных возможностей программного обеспечения.*

**Ключевые слова:** интеллектуальное видеонаблюдение, парковочные места, Smart City, сверточная нейронная сеть.

**Введение.** Интенсивное развитие видеокамер, снижение их стоимости, разработка и внедрение специализированного алгоритмического обеспечения для анализа и обработки видеоданных привело к тому, что системы видеонаблюдения находят применение у широкого класса пользователей и позволяют упростить решение ряда практических задач. Быстрый рост городского населения и промышленных центров обостряет многие проблемы, включая снижение уровня безопасности жизнедеятельности, загрязнение воздуха; во многих случаях имеет место недостаточно рациональное использование энергетических ресурсов, перегруженность автодорог и др. Следует отметить, что перспективным инструментом решения этих задач является использование интеллектуальных систем видеонаблюдения. Причем в настоящее время отмечается бурный рост использования систем видеонаблюдения, что объясняется широким кругом решаемых такими системами задач и постоянно увеличивающейся доступностью средств наблюдения и связи. Подобная тенденция справедлива и для будущего в связи с непрерывным и быстрым совершенствованием аппаратной базы, в том числе увеличением разрешения видеокамер, ростом пропускной способности каналов связи, внедрением 5G-технологии, развитием и применением методов искусственного интеллекта обработки информации (нейронные сети, генетические алгоритмы, нечеткая логика), технологий обработки больших объемов данных (Big Data), облачных решений (Cloud Technology), «Интернета вещей» (Internet of Things) [1–3].

Последовательности изображений, формируемые видеокамерами, содержат значительный объем информации, который, как правило, изменяется и в пространстве, и во времени. Следовательно, их обработка и анализ позволяют учитывать и выявлять не только статические, но и динамические признаки объектов, что приводит к повышению эффективности автоматизированной работы систем видеонаблюдения в целом. Перспективными областями использования интеллектуального видеонаблюдения являются места большого скопления людей, например: стадионы, концертные площадки, метро, железнодорожные вокзалы, аэропорты, школы, университеты, больницы, торговые центры, а также пешеходные переходы, периметры охраняемых объектов, разные участки производственных предприятий, различные пропускные пункты, системы «Умный город» (Smart City) и «Умный дом» [4].

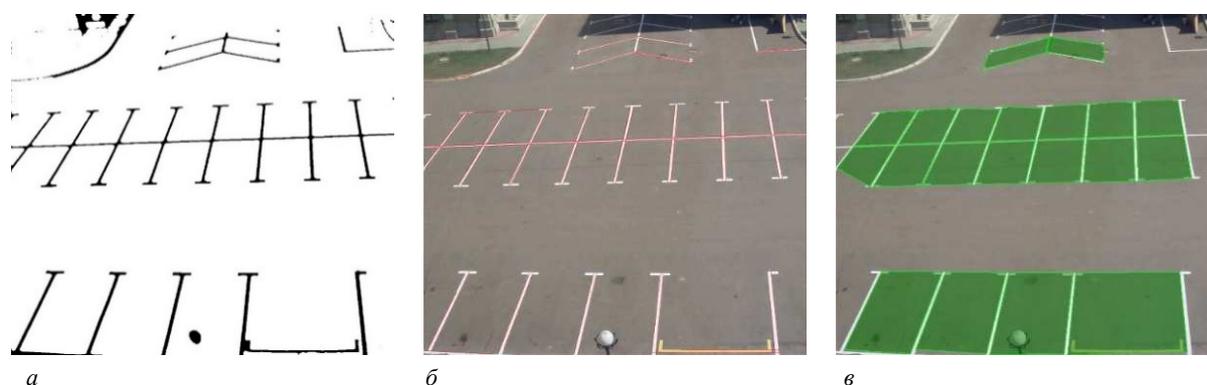
Вместе с ростом городского населения растет число используемых транспортных средств. Непрерывное увеличение количества транспорта приводит к значительному усложнению парковки автомобилей, а именно, возрастает время поиска свободного парковочного места и, как следствие, загрязнение окружающей среды выхлопными газами. Поэтому для удаленного мониторинга за открытыми и крытыми парковками перспективными и все более используемыми являются системы видеонаблюдения. Их эффективность может быть существенно повышена за счет внедрения нового программного обеспечения, реализующего интеллектуальные функции обработки видеоданных. Именно для парковок с большим количеством мест особенно актуальным является применение подобных систем. В работах [5; 6] представлены общий подход и структура построения такой системы, которая представляется перспективной и может быть интегрирована в комплексную систему управления городским имуществом «Smart City» («Умный город»). Однако для ее организации необходимы совершенствование алгоритмического обеспечения интеллектуальной обработки видеоданных, разработка на его основе клиент-серверной архитектуры и реализация системы управления парковками.

**Алгоритмическое обеспечение.** Обнаружение парковочных мест и их классификацию по критерию занятости автомобилями осложняет ряд факторов: различный и в ряде случаев низкий уровень освещенности; сложные погодные условия; естественное стирание линий парковочной разметки; перекрытие автомобилей; некорректная парковка и др.

С учетом специфики работы системы управления большими парковками к программному обеспечению сформированы следующие требования: работа в режиме реального времени; минимизация передаваемого трафика по каналам связи; кроссплатформенность; обеспечение стабильной работы при сбоях в сети передачи данных; возможность подключения большого числа камер наблюдения; централизованная архитектура системы видеонаблюдения.

Для сегментации парковочного места и определения его координат разработан алгоритм, который состоит из следующих основных этапов: обнаружение линий разметки парковки на изображении без автомобилей; бинаризация методом Оцу; обнаружение линий с использованием алгоритма Хафа; связывание линий для одного парковочного места; определение координат парковочных мест; сохранение координат и идентификаторов парковочных мест в базу данных.

На рисунке 1 представлены примеры некоторых этапов сегментации парковочных мест для одной видеокамеры распределенной системы наблюдения.



*а* – выделение линий и бинаризации;  
*б* – отображение найденных линий разметки парковки на исходном изображении;  
*в* – отображение полигонов, характеризующих парковочные места

**Рисунок 1. – Примеры изображений после некоторых шагов сегментации парковочных мест**

Для классификации парковочных мест предлагается использовать достаточно быстродействующую и точную сверточную нейронную сеть (СНС) ResNet50. Для ее обучения использована система машинного обучения ML.NET<sup>1</sup> Model Builder, которая устанавливается в среду разработки Visual Studio. Реализация обучения СНС предполагает создание нового проекта типа ML.NET Model Builder, выбор сценария и настройку окружения. Для обучения СНС использована синтезированная база данных изображений парковок с размеченными занятыми местами.

**Реализация серверной части системы.** Программное обеспечение состоит из серверной и клиентской частей. Для получения видеоданных используется IP-видеокамера. Обработка сформированных видеоданных выполняется на сервере, к которому может подключиться клиент с помощью мобильного устройства или персонального компьютера, т.е. используется централизованная архитектура системы видеонаблюдения. С целью передачи видеопотока используется RTSP-протокол, обеспечивающий минимальную задержку для этой процедуры.

Для реализации модуля сегментации и классификации парковочных мест разработана диаграмма классов, представленная на рисунке 2. Ниже описаны основные классы данной части:

- *ResultData* – класс, хранящий результат анализа нейронной сети: Конструктор ResultData производит инициализацию свойств класса;
- *MLChecker* – класс для работы с моделью нейронной сети: Check определяет, находится ли автомобиль на входном фото;
- *Camera* – класс, реализующий работу с камерой: Start-метод запускает поток для функции ReadFromCamera; End-метод останавливает поток для ReadFromCamera; ReadFromCamera-метод реализует фоновое чтение видеопотока;

<sup>1</sup> ML.NET. An open source and cross-platform machine learning framework [Электронный ресурс]. URL: <https://dotnet.microsoft.com/en-us/apps/machinelearning-ai/ml-dotnet>.

- *Range* – класс «диапазона»: ToUp реализует сортировку по возрастанию; ToDown реализует сортировку по убыванию; In проверяет вхождение диапазона в другой диапазон;
- *Line* – класс «линии»: Clone копирует линию; GetOrientation возвращает ориентацию линии; ToUpOnX реализует сортировку точек по X; ToUpOnY реализует сортировку точек по Y; Length возвращает длину линии; GetAngle возвращает угол наклона линии; GetDistance возвращает расстояние от линии до линии; InLine проверяет, входит ли линия в линию;
- *LineEx* – класс-расширение класса «Line»; Unite объединяет близкие линии или те, которые входят друг в друга; CompareLines сравнивает линии по X/Y; RectSort реализует сортировку массива точек; GetRects возвращает преобразованный массив полигонов из массива линий;
- *PrepareImage* – класс реализует работу с изображением: GetExt возвращает расширение изображения; Save сохраняет изображения; ToCanny выполняет поиск границ с использованием Cv2; HoughLines выполняет поиск линий с использованием Cv2; Load загружает изображения; ToMask возвращает маску изображения с использованием Cv2;
- *ImageComparer* – класс, реализующий сравнение изображений: IsFree-метод определяет, свободно ли место; GetImage возвращает картинку полигона из входного фото.

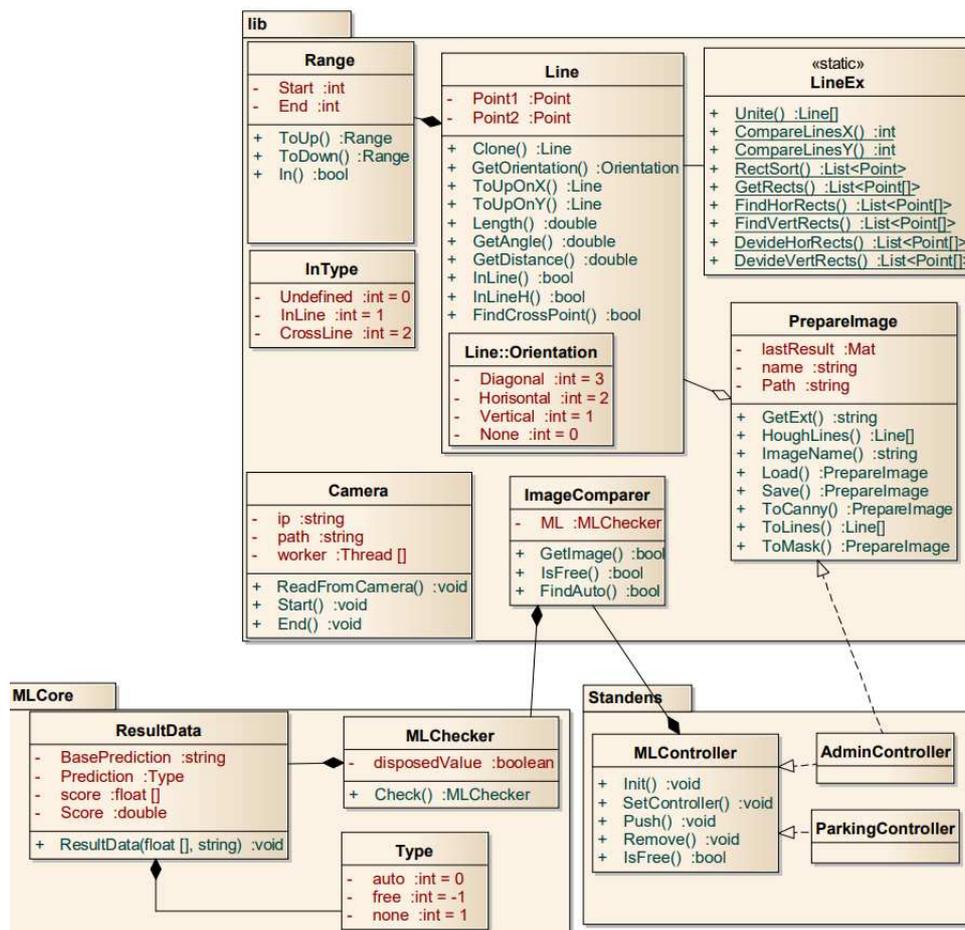


Рисунок 2. – Диаграмма классов серверной части

Серверная часть реализует хранение базы данных парковок и координат локализованных парковочных мест для каждой из них, функционирование программного модуля обнаружения свободных парковочных мест, хранение прайс-листа цен на услуги, хранение информации пользователей, обработку запросов и выдачу данных клиентской части. Для ее развертывания необходимо серверное оборудование с основными характеристиками: процессор Intel i7 6700HQ с тактовой частотой 2.5 ГГц или аналог; оперативная память объемом не менее 8 Гбайт; жесткий диск объемом не менее 120 Гбайт; постоянное подключение к сети Интернет. Обмен между компонентами осуществляется с помощью HTTP-запросов и текстового формата обмена данными JSON. В качестве программного обеспечения необходимо использовать операционную систему Windows 10 с библиотеками .Net Framework версии 4.5 или выше, веб-сервер IIS10 (Internet Information Server) и Microsoft SQL Server версии не ниже 2012.

**Реализация клиентской части.** Клиентская часть представляет собой web-сайт, доступ к которому можно получить с помощью персонального компьютера или мобильного устройства, имеющего доступ к сети Интернет, и обеспечивает основные возможности: вывод информации о парковках, существующих ценах, организации-собственнике; выбор места из числа свободных при бронировании, временном периоде бронирования; регистрацию и авторизацию пользователя; управление своими автомобилями; просмотр броней пользователя; управление таблицами парковок и цен для администратора сайта.

Взаимодействие с системой могут осуществлять три типа пользователей: системный администратор (обслуживающий персонал) серверной части, пользователь клиентской части и администратор клиентской части. Системный администратор имеет доступ к серверу, на котором установлены и запущены система управления базами данных и программный продукт, с возможностью прямого доступа к файлам системы. К основным его функциям относятся: настройка на стороне сервера; редактирование основного файла настроек проекта; настройка подключения к базе данных и ее редактирование. Администратор клиентской части имеет возможности добавления, изменения и удаления в базе данных информации о парковках и ценах; просмотра броней пользователей для мониторинга работы системы. Диаграмма прецедентов для пользователей представлена на рисунке 3. Пользователю доступны: получение общей информации (рисунок 4); ознакомление с актуальными ценами на бронирование; регистрация/авторизация в системе с возможностями изменения данных своего профиля; выбор парковки, свободного места на дату и время бронирования (рисунок 5); просмотр и редактирование своего профиля (рисунок 6); просмотр своих броней на парковках в системе (рисунок 7).

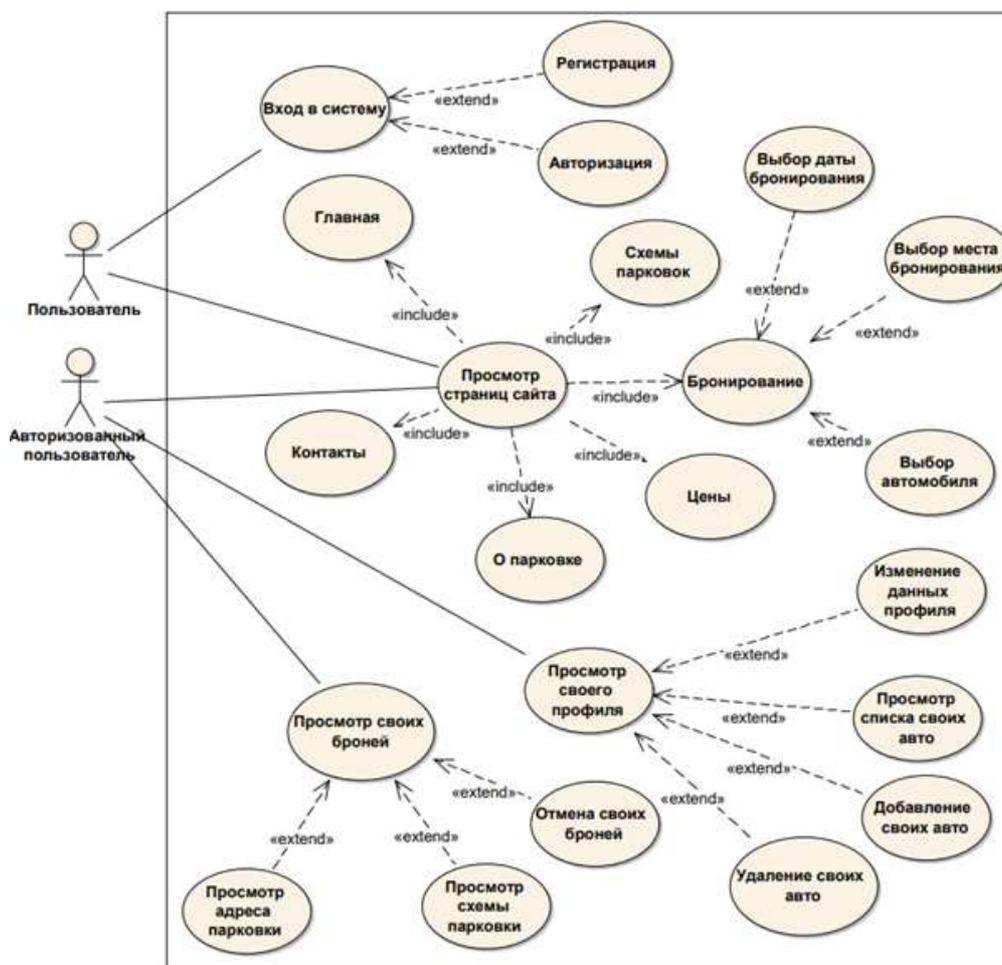


Рисунок 3. – Диаграмма прецедентов клиентской части пользователей

Тестирование разработанной системы выполнено с использованием персонального компьютера в современных браузерах Google Chrome, Mozilla Firefox, Internet Explorer и продемонстрировало корректность ее работы и отображения страниц пользователей. Также выполнено тестирование с использованием мобильных устройств под управлением ОС Android, которое подтвердило адаптивность отображения клиентской части.

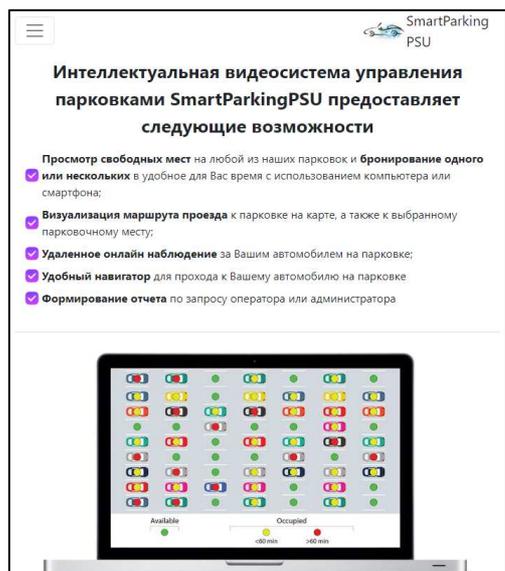


Рисунок 4. – Главная страница с открытым меню на персональном компьютере в веб-браузере

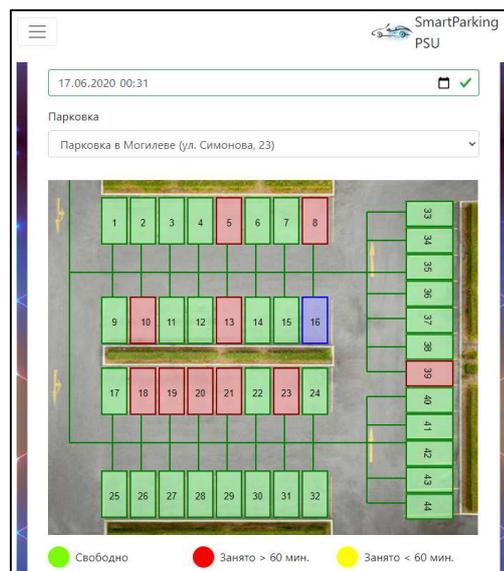


Рисунок 5. – Страница «Бронирование» на персональном компьютере в веб-браузере

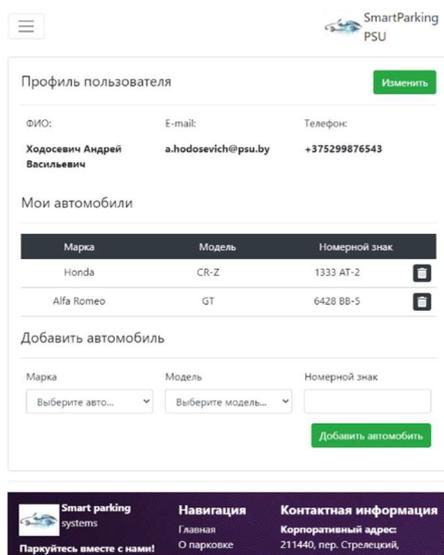


Рисунок 6. – Профиль пользователя на мобильном устройстве под управлением ОС Андроид

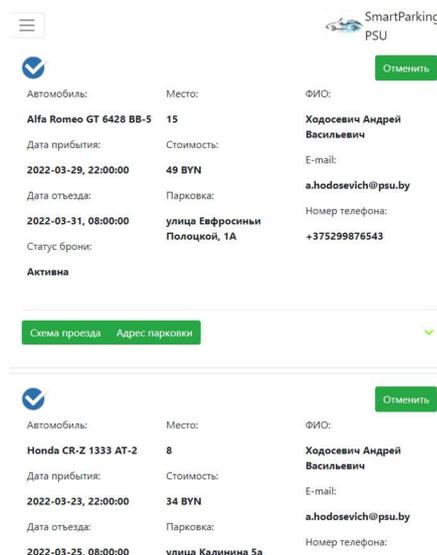


Рисунок 7. – Страница «Мои брони» на мобильном устройстве под управлением ОС Андроид

Программная реализация алгоритма использует OpenCV для захвата видеопотока, извлечения кадров, изменения их размера, кадрирования, отображения текста и графических фигур.

**Заключение.** Разработана интеллектуальная клиент-серверная система для контроля и управления парковками на основе анализа видеоизображений, которые формируют камеры распределенных систем наблюдения. Предложен эффективный подход для сегментации парковочных мест, позволяющий автоматически определять их координаты на кадрах видео с использованием адаптивного алгоритма бинаризации Оцу и алгоритма Хафа для обнаружения линий. Данный подход позволяет эффективно локализовать парковочные места при различной разметке мест. Для определения свободных и занятых парковочных мест используется СНС ResNet50.

Разработанное программное обеспечение состоит из серверной и клиентской частей, предполагается централизованная архитектура системы видеонаблюдения. Передача видеопотока организована по RTSP-протоколу. Клиентская часть представляется как адаптивный веб-сайт и обеспечивает вывод общей информации о собственнике парковки, выбор места с указанием периода бронирования для зарегистрированных пользователей, изменение своих броней, полное управление метаданными парковок для администратора сайта. Взаимодействие с системой могут осуществлять системный администратор

серверной части, пользователь клиентской части и администратор клиентской части. Показаны результаты тестирования основных сервисных функций приложения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. AI Oriented Large-Scale Video Management for Smart City: Technologies, Standards and Beyond / D. Lingyu [et al.] // *IEEE MultiMedia*. – 2019. – Vol. 26, № 2. – P. 8–20. – DOI: [10.1109/MMUL.2018.2873564](https://doi.org/10.1109/MMUL.2018.2873564).
2. Khan, P. W. A Data Verification System for CCTV Surveillance Cameras Using Blockchain Technology in Smart Cities / P. W. Khan, Y.-C. Byun, N. Park // *Electronics*. – 2020. – Vol. 9, № 3. – P. 1–21. – DOI: [10.3390/electronics9030484](https://doi.org/10.3390/electronics9030484).
3. Video big data in smart city: Background construction and optimization for surveillance video processing / L. Tian [et al.] // *Future Generation Computer Systems*. – 2018. – Vol. 86. – P. 1371–1382. – DOI: [10.1016/j.future.2017.12.065](https://doi.org/10.1016/j.future.2017.12.065).
4. Novotny, R. Smart city concept, applications and services / R. Novotny, R. Kuchta, J. Kadlec // *J. of Telecommunications System & Management*. – 2014. – Vol. 3, № 2. – P. 1–8. – DOI: [10.4172/2167-0919.1000117](https://doi.org/10.4172/2167-0919.1000117).
5. Богущ, Р. П. Структура интеллектуальной видеосистемы управления парковками [Электронный ресурс] / Р. П. Богущ, С. В. Абламейко, П. В. Ярошевич // Информационно-коммуникационные технологии: достижения, проблемы, инновации (ИКТ-2018): электрон. сб. статей I междунар. науч.-практ. конф., посвященной 50-летию Полоцкого государственного университета, Новополоцк, 14–15 июня 2018 г. / Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2018. – С. 254–256. Режим доступа: [https://elib.psu.by/bitstream/123456789/22255/5/%d0%91%d0%be%d0%b3%d1%83%d1%88\\_%d1%81254-256.pdf](https://elib.psu.by/bitstream/123456789/22255/5/%d0%91%d0%be%d0%b3%d1%83%d1%88_%d1%81254-256.pdf). – Дата доступа: 14.01.2022.
6. Extraction of Image Parking Spaces in Intelligent Video Surveillance Systems / R. Bohush [et al.] // *Machine Graphics & Vision*. – 2018. – Vol. 27, № 1/4. – P. 47–62. – DOI: [10.22630/MGV.2018.27.1.3](https://doi.org/10.22630/MGV.2018.27.1.3).

## REFERENCES

1. Duan, L., Lou, Y., Wang, S., Gao, W., & Rui, Y. (2019). AI Oriented Large-Scale Video Management for Smart City: Technologies, Standards and Beyond. *IEEE MultiMedia*, (26), 8–20. DOI: [10.1109/MMUL.2018.2873564](https://doi.org/10.1109/MMUL.2018.2873564).
2. Khan, P. W., Byun, Y.-C., & Park, N. (2020). A Data Verification System for CCTV Surveillance Cameras Using Blockchain Technology in Smart Cities. *Electronics*, 9(3), 1–21. DOI: [10.3390/electronics9030484](https://doi.org/10.3390/electronics9030484).
3. Tian, L., Wang, H., Zhou, Y., & Peng, C. (2018). Video big data in smart city: Background construction and optimization for surveillance video processing. *Future Generation Computer Systems*, (86), 1371–1382. DOI: [10.1016/j.future.2017.12.065](https://doi.org/10.1016/j.future.2017.12.065).
4. Novotny, R., Kuchta, R., & Kadlec, J. (2014). Smart city concept, applications and services. *Journal of Telecommunications System & Management*, (3), 1–8. DOI: [10.4172/2167-0919.1000117](https://doi.org/10.4172/2167-0919.1000117).
5. Bohush, R. P., Ablameyko, S. V., & Yarashevich, P. V. (2018). Struktura intellektual'noy videosistemy upravleniya parkovkami. *Informatsionno-kommunikatsionnyye tekhnologii: dostizheniya, problemy, innovatsii (IKT-2018)* (254–256). Novopolotsk: PGU. [https://elib.psu.by/bitstream/123456789/22255/5/%d0%91%d0%be%d0%b3%d1%83%d1%88\\_%d1%81254-256.pdf](https://elib.psu.by/bitstream/123456789/22255/5/%d0%91%d0%be%d0%b3%d1%83%d1%88_%d1%81254-256.pdf). (In Russ.).
6. Bohush, R., Yarashevich, P., Ablameyko, S., & Kalganova, T. (2018). Extraction of Image Parking Spaces in Intelligent Video Surveillance Systems. *Machine Graphics & Vision*, (27), 47–62. DOI: [10.22630/MGV.2018.27.1.3](https://doi.org/10.22630/MGV.2018.27.1.3).

Поступила 22.03.2022

## CLIENT-SERVER SYSTEM FOR PARKING MANAGEMENT BASED ON VIDEO SURVEILLANCE DATA ANALYSIS

A. HODOSEVICH, R. BOHUSH

A web-based system for monitoring and managing parking lots based on analysis of images from surveillance cameras is presented. An approach has been developed for segmentation of parking spaces, that allows you to automatically determine the coordinates of parking spaces in the image using the Otsu adaptive binarization algorithm and the Hough transform algorithm for linking lines. The classification of parking spaces by occupancy type is performed using the convolutional neural network ResNet50. The features of the implementation of the server part are given, the developed class diagram and their main purpose are described. The client part of the system is a website that can be accessed using a personal computer or mobile device. Examples for main software functionality are shown.

**Keywords:** intelligent video surveillance, parking spaces, Smart City, convolutional neural network.

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ (ФИЗИКА)**

УДК 535.4

DOI 10.52928/2070-1624-2022-38-4-38-42

**ВЛИЯНИЕ ОБРАТНОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И ФОТОУПРУГОГО ЭФФЕКТОВ  
НА УКАЗАТЕЛЬНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ НОРМАЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ  
ОБРАТНОГО ТЕНЗОРА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ КРИСТАЛЛА  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$** *канд. физ.-мат. наук М. А. АМАНОВА**(Институт телекоммуникаций и информатики Туркменистана, Ашхабад);**канд. физ.-мат. наук, доц. В. Н. НАВНЫКО, д-р физ.-мат. наук, проф. В. В. ШЕПЕЛЕВИЧ**(Мозырский государственный педагогический университет имени И. П. Шамякина)*

*Построена и проанализирована указательная поверхность нормальной составляющей изменения компонент обратного тензора диэлектрической проницаемости фоторефрактивного кристалла  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  класса симметрии 23. Определены экстремальные значения указательной поверхности нормальной составляющей для кристалла  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  с записанной фазовой голографической решеткой. Показано, что совместное действие фотоупругого и обратного пьезоэлектрического эффектов приводит к изменению максимальных и минимальных значений нормальной составляющей изменения компонент обратного тензора диэлектрической проницаемости кристалла с волновым вектором голографической решетки, ориентированным вдоль кристаллографического направления [112].*

**Ключевые слова:** *пьезоэлектрический эффект, фотоупругий эффект, фоторефрактивный кристалл, диэлектрическая проницаемость, нормальная составляющая, указательная поверхность.*

**Введение.** Влияние фотоупругого и обратного пьезоэлектрического эффектов на свойства голограмм в кубических фоторефрактивных кристаллах впервые рассмотрено в работе [1]. Теоретическая модель дифракционной эффективности фотоиндуцированных фазовых голограмм в кубических фоторефрактивных кристаллах класса симметрии 23 с одновременным учетом оптической активности, электрооптического, фотоупругого и обратного пьезоэлектрического эффектов предложена в работах [2; 3].

В [4] приведены аналитические выражения для нахождения изменения компонент обратного тензора диэлектрической проницаемости для фоторефрактивных кристаллов класса симметрии 23, полученные с учетом электрооптического, фотоупругого и обратного пьезоэлектрического эффектов, а также исследованы зависимости изменения компонент обратного тензора от направления вектора голографической решетки. В [5] показано, что при учете фотоупругого и обратного пьезоэлектрического эффектов полученные теоретические и экспериментальные зависимости коэффициента усиления при двухволновом взаимодействии для пропускающей голограммы, сформированной в кристалле  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  (BSO) среза (110), от ориентационного угла, образованного вектором голографической решетки и направлением [001], качественно совпадают.

Предложенные в [4] выражения применяются для нахождения постоянных связи, содержащихся в уравнениях связанных волн, при расчете выходных характеристик голографических решеток, сформированных в кубических фоторефрактивных кристаллах. Например, в [6] теоретически и экспериментально изучено влияние оптической активности и пьезоэлектрического эффекта на двухволновое взаимодействие при наличии пропускающей голографической решетки в кубическом фоторефрактивном кристалле среза (110). Получены выражения для определения оптимальных азимутов поляризации предметной и опорной световых волн, при которых достигается наибольшая степень энергетического обмена между этими волнами. Закономерности усиления предметной волны при двухволновом взаимодействии на пропускающей голографической решетке рассмотрены в [7]. Показано, что оптимизация энергетического обмена при двухволновом взаимодействии должна производиться с учетом вклада фотоупругого и обратного пьезоэлектрического эффектов.

В настоящей работе произведен анализ влияния фотоупругого и обратного пьезоэлектрического эффектов на указательную поверхность нормальной составляющей изменения обратного тензора диэлектрической проницаемости кристалла  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  (ВТО) с волновым вектором голографической решетки, ориентированным вдоль кристаллографического направления [112]. Изучены закономерности изменения компонент обратного тензора диэлектрической проницаемости кристалла под действием фотоупругого и обратного пьезоэлектрического эффектов.

**Теоретическая модель.** При численных расчетах использованы параметры кристалла ВТО (таблица), заимствованные из работ [1; 5].

Таблица. – Параметры кристалла ВТО

Физическая величина	Обозначение	Значение	Единица измерения
Показатель преломления	$n$	2,58	–
Электрооптический коэффициент	$r$	$-4,75 \times 10^{-12}$	м/В
Коэффициенты упругости	$c_1$	$13,7 \times 10^{10}$	Н/м <sup>2</sup>
	$c_2$	$2,8 \times 10^{10}$	Н/м <sup>2</sup>
	$c_3$	$2,6 \times 10^{10}$	Н/м <sup>2</sup>
Пьезоэлектрический коэффициент	$e_0$	1,1	Кл/м <sup>2</sup>
Фотоупругие постоянные	$P_1$	-0,173	–
	$P_2$	0,001	
	$P_3$	0,002	
	$P_4$	0,005	
Амплитуда напряженности электрического поля пространственного заряда	$E_{sc}$	$0,6 \times 10^3$	В/м
Длина волны	$\lambda$	633	нм

Для нахождения изменения обратного тензора диэлектрической проницаемости  $\Delta \hat{b}$  используют равенство

$$(\hat{\epsilon}_0 + \Delta \hat{\epsilon})(\hat{b}_0 + \Delta \hat{b}) = 1,$$

Проанализируем изменение обратного тензора диэлектрической проницаемости  $\Delta \hat{b}$  под действием электрического поля голографической решетки с вектором напряженности  $\vec{E}_{sc}$ , направленным вдоль [112]. Для характеристики изменения тензорного свойства в заданном направлении используем указательную поверхность нормальной составляющей изменения компонент обратного тензора диэлектрической проницаемости, которая описывается уравнением [8; 9]

$$\chi(\vec{r}) = \vec{r} \Delta \hat{b} \vec{r} = \Delta b_{mn} r_m r_n,$$

где  $\chi$  – нормальная составляющая изменения обратного тензора в направлении единичного вектора  $\vec{r}$ ;  $r_m, r_n$  – компоненты единичного вектора  $\vec{r}$ .

Нормальная составляющая  $\chi$  численно равна проекции вектора  $\Delta \hat{b} \vec{r}$  на направление, параллельное вектору  $\vec{r}$ .

В кристаллографической системе вектор  $\vec{r}$  задается выражениями

$$r_1 = r \cos \alpha \sin \beta;$$

$$r_2 = r \sin \alpha \sin \beta;$$

$$r_3 = r \cos \beta,$$

где  $\alpha$  – угол между осью [100] и проекцией вектора  $\vec{r}$ , перпендикулярной оси  $x_1$ ;

$\beta$  – угол между осью [001] и вектором  $\vec{r}$ .

**Полученные результаты и их обсуждение.** В теоретической кристаллофизике для пространственного представления тензоров зачастую используется метод указательных поверхностей. При построении указательной поверхности тензора, как правило, получается пространственная фигура, состоящая из овалов, главные полуоси которых пропорциональны самим компонентам тензоров, и принадлежащая одному из известных классов указательных поверхностей [8].

При построении указательной поверхности следует учитывать, что для некоторых направлений вектора  $\vec{r}$  нормальные составляющие изменения обратного тензора могут принимать отрицательные значения. В этом случае удобно окрашивать часть указательной поверхности в белый цвет, если нормальная

составляющая обратного тензора имеет положительный знак, и в черный цвет, если нормальная составляющая  $\chi$  имеет отрицательное значение.

На рисунке 1 представлена указательная поверхность нормальной составляющей изменения обратного тензора диэлектрической проницаемости, рассчитанная при  $\vec{E}_{sc} \parallel [112]$ , где  $\vec{E}_{sc}$  – вектор напряженности электрического поля пространственно разделенных зарядов фоторефрактивного кристалла со сформированной внутри голографической решеткой.

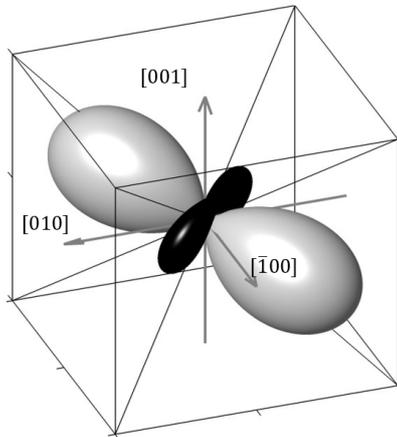


Рисунок 1. – Указательная поверхность нормальной составляющей изменения обратного тензора диэлектрической проницаемости

С использованием полученной указательной поверхности легко определить кристаллографические направления, вдоль которых достигаются наибольшие изменения обратного тензора диэлектрической проницаемости фоторефрактивного кристалла ВТО. Нахождение таких направлений в кристаллографической системе координат позволяет установить условия достижения наибольшей амплитуды фазовой голографической решетки. Решение этой задачи имеет большое практическое значение, поскольку полученные данные могут использоваться при расчете геометрической схемы и условий реверсивной записи и считывания фоторефрактивных голографических решеток с наибольшими выходными энергетическими характеристиками (дифракционная эффективность фазовой голограммы, коэффициент усиления предметной волны).

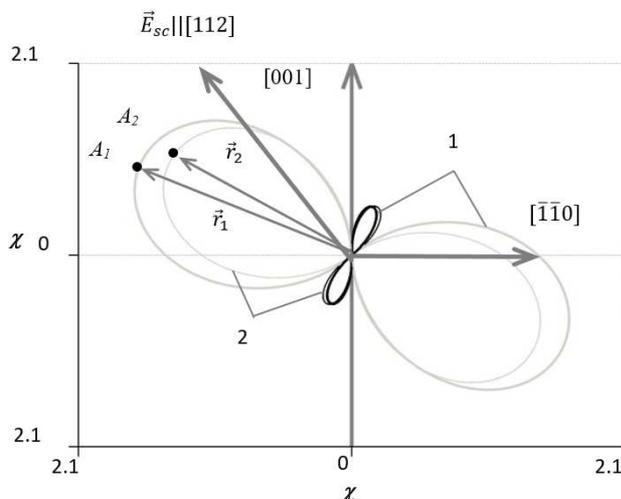
Указательная поверхность, полученная при  $\vec{E}_{sc} \parallel [112]$ , представляет собой сложную фигуру, состоящую из двух частей: две белых яйцеобразных соприкасающихся поверхности и перпендикулярная им поверхность, которая состоит из двух соприкасающихся торообразных черных частей. Как видно из построения, наибольшие положительные значения обратного тензора диэлектрической проницаемости фоторефрактивного кристалла достигаются в случае, если волновые векторы световых волн при распространении в кристалле приближаются или совпадают по направлению с поворотной осью симметрии третьего порядка (кристаллографическое направление  $[111]$ ). Наибольшие значения черной составляющей указательной поверхности достигаются в случае, если волновые векторы световых волн приближаются или совпадают по направлению с осями, лежащими в перпендикулярной поворотной оси третьего порядка плоскости.

Следует отметить, что аналогичная задача для различных ориентаций вектора напряженности электрического поля голографической решетки относительно кристаллографической системы координат была рассмотрена в [10]. В частности, в [10] рассмотрен случай, когда вектор  $\vec{E}_{sc}$  ориентирован вдоль направления  $[\bar{1}\bar{1}\bar{2}]$ . Решение задачи для случая, когда  $\vec{E}_{sc} \parallel [112]$ , имеет важное значение, поскольку позволяет провести сравнение изменений обратного тензора диэлектрической проницаемости при ориентации вектора  $\vec{E}_{sc}$  вдоль симметрично эквивалентных направлений. При сравнении указательной поверхности, представленной на рисунке 1, с результатами работы [10] можно заключить, что изменение направления вектора  $\vec{E}_{sc}$  относительно кристаллографических осей координат приводит к изменению ориентации указательной поверхности, но не влияет на знак нормальной составляющей.

На рисунке 1 указательная поверхность рассчитана с учетом совместного вклада фотоупругого и обратного пьезоэлектрического эффектов. Для анализа влияния указанных эффектов на обратный тензор диэлектрической проницаемости кристалла ВТО удобно проанализировать сечение представленной на рисунке 1 указательной поверхности плоскостью, проходящей через начало координат и параллельной кристаллографическому срезу  $(\bar{1}10)$ . На рисунке 2 представлены сечения указательной поверхности, соответствующие максимальным и минимальным значениям нормальной составляющей изменения обратного тензора диэлектрической проницаемости. При этом линии 1 соответствуют случаю,

когда фотоупругий и обратный пьезоэлектрический эффекты учитывались при расчетах, а линиями 2 обозначены графики, рассчитанные без учета этих эффектов.

**1 – с учетом фотоупругого и пьезоэлектрического эффектов;  
2 – без учета фотоупругого и пьезоэлектрического эффектов**  
**Рисунок 2. – Сечения указательной поверхности, изображенной на рисунке 1**



Кристаллографические направления, вдоль которых достигаются наибольшие значения нормальной составляющей  $\chi$  лежат в плоскости сечения и не совпадают по направлению с вектором напряженности электрического поля пространственно разделенных зарядов  $\vec{E}_{sc}$ . Под действием фотоупругого и обратного пьезоэлектрического эффектов происходит трансформация указательной поверхности нормальной составляющей обратного тензора диэлектрической проницаемости кристалла ВТО. Имеет место увеличение ( $A_2 \rightarrow A_1$ ) наибольшего значения нормальной составляющей обратного тензора диэлектрической проницаемости в белой части указательной поверхности. Легко видеть, что при этом происходит смещение максимума в плоскости сечения на угловое расстояние порядка нескольких градусов, измеренное между векторами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ , которые на рисунке 2 проведены к точкам  $A_1$  и  $A_2$  соответственно. Для черной составляющей указательной поверхности при учете совместного вклада фотоупругого и обратного пьезоэлектрического эффектов имеет место уменьшение максимального значения нормальной составляющей  $\chi$ . Экстремальные направления черной составляющей указательной поверхности практически не изменяются. Такое различие действия указанных эффектов на белую и черную составляющие части указательной поверхности может объяснять различное действие этих эффектов на выходные энергетические характеристики пропускающих и отражательных голограмм. Для пропускающих голографических решеток учет совместного вклада фотоупругого и обратного пьезоэлектрического эффектов приводит, как правило, к уменьшению наибольших значений ее выходных энергетических характеристик, а для отражательных голографических решеток – к увеличению.

**Закключение.** Таким образом, исследована зависимость нормальной составляющей изменения компонент обратного тензора диэлектрической проницаемости фоторефрактивного кристалла  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  от пространственной ориентации кристалла. Определены кристаллографические направления, вдоль которых достигаются наибольшие и наименьшие значения нормальной составляющей изменения компонент обратного тензора диэлектрической проницаемости кристалла, в котором сформирована голографическая решетка с волновым вектором, ориентированным вдоль направления [112]. Показано, что учет совместного вклада фотоупругого и обратного пьезоэлектрического эффектов приводит к увеличению максимальных положительных значений нормальной составляющей и уменьшению отрицательных значений нормальной составляющей. При этом в кристаллографической системе координат происходит изменение ориентации осей белой составляющей указательной поверхности, вдоль которых достигаются максимальные положительные значения нормальной составляющей. Экстремальные направления черной составляющей указательной поверхности практически не изменяются.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов, С. И. Фотоупругий вклад в фоторефрактивный эффект в кубических кристаллах / С. И. Степанов, С. М. Шандаров, Н. Д. Хатьков // ФТТ. – 1987. – Т. 24, № 10. – С. 3054–3058.
2. Mandel, A. Light diffraction in holographic arrays – different mechanisms of photorefractive effect in ferroelectrics / A. Mandel, N. Khatkov, S. Shandarov // Ferroelectrics. – 1988. – Vol. 83. – P. 215–220.
3. Shepelevich, V. V. Light diffraction by holographic gratings in optically active photorefractive piezocrystals / V. V. Shepelevich, S. M. Shandarov, A. E. Mandel // Ferroelectrics. – 1990. – V. 110. – P. 235–249.

4. Шандаров, С. М. Изменение тензора диэлектрической проницаемости в кубических фоторефрактивных кристаллах под действием электрического поля голографической решетки / С. М. Шандаров, В. В. Шепелевич, Н. Д. Хатков // *Опт. и спектр.* – 1991. – Т. 70, № 5. – С. 1068–1073.
5. Solymar, L. The physics and applications of photorefractive materials / L. Solymar, D.J. Webb, A. Grunnet-Jepsen. – Oxford : Clarendon Press, 1996. – 494 p.
6. Shepelevich, V. V. Orientation and polarization effects of two-beam coupling in a cubic optically active photorefractive piezoelectric BSO crystal / V. V. Shepelevich, N. N. Egorov, V. Shepelevich // *J. Opt. Soc. Am. B.* – 1994. – Vol. 11, № 8. – P. 1394–1402.
7. Optimization of two-wave interaction efficiency in cubic photorefractive sillenite-type crystals with optical rotary power and piezoeffect in diffusion regime / V. V. Shepelevich [et al.] // *Ferroelectrics.* – 1999. – Vol. 234 (1/4). – P. 289–309.
8. Сиротин, Ю. И. Основы кристаллофизики / Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская. – М. : Наука, 1979. – 639 с.
9. Сонин, А. С. Курс макрокопической кристаллофизики / А. С. Сонин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 256 с.
10. Навныко, В. Н. Изменение компонентов обратного тензора диэлектрической проницаемости кристалла  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  под действием электрического поля пространственного заряда / В. Н. Навныко, М. А. Аманова, В. В. Шепелевич, В. А. Юдицкий // *Вестн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика, матэматыка.* – 2019. – № 2. – С. 24–34.

## REFERENCES

1. Stepanov, S. I., Shandarov, S. M., & Khatkov N. D. (1987) Fotouprugij vklad v fotorefraktivnyj effekt v kubicheskikh kristallakh [Photoelastic contribution to the photorefractive effect in cubic crystals]. *FTT*, 24(10), 3054–3058. (In Russ.).
2. Mandel, A., Khatkov, N., & Shandarov, S. (1988) Light diffraction in holographic arrays – different mechanisms of photorefractive effect in ferroelectrics. *Ferroelectrics*, (83), 215–220.
3. Shepelevich, V. V., Shandarov, S. M., & Mandel, A. E. (1990) Light diffraction by holographic gratings in optically active photorefractive piezocrystals. *Ferroelectrics*, (110), 235–249.
4. Shandarov, S. M., Shepelevich, V. V., & Khatkov, N. D. (1991) Izmenenie tenzora dielektricheskoy pronitsaemosti v kubicheskikh fotorefraktivnykh kristallakh pod dejstviem elektricheskogo polya golograficheskoy reshetki [Variation of the permittivity tensor in cubic photorefractive crystals under the action of the electric field of a holographic grating]. *Optika i spektroskopiya [Optics and Spectroscopy]*, 70(5), 1068–1073. (In Russ.).
5. Solymar, L., Webb, D. J., & Grunnet-Jepsen, A. (1996) *The physics and applications of photorefractive materials*. Oxford: Clarendon Press. (In Russ.).
6. Shepelevich, V. V., Egorov, N. N., & Shepelevich V. (1994) Orientation and polarization effects of two-beam coupling in a cubic optically active photorefractive piezoelectric BSO crystal. *Journal of the Optical Society of America B*, 11(8), 1394–1402.
7. Shepelevich, V. V., Egorov, N. N., Khomutovskiy, P. P., Von Bally, G., Weber, M., & Firsov, A. A (1999) Optimization of two-wave interaction efficiency in cubic photorefractive sillenite-type crystals with optical rotary power and piezoeffect in diffusion regime. *Ferroelectrics*, 234(1/4), 289–309.
8. Sirotnin, Yu. I., & Shaskolskaya, M. P. (1979) *Osnovy kristallofiziki [Fundamentals of crystal physics]*. – Moscow: Nauka. (In Russ.).
9. Sonin, A. S. (2006) *Kurs makroskopicheskoy kristallofiziki [Macroscopic crystal physics course]*. Moscow: FIZMATLIT. (In Russ.).
10. Navnyko, V. N., Amanova, M. A., Shepelevich, V. V., & Yuditskij, V. A. (2019) Izmenenie komponentov obratnogo tenzora dielektricheskoy pronitsaemosti kristalla  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  pod dejstviem elektricheskogo polya prostranstvennogo zarjada [Change in the components of the inverse permittivity tensor of the  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  crystal under the action of the electric field of the space charge]. *Vesnik Brestskaga universiteta. Seriya 4, Fizika, matematyka [Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics]*, (2), 24–34. (In Russ., abstr. in Engl.)

Поступила 18.02.2022

**INFLUENCE OF INVERSE PIEZOELECTRIC AND PHOTOELASTIC EFFECTS  
ON THE INDEX SURFACE OF THE NORMAL COMPONENT INVERSE  
TENSOR DIELECTRIC PERMEABILITY OF THE  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  CRYSTAL**

**M. AMANOVA, V. NAUNYKA, V. SHEPELEVICH**

*The index surface of the normal component of variation of the inverse tensor dielectric constant of the photorefractive  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  crystal of 23 symmetry class is constructed and analyzed. The extremal values of the index surface of the normal component for  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  crystal with formed holographic grating are determined. It is shown that the combined action of the photoelastic and inverse piezoelectric effects leads to a change in the maximum and minimum values of the normal component of variation of the inverse tensor dielectric constant of the crystal with the wave vector of the holographic grating oriented along the crystallographic direction [112].*

**Keywords:** piezoelectric effect, photoelastic effect, photorefractive crystal, dielectric constant, normal component, index surface.

УДК 621.372.413:621.382.049

DOI 10.52928/2070-1624-2022-38-4-43-48

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ УСТРОЙСТВА СВЯЗИ  
ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА С СВЧ-ТРАКТОМ**

*д-р физ.-мат. наук, проф. В. А. БОГУШ, канд. физ.-мат. наук В. Н. РОДИОНОВА*  
(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск);  
*О. В. ТАНАНА*  
(Полоцкий государственный университет)

*Выполнено электродинамическое моделирование устройства связи объемного резонатора с трактом. Устройство связи резонатора представляет собой линию с распределенной связью, т.е. связанную как с магнитным, так и с электрическим полями резонатора, и позволяет получить связь, мало зависящую от частоты. Разработан алгоритм аппроксимации значений входного импеданса от сопряжения элемента связи с целью вычисления совокупности характеристик нагруженного резонатора. Проведенные расчеты и полученные зависимости позволяют выполнить определение геометрических параметров конструкции широкополосного устройства связи объемных резонаторов в СВЧ-диапазоне длин волн.*

**Ключевые слова:** *объемный резонатор, устройство связи, добротность резонатора.*

**Введение.** Одним из главных требований, предъявляемых к универсальному измерительному резонатору, является высокая собственная добротность в сочетании с широким диапазоном перестройки частоты. Следовательно, весьма важным является вопрос о широкополосном устройстве связи этого резонатора с СВЧ-трактом. Устройства связи служат для ввода электромагнитной энергии в резонатор от источника энергии или для ее вывода [1–4]. К данным устройствам предъявляются следующие требования: возможность регулировки связи для обеспечения согласования с внешним трактом, технологичность, простота конструкции.

Существуют следующие виды связи:

- электрическая емкостная: возбуждение коротким штырем (электрический зонд);
- магнитная: возбуждение петлей связи;
- электронная: возбуждение электронным пучком;
- дифракционная: возбуждение через отверстие в оболочке.

Электрическая связь (аналогична емкостной связи в обычном колебательном контуре) осуществляется через штырь, вводимый через отверстие в стенке резонатора. Этот штырь вводится так, чтобы его ось совпадала с направлением электрических силовых линий в данной точке резонатора. Чаще всего штырь размещают в точке, соответствующей пучности электрического поля. Величину связи регулируют вводя штырь в резонатор (связь увеличивается) или выводя его из резонатора (связь уменьшается).

Магнитная связь создается с помощью витка (петли), введенного в резонатор так, чтобы его плоскость была перпендикулярна к линиям магнитного поля. Виток связи помещают в точку, соответствующую пучности магнитного поля в резонаторе. Величину связи регулируют большим или меньшим введением витка в резонатор или поворотом плоскости витка при постоянной глубине его погружения. Реализовать магнитную связь в чистом виде довольно трудно, т.к. электрические линии также замыкаются на виток и связь в этом случае носит магнитоэлектрический характер.

Связь при помощи штыря или витка используется в резонаторах, когда энергия подводится коаксиальным кабелем.

Если соединительной линией служит волновод, то обычно используется дифракционная связь. Осуществить ее возможно из-за способности силовых линий огибать препятствия (явление дифракции). При наличии в металлической стенке резонатора отверстия некоторая часть силовых линий выпучивается и выходит за пределы резонатора. Если к отверстию присоединить волновод так, чтобы направление силовых линий совпадало с полем нужного типа колебаний в волноводе, то последний возбудится и станет связанным с резонатором. Размер отверстия связи подбирается обычно экспериментальным путем.

Электронная связь образуется при пролете электронов через резонатор. Для обеспечения максимальной связи необходимо, чтобы электроны пролетали через область, где сосредоточена наибольшая часть электрического поля, а время пролета электронов и расстояние, которое им приходится проходить в резонаторе, были как можно меньше. Этим условиям лучше всего удовлетворяет тороидальная конструкция резонатора с центральными дисками в виде металлических стенок, через которые пролетает пучок электронов.

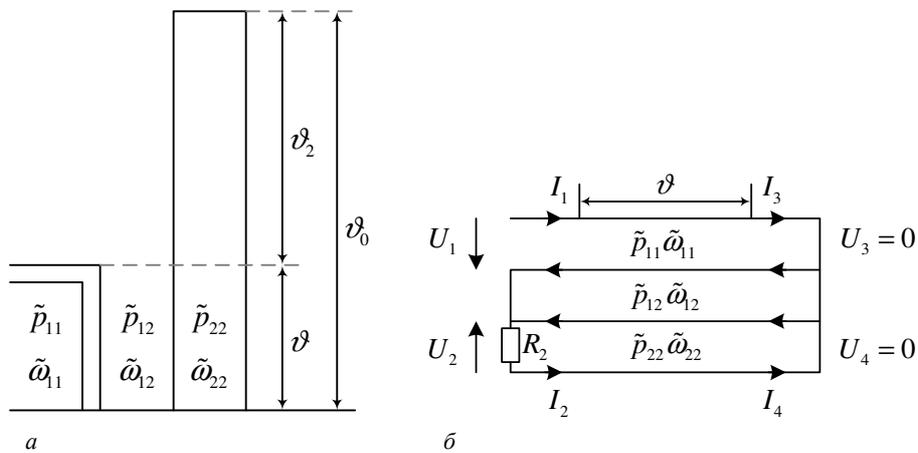
На практике чаще всего применяются два вида устройств для ввода и вывода СВЧ-мощности в резонатор: коаксиальный и волноводный. Основной принцип устройства связи состоит в том, что его поле должно иметь составляющую, пространственно совпадающую с аналогичной составляющей, возбуждаемой этим элементом, или поля, из которого надо отвести энергию.

Проблема широкополосного согласования высокодобротных резонаторов и стандартных одноמודовых волноводов является весьма сложной [5–10]. Дело в том, что пространственная структура полей

согласуемых элементов сильно различается (например,  $H_{10}$  волны в прямоугольных волноводах стандартного сечения и волновые пучки в квазиоптических открытых резонаторах). Как следствие, импедансы согласуемых элементов в эквивалентных схемах могут существенно различаться, что приводит к значительным отражениям и их сильной частотной зависимости.

**Электродинамическое моделирование устройства связи резонатора с СВЧ-трактом.** Элемент связи моделировался четырехполюсником, включенным между резонатором и линией передачи, и был представлен полной канонической схемой замещения Felsen-Oliver для четырехполюсников с потерями. Для определения минимума среднестатистического отклонения исходных данных от функции аппроксимации использовался градиентный метод вариации искомых параметров.

На рисунке 1 дано схематическое изображение резонатора (а) и его эквивалентная схема (б) в виде двух связанных линий. Первая линия (отверстие связи) имеет электродинамическое и электростатическое волновые сопротивления, равные соответственно  $\tilde{p}_{11}$  и  $\tilde{\omega}_{11}$ , вторая –  $\tilde{p}_{22}$  и  $\tilde{\omega}_{22}$ . Обе линии связаны между собой на участке электрической длиной  $\vartheta$ , при этом сопротивления связи равны  $\tilde{p}_{12}$  и  $\tilde{\omega}_{12}$  [11]. Импеданс  $Z_2 = R_2 - j\tilde{p}_{22}\text{ctg}\vartheta$  включает в себя реактивное сопротивление части резонатора длиной  $\vartheta_2$  и собственные потери всего резонатора, пересчитанные в плоскость присоединения  $Z_2$ .



а – схематическое изображение; б – эквивалентная схема

Рисунок 1. – Резонатор с отверстием связи

Двухполюсник (рисунок 1, б) является производным от восьмиполусника, образованного двумя связанными линиями с неравными волновыми сопротивлениями. Матрица передачи такого восьмиполусника имеет вид [12]

$$[a] = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & j\tilde{p}_{11} \sin \vartheta & j\tilde{p}_{12} \sin \vartheta \\ 0 & \cos \vartheta & j\tilde{p}_{12} \sin \vartheta & j\tilde{p}_{22} \sin \vartheta \\ j\frac{\sin \vartheta}{\tilde{\omega}_{11}} & -j\frac{\sin \vartheta}{\tilde{\omega}_{12}} & \cos \vartheta & 0 \\ -j\frac{\sin \vartheta}{\tilde{\omega}_{12}} & j\frac{\sin \vartheta}{\tilde{\omega}_{22}} & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix}.$$

Так как  $U_3 - U_1 = 0$ , а  $U_2 = -I_2 Z_2$ , входной импеданс двухполюсника (резонатора с отверстием связи) запишется

$$Z_{\text{вх}} = j\tilde{p}_{11}\text{tg}\vartheta + \tilde{p}_{12}^2 \text{tg}^2 \vartheta \frac{R_2 + j\tilde{p}_{22}q}{R_2 + \tilde{p}_{22}^2 q}, \quad (1)$$

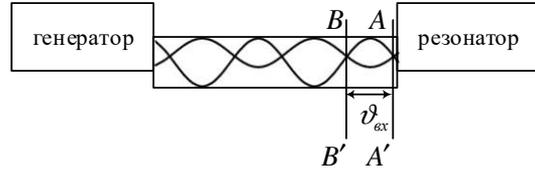
где  $R_2$  – собственные потери резонатора, отнесенные к плоскости, отстоящей от плоскости короткого замыкания на угол  $\vartheta$ ;

$$q = \frac{\cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_2},$$

где  $\vartheta_0 = \vartheta + \vartheta_2$  – электрическая длина резонатора.

**Расчет параметров устройства связи объемного измерительного резонатора.** Зная распределение напряжения во входном тракте резонатора, можно найти его параметры [13]. На рисунке 2 изображен резонатор и распределение напряжения в тракте, соединяющем его с генератором. Выражение (1) описывает входной импеданс резонатора непосредственно на входе линии связи (плоскость  $AA'$ ).

**Рисунок 2. – Распределение напряжения во входном тракте резонатора и опорные плоскости  $AA'$  и  $BB'$**



При сильной расстройке резонатора по отношению к частоте генератора его входной импеданс определяется только реактивным сопротивлением элемента связи [13]:

$$Z_{вх} = Z_{AA'} = j\tilde{p}_{11} \operatorname{tg} \vartheta .$$

При этом во входном тракте установится чисто стоячая волна с ближайшим максимумом в плоскости  $BB'$ , где входной импеданс равен бесконечности. Выражение импеданса  $Z_{BB'}$ , трансформированного в плоскость  $BB'$ , можно записать в виде

$$Z_{BB'} = Z_0 \frac{Z_{AA'} + jZ_0 \operatorname{tg} \vartheta_{вх}}{Z_0 + jZ_{AA'} \operatorname{tg} \vartheta_{вх}} ,$$

где  $\vartheta_{вх}$  – расстояние между плоскостями  $AA'$  и  $BB'$ ;

$Z_0$  – волновое сопротивление входного тракта;

$$Z_{BB'} = \infty \text{ при } Z_0 + jZ_{AA'} \operatorname{tg} \vartheta_{вх} = 0, \text{ т.е. если } \operatorname{tg} \vartheta_{вх} = \frac{Z_0}{jZ_{AA'}} .$$

При расстройке резонатора  $\operatorname{tg} \vartheta_{вх} = \frac{Z_0}{\tilde{p}_{11} \operatorname{tg} \vartheta}$ , так что для любой настройки резонатора справедливо выражение [10]

$$\frac{Z_{BB'}}{Z_0} = \frac{Z_{AA'} + j \frac{Z_0^2}{\tilde{p}_{11} \operatorname{tg} \vartheta}}{Z_0 + jZ_{AA'} \frac{Z_0}{\tilde{p}_{11} \operatorname{tg} \vartheta}} = \frac{Z_{AA'} \tilde{p}_{11} \operatorname{tg} \vartheta + jZ_0^2}{Z_0 \tilde{p}_{11} \operatorname{tg} \vartheta + jZ_{AA'} Z_0} . \quad (2)$$

Когда резонатор настроен на частоту генератора, в плоскости  $BB'$  расположен минимум напряжения, поэтому  $\frac{Z_{BB'}}{Z_0}$  – чисто активное сопротивление, численно равное сопротивлению  $\frac{R_S}{Z_0}$  эквивалентного последовательного контура.

Подставляя (1) в (2), получим

$$\frac{Z_{BB'}}{Z_0} = \frac{r_2 (p_{11}^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta + 1)}{p_{11} p_{св}^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta} - j \frac{p_{11}^2 p_{св}^2 \operatorname{tg}^3 \vartheta + q (p_{11}^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta + 1)}{p_{11} p_{св}^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta} ,$$

где  $r_2 = \frac{R_2}{\tilde{p}_{22}}$ ;  $p_{11} = \frac{\tilde{p}_{11}}{Z_0}$ ;  $p_{св}^2 = \frac{\tilde{p}_{12}^2}{\tilde{p}_{11} \tilde{p}_{22}}$ .

Так как  $\frac{Z_{BB'}}{Z_0}$  – чисто активное сопротивление, значит  $\operatorname{Im} \left( \frac{Z_{BB'}}{Z_0} \right) = 0$ , а

$$\operatorname{Re} \left( \frac{Z_{BB'}}{Z_0} \right) = \frac{1}{\beta} , \quad (3)$$

где  $\beta = \frac{Q_0}{Q_H} - 1$ .

Поскольку  $r_2 = \frac{r_0}{\cos^2 \vartheta}$ , выражение (3) запишется

$$\frac{r_0 (p_{11}^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta + 1)}{p_{11} p_{cв}^2 \sin^2 \vartheta} = \frac{1}{\beta} = \frac{Q_n}{1 - \frac{Q_n}{Q_0}}, \quad (4)$$

где  $Q_0$  и  $Q_n$  – ненагруженная и нагруженная добротности резонатора соответственно;

$r_0 = \frac{\pi}{2Q_0} (2n - 1)$  – для резонатора, не укороченного емкостью;

$n$  – число узлов напряжения на длине резонатора.

В большинстве практических случаев  $\frac{Q_n}{Q_0} \ll 1$ , так что  $\frac{1}{\beta} = \frac{Q_n}{Q_0}$ . Тогда из (4) следует

$$Q_n \approx (2n - 1) \frac{\pi}{2} \frac{p_{11}^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta + 1}{p_{11} p_{cв}^2 \sin^2 \vartheta}. \quad (5)$$

Принимая во внимание, что  $Q_n = \frac{f}{2\Delta f}$ , где  $f$  – резонансная частота,  $2\Delta f$  – ширина полосы пропускания нагруженного резонатора, и  $\vartheta = \frac{2\pi fl}{c}$ , где  $l$  – длина участка связи,  $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ , найдем выражение для полосы пропускания резонатора:

$$2\Delta f = a\varphi(\vartheta), \quad (6)$$

где  $a = \frac{cp_{11} p_{cв}^2}{(2n - 1)\pi^2 l}$ ,  $\varphi(\vartheta) = \frac{\vartheta \sin^2 \vartheta}{p_{11}^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta + 1}$ .

Функция  $\varphi(\vartheta)$  имеет экстремум (максимум) при  $\vartheta_{\max}$ , который зависит от параметра  $p_{11}^2$  и является корнем уравнения

$$\vartheta = \frac{1}{2} \frac{p_{11}^2 \operatorname{tg} \vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta}{p_{11}^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta}. \quad (7)$$

Моделирование выполнялось с помощью пакета «CST Microwave Studio»<sup>1</sup>. Пакет CST MWS 2009 включает 4 подпрограммы. При вычислении использовалась подпрограмма расчета в частотной области (Frequency domain solver, F!), которая применяется для решения широкополосных задач. Так, с ее помощью можно проектировать линии передачи. Подпрограмма расчета в частотной области позволяет получать более точные результаты, однако время расчета значительно возрастает.

При моделировании задавались входные данные: резонансная частота, ширина полосы пропускания нагруженного резонатора, реактивное сопротивление элемента связи, входной импеданс. Результаты расчетов представлены на рисунке 3 в виде семейства нормированных кривых  $\varphi(\vartheta)$ , параметром которого является  $p_{11}$ .

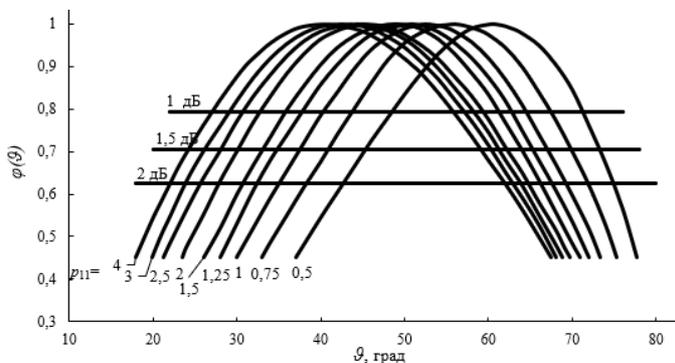
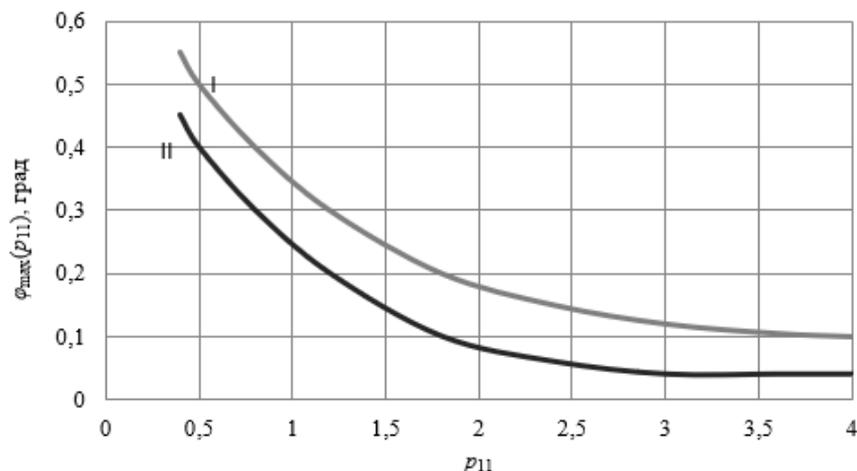


Рисунок 3. – Нормированные кривые  $\varphi(\vartheta)$  с параметром  $p_{11}$  полосы пропускания в заданном диапазоне частот

<sup>1</sup> CST Studio Suite 2009. Workflow and Solver Overview [Electronic resource]. URL: [www.cst.com](http://www.cst.com).

При увеличении  $p_{11}$  уменьшается абсолютная величина максимума функции  $\varphi(\vartheta)$ , т.е. уменьшается ширина полосы пропускания.

Результаты расчетов зависимости корней уравнения (7) и зависимости  $\varphi(\vartheta_{\max})$  от  $p_{11}$  приведены на рисунке 4:  $\varphi(\vartheta) = 0$  (кривая I) и величины функции  $\varphi(\vartheta_{\max})$  (кривая II).



**Рисунок 4. – Корни уравнения  $\varphi(\vartheta) = 0$  (кривая I) и зависимость  $\varphi(\vartheta_{\max})$  (кривая II) в функции волнового сопротивления  $p_{11}$**

Из зависимостей, приведенных на рисунках 3 и 4, определяются характеристики устройства связи – величина сопротивления связи  $p_{12}$  и размер элемента связи  $\vartheta$ .

Функция  $\varphi(\vartheta)$  (и полоса пропускания  $2\Delta f$ ) изменяются немонотонно с максимумом на заданной резонансной частоте резонатора ( $\vartheta \approx 40^\circ \div 60^\circ$ ). С увеличением  $p_{11}$  максимумы кривых сдвигаются влево, а, следовательно, максимальная ширина полосы при заданном уровне неравномерности достигается при более малом размере отверстия связи (на более низкой частоте).

Увеличение параметра  $p_{11}$  ведет к расширению кривой  $\varphi(\vartheta)$ , т.е. к уменьшению неравномерности.

**Заключение.** Установлена экспоненциальная зависимость входного импеданса от сопротивления элемента связи, которая позволяет определить характеристики устройства связи – величину сопротивления связи и размер элемента связи. Полученные выражения позволяют определить электрические характеристики устройства связи объемного резонатора с СВЧ-трактом по заданным величинам полосы пропускания резонатора, а также позволяют выполнить расчет геометрических параметров конструкции устройства связи объемных резонаторов.

Значения нагруженной добротности исследуемой системы (объемный резонатор с элементом связи), полученные с помощью моделирования, очень хорошо соотносятся с экспериментальными результатами. Показано, что использование в расчетах CST MWS является универсальным инструментом для проектирования сложных электродинамических систем СВЧ-диапазона.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Техника сверхвысоких частот / Под ред. Т. Р. Брахмана ; пер. с англ. – М. : Сов. радио, 1953. – 473 с.
2. Федоров, Н. И. Основы электродинамики / Н. И. Федоров. – М. : Высш. шк., 1980. – 399 с.
3. Никольский, В. В. Электродинамика и распространение радиоволн / В. В. Никольский, Т. И. Никольская // М. : Связь, 1989. – 544 с.
4. Кугушев, А. М. Основы радиоэлектроники. Электродинамика и распространение радиоволн : учеб. пособие / А. М. Кугушев, Н. С. Голубева, В. Н. Митрохин. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – 368 с.
5. Свойства квазиоптического резонатора с сосредоточенным элементом связи / Б. М. Булгаков [и др.] // Радиофизика и электроника. – 1998. – Т. 3. – № 1. – С. 11–14.
6. Родионова, В. Н. Связь открытого резонатора с прямоугольным волноводом / В. Н. Родионова, Г. Я. Слепян // Радиотехника и электроника. – 1989. – Т. 34, № 7. – С. 1358–1365.
7. Косарев, Е. Л. Вынужденные колебания открытого резонатора, связанного с волноводом малым отверстием / Е. Л. Косарев, Ю. М. Ципенюк // Электроника больших мощностей. – 1968. – Вып. 5. – С. 105–117.

8. Electromagnetic modelling of broadband coupling elements between high-Q resonators and single-mode waveguides / V. Rodionova [et al.] // 11–th Inter. Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. – Kharkov, 2006. – P. 382–386.
9. Grating coupling elements for high-Q resonators and rectangular waveguides of the millimeter wave band / V. Karpovich [et al.] // J. of Communications Technology and electronics. – 2006. – Vol. 12. – P. 1227–1231.
10. Irregular-Waveguide elements coupling high-Q resonators with single-mode waveguides / G. Ya. Slepyan [et al.] // J. of Communications Technology and Electronics. – 2008. – Vol. 53, No. 2. – P. 184–189.
11. Мейнке, Х. Радиотехнический справочник. / Х. Мейнке, Ф. Гундлах. – М. ; Л. : ГЭИ. – 1961. – Т. 1. – 418 с.
12. Морозов, Г. А. Прикладная СВЧ электроника : метод. указания / Г. А. Морозов, Н. Е. Стахова. – Казань : КГТУ им. А. Н. Туполева, 2002. – 16 с.
13. Фельдштейн, А. П. Справочник по элементам волноводной техники / А. П. Фельдштейн, Л. Р. Ярвич, В. П. Смирнов. – М. : Сов. радио, 1967. – 651 с.

## REFERENCES

1. Brahman, T. R. (Ed.). (1953). *Tehnika sverhvyssokih chastot. [Microwave technology]*. Moscow: Soviet Radio. (In Russ.)
2. Fedorov, N. I. (1980) *Osnovy jelektrodinamiki [Fundamentals of electrodynamics]*. Moscow: Higher school. (In Russ.)
3. Nikol'skij, V. V., & Nikol'skaja, T. I. (1989) *Jelektrodinamika i rasprostranenie radiovoln [Electrodynamics and propagation of radio waves]*. Moscow: Communication. (In Russ.)
4. Kugushev, A. M., Golubeva, N. S., & Mitrohin, V. N. (2001) *Osnovy radiojelektroniki. Jelektrodinamika i rasprostranenie radiovoln: ucheb. posob. [Fundamentals of radio electronics. Electrodynamics and propagation of radio waves: study guide]*. Moscow: Publishing house of MSTU im. N. E. Bauman. (In Russ.)
5. Bulgakov, B. M., Glamazdin, V. V., Skresanov, V. N., & Natarov, M. P. (1998) Svojstva kvaziophticheskogo rezonatora s sosredotochennym elementom svyazi [Properties of a Qua-Optical Resonator with a Lumped Coupling Presence]. *Radiofizika i elektronika [Radiophysics and electronics]*, 3(1), 11–14. (In Russ.)
6. Rodionova, V. N., & Slepjan, G. Ja. (1989) Svjaz' otkrytogo rezonatora s prjamougol'nym volnovodom [Communication of an open resonator with a rectangular waveguide]. *Radiotehnika i jelektronika [Radio engineering and electronic]*, 34(7), 1358–1365. (In Russ.)
7. Kosarev, E. L., & Cipenjuk, Ju. M. (1968) Vynuzhdennye kolebanija otkrytogo rezonatora, svjazannogo s volnovodom malym otverstiem [Forced oscillations of an open resonator coupled to a waveguide with a small hole]. *Jelektronika bol'shij moshhnostej [High power electronics]*, (5), 105–117. (In Russ.)
8. Rodionova, V., Slepyan, G., Karpovich, V., Skresanov, V., & Natarov, M. (2006) Electromagnetic modelling of broadband coupling elements between high-Q resonators and single-mode waveguides, *11–th Inter. Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory* (382–386). Kharkov: ММЕТ'06.
9. Karpovich, V., Slepyan, G., Skresanov, V., Rodionova, V., & Filipenok, O. (2006) Grating coupling elements for high-Q resonators and rectangular waveguides of the millimeter wave band. *Journal of Communications Technology and electronics*, (12), 1227–1231.
10. Slepyan, G. Ya., Skresanov, V. N., Rodionova, V. N., Karpovich, V. A., Natarov, M. P., & Filipenok, O. V. (2008) Irregular-Waveguide elements coupling high-Q resonators with single-mode waveguides. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 53(2), 184–189.
11. Mejnke, X., & Gundlah, F. (1961) *Radiotehnicheskij spravochnik [Engineering Handbook]* (Vol. 1). Moscow-Leningrad: State Energy Publishing House. (In Russ.)
12. Morozov, G. A., & Stahova, N. E. (2002) *Prikladnaja SVCh jelektronika: metod. ukazaniya [Applied microwave electronics: method. instructions]*. Kazan: Publishing house of KSTU im. A.N. Tupolev. (In Russ.)
13. Fel'dshtejn, A. P., Jarvich, L. R., & Smirnov, V. P. (1967) *Spravochnik po jelementam volnovodnoj tehniki [Handbook on the elements of waveguide technology]*. Moscow: Higher school. (In Russ.)

Поступила 17.03.2022

## SIMULATION OF PARAMETERS OF A COUPLING DEVICE OF A MEASURING RESONATOR WITH A MICROWAVE PATH

V. BOGUSH, V. RODIONOVA, O. TANANA

*An electrodynamic simulation of a device for coupling a cavity resonator with a path is performed. The cavity coupling device is a distributed communication line, i.e. associated with both the magnetic and electric fields of the resonator, and makes it possible to obtain a coupling that depends little on the frequency. An algorithm for approximating the values of the input impedance from the resistance of the coupling element has been developed in order to calculate the set of characteristics of the loaded resonator. The performed calculations and the obtained dependences make it possible to determine the geometrical parameters of the design of a broadband cavity resonator coupling device in the microwave range of wavelengths.*

**Keywords:** cavity resonator, communication device, quality factor of the resonator.

УДК 541.183

DOI 10.52928/2070-1624-2022-38-4-49-55

## ПРОЧНОСТНЫЕ СВОЙСТВА ФОТОРЕЗИСТОВ ДЛЯ ВЗРЫВНОЙ ЛИТОГРАФИИ

канд. физ.-мат. наук, доц. С. А. ВАБИЩЕВИЧ, Н. В. ВАБИЩЕВИЧ

(Полоцкий государственный университет);

канд. физ.-мат. наук Д. И. БРИНКЕВИЧ, канд. физ.-мат. наук, доц. В. С. ПРОСОЛОВИЧ

(Белорусский государственный университет, Минск);

канд. техн. наук В. В. КОЛОС, О. А. ЗУБОВА

(ОАО «ИНТЕГРАЛ» – управляющая компания холдинга «ИНТЕГРАЛ»)

Исследованы адгезионные и прочностные свойства пленок фоторезиста (ФР) для взрывной литографии NFR 016D4, нанесенных на поверхность пластин монокристаллического кремния марки КДБ-10 методом центрифугирования. Установлено, что они ведут себя как хрупкие материалы. Микротвердость ФР, измеренная при малых нагрузках, составляла ~0,3 ГПа, слабо снижаясь при увеличении толщины пленки. Параметры трещиностойкости (коэффициент вязкости разрушения  $K_{1C}$  и эффективная энергия разрушения  $\gamma$ ) при малых нагрузках не зависят от толщины пленки. Скорость возрастания трещиностойкости при увеличении нагрузки зависела от толщины пленки и была большей для тонких пленок. Удельная энергия отслаивания  $G$  при нормальной нагрузке составляла ~1,2 Дж/м<sup>2</sup> для толстых и ~0,7 Дж/м<sup>2</sup> для тонких пленок. Более высокие значения  $G$  для толстых пленок обусловлены, вероятнее всего, компенсацией полей упругих напряжений, возникающих на границе раздела фоторезист/кремний. Проведено сравнение прочностных свойств фоторезиста для взрывной литографии NFR 016D4 и позитивного диазохинон-новолачного фоторезиста ФП9120.

**Ключевые слова:** взрывная литография, негативный фоторезист, микротвердость, трещиностойкость, адгезия.

**Введение.** Взрывная или обратная литография (процесс “lift-off”) – процесс, при котором пленка материала (чаще всего металла) наносится на уже проэкспонированный и протравленный слой ФР на подложке. Структура на подложке формируется при удалении экспонированных участков ФР вместе с находящейся на них пленкой металла. Оставшаяся на подложке пленка металла полностью повторяет рисунок неэкспонированных областей [1]. Этот вид литографии применяется для создания на подложке структур, формирование которых обычными методами литографии проблематично. В частности, взрывная литография применяется при создании металлизации из драгоценных металлов, травление которых обычно является сложной задачей. К прочностным и адгезионным свойствам резистов для взрывной литографии применяются повышенные требования.

Целью настоящей работы являлось исследование методом индентирования адгезионных и прочностных (микротвердость, трещиностойкость) свойств пленок фоторезиста NFR 016D4, нанесенных на пластины монокристаллического кремния методом центрифугирования.

**Методы исследования.** Пленки негативного фоторезиста NFR 016D4 толщиной 3,5 и 5,2 мкм нанесли на поверхность Si методом центрифугирования [2]. В качестве подложек использовались пластины (диаметром 100 мм) монокристаллического кремния марки КДБ-10 с ориентацией (111). После формирования пленки ФР на рабочей стороне пластины проводилась ее сушка при температуре 90 °С. Толщина пленок фоторезиста контролировалась с помощью конфокального микроскопа MicroProof 200 по пяти фиксированным точкам, расположенным на двух взаимно перпендикулярных диаметрах на каждой пластине.

Микроиндентирование проводилось на приборе ПМТ-3 по стандартной методике при комнатной температуре. В качестве индентора использовался алмазный наконечник в форме четырехгранной пирамиды с квадратным основанием и углом при вершине  $\alpha = 136^\circ$ . Нагрузка  $P$  на индентор варьировала в пределах 1...50 г. Длительность нагружения составляла 2 с; выдержка под нагрузкой – 5 с. При измерении для каждой экспериментальной точки на поверхность образца наносилось не менее 50 отпечатков. Обработка результатов измерений проводилась с использованием методов математической статистики [3]. Это обеспечивало погрешность измерений микротвердости  $H$  менее 2,5% (с доверительной вероятностью 0,95).

Значения коэффициента вязкости разрушения  $K_{1C}$  и эффективной энергии разрушения  $\gamma$  рассчитывались по средней длине радиальных трещин в углах отпечатков согласно следующим формулам [4]:

$$K_{1C} = 0,016 \left( \frac{E}{H} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{P}{L^{\frac{3}{2}}}; \quad (1)$$

$$\gamma = \frac{K_{IC}^2}{2E}, \quad (2)$$

где  $E$  – модуль Юнга (для полимера –  $0,8 \cdot 10^{10}$  Па);  
 $H$  – микротвердость пленки;  
 $L$  – длина трещины;  
 $P$  – нагрузка на индентор.

Погрешность измерений не превышала 8%.

Удельная энергия отслаивания пленок  $G$  рассчитывалась по формуле (3), широко используемой для исследования различных полимерных пленок на стеклянных подложках [5]:

$$G = \frac{0,627H^2h(1-\nu^2)}{E(1+\nu+2(1-\nu)HL^2/P)^2}, \quad (3)$$

где  $h$  – толщина пленки;

$\nu$  – коэффициент Пуассона (использовалось значение 0,3).

**Экспериментальные результаты и их обсуждение.** Отпечатки микроиндентора в пленках фоторезиста NFR 016D4 толщиной 3,5 и 5,2 мкм представлены на рисунках 1, 2. При минимальной нагрузке 1 г до 50% отпечатков после снятия нагрузки частично или полностью восстанавливались, уменьшаясь в размерах или полностью исчезая. Однако уже при нагрузке 2 г эффект восстановления отпечатка не наблюдался.

Установлено, что пленки ФР ведут себя как хрупкие материалы независимо от толщины [6]. Так, трещины в углах отпечатков наблюдались на всех нагрузках, даже при 1 г (см. рисунки 1, б и 2, б). При повышении нагрузки более 5 г вокруг отпечатков формируются отслоения от подложки в виде «бабочек» (см. рисунки 1, а и 2, а), размеры которых увеличиваются при повышении нагрузки. Размеры этих отслоений были меньше в более толстых пленках. Вокруг отпечатков наблюдаются интерференционные полосы (см. рисунки 1, а и 2, а), обусловленные интерференцией в клине, который образует отколотый полимер с поверхностью кремния. Вид отпечатков с возрастанием толщины пленки ФР не изменялся, однако в центре отпечатка на пленке толщиной 3,5 мкм при нагрузке 50 г появляется светлый квадрат (см. рисунок 1, а). Это свидетельствует о проникновении индентора в кремниевую подложку. Для более толстых пленок индентор не достигает подложки и светлый квадрат в центре отпечатка отсутствует (см. рисунок 2, а).

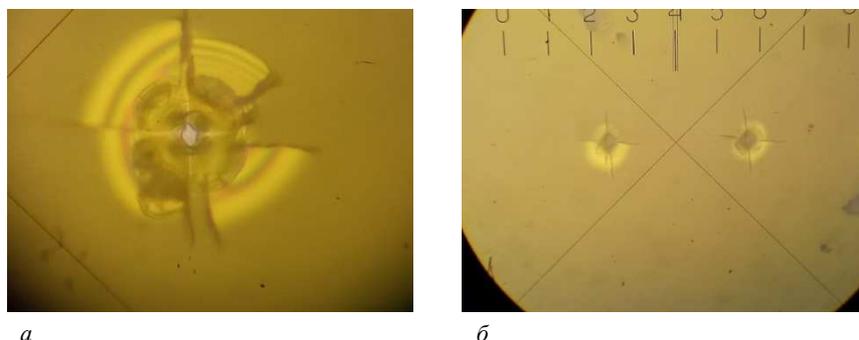


Рисунок 1. – Отпечатки микроиндентора на пленке фоторезиста NFR 016D4 толщиной 3,5 мкм при нагрузках 50 г (а, увеличение 700×) и 5 г (б, увеличение 350×)

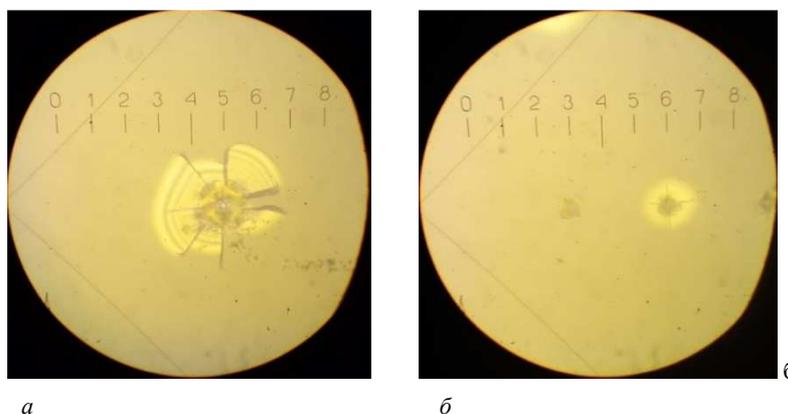
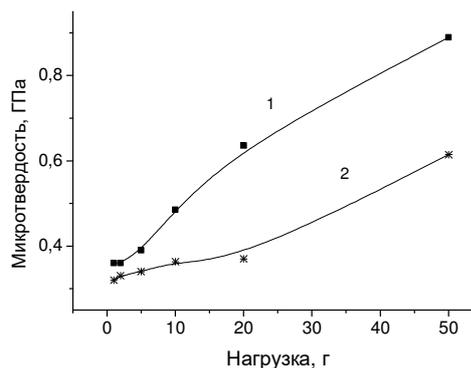


Рисунок 2. – Отпечатки микроиндентора на пленке фоторезиста NFR 016D4 толщиной 5,2 мкм при нагрузках 50 г (а) и 5 г (б), увеличение 400×

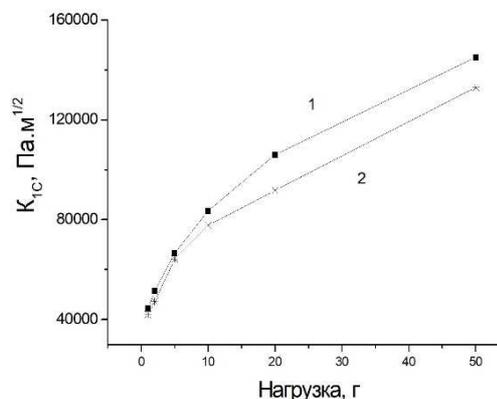
Зависимости микротвердости структур фоторезист/кремний от нагрузки представлены на рисунке 3. Когда глубина проникновения индентора не превышает 0,5 толщины пленки (при нагрузках – до 5 г), значения микротвердости постоянны и соответствуют истинной микротвердости фоторезиста ~0,3 ГПа. Значения истинной микротвердости пленки фоторезиста несущественно различались для толстой и тонкой пленок. При увеличении нагрузки начинает сказываться влияние твердой подложки (микротвердость кремния ~9 ГПа) и значения измеренной микротвердости возрастают. Особенно резкий рост измеренных значений микротвердости наблюдается при приближении и пересечении индентором границы раздела фоторезист/кремний, что наглядно показывает кривая 1 на рисунке 3 для тонкой пленки. В этой пленке индентор достигает границы раздела фоторезист/кремний при нагрузке 10 г, при этой же нагрузке начинается существенный рост измеренной микротвердости. В более толстой пленке индентор достигает границы раздела фоторезист/кремний только при нагрузке 50 г, и только при этой нагрузке наблюдается существенный рост измеренной микротвердости (см. рисунок 3, кривая 2).

**Рисунок 3. – Зависимость микротвердости пленок негативного фоторезиста NFR 016D4 толщиной 3,5 (1) и 5,2 мкм (2) на кремнии марки КДБ10(111) от нагрузки**

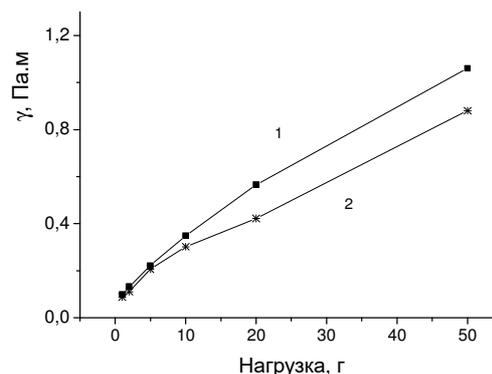


Зависимости от нагрузки параметров трещиностойкости (коэффициента вязкости разрушения  $K_{IC}$  и эффективной энергии разрушения  $\gamma$ ) представлены на рисунках 4 и 5. Эти параметры при малых нагрузках не зависели от толщины пленки, однако при увеличении нагрузки трещиностойкость тонкой пленки возрастала быстрее чем толстой, причем это наблюдалось для обоих параметров трещиностойкости. При максимальной нагрузке 50 г оба параметра трещиностойкости выше в тонкой пленке: коэффициент вязкости разрушения  $K_{IC}$  – на 20%, а эффективная энергия разрушения  $\gamma$  – на 7%. Это различие, как и в случае с микротвердостью, обусловлено, вероятнее всего, не различием в свойствах самих пленок, а влиянием кремниевой подложки.

**Рисунок 4. – Зависимость коэффициента вязкости разрушения  $K_{IC}$  от нагрузки для пленок негативного фоторезиста NFR 016D4 толщиной 3,5 (1) и 5,2 мкм (2)**



**Рисунок 5. – Зависимость эффективной энергии разрушения  $\gamma$  от нагрузки для пленок негативного фоторезиста NFR 016D4 толщиной 3,5 (1) и 5,2 мкм (2)**



Зависимость от нагрузки удельной энергии отслаивания  $G$  для тонких и толстых пленок имеет различный характер (рисунок 6). В толстой пленке (см. рисунок 6, кривая 2) величина  $G$  практически не изменяется во всем диапазоне нагрузок – ее величина варьирует в пределах 1,15–1,35 Дж/м<sup>2</sup>. В тонких пленках при нагрузках до 10 г удельная энергия отслаивания  $G$  постоянна и ее величина составляет ~0,7 Дж/м<sup>2</sup>. При более высоких нагрузках значения  $G$  начинают быстро расти и при нагрузке 50 г достигают значений ~3 Дж/м<sup>2</sup>.

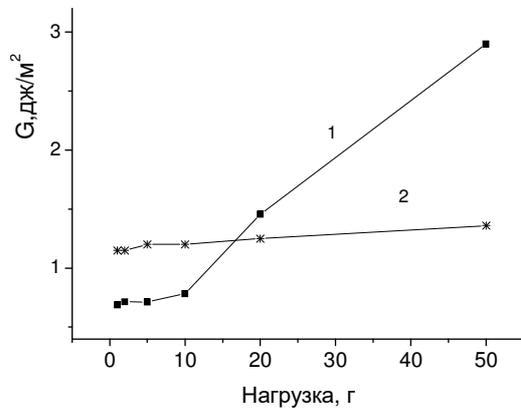


Рисунок 6. – Зависимость удельной энергии отслаивания  $G$  от нагрузки для пленок негативного фоторезиста NFR 016D4 толщиной 3,5 (1) и 5,2 мкм (2)

Различный характер зависимости от нагрузки удельной энергии отслаивания  $G$  для тонких и толстых пленок обусловлен следующими причинами. Метод индентирования позволяет проводить измерения путем приложения как нормальной, так и латеральной нагрузки. Режим нормальной нагрузки реализуется при индентировании толстых пленок, когда индентор не достигает границы раздела фоторезист/кремний. После проникновения индентора в кремниевую подложку свой вклад в отслоение пленки начинает вносить латеральная составляющая нагрузки, что на эксперименте проявляется как рост измеренных значений  $G$ .

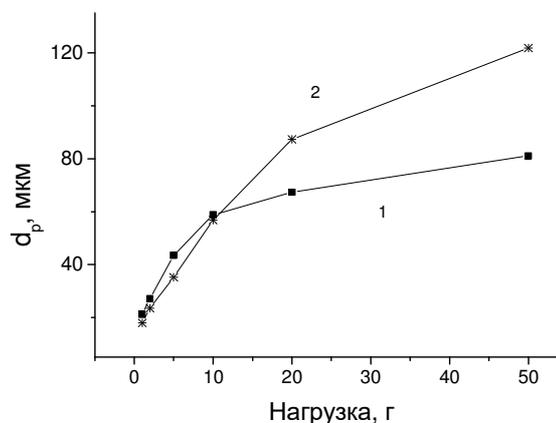
Согласно данным эксперимента глубина проникновения индентора в фоторезистивную пленку при нагрузке 10 г составляла ~3,2 мкм, что сравнимо с толщиной тонкой фоторезистивной пленки (~3,5 мкм). Поэтому при  $P \leq 10$  г измерялись величины удельной энергии отслаивания  $G$  при нормальной нагрузке. Они составляли ~1,2 Дж/м<sup>2</sup> для толстых и ~0,7 Дж/м<sup>2</sup> для тонких пленок. Более высокие значения  $G$  для толстых пленок обусловлены, вероятнее всего, компенсацией полей упругих напряжений, возникающих на границе раздела фоторезист/кремний. Отметим, что дисперсия измеренных значений  $G$  увеличивалась при уменьшении нагрузки и при малых значениях нагрузки  $P = 1 - 2$  г была очень велика ( $\Delta G / G = 0,5 - 0,9$ ). При  $P > 10$  г в тонкой пленке дополнительный вклад вносит латеральная нагрузка и измеренные значения  $G$  начинают расти. Измерить величину  $G$ , обусловленную чисто латеральной нагрузкой, нам не удалось, поскольку не удалось выйти на плато на зависимости  $G(P)$ . Такой выход на плато мы наблюдали в работе [7] для пленок позитивного фоторезиста ФП9120 толщиной 1,0 мкм. Отметим, что величина удельной энергии отслаивания  $G$  при нормальной нагрузке для позитивного фоторезиста ФП9120 составляла ~0,3 Дж/м<sup>2</sup>, что в 2–4 раза ниже значений  $G$  для фоторезиста NFR 016D4, полученных в настоящей работе.

Для пленок толщиной 5,2 мкм во всем диапазоне использованных нагрузок индентор не пересекал границу раздела фоторезист/кремний, что свидетельствует о преобладании нормальной составляющей нагрузки. Измеренные значения  $G$  были постоянны и соответствовали величине удельной энергии отслаивания при нормальной нагрузке.

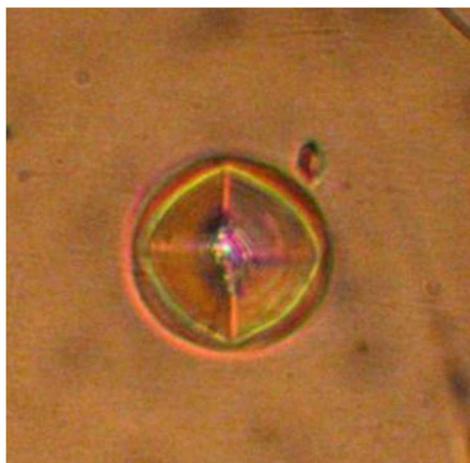
Вокруг отпечатков индентора наблюдалась деформация структуры полимерного фоторезиста (светлый «ореол» на рисунках 1, б и 2, б), которая при больших нагрузках приводила к разрушению пленки (см. рисунки 1, а и 2, а). Средний диаметр области деформации (разрушения) фоторезистивной пленки возрастал при увеличении нагрузки. Кривые зависимости среднего диаметра разрушения  $d_p$  от нагрузки имеют тенденцию к насыщению (рисунок 7), более выраженную у тонких пленок (см. рисунок 7, кривая 1). Следует отметить, что при малых нагрузках (1–5 г) наблюдается практически линейная зависимость  $d_p(P)$ , более сильная в тонкой пленке (сравни кривые 1 и 2 на рисунке 7). При приближении индентора к границе раздела фоторезист/подложка (10 г для тонкой пленки) скорость роста  $d_p$  замедляется и зависимость  $d_p(P)$  стремится к насыщению. При индентировании толстой пленки индентор приближается к границе раздела только при нагрузке 50 г, поэтому в толстой пленке существенное отклонение от линейности зависимости  $d_p(P)$  наблюдается только при нагрузке 50 г. Большие размеры области деформации/разрушения при малых нагрузках в тонких пленках (см. рисунок 7, кривая 1) по сравнению с толстой

пленкой (см. рисунок 7, кривая 2) обусловлены более сильными в тонких пленках деформационными полями на границе раздела фоторезист/подложка.

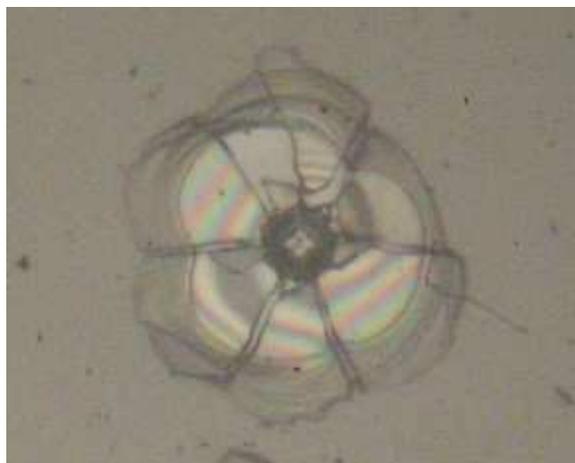
**Рисунок 7. – Зависимость от нагрузки среднего диаметра деформации/разрушения  $d_p$  вокруг отпечатка для пленок негативного фоторезиста NFR 016D4 толщиной 3,5 (1) и 5,2 мкм (2)**



Поведение негативного фоторезиста для взрывной литографии NFR 016D4 при индентировании существенно отличается от поведения позитивного диазохиноноволачного фоторезиста ФП9120, описанного нами в работах [8–12]. В исходных образцах фоторезиста ФП9120 отпечатки индентора имели бочковидную форму (рисунок 8, а), что указывает на наличие растягивающих напряжений в полимерной пленке. У негативного фоторезиста NFR 016D4 таких растягивающих напряжений не наблюдалось – отпечатки имели квадратную форму, совпадающую с формой индентора (см. рисунок 2, б). Величины микротвердости обоих фоторезистов были близки и составляли  $\sim 0,3$  ГПа. Следует отметить, что после облучения  $\gamma$ -квантами  $^{60}\text{Co}$  пленки позитивного фоторезиста ФП9120 при индентировании начинают вести себя подобно исследовавшемуся в настоящей работе негативному фоторезисту NFR 016D4 (сравн. рисунки 1, а; 2, а и 8, б). Отпечатки в  $\gamma$ -облученных пленках ФП9120 при малых нагрузках становятся квадратными, что свидетельствует об исчезновении растягивающих напряжений после облучения.



а



б

**Рисунок 8. – Фотографии характерных отпечатков индентора при индентировании в исходные (а, увеличение 700 $\times$ , нагрузка 5 г [8]) и гамма-облученные (б, увеличение 700 $\times$ , нагрузка 50 г [9]) пленки позитивного диазохиноноволачного фоторезиста ФП9120**

**Закключение.** Таким образом, экспериментально установлено, что пленки фоторезиста для взрывной литографии NFR 016D4, нанесенные на поверхность пластин монокристаллического кремния марки КДБ-10 методом центрифугирования, ведут себя как хрупкие материалы: трещины в углах отпечатков наблюдались на всех исследовавшихся нагрузках. Микротвердость фоторезиста, измеренная при малых нагрузках, составляла  $\sim 0,3$  ГПа, слабо снижаясь при увеличении толщины пленки. Параметры трещиностойкости (коэффициент вязкости разрушения  $K_{IC}$  и эффективная энергия разрушения  $\gamma$ ) при малых нагрузках не зависят от толщины пленки. При увеличении нагрузки трещиностойкость тонкой пленки возрастала быстрее, чем толстой. Удельная энергия отслаивания  $G$  при нормальной нагрузке составляла  $\sim 1,2$  Дж/м<sup>2</sup> для толстых и  $\sim 0,7$  Дж/м<sup>2</sup> для тонких пленок. Более высокие значения  $G$  для толстых пленок обусловлены, вероятно

всего, компенсацией полей упругих напряжений, возникающих на границе раздела фоторезист/кремний. Средний диаметр области деформации/разрушения фоторезистивной пленки возрастал при увеличении нагрузки. Кривые зависимости среднего диаметра разрушения  $d_p$  от нагрузки имеют тенденцию к насыщению, более выраженную у тонких пленок. Проведено сравнение прочностных свойств фоторезиста для взрывной литографии NFR 016D4 и позитивного диазохинон-новолачного фоторезиста ФП9120.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Наноматериалы и нанотехнологии / Под ред. В. Е. Борисенко, Н. К. Толочко – Минск : Изд. центр БГУ, 2008. – С. 109–110.
2. Модификация спектров отражения пленок диазохинон-новолачного фоторезиста при имплантации ионами бора и фосфора / Д. И. Бринкевич [и др.] // Микроэлектроника. – 2019. – Т. 48, № 3. – С. 235–239.
3. Бринкевич, Д. И. Физико-механические свойства эпитаксиальных слоев GaP / Д. И. Бринкевич, Н. В. Вабищевич, С. А. Вабищевич // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2010. – № 9. – С. 92–97.
4. Колесников, Ю. В. Механика контактного разрушения / Ю. В. Колесников, Е. М. Морозов. – М. : Наука, 1989. – 220 с.
5. Measuring mechanical properties of coatings: a methodology applied to nano-particle-filled sol-gel coating on glass / J. Malzbender [et al.] // Materials Science and Engineering: R. – 2002. – V. 36, iss. 2-3. – P. 47–103. – DOI: [10.1016/S0927-796X\(01\)00040-7](https://doi.org/10.1016/S0927-796X(01)00040-7).
6. Дефекты упаковки, микротвердость и микрохрупкость в пластинах кремния, обусловленные термообработкой / Д. И. Бринкевич [и др.] // Материалы, технологии, инструменты. – 2006. – Т. 11, № 1. – С. 48–50.
7. Effect of Ion Implantation on the Adhesion of Positive Diazoquinone-Novolak Photoresist Films to Single-Crystal Silicon / S. A. Vabishchevich [et al.] // J. of Surface Investigation. X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques. – 2020. – V. 14, № 6. – P. 1352–1357. – DOI: [10.1134/S1027451020060476](https://doi.org/10.1134/S1027451020060476).
8. Микроиндентирование структур фотополимер-кремний / Н. В. Вабищевич [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2011. – № 4. – С. 77–83.
9. Физико-механические свойства облученных пленок диазохинон-новолачного фоторезиста на кремнии / С. А. Вабищевич [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2020. – № 12. – С. 60–64.
10. Прочностные свойства структур фоторезист-кремний,  $\gamma$ -облученных и имплантированных ионами  $B^+$  и  $P^+$  / С. А. Вабищевич [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2016. – № 12. – С. 30–36.
11. Adhesion of Irradiated Diazoquinone-Novolak Photoresist Films to Single-Crystal Silicon / S. A. Vabishchevich [et al.] // High Energy Chemistry. – 2021. – V. 55, N. 6. – P. 495–501.
12. Адгезия к монокристаллическому кремнию пленок диазохинон-новолачного фоторезиста, имплантированных ионами бора и фосфора / С. А. Вабищевич [и др.] // Химия высоких энергий. – 2020. – Т. 54, № 1. – С. 54–59.

## REFERENCES

1. Borisenko, V. E., & Tolochko, N. K. (Eds.). (2008). *Nanomaterialy i nanotekhnologii. [Nanomaterials and Nanotechnologies]* (109–110). Minsk: Belarusian State University. (In Russ.).
2. Brinkevich, D. I., Kharchenko, A. A., Prosolovich, V. S., Odzhaev, V. B., Brinkevich, S. D., & Yankovskii Yu. N. (2019). Modifikatsiya spektrov otrazheniya plenok diazokhinon-novolachnogo fotorezista pri implantatsii ionami bora i fosfora [Modification of reflectance spectra of films of diazoquinone-novolac photoresist upon implantation with boron and phosphorus ions]. *Mikroelektronika [Microelectronics]*, 48(3), 235–239. (In Russ., abstr. in Engl.).
3. Brinkevich, D. I., Vabishchevich, N. V., & Vabishchevich, S. A. (2010). Fiziko-mekhanicheskie svoystva epitaksial'nykh sloev GaP [Physical and mechanical properties of GaP epitaxial layers]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (9), 92–97. (In Russ., abstr. in Engl.).
4. Kolesnikov, Yu. V., & Morozov, E. M. (1989) *Mekhanika kontaktного razrusheniya [Contact fracture mechanics]*. Moscow: Nauka. (In Russ.).
5. Malzbender, J., den Toonder, J. M. J., Balkenendeb, A. R., & de Witha, G. (2002) Measuring mechanical properties of coatings: a methodology applied to nano-particle-filled sol-gel coating on glass. *Materials Science and Engineering: R*, 36(2-3), 47–103. DOI: [10.1016/S0927-796X\(01\)00040-7](https://doi.org/10.1016/S0927-796X(01)00040-7).
6. Brinkevich, D. I., Vabishchevich, S. A., Petlitskii, A. N., & Prosolovich, V. S. (2006). Defekty upakovki, mikrotverdost' i mikrokhрупkost' v platinakh kremniya, obuslovlennyye termooobrabotkoi [Packing defects, microhardness and microbrittleness in silicon wafers caused by heat treatment]. *Materialy, tekhnologii, instrumenty [Packing defects, microhardness and microbrittleness in silicon wafers caused by heat treatment]*, 11(1), 48–50. (In Russ.).
7. Vabishchevich, S. A., Brinkevich, S. D., Prosolovich, V. S., Vabishchevich, N. V., & Brinkevich, D. I. (2020). Effect of Ion Implantation on the Adhesion of Positive Diazoquinone-Novolak Photoresist Films to Single-Crystal Silicon. *Journal of Surface Investigation. X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, 14(6), 1352–1357. DOI: [10.1134/S1027451020060476](https://doi.org/10.1134/S1027451020060476).
8. Vabishchevich, N. V., Vabishchevich, S. A., Brinkevich, D. I., Volobuev, V. S., Lukashevich, M. G., Odzhaev, V. B., & Prosolovich, V. S. (2011). Mikroindentirovanie struktur fopolimer-kremnii [Microindentation of photopolymer-silicon structures]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (4), 77–83. (In Russ., abstr. in Engl.).
9. Vabishchevich, S. A., Vabishchevich, N. V., Brinkevich, D. I., & Prosolovich, V. S. (2020). Fiziko-mekhanicheskie svoystva obлучennykh plenok diazokhinon-novolachnogo fotorezista na kremnii [Physical and mechanical properties of irradiated films of diazoquinone-novolac photoresist on silicon]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta*.

- Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences], (12), 60–64. (In Russ., abstr. in Engl.).*
10. Vabishchevich, S. A., Vabishchevich, N. V., Brinkevich, D. I., Prosolovich, V. S., Yankovskii, Yu. N., & Brinkevich, S. D. (2016). Prochnostnye svoistva struktur fotorezist–kremnii,  $\gamma$ -obluchennykh i implantirovannykh ionami B<sup>+</sup> i P<sup>+</sup> [Strength properties of photoresist–silicon structures  $\gamma$ -irradiated and implanted with B<sup>+</sup> and P<sup>+</sup> ions]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences], (12), 30–36. (In Russ., abstr. in Engl.).*
  11. Vabishchevich, S. A., Brinkevich, S. D., Vabishchevich, N. V., Brinkevich, D. I., & Prosolovich, V. S. (2021). Adhesion of Irradiated Diazoquinone–Novolac Photoresist Films to Single-Crystal Silicon. *High Energy Chemistry, 55(6), 495–501.*
  12. Vabishchevich, S. A., Brinkevich, S. D., Brinkevich, D. I., & Prosolovich, V. S. (2020). Adgeziya k monokristallicheskomu kremniyu plenok diazokhinon-novolachnogo fotorezista, implantirovannykh ionami bora i fosfora [Adhesion to single-crystal silicon of diazoquinone-novolac photoresist films implanted with boron and phosphorus ions]. *Khimiya vysokikh energii [High Energy Chemistry], 54(1), 54–59. (In Russ., abstr. in Engl.).*

Посмунула 17.03.2022

## STRENGTH PROPERTIES OF PHOTORESISTS FOR EXPLOSIVE LITHOGRAPHY

**S. VABISHCHEVICH, N. VABISHCHEVICH, D. BRINKEVICH, V. PROSOLOVICH,  
V. KOLOS, O.ZUBOVA**

*The adhesion and strength properties of NFR 016b4 photoresist (PR) films for explosive lithography deposited on the surface of KDB-10 single-crystal silicon wafers by centrifugation have been studied. It has been found that they behave like brittle materials. The FR microhardness measured at low loads was ~0,3 GPa, decreasing slightly with increasing film thickness. The crack resistance parameters (fracture toughness coefficient  $K_{IC}$  and effective fracture energy  $\gamma$ ) at low loads do not depend on the film thickness. With increasing load, the crack resistance of a thin film increased faster than that of a thick one. The specific peeling energy  $G$  under normal loading was ~1,2 J/m<sup>2</sup> for thick and ~0,7 J/m<sup>2</sup> for thin films. The higher values of  $G$  for thick films are most likely due to the compensation of elastic stress fields arising at the photoresist/silicon interface. The strength properties of NFR 016b4 explosive lithography photoresist and FP9120 positive diazoquinone-novolac photoresist are compared.*

**Keywords:** *explosive lithography, negative photoresist, microhardness, crack resistance, adhesion.*

УДК 621.548

DOI 10.52928/2070-1624-2022-38-4-56-61

## ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРЯМОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В ТЕПЛОВУЮ

канд. техн. наук, доц. А. С. ВЕРШИНИН, канд. техн. наук, доц. Ю. Г. ГРОЗБЕРГ  
(Полоцкий государственный университет)

В связи с улучшением технических характеристик выпускаемых постоянных магнитов их стали часто применять при генерации электроэнергии, а также для преобразования механической энергии в тепловую. В данной работе рассматриваются устройства прямого преобразования механической энергии в тепловую индукционного типа с постоянными магнитами, анализируются причины низкой эффективности преобразования и проводится поиск способов повышения эффективности работы указанных устройств. Одной из причин является наличие воздушных зазоров в магнитных цепях таких преобразователей. Выполнено исследование влияния величин воздушных зазоров на изменение магнитных потоков в неразветвленной магнитной цепи с постоянной магнитодвижущей силой (МДС) и получена примерная зависимость  $\Phi = f(\delta)$ , позволяющая количественно оценить степень указанного влияния. Разработана схема конструкции устройства прямого преобразования механической энергии в тепловую индукционного типа с воздушным теплообменом, в которой с целью повышения эффективности преобразования исключены воздушные зазоры в магнитных цепях.

**Ключевые слова:** магнитная цепь, воздушный зазор, преобразователь, механическая энергия, тепловая энергия, приводной двигатель, вихревой ток, короткозамкнутый виток.

**Введение.** В технических журналах и среди патентов иногда встречаются публикации с описаниями устройств для прямого преобразования механической энергии в тепловую. Известные способы прямого преобразования механической энергии в тепловую по принципу получения тепла можно разделить на следующие направления:

- получение тепла посредством перемещения конструктивных элементов в вязкой жидкости<sup>1</sup> [1; 2];
- получение тепла за счет преодоления сил трения<sup>2</sup>;
- получение тепла при образовании вихрей и явлении кавитации в жидкой среде<sup>3</sup>;
- получение тепла за счет индукционного нагрева вихревыми токами при изменении магнитных потоков<sup>4</sup>.

Каждый из перечисленных способов получения тепла обладает своими достоинствами и недостатками.

Если в качестве приводного двигателя как источника механической энергии рассматривать ветроколесо, то из всего многообразия перечисленных способов преобразования наиболее удобен способ с индукционным нагревом. В силу того, что обороты ветроколеса обычно невелики, эффективность преобразования первых трех из вышеуказанных способов оказывается невысокой.

Эффективность способа преобразования с индукционным нагревом может быть повышена за счет увеличения полюсности преобразователя, что в итоге позволит увеличить частоту изменения магнитных потоков в магнитных цепях. Магнитные потоки в таких преобразователях создаются постоянными магнитами, что делает преобразователи полностью автономными.

**Цель работы.** Основной целью данной работы является анализ причин низкой эффективности преобразователей прямого преобразования механической энергии в тепловую индукционного типа (с постоянными магнитами), поиск способов повышения эффективности таких преобразователей и разработка схемы конструкции преобразователя с большей эффективностью преобразования.

**Возможные пути достижения цели.** Как уже было отмечено выше, при низких оборотах приводного двигателя из всех рассмотренных вариантов построения устройств для прямого преобразования механической энергии в тепловую в плане повышения эффективности подходит преобразователь индукционного типа с постоянными магнитами.

<sup>1</sup> Опозитный ветротеплогенератор : пат. РФ 2612237 / А. Ф. Серов, В. Н. Мамонов, В. И. Терехов, А. Д. Назаров. – Оpubл. 03.03.2017.

<sup>2</sup> Фрикционный нагреватель : пат. РФ 2244223 С1 / В. Л. Гой. – Оpubл. 10.01.2005; Ветровой фрикционный теплогенератор : а. с. СССР № 1627790 / И. Б. Бирюлин, А. А. Ветрова, Д. Д. Васильева, А. А. Шабалин. – Оpubл. 14.08.1991.

<sup>3</sup> Вихревой ветротеплогенератор : пат. РФ 2656515 / Н. А. Седых. – Оpubл. 05.06.2018.

<sup>4</sup> Устройство для преобразования механической энергии в тепловую : пат. РФ 2097946 / А. И. Елшин, В. М. Казанский, Е. Д. Карманов, В. И. Михеев. – Оpubл. 27.11.1997.

Недостаточная эффективность работы такого преобразователя объясняется низкими оборотами приводного двигателя, а также наличием воздушных зазоров, через которые замыкаются пульсирующие магнитные потоки.

Нагрев происходит за счет вихревых токов в ферромагнитных сердечниках и токов в короткозамкнутых витках из металла с повышенным удельным электрическим сопротивлением из-за пульсаций магнитных потоков.

При постоянной МДС постоянного магнита и при наличии воздушных зазоров магнитные потоки значительно ослабевают, величины вихревых токов и токи в короткозамкнутых витках тоже становятся меньше. Следовательно, эффективность такого преобразователя механической энергии в тепловую невелика.

Возможными способами повышения эффективности работы таких преобразователей являются повышение частоты пульсаций магнитных потоков и увеличение интенсивности самих потоков. Для повышения частоты пульсаций магнитных потоков следует увеличивать число полюсов преобразователя, а для увеличения интенсивности магнитных потоков желательно уменьшить (или даже исключить) воздушные зазоры в магнитных цепях указанных преобразователей.

Для количественной оценки повышения эффективности преобразователя механической энергии в тепловую необходимо оценить степень увеличения магнитного потока в магнитной цепи при уменьшении или даже исключении воздушных зазоров.

Чтобы количественно оценить влияние воздушного зазора в магнитной цепи на изменение магнитного потока, следует рассмотреть неразветвленную магнитную цепь с постоянной по величине МДС и двумя воздушными зазорами (так как в преобразователе<sup>5</sup> магнитные цепи имеют по два воздушных зазора).

Получить количественную оценку указанной зависимости можно экспериментально, исследовав неразветвленную магнитную цепь трансформатора ТС-180 с разъемным магнитопроводом, включенного в схему (рисунок 1).

Из технических данных на трансформатор ТС-180 известны витки первичной обмотки  $W_1$  ( $W_1 = 750$ ) и одной из вторичных обмоток  $W_2$  ( $W_2 = 152$ )<sup>6</sup>. Сердечник трансформатора – разъемный, поэтому имеется возможность изменять величину воздушных зазоров. Трансформатор работает в режиме холостого хода.

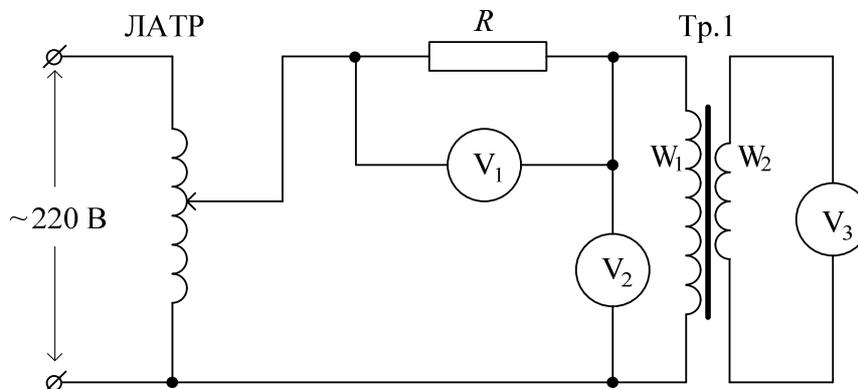


Рисунок 1. – Схема включения трансформатора ТС-180 для исследования влияния воздушного зазора на магнитный поток

В этом режиме ЭДС, трансформируемая во вторичной обмотке [3]

$$e_2 = -\frac{W_2 \cdot d\Phi}{dt} = -W_2 \cdot \omega \cdot \Phi_m \cdot \cos(\omega t) = \omega \cdot W_2 \cdot \Phi_m \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = E_{2m} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

где  $\Phi = \Phi_m \cdot \sin(\omega t)$  – переменный магнитный поток;

$E_{2m} = \omega \cdot W_2 \cdot \Phi_m$  – амплитуда ЭДС во вторичной обмотке.

<sup>5</sup> Устройство для преобразования механической энергии в тепловую : пат. РФ 2097946 / А. И. Елшин, В. М. Казанский, Е. Д. Карманов, В. И. Михеев. – Опубл. 27.11.1997.

<sup>6</sup> Сидоров, И. Н. Трансформаторы бытовой радиоэлектронной аппаратуры : справочник / И. Н. Сидоров, С. В. Скорняков. – М. : Радио и связь, 1999. – 336 с.

Тогда действующее значение магнитного потока можно найти по формуле<sup>7</sup>

$$\Phi = \frac{E_2}{\omega \cdot W_2}, \quad (1)$$

где  $E_2$  – действующее значение ЭДС, измеренное во вторичной обмотке;

$W_2$  – число витков вторичной обмотки;

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$  – круговая частота.

В схеме (см. рисунок 1) измерение тока в первичной обмотке выполняется вольтметром  $V_1$  по падению напряжения  $U_1$  на образцовом сопротивлении  $R$  ( $R = 100$  Ом). Вольтметром  $V_3$  измеряется действующее значение ЭДС  $E_2$  вторичной обмотки трансформатора. С помощью ЛАТРа поддерживается постоянная МДС  $F = constant$  при изменении величин воздушных зазоров в магнитопроводе, вызывающих изменение первичного тока трансформатора.

Прежде всего необходимо определить МДС первичной обмотки трансформатора в номинальном режиме. Для этого при зазорах  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  необходимо измерить ток  $I_1$  в первичной обмотке трансформатора, включенного на номинальное напряжение  $U_{ном} = 220$  В в режиме холостого хода. После включения схемы с помощью ЛАТРа по вольтметру  $V_2$  устанавливается номинальное напряжение  $U_{ном} = 220$  В.

Тогда ток  $I_1$ , А:

$$I_1 = \frac{U_1}{R} = \frac{U_1}{100}, \quad (2)$$

отсюда МДС  $F = constant$ , А:

$$F = I_1 \cdot W_1 = \frac{U_1}{100} \cdot W_1. \quad (3)$$

Во всех последующих измерениях для поддержания постоянной МДС достаточно с помощью ЛАТРа выставлять по вольтметру  $V_1$  значение падения напряжения на  $R$ , которое получено при определении МДС в магнитной цепи с нулевыми зазорами, равным  $U_1 = constant$  (в данном эксперименте  $U_1 = 2,86$  В).

Далее, изменяя величину воздушных зазоров  $\delta_1$  и  $\delta_2$  в диапазоне от 0 до 1 мм с шагом 0,2 мм и поддерживая постоянной величину МДС (см. выше), вольтметром  $V_3$  измеряется ЭДС  $E_2$  вторичной обмотки трансформатора и вычисляется величина магнитного потока  $\Phi$  по формуле (1). Результаты измерений представлены в таблице.

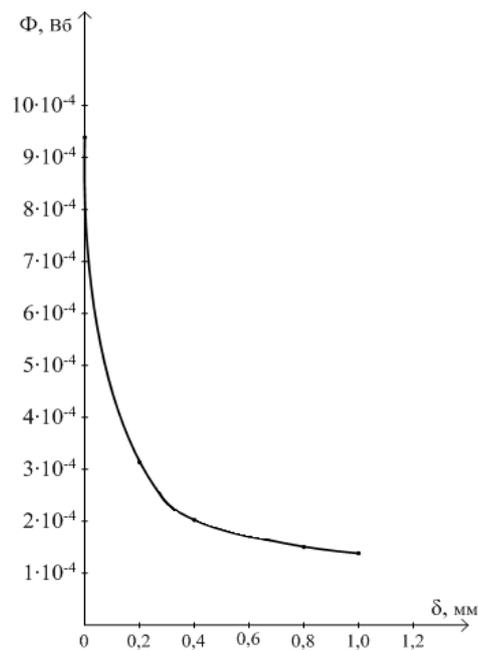
Таблица

Величина зазора		МДС $F$ , А	ЭДС $E_2$ , В	Магнитный поток $\Phi$ , Вб
$\delta_1$ , мм	$\delta_2$ , мм			
0	0	21,45	44,80	$9,386 \cdot 10^{-4}$
0,2	0,2	21,45	14,96	$3,134 \cdot 10^{-4}$
0,4	0,4	21,45	9,74	$2,040 \cdot 10^{-4}$
0,6	0,6	21,45	8,20	$1,718 \cdot 10^{-4}$
0,8	0,8	21,45	7,16	$1,500 \cdot 10^{-4}$
1,0	1,0	21,45	6,62	$1,387 \cdot 10^{-4}$

На рисунке 2 представлен график искомой зависимости  $\Phi = f(\delta)$ , построенный по результатам выполненных измерений (см. таблицу).

<sup>7</sup> Сидоров, И. Н. Трансформаторы бытовой радиоэлектронной аппаратуры : справочник / И. Н. Сидоров, С. В. Скорняков. – М. : Радио и связь, 1999. – 336 с.

Рисунок 2. – График зависимости  $\Phi = f(\delta)$



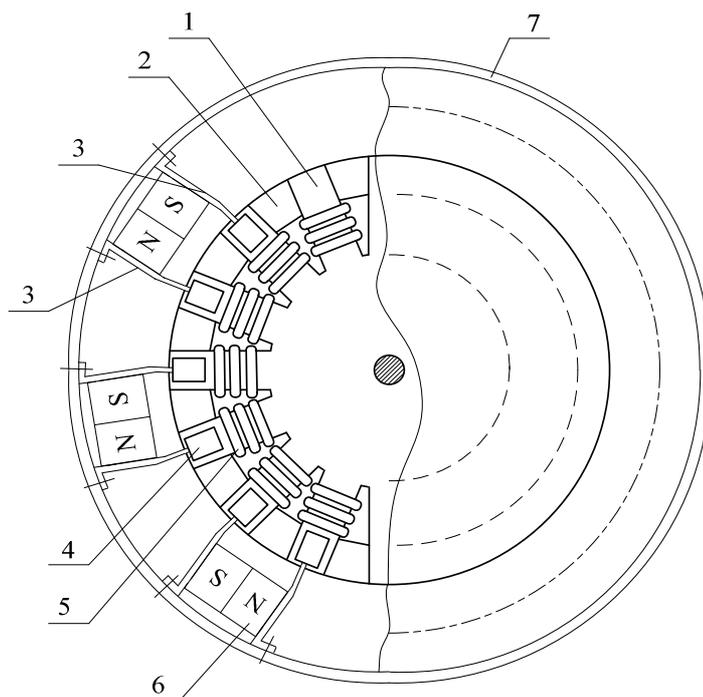
Из графика зависимости  $\Phi = f(\delta)$  (см. рисунок 2) и таблицы видно, что при увеличении зазоров до  $\delta_1 = \delta_2 = 1$  мм магнитный поток в неразветвленной магнитной цепи при поддержании МДС  $F = constant$  уменьшается в 6,8 раза.

Таким образом, проведенные исследования показывают, что наличие воздушного зазора значительно ослабляет магнитный поток в неразветвленной магнитной цепи с постоянной МДС.

Следовательно, для повышения эффективности работы устройств прямого преобразования механической энергии в тепловую индукционного типа с постоянными магнитами желательно вообще исключить воздушные зазоры. При этом условии можно ожидать увеличения эффективности такого преобразования более, чем в 6 раз.

Схема устройства теплопреобразовательного узла преобразователя механической энергии в тепловую, у которого исключены воздушные зазоры в магнитных цепях, приведена на рисунке 3.

Рисунок 3. – Схема устройства теплопреобразовательного узла



Основу преобразователя составляет теплопреобразовательный узел, в состав которого входит многолопастной ферромагнитный диск 1. По внешнему контуру диска между ферромагнитными лопастями вставлены немагнитные вставки 2, которые вместе с лопастями образуют относительно неширокую кольцевую дорожку. Эта дорожка по внешнему контуру диска 1 проточена и образует дорожку качения.

По периметру диска 1 на неподвижных основаниях закреплены магнитные узлы с постоянными магнитами 6, которые через магнитопроводы 3 и ролики 4 создают магнитные потоки в лопастях ферромагнитного диска 1. На лопасти ферромагнитного диска 1 одеты короткозамкнутые витки 5 из материала с повышенным удельным электрическим сопротивлением.

Принцип действия прямого преобразователя механической энергии в тепловую рассмотрим на примере одного теплопреобразовательного узла.

При вращении ферромагнитного диска 1 ролики магнитных узлов 4 катятся по кольцевой дорожке ферромагнитного диска 1. Когда ролики 4 накатываются на ферромагнитные лопасти диска 1, под действием постоянного магнита 6 скачком увеличивается магнитный поток с одной лопасти на другую, а когда ролики 4 накатываются на немагнитные участки (вставки), магнитный поток прерывается. Когда на лопасть ферромагнитного диска 1 накатывается ролик 4 от соседнего магнитного узла, опять скачком увеличивается магнитный поток с лопасти на лопасть, но в противоположном направлении.

В результате при вращении ферромагнитного диска 1 в лопастях возникают переменные импульсные магнитные потоки.

В материале лопастей возникают вихревые токи, разогревающие лопасти ферромагнитного диска 1 и через них весь диск. Кроме того, в короткозамкнутых витках с повышенным удельным сопротивлением также возникают токи, разогревающие эти витки, что в итоге приводит к дополнительному разогреву ферромагнитного диска 1.

Пакет из таких теплопреобразовательных узлов монтируется на общий вал и помещается в корпус с подводным и отводящим воздуховодами. В результате получается конструкция прямого преобразователя механической энергии в тепловую с воздушным теплообменом.

Учитывая, что в данной конструкции воздушные зазоры в магнитных цепях полностью исключены, то магнитные потоки, которые замыкаются через лопасти ферромагнитного диска 1, увеличатся примерно в 6 раз, а значит, и эффективность прямого преобразования механической энергии в тепловую с постоянными магнитами значительно увеличится.

#### **Заключение.**

1. Проведенные в работе исследования показали, что в магнитных цепях с постоянной МДС наличие воздушного зазора снижает величину магнитного потока практически на порядок (см. рисунок 2).

2. При построении прямых преобразователей механической энергии в тепловую с низкой скоростью вращения вала приводного двигателя, например ветродвигателя, целесообразно использовать преобразователи индукционного типа с постоянными магнитами, поскольку за счет увеличения количества лопастей ферромагнитных дисков можно увеличить частоту пульсаций магнитного потока в магнитных цепях при низких оборотах.

3. Существенное увеличение эффективности (до 10 раз) преобразования механической энергии в тепловую в таких преобразователях может быть достигнуто за счет исключения воздушных зазоров в магнитных цепях устройства.

4. Предложена конструкция устройства для прямого преобразования механической энергии в тепловую, в которой исключены воздушные зазоры в магнитных цепях.

На основании вышеизложенного следует ожидать значительного увеличения эффективности таких преобразователей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Генерация тепла в мультицилиндровой системе Куэтта – Тэйлора / В. Н. Мамонов [и др.] // Теплофизика и аэромеханика. – 2019. – Т. 26, № 5. – С. 729–739.
2. Nouri-Borujerdi, A. Heat transfer enhancement in annular flow with outer grooved cylinder and rotating inner cylinder: Review and experiments / A. Nouri-Borujerdi, M. E. Nakhchi // Applied Thermal Engineering. – 2017. – № 120. – P. 257–268.
3. Электротехника и электроника. Электрические и магнитные цепи : учеб. пособие / Р. В. Ахмадеев [и др.] ; под ред. Т. М. Крымской. – Уфа : Уфим. гос. авиац. техн. ун-т, 2009. – 147 с.

#### REFERENCES

1. Mamonov, V. N., Mis'kiv, N. B., Nazarov, A. D., Serov, A. F., & Terekhov V. I. (2019) Generatsiya tepla v mul'titsilindrovoy sisteme Kuetta – Teilora [Heat generation in a multi-cylinder Couette – Taylor system]. *Teplofizika i aeromekhanika [Thermophysics and Aeromechanics]*, 26(5), 729–739. (In Russ.).

2. Nouri-Borujerdi, A., & Nakhchi M. E. (2017) Heat transfer enhancement in annular flow with outer grooved cylinder and rotating inner cylinder: Review and experiments. *Applied Thermal Engineering*, (120), 257–268.
3. Akhmadeev, R. V., Vavilova, I. V., Grakhov, P. A., & Krymskaya, T. M. (2009) *Elektrotehnika i elektronika. Elektricheskie i magnitnye tsepi [Electrical and Electronics. Electrical and magnetic circuits]*. Ufa: Ufimskii gosudarstvennyi aviatsionnyi tekhnicheskii universitet. (In Russ.).

Поступила 30.11.2021

## IMPROVING DIRECT CONVERSION EFFICIENCY MECHANICAL ENERGY INTO HEAT

A. VERSHININ, Y. GROZBERG

*In connection with the improvement of the technical characteristics of the produced permanent magnets, they began to be often used in generating electricity and also for converting mechanical energy into thermal energy. In this paper, devices for direct conversion of mechanical energy into thermal energy of the induction type with permanent magnets are considered, the reasons for the low conversion efficiency are analyzed, and a search is made for ways to increase the efficiency of these devices. One of the reasons is the presence of air gaps in the magnetic circuits of such converters. The study of the influence of the values of air gaps on the change in magnetic fluxes in an unbranched magnetic circuit with a constant MDF has been carried out, and an approximate dependence  $\Phi = f(\delta)$  has been obtained, which makes it possible to quantitatively assess the degree of this influence. A design diagram of a device for direct conversion of mechanical energy into thermal energy of induction type with air heat exchange has been developed, in which air gaps in magnetic circuits are excluded in order to increase the conversion efficiency.*

**Keywords:** magnetic circuit, air gap, converter, mechanical energy, thermal energy, drive motor, eddy current, short-circuited loop.

УДК 621.371: 550.837.6

DOI 10.52928/2070-1624-2022-38-4-62-68

## ПУСКОВЫЕ ТОКИ В ТОРОИДАЛЬНЫХ ТРАНСФОРМАТОРАХ

канд. техн. наук, доц. Д. А. ДОВГЯЛО, канд. техн. наук, доц. В. Ф. ЯНУШКЕВИЧ,  
В. А. ТИХОНОВИЧ

(Полоцкий государственный университет)

Проведен анализ причин возникновения пусковых токов в тороидальных трансформаторах. Выявлен момент возникновения максимальных значений пусковых токов. Дана теоретическая оценка расчета величины пусковых токов. Рассмотрены косвенные и прямые методы оценки пусковых токов, конструктивные меры по их снижению, а также технические приемы снижения влияния переходных процессов на автоматические выключатели при работе тороидальных трансформаторов в сети с синусоидальным напряжением. Разработана программа расчета пусковых токов для электротехнической стали 3413. Приведен алгоритм работы программы и результаты ее применения. Полученные результаты могут использоваться для обеспечения надежности электропитания на стадиях эксплуатации и монтажа тороидальных трансформаторов средней и большой мощности.

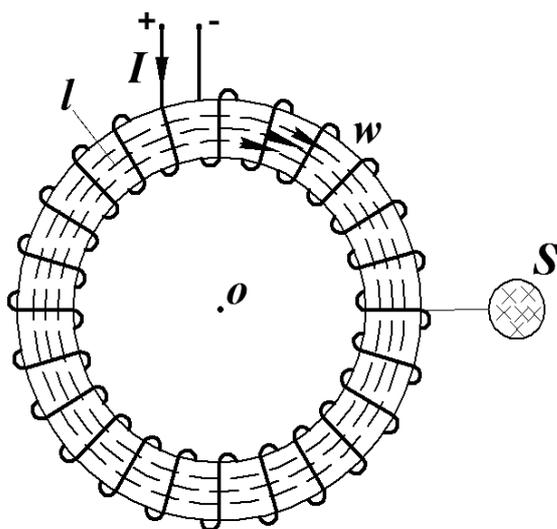
**Ключевые слова:** переходные процессы, трансформатор, тороидальный сердечник, пусковые токи, методы снижения пусковых токов.

**Введение.** Возникновение пусковых токов (ПТ) в трансформаторах обусловлено протеканием переходных процессов. Переходный процесс в трансформаторе – это процесс изменения электромагнитного поля, магнитного потока, токов в обмотках при переходе от одного установившегося режима к другому. К наиболее распространенным переходным процессам относятся подключение трансформатора к электрической сети, скачкообразное изменение величины сопротивления нагрузки, режим короткого замыкания в первичной или вторичной сети.

Длительность переходного процесса, как правило, невелика и составляет доли секунды. Тем не менее, без учета переходных процессов в трансформаторе невозможно определить условия, в которых допустима его эксплуатация и сформулировать требования к автоматическим выключателям.

Рассмотрим один из частных случаев переходного процесса – подключение первичной обмотки к сети электрического тока с номинальным напряжением.

Из экономических соображений (минимизации массы сердечника и обмоточного провода), выбирается такой режим работы тороидального трансформатора (рисунок 1), при котором амплитуда магнитной индукции несколько меньше индукции насыщения [1].



$l$  – средняя линия магнитопровода;  
 $S$  – сечение магнитопровода;  
 $I$  – ток протекающий в обмотке  
Рисунок 1. – Магнитное поле тороидального трансформатора

При подаче переменного напряжения на трансформатор возникает переходный процесс. Из-за наличия в магнитном поле катушки сердечника рост тока приводит к проявлению ярко выраженных нелинейных свойств [2–4]. Для линейной индуктивности ток может вдвое превышать амплитуду тока в установившемся режиме. При токе, увеличенном в два раза, напряженность магнитного поля также увеличивается

практически вдвое, а значит, сердечник выходит в область насыщения [5]. При этом магнитная проницаемость материала сердечника резко падает, что соответственно уменьшает индуктивность первичной обмотки:

$$L = \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l}, \tag{1}$$

где  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость сердечника;

$\mu_0$  – магнитная постоянная,  $4 \cdot 10^{-7}$  Гн/м;

$N$  – количество витков в обмотке;

$S$  – площадь поперечного сечения магнитопровода, м<sup>2</sup>;

$l$  – длина средней линии магнитопровода, м.

В свою очередь, происходит уменьшение реактивной составляющей полного сопротивления обмотки, ток через обмотку возрастает еще больше [6].

Мгновенное значение тока в катушке состоит из двух составляющих [3]:

1 – синусоидальной составляющей тока с амплитудой  $I$  (ток в катушке в установившемся режиме);

2 – составляющей, которая затухает по экспоненциальному закону с наибольшим по модулю значением  $|I \cos \phi|$ :

$$i \approx (I \cos \phi) e^{-\frac{R}{L}t} - I \cos(\omega t + \phi), \tag{2}$$

где  $\phi$  – угол фазового сдвига, град;

$\omega$  – циклическая частота, с<sup>-1</sup>;

$R$  – активное сопротивление обмотки, Ом;

$L$  – индуктивность первичной обмотки, Гн.

Из (2) следует, что при снижении индуктивности  $L$  первая составляющая резко возрастает и определяется в основном активным сопротивлением обмотки, которое значительно меньше индуктивного сопротивления в установившемся режиме [7].

Следует отметить, что значительные ПТ возникают не всегда. Если в момент включения мгновенное значение питающего напряжения близко к амплитудному, то первичная обмотка ведет себя как идеальная индуктивность и ПТ не возникают (рисунок 2).

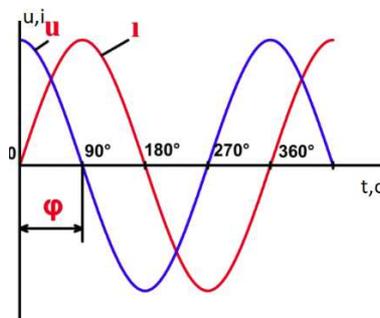


Рисунок 2. – Отставание тока от напряжения в индуктивности

Во всех других случаях переходной процесс становится более ярко выраженным (рисунок 3), т.е. его характер зависит от начальной фазы источника переменного напряжения (фазы в момент включения).

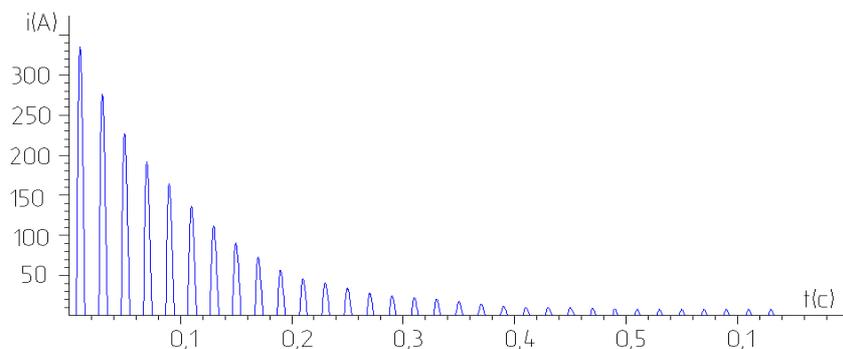


Рисунок 3. - Осциллограмма переходного процесса в режиме холостого хода (условно показана положительная полуволна)

Переходной процесс, как правило, затухает в течение нескольких периодов и длится не более  $0,01 \dots 0,05$  с [4].

В трансформаторах малой мощности [8] процесс включения протекает намного быстрее и сопровождается меньшими бросками тока. Броски тока при включении неопасны для трансформатора, но необходимо настраивать систему защиты электрических цепей таким образом, чтобы не было ложных отключений автоматических выключателей.

Перед установкой трансформатора на объект полезно знать значение ПТ, однако редкие производители трансформаторов указывают эти значения. Следовательно, возникает необходимость расчета, измерения или оценки уровня пусковых токов.

Выяснив значения пускового и рабочего токов конкретного трансформатора, можно правильно подобрать автоматический выключатель.

**Теоретическая оценка пусковых токов.** Практическая формула для вычисления ПТ согласно [3] имеет вид

$$i \approx \frac{l}{W\mu_2} \left[ \frac{2u_m}{WS\omega} - h(\mu_1 - \mu_2) \right], \quad (3)$$

где  $l$  – средняя длина магнитной линии сердечника, мм (см. рисунок 1)

$W$  – количество витков первичной обмотки трансформатора;

$S$  – сечение магнитопровода, мм<sup>2</sup>;

$h$  – высота магнитопровода, мм;

$\omega$  – циклическая частота, с<sup>-1</sup>;

$u_m$  – амплитуда приложенного напряжения, В;

$\mu_1$  – дифференциальная магнитная проницаемость на рабочем участке кривой намагничивания;

$\mu_2$  – магнитная проницаемость, полученная в результате экстраполяции начального участка кривой намагничивания.

Выражение (3) позволяет оценить пиковое значение тока в момент перехода фазы напряжения через ноль (наихудший случай). Для использования формулы (3) должны быть известны геометрические параметры магнитопровода и количество витков.

Для расчета пусковых токов магнитопроводов из электротехнической стали 3413 разработана программа «Pusk.tor\_v.1» (рисунок 4).



Рисунок 4. – Алгоритм работы программы

Пример использования программы для трансформатора с сердечником из электротехнической стали 3413 приведен на рисунке 5.

В программу предустановлены параметры электротехнической стали 3413.

В качестве исходных данных выступают:

- внутренний диаметр магнитопровода, мм;
- наружный диаметр магнитопровода, мм;
- высота магнитопровода, мм;
- количество витков первичной обмотки трансформатора;
- действующее значение входного напряжения трансформатора, В;
- частота питающей сети, Гц.

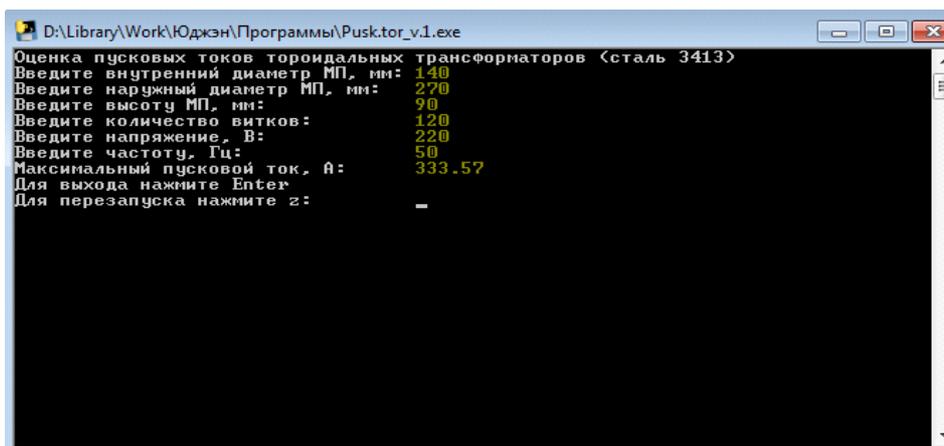


Рисунок 5. – Программа Pushk.tor\_v.1.exe расчета пусковых токов для электротехнической стали 3413

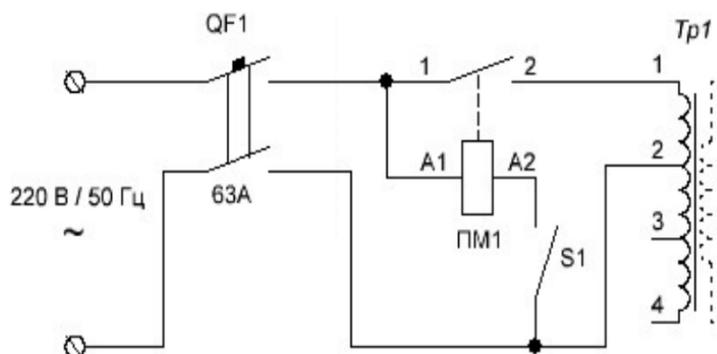
Выходной параметр – расчетное значение ПТ при включении трансформатора в момент, когда мгновенное значение питающего напряжения близко к нулю (наихудший случай – ПТ максимальные).

Системные программные средства, используемые программой «Pushk.tor\_v.1», должны быть представлены локализованной версией операционной системы Windows 7 или выше. Программа не требует установки/распаковки.

**Практическая оценка пусковых токов.** Для оценки уровня ПТ применяются следующие способы:

- оценка уровня ПТ с помощью осциллографа;
- оценка уровня ПТ с помощью токовых клещей, например, типа Fluke 376 FC True-RMS;
- использование трансформатора тока с подключением измерительного тракта ко вторичной обмотке (этот способ обладает большой инерционностью);
- оценка уровня ПТ с помощью автоматических выключателей (наиболее доступный способ, дающий ориентировочные данные).

Проведем оценку уровня ПТ с помощью автоматических выключателей. Схема установки для проведения косвенных испытаний на воздействие ПТ трансформаторов представлена на рисунке 6.



QF1 – вводной (испытываемый) автоматический выключатель – С63 (63 А);

ПМ1 – пускатель электромагнитный ПМЛ-4160М, применяется для удобства коммутации первичной цепи; S1 – кнопка включения для коммутации сетевого напряжения, необходимого для питания катушки пускателя ПМ1;

Tr1 – испытываемый трансформатор

Рисунок 6. – Схема установки для проведения испытаний на воздействие ПТ

Применяемые при испытаниях автоматические выключатели (АВ) являются выключателями классов С и D. Для выключателя класса С при срабатывании ПТ будет лежать в пределах  $(5 \div 10) \times I_n$  (где  $I_n$  – номинал выключателя по току) соответствующего выключателя. Для выключателя класса D ПТ при срабатывании будет лежать в пределах  $(10 \div 20) \times I_n$ .

Кнопкой S1 производится включение пускателя, действие повторяется  $n$  раз ( $50 \dots 100$ ). После этого АВ меняется на другой номинал или класс. По факту и числу срабатываний АВ производится оценка. Пример анализа данных приведен в таблице 1.

Таблица 1. – Результаты испытаний трансформаторов

Название испытуемого образца	Трансформатор на базе магнитопровода		
	ОЛ 140/280-90	ОЛ 150/320-110	ОЛ 70/170-25
Количество витков в первичной обмотке	120	156	872
Входное напряжение, В	220	536	320
Количество срабатываний АВ С4 на 100 включений	Испытания не проводились	Испытания не проводились	4
Количество срабатываний АВ С6 на 100 включений	Испытания не проводились	Испытания не проводились	0
Количество срабатываний АВ С50 на 100 включений	16	18	Испытания не проводились
Количество срабатываний АВ С63 на 100 включений	5	7	Испытания не проводились
Количество срабатываний АВ С80 на 100 включений	0	2	Испытания не проводились
Количество срабатываний АВ D63 на 100 включений	0	0	Испытания не проводились
Пусковой ток, А (max, на основе анализа срабатываний автоматов)	Не более 400	Не более 630	Испытания не проводились
Пусковой ток, А (max, по программе Pusk.tor_v.1)	337,57	434,66	23,04

Трансформатор на базе магнитопровода ОЛ 140/280-90 с витками в первичной обмотке 110 и 120 подключен по схеме (см. рисунок 6). В схему поочередно подключались АВ следующих типов: С6, С10, С50, С63, С80, D63.

Установлено, что целесообразно использование в качестве устройств защиты АВ следующих типов:

- для трансформатора на базе магнитопровода ОЛ 140/280-90 – С80;
- для трансформатора на базе магнитопровода ОЛ 150/320-110 – D63.
- для трансформатора на базе магнитопровода ОЛ 70/170-25 – С6.

Предлагаемый метод наиболее эффективен до установки исследуемого трансформатора на объект.

Следует отметить, что в случае присутствия в цепи между вводом фазы и исследуемым трансформатором более одного АВ возникает погрешность оценки. Дополнительные АВ, включенные в цепь с основным АВ последовательно, действуют как ограничитель ПТ.

**Закключение.** На стадии конструирования трансформаторов основными методами, уменьшающими пусковые токи, являются:

1. Проектирование трансформатора со сниженной индукцией. Это достигается либо увеличением числа витков первичной обмотки при сохранении размеров магнитопровода, либо увеличением сечения магнитопровода с сохранением исходного количества витков. Основной недостаток – увеличение стоимости трансформатора [2].

2. Применение неотожженного сердечника (для тороидального исполнения). К основным недостаткам этого способа относятся увеличение тока холостого хода (потерь в стали) и уменьшение линейности тока.

3. Использование разрезного сердечника (либо сердечников) с немагнитным зазором. Как и в предыдущем случае происходит увеличение стоимости изделия, увеличение тока холостого хода (потерь в стали).

4. Использование технологии «Unisoge» [2] в случае использования Ш-образного сердечника. Технология «Unisoge» позволяет получить распределенный по стержню зазор, который не приводит к резкому увеличению потерь. Однако эта технология не реализована для тороидальных магнитопроводов.

На стадии эксплуатации основные методы связаны с выбором устройства ограничения ПТ:

- коммутационные устройства, подключающие трансформатор к питающей сети в момент, когда сетевое напряжение имеет амплитудное значение ( $\varphi = \pi/2$ );
- использование токоограничивающего резистора и последующее его шунтирование контактами магнитного пускателя (реле), при этом необходимо обеспечить защиту резистора от перегрева (дополнительный автоматический выключатель, радиатор) в случае выхода из строя магнитного пускателя;

– использование терморезистора, имеющего в момент включения трансформатора токоограничивающее сопротивление, уменьшающееся по мере нагрева. Способ подходит для трансформаторов небольшой мощности;

– выбор АВ с соответствующей характеристикой срабатывания (кратностью относительно номинального тока) – типы А, В, С, D.

Следует отметить, что ограничивать ПТ маломощных трансформаторов в большинстве случаев не требуется, т.к. активное сопротивление их первичной обмотки составляет от десятков Ом до нескольких тысяч Ом [9]. Соответственно, ПТ таких трансформаторов даже при уменьшении индуктивного сопротивления до нуля будут составлять не более 10 А.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бальян, Р. Х. Трансформаторы для радиоэлектроники / Р. Х. Бальян. – М. : Советское радио. – 1971. – 720 с.
2. Маклиман, В. Проектирование трансформаторов и дросселей. Справочник / В. Маклиман. – 3-е изд., пересм. и доп. ; пер. с англ. Попова В. В. – М. : ДМК Пресс, 2016. – 476 с.
3. Котенёв, Е. С. Расчет и оптимизация тороидальных трансформаторов / Е. С. Котенёв, А. Н. Евсеев. – М. : Горячая линия. Телеком, 2011. – 287 с.
4. Игнатович, В. М. Электрические машины и трансформаторы : учеб. пособие / В. М. Игнатович, Ш. С. Ройз. – Томск : ТПУ, 2013. – 182 с.
5. Присмотрова, Л. К. Проектирование силовых и специальных трансформаторов / Л. К. Присмотрова, Е. Н. Пировских, А. В. Пировских. – Киров : ВятГУ, 2006. – 246 с.
6. Грунтович, Н. В. Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования : учеб. пособие / Н. В. Грунтович. – Минск : Новое знание ; М. : ИНФРА-М. – 2013. – 269 с.
7. Быстрицкий, Г. Ф. Выбор и эксплуатация силовых трансформаторов / Г. Ф. Быстрицкий, Б. И. Кудрин. – М. : СИНТЕГ, 2015. – 176 с.
8. Белопольский, И. И. Расчет трансформаторов и дросселей малой мощности / И. И. Белопольский. – М. : ЁЁ Медиа – 2018. – 161 с.
9. Ермолин, Н. П. Как рассчитать маломощный силовой трансформатор / Н. П. Ермолин. – М. : Энергетическое издательство. – 2016. – 620 с.

#### REFERENCES

1. Bal'yan, R. Kh. (1971). *Transformatory dlya radioelektroniki [Transformers for radio electronics]*. Moscow: Sovetskoe radio. (In Russ.).
2. Makliman, V. (2016). *Proektirovanie transformatorov i drosslei. Spravochnik [Transformer and Inductor Design: Handbook]*. Moscow: DMK Press.
3. Kotenev, E. S., & Evseev, A. N. (2011). *Raschet i optimizatsiya toroidal'nykh transformatorov [Calculation and optimization of toroidal transformers]*. Moscow: Goryachaya liniya. Telekom.
4. Ignatovich, V. M., & Roiz, Sh. S. (2013). *Elektricheskie mashiny i transformatory [Electrical machines and transformers]*. Tomsk: TPU.
5. Prismoetrova, L. K., Pirovskikh, E. N., & Pirovskikh, A. V. (2006). *Proektirovanie silovykh i spetsial'nykh transformatorov [Design of power and special transformers]*. Kirov: VyatGU.
6. Gruntovich, N. V. (2013). *Montazh, naladka i ekspluatatsiya elektrooborudovaniya [Installation, adjustment and operation of electrical equipment]*. Minsk: Novoe znanie; Moscow: INFRA-M.
7. Bystritskii, G. F., & Kudrin, B. I. (2015). *Vybor i ekspluatatsiya silovykh transformatorov [Selection and operation of power transformers]*. Moscow: SINTEG.
8. Belopol'skii, I. I. (2018). *Raschet transformatorov i drosslei maloi moshchnosti [Calculation of transformers and low power chokes]*. Moscow: EE Media.
9. Ermolin, N. P. (2016). *Kak rasschitat' malomoshchnyi silovoi transformator [How to Calculate a Low Power Power Transformer]*. Moscow: Energeticheskoe izdatel'stvo.

Поступила 30.03.2022

### STARTING CURRENTS IN TOROIDAL TRANSFORMERS

**D. DAUHALA, V. YANUSHKEVICH, V. TIKHANOVICH**

*The analysis of the causes of starting currents in toroidal transformers is carried out. The moment of occurrence of the maximum values of starting currents is revealed. A theoretical estimate of the calculation of the magnitude of the starting currents is given. Indirect and direct methods for estimating inrush currents, constructive measures to reduce inrush currents, as well as techniques for reducing the influence of transients on circuit breakers when operating toroidal transformers in a network with sinusoidal voltage are considered. A program has*

*been developed for calculating starting currents for electrical steel 3413. The algorithm of the program and the results of its application are given. The results obtained can be applied to ensure the reliability of power supply at the stages of operation and installation of toroidal transformers of medium and high power.*

**Keywords:** *transients, transformer, toroidal core, inrush currents, methods for reducing inrush currents.*

УДК 544.58: 661.12

DOI 10.52928/2070-1624-2022-38-4-69-80

**НАКОПЛЕНИЕ РАДИОНУКЛИДОВ В СМЕННЫХ ДЕТАЛЯХ  
И ВОДНОЙ МИШЕНИ ЦИКЛОТРОНА****А. Н. КИЙКО**

(Белорусский государственный институт метрологии, Минск);  
канд. физ.-мат. наук, доц. С. А. ВАБИЩЕВИЧ, Н. В. ВАБИЩЕВИЧ  
(Полоцкий государственный университет);  
канд. физ.-мат. наук Д. И. БРИНКЕВИЧ  
(Белорусский государственный университет, Минск)

Рассмотрено накопление нежелательных долгоживущих радионуклидов при производстве радиофармпрепаратов на основе  $^{18}\text{F}$  с использованием циклотрона ИВА Cyclone 18/9 НС. С помощью спектрометрии гамма-излучения высокого разрешения с детекторами HPGe проведена идентификация радионуклидов и оценка активности в активируемых компонентах (стриппер, входное окно мишени) «медицинского» 18-МэВ циклотрона ИВА Cyclone 18/9. В регенерированной воде идентифицированы более 20 нежелательных радионуклидов. Описаны различные механизмы попадания долгоживущих радионуклидов в облученную воду. Полученные результаты имеют важное значение для оптимизации методов обращения с радиоактивными отходами при производстве радиофармпрепаратов и, как следствие, минимизации дозовых нагрузок персонала.

**Ключевые слова:** радиофармпрепараты, радионуклиды, циклотрон, обогащенная  $^{18}\text{O}$  вода, протонное облучение.

**Введение.** В настоящее время коммерческие циклотроны, ускоряющие отрицательные ионы водорода и дейтерия в диапазоне энергий от 10 до 30 МэВ, широко используются для производства медицинских и промышленных изотопов [1]. Медицинские изотопы применяются в различных отраслях медицины (нейрологии, кардиологии, онкологии и т.д.) для диагностики ряда заболеваний, а также для терапии злокачественных новообразований [2]. Большинство изотопов, используемых в медицинской практике, нарабатывается путем бомбардировки жидких, газовых или твердых мишеней пучками ускоренных протонов. Чаще всего медицинские изотопы являются продуктами  $(p, n)$ ,  $(p, 2n)$  или  $(p, \alpha)$  реакций. В литературе такие циклотроны часто называют «медицинскими».

Ежегодно в мире выполняется 37–40 млн диагностических процедур ядерной медицины и 7,5 млн радиотерапевтических процедур, а спрос на радиоизотопы ежегодно увеличивается на 5%, что примерно соответствует общему приросту оборудования и исследований. Данный показатель существенно зависит от страны и в отдельных случаях может составлять 15–20% прироста в год и более. По оценке МАГАТЭ, в отделениях ядерной медицины во всем мире работает более 100 тыс. человек, при этом в последние годы наблюдается значительный рост количества исследований при относительно стабильном количестве персонала, что приводит к увеличению интенсивности труда и, как следствие, может приводить к увеличению лучевой нагрузки [3].

В медицинской диагностике обычно используются короткоживущие изотопы с периодом полураспада в несколько часов. Они должны быть использованы в течение небольшого промежутка времени после облучения мишени и получения радиофармпрепарата (РФП). Чтобы обеспечить цикл производства таких препаратов, циклотроны и лаборатории по производству размещаются на месте использования РФП – в больницах, центрах по распределению медицинских препаратов, диагностических центрах и т.п. Это обстоятельство обуславливает резкое ужесточение требований по радиационной безопасности и обращению с радиоактивными отходами.

Наиболее распространенными РФП, применяющимися при позитронно-эмиссионной томографии (ПЭТ), являются препараты на основе  $^{18}\text{F}$ , который образуется по реакции  $^{18}\text{O}(p, n)^{18}\text{F}$  при бомбардировке водной мишени, обогащенной  $^{18}\text{O}$  (> 95%), протонами с энергией 9–18 МэВ. Образующиеся в этой реакции вторичные нейтроны активируют компоненты циклотрона, а также бетонные стены, создавая радиологические опасности во время периода обслуживания или вывода из эксплуатации циклотрона [4–7]. Помимо наработки целевого радионуклида  $^{18}\text{F}$ , в результате протонной и нейтронной активации мишени циклотрона происходит накопление в облучаемой воде [ $^{18}\text{O}$ ]H<sub>2</sub>O побочных радиоактивных продуктов с достаточно высокими уровнями активности. Состав и уровни активности побочных радионуклидов сильно зависят от конструктивных параметров используемого циклотрона и условий облучения [8; 9].

Побочные радионуклиды (ПРН) провоцируют целый ряд нежелательных последствий. С одной стороны, попадая с облученной водой непосредственно в реактор, они снижают выход РФП [10–15]. С другой стороны, накопление ПРН в расходных материалах радиохимического синтеза (флаконы с регенерированной

водой [ $^{18}\text{O}$ ] $\text{H}_2\text{O}$ , одноразовые кассеты, картриджи твердофазной экстракции и стерилизующие фильтры), а также в незаменимых элементах модуля синтеза, существенно увеличивает дозовые нагрузки на радиохимический персонал при выполнении ежедневного обслуживания, дезинфекционной обработки и подготовки горячих камер к производству. Так, мощности эквивалентной дозы (МЭД) на расстоянии 10 см от флакона с регенерированной водой [ $^{18}\text{O}$ ] $\text{H}_2\text{O}$  (объемом до 10 мл) после трех дней выдержки по мере активации мишени возрастали с 5 до 250 мкЗв/ч. При этом внутри горячей камеры с установленными в ней модулями Synthera (IBA, Бельгия) МЭД через сутки после синтеза превышала 80 мкЗв/ч и мало изменялась после поверхностной дезактивации оборудования [13].

Кроме того, загрязнение расходных материалов радиохимического синтеза ПРН приводит к увеличению номенклатуры и объемов жидких и твердых радиоактивных отходов (РАО), требующих выдержки до достижения необходимых МЗА в течение нескольких лет [8; 9; 12], и, соответственно, обуславливает увеличение дозовых нагрузок для персонала, ответственного за дозиметрию, учет и контроль РАО. При интенсивном ежедневном производстве РФП (до 3 синтезов в день) в ПЭТ-центре накапливается большое количество жидких радиоактивных отходов (ЖРО), которые в основном представляют собой регенерированную воду [ $^{18}\text{O}$ ] $\text{H}_2\text{O}$  и, в меньшей степени, растворы для дезактивации оборудования [14].

Одна из наиболее важных проблем использования (и вывода из эксплуатации) «медицинских» циклотронов связана с высокой активностью, индуцированной в компонентах циклотрона, в частности в теле мишени. Перечень радионуклидов, образующихся в различных частях циклотрона, в основном определяется взаимодействием с его частями протонного пучка или вторичных нейтронов, образующихся в мишени [6–12; 15]. Эта проблема актуальна в связи с необходимостью радиационной защиты операторов при техническом обслуживании циклотрона с заменой его компонентов (стриппера, деталей мишени и т.д.), которое приходится проводить не реже 1–2 раз в год. До радиоактивного распада извлеченные компоненты обычно хранятся в свинцовом контейнере. Перед закладкой на хранение необходимо знание величин остаточной активности наиболее важных радионуклидов, присутствующих в извлеченном компоненте. Это также необходимо для оценки степени облучения персонала при техническом обслуживании.

В настоящее время в мире работают более двух тысяч циклотронов. Основным предназначением более 70% из них является производство медицинских радионуклидов [5]. Интерес к исследованию накопления нежелательных радионуклидов при работе «медицинских» циклотронов и производстве РФП резко возрос в последние десятилетия [9; 10; 15–21]. Активность и состав радионуклидов в облученной воде определяются условиями конкретного производства (тип циклотрона, материал входного окна и тела мишени, интенсивность и длительность облучения и т.д.) и могут варьировать в широких пределах. В последние годы были выполнены исследования накопления радионуклидов на различных «медицинских» циклотронах (GE PET trace, Siemens ECLIPSE RDS-11, CYPRIS HM18, CYPRIS MINI trace и TR 19/9) с разными типами мишеней (серебряными, титановыми и танталовыми) [9–11; 15; 20; 22–27]. Эти исследования обычно проводятся перед запуском ПЭТ-центров или на начальном этапе их работы. Влияние длительного интенсивного рабочего цикла на накопление ПРН ранее не исследовалось. Кроме того, ощущается недостаток информации по циклотрону Cyclone 18/9 HC.

Идентификацию  $\gamma$ -излучающих радионуклидов и определение их активности выполняли с использованием спектрометра на особо чистом германии: детекторная система GEM40-83/DSPEC jr 2.0; энергетический диапазон 14,5–2911,4 кэВ; разрешение 0,182 кэВ/канал. Идентификацию ПРН проводили посредством соотнесения энергий  $\gamma$ -квантов, определенных экспериментально, со справочными значениями. Из-за высокой активности образцов измерения проводили не менее, чем через двое суток после последнего облучения на калибраторе активности Isomed 2010 (MED Nuklear – Medizintechnik Dresden Gmb, Германия).

Контроль содержания  $\beta$ -излучающих радионуклидов проводился с использованием автоматического жидкостного сцинтилляционного спектрометра с TDCR регистрацией HIDEX 300 SL и гамма-бета-спектрометра MKC-AT1315. Для HИDEX 300 SL энергетический диапазон составил 0–2 МэВ по  $\beta$ -частицам, интервал – 0,182 кэВ/канал, эффективность – более 26% (для трития), более 95% (для  $^{14}\text{C}$ ). Средний фон для  $\beta$ -частиц – 9 имп/мин. Для MKC-AT1315 диапазон энергий бета-излучения – 0,15–3,5 МэВ. Средний фон для  $\beta$ -частиц – 270 имп/мин, чувствительность для  $^{90}\text{Sr}$  в геометрии 0,03 л –  $3,5 \cdot 10^{-3}$  имп·л/(с·Бк). Использован жидкий сцинтиллятор на основе толуола. Пробы объемом 1 мл разводились в 10 мл жидкого сцинтиллятора. Время измерения  $\beta$ -спектра – 1000 с.

**Накопление радионуклидов в сменных деталях циклотрона.** В этом разделе приведены экспериментальные данные по оценке активности и идентификации радионуклидов в активированных компонентах мишени (входные окна мишени из фольги Navar и титановой фольги) и стриппера (вилки съёмника и углеродная фольга) «медицинского» 18-Мэв циклотрона IBA Cyclone 18/9, находящихся на пути протонного пучка и обычно заменяемых каждые полгода, а по мере необходимости и чаще. Исследование проводилось с помощью спектрометрии гамма-излучения высокого разрешения с детекторами HPGe. Основные мишенные компоненты обычно заменяются (за исключением сбоев или аномалий) после ~200 ч облучения. Так, типична замена входного окна мишени из сплава Navar при интегрированном мишенном токе

~2000 мкА·ч [22]. Замененные детали должны храниться в свинцовом контейнере толщиной не менее 5 см, потому что уровень возникающей дозы примерно в 100 раз превышает мощность дозы амбиентного фона.

Стриппер в циклотронах медицинского назначения представляет собой тонкую пленку пиролитического графита, использующуюся в устройствах вывода протонного пучка. В них отрицательно заряженные ионы Н<sup>-</sup> теряют электроны и трансформируются в положительно заряженные протоны, вследствие чего направление отклонения ионного пучка в магнитном поле изменяется на противоположное и он может быть легко выведен на облучаемую мишень.

Стриппер облучался дозами до 5000 мкА·ч циклами длительностью по 100–120 мин при плотности ионного тока ~100 мкА·см<sup>-2</sup> со средним временным промежутком между циклами ~22 ч. Величина мощности дозы на расстоянии 10 см от стриппера через 2 дня после замены была около 50 мкЗв ч<sup>-1</sup>.

В γ-спектрах облученного стриппера через неделю после последнего облучения наблюдались линии радионуклидов (РН) никеля <sup>57</sup>Ni, кобальта <sup>55</sup>Co, <sup>56</sup>Co, <sup>57</sup>Co, <sup>58</sup>Co, марганца <sup>54</sup>Mn, хрома <sup>51</sup>Cr (таблица 1) и низкоактивного <sup>65</sup>Zn. Доминирующим радионуклидом является <sup>51</sup>Cr с периодом полураспада 27,7 суток. Указанные радионуклиды образуются в результате ядерных реакций с протонами стабильных изотопов железа (<sup>56</sup>Fe, <sup>57</sup>Fe, <sup>58</sup>Fe), хрома (<sup>52</sup>Cr, <sup>53</sup>Cr, <sup>54</sup>Cr) и никеля (<sup>58</sup>Ni) [28]. Это указывает на присутствие перечисленных изотопов в качестве примесей в пиролитическом графите либо на попадание этих элементов на поверхность стриппера в результате испарения из других деталей циклотрона. Радионуклидов, обусловленных взаимодействием протонов со стабильными изотопами углерода, не обнаружено. Вероятнее всего, это обусловлено короткими периодами полураспада ( $t_{1/2}$  от десятков секунд до нескольких минут) указанных радионуклидов.

Отметим, что полученные нами методом спектрометрии данные хорошо коррелируют с данными [29]. Единственное исключение составляют более низкие, чем в нашем случае, значения активности <sup>51</sup>Cr и <sup>57</sup>Co, что может быть обусловлено отличием в условиях облучения (малая 2,2 мл мишень, средний ток 32 мкА в ~3 раза меньше нашего) и применением при измерении коллимационного устройства со свинцовой стенкой с целью сокращения мертвого времени.

Таблица 1. – Активности γ-излучающих радионуклидов в фольге стриппера

РН	$t_{1/2}$ , дней	Активность после 2 дней хранения, кБк	Активность после полугода хранения, кБк	Реакции образования
<sup>51</sup> Cr	27,7	23	1	<sup>52</sup> Cr (p,pn) <sup>51</sup> Cr
<sup>54</sup> Mn	312,3	1,2	–	<sup>53</sup> Cr (p,γ) <sup>54</sup> Mn <sup>52</sup> Cr (p,n) <sup>54</sup> Mn
<sup>55</sup> Co	0,73	1,5	–	<sup>54</sup> Fe (p,γ) <sup>55</sup> Co <sup>58</sup> Ni (p,d) <sup>55</sup> Co
<sup>56</sup> Co	77,7	8	–	<sup>56</sup> Fe (p,n) <sup>56</sup> Co <sup>57</sup> Fe (p,2n) <sup>56</sup> Co
<sup>57</sup> Co	271,8	3	3	<sup>56</sup> Fe (p,γ) <sup>57</sup> Co <sup>57</sup> Fe (p,n) <sup>57</sup> Co
<sup>58</sup> Co	70,9	2,8	–	<sup>57</sup> Fe (p,γ) <sup>58</sup> Co <sup>58</sup> Fe (p,n) <sup>58</sup> Co
<sup>57</sup> Ni	1,48	3,4	–	<sup>58</sup> Ni (p,pn) <sup>57</sup> Ni

После хранения в течение полугода величина мощности дозы на расстоянии 10 см от стриппера снижается до значений < 1 мкЗв ч<sup>-1</sup> и он может выведен из состава РАО. При этом в γ-спектрах наблюдались линии <sup>57</sup>Co, <sup>51</sup>Cr и <sup>65</sup>Zn с активностью, близкой к пределу детектирования.

**Входное окно мишени.** Непосредственно после облучения детали входного окна мишени (Navar-фольга и титановое окно) имеют высокую удельную активность, что приводит к большому мертвому времени измерения даже при очень больших использованных расстояниях от детектора. Так, по данным [29] при измерении активности деталей входного окна водной мишени 18 МэВ циклотрона Cyclone 18/9 НС значение мощности дозы, измеренное ионизационной камерой TOL/F на расстоянии 10 см от фольги Navar, составляло около 6 мЗв/ч примерно через 25 дней после последнего облучения (или 41 мкЗв/ч на расстоянии 1 м).

В таблице 2 приведены основные идентифицированные радионуклиды с оценкой активности после последнего облучения. Отметим, что наибольшую активность имела Navar-фольга. Причем наибольший вклад в активность вносят радионуклиды с периодом полураспада около 70 дней. Это означает, что через ~2 года (10 периодов полураспада), общая активность будет снижена до значений, близких к 1 мкЗв ч<sup>-1</sup> и может быть рассмотрен вопрос вывода указанных компонент мишени из состава РАО.

Таблица 2. – Активности  $\gamma$ -излучающих радионуклидов в Navar-фольге и титановом окне, скорректированные на момент окончания облучения [29]

РН	$t_{1/2}$ , дней	Navar-фольга, МБк	Титановое окно, кБк	Реакции образования
$^{51}\text{Cr}$	27,7	0,45	–	$^{52}\text{Cr}(\text{p,pn})^{51}\text{Cr}$
$^{54}\text{Mn}$	312,3	0,8	–	$^{53}\text{Cr}(\text{p},\gamma)^{54}\text{Mn}$ $^{52}\text{Cr}(\text{p,n})^{54}\text{Mn}$
$^{52}\text{Mn}$	5,591	29	–	$^{52}\text{Cr}(\text{p,n})^{52}\text{Mn}$
$^{56}\text{Co}$	77,7	24	0,031	$^{56}\text{Fe}(\text{p,n})^{56}\text{Co}$ $^{57}\text{Fe}(\text{p},2\text{n})^{56}\text{Co}$
$^{57}\text{Co}$	271,8	0,4	0,00064	$^{56}\text{Fe}(\text{p},\gamma)^{57}\text{Co}$ $^{57}\text{Fe}(\text{p,n})^{57}\text{Co}$
$^{58}\text{Co}$	70,9	65	–	$^{57}\text{Fe}(\text{p},\gamma)^{58}\text{Co}$ $^{58}\text{Fe}(\text{p,n})^{58}\text{Co}$
$^{46}\text{Sc}$	83,83	–	0,74	$^{46}\text{Ti}(\text{n,p})^{46}\text{Sc}$
$^{48}\text{V}$	15,976	–	30,2	$^{48}\text{Ti}(\text{p,n})^{48}\text{V}$ $^{49}\text{Ti}(\text{p},2\text{n})^{48}\text{V}$

В деталях входного окна серебряной водной мишени 9,6 МэВ циклотрона MINI trace были обнаружены следующие радионуклиды: в фольге Navar – изотопы кобальта  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{56}\text{Co}$ ,  $^{57}\text{Co}$ ,  $^{58}\text{Co}$ , марганца  $^{54}\text{Mn}$ , технеция  $^{95}\text{Tc}$ , кадмия  $^{109}\text{Cd}$  и рения  $^{183}\text{Re}$ ; в титановой фольге –  $^{56}\text{Co}$ ,  $^{57}\text{Co}$ ,  $^{46}\text{Sc}$ ,  $^{48}\text{V}$ ,  $^{51}\text{Cr}$  и  $^{75}\text{Se}$  с более низкой активностью; а в уплотнении Helicoflex – только три РН  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{58}\text{Co}$  и  $^{51}\text{Cr}$ . Эти результаты хорошо коррелируют с данными работы [29], приведенными выше.

**Накопление нежелательных  $\gamma$ -излучающих радионуклидов в водной мишени.** В таблице 3 представлены результаты наших исследований процессов накопления нежелательных радионуклидов, образующихся в воде  $^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ , обогащенной по кислороду  $^{18}\text{O}$  до 97%, и проведено их сравнение с имеющимися литературными данными. Исследования проводились в течении 3 лет интенсивной работы циклотрона Cyclone 18/9 НС. Использовали ниобиевую мишень Nirta Fluor объемом 3,2 мл с входным окном из сплава Navar толщиной 25 мкм. Время облучения мишени за один производственный цикл составляло 100–130 мин, ионный ток на мишени – 75–80  $\mu\text{A}$ . Мощность, выделяемая на мишени, при этих условиях облучения составляет ~1,45 кВт. Средняя интенсивность работы циклотрона составляла от 5 до 9 циклов облучения в неделю.

В облученной воде нами были идентифицированы более 20 нежелательных радионуклидов. В таблице 3 представлены возможные реакции их образования и основные ядерно-физические характеристики [8]. Существенное влияние на активность и набор радионуклидов в облученной воде оказывает ранее накопленная мишенью доза. Так, при накопленной на мишени дозе свыше 2000  $\mu\text{A}\cdot\text{ч}$  содержание РН в облученной воде возрастает на порядок и увеличивается набор детектируемых нежелательных радионуклидов [18], что обусловлено радиационно-индуцированной коррозией мишени [8; 30]. Содержание РН также зависело от режима, длительности и периодичности облучения мишени, содержания химических примесей в воде и ряда других факторов.

Таблица 3. – Основные характеристики идентифицированных нежелательных радионуклидов, образующихся при облучении на циклотроне Cyclone 18/9 водной ниобиевой мишени с входным окном из сплава Navar

РН	Возможная реакция получения и ее пороговая энергия	Тип и энергия излучения изотопа (кэВ)	Период полураспада, схема распада
1	2	3	4
$^{55}\text{Co}$	$^{58}\text{Ni}(\text{p},\alpha)^{55}\text{Co}$ ; 1,36 МэВ $^{54}\text{Fe}(\text{p},\gamma)^{55}\text{Co}$	$\gamma$ , 931,3; 477,2; 1408,4; 1316,4; 3253,41 $\beta^+$ (76 %); КЗ(24 %)	17,5 ч $^{55}\text{Co} \rightarrow ^{55}\text{Fe} \rightarrow ^{55}\text{Mn}$
$^{56}\text{Co}$	$^{56}\text{Fe}(\text{p,n})^{56}\text{Co}$ ; 5,44 МэВ $^{68}\text{Ni}(\text{p,t})^{56}\text{Co}$	$\gamma$ , 846,77; 1238,28; 2598,45; 1771,36; 3253,41 КЗ (81 %); $\beta^+$ (19 %)	77,27 сут $^{56}\text{Co} \rightarrow ^{56}\text{Fe}$
$^{57}\text{Co}$	$^{56}\text{Fe}(\text{p},\gamma)^{57}\text{Co}$ $^{57}\text{Fe}(\text{p,n})^{57}\text{Co}$ ; 1,65 МэВ $^{58}\text{Ni}(\text{p},2\text{p})^{57}\text{Co}$ $^{58}\text{Ni}(\text{n,d})^{57}\text{Co}$ ; 6,05 МэВ $^{58}\text{Ni}(\text{p},2\text{p})^{57}\text{Co}$ ; 8,31 МэВ $^{60}\text{Ni}(\text{p},\alpha)^{57}\text{Co}$ ; 0,27 МэВ	$\gamma$ , 122,06; 136,47; 14,41; 692,03 КЗ	271,8 сут $^{57}\text{Co} \rightarrow ^{57}\text{Fe}$
$^{58}\text{Co}$	$^{57}\text{Fe}(\text{p},\gamma)^{58}\text{Co}$ $^{58}\text{Fe}(\text{p,n})^{58}\text{Co}$ ; 3,14 МэВ $^{58}\text{Ni}(\text{n,p})^{58}\text{Co}$ ; 0 МэВ $^{60}\text{Ni}(\text{p,t})^{58}\text{Co}$ $^{59}\text{Co}(\text{n},2\text{n})^{58}\text{Co}$ $^{59}\text{Co}(\text{n,pn})^{58}\text{Co}$	$\gamma$ , 810,76; 863,96; 1674,73 КЗ $\beta^+$ (14,5 %)	70,92 сут $^{58}\text{Co} \rightarrow ^{58}\text{Fe}$

Окончание таблицы 3

1	2	3	4
<sup>51</sup> Cr	<sup>50</sup> Cr(n,γ) <sup>51</sup> Cr; 0 МэВ <sup>54</sup> Fe(n,α) <sup>51</sup> Cr <sup>52</sup> Cr(p,np) <sup>51</sup> Cr; 12,3 МэВ	γ, 320,08 КЗ	27,7 сут <sup>51</sup> Cr→ <sup>51</sup> V
<sup>52</sup> Mn	<sup>52</sup> Cr(p,n) <sup>52</sup> Mn; 5,6 МэВ <sup>54</sup> Fe(n,p2n) <sup>52</sup> Mn	γ, 744,23; 935,54; 1333,65; 1434,07 КЗ	5,59 сут <sup>52</sup> Mn→ <sup>52</sup> Cr
<sup>54</sup> Mn	<sup>53</sup> Cr(p,γ) <sup>54</sup> Mn <sup>54</sup> Cr(p, n) <sup>54</sup> Mn; 2,2 МэВ <sup>58</sup> Ni(n,pα) <sup>54</sup> Mn; 6,42 МэВ	γ, 834,85 КЗ	312,3 сут <sup>54</sup> Mn→ <sup>54</sup> Cr
<sup>57</sup> Ni	<sup>58</sup> Ni(p,pn) <sup>57</sup> Ni; 10,17 МэВ <sup>58</sup> Ni(n,2n) <sup>57</sup> Ni; 12,41 МэВ	γ, 1757,5; 127,2; 1919,5; 1377,6 КЗ; β <sup>+</sup> (53 %)	35,6 ч <sup>57</sup> Ni→ <sup>57</sup> Co→ <sup>57</sup> Fe
<sup>7</sup> Be	<sup>7</sup> Li(p,n) <sup>7</sup> Be <sup>10</sup> B(p,α) <sup>7</sup> Be <sup>11</sup> B(p,nα) <sup>7</sup> Be	γ, 477,60 КЗ	53,29 сут <sup>7</sup> Be→ <sup>7</sup> Li
<sup>65</sup> Zn	<sup>65</sup> Cu(p,n) <sup>65</sup> Zn <sup>64</sup> Zn(n,γ) <sup>65</sup> Zn	γ, 1115,55 КЗ	244,3 сут <sup>65</sup> Zn→ <sup>65</sup> Cu
<sup>92m</sup> Nb	<sup>93</sup> Nb(n,2n) <sup>92m</sup> Nb; 8,9 МэВ <sup>93</sup> Nb(γ,n) <sup>92m</sup> Nb	γ, 934,46; 912,73; 1847,27 КЗ; β <sup>+</sup>	10,15 сут <sup>92m</sup> Nb→ <sup>92</sup> Zr
<sup>95</sup> Nb	<sup>98</sup> Mo(p,α) <sup>95</sup> Nb <sup>95</sup> Mo(n,p) <sup>95</sup> Nb	γ, 204,12; 561,67; 765,8 β <sup>-</sup>	34,98 сут <sup>95</sup> Nb→ <sup>95</sup> Mo
<sup>95m</sup> Nb	<sup>98</sup> Mo(p,α) <sup>95m</sup> Nb <sup>95</sup> Mo(n,p) <sup>95m</sup> Nb	γ, 204,12; 582,08; 786,2; 820,62 ИП (94,4 %) β <sup>-</sup> (5,6 %)	86,6 ч <sup>95m</sup> Nb→ <sup>95</sup> Mo
<sup>96</sup> Nb	<sup>96</sup> Mo(n,p) <sup>96</sup> Nb	γ, 778,2; 568,8; 459,88; 849,93 β <sup>-</sup>	23,35 ч <sup>96</sup> Nb→ <sup>96</sup> Mo
<sup>95</sup> Tc	<sup>94</sup> Mo(p,γ) <sup>95</sup> Tc; <sup>95</sup> Mo(p,n) <sup>95</sup> Tc; 2,5 МэВ <sup>96</sup> Mo(p,2n) <sup>95</sup> Tc	γ, 765,79; 947,67; 1073,7; 869,6 КЗ	20,0 ч <sup>95</sup> Tc→ <sup>95</sup> Mo
<sup>95m</sup> Tc	<sup>94</sup> Mo(p,γ) <sup>95m</sup> Tc; <sup>95</sup> Mo(p, n) <sup>95m</sup> Tc; 2,5 МэВ <sup>96</sup> Mo(p,2n) <sup>95</sup> Tc	γ, 204,12; 582,1; 786,2; 835,15; 1036,3 КЗ (96,1%), ИП (3,9 %)	61 сут <sup>95m</sup> Tc→ <sup>95</sup> Mo
<sup>96</sup> Tc	<sup>95</sup> Mo(p,γ) <sup>96</sup> Tc; <sup>96</sup> Mo(p,n) <sup>96</sup> Tc; 3,8 МэВ	γ, 778,22; 812,58; 849,93; 1126,97 КЗ	4,28 сут <sup>96</sup> Tc→ <sup>96</sup> Mo
<sup>181</sup> Re	<sup>182</sup> W(p,2n) <sup>181</sup> Re; 10,65 МэВ	γ, 365,6; 360,7; 639,3; 953,42 КЗ	19,9 ч <sup>181</sup> Re→ <sup>181</sup> W→ → <sup>181</sup> Ta
<sup>182</sup> Re	<sup>182</sup> W(p,n) <sup>182</sup> Re; 3,6 МэВ	γ, 1221,4; 229,3; 67,75; 1121,3 КЗ	64 ч <sup>182</sup> Re→ <sup>182</sup> W
<sup>183</sup> Re	<sup>182</sup> W(p,γ) <sup>183</sup> Re <sup>183</sup> W(p,n) <sup>183</sup> Re; 1,35 МэВ	γ, 46,48; 162,32; 291,72; 208,80 КЗ	70,0 сут <sup>183</sup> Re→ <sup>183</sup> W
<sup>184</sup> Re	<sup>183</sup> W(p,γ) <sup>184</sup> Re <sup>184</sup> W(p,n) <sup>184</sup> Re; 2,23 МэВ	γ, 111,21; 792,07; 894,76; 903,28 КЗ	38,0 сут <sup>184</sup> Re→ <sup>184</sup> W
<sup>184m</sup> Re	<sup>183</sup> W(p,γ) <sup>184m</sup> Re <sup>184</sup> W(p,n) <sup>184m</sup> Re; 2,23 МэВ	γ, 161,27; 216,55; 252,85; 920,93 КЗ (24,6 %) ИП (75,4 %)	169 сут <sup>184</sup> Re→ <sup>184</sup> W
<sup>182</sup> Ta	<sup>182</sup> W(n,p) <sup>182</sup> Ta	γ, 1189,05; 67,75; 1121,3; 1221,4 β <sup>-</sup>	114,4 сут <sup>182</sup> Ta→ <sup>182</sup> W
<sup>183</sup> Ta	<sup>183</sup> W(n,p) <sup>183</sup> Ta	γ, 107,93; 246,06; 353,99; 161,35 β <sup>-</sup>	5 сут <sup>183</sup> Ta→ <sup>183</sup> W

Доминирующими радионуклидами при облучении водной мишени циклотрона Cyclone 18/9 НС с ниобиевой мишенью и входным окном из сплава Navar являются изотопы кобальта (<sup>55</sup>Co, <sup>56</sup>Co, <sup>57</sup>Co, <sup>58</sup>Co), хрома (<sup>51</sup>Cr), марганца (<sup>52</sup>Mn, <sup>54</sup>Mn), никеля (<sup>57</sup>Ni) и бериллия (<sup>7</sup>Be). Радиоизотопы ниобия, технеция и рения имели значительно более низкие активности. Отметим, что другими исследователями при использовании циклотронов разных типов (GE PET trace [9; 10; 15; 23; 24,], CYPRIS NM18 [20], CYPRIS MINI trace [27; 31] и TR 19/9 [11; 22]) с входным окном из сплава Navar вне зависимости от материала мишени (серебра [9; 23; 24; 27; 31; 32], ниобия [10; 11], тантала [26] или титана [20]) присутствие радиоизотопов Co, Cr, Ni и Mn в облученной воде наблюдается практически всегда. Исключение составляет облучение на циклотроне CYPRIS MINI trace с энергией 9,6 МэВ. В этом случае в γ-спектрах отсутствует линия 320 кэВ, обусловленная радиоизотопом <sup>51</sup>Cr. Доминирующей реакцией образования этого изотопа во входном окне водяной мишени является <sup>52</sup>Cr(p, np)<sup>51</sup>Cr с пороговой энергией 12,3 МэВ, превышающей энергию протонов в циклотроне CYPRIS MINI trace. Реакции на нейтронах менее продуктивны. Так, сечение реакции <sup>54</sup>Fe(n,α)<sup>51</sup>Cr, протекающей на резонансных нейтронах, по данным [33] не превышает 2 мбарн. Реакция <sup>50</sup>Cr(n,γ)<sup>51</sup>Cr имеет достаточно высокое сечение реакции 15 барн, но она протекает на тепловых нейтронах.

Для ее протекания необходимо торможение нейтронов, поэтому вероятность ее протекания в мишени невелика. Кроме того, доля изотопа  $^{50}\text{Cr}$  в естественной смеси составляет 4,3%. Указанные обстоятельства и обуславливают отсутствие  $^{51}\text{Cr}$  в облученной воде CYPRIIS MINI trace.

Активность каждого из радионуклидов в регенерированной воде  $^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$  на момент окончания синтеза (таблица 4) варьирует в широких пределах – от единиц до сотен тысяч Бк – в зависимости от накопленной мишенью дозы, а также, в меньшей степени, от длительности облучения и тока на мишени. Активность РН  $^7\text{Be}$  определялась в основном партией  $^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$  воды и сроками ее хранения, а для одной партии линейно зависела от длительности облучения в производственном цикле. Для остальных РН активности определялись в основном накопленной мишенью дозой, причем минимальные значения активности этих РН, приведенные в таблице 4, характерны для «чистой» (предварительно не облучавшейся) мишени, а максимальные – для мишеней с накопленной дозой свыше 4000 мкА·ч.

Таблица 4. – Диапазон измеренных активностей долгоживущих ПРН в воде  $^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$  на момент окончания облучения

Радионуклид	Активность, кБк
$^7\text{Be}$	0,01 – 12
$^{51}\text{Cr}$	0,041 – 84
$^{52}\text{Mn}$	0,05 – 17
$^{54}\text{Mn}$	0,119 – 5,5
$^{55}\text{Co}$	15,3 – 92
$^{56}\text{Co}$	1,95 – 41,9
$^{57}\text{Co}$	1,08 – 19,7
$^{58}\text{Co}$	10,4 – 141
$^{57}\text{Ni}$	9,73 – 7,41
$^{92}\text{Nb} + ^{95}\text{Nb}$	0,03 – 0,20
$^{95}\text{Tc} + ^{96}\text{Tc}$	0,02 – 12,9
$^{183}\text{Re} + ^{184}\text{Re}$	0,05 – 0,61
$^{182}\text{Ta} + ^{183}\text{Ta}$	0 – 0,18

Радиоизотопы технеция, ниобия, рения и тантала, как правило, имеют активность на три порядка ниже, чем радионуклиды кобальта, хрома и марганца. Так, суммарная активность нуклидов Nb, Tc, Re не превышает 1–5% от суммарной активности радиоизотопов кобальта. В ряде экспериментов активность указанных радионуклидов была ниже предела обнаружения (~5–10 Бк) использованной методики  $\gamma$ -спектрометрии. Тем не менее, присутствие именно радиоизотопов технеция, ниобия, рения наблюдалось в готовой лекарственной форме РФП  $^{18}\text{F}]\text{ФДГ}$  и  $^{18}\text{F}]\text{NaF}$  [18; 21; 34], причем их активность резко возрастала при облучении мишеней с накопленной дозой свыше 2500–3000 мкА·ч [18].

Основным механизмом попадания РН в облучаемую воду  $^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$  является вымывание продуктов активации из окна мишени. Отметим, что вымывание происходит в жестких химических условиях при облучении: постоянное точечное воздействие высокоэнергетического (18 МэВ) протонного пучка, рабочее давление ~25–30 атм., разогрев мишени до температур свыше 220 °С. Сплав Havar содержит ряд хорошо активирующихся элементов: кобальт (42%), хром (19,5%), железо (18,1%), никель (13,7%), вольфрам (2,7%), молибден (2,2%), марганец (1,6%) и углерод (0,2%)<sup>1</sup>. Все указанные выше элементы в составе фольги (кроме углерода) являются эффективными источниками РН. Как отмечалось в [29], радиоизотопы  $^{51}\text{Cr}$ ,  $^{56}\text{Co}$ ,  $^{57}\text{Co}$ ,  $^{58}\text{Co}$  и  $^{54}\text{Mn}$  обнаруживаются в облученной Havar-фольге даже через 400 дней после последнего облучения. Большинство из нежелательных РН образуются в Havar-окне в результате реакций на протонах и, в меньшей степени, на нейтронах. Сравнение расчетных и экспериментальных данных [15; 35] показывает, что вследствие коррозии/эрозии из входного окна мишени в облучаемую воду вымываются от 10<sup>-2</sup> до 10<sup>-5</sup>% изотопов  $^{51}\text{Cr}$ ,  $^{56}\text{Co}$ ,  $^{57}\text{Co}$ ,  $^{58}\text{Co}$ ,  $^{52}\text{Mn}$ ,  $^{54}\text{Mn}$  и  $^{57}\text{Ni}$ .

Следует отметить, что циклотронные мишени для производства медицинских радионуклидов страдают от двух основных проблем: коррозии из-за облученной протонами воды и охрупчивания жидкими металлами. Материал входного окна мишени должен отвечать следующим требованиям: обрабатываемость или простота конструкции, высокая температура плавления, высокие характеристики теплообмена, отличная химическая инертность, высокая прочность, позволяющая выдерживать давление свыше 30 атм. и т.д. [30].

<sup>1</sup> Havar. Technical Data Sheet [Electronic resource], Hamilton Precision Metals, Lancaster, PA. URL: <https://www.hpmetals.com/-/media/ametekhpmetals/files/technical-data/ni-base-corrosion-resistant/havar.pdf>.

Соответствуя в наибольшей степени всем этим условиям, сплав  $\text{Navar}$  является основным материалом для изготовления входных окон водных мишеней циклотронов, несмотря на то, что представляет собой, как отмечено выше, основной источник нежелательных ПРН в облученной воде. В настоящее время ведутся работы по созданию входных окон из  $\text{Navar}$ -пленок, защищенных химически стойкими антикоррозионными покрытиями на основе  $\text{Nb}$ , нанесенными магнетронным напылением [11; 22; 30]. Это позволяет снизить содержание ПРН в облученной воде: примеси  $\text{Co}$  – в 25 раз,  $\text{Ni}$  и  $\text{Mn}$  – на порядок,  $\text{Cr}$ ,  $\text{Fe}$  и  $\text{Mo}$  – в 2 раза [11].

Как отмечалось выше, при возрастании накопленной мишенью дозы  $> 2000 \mu\text{A}\cdot\text{ч}$  концентрация в облученной воде нежелательных ПРН возрастает почти на порядок. Это может быть объяснено следующими обстоятельствами. С ростом накопленной дозы входное окно мишени аморфизуется. Наиболее интенсивно этот процесс протекает на границах зерен. Аморфные участки в процессе облучения расплываются быстрее [36], что способствует усилению коррозии мишени. Действие обоих указанных факторов приводят к возрастанию концентрации нежелательных ПРН в облученной воде  $[\text{}^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ .

Ниобиевая мишень является источником только одного радионуклида  $^{92\text{m}}\text{Nb}$ , активность которого невелика (обычно не превышает 100 Бк). Он преимущественно образуется в результате реакции  $^{93}\text{Nb}(n,2n)^{92\text{m}}\text{Nb}$  с пороговой энергией 8,9 МэВ и довольно высоким сечением реакции  $\sim 1,4$  барн в диапазоне энергий нейтронов 12–18 МэВ. Возможно также протекание фотоядерной реакции  $^{93}\text{Nb}(\gamma,n)^{92\text{m}}\text{Nb}$  [37]. Не следует исключать и образование долгоживущих радионуклидов (ДРН)  $^{182,183}\text{Ta}$  и  $^{95,96}\text{Nb}$  из примесей вольфрама и молибдена в ниобиевой мишени по (n,p) реакции. Однако для изготовления мишеней используется ниобий очень высокой чистоты (свыше 99% [21]), поэтому такой механизм образования радионуклидов тантала и ниобия маловероятен. Следует отметить, что при использовании входного окна из ниобия на ниобиевой мишени [21] основными ДРН в облученной воде являются  $^{93\text{m}}\text{Mo}$  и  $^{92\text{m}}\text{Nb}$ . Эти же радионуклиды наблюдались и при облучении входного окна из сплава  $\text{Navar}$  с пленкой  $\text{Nb}$  толщиной 188 нм, нанесенной магнетронным напылением [22], причем наиболее активный из них  $^{93\text{m}}\text{Mo}$  (период полураспада  $t_{1/2} = 6,85$  часа) нарабатывался во входном окне по реакции  $^{93}\text{Nb}(p,n)^{93\text{m}}\text{Mo}$  с участием протонов и, следовательно, в наших экспериментах не наблюдался.

Заметим, что с точки зрения накопления ПРН ниобиевая мишень является наиболее приемлемой. Активность образующегося при ее облучении радионуклида  $^{92\text{m}}\text{Nb}$  пренебрежимо мала (ниже на 3–4 порядка) по сравнению с активностью ПРН, обусловленных активацией входного окна мишени из сплава  $\text{Navar}$  (см. таблицу 4). Для мишеней из других материалов ситуация хуже. Так, для наиболее часто применяемых серебряных мишеней основными ПРН являются  $^{109}\text{Cd}$  и  $^{110}\text{Ag}$ , образующиеся по реакциям  $^{109}\text{Ag}(p,n)^{109}\text{Cd}$  и  $^{109}\text{Ag}(n,\gamma)^{110}\text{Ag}$ . Причем их активность часто превышает суммарную активность от ДРН, образующихся в  $\text{Navar}$ -окне [9; 15; 27]. В титановой мишени образуются  $^{48}\text{V}$  (возможные реакции  $^{48}\text{Ti}(p,n)^{48}\text{V}$  и  $^{49}\text{Ti}(p,2n)^{48}\text{V}$ ) и  $^{46}\text{Sc}$  по реакции  $^{46}\text{Ti}(n,p)^{46}\text{Sc}$ , причем удельная активность в воде радионуклида  $^{48}\text{V}$  превышает 1 кБк/г и немногом уступает активности доминирующего  $^{51}\text{Cr}$  [20].

Особняком среди всех ПРН стоит  $^7\text{Be}$ . Он наблюдался в качестве одного из основных в облученной воде многими исследователями на разных мишенях (ниобиевой, серебряной, титановой) с различными входными окнами ( $\text{Navar}$  и ниобий) [10; 21; 27; 38]. Однако механизм его формирования не определен, причем в большинстве работ он вообще не обсуждается. Мы наблюдали сильную зависимость активности  $^7\text{Be}$  от используемой партии воды – она изменялась при смене флакона с водой  $[\text{}^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ . Кроме того, нами была установлена жесткая корреляция активности указанного ПРН с длительностью облучения. Полученные экспериментальные данные позволяют однозначно утверждать, что рассматриваемый изотоп образуется в процессе активации примесей бора и, вероятно, лития, содержащихся в  $[\text{}^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ , под действием высокоэнергетических протонов. Так, согласно сертификату качества производителя, обогащенная вода содержит бор в концентрации до 0,00011 мг/л, а  $\text{Li}$  – до 0,000065 мг/л. Кроме того, концентрации бора и щелочных металлов могут увеличиваться при длительном хранении воды во флаконах из боросиликатного стекла. По нашему мнению, именно активация указанных примесей в  $[\text{}^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$  воде по реакциям  $^7\text{Li}(p,n)^7\text{Be}$  и  $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$  является источником образования  $^7\text{Be}$ . Аналогичного мнения придерживаются и авторы [10], полагающие, что источником радионуклида  $^7\text{Be}$  является примесь бора в облучаемой  $[\text{}^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$  воде.

Схожее поведение было характерно и для радионуклида  $^{65}\text{Zn}$  [39]. Его активность также не зависела от набранной мишенью дозы и изменялась лишь при смене флакона с водой  $[\text{}^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ , поэтому мы полагаем, что и его предшественником являются стабильные изотопы в составе воды. В частности,  $^{65}\text{Zn}$  может образовываться при активации изотопов меди или цинка, которые присутствуют в  $[\text{}^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$  и могут попадать в нее, например, из теплообменного оборудования в процессе обогащения и/или в процессе нормализации по тритию.

Полученные нами экспериментальные данные по осаждению ПРН на анионно-обменном картридже [8; 13] свидетельствуют о том, что в условиях наработки  $[\text{}^{18}\text{F}]\text{фторида}$  происходит образование не только истинного раствора, содержащего ионы примесных ПРН, но и коллоидно-дисперсной фазы. По нашим данным до 30% кобальта и марганца, а также  $\sim 7\%$  хрома находятся в составе твердых частиц размерами  $> 5$  мкм, вымытых из входной фольги мишени циклотрона, причем доля коллоидно-дисперсной фазы увеличивается с ростом накопленной мишенью дозы. В то же время бериллий находился в основном в виде

истинного раствора и механическими фильтрами не задерживался. Аналогичное поведение характерно и для РН ниобия и технеция, которые являются основными радионуклидными примесями в радиофармпрепаратах на основе  $^{18}\text{F}$  при облучении мишеней с большой накопленной дозой ( $> 4000$  мкА·ч).

Подтверждением наличия дисперсной фазы в облученной воде  $[\text{}^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$  являются результаты, опубликованные в [23]. В этой работе приведены данные по осаждению ДРН на мишенных РАТ-фильтрах с порами диаметром 10 мкм. По данным [23] на мишенных РАТ-фильтрах осаждалось ~7% от суммарной активности ДРН, однако поведение конкретных радионуклидов сильно отличалось. Так, на механическом фильтре осаждалось ~25% радионуклидов кобальта, до 11–15% марганца и хрома, а радиоизотопы Тс и Ре практически не осаждались (до 1–3%). Это хорошо согласуется с полученными нами данными.

Основной источник накопления нежелательных РН в облученной воде – это входное окно мишени из сплава Navar, который представляет собой поликристалл с размерами кристаллитов от 10 мкм и выше. Кристаллиты состоят в основном из атомов кобальта, хрома, железа и никеля, которые являются источниками радионуклидов  $^{51}\text{Cr}$ ,  $^{56}\text{Co}$ ,  $^{57}\text{Co}$ ,  $^{58}\text{Co}$ ,  $^{52}\text{Mn}$ ,  $^{54}\text{Mn}$  и  $^{57}\text{Ni}$  (см. таблицу 3). Вольфрам и молибден, являющиеся источником РН технеция, ниобия, тантала и рения (см. таблицу 3), преимущественно входят в состав межкристаллитной аморфной фазы. Одним из наиболее вероятных механизмов образования частиц с размером более 5 мкм является межкристаллитная коррозия фольги Navar – преимущественное вымывание металла из аморфной фазы между более стойкими к коррозии кристаллитами. Этот процесс, хорошо известный в атомной энергетике для аустенитных сталей [40], может протекать в жестких условиях производства  $^{18}\text{F}$  – при бомбардировке фольги протонами с энергией 18 МэВ и ее контакте с водой при температуре свыше 220 °С и давлении ~30 атм. При облучении высокоэнергетичными ионами поликристаллической мишени (в нашем случае входного окна из сплава Navar) наблюдается также преимущественное испарение аморфной межкристаллитной фазы [36]. В результате этого, а также ускоренного вымывания аморфной фазы, связи между отдельными кристаллитами на поверхности фольги ослабевают, вследствие чего кристаллиты могут вымываться как единое целое. Взвешенными дисперсными частицами в таком случае будут выступать микрокристаллиты из сплава Navar, содержащие в себе продукты активации материала окна мишени (преимущественно  $^{51}\text{Cr}$ ,  $^{56}\text{Co}$ ,  $^{57}\text{Co}$ ,  $^{58}\text{Co}$ ,  $^{52}\text{Mn}$ ,  $^{54}\text{Mn}$  и  $^{57}\text{Ni}$ ). РН ниобия и технеция попадают в воду из аморфной фазы, поэтому не входят в состав коллоидно-дисперсной фазы и не задерживаются механическими фильтрами. Радионуклид  $^7\text{Be}$ , как отмечалось выше, образуется в процессе активации примесей бора и лития, содержащихся в  $[\text{}^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$ . По этой причине в облученной воде он находится в виде истинного раствора и механическими фильтрами не задерживается.

Нельзя также исключить и возможности образования дисперсной фазы с включениями РН в результате окислительно-восстановительных процессов вследствие реакции материала мишени с радикальными продуктами радиолиза воды. При радиолизе воды с равными выходами образуются как ОН-радикалы, активно окисляющие поверхность металлов, так и сольватированные электроны, восстанавливающие ионы металлов в растворе вплоть до степени окисления 0. Образовавшиеся в ходе высокотемпературного радиолиза отдельные свободные атомы металлов при этом способны агрегировать в коллоиды, размеры которых могут достигать нескольких микрон.

**Заключение.** Проанализированные в настоящей работе процессы и механизмы попадания нежелательных долгоживущих радионуклидов имеют важное значение для оптимизации методов обращения с радиоактивными отходами при производстве радиофармпрепаратов и, как следствие, минимизации дозовых нагрузок персонала.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Папаш, А. И. Коммерческие циклотроны / А. И. Папаш, Ю. Г. Аленицкий. // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 2008. – Т. 39, Вып 4. – Ч. 1 : Коммерческие циклотроны в диапазоне энергий от 10 до 30 МэВ для производства изотопов. – С. 1150–1214.
2. Кодина, Г. Е. Методы получения радиофармацевтических препаратов и радионуклидных генераторов для ядерной медицины / Г. Е. Кодина, Р. Н. Красикова. – М. : МЭИ, 2014. – 282 с.
3. Рыжов, С. А. К вопросу о безопасности персонала в отделении ядерной медицины / С. А. Рыжов, А. В. Водватов, Ю. В. Дружинина // Актуальные проблемы разработки, производства и применения радиофармацевтических препаратов: сб. тез. докл. IV Междунар. науч.-практ. конф. «РАДИОФАРМА-2021», М., 30 сент. – 3 окт. 2021 г. / ФГБУ ГНЦ ФМБЦ им. А. И. Бурназяна ФМБА России ; под ред. Г. Е. Кодиной, А. А. Лабушкиной. – М., 2021. – С. 54.
4. Позитронно-эмиссионная томография Ч. 1: Характеристика метода. Получение радиофармпрепаратов / С. Д. Бринкевич [и др.] // Медико-биологические проблемы жизнедеятельности. – 2013. – № 2 – С. 129–137.
5. Consideration, measurements and logistics associated with low-energy cyclotron decommissioning / J. J. Sunderland [et al.] // 14th Intern. Workshop on Targetry and Target Chemistry. AIP Conf. Proc. – 2012. – Vol. 1509. – P. 16–20. – DOI: [10.1063/1.4773931](https://doi.org/10.1063/1.4773931).

6. Brinkevich, D. I. Activation of the cooling circuit water of the Cyclone 18/9-NC cyclotron during the production of  $^{18}\text{F}$  / D. I. Brinkevich, A. Ya. Maliborski, S. D. Brinkevich // *Physics of atomic nuclei*. – 2019. – Vol. 82, № 12. – P. 1714–1720. – DOI: [10.1134/S1063778819120044](https://doi.org/10.1134/S1063778819120044).
7. Measurements of residual radioactivity of machine elements and concrete on the cyclotron decommissioning / T. Shiomi [et al.] // *J. Nuclear Science Technology*. – March 2000. – S. 1. – P. 357–361.
8. Бринкевич, С. Д. Активационные радионуклиды при облучении ниобиевой мишени на циклотроне Cyclone 18/9 NC / С. Д. Бринкевич, Д. И. Бринкевич, А. Н. Кийко // *Ядерная физика и инжиниринг*. – 2019. – Т. 10. – № 6. – С. 574–580.
9. Radionuclide impurities in proton-irradiated  $^{18}\text{O}$  for the production of  $^{18}\text{F}$ : Activities and distribution in the  $^{18}\text{F}$ FDG synthesis process / L. Bowden [et al.] // *Applied Radiation and Isotopes*. – 2009. – Vol. 67. – P. 248–255.
10. Distribution and separation of metallic and radionuclidic impurities in the production of  $^{18}\text{F}$ -fluorodeoxyglucose / K. Kilian [et al.] // *J. of Radioanalytical and Nuclear Chemistry*. – 2016. – Vol. 307, № 2. – P. 1037–1043.
11. Avila-Rodriguez, M. A. A quantitative and comparative study of radionuclidic and chemical impurities in water samples irradiated in a niobium target with Havar vs niobium-sputtered Havar as entrance foils / M. A. Avila-Rodriguez, J. S. Wilson, S. A. McQuarrie // *Applied Radiation and Isotopes*. – 2008. – Vol. 66, № 12. – P. 1775–1780.
12. Schlyer, D. J. Impurities in the  $^{18}\text{O}$  water target and their effect on the yield of an aromatic displacement reaction with  $^{18}\text{F}$  fluoride / D. J. Schlyer, M. L. Firouzbakht, A. P. Wolf // *Applied Radiation and Isotopes*. – 1993. – Vol. 44, № 12. – P. 1459–1465.
13. Разделение долгоживущих радионуклидов на анионообменном картридже QMA light при производстве радиофармпрепаратов на основе  $^{18}\text{F}$  / В. О. Крот [и др.] // *Радиохимия*. – 2021. – Т. 63, № 2. – С. 193–200.
14. Переработка облученной воды  $^{18}\text{O}$  в условиях ПЭТ-центра / С. Д. Бринкевич [и др.] // *Радиохимия*. – 2019. – Т. 61, № 4. – С. 344–350.
15. Monte Carlo simulation and radiometric characterization of proton irradiated  $^{18}\text{O}$  for the treatment of the waste streams originated from  $^{18}\text{F}$ FDG synthesis process / R. Remetti [et al.] // *Applied Radiation and Isotopes*. – 2011. – Vol. 69. – P. 1046–1051.
16. Activation of air and concrete in medical isotope production facilities. / A. C. Dodd [et al.] // *AIP Conference Proceedings*. – 2017. – Vol. 1845. – DOI: [10.1063/1.4983537](https://doi.org/10.1063/1.4983537).
17. Обращение с водными радиоактивными отходами при производстве радиофармпрепаратов на основе  $^{18}\text{F}$  / В. О. Крот [и др.] // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки*. – 2018. – № 4. – С. 128–134.
18. Долгоживущие радионуклиды при производстве  $^{18}\text{F}$  фторхолина для ПЭТ-диагностики / П. В. Тылец [и др.] // *Изв. НАН Беларуси. Сер. химических наук*. – 2018. – № 3. – С. 359–368.
19. Quantification of the activity of tritium produced during the routine synthesis of  $^{18}\text{F}$  fluorodeoxyglucose for positron emission tomography / C. Marshall [et al.] // *J. Radiological Protection*. – 2014. – Vol. 34. – P. 435–444. – DOI: [10.1088/0952-4746/34/2/435](https://doi.org/10.1088/0952-4746/34/2/435).
20. Measurement of the induced radionuclides in production of radiopharmaceuticals for positron emission tomography (PET) / S. Mochizuki [et al.] // *J. Nuclear Science and Technology*. – 2006. – Vol. 43, № 4. – P. 348–353.
21. Radionuclide impurities in  $^{18}\text{F}$ F- and  $^{18}\text{F}$ FDG for positron emission tomography / M. Kohler [et al.] // *Applied Radiation and Isotopes*. – 2013. – Vol. 81. – P. 268–271.
22. Niobium sputtered Havar foil for the high-power production of reactive  $^{18}\text{F}$  fluoride by proton irradiation of  $^{18}\text{O}$   $\text{H}_2\text{O}$  targets / J. S. Wilson [et al.] // *Applied Radiation and Isotopes*. – 2008. – Vol. 66. – P. 565–570.
23. Assessment of radionuclidic impurities in 2- $^{18}\text{F}$  fluoro-2-deoxy-d-glucose ( $^{18}\text{F}$ FDG) routine production / M. Marengo [et al.] // *Applied Radiation and Isotopes*. – 2008. – Vol. 66, № 3. – P. 295–302.
24. Measurement of long lived radioactive impurities retained in the disposable cassettes on the Tracerlab MX system during the production of  $^{18}\text{F}$ FDG / D. Ferguson [et al.] // *Appl. Radiat. Isotopes*. 2011. – Vol. 69, № 10. – P. 1479–1485. – DOI: [10.1016/j.apradiso.2011.05.028](https://doi.org/10.1016/j.apradiso.2011.05.028).
25. Measurement of the residual radioactivity induced in the front foil of a target assembly in a modern medical cyclotron / R. C. O'Donnell [et al.] // *Applied Radiation and Isotopes*. – 2004. – V. 60, № 2–4. – P. 539–542.
26. Radionuclidic purity tests in  $^{18}\text{F}$  radiopharmaceuticals production process / T. Dziel [et al.] // *Applied Radiation and Isotopes*. – 2016. – Vol. 109, № 2. – P. 242–246.
27. Radioactive byproducts in  $^{18}\text{O}$   $\text{H}_2\text{O}$  used to produce  $^{18}\text{F}$  for  $^{18}\text{F}$ FDG synthesis / S. Ito [et al.] // *Applied Radiation and Isotopes*. – 2006. – Vol. 64, № 3. – P. 298–305.
28. Пленки пиролитического графита, облученного ионами водорода  $\text{H}^+$  / С. А. Вабищевич [и др.] // *Взаимодействие излучений с твердым телом : материалы 13 междунар. конф., Минск, 30 сент. – 3 окт. 2019 г. / Белорус. гос. ун-т ; редкол.: В. В. Углов (отв. ред.) [и др.]*. – Минск, 2019. – С. 43–45.
29. Gamma-ray spectrometric characterization of waste activated target components in a PET cyclotron / P. Guarino [et al.] // *Cyclotrons and Their Applications–2007: Eighteenth International Conference (01–05.10.2007)*. Giardini Naxos, Italy. – P. 295–297.
30. Influence of the microstructure on the diffusion barrier performance of Nb-based coatings for cyclotron targets / V. Palmieri [et al.] // *J. Vacuum Science & Technology*. – 2019. – Vol. 37, № 5. – DOI: [10.1116/1.5098168](https://doi.org/10.1116/1.5098168).
31. Measurement of activation products generated in the  $^{18}\text{F}$ FDG production by a 9.6 MeV cyclotron / J. C. Chávez [et al.] // *Radiation Physics and Chemistry*. – 2016. – Vol. 126. – P. 32–36. – DOI: [10.1016/j.radphyschem.2016.05.006](https://doi.org/10.1016/j.radphyschem.2016.05.006).
32. Long-lived contaminants in cyclotron-produced radiopharmaceuticals: measurement and dosimetry / R. L. Metzger [et al.] // *J. Radioanalytical and Nuclear Chemistry*. – 2018. – Vol. 318. – P. 7–10. – DOI: [10.1007/s10967-018-5970-6](https://doi.org/10.1007/s10967-018-5970-6).
33. Сечение реакции  $^{54}\text{Fe}(n,\alpha)^{51}\text{Cr}$  на тепловых нейтронах / С. П. Макаров [и др.] // *Атомная энергия*. – 1991. – Т. 70, № 3. – С. 194–106.
34. Долгоживущие радионуклиды в производстве 2- $^{18}\text{F}$  фтордезоксиглюкозы / Д. И. Бринкевич [и др.] // *Медицинская физика*. – 2018. – № 1(77). – С. 80–88.

35. Alloni, D. Experimental and Monte Carlo characterization of radionuclidic impurities originated from proton irradiation of  $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$  in a modern medical cyclotron / D. Alloni, M. Prata, B. Smilgys // *Applied Radiation and Isotopes*. – 2019. – V. 146. – P. 84–89. – DOI: [10.1016/j.apradiso.2019.01.026](https://doi.org/10.1016/j.apradiso.2019.01.026).
36. Исследование воздействия ионов криптона с энергией 305 MeV на высокоориентированный пиролитический графит / А. Ю. Дидык [и др.] // *Письма в ЖТФ*. – 2000. – Т. 26, N 17. – С. 1–5.
37. Using a clinical linac to determine the energy levels of  $^{92\text{m}}\text{Nb}$  via the photonuclear reaction / M. Aygun [et al.] // *Applied Radiation and Isotopes*. – 2016. – Vol. 115, № 1. – P. 97–99.
38. Gillis, J. M. Analysis of metal radioisotope impurities generated in  $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$  during the cyclotron production of fluorine-18 / J. M. Gillis, N. Najim, J. Zweit // *Applied Radiation and Isotopes*. – 2006. – Vol. 64, № 3. – P. 431–434.
39. Очистка  $[^{18}\text{F}]$ фторида от долгоживущих радионуклидов при производстве  $[^{18}\text{F}]$ фтордезоксиглюкозы / А. А. Иванюкович [и др.] // *Медицинская физика*. – 2018. – № 4(80). – С. 59–65.
40. Иванов, С. Н. Влияние высокодозного нейтронного облучения на склонность к межкристаллитной коррозии аустенитной нержавеющей стали 12Х18Н9Т / С. Н. Иванов, С. И. Поролло, А. М. Дворяшин // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Материаловедение и новые материалы*. – 2006. – № 2. – С. 222–228.

## REFERENCES

1. Papash, A. I., & Alenitskii, Yu. G. (2008). Kommercheskie tsiklotrony. Chast' 1. Kommercheskie tsiklotrony v diapazone energii ot 10 do 30 MeV dlya proizvodstva izotopov [Commercial cyclotrons. Part 1. Commercial cyclotrons in the energy range from 10 to 30 MeV for isotope production]. *Fizika elementarnykh chastits i atomnogo yadra [Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei]: Vol. 39, iss 4 (1150–1214)*. (In Russ.).
2. Kodina, G. E., & Krasikova, R. N. (2014). *Metody polucheniya radiofarmatsevticheskikh preparatov i radionuklidnykh generatorov dlya yadernoi meditsiny [Methods for obtaining radiopharmaceuticals and radionuclide generators for nuclear medicine]*. Moscow: MEI. (In Russ.).
3. Ryzhov, S. A., Vodvatov, A. V., & Druzhinina, Yu. V. (2021). K voprosu o bezopasnosti personala v otdelenii yadernoi meditsiny. [On the issue of personnel safety in the nuclear medicine department]. In G. E. Kodina & A. A. Labushkina (Eds.) *Aktual'nye problemy razrabotki, proizvodstva i primeneniya radiofarmatsevticheskikh preparatov: sb. tez. dokl. [Actual problems of development, production and use of radiopharmaceuticals]* (54). Moscow: FMBC – FMBA. (In Russ.).
4. Brinkevich, S. D., Sukonko, O. G., Chizh, G. V., & Naumovich, A. S. (2013). Pozitronno-emissionnaya tomografiya. Chast' 1: Kharakteristika metoda. Poluchenie radiofarmpreparatov [Positron emission tomography. Part 1: Method description. Production of radiopharmaceuticals]. *Mediko-biologicheskie problemy zhiznedeyatel'nosti [Medical and Biological Problems of Life Activity]*, (2), 129–137. (In Russ., abstr. in Engl.).
5. Sunderland, J. J., Erdahl, C. E., Bender, B. R., Sensoy, L., & Watkins, G. L. (2012). Consideration, measurements and logistics associated with low-energy cyclotron decommissioning. *14<sup>th</sup> Intern. Workshop on Targetry and Target Chemistry. AIP Conf. Proc. V. 1509*. (16–20). DOI: [10.1063/1.4773931](https://doi.org/10.1063/1.4773931).
6. Brinkevich, D. I., Maliborski, A. Ya., & Brinkevich, S. D. (2019). Activation of the cooling circuit water of the Cyclone 18/9-HC cyclotron during the production of  $^{18}\text{F}$ . *Physics of atomic nuclei*, 82(12), 1714–1720. DOI: [10.1134/S1063778819120044](https://doi.org/10.1134/S1063778819120044).
7. Shiomi, T., Azeyanagi Y., Yamadera, A., & Nakamura, T. (2000). Measurements of residual radioactivity of machine elements and concrete on the cyclotron decommissioning. *J. Nuclear Science Technology*, (1), 357–361.
8. Brinkevich, S. D., Brinkevich, D. I., & Kiiko A. N. (2019). Aktivatsionnye radionuklidy pri obluchenii niobievoi misheni na tsiklotrone Cyclone 18/9 HC [Activation radionuclides during irradiation of a niobium target at the Cyclone 18/9 HC cyclotron]. *Yadernaya fizika i inzhiniring [Nuclear Physics and Engineering]*, 10(6), 574–580. (In Russ., abstr. in Engl.).
9. Bowden, L., Vintro, L. L., Mitchell, P. I., O'Donnell, R. G., Seymour, A. M., & Duffy G. J. (2009). Radionuclide impurities in proton-irradiated  $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$  for the production of  $^{18}\text{F}$ : Activities and distribution in the  $[^{18}\text{F}]$ FDG synthesis process. *Applied Radiation and Isotopes: Vol. 67*. (248–255).
10. Kilian, K., Pegier, M., Pecal, A., & Pyrzynska, K. (2016). Distribution and separation of metallic and radionuclidic impurities in the production of  $^{18}\text{F}$ -fluorodeoxyglucose. *J. of Radioanalytical and Nuclear Chemistry*, 307(2), 1037–1043.
11. Avila-Rodriguez, M. A., Wilson, J. S., & McQuarrie S. A. (2008). A quantitative and comparative study of radionuclidic and chemical impurities in water samples irradiated in a niobium target with Havar vs niobium-sputtered Havar as entrance foils. *Applied Radiation and Isotopes*, 66(12), 1775–1780.
12. Schlyer, D. J., Firouzbakht, M. L., & Wolf, A. P. (1993). Impurities in the  $[^{18}\text{O}]$ water target and their effect on the yield of an aromatic displacement reaction with  $[^{18}\text{F}]$ fluoride. *Applied Radiation and Isotopes*, 44(12), 1459–1465.
13. Krot, V. O., Brinkevich, S. D., Brinkevich, D. I., & Ivanyukovich, A. A. (2021). Razdelenie dolgozhivushchikh radionuklidov na anionoobmennom kartridzhe QMA light pri proizvodstve radiofarmpreparatov na osnove  $^{18}\text{F}$  [Separation of long-lived radionuclides on a QMA light anion exchange cartridge in the production of radiopharmaceuticals based on  $^{18}\text{F}$ ]. *Radiokhimiya [Radiochemistry]*, 63(2), 193–200. (In Russ., abstr. in Engl.).
14. Brinkevich, S. D., Krot, V. O., Brinkevich, D. I., Tugai, O. V., Edimecheva, I. P., & Ivanyukovich, A. A. Pererabotka obluchennoi vody  $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$  v usloviyakh PET-tsentra [Processing of irradiated water  $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$  in a PET center]. *Radiokhimiya [Radiochemistry]*, 61(4), 344–350.
15. Remetti, R., Burgio, N. T., Maciocco, L., Arcese, M., & Filannino, M. A. (2011). Monte Carlo simulation and radiometric characterization of proton irradiated  $[^{18}\text{O}]\text{H}_2\text{O}$  for the treatment of the waste streams originated from  $[^{18}\text{F}]$ FDG synthesis process. *Applied Radiation and Isotopes*, 69, 1046–1051.
16. Dodd, A. C., Shackelton, R. J., Carr, D. A., & Ismail, A. (2017). Activation of air and concrete in medical isotope production facilities. *AIP Conference Proceedings: Vol. 1845*. DOI: [10.1063/1.4983537](https://doi.org/10.1063/1.4983537).

17. Krot, V. O., Tugai, O. V., Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., Chizh, G. V., & Vabishchevich, S. A. (2018). Obrashchenie s vodnymi radioaktivnymi otkhodami pri proizvodstve radiofarmpreparatov na osnove  $^{18}\text{F}$  [Handling of aqueous radioactive waste in the production of radiopharmaceuticals based on  $^{18}\text{F}$ ]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (4), 128–134.
18. Tylets, P. V., Tugai, O. V., Krot, V. O., Ivanyukovich, A. A., Soroka, S. A., Brinkevich, D. I., ... Chizh, G. V. (2018). Dolgozhivushchie radionuklidy pri proizvodstve [ $^{18}\text{F}$ ]ftorkholina dlya PET-dagnostiki [Long-lived radionuclides in the production of [ $^{18}\text{F}$ ]fluorocholine for PET-diagnosis]. *Izvestiya Natsional'noi akademii nauk Belarusi. Seriya khimicheskikh nauk [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus, Chemical Series]*, 54(3), 359–368. DOI: [10.29235/1561-8331-2018-54-3-359-368](https://doi.org/10.29235/1561-8331-2018-54-3-359-368).
19. Marshall, C., Talboys, M. A., Bukhari, S., & Evans, W. D. (2014). Quantification of the activity of tritium produced during the routine synthesis of  $^{18}\text{F}$  fluorodeoxyglucose for positron emission tomography. *J. Radiological Protection*, 34(2), 435–444. DOI: [10.1088/0952-4746/34/2/435](https://doi.org/10.1088/0952-4746/34/2/435).
20. Mochizuki, S., Ogata, Y., Natano, K., Abe, J., Ito, K., Ito, Y., ... Ishigure, N. (2006). Measurement of the induced radionuclides in production of radiopharmaceuticals for positron emission tomography (PET). *J. Nuclear Science and Technology*, 43(4), 348–353.
21. Kohler, M., Degering, D., Zessin, J., Fuchtnner, F., & Konheiser, J. (2013). Radionuclide impurities in [ $^{18}\text{F}$ ]F- and [ $^{18}\text{F}$ ]FDG for positron emission tomography. *Applied Radiation and Isotopes*, (81), 268–271. DOI: [10.1016/j.apradiso.2013.03.044](https://doi.org/10.1016/j.apradiso.2013.03.044).
22. Wilson, J. S., Avila-Rodriguez, M. A., Johnson, R. R., Zyuzin, A., & McQuarrie, S. A. (2008). Niobium sputtered Havar foil for the high-power production of reactive [ $^{18}\text{F}$ ]fluoride by proton irradiation of [ $^{18}\text{O}$ ]H $_2$ O targets. *Applied Radiation and Isotopes*, (66), 565–570.
23. Marengo, M., Lodi, F., Magi, S., Cicoria, G., Pancaldi, D., & Boschi, S. (2008). Assessment of radionuclidic impurities in 2- [ $^{18}\text{F}$ ]fluoro-2-deoxy-d-glucose [ $^{18}\text{F}$ ]FDG routine production. *Applied Radiation and Isotopes*, 66(3), 295–302.
24. Ferguson, D., Orr, P., Gillanders, J., Corrigan, G., & Marshall, C. (2011). Measurement of long lived radioactive impurities retained in the disposable cassettes on the Tracerlab MX system during the production of [ $^{18}\text{F}$ ]FDG. *Applied Radiation and Isotopes*, 69(10), 1479–1485. DOI: [10.1016/j.apradiso.2011.05.028](https://doi.org/10.1016/j.apradiso.2011.05.028).
25. O'Donnell, R. C., Leon Vintro, I., Duffy, C. J., & Mitchell, P. I. (2004). Measurement of the residual radioactivity induced in the front foil of a target assembly in a modern medical cyclotron. *Applied Radiation and Isotopes*, 60(2–4), 539–542.
26. Dziel, T., Tyminski, Z., Sobczyk, K., Walecka-Mazur, A., & Kozanecki, P. (2016). Radionuclidic purity tests in  $^{18}\text{F}$  radiopharmaceuticals production process. *Applied Radiation and Isotopes*, 109(2), 242–246.
27. Ito, S., Sakane, H., Deji, S., Saze, T., & Nishizawa, K. (2006). Radioactive byproducts in [ $^{18}\text{O}$ ]H $_2$ O used to produce  $^{18}\text{F}$  for [ $^{18}\text{F}$ ]FDG synthesis. *Applied Radiation and Isotopes*, 64(3), 298–305.
28. Vabishchevich, S. A., Vabishchevich, N. V., Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., & Nevzorov, D. I. (2019). Plenki piroliticheskogo grafit, oblučennoho ionami vodoroda N [Films of pyrolytic graphite irradiated with hydrogen ions H $^+$ ]. *Vzaimodeistvie izlucheni s tverdyim telom. [Interaction of radiation with a solid body]* (43–45). Minsk: Publ. BSU. (In Russ., abstr. in Engl.).
29. Guarino, P., Rizzo, S., Tomarchio, E., & Greco, D. (2007). Gamma-ray spectrometric characterization of waste activated target components in a PET cyclotron. *Cyclotrons and Their Applications–2007* (295–297). Giardini Naxos, Italy.
30. Palmieri, V., Azzolini, O., Bempozad, E., De Felicis, D., Johnson, R.R., Renzelli, M., & Sciarova, H. (2019). Influence of the microstructure on the diffusion barrier performance of Nb-based coatings for cyclotron targets. *J. Vacuum Science & Technology*, 37(5). DOI: [10.1116/1.5098168](https://doi.org/10.1116/1.5098168).
31. Chávez, J. C., Vargas, M. J., & Sánchez R. (2016). Measurement of activation products generated in the [ $^{18}\text{F}$ ]FDG production by a 9.6 MeV cyclotron. *Radiation Physics and Chemistry*, (126), 32–36. – DOI: [10.1016/j.radphyschem.2016.05.006](https://doi.org/10.1016/j.radphyschem.2016.05.006).
32. Metzger, R. L., Lasche, G. P., Eckerman, K. F., & Leggett R. W. (2018). Long-lived contaminants in cyclotron-produced radiopharmaceuticals: measurement and dosimetry. *J. Radioanalytical and Nuclear Chemistry*, (318), 7–10. DOI: [10.1007/s10967-018-5970-6](https://doi.org/10.1007/s10967-018-5970-6).
33. Makarov, S. P., Pik-Pichak, G. A., Rodionov, Yu. F., Khmyzov, V. V., & Yashin, Yu. A. (1991). Sechenie reaktsii  $^{54}\text{Fe}(n,\alpha)^{51}\text{Cr}$  na teplovykh neitronakh [Cross section of the reaction  $^{54}\text{Fe}(n,\alpha)^{51}\text{Cr}$  on thermal neutrons]. *Atomnaya energiya [Atomic Energy]*, 70(3), 194–106. (In Russ., abstr. in Engl.).
34. Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., Baranovskii, O. A., Chizh, G. V., & Ivanyukovich, A. A. (2018). Dolgozhivushchie radionuklidy v proizvodstve 2- [ $^{18}\text{F}$ ]ftordezoksiglyukozy [Long-lived radionuclides in the production of 2- [ $^{18}\text{F}$ ]fluorodeoxyglucose.]. *Meditsinskaya fizika [Medical physics]*, 1(77), 80–88.
35. Alloni, D., Prata, M., & Smilgys B. (2019). Experimental and Monte Carlo characterization of radionuclidic impurities originated from proton irradiation of [ $^{18}\text{O}$ ]H $_2$ O in a modern medical cyclotron. *Applied Radiation and Isotopes*, (146), 84–89. DOI: [10.1016/j.apradiso.2019.01.026](https://doi.org/10.1016/j.apradiso.2019.01.026).
36. Didyk, A. Yu., Latyshev, S. V., Semina, V. K., Stepanov, A.E., Suvorov, A. L., Fedotov, A. S., & Cheblukov, Yu. N. (2000). Issledovanie vozdeistviya ionov kripton s energiei 305 MeV na vysokoorientirovanniy piroliticheskii grafit [Investigation of the effect of krypton ions with an energy of 305 MeV on highly oriented pyrolytic graphite.]. *Pis'ma v Zhurnal tekhnicheskoi fiziki [Technical Physics Letters]*, 26(17), 1–5. (In Russ., abstr. in Engl.).
37. Aygun, M., Cesur, A., Dogru, M., Boztosun, I., Dapo, H., Kanarya, M., ... Karatepe, S. (2016). Using a clinical linac to determine the energy levels of  $^{92\text{m}}\text{Nb}$  via the photonuclear reaction. *Applied Radiation and Isotopes*, 115(1), 97–99.
38. Gillis, J. M., Najim, N., & Zweit, J. (2006). Analysis of metal radioisotope impurities generated in [ $^{18}\text{O}$ ]H $_2$ O during the cyclotron production of fluorine-18. *Applied Radiation and Isotopes*, 64(3), 431–434.
39. Ivanyukovich, A. A., Soroka, S. A., Krot, V. O., Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., Chizh, G. V., & Sverdlov, R. L. (2018). Ochistka [ $^{18}\text{F}$ ]ftorida ot dolgozhivushchikh radionuklidov pri proizvodstve [ $^{18}\text{F}$ ]ftordezoksiglyukozy [Purification

- of [ $^{18}\text{F}$ ]fluoride from long-lived radionuclides in the production of [ $^{18}\text{F}$ ]fluorodeoxyglucose]. *Meditsinskaya fizika [Medical Physics]*, 4(80), 59–65. (In Russ., abstr. in Engl.).
40. Ivanov, S. N., Porollo, S. I., & Dvoryashin, A. M. (2006). Vliyanie vysokodoznogo neutronnogo oblucheniya na sklonost' k mezhkristallitnoi korrozii austenitnoi nerzhaveyushchei stali 12X18H9T. *Voprosy atomnoi nauki i tekhniki. Ser. Materialovedenie i novye materialy*, (2), 222–228. (In Russ.).

Поступила 17.03.2022

#### ACCUMULATION OF RADIONUCLIDES IN REPLACEABLE PARTS AND WATER TARGET CYCLOTRON

A. KIYKO, S. VABISHCHEVICH, N. VABISHCHEVICH, D. BRINKEVICH

*The accumulation of unwanted long-lived radionuclides during the production of  $^{18}\text{F}$ -based radiopharmaceuticals using the IBA Cyclone 18/9 HC cyclotron is considered. Using high-resolution gamma-ray spectrometry with HPGe detectors, the identification of radionuclides and the assessment of activity in activated components (stripper, target entrance window) of the "medical" 18-MeV cyclotron IBA Cyclone 18/9 were carried out. More than 20 unwanted radionuclides have been identified in irradiated water. Various mechanisms for the entry of long-lived radionuclides into irradiated water are described. The results obtained are of great importance for optimizing the methods of radioactive waste management in the production of radiopharmaceuticals and, as a result, minimizing the radiation exposure of personnel.*

**Keywords:** radiopharmaceuticals, radionuclides, cyclotron,  $^{18}\text{O}$  enriched water, proton irradiation.

УДК 621.371: 550.837.6

DOI 10.52928/2070-1624-2022-38-4-81-91

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА И ОКОНТУРИВАНИЯ УГЛЕВОДОРОДНЫХ ЗАЛЕЖЕЙ

канд. техн. наук, доц. В. Ф. ЯНУШКЕВИЧ, С. П. АЛИЕВА, С. В. КАЛИНЦЕВ  
(Полоцкий государственный университет)

V. Yanushkevich ORCID <https://orcid.org/0000-0002-1433-8817>;

S. Alieva ORCID <https://orcid.org/0000-0003-4804-7484>;

S. Kalintsev ORCID <https://orcid.org/0000-0001-8414-2468>

*Проведено исследование характеристик анизотропной среды над углеводородами при комплексном использовании электромагнитных методов георазведки. Выполнено моделирование компонентов тензоров диэлектрической проницаемости в режиме амплитудно-модулированных, частотно-модулированных, амплитудно-частотно-модулированных и радиоимпульсных сигналов. Установлены частоты электронного плазменного и электронного циклотронного резонансов для указанных режимов. Проведено исследование влияния режимов зондирующих сигналов на характеристики анизотропной среды над залежами и компоненты тензора диэлектрической проницаемости. Проанализировано влияние вариации концентраций частиц на вещественные составляющие компонентов диэлектрической проницаемости анизотропной среды над углеводородными залежами (УВЗ). Даны рекомендации по совершенствованию методов электроразведки и применению их для поисковой геофизики.*

**Ключевые слова:** электромагнитные методы, углеводородная залежь, тензор диэлектрической проницаемости.

**Введение.** Актуальность рассматриваемых в настоящей работе задач заключается в активном усовершенствовании имеющихся и разработке новых эффективных электромагнитных методов (ЭММ) и технологий поиска и оконтуривания углеводородов [1; 2]. Выбор ЭММ и методики проведения экспериментальных испытаний основывается на анализе электрохимических и электрофизических процессов в образующихся над УВЗ анизотропных средах и нахождении откликов на воздействие зондирующих сигналов [3]. Активное внедрение различных методов и аппаратуры для поиска скоплений нефти и газа (углеводородов) основано на решении данных задач с высокими техническими характеристиками [4] за счет проявления широкого спектра аномальных эффектов. Отработанные методики комплексного использования магнитотеллурики с интеграцией сейсмических и гравиметрических данных активно применялись на севере Германии для изображения соляного купола [5]. Комплексное использование методов поиска при освоении углеводородных ресурсов на морских территориях является одним из направлений современных высокоэффективных технологий георазведки [6].

Исследования содействуют дальнейшему развитию этого направления путем модернизации имеющихся ЭММ с повышением их эффективности [7]. Радиоволновые методы поиска УВЗ используются для проведения геологоразведочных работ в поисковой геофизике [8]. Тенденции развития поисковой геофизики направлены на решение задач внедрения методов с высоким уровнем точности и достоверности обнаружения месторождений УВЗ с использованием системных подходов при реализации аппаратуры [9]. Методы электромагнитного импульсного сверхширокополосного зондирования улучшают чувствительность и информативность методов поиска и выделения месторождений углеводородов наряду с возможностью их использования в сложной геологической обстановке [10]. Активное внедрение различных методов и аппаратуры для поиска углеводородов основано на исследовании взаимодействия [11] окружающей среды и кристаллического скелета, образованного над УВЗ и пронизанного электролитом и проводящими включениями за счет минералов с электронной проводимостью. Применение сейсмических методов активно используется для дифференциации исследуемых сред по определению характеристик поверхностного анизотропного слоя в зависимости от глубины расположения над УВЗ [12]. Современные возможности науки и техники определяются расширением зависимостей параметров среды над УВЗ от режимов воздействующих сигналов [13] и использованием дистанционных технологий поиска полезных ископаемых при освоении углеводородных ресурсов на значительных площадях [14]. Большой опыт практического применения морских методов и экспериментальных испытаний может быть применен в поисковой геофизике [15]. Применение квазигидродинамического подхода для изучения откликов подстилающей поверхности над УВЗ приводит к улучшению точности выделения границ и уровня идентификации месторождений углеводородов [16] с помощью радиокомплексирования ЭММ георазведки, где применяется аналогия исследуемой среды над залежью нефти и газа с плазмоподобным образованием.

Использование амплитудно-модулированных, амплитудно-частотно-модулированных сигналов с регистрацией амплитудных и фазовых компонент поверхностного импеданса геологического участка местности возможно при поиске, оконтуривании залежей нефти и газа [17–19].

**Электромагнитные методы поиска и оконтуривания углеводородов.** Цель данной работы заключается в установлении дополнительных закономерностей физико-химических процессов в анизотропных средах над УВЗ по сравнению с результатами, полученными в [16], приводящих к разработке и совершенствованию ЭММ поиска и идентификации углеводородов на основе применения модулированных и радиоимпульсных сигналов.

Рассмотрим воздействие на анизотропную среду над углеводородами радиосигнала тональной амплитудной модуляции (АМ) вида

$$e(t) = E(1 + k_m \cos \Omega t) \cos \omega t,$$

где  $E$  – амплитуда несущего колебания;

$k_m$  – коэффициент амплитудной модуляции;

$\Omega = 2\pi F$ ,  $\omega = 2\pi f$  соответственно модулирующая и несущая частоты.

Компоненты тензора диэлектрической проницаемости для двухчастичного потока определяются следующим образом [16]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_1 = \epsilon_r + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Pi i}^2}{\omega} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2 - v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 v_i^2} + j \left[ \frac{\epsilon_r k_m \Omega \sin \Omega t}{\omega(1 + k_m \cos \Omega t)} - \frac{\sigma_r}{\omega \epsilon_0} - \frac{\omega_{\Pi i}^2 v_i}{\omega (v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 v_i^2} \right] \right\}, \\ \dot{\epsilon}_2 = \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Pi i}^2 \omega_{\Gamma i}}{\omega} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2 + v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 v_i^2} - \frac{2j v_i \omega_{\Pi i} \omega_{\Gamma i}}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 v_i^2} \right\}, \\ \dot{\epsilon}_3 = \epsilon_r + \sum_{i=1}^2 \left\{ \omega_{\Pi i}^2 \frac{1}{v_i^2 + \omega^2} + j \left[ \frac{\epsilon_r k_m \Omega \sin \Omega t}{\omega(1 + k_m \cos \Omega t)} - \frac{\sigma_r}{\omega \epsilon_0} - \frac{\omega_{\Pi i}^2 v_i}{\omega} \frac{1}{\omega^2 + v_i^2} \right] \right\}, \end{array} \right.$$

где  $\dot{\epsilon}_1$ ,  $\dot{\epsilon}_2$ ,  $\dot{\epsilon}_3$  – компоненты тензора диэлектрической проницаемости среды над УВЗ;

$\omega_{\Pi i}$  – плазменная частота;

$\omega_{\Gamma i}$  – гиротропная частота;

$v_i$  – частота столкновения частиц;

$\epsilon_r$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды;

$\sigma_r$  – проводимость среды;

$\epsilon_0$  – диэлектрическая постоянная.

Процесс распространения радиосигнала частотной модуляции (ЧМ) над средой с наличием углеводородов, определяющей электродинамический отклик, имеет интерес с точки зрения анализа взаимодействия электромагнитных волн (ЭМВ) с анизотропными средами и может быть представлен выражением

$$e(t) = E_2 \cos(\omega_2 t + \beta \sin \omega_1 t),$$

где  $E_2$  и  $\omega_2$  – соответственно амплитуда и частота несущего колебания;

$\omega_1$  – модулирующая частота;

$\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_1}$  – индекс модуляции;

$\Delta\omega$  – девиация частоты.

Режим ЧМ-сигнала для зондирования анизотропных сред может быть применен как в режиме узкополосных, так и широкополосных сигналов, что существенно повышает возможности совершенствования имеющихся и разработки новых эффективных ЭММ георазведки. Введем следующие обозначения:

$$\tilde{\omega}_3 = \omega_2 [1 + \beta \cdot k_\omega \cos \omega_1 t]$$

$$k_{\omega} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Компоненты тензора для двухчастичного потока представлены формулами [16]

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \epsilon_r (1 + \beta \cdot k_{\omega} \cos \omega_1 t) + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Pi i}^2 \tilde{\omega}_3}{\omega_2} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_3^2 - v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_3^2)^2 + 4\tilde{\omega}_3^2 v_i^2} - j \left[ \frac{\sigma_r}{\omega_2 \epsilon_0} + \frac{\omega_{\Pi i}^2 v_i}{\omega_2 (v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_3^2)^2 + 4\tilde{\omega}_3^2 v_i^2} \right] \right\}, \\ \dot{\epsilon}_2 &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Pi i}^2 \omega_{\Gamma i}}{\omega_2} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_3^2 + v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_3^2)^2 + 4\tilde{\omega}_3^2 v_i^2} - \frac{2j \tilde{\omega}_3 v_i \omega_{\Pi i}^2 \omega_{\Gamma i}}{[(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_3^2)^2 + 4\tilde{\omega}_3^2 v_i^2] \omega_2} \right\}, \\ \dot{\epsilon}_3 &= \epsilon_r (1 + \beta \cdot k_{\omega} \cos \omega_1 t) + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Pi i}^2 \tilde{\omega}_3}{\omega_2} \frac{1}{v_i^2 + \tilde{\omega}_3^2} - j \left[ \frac{\sigma_r}{\omega_2 \epsilon_0} + \frac{\omega_{\Pi i}^2 v_i}{\omega_2} \frac{1}{\tilde{\omega}_3^2 + v_i^2} \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

При одночастотной гармонической модуляции амплитуды и частоты радиосигнал имеет вид

$$e(t) = E_{\omega} (1 + k_m \cos \Omega t) \cos[\omega t + \beta \cdot \cos \Omega t],$$

где  $E_{\omega}$  – амплитуда сигнала несущей частоты  $\omega$ ;

$k_m, \beta$  – соответственно коэффициент амплитудной модуляции и индекс частотной модуляции.

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \epsilon_r (1 - k_m^2 \sin \Omega \cdot t) + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Pi i}^2 \tilde{\omega}_4}{\omega} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2 - v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2} + j \left[ \frac{\epsilon_r \beta \cdot k_m \sin \Omega \cdot t}{1 + \beta \cdot \cos \Omega \cdot t} - \frac{\sigma_r}{\omega \epsilon_0} - \frac{\omega_{\Pi i}^2 v_i}{\omega (v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2} \right] \right\}, \\ \dot{\epsilon}_2 &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Pi i}^2 \omega_{\Gamma i}}{\omega} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2 + v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2} - \frac{2j \tilde{\omega}_4 v_i \omega_{\Pi i}^2 \omega_{\Gamma i}}{\omega [(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2]} \right\}, \\ \dot{\epsilon}_3 &= \epsilon_r (1 - k_m^2 \sin \Omega \cdot t) + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Pi i}^2 \tilde{\omega}_4}{\omega} \frac{1}{v_i^2 + \tilde{\omega}_4^2} + j \left[ \frac{\epsilon_r \beta \cdot k_m \sin \Omega \cdot t}{1 + \beta \cdot \cos \Omega \cdot t} - \frac{\sigma_r}{\omega \epsilon_0} - \frac{\omega_{\Pi i}^2 v_i}{\omega} \frac{1}{\tilde{\omega}_4^2 + v_i^2} \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

где

$$\tilde{\omega}_4 = \omega [1 - k_m^2 \sin \Omega t].$$

Рассмотрим воздействие ЭМВ на УВЗ радиоимпульсным сигналом вида

$$A(f) = \frac{U \cdot \tau}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(2 \cdot \pi \cdot f - 2 \cdot \pi \cdot F_2) \cdot \tau}{2}}{(2 \cdot \pi \cdot f - 2 \cdot \pi \cdot F_2) \cdot \tau} + \frac{\sin \frac{(2 \cdot \pi \cdot f + 2 \cdot \pi \cdot F_2) \cdot \tau}{2}}{(2 \cdot \pi \cdot f + 2 \cdot \pi \cdot F_2) \cdot \tau},$$

где  $\frac{U \cdot \tau}{2} = 1$  – амплитуда радиоимпульса (для удобства исследований введена нормировка);

$f$  – частота сигнала;

$F_2$  – частота несущего сигнала;

$\tau$  – длительность импульса.

Компоненты тензора диэлектрической проницаемости для такого режима взаимодействия имеют следующий вид [20]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_1 = \epsilon_r \cdot F \left(1 + \frac{n\Omega_1}{\omega}\right) + \sum_{i=1}^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{F \cdot \omega_{ni}^2}{\omega} \cdot \frac{(\omega + n\Omega_1) \cdot [\omega_{\Gamma i}^2 - (\omega + n\Omega_1)^2 - v_i^2]}{[v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - (\omega + n\Omega_1)^2]^2 + 4(\omega + n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} - \\ -jF \left[ \frac{\omega_{ni}^2}{\omega} \cdot v_i \cdot \frac{(\omega + n\Omega_1)^2 + v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2}{[v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - (\omega + n\Omega_1)^2]^2 + 4(\omega + n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} + \frac{\delta_r F}{\omega \epsilon_0} \right] \end{array} \right\}, \\ \dot{\epsilon}_2 = \sum_{i=1}^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega_{ni}^2}{\omega} \cdot F \cdot \omega_{\Gamma i} \cdot \frac{v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - (\omega + n\Omega_1)^2}{[v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - (\omega + n\Omega_1)^2]^2 + 4(\omega + n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} - \\ -2j \frac{\omega_{ni}^2}{\omega} \cdot F \cdot \omega_{\Gamma i} \cdot v_i \cdot \frac{\omega + n\Omega_1}{[v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - (\omega + n\Omega_1)^2]^2 + 4(\omega + n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} \end{array} \right\}, \\ \dot{\epsilon}_3 = \sum_{i=1}^2 \left\{ F \left(1 + \frac{n\Omega_1}{\omega}\right) \cdot \left[ \epsilon_r - \frac{\omega_{ni}^2}{\omega} \cdot \frac{1}{(\omega + n\Omega_1)^2 + v_i^2} \right] - j \left[ \frac{\omega_{ni}^2}{\omega} \cdot F \cdot v_i \cdot \frac{1}{(\omega + n\Omega_1)^2 + v_i^2} + \frac{\delta_r F}{\omega \epsilon_0} \right] \right\}, \end{array} \right.$$

где  $\Omega_1$  – круговая частота следования импульсов;

$n$  – количество гармоник спектра радиоимпульсного сигнала;

$$F = \frac{\tau}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi \cdot n \cdot F_1 \cdot \tau)}{\pi \cdot n \cdot F_1 \cdot \tau},$$

где  $T$  – период;

$F_1$  – частота следования импульсов.

Представляет интерес анализ частотных характеристик комбинационных составляющих:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_R = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 = \text{Re} \dot{\epsilon}_R + j \text{Im} \dot{\epsilon}_R, \\ \dot{\epsilon}_L = \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2 = \text{Re} \dot{\epsilon}_L + j \text{Im} \dot{\epsilon}_L. \end{array} \right\} (1)$$

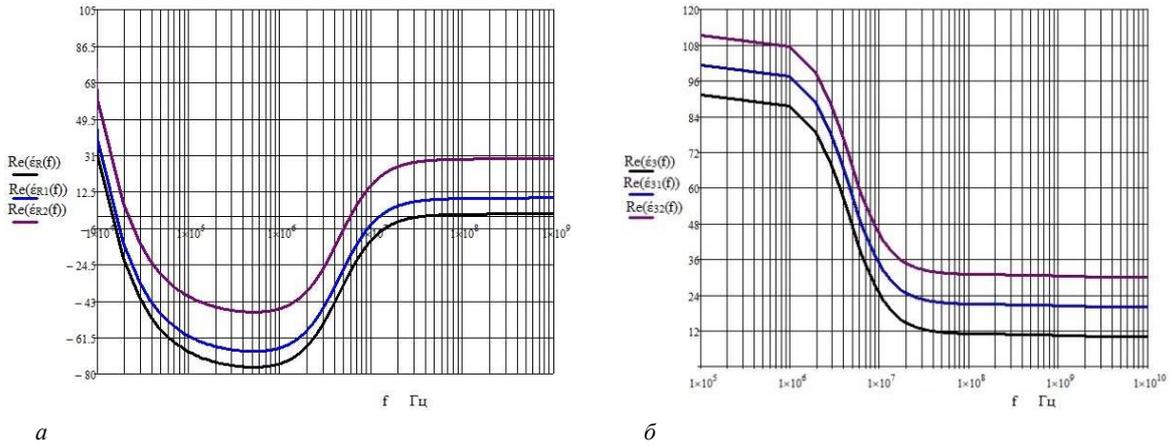
Проведено моделирование для параметров среды над залежами углеводородов [1]: значения диэлектрической проницаемости вмещающих пород  $\epsilon_r = 1 - 30$  и электрической проводимости  $\sigma_r = 1 \cdot 10^{-3}$  См/м; частота столкновения частиц  $\nu = 2 \cdot \pi \cdot 10^9$  рад/с, концентрации частиц  $N_e = N_n = (10^{16} - 10^{18}) \text{ м}^{-3}$ .

Проведено исследование влияния режимов зондирующих сигналов на характеристики анизотропной среды над залежами с учетом геомагнитной аномалии, физико-химической обстановки над УВЗ и изменения компонентов тензора диэлектрической проницаемости.

**Результаты исследований.** Проведен анализ выражений (1) для компонентов тензора диэлектрической проницаемости среды над УВЗ в режиме АМ-сигнала. Зависимости вещественной составляющей компонент ЭМВ от частоты приведены на рисунке 1 ( $a$  – действительная часть суммарной компоненты;  $b$  – действительная часть компоненты  $\dot{\epsilon}_3$ ). При моделировании выбирались следующие концентрации частиц:  $N_e = N_1 = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ ,  $N_n = N_2 = 10^{18} \text{ м}^{-3}$ . Как видно из рисунка, вещественная составляющая ЭМВ с правой поляризацией имеет точки перехода через нуль на частотах  $f_{2П}$ , соответствующих электронному плазменному резонансу. Частота электронного плазменного резонанса лежит в пределах (5–15) МГц, причем с ростом диэлектрической проницаемости она уменьшается. Частота электронного циклотронного резонанса (значение точки перехода через нуль слева по оси абсцисс) лежит в пределах (15 – 25) кГц, причем с ростом диэлектрической проницаемости она увеличивается. В целом представляет интерес диапазон (15 кГц – 15МГц), когда рассматриваемая компонента отрицательна. После прохождения значения частоты 200 МГц вещественная компонента практически стабильна при всех значениях несущей

частоты. Следует отметить, что поведение данной характеристики зависит от соотношения концентрации частиц, в зависимости от этого частота электронного плазменного резонанса может смещаться в диапазон (100 МГц – 3 ГГц) и выше.

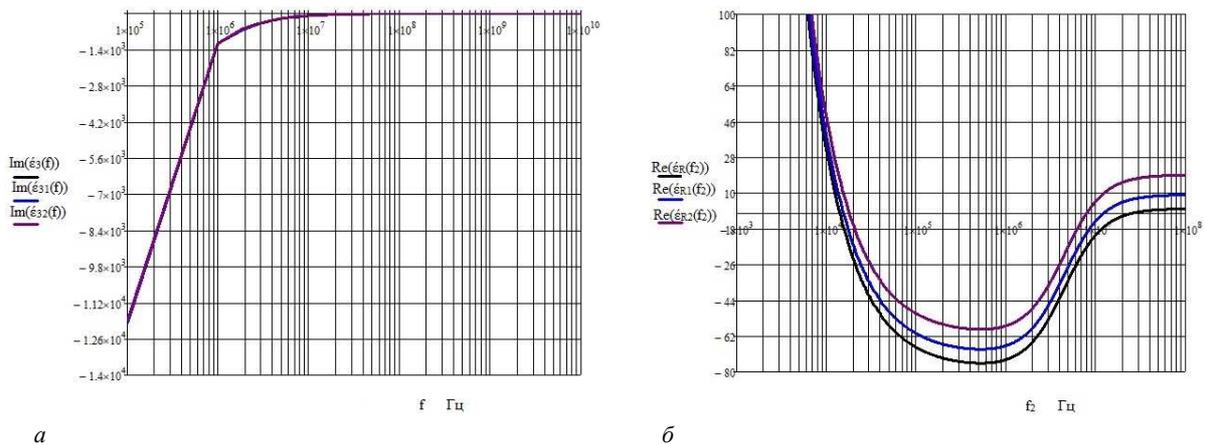
Как видно из рисунка 1, вещественная составляющая компоненты  $\epsilon_3$  при частоте несущего колебания  $f = (1 \cdot 10^6 - 30 \cdot 10^7)$  Гц скачкообразно уменьшается. В низкочастотном диапазоне характеристики уменьшаются незначительно. Большим значениям диэлектрической проницаемости анизотропной среды соответствуют большие значения вещественных составляющих компоненты тензора диэлектрической проницаемости анизотропной среды над УВЗ  $\epsilon_3$ . В остальном диапазоне частот характеристики практически постоянны.



*a* –  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_R(f))$  – для  $F = 10^4$  Гц,  $\epsilon_r = 2$ ;  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{R1}(f))$  – для  $F = 10^4$  Гц,  $\epsilon_r = 10$ ;  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{R2}(f))$  – для  $F = 10^4$  Гц,  $\epsilon_r = 30$ ;  
*б* –  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_3(f))$  – для  $\Omega = 10^6$  рад/с,  $\epsilon_r = 10$ ,  $k_m = 0,5$ ;  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{31}(f))$  – для  $\Omega = 10^6$  рад/с,  $\epsilon_r = 20$ ,  $k_m = 0$ ;  
 $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{32}(f))$  – для  $\Omega = 10^6$  рад/с,  $\epsilon_r = 30$ ,  $k_m = 1$

**Рисунок 1. – Зависимости вещественной составляющей диэлектрической проницаемости от частоты  $f$  в режиме АМ-сигнала для  $N_1 = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ ,  $N_2 = 10^{18} \text{ м}^{-3}$**

Зависимости мнимой составляющей  $\epsilon_3$  и вещественной составляющей диэлектрической проницаемости ЭМВ с правой поляризацией от частоты приведены на рисунке 2 (*a* – режим АМ-сигнала, *б* – режим ЧМ-сигнала).

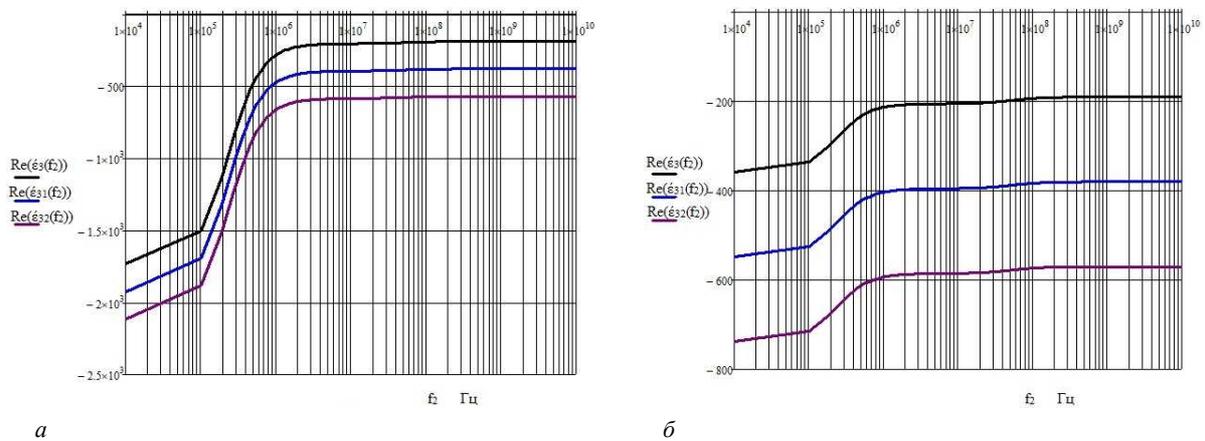


*a* –  $\text{Im}(\dot{\epsilon}_3(f))$  – для  $\Omega = 10^6$  рад/с,  $\epsilon_r = 10$ ,  $k_m = 0,5$ ;  $\text{Im}(\dot{\epsilon}_{31}(f))$  – для  $\Omega = 10^6$  рад/с,  $\epsilon_r = 20$ ,  $k_m = 0$ ;  
 $\text{Im}(\dot{\epsilon}_{32}(f))$  – для  $\Omega = 10^6$  рад/с,  $\epsilon_r = 30$ ,  $k_m = 1$ ;  
*б* –  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_R(f_2))$  – для  $\beta = 1$ ,  $\epsilon_r = 3$ ;  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{R1}(f_2))$  – для  $\beta = 1$ ,  $\epsilon_r = 10$ ;  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{R2}(f_2))$  – для  $\beta = 1$ ,  $\epsilon_r = 20$

**Рисунок 2. – Зависимости компонент тензора диэлектрической проницаемости от частоты для  $N_1 = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ ,  $N_2 = 10^{18} \text{ м}^{-3}$**

Мнимая составляющая  $\dot{\epsilon}_3$  увеличивается на отрезке частот  $f = (1 \cdot 10^5 - 1 \cdot 10^6)$  Гц с большим значением крутизны характеристики, в диапазоне частот  $f = (1 \cdot 10^6 - 1 \cdot 10^7)$  Гц характерно более плавное изменение данной компоненты и на оставшемся отрезке частот характеристика постоянна. Следует отметить, что вариация диэлектрической проницаемости среды над УВЗ не приводит к изменениям мнимой составляющей. Проведен анализ выражений (1) для компонент тензора диэлектрической проницаемости среды над УВЗ в режиме ЧМ-сигнала. Как видно из рисунка, вещественная составляющая ЭМВ с правой поляризацией имеет частоты электронного плазменного резонанса в пределах (8 – 20) МГц, причем с ростом диэлектрической проницаемости она уменьшается. Частота электронного циклотронного резонанса лежит в пределах (15 – 20) кГц, причем с ростом диэлектрической проницаемости она увеличивается. В целом представляет интерес диапазон (15 кГц – 8 МГц), когда рассматриваемая компонента отрицательна. После прохождения значения частоты 50 МГц вещественная компонента практически стабильна при всех значениях несущей частоты.

Проведено моделирование зависимостей вещественной составляющей диэлектрической проницаемости от частоты в режиме ЧМ-сигнала (рисунок 3).



*a* –  $N_1 = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ ,  $N_2 = 10^{18} \text{ м}^{-3}$ :  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_3(f_2))$  – для  $\beta = 5$ ,  $\epsilon_r = 10$ ;  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{31}(f_2))$  – для  $\beta = 5$ ,  $\epsilon_r = 20$ ;  
 $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{32}(f_2))$  – для  $\beta = 5$ ,  $\epsilon_r = 30$ ;

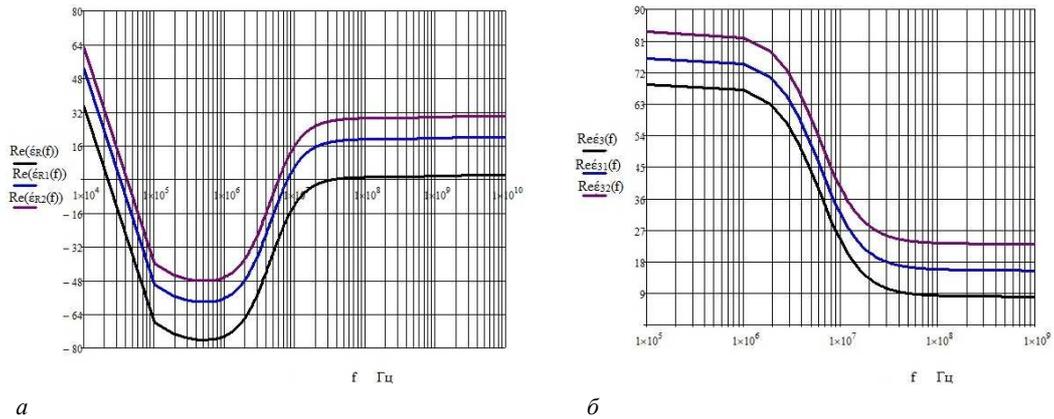
*б* –  $N_1 = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ ,  $N_2 = 10^{17} \text{ м}^{-3}$ :  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_3(f_2))$  – для  $\beta = 5$ ,  $\epsilon_r = 10$ ;  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{31}(f_2))$  – для  $\beta = 5$ ,  $\epsilon_r = 20$ ;  
 $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{32}(f_2))$  – для  $\beta = 5$ ,  $\epsilon_r = 30$

**Рисунок 3. – Зависимости вещественной составляющей диэлектрической проницаемости от частоты в режиме ЧМ-сигнала**

В данном режиме на вещественные составляющие компонент диэлектрической проницаемости анизотропной среды над УВЗ существенно влияет вариация концентраций частиц. Установлено, что характер их поведения при концентрациях частиц  $N_1 = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ ,  $N_2 = 10^{18} \text{ м}^{-3}$  скачкообразно меняется для высокочастотной составляющей  $f_2 = (1 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^6)$  Гц. Для низкочастотной составляющей  $f_2 = (1 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^5)$  Гц характерно незначительное увеличение значения вещественной составляющей диэлектрической проницаемости  $\dot{\epsilon}_3$ . В остальном диапазоне частот характеристики постоянны. Большим значениям диэлектрической проницаемости анизотропной среды соответствуют меньшие значения вещественных составляющих компоненты тензора диэлектрической проницаемости анизотропной среды над углеводородами. При концентрациях частиц  $N_1 = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ ,  $N_2 = 10^{17} \text{ м}^{-3}$  анализируемые характеристики скачкообразно увеличиваются с меньшим диапазоном изменения при высокочастотной составляющей  $f_2 = (1 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^6)$  Гц. В остальном диапазоне частот характеристики практически постоянны. Большие значения вещественных составляющих компоненты тензора диэлектрической проницаемости анизотропной среды над УВЗ соответствуют меньшим значениям диэлектрической проницаемости анизотропной среды.

Проведен анализ выражений (1) для компонент тензора диэлектрической проницаемости среды над УВЗ в режиме АЧМ-сигнала. Зависимости вещественной составляющей компонент ЭМВ от частоты приведены на рисунке 4 (*a* – действительная часть суммарной компоненты; *б* – действительная часть компоненты  $\dot{\epsilon}_3$ ).

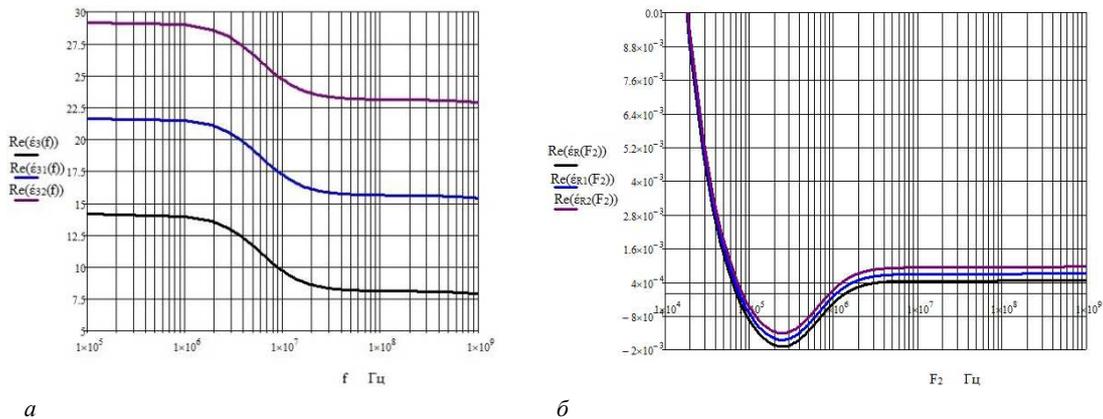
Как видно из рисунка, вещественная составляющая ЭМВ с правой поляризацией имеет частоты электронного плазменного резонанса в пределах (6 – 30) МГц, причем с ростом диэлектрической проницаемости она уменьшается. Частота электронного циклотронного резонанса лежит в пределах (20 – 40) кГц, причем с ростом диэлектрической проницаемости она увеличивается. В целом представляет интерес диапазон (20 кГц – 30 МГц), когда рассматриваемая компонента отрицательна. После прохождения значения частоты 100 МГц вещественная компонента практически стабильна при всех значениях несущей частоты. Установлено, что вещественная составляющая компоненты  $\dot{\epsilon}_3$  скачкообразно уменьшается при частоте несущего колебания  $f = (1 \cdot 10^6 - 50 \cdot 10^7)$  Гц. В низкочастотном диапазоне характеристики уменьшаются незначительно. В остальном диапазоне частот характеристики практически постоянны. Большие значения диэлектрической проницаемости анизотропной среды над УВЗ приводят к росту вещественных составляющих компоненты тензора диэлектрической проницаемости  $\dot{\epsilon}_3$ .



*a* –  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_R(f))$  – для  $\Omega = 10^5$  рад/с,  $\epsilon_r = 2$ ,  $k_m = 0,1$ ,  $\beta = 5$ ;  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{R1}(f))$  – для  $\Omega = 10^5$  рад/с,  $\epsilon_r = 20$ ,  $k_m = 0,1$ ,  $\beta = 5$ ;  
 $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{R2}(f))$  – для  $\Omega = 10^5$  рад/с,  $\epsilon_r = 30$ ,  $k_m = 0,1$ ,  $\beta = 5$ ;  
*б* –  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_3(f))$  – для  $\Omega = 10^5$  рад/с,  $\epsilon_r = 10$ ,  $k_m = 0,1$ ,  $\beta = 5$ ;  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{31}(f))$  – для  $\Omega = 10^5$  рад/с,  $\epsilon_r = 20$ ,  $k_m = 0,1$ ,  $\beta = 5$ ;  
 $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{32}(f))$  – для  $\Omega = 10^5$  рад/с,  $\epsilon_r = 30$ ,  $k_m = 0,1$ ,  $\beta = 5$

**Рисунок 4. – Зависимости вещественной составляющей диэлектрической проницаемости от частоты  $f$  в режиме АЧМ-сигнала для  $N_1 = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ ,  $N_2 = 10^{18} \text{ м}^{-3}$**

Проведено моделирование зависимостей компонент тензора диэлектрической проницаемости от частоты, которые представлены на рисунке 5 (*a* – режим АЧМ-сигнала, *б* – режим радиоимпульсного сигнала).



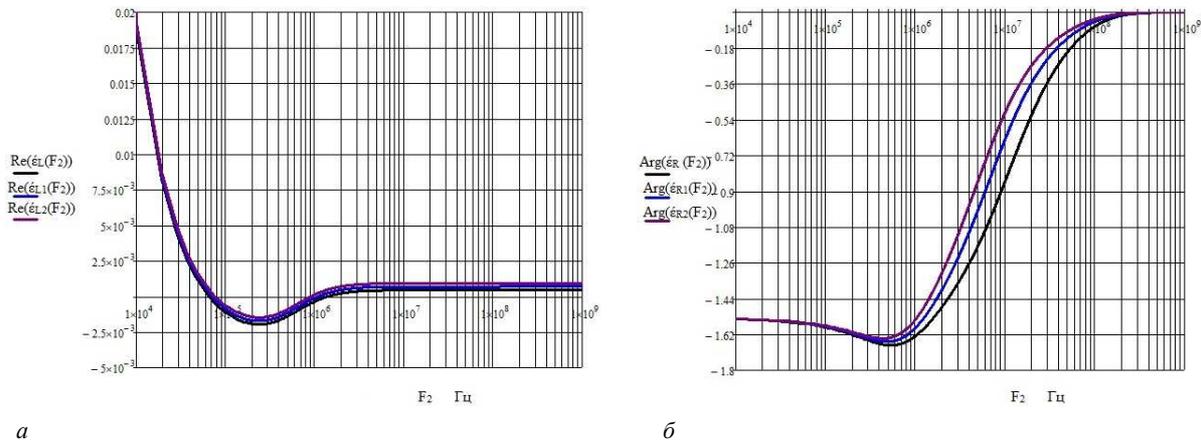
*a* –  $N_1 = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ ,  $N_2 = 10^{17} \text{ м}^{-3}$ :  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_3(f))$  – для  $\Omega = 10^5$  рад/с,  $\epsilon_r = 10$ ,  $k_m = 0,1$ ,  $\beta = 5$ ;  
 $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{31}(f))$  – для  $\Omega = 10^5$  рад/с,  $\epsilon_r = 20$ ,  $k_m = 0,1$ ,  $\beta = 5$ ;  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{32}(f))$  – для  $\Omega = 10^5$  рад/с,  $\epsilon_r = 30$ ,  $k_m = 0,1$ ,  $\beta = 5$ ;  
*б* –  $N_1 = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ ,  $N_2 = 10^{18} \text{ м}^{-3}$ :  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_R(F_2))$  – для  $\epsilon_r = 10$ ;  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{R1}(F_2))$  – для  $\epsilon_r = 15$ ;  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{R2}(F_2))$  – для  $\epsilon_r = 20$

**Рисунок 5. – Зависимости компонент тензора диэлектрической проницаемости от частоты**

При концентрациях частиц  $N_1 = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ ,  $N_2 = 10^{17} \text{ м}^{-3}$  анализируемые характеристики скачкообразно уменьшаются с меньшим диапазоном изменения при высокочастотной составляющей  $f = (1 \cdot 10^6 - 30 \cdot 10^7) \text{ Гц}$ . В остальном диапазоне частот характеристики практически постоянны. Проведен анализ выражений (1) для компонент тензора диэлектрической проницаемости среды над УВЗ в режиме радиоимпульсного сигнала. Выполнено исследование зависимостей компонент тензора диэлектрической проницаемости от частоты в режиме радиоимпульсного сигнала для  $N_1 = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ ,  $N_2 = 10^{18} \text{ м}^{-3}$ , которые представлены на рисунке 6 ( $a$  – вещественная составляющая для ЭМВ с левой поляризацией,  $b$  – фазовая составляющая для ЭМВ с левой поляризацией). Как видно из рисунка 6, вещественная составляющая ЭМВ с правой поляризацией имеет частоты электронного плазменного резонанса в пределах 800 кГц – 1,5 МГц, причем с ростом диэлектрической проницаемости она уменьшается. Частота электронного циклотронного резонанса лежит в пределах (70 – 90) кГц, причем с ростом диэлектрической проницаемости она увеличивается. В целом представляет интерес диапазон (70 кГц – 1,5 МГц), когда рассматриваемая компонента отрицательна. После прохождения значения частоты 10 МГц вещественная компонента практически стабильна при всех значениях несущей частоты.

Результаты моделирования показывают, что вещественные составляющие для ЭМВ с левой и правой поляризациями отличаются несущественно. Фазовая составляющая для ЭМВ с правой поляризацией (для левой поляризации характеристики совпадают) при частоте несущего колебания  $F_2 = (1 \cdot 10^4 - 1 \cdot 10^6) \text{ Гц}$  имеет незначительные вариации с точкой минимума, на отрезке частот  $F_2 = (1 \cdot 10^8 - 1 \cdot 10^9) \text{ Гц}$  фаза стабильна.

В целом представляет интерес диапазон  $F_2 = (1 \cdot 10^6 - 1 \cdot 10^8) \text{ Гц}$ , когда рассматриваемая компонента подвержена существенному увеличению.



$a$  –  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_L(F_2))$  – для  $\epsilon_r = 10$ ;  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{L1}(F_2))$  – для  $\epsilon_r = 15$ ;  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{L2}(F_2))$  – для  $\epsilon_r = 20$ ;  
 $b$  –  $\text{Arg}(\dot{\epsilon}_R(F_2))$  – для  $\epsilon_r = 10$ ;  $\text{Arg}(\dot{\epsilon}_{R1}(F_2))$  – для  $\epsilon_r = 15$ ;  $\text{Arg}(\dot{\epsilon}_{R2}(F_2))$  – для  $\epsilon_r = 20$

**Рисунок 6. – Зависимости компонент тензора диэлектрической проницаемости от частоты в режиме радиоимпульсного сигнала для  $N_1 = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ ,  $N_2 = 10^{18} \text{ м}^{-3}$**

Для повышения точности и достоверности определения границ УВЗ следует рекомендовать радиокомплексирование указанных выше ЭММ в сочетании с аппаратурой, содержащей цифровые системы навигации и обработки информации, и сверхширокодиапазонное исследование характеристик тестируемых поверхностей при увеличении количества информационных каналов.

**Заключение.** Проведенный анализ ЭММ при распространении ЭМВ в среде над углеводородами показал следующее:

– в режиме АМ-сигнала частота электронного плазменного резонанса лежит в пределах (5 – 15) МГц, частота электронного циклотронного резонанса соответствует значениям (15 – 25) кГц, вещественная составляющая компоненты  $\dot{\epsilon}_3$  при частоте несущего колебания  $f = (1 \cdot 10^6 - 30 \cdot 10^7) \text{ Гц}$  скачкообразно уменьшается;

- в режиме ЧМ-сигнала вещественная составляющая ЭМВ с правой поляризацией имеет частоты электронного плазменного резонанса в пределах (8 – 20) МГц, частота электронного циклотронного резонанса лежит в пределах (15 – 20) кГц;
- в режиме АЧМ-сигнала частоты электронного плазменного резонанса находятся в пределах (6 – 30) МГц, частота электронного циклотронного резонанса лежит в пределах (20 – 40) кГц;
- в режиме радиоимпульсного сигнала вещественная составляющая ЭМВ с правой поляризацией имеет частоты электронного плазменного резонанса в пределах 800 кГц – 1,5 МГц, частота электронного циклотронного резонанса лежит в пределах (70 – 90) кГц.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гололобов, Д. В. Взаимодействие электромагнитных волн и углеводородных залежей / Д. В. Гололобов. – Минск : Бестпринт, 2009. – 185 с.
2. Moskvichew, V. N. Interraction of electromagnetic waves (EMW) with anisotropic inclusion in communication line / V. N. Moskvichew // 9<sup>th</sup> Microw. Conf. NICON – 91, Rydzyna, May 20–22, 1991. – Vol. 1. – P. 240–244.
3. Effect of a powerful low-frequency signal on an anisotropic medium over hydrocarbon / V. F. Yanushkevich [et al.] // J. of Physics : Conference Series. – 2021. – Vol. 1889. – DOI: [10.1088/1742-6596/1889/2/022059](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1889/2/022059).
4. Геофизические методы исследования : учеб. пособие для геологических специальностей вузов / В. К. Хмелевской [и др.]. – Петропавловск-Камчатский : КГПУ, 2004. – 227 с.
5. Subsalt imaging in Northern Germany using multi-physics (magnetotellurics, gravity, and seismic) / C. H. Henke [et al.] // Interpretatio. – 2020. – Vol. 8. – № 4. – P. 15–24.
6. Anderson, C. An integrated approach to marine electromagnetic surveying using a towed streamer and source / C. Anderson, J. Mattsson // First Break. – 2010. – Vol. 28, iss. 5. – P. 71–75.
7. Time lapse CSEM reservoir monitoring of the Norne field with vertical dipoles / T. Holten [et al.] // SEG Technical Program Expanded Abstracts. – 2016. – Vol. 35. – P. 971–975.
8. Гололобов, Д. В. Поиски, разведка и мониторинг залежей нефти, газа и угля радиоволновым методом / Д. В. Гололобов, А. А. Кураев, Ю. Н. Стадник // Геологической службе России 300 лет : междунар. геофиз. конф. : тез. докл. / ВИРГ – Рудгеофизика ; А. А. Петров [и др.]. – СПб., 2005. – С. 171.
9. Geldmacher, I. A Fit-for-purpose electromagnetic System for Reservoir Monitoring and Geothermal Exploration / I. Geldmacher, K. Strack // GRC Transactions. – 2017. – Vol. 41. – P. 1649–1658.
10. Болтинцев, В. Б. Метод электромагнитного импульсного сверхширокополосного зондирования подстилающей среды [Электронный ресурс] / В. Б. Болтинцев, В. Н. Ильяхин, К. П. Безродный // Журн. радиоэлектроники. – 2012. – № 1. – Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jan12/14/text.html>. – Дата доступа: 10.02.2022.
11. Бурцев, М. И. Поиски и разведка месторождений нефти и газа / М. И. Бурцев – М. : Рос. ун-т дружбы народов. – 2006. – 264 с.
12. Сейсмические методы при разведке полезных ископаемых и планировании горных работ – Введение / А. Малехмир [и др.] // Геофизика. – 2012. – DOI: [10.1190/2012-0724-SPSEIN.1](https://doi.org/10.1190/2012-0724-SPSEIN.1).
13. Helwig, S. L. Vertical-vertical controlled-source electromagnetic instrumentation and acquisition / S. L. Helwig, W. Wood, B. Gloux // Geophysical Prospecting. – 2019. – Vol. 67. – № 6. – P. 1582–1594.
14. Райлян, И. Г. Новая российская спутниковая технология поиска местоположений нефти, газа и других полезных ископаемых / И. Г. Райлян // Нефть, газ и бизнес. – 2002. – № 6. – С. 20.
15. Констебл, С. Десять лет морской CSEM для разведки углеводородов / С. Констебл // Геофизика. – 2010. – Т. 75, № 5.
16. Янушкевич, В. Ф. Электромагнитные методы поиска и идентификации углеводородных залежей / В. Ф. Янушкевич. – Новополоцк : ПГУ, 2017. – 232 с.
17. Гололобов, Д. В. Влияние параметров амплитудно-модулированного воздействия на фазовые составляющие поверхностного импеданса анизотропной среды плазмоподобного типа. / Д. В. Гололобов, О. В. Орлова, В. Ф. Янушкевич // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – Новополоцк, 2010. – № 9. – С. 98–101.
18. Гололобов, Д. В. Импедансные граничные условия анизотропной среды для амплитудно-модулированного сигнала / Д. В. Гололобов, В. Ф. Янушкевич, С. В. Калинин // Доклады БГУИР. – Минск, 2010. – № 6 (52). – С. 13–17.
19. Степуленок, С. В. Взаимодействие амплитудно-частотно-модулированных сигналов со средой над углеводородными залежами / С. В. Степуленок, В. Ф. Янушкевич // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2009. – № 9. – С. 103–108.
20. Янушкевич, В. Ф. Влияние режима радиоимпульсных сигналов на характеристики анизотропной среды над углеводородами / В. Ф. Янушкевич, С. П. Алиева, С. В. Калинин // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2021. – № 12. – С. 47–54.

## REFERENCES

1. Gololobov, D. V. (2009) *Vzaimodeistvie elektromagnitnykh voln i uglevodorodnykh zalezhei [Interaction of electromagnetic waves and hydrocarbon deposits]*. Minsk: Bestprint. (In Russ.).
2. Moskvichew, V. N. (1991). Interraction of electromagnetic waves (EMW) with anisotropic inclusion in communication line, *9th Microw. Conf. NICON – 91: Vol. 1*, (240–244). Rydzyna.

3. Yanushkevich, V. F., Dauhiala, D. A., Adamovich, A. L., Abramenska, S. N., & Bogush, V. A. (2021). *Effect of a powerful low-frequency signal on an anisotropic medium over hydrocarbon // Journal of Physics [Conference Series]*, (1889). DOI: [10.1088/1742-6596/1889/2/022059](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1889/2/022059).
4. Khmelevskoi, V. K., Gorbachev, Yu. I., Kalinin, A. V., Popov, M. G., Seliverstov, N. I., & Shevnin, V. A. (2004). *Geofizicheskie metody issledovaniya [Geophysical research methods]*. Petropavlovsk-Kamchatskii: KGPU.
5. Henke, C. H., Krieger, M., Strack, K., & Zerilli, A. (2020). Subsalt imaging in Northern Germany using multi-physics (magnetotellurics, gravity, and seismic). *Interpretatio*, 8(4), 15–24.
6. Anderson, C., & Mattsson, J. (2010). An integrated approach to marine electromagnetic surveying using a towed streamer and source. *First Break*, 28(5), 71–75.
7. Holten, T., Luo, X., Naevdal, G., & Helwig, S. L. (2016). Time lapse CSEM reservoir monitoring of the Norne field with vertical dipoles. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, (35), 971–975.
8. Gololobov, D. V., Kuraev, A. A., & Stadnik, Yu. N. (2005). Poiski, razvedka i monitoring zalezhei nefi, gaza i uglya radiovolnovym metodom [Search, exploration and monitoring of oil, gas and coal deposits by radio wave method]. *Geologicheskoi sluzhbe Rossii 300 let: tez. dokl. (171)*. Saint Petersburg: VIRG – Rudgeofizika. (In Russ.).
9. Geldmacher, I., & Strack, K. (2017). A Fit-for-purpose electromagnetic System for Reservoir Monitoring and Geothermal Exploration. *GRC Transactions*, (41), 1649–1658.
10. Boltintsev, V. B., Il'yakhin, V. N., & Bezrodnyi, K. P. (2012). Metod elektromagnitnogo impul'snogo sverkhshirokopolosnogo zondirovaniya podstilayushchei sredy [Method of electromagnetic pulsed ultra-wideband sounding of the underlying medium]. *Zhurnal radioelektroniki*, (1). <http://jre.cplire.ru/jre/jan12/14/text.html> (In Russ.).
11. Burtsev, M. I. (2006). *Poiski i razvedka mestorozhdenii nefi i gaza [Search and exploration of oil and gas fields]*. Moscow: RUDN. (In Russ.).
12. Malekhir, A., Urosevich, M., Bellefler, G., Dzhukhlin C., & Milkerait, B. (2012). Seismicheskie metody pri razvedke poleznykh iskopaemykh i planirovanii gornyykh rabot – Vvedenie [Seismic methods in mineral exploration and mine planning]. *Geofizika*. DOI: [10.1190/2012-0724-SPSEIN.1](https://doi.org/10.1190/2012-0724-SPSEIN.1).
13. Helwig, S. L., Wood, W., & Gloux B. (2019). Vertical–vertical controlled-source electromagnetic instrumentation and acquisition. *Geophysical Prospecting*, 67(6), 1582–1594.
14. Railyan, I. G. (2002). Novaya rossiiskaya sputnikovaya tekhnologiya poiska mestopolozhenii nefi, gaza i drugikh poleznykh iskopaemykh [New Russian satellite technology for searching for the locations of oil, gas and other minerals]. *Nefi', gaz i biznes*, (6), 20. (In Russ.).
15. Konstebl, S. (2010). Desyat' let morskoi CSEM dlya razvedki uglevodorodov [Ten years of offshore CSEM for hydrocarbon exploration]. *Geofizika*, 75(5). (In Russ.).
16. Yanushkevich, V. F. (2017). *Elektromagnitnye metody poiska i identifikatsii uglevodorodnykh zalezhei [Electromagnetic methods for searching and identifying hydrocarbon deposits]*. Novopolotsk: PGU. (In Russ.).
17. Gololobov, D. V., Orlova, O. V., & Yanushkevich, V. F. (2010). Vliyanie parametrov amplitudno-modulirovannogo vozdeistviya na fazovye sostavlyayushchie poverkhnostnogo impedansa anizotropnoi sredy plazmopodobnogo tipa [Influence of the amplitude-modulated effect parameters on the phase components of the surface impedance of an anisotropic plasma-like medium]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (9), 98–101. (In Russ., abstr. in Engl.).
18. Gololobov, D. V., Yanushkevich, V. F., & Kalintsev, S. V. (2010). Impedantsnye granichnye usloviya anizotropnoi sredy dlya amplitudno-modulirovannogo signala [Impedance boundary conditions of an anisotropic medium for an amplitude modulated signal]. *Doklady BGUIR*, 6(52), 13–17. (In Russ., abstr. in Engl.).
19. Stepulenok, S. V., & Yanushkevich, V. F. (2009). Vzaimodeistvie amplitudno-chastotno-modulirovannykh signalov so sredoi nad uglevodo-rodnyimi zalezhami [Interaction of amplitude-frequency-modulated signals with the environment above hydrocarbon deposits]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (9), 103–108. (In Russ., abstr. in Engl.).
20. Yanushkevich, V. F., Alieva, S. P., & Kalintsev, S. V. (2021). Vliyanie rezhima radioimpul'snykh signalov na kharakteristiki anizotropnoi sredy nad uglevodorodami [Influence of the regime of radio pulse signals on the characteristics of an anisotropic medium over hydrocarbons]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (12), 47–54. (In Russ., abstr. in Engl.).

Поступила 18.02.2022

## ELECTROMAGNETIC METHODS OF SEARCHING AND DEFINITION OF HYDROCARBON DEPOSITS

V. YANUSHKEVICH, S. ALIEVA, S. KALINTEV

*The article studies the characteristics of an anisotropic medium over hydrocarbons with the complex use of electromagnetic geo-exploration methods. The simulation of the components of dielectric permittivity tensors in the mode of amplitude-modulated, frequency-modulated, amplitude-frequency-modulated and radio pulse signals is carried out. The frequencies of the electron plasma and electron cyclotron resonances for the specified*

*regimes are established. A study was made of the influence of modes of probing signals on the characteristics of an anisotropic medium above deposits and the components of the dielectric tensor. The effect of particle concentration variation on the real components of the components of the dielectric permittivity of an anisotropic medium above the UVZ is analyzed. Recommendations are given for improving the methods of electrical exploration and their application for prospecting geophysics.*

**Keywords:** *electromagnetic methods, hydrocarbon reservoir, permittivity tensor.*

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ (МАТЕМАТИКА)**

УДК 517.956.32

DOI 10.52928/2070-1624-2022-38-4-92-102

**ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ СОПРЯЖЕННОГО МОДЕЛЬНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ  
СО СКОРОСТЬЮ  $a(s, \tau)$  В ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ**

**д-р физ.-мат. наук, проф. Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ**  
(Белорусский государственный университет, Минск)

*В верхней полуплоскости найдены в явном виде классическое решение и критерий корректности задачи Гурса для линейного неоднородного сопряженного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью  $a(s, \tau)$ . Получена явная формула единственного и устойчивого по правой части уравнения и данным Гурса классического решения этой задачи Гурса. Данная формула содержит неявные функции характеристик уравнения. В случае однородного сопряженного модельного телеграфного уравнения классическое решение этой задачи Гурса является функцией Римана во всех линейных смешанных (начально-граничных) задачах для неоднородного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью  $a(s, \tau)$ . Эта функция Римана нами вычислена. Найден критерий корректности по Адамару (необходимые и достаточные условия) её однозначной и устойчивой по правой части уравнения и данным Гурса всюду разрешимости. Этот критерий состоит из требований гладкости на правую часть уравнения и два данных Гурса. Требования гладкости на правую часть уравнения – условие непрерывности правой части и соответствующие интегральные условия гладкости на правую часть уравнения и на данные Гурса – их дважды непрерывная дифференцируемость в верхней полуплоскости.*

**Ключевые слова:** задача Гурса, сопряженное модельное телеграфное уравнение, неявные функции характеристик, критерий корректности, классическое решение, функция Римана.

**Введение.** В настоящей работе найдено в явном виде классическое решение и полностью изучена корректность по Адамару (существование, единственность и устойчивость) задачи Гурса для линейного неоднородного сопряженного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью  $a(s, \tau)$  в верхней полуплоскости (теорема 1). Формула единственного и устойчивого классического решения этой задачи Гурса содержит неявные функции характеристик уравнения и их обратные функции. Вывод и применение этой формулы классического решения основаны на соответствующих двенадцати тождествах обращения для двух неявных функций  $g_1, g_2$  характеристик уравнения и их четырёх обратных функций  $h_1, h_2, h^{(1)}, h^{(2)}$  из [1]. Эти тождества обращения справедливы в силу определения взаимно обратных функций. Установлен критерий корректности по Адамару однозначной и устойчивой по правой части уравнения и данным Гурса всюду разрешимости этой задачи Гурса. Этот критерий состоит из необходимых и достаточных требований гладкости на правую часть уравнения и два данных Гурса. Необходимые и достаточные требования гладкости на правую часть уравнения – условие непрерывности правой части и соответствующие интегральные условия гладкости на правую часть уравнения [2; 3] и на данные Гурса – их дважды непрерывная дифференцируемость в верхней полуплоскости. Сопряженность модельного телеграфного уравнения понимается в смысле распределений и обобщённых функций соответственно из работ [4; 5]. В нашей статье поставленная задача Гурса решена не методом последовательных приближений из [6], а авторской модификацией известного метода характеристик из [6], которая предполагает выявление общего интеграла (общего решения) уравнения и его подстановку в краевые условия, т.е. в условия Гурса в случае задачи Гурса.

Для однородного сопряженного модельного телеграфного уравнения сужение решения этой задачи Гурса на первую четверть плоскости играет роль функции Римана в смешанных (начально-граничных) задачах для неоднородного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью  $a(s, \tau)$  в этой четверти плоскости. Вычислено частное классическое решение неоднородного сопряженного модельного телеграфного уравнения (замечание 2). Найдена функция Римана к задаче Коши. В случае однородного сопряженного модельного телеграфного уравнения классическое решение задачи Гурса служит функцией Римана для различных линейных смешанных задач для неоднородного модельного телеграфного уравнения. Нами вычислена функция Римана в верхней полуплоскости, из которой можно вывести функцию Римана для смешанных (начально-граничных) задач с неоднородным модельным телеграфным уравнением в первой четверти плоскости (теорема 2). Выведена формула типа Римана единственного и устойчивого классического решения и установлен критерий корректности первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в [7].

**1. Постановка задачи и методы исследования.** В верхней полуплоскости  $G = ]-\infty, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  найти классическое решение задачи Гурса для сопряженного модельного телеграфного уравнения

$$\widehat{\mathcal{M}}v(s, \tau) \equiv v_{\tau\tau}(s, \tau) - \left( a^2(s, \tau)v(s, \tau) \right)_{ss} + \left( a^{-1}(s, \tau)a_{\tau}(s, \tau)v(s, \tau) \right)_{\tau} + \left( a(s, \tau)a_s(s, \tau)v(s, \tau) \right)_s = f(s, \tau), \quad (1)$$

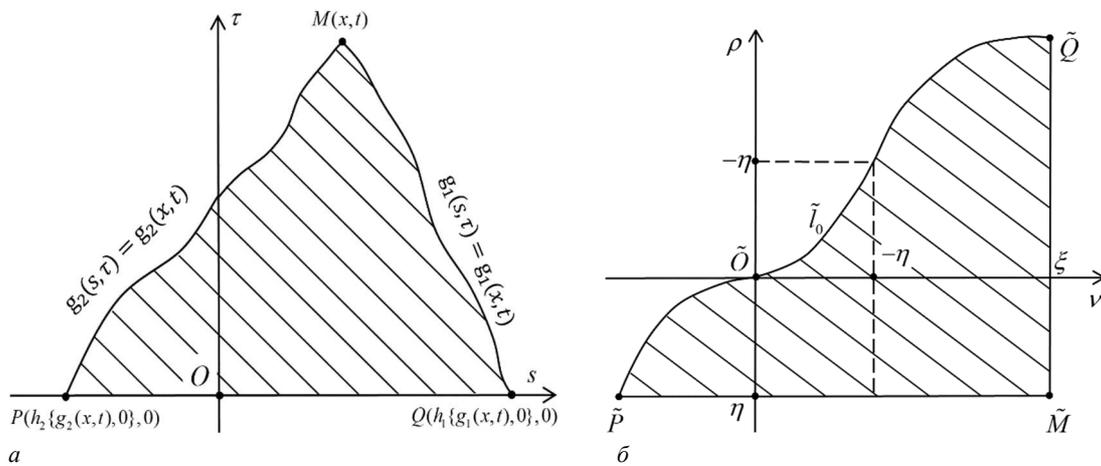
на криволинейных характеристических треугольниках  $\Delta MPQ \subset G$ , т.е. для всех точек  $(s, \tau) \in \Delta MPQ$  в уравнении (1), при условиях Гурса на его сторонах

$$v(s, \tau) = \gamma_1(s, \tau), \quad s = h_1\{g_1(x, t), \tau\}, \quad v(s, \tau) = \gamma_2(s, \tau), \quad s = h_2\{g_2(x, t), \tau\}, \quad (2)$$

и условия согласования (сопряжения) данных Гурса

$$\gamma_1(x, t) = \gamma_2(x, t), \quad (x, t) \in G, \quad (3)$$

в точках  $M(x, t)$  пересечения характеристик  $g_1(s, \tau) = g_1(x, t)$ ,  $g_2(s, \tau) = g_2(x, t)$  уравнения (1) (рисунок 1, а).



а – для функции  $F$ ; б – для функции  $\tilde{F}$

Рисунок 1. – Характеристические треугольники  $\Delta MPQ$  и  $\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$

Мы обозначаем число нижних индексов функций соответствующие порядки их частных производных.

Здесь правая часть уравнения  $f$  – заданная вещественная функция переменных  $s, \tau$ ; коэффициент уравнения  $a(s, \tau) \geq a_0 > 0, (s, \tau) \in G$ ; данные Гурса  $\gamma_1, \gamma_2$  – заданные вещественные функции переменных  $s, \tau$ ;  $g_1, g_2$  – указанные ниже характеристики уравнения (1) и  $h_1, h_2$  – указанные ниже их обратные функции из [1].

Линейный дифференциальный оператор  $\widehat{\mathcal{M}}$  уравнения (1) является сопряженным оператором к линейному дифференциальному оператору  $\mathcal{L}$  модельного телеграфного уравнения

$$\mathcal{L} u(s, \tau) \equiv u_{\tau\tau}(s, \tau) - a^2(s, \tau)u_{ss}(s, \tau) - a^{-1}(s, \tau)a_{\tau}(s, \tau)u_{\tau}(s, \tau) - a(s, \tau)a_s(s, \tau)u_s(s, \tau) = \tilde{f}(s, \tau), \quad (s, \tau) \in G, \quad (4)$$

из статьи [1] в смысле распределений Шварца  $\mathcal{D}'(G)$  (обобщенных функций на основном пространстве  $\mathcal{D}(G)$  бесконечно дифференцируемых функций  $C_0^\infty(G)$  с компактными носителями в  $G$ ) [4; 5]. Линейное уравнение (1) принято называть формально сопряженным к линейному уравнению (4) [6].

Пусть  $C^k(\Omega)$  – множество  $k$  раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве  $\Omega \subset R^2, R = ]-\infty, +\infty[$ , и  $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ . Уравнению (1) соответствуют характеристические уравнения

$$ds = (-1)^i a(s, \tau)d\tau, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

которые имеют общие интегралы  $g_i(s, \tau) = C_i, C_i \in R, i = 1, 2$ . Если коэффициент  $a$  строго положителен, т.е.  $a(s, \tau) \geq a_0 > 0, (s, \tau) \in G$ , то переменная  $\tau$  на характеристиках  $g_1(s, \tau) = C_1, C_1 \in R$ , строго убывает

и на характеристиках  $g_2(s, \tau) = C_2, C_2 \in R$ , строго возрастает вместе с ростом  $s$ . Поэтому неявные функции характеристик

$$y_i = g_i(s, \tau) = C_i, s \in R, \tau \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

имеют строго монотонные обратные функции  $s = h_i\{y_i, \tau\}, \tau \geq 0, \tau = h^{(i)}[s, y_i], s \in R, i = 1, 2$ . По определению обратных отображений они удовлетворяют следующим тождествам обращения из [1]:

$$g_i(h_i\{y_i, \tau\}, \tau) = y_i, \quad \forall y_i, \quad h_i\{g_i(s, \tau), \tau\} = s, \quad s \in R, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

$$g_i(s, h^{(i)}[s, y_i]) = y_i, \quad \forall y_i, \quad h^{(i)}[s, g_i(s, \tau)] = \tau, \quad \tau \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

$$h_i\{y_i, h^{(i)}[s, y_i]\} = s, \quad s \in R, \quad h^{(i)}[h_i\{y_i, \tau\}, y_i] = \tau, \quad \tau \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

В правых частях тождеств (7)–(9) вместе со взаимобратными функциями исключаются переменные, повторяющиеся дважды в левых частях, если даже в левых частях этих тождеств повторяется дважды лишь одно из возможных значений этих переменных. Если коэффициент  $a(s, \tau) \geq a_0 > 0, (s, \tau) \in G, a \in C^2(G)$ , то функции  $g_i, h_i, h^{(i)} \in C^2$  по  $s, \tau, y_i, i = 1, 2$  [1].

**Определение 1.** Классическим решением задачи Гурса (1)–(3) в  $\Delta MPQ \subset G$  называется функция  $v(s, \tau) = v(s, \tau; x, t) \in C^2(\Delta MPQ)$ , удовлетворяющая в обычном смысле уравнению (1) для  $(s, \tau) \in \Delta MPQ$  и условиям Гурса (2) на сторонах  $MP$  и  $QM$  с условием согласования (3) в вершине треугольника  $M(x, t)$ .

Мы будем решать задачу Гурса (1)–(3) методом характеристик (распространяющихся волн) из курса уравнений математической физики [6]. Сначала мы найдем общий интеграл уравнения (1) на  $G$ , т.е. аналитическое представление множества всех его классических решений на  $G$ . Затем подстановкой этого общего интеграла в условия Гурса (2) и условие согласования (3) мы выведем выражение формального решения задачи Гурса (1)–(3) на  $\Delta MPQ$ . Это решение  $v(s, \tau) = v(s, \tau; x, t)$  независимых переменных  $s$  и  $\tau$  содержит в качестве параметра координаты вершины  $M(x, t)$  характеристического треугольника  $\Delta MPQ$ . Наконец, мы установим критерий корректности по Адамару (необходимые и достаточные требования гладкости на  $f, \gamma_1, \gamma_2$  существования единственного и устойчивого по  $f, \gamma_1, \gamma_2$  классического решения) задачи Гурса (1)–(3) на  $G$ .

*Замечание 1.* В случае  $a(s, \tau) = a = const > 0$  из [8] ими являются функции:

$$g_1(s, \tau) = s + a\tau, \quad g_2(s, \tau) = s - a\tau, \quad h_1\{y_1, \tau\} = y_1 - a\tau,$$

$$h_2\{y_2, \tau\} = y_2 + a\tau, \quad h^{(1)}[s, y_1] = (y_1 - s) / a, \quad h^{(2)}[s, y_2] = (s - y_2) / a.$$

**2. Основной результат.** Сначала выведем некоторые необходимые требования гладкости на правую часть уравнения и данные Гурса.

Из постановки задачи Гурса (1)–(3) и определения 1 её классических решений в любом треугольнике  $\Delta MPQ \subset G$  легко заключаем необходимость гладкости

$$f \in C(G), \quad \gamma_1, \gamma_2 \in C^2(G). \quad (10)$$

**Теорема 1.** Пусть в сопряженном модельном телеграфном уравнении (1) коэффициент  $a(s, \tau) \geq a_0 > 0, (s, \tau) \in G, a \in C^2(G)$ . В любом характеристическом треугольнике  $\Delta MPQ \subset G$  задача Гурса (1)–(3) имеет единственное и устойчивое по  $f, \gamma_1, \gamma_2$  классическое решение  $v(s, \tau) \in C^2(\Delta MPQ)$  тогда и только тогда, когда выполняются требования гладкости (10) и

$$H^{(i)}(s, \tau) \equiv \int_0^\tau f(h_i\{g_i(s, \tilde{\tau}), \tilde{\tau}\}, \tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \in C^1(G), \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Для каждой точки  $M(x, t) \in G$  классическим решением задачи Гурса (1)–(3) в  $\Delta MPQ$  является функция

$$\begin{aligned} v(s, \tau; x, t) = & \{ [a(\tilde{s}, \tilde{\tau})\gamma_2(\tilde{s}, \tilde{\tau}) - F(\tilde{s}, \tilde{\tau})] \Big|_{\tilde{s}=h_2\{g_2(x, t), \tilde{\tau}\}} \Big|_{\tilde{\tau}=\tau_1(g_1(s, \tau))} + \\ & + [a(\tilde{s}, \tilde{\tau})\gamma_1(\tilde{s}, \tilde{\tau}) - F(\tilde{s}, \tilde{\tau})] \Big|_{\tilde{s}=h_1\{g_1(x, t), \tilde{\tau}\}} \Big|_{\tilde{\tau}=\tau_2(g_2(s, \tau))} - \\ & - [a(\tilde{s}, \tilde{\tau})\gamma_2(\tilde{s}, \tilde{\tau}) - F(\tilde{s}, \tilde{\tau})] \Big|_{\tilde{s}=h_2\{g_2(x, t), \tilde{\tau}\}} \Big|_{\tilde{\tau}=\tau_1(g_1(x, t))} + F(s, \tau) \} / a(s, \tau), \quad (s, \tau) \in \Delta MPQ \subset G, \end{aligned} \quad (12)$$

где частным классическим решением неоднородного уравнения (1) служит произведение  $1/a(s, \tau)$  на

$$F(s, \tau) = \frac{1}{2} \int_0^\tau d\tilde{\tau} \int_{h_2\{g_2(s, \tau), \tilde{\tau}\}}^{h_1\{g_1(s, \tau), \tilde{\tau}\}} f(\tilde{s}, \tilde{\tau}) d\tilde{s}. \quad (13)$$

**Доказательство.** Чтобы вычислить общий интеграл уравнения (1) на  $G$ , в нем производим невырожденную замену независимых переменных

$$\xi = g_1(s, \tau), \quad \eta = g_2(s, \tau) \quad (14)$$

с невырожденным якобианом  $J(s, \tau) = \xi_s \eta_\tau - \xi_\tau \eta_s \neq 0$  в  $G$ , потому что  $a(s, \tau) \geq a_0 > 0$  в  $\tilde{G}$ . Для новой функции  $\tilde{v}(\xi, \eta) = v(s(\xi, \eta), \tau(\xi, \eta)) \in C^2(\tilde{G})$  уравнение (1) заменой (14) приводится к виду

$$\begin{aligned} & [(\xi_\tau)^2 - a^2(\xi_s)^2] \tilde{v}_{\xi\xi} + 2aJ(s, \tau) \tilde{v}_{\xi\eta} + [(\eta_\tau)^2 - a^2(\eta_s)^2] \tilde{v}_{\eta\eta} + [\xi_{\tau\tau} - a^2\xi_{ss} + a^{-1}a_\tau \xi_\tau - 3aa_s \xi_s] \tilde{v}_\xi + \\ & + [\eta_{\tau\tau} - a^2\eta_{ss} + a^{-1}a_\tau \eta_\tau - 3aa_s \eta_s] \tilde{v}_\eta - [(a_s)^2 + aa_{ss} - a^{-1}a_{\tau\tau} + a^{-2}(a_\tau)^2] \tilde{v} \equiv \\ & = \tilde{f}(\xi, \eta) = f(s(\xi, \eta), \tau(\xi, \eta)), \quad (\xi, \eta) \in \tilde{G}, \end{aligned} \quad (15)$$

где множество  $\tilde{G}$  (указанное ниже в (28)) – образ верхней полуплоскости  $G$  при замене (14).

Полные дифференциалы характеристик (6) очевидно тождественно равны нулю, и в силу характеристических уравнений (5) справедливы равенства

$$dg_i = (g_i)_s ds + (g_i)_\tau d\tau = [(g_i)_\tau + (-1)^i a(s, \tau)(g_i)_s] d\tau \equiv 0, \quad (s, \tau) \in G, \quad i = 1, 2,$$

поэтому согласно (14) имеем соотношения

$$(g_i)_\tau \equiv (-1)^{i+1} a(s, \tau)(g_i)_s, \quad (s, \tau) \in G, \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

$$\xi_\tau - a(s, \tau)\xi_s = 0, \quad \eta_\tau + a(s, \tau)\eta_s = 0, \quad (s, \tau) \in G. \quad (17)$$

Мы дифференцируем уравнения из (17) один раз по  $\tau$

$$\xi_{\tau\tau} - a_\tau(s, \tau)\xi_s - a(s, \tau)\xi_{s\tau} = 0, \quad \eta_{\tau\tau} + a_\tau(s, \tau)\eta_s + a(s, \tau)\eta_{s\tau} = 0, \quad (18)$$

и затем снова уравнения из (17) дифференцируем один раз по  $s$

$$\xi_{s\tau} - a_s(s, \tau)\xi_s - a(s, \tau)\xi_{ss} = 0, \quad \eta_{s\tau} + a_s(s, \tau)\eta_s + a(s, \tau)\eta_{ss} = 0. \quad (19)$$

Уравнения из (18) соответственно суммируем и вычитаем с уравнениями из (19), умноженными на коэффициент  $a(s, \tau)$ , и приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} & \xi_{\tau\tau} - a_\tau(s, \tau)\xi_s - a(s, \tau)a_s(s, \tau)\xi_s - a^2(s, \tau)\xi_{ss} = 0, \\ & \eta_{\tau\tau} - a_\tau(s, \tau)\eta_s - a(s, \tau)a_s(s, \tau)\eta_s - a^2(s, \tau)\eta_{ss} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

С помощью уравнений (17) из уравнений (20) соответственно выводим тождества

$$\xi_{\tau\tau} - a^2(s, \tau)\xi_{ss} = a_\tau(s, \tau)\xi_s + a(s, \tau)a_s(s, \tau)\xi_s = a^{-1}(s, \tau)a_\tau(s, \tau)\xi_\tau + a(s, \tau)a_s(s, \tau)\xi_s,$$

$$\eta_{\tau\tau} - a^2(s, \tau)\eta_{ss} = a_\tau(s, \tau)\eta_s + a(s, \tau)a_s(s, \tau)\eta_s = a^{-1}(s, \tau)a_\tau(s, \tau)\eta_\tau + a(s, \tau)a_s(s, \tau)\eta_s, \quad (s, \tau) \in G. \quad (21)$$

Соотношения, уравнения и тождества (16)–(21) имеются в работах [1–3].  
Благодаря тождествам (17) и (21) уравнение (15) становится уравнением

$$2aJ(s, \tau)\tilde{v}_{\xi\eta}(\xi, \eta) + 2[a^{-1}a_\tau\xi_\tau - aa_s\xi_s]\tilde{v}_\xi + 2[a^{-1}a_\tau\eta_\tau - aa_s\eta_s]\tilde{v}_\eta - \\ - [(a_s)^2 + aa_{ss} - a^{-1}a_{\tau\tau} + a^{-2}(a_\tau)^2]\tilde{v} = \tilde{f}(\xi, \eta), \quad (\xi, \mu) \in \tilde{G}, \quad (22)$$

где коэффициент  $\tilde{a}(\xi, \eta) = a(s(\xi, \eta), \tau(\xi, \eta))$ ,  $(\xi, \mu) \in \tilde{G}$ , и якобиан замены  $J(s, \tau) = \xi_s\eta_\tau - \xi_\tau\eta_s \neq 0$  на  $\tilde{G}$ .

В коэффициентах уравнения (22) также, как выше для реализованного приведения уравнения (1) к уравнению (15), делаем замену переменных (14):

$$a_\tau = \tilde{a}_\xi\xi_\tau + \tilde{a}_\eta\eta_\tau, \quad a_{\tau\tau} = \tilde{a}_{\xi\xi}(\xi_\tau)^2 + 2\tilde{a}_{\xi\eta}\xi_\tau\eta_\tau + \tilde{a}_{\eta\eta}(\eta_\tau)^2 + \tilde{a}_\xi\xi_{\tau\tau} + \tilde{a}_\eta\eta_{\tau\tau},$$

$$a_s = \tilde{a}_\xi\xi_s + \tilde{a}_\eta\eta_s, \quad a_{ss} = \tilde{a}_{\xi\xi}(\xi_s)^2 + 2\tilde{a}_{\xi\eta}\xi_s\eta_s + \tilde{a}_{\eta\eta}(\eta_s)^2 + \tilde{a}_\xi\xi_{ss} + \tilde{a}_\eta\eta_{ss}.$$

В результате после деления уравнения (22) на  $2a$  мы имеем следующие значения коэффициентов при первых частных производных  $\tilde{v}_\xi$ ,  $\tilde{v}_\eta$  и функции  $\tilde{v}$ :

$$\tilde{v}_\xi: \quad a^{-2}a_\tau\xi_\tau - a_s\xi_s = a^{-2}[\tilde{a}_\xi\xi_\tau + \tilde{a}_\eta\eta_\tau]\xi_\tau - [\tilde{a}_\xi\xi_s + \tilde{a}_\eta\eta_s]\xi_s = a^{-2}\tilde{a}_\xi(\xi_\tau)^2 - \tilde{a}_\xi(\xi_s)^2 + \tilde{a}_\eta[a^{-2}\xi_\tau\eta_\tau - \xi_s\eta_s] = \\ = \tilde{a}_\xi[a^{-2}(\xi_\tau)^2 - (\xi_s)^2] + \tilde{a}_\eta[\xi_\tau\eta_\tau - a^2\xi_s\eta_s] / a^2 = \tilde{a}_\eta[\xi_s\eta_\tau - \xi_\tau\eta_s] = \tilde{a}_\eta J(s, \tau) / a,$$

$$\tilde{v}_\eta: \quad a^{-2}a_\tau\eta_\tau - a_s\eta_s = a^{-2}[\tilde{a}_\xi\xi_\tau + \tilde{a}_\eta\eta_\tau]\eta_\tau - [\tilde{a}_\xi\xi_s + \tilde{a}_\eta\eta_s]\eta_s = \tilde{a}_\eta[a^{-2}(\eta_\tau)^2 - (\eta_s)^2] + \tilde{a}_\xi[a^{-2}\xi_\tau\eta_\tau - \xi_s\eta_s] = \\ = \tilde{a}_\eta[a^{-2}(\eta_\tau)^2 - (\eta_s)^2] + \tilde{a}_\xi[\xi_\tau\eta_\tau - a^2\xi_s\eta_s] / a^2 = \tilde{a}_\xi[\xi_s\eta_\tau - \xi_\tau\eta_s] = \tilde{a}_\xi J(s, \tau) / a,$$

$$\tilde{v}: \quad [a_{\tau\tau} - a^2a_{ss}] / (2a^2) - [(a_\tau)^2 + a^2(a_s)^2] / (2a^3). \quad (23)$$

Далее вычисляем последний коэффициент перед функцией  $\tilde{v}$  из равенств (23):

$$a_{\tau\tau} - a^2a_{ss} = [(\xi_\tau)^2 - a^2(\xi_s)^2]\tilde{a}_{\xi\xi} + 2[\xi_\tau\eta_\tau - a^2\xi_s\eta_s]\tilde{a}_{\xi\eta} + [(\eta_\tau)^2 - a^2(\eta_s)^2]\tilde{v}_{\eta\eta} + \\ + [\xi_{\tau\tau} - a^2\xi_{ss}]\tilde{a}_\xi + [\eta_{\tau\tau} - a^2\eta_{ss}]\tilde{a}_\eta = 2aJ(s, \tau)\tilde{a}_{\xi\eta} + [a^{-1}a_\tau\xi_\tau + aa_s\xi_s]\tilde{a}_\xi + [a^{-1}a_\tau\eta_\tau + aa_s\eta_s]\tilde{a}_\eta = \\ = 2aJ(s, \tau)\tilde{a}_{\xi\eta} + [a^{-1}(\tilde{a}_\xi\xi_\tau + \tilde{a}_\eta\eta_\tau)\xi_\tau + a(\tilde{a}_\xi\xi_s + \tilde{a}_\eta\eta_s)\xi_s]\tilde{a}_\xi + [a^{-1}(\tilde{a}_\xi\xi_\tau + \tilde{a}_\eta\eta_\tau)\eta_\tau + a(\tilde{a}_\xi\xi_s + \tilde{a}_\eta\eta_s)\eta_s]\tilde{a}_\eta = \\ = 2aJ(s, \tau)\tilde{a}_{\xi\eta} + \{(\xi_\tau)^2(\tilde{a}_\xi)^2 + a^2(\xi_s)^2(\tilde{a}_\xi)^2 + 2[\xi_\tau\eta_\tau\tilde{a}_\xi\tilde{a}_\eta + a^2\xi_s\eta_s\tilde{a}_\xi\tilde{a}_\eta] + (\eta_\tau)^2(\tilde{a}_\eta)^2 + a^2(\eta_s)^2(\tilde{a}_\eta)^2\} / a = \\ = 2aJ(s, \tau)\tilde{a}_{\xi\eta} + \{[(\xi_\tau)^2 + a^2(\xi_s)^2](\tilde{a}_\xi)^2 + 2[\xi_\tau\eta_\tau + a^2\xi_s\eta_s]\tilde{a}_\xi\tilde{a}_\eta + [(\eta_\tau)^2 + a^2(\eta_s)^2](\tilde{a}_\eta)^2\} / a = \\ = 2aJ(s, \tau)\tilde{a}_{\xi\eta} + \{[(\xi_\tau)^2 + a^2(\xi_s)^2](\tilde{a}_\xi)^2 + [(\eta_\tau)^2 + a^2(\eta_s)^2](\tilde{a}_\eta)^2\} / a, \quad (24)$$

$$(a_\tau)^2 + a^2(a_s)^2 = [(\xi_\tau)^2 + a^2(\xi_s)^2](\tilde{a}_\xi)^2 + 2[\xi_\tau\eta_\tau + a^2\xi_s\eta_s]\tilde{a}_\xi\tilde{a}_\eta + [(\eta_\tau)^2 + a^2(\eta_s)^2](\tilde{a}_\eta)^2 = \\ = [(\xi_\tau)^2 + a^2(\xi_s)^2](\tilde{a}_\xi)^2 + [(\eta_\tau)^2 + a^2(\eta_s)^2](\tilde{a}_\eta)^2. \quad (25)$$

При вычислении равенств (23)–(25) используются соотношения (18)–(21) и благодаря (17) тождества

$$(\xi_\tau)^2 - a^2(\xi_s)^2 = 0, \quad (\eta_\tau)^2 - a^2(\eta_s)^2 = 0, \quad \xi_\tau\eta_\tau + a^2\xi_s\eta_s = 0.$$

Поскольку после подстановки выражений (24) и (25) в последний коэффициент (23) их итоговые общие слагаемые сокращаются, то, разделив уравнение (22) на  $J(s, \tau) / \tilde{a}$ , получаем канонический вид

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\xi, \eta) \tilde{v}_{\xi\eta}(\xi, \eta) + \tilde{a}_\eta(\xi, \eta) \tilde{v}_\xi(\xi, \eta) + \tilde{a}_\xi(\xi, \eta) \tilde{v}_\eta(\xi, \eta) + \tilde{a}_{\xi\eta}(\xi, \eta) \tilde{v}(\xi, \eta) = \\ = (\tilde{a}(\xi, \eta) \tilde{v}(\xi, \eta))_{\xi\eta} = \tilde{f}(\xi, \eta) / 2J(s, \tau) \end{aligned} \quad (26)$$

сопряженного модельного телеграфного уравнения (1) в  $\tilde{G}$  (см. ниже (28)).

В плоскости  $Ost$  через любую вершину  $M(x, t) \in G$  треугольника  $\Delta MPQ$  проходят характеристики  $g_2(s, \tau) = g_2(x, t)$  и  $g_1(s, \tau) = g_1(x, t)$ , которые пересекают ось  $Os$  при  $\tau = 0$  соответственно в точках основания  $P(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)$  и  $Q(h_1\{g_1(x, t), 0\}, 0)$ . Отображение (14) переводит точку  $M(x, t)$  плоскости  $Ost$  в точку  $\tilde{M}(\xi, \eta)$  плоскости  $\tilde{O}\nu\rho$ . После замены переменных (14) уравнения характеристик  $g_i(s, \tau) = g_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$ , боковых сторон  $MP$  и  $MQ$  треугольника  $\Delta MPQ$  соответственно становятся уравнениями  $\nu = g_1(s, \tau) = g_1(x, t) = \xi$ ,  $\rho = g_2(s, \tau) = g_2(x, t) = \eta$  боковых сторон  $\tilde{M}\tilde{P}$  и  $\tilde{M}\tilde{Q}$  треугольника  $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$  в плоскости  $\tilde{O}\nu\rho$ . Найдём образ отрезка  $OP$  с уравнением  $\tau = 0$ ,  $s \in [0, h_2\{g_2(x, t), 0\}]$  при отображении (14) из плоскости  $Ost$  в плоскость  $\tilde{O}\nu\rho$ . Полагая  $\tau = 0$  в замене (14), приходим к уравнениям  $\nu = g_1(s, 0)$ ,  $\rho = g_2(s, 0)$ , из которых ввиду единственности решений  $s = h_1\{\nu, 0\}$ ,  $s = h_2\{\rho, 0\}$  системы уравнений (14) относительно  $(s, \tau)$  и первых тождеств обращения из (7) получаем уравнение кривой  $\tilde{l}_0$  в плоскости  $\tilde{O}\nu\rho$  (см. рисунок 1, б):

$$\nu_0(\rho) \equiv \nu = g_1(h_2\{\rho, 0\}, 0) : h_2\{\rho, 0\} - h_1\{\nu, 0\} = 0. \quad (27)$$

Уравнение (27) выполняется для координат точки  $\tilde{O}(0, 0)$ , так как отрезок  $OP$  действительно соединяет начало координат  $O(0, 0)$  и точку  $P$  в плоскости  $Ost$  и уравнение (27) найдено невырожденной заменой (14) из уравнения отрезка  $OP$ . Из формул производных обратных функций  $(h_i)_\tau = 1 / (g_i)_s$ ,  $i = 1, 2$ , строгого возрастания функции  $g_2$  и строгого убывания функции  $g_1$  с ростом  $s$  следует строгое возрастание значений  $\rho$  функции (27) вместе с ростом  $\nu$  в плоскости  $\tilde{O}\nu\rho$ . Подстановкой координат точек  $\tilde{P}$  и  $\tilde{Q}$  в уравнение (27) можно убедиться в том, что кривая уравнения (27) проходит через эти точки  $\tilde{P}$  и  $\tilde{Q}$ , т.е. кривая  $\tilde{l}_0$  уравнения (27) является криволинейным основанием треугольника  $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$  в плоскости  $\tilde{O}\nu\rho$  (см. рисунок 1, б). Более того, верхняя полуплоскость  $Ost$ ,  $\tau \geq 0$ , взаимно однозначно отображается заменой (14) в часть  $h_2\{\rho, 0\} \leq h_1\{\nu, 0\}$ ,  $\nu, \rho \in R$ , плоскости  $\tilde{O}\nu\rho$ , т.е.

$$\tilde{G} = \{(\nu, \rho) : h_2\{\rho, 0\} \leq h_1\{\nu, 0\}, \nu, \rho \in R\} - \infty, +\infty\}. \quad (28)$$

Интегрируем уравнение (26) по треугольнику  $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$  и имеем общий интеграл уравнения (26)

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\xi, \eta) \tilde{v}(\xi, \eta) = \tilde{f}_1(\xi) + \tilde{f}_2(\eta) + \tilde{F}(\xi, \eta), \\ \tilde{F}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \int_{g_2(h_1\{\xi, 0\}, 0)}^{\eta} d\rho \int_{g_1(h_2\{\rho, 0\}, 0)}^{\xi} \tilde{f}(\nu, \rho) J(\nu, \rho) d\nu, \end{aligned} \quad (29)$$

где якобиан обратной замены к (14) равен  $J(\xi, \eta) = s_\xi \tau_\eta - s_\eta \tau_\xi \neq 0$  на  $\tilde{G}$  и  $J(s, \tau) J(\xi, \eta) = 1$ . Из общего интеграла (29) аналогично статьям [1; 2] обратной заменой к (14) находим общий интеграл уравнения (1)

$$\nu(s, \tau) = [\tilde{f}_1(g_1(s, \tau)) + \tilde{f}_2(g_2(s, \tau)) + F(s, \tau)] / a(s, \tau), \quad F(s, \tau) = \frac{1}{2} \int_0^\tau d\tilde{\tau} \int_{h_2\{g_2(s, \tau), \tilde{\tau}\}}^{h_1\{g_1(s, \tau), \tilde{\tau}\}} f(\tilde{s}, \tilde{\tau}) d\tilde{s}, \quad (30)$$

где  $\tilde{f}_1$  и  $\tilde{f}_2$  – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции переменных  $\xi$  и  $\eta$  из [9] вида

$$\tilde{f}_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(g_2(x, t)), \quad \tilde{f}_2(\eta) = f_2(\eta) - f_2(g_2(x, t)). \quad (31)$$

Ясно, что функции  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$  и  $f_1, f_2$  дважды непрерывно дифференцируемы одновременно. Решения (31) однородного уравнения (1) при  $f = 0$  получены «методом погружения в решения с фиксированными значениями» из [9] для упрощения вычисления решений систем дифференциальных уравнений.

Подставив общий интеграл (30) в условия Гурса (2), приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} [\tilde{f}_1(g_1(x,t)) + \tilde{f}_2(g_2(\tilde{s}, \tau)) + F(\tilde{s}, \tau)] \Big|_{\tilde{s}=h_1\{g_1(x,t), \tau\}} &= a(\tilde{s}, \tau)\gamma_1(\tilde{s}, \tau) \Big|_{\tilde{s}=h_1\{g_1(x,t), \tau\}}, \\ [\tilde{f}_1(g_1(\tilde{s}, \tau)) + \tilde{f}_2(g_2(x,t)) + F(\tilde{s}, \tau)] \Big|_{\tilde{s}=h_2\{g_2(x,t), \tau\}} &= a(\tilde{s}, \tau)\gamma_2(\tilde{s}, \tau) \Big|_{\tilde{s}=h_2\{g_2(x,t), \tau\}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Поскольку  $\tilde{f}_2(g_2(x,t)) = 0$  в (31), то из второго уравнения этой системы имеем

$$\tilde{f}_1(g_1(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)) = [a(\tilde{s}, \tau)\gamma_2(\tilde{s}, \tau) - F(\tilde{s}, \tau)] \Big|_{\tilde{s}=h_2\{g_2(x,t), \tau\}}.$$

Здесь полагаем  $y = g_1(h_2\{g_2(x,t), \tau\}, \tau)$ , т.е. обратная функция  $\tau = h^{(1)}[h_2\{g_2(x,t), \tau\}, y]$ . Пусть  $\tau_1 = \tau_1(y)$  – решение уравнения  $\tau_1 = h^{(1)}[h_2\{g_2(x,t), \tau_1\}, y]$ . Оно единственно, так как  $h_2$  и  $h^{(1)}$  – строго монотонные функции. Отсюда при  $\tau = \tau_1(y)$  находим первую функцию решения системы (32)

$$\tilde{f}_1(y) = [a(\tilde{s}, \tilde{\tau})\gamma_2(\tilde{s}, \tilde{\tau}) - F(\tilde{s}, \tilde{\tau})] \Big|_{\tilde{s}=h_2\{g_2(x,t), \tilde{\tau}\}} \Big|_{\tilde{\tau}=\tau_1(y)}. \quad (33)$$

Теперь из первого уравнения системы (32) выражаем вторую функцию

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2(g_2(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau)) &= [a(\tilde{s}, \tau)\gamma_1(\tilde{s}, \tau) - \tilde{f}_1(g_1(x,t)) - F(\tilde{s}, \tau)] \Big|_{\tilde{s}=h_1\{g_1(x,t), \tau\}} = \\ &= [a(\tilde{s}, \tau)\gamma_1(\tilde{s}, \tau) - F(\tilde{s}, \tau)] \Big|_{\tilde{s}=h_1\{g_1(x,t), \tau\}} - [a(\tilde{s}, \tilde{\tau})\gamma_2(\tilde{s}, \tilde{\tau}) - F(\tilde{s}, \tilde{\tau})] \Big|_{\tilde{s}=h_2\{g_2(x,t), \tilde{\tau}\}} \Big|_{\tilde{\tau}=\tau_1(g_1(x,t))}. \end{aligned}$$

Пусть  $\tau_2 = \tau_2(z)$  – решение уравнения  $z = g_2(h_1\{g_1(x,t), \tau\}, \tau)$ , т.е. единственное решение эквивалентного уравнения для обратной функции  $\tau_2 = h^{(2)}[h_1\{g_1(x,t), \tau_2\}, z]$ , где  $h_1$  и  $h^{(2)}$  – строго монотонные функции. Отсюда при  $\tau = \tau_2(z)$  выводим вторую функцию решения системы (32)

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2(z) &= [a(\tilde{s}, \tilde{\tau})\gamma_1(\tilde{s}, \tilde{\tau}) - F(\tilde{s}, \tilde{\tau})] \Big|_{\tilde{s}=h_1\{g_1(x,t), \tilde{\tau}\}} \Big|_{\tilde{\tau}=\tau_2(z)} - \\ &- [a(\tilde{s}, \tilde{\tau})\gamma_2(\tilde{s}, \tilde{\tau}) - F(\tilde{s}, \tilde{\tau})] \Big|_{\tilde{s}=h_2\{g_2(x,t), \tilde{\tau}\}} \Big|_{\tilde{\tau}=\tau_1(g_1(x,t))}. \end{aligned} \quad (34)$$

Подставив решения (33) и (34) системы (32) соответственно при  $y = g_1(s, \tau)$  и  $z = g_2(s, \tau)$  в общий интеграл (30), получаем формальное решение (12) задачи Гурса (1)–(3).

**Необходимость.** Необходимость гладкости (10) на правую часть  $f$  уравнения (1) и данные Гурса  $\gamma_1, \gamma_2$  показана перед формулировкой нашей теоремы. Необходимость интегральных гладкостей (11) на  $f \in C(G)$  для дважды непрерывно дифференцируемости слагаемого  $F(s, \tau)$  вида (13) в (12) следует из теоремы 2.1 и замечания 3.1 статьи [2] ([3]). Фактически необходимость требований (11) на непрерывную  $f \in C(G)$  непосредственно вытекает из дважды непрерывно дифференцируемости функции  $F(s, \tau)$ , так как интегралы (11) представляют собой производные от  $F(s, \tau)$  вдоль характеристик (14) уравнения (1).

**Достаточность.** Для дважды непрерывно дифференцируемости на  $G$  слагаемых функции (12), которые содержат данные Гурса  $\gamma_1, \gamma_2$ , очевидно достаточно их гладкости из (10). Достаточность непрерывности  $f \in C(G)$  и интегральной гладкости (11) на зависящие от  $s$  и  $\tau$  правые части  $f$  для дважды непрерывно дифференцируемости слагаемого  $F(s, \tau)$  вида (13) в функции (12) вытекает из теоремы 2.1 и замечания 3.1 статьи [2]. Достаточность интегральной гладкости (11) при непрерывной  $f \in C(G)$  для дважды непрерывно дифференцируемости функции  $F(s, \tau)$  вида (13) можно вывести из непрерывно дифференцируемости её первых частных производных  $F_s(s, \tau), F_\tau(s, \tau)$  как решений линейной системы уравнений, равных

производным от  $F(s, \tau)$  вдоль характеристик (14), правые части которой – непрерывно дифференцируемые интегралы  $H^{(i)}(s, \tau) \in C^1(G), i = 1, 2$ , из (11)<sup>1</sup>.

Теорема 1 доказана.

**Следствие 1.** Если правая часть  $f$  уравнения (1) не зависит от  $s$  или  $\tau$  в  $G$ , то утверждение теоремы 1 справедливо без интегральных требований гладкости (11)<sup>2</sup>.

Здесь для непрерывной правой части  $f$  по  $\tau$  или  $s$  гладкости (11) автоматически выполняются.

**Следствие 2.** Если правая часть  $f$  зависит от  $s$  и  $\tau$ , то в теореме 1 для  $f \in C(G)$  требования принадлежности интегралов из (11) пространству  $C^1(G)$  эквивалентны требованиям их принадлежности пространству  $C^{(1,0)}(G)$  или  $C^{(0,1)}(G)$ . Здесь  $C^{(1,0)}(G), C^{(0,1)}(G)$  – соответственно пространства непрерывно дифференцируемых по  $s$  и  $\tau$  и непрерывных по  $\tau$  и  $s$  функций на  $G^3$ .

Обоснование следствия 2 проводится также, как в диссертации<sup>4</sup>.

Из теоремы 1 и её доказательства вытекает важное

*Замечание 2.* Пусть  $a(s, \tau) \geq a_0 > 0, (s, \tau) \in G, a \in C^2(G)$ . Тогда частным классическим решением неоднородного сопряженного модельного телеграфного уравнения (1) является функция

$$\widehat{F}(s, \tau) = \frac{F(s, \tau)}{a(s, \tau)} = \frac{1}{2a(s, \tau)} \int_0^\tau d\tilde{\tau} \int_{h_2\{g_2(s, \tau), \tilde{\tau}\}}^{h_1\{g_1(s, \tau), \tilde{\tau}\}} f(\tilde{s}, \tilde{\tau}) d\tilde{s},$$

которая поточечно удовлетворяет уравнению (1) на  $G$ , потому что согласно доказательству теоремы 1 функция  $\tilde{F}(\xi, \eta) = \tilde{F}(\xi, \eta) / \tilde{a}(\xi, \eta)$  из (29) поточечно удовлетворяет его каноническому виду (26) на  $\tilde{G}$ .

**3. Приложение результатов работы** к поиску функции Римана в формулах Римана при решении различных смешанных (начально-граничных) задач для неоднородного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью  $a(s, \tau)$  в первой четверти плоскости, например, для первой смешанной задачи из работ [1; 7]. В работе [7] указана формула типа Римана классического решения первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с ещё переменными коэффициентами  $b(s, \tau), c(s, \tau), q(s, \tau)$ , в которой функция Римана  $v(s, \tau) = v(s, \tau; t, x)$  является решением задачи Гурса:

$$v_{\tau\tau}(s, \tau) - (a^2(s, \tau)v(s, \tau))_{ss} - (b(s, \tau)v(s, \tau))_\tau - (c(s, \tau)v(s, \tau))_s + q(s, \tau)v(s, \tau) = 0, \quad (s, \tau) \in \Delta MPQ, \quad (35)$$

на характеристических треугольниках  $\Delta MPQ \subset G$  при согласованных условиях Гурса на его сторонах

$$v(s, \tau) = \exp \left\{ \int_t^\tau k_1(h_1\{g_1(x, t), \rho\}, \rho) d\rho \right\}, \quad g_1(s, \tau) = g_1(x, t),$$

$$v(s, \tau) = \exp \left\{ \int_t^\tau k_2(h_2\{g_2(x, t), \rho\}, \rho) d\rho \right\}, \quad g_2(s, \tau) = g_2(x, t), \quad (36)$$

где функция  $k_1(s, \tau) = \{a(s, \tau)b(s, \tau) + 3a(s, \tau)a_s(s, \tau) - a_\tau(s, \tau) + c(s, \tau)\} / 4a(s, \tau)$  на кривой  $QM$  и функция  $k_2(s, \tau) = \{a(s, \tau)b(s, \tau) - 3a(s, \tau)a_s(s, \tau) - a_\tau(s, \tau) - c(s, \tau)\} / 4a(s, \tau)$  на кривой  $MP$  (см. рисунок 1, а).

**Теорема 2.** Пусть коэффициент  $a(s, \tau) \geq a_0 > 0, (s, \tau) \in G, a \in C^2(G)$ . В каждом характеристическом треугольнике  $\Delta MPQ \subset G$  задача Гурса (1), (36) имеет единственное и устойчивое по  $f$  классическое решение  $v(s, \tau) \in C^2(\Delta MPQ)$  тогда и только тогда, когда правая часть  $f \in C(G)$  и (11). Для каждой точки  $M(x, t) \in G$  классическим решением задачи Гурса (1), (36) в  $\Delta MPQ$  является функция

$$v(s, \tau; x, t) = \{a(x, t) + F(\tilde{s}, \tilde{\tau})\Big|_{\tilde{s}=h_2\{g_2(x, t), \tilde{\tau}\}}\Big|_{\tilde{\tau}=\tau_1(g_1(x, t))} - F(\tilde{s}, \tilde{\tau})\Big|_{\tilde{s}=h_2\{g_2(x, t), \tilde{\tau}\}}\Big|_{\tilde{\tau}=\tau_1(g_1(s, \tau))} -$$

<sup>1</sup> Новиков, Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / Е. Н. Новиков. – Минск, 2017. – 258 л.

<sup>2</sup> Там же.

<sup>3</sup> Там же.

<sup>4</sup> Там же.

$$-F(\tilde{s}, \tilde{\tau}) \Big|_{\tilde{s}=h_1\{g_1(x,t), \tilde{\tau}\}} \Big|_{\tilde{\tau}=\tau_2(g_2(s,\tau))} + F(s, \tau) / a(s, \tau), \quad (s, \tau) \in \Delta MPQ \subset G. \quad (37)$$

**Доказательство.** На характеристиках  $g_i(s, \tau) = C_i$ ,  $i = 1, 2$ , указанных в (6), для всех непрерывно дифференцируемых функций и, в частности, для коэффициента  $a(s, \tau) \in C^2(G)$  верны тождества

$$a_s(s, \tau) = (-1)^i a_\tau(s, \tau) / a(s, \tau), \quad s = h_i\{g_i(x, t), \tau\}, \quad i = 1, 2. \quad (38)$$

Когда из сопряженного модельного телеграфного уравнения (1) коэффициенты  $b(s, \tau) = -a^{-1}(s, \tau)a_\tau(s, \tau)$ ,  $c(s, \tau) = -a(s, \tau)a_s(s, \tau)$ ,  $q(s, \tau) = 0$  и в уравнении (35), тогда ввиду (38) в условиях Гурса (36) функции

$$k_i(s, \tau) = -\{a_\tau(s, \tau) + (-1)^i a(s, \tau)a_s(s, \tau)\} / 2a(s, \tau) = -a_\tau(s, \tau) / a(s, \tau) = -(\ln a(s, \tau))_\tau, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, в условиях Гурса (36) для всех вершин  $M(x, t) \in G$  мы имеем данные Гурса

$$\gamma_i(s, \tau) = \exp \left\{ \int_t^\tau k_i(s, \rho) d\rho \right\} = \exp \left\{ - \int_t^\tau (\ln a(s, \rho))_\rho d\rho \right\} = \exp \left\{ \ln a(s, \rho) \Big|_{\rho=\tau}^{\rho=t} \right\} = \frac{a(x, t)}{a(s, \tau)}, \quad i = 1, 2, \quad (39)$$

так как если одна переменная  $\tau = t$ , то здесь другая переменная  $s = h_i\{g_i(x, t), t\} = x$ ,  $i = 1, 2$ , по вторым тождествам обращения из (7).

Подставляя данные Гурса (39) в формулу (12) теоремы 1, получаем единственное и устойчивое по  $f$  классическое решение (37) задачи Гурса (1), (36) в треугольниках  $\Delta MPQ$  с любой вершиной  $M(x, t) \in G$ . Необходимость и достаточность условий  $f \in C(G)$  и (11) подтверждает теорема 1.

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 при  $F(s, \tau) = 0$  вытекает

**Следствие 3.** Пусть коэффициент  $a(s, \tau) \geq a_0 > 0$ ,  $(s, \tau) \in G$ ,  $a \in C^2(G)$ . Тогда функцией Римана задачи Коши для модельного телеграфного уравнения (4) при начальных условиях  $u(s, 0) = \varphi(s)$ ,  $u_\tau(s, 0) = \psi(s)$ ,  $s \in R$ , в верхней полуплоскости  $G$  является функция  $v(s, \tau; x, t) = a(x, t) / a(s, \tau)$ ,  $(s, \tau) \in G$ .

**Заключение.** Получено классическое решение и установлен критерий корректности по Адамару задачи Гурса для линейного неоднородного сопряженного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью  $a(s, \tau)$  в верхней полуплоскости (теорема 1). Этот критерий корректности её однозначной и устойчивой всюду разрешимости состоит из необходимых и достаточных требований гладкости на правую часть уравнения и данные Гурса. Требования гладкости на правую часть уравнения представляют собой требования непрерывности правой части и непрерывной дифференцируемости соответствующих интегралов от неё. Если правая часть зависит только от одной из независимых переменных, то для корректности необходимо и достаточно только непрерывности правой части (следствие 1). Причём указанная непрерывная дифференцируемость соответствующих интегралов эквивалентна их непрерывной дифференцируемости только по одной из двух независимых переменных (следствие 2). Вычислено частное классическое решение неоднородного сопряженного модельного телеграфного уравнения (замечание 2). В случае однородного сопряженного модельного телеграфного уравнения классическое решение задачи Гурса служит функцией Римана для различных линейных смешанных задач для неоднородного модельного телеграфного уравнения. Найдена функция Римана к задаче Коши (следствие 3) и смешанным задачам для модельного телеграфного уравнения (теорема 2).

Работа поддержана БРФФИ Республики Беларусь (проект № Ф22КИ-001 от 05.11.2021 г.).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ломовцев, Ф. Е. Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой / Ф. Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2021. – № 1. – С. 18–38. – DOI: [10.33581/2520-6508-2021-1-18-38](https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-18-38).
2. Lomovtsev, F. E. The Smoothness Criterion for the Classical Solution to Inhomogeneous Model Telegraph Equation at the Rate  $a(x, t)$  on the Half-Line / F. E. Lomovtsev // Труды 10-го междунар. науч. семинара АМАДЕ-2021. – БГУ : ИВЦ Минфина. – 2022. – С. 43–53.
3. Lomovtsev, F. E. Conclusion of the Smoothness Criterion for the Right-Hand Side of the Model Telegraph Equation with the Rate  $a(x, t)$  by the Correction Method / F. E. Lomovtsev // Современные методы теории краевых задач : материалы XXXIV Междунар. конф. «Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения-

- XXXII», посвященной памяти А. Д. Баева, 3–9 мая 2021 г. Воронеж / ВГУ, МГУ им. М. В. Ломоносова, Математический ин-т им. В. А. Стеклова РАН. – Воронеж : ВГУ, 2021. – С. 284–287.
4. Schwartz, L. *Theorie des distributions* : in 2 vol. / L. Schwartz. – Paris : Hermann, 1950–1951. – 2 vol.
  5. Владимиров, В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 280 с.
  6. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 2004. – 798 с.
  7. Lomovtsev, F. E. Riemann Formula of the Classical Solution to the First Mixed Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients on the Half-Line. / F. E. Lomovtsev // Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям, посвященные 100-летию со дня рождения профессора Ю. С. Богданова : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 1–4 июня 2021 г. / Ин-т математики НАН Беларуси. – Минск, 2021. – С. 201–203.
  8. Ломовцев, Ф. Е. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при характеристических нестационарных первых косых производных на концах / Ф. Е. Ломовцев, Т. С. Точко // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2019. – Т. 9, № 2. – С. 56–75.
  9. Ломовцев, Ф. Е. Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных. / Ф. Е. Ломовцев, В. В. Лысенко // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2019. – № 3(104). – С. 5–17.

## REFERENCES

1. Lomovtsev, F. E. (2021). Pervaya smeshannaya zadacha dlya obshchego telegrafnogo uravneniya s peremennymi koefitsiyentami na polupryamoy [The first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line]. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika [Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics]*, (1), 18–38. DOI: [10.33581/2520-6508-2021-1-18-38](https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-18-38). (In Russ., abstr. in Engl.).
2. Lomovtsev, F. E. (2022). Kriteriy gladkosti klassicheskogo resheniya neodnorodnogo model'nogo telegrafnogo uravneniya pri skorosti  $a(x,t)$  na poluosi [The Smoothness Criterion for the Classical Solution to Inhomogeneous Model Telegraph Equation at the Rate  $a(x,t)$  on the Half-Line]. In *Trudy 10-go mezhdunarodnogo nauchnogo seminaru AMADE-2021 [Proc. 10<sup>th</sup> International Workshop AMADE-2021]* (43–53). Minsk: BSU, ITC of the Ministry of Finance. (In Russ.).
3. Lomovtsev, F. E. (2021) Conclusion of the Smoothness Criterion for the Right-Hand Side of the Model Telegraph Equation with the Rate  $a(x,t)$  by the Correction Method. In *Sovremennye metody teorii kraevykh zadach [Modern methods of the theory of boundary value problems]* (284–287). Voronezh: Publ. VSU.
4. Schwartz, L. (1950–1951). *Theorie des distributions* (Vols. 1–2). Paris: Hermann.
5. Vladimirov, V. S. (1976). *Obobshchennyye funktsii v matematicheskoy fizike [Generalized functions in mathematical physics]*. Moscow: Nauka. (In Russ.).
6. Tikhonov, A. N., & Samarskii, A. A. (2004). *Uraveniya matematicheskoy fiziki [The equations of mathematical physics]*. Moscow: Nauka. (In Russ.).
7. Lomovtsev, F. E. (2021). Riemann Formula of the Classical Solution to the First Mixed Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients on the Half-Line. *Sed'mye Bogdanovskie chteniya po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam, posvyashchennye 100-letiyu so dnya rozhdeniya professora Yu. S. Bogdanova [Seventh Bogdanov Readings on Ordinary Differential Equations, dedicated to the 100<sup>th</sup> anniversary of the birth of Professor Yu. S. Bogdanov]* (201–203). Minsk: IM NAS of Belarus.
8. Lomovtsev, F. E., & Tochko, T. S. (2019). Smeshannaya zadacha dlya neodnorodnogo uravneniya kolebaniy ogranichenoi struny pri kharakteristicheskikh nestatsionarnykh pervykh kosykh proizvodnykh na kontsakh [Mixed problem for an inhomogeneous vibration equation of a bounded string with characteristic non-stationary first oblique derivatives at the ends]. *Vesnik Hrodzenskaha Dzyarzhavnaha Universiteta Imia Ianki Kupaly. Seryia 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, Vylichal'naya Tekhnika i Kiravanne [Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control]*, 9(2), 56–75. (In Russ.).
9. Lomovtsev, F. E., & Lysenko, V. V. (2019). Nekharakteristicheskaya smeshannaya zadacha dlya odnomernogo volnovogo uravneniya v pervoi chetverti ploskosti pri nestatsionarnykh granichnykh vtorykh proizvodnykh [A non-characteristic mixed problem for a one-dimensional wave equation in the first quarter of the plane with non-stationary boundary second derivatives]. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhavnaha universiteta [Bulletin of the Vitebsk Dzyarzhavnaha University]*, 3(104), 5–17. (In Russ., abstr. in Engl.).

Поступила 24.03.2022

**GOURSAT PROBLEM FOR THE ADJOINT MODEL TELEGRAPH EQUATION  
WITH THE RATE  $a(s, \tau)$  IN THE UPPER HALF-PLANE**

**F. LOMOVTSEV**

*In the upper half-plane, the classical solution and correctness criterion of the Goursat problem for a linear inhomogeneous adjoint model telegraph equation with variable rate  $a(s, \tau)$  are found explicitly. An explicit formula is obtained for the classical solution of this Goursat problem, unique and stable with respect to the right-*

hand side of the equation and Goursat data. This formula contains implicit characteristic functions of the equation. In the case of a homogeneous conjugate model telegraph equation, the classical solution of this Goursat problem is the Riemann function in all linear mixed (initial-boundary) problems for an inhomogeneous model telegraph equation with variable rate  $a(s, \tau)$ . This Riemann function has been calculated by us. A correctness criterion according to Hadamard (necessary and sufficient conditions) of its unique and stable on the right-hand side of the equation and the Goursat data solvability is found. This criterion consists of smoothness requirements on the right-hand side of the equation and two Goursat data. The smoothness requirements on the right side of the equation are the condition of continuity of the right-side and the corresponding integral smoothness conditions on the right side of the equation and on the Goursat data – their twice continuous differentiability in the upper half-plane.

**Keywords:** the Goursat problem, a adjoint model telegraph equation, an implicit characteristic functions, a correctness criterion, a classical solution, the Riemann function.

УДК 511.8

DOI 10.52928/2070-1624-2022-38-4-103-111

**МНОЖЕСТВО ПОЛУОКТАВ. II**

**канд. физ.-мат. наук, доц. А. А. КОЗЛОВ**  
(Полоцкий государственный университет)

Сегодня теория гиперкомплексных чисел представляет собой бурно развивающуюся область математических знаний в связи с ее многочисленными приложениями в различных разделах физики. Так, например, дуальные числа позволяют достаточно точно математически смоделировать физическое пространство–время, кватернионы используются в электродинамике, при исследовании вихревых движений, октавы также представляют собой математическую модель возможного описания нашей действительности [1–6].

В статье [7], по аналогии с работой [8] иранских математиков Х. Мортазаила и М. Джафари, давших понятие полукватерниона, введено определение полуоктав и операций над ними, а также установлены некоторые свойства этих операций.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [7]. Здесь введены определения нормы полуоктавы и линейных уравнений над полуоктавами, найдены формулы для решения таких уравнений. Также для полуоктав установлены аналоги формул Эйлера и Муавра, изначально имевших место для комплексных чисел.

**Ключевые слова:** полуоктавы, гиперкомплексные числа.

**Введение.** Сегодня теория гиперкомплексных чисел представляет собой бурно развивающуюся отрасль математических знаний в связи с ее многочисленными приложениями в различных разделах физики (см., например, работы [1–6]). Так, например, дуальные числа позволяют достаточно точно математически смоделировать физическое пространство–время, кватернионы используются в электродинамике, при исследовании вихревых движений, октавы также представляют собой математическую модель возможного описания нашей действительности [1–6].

В статье [7] были указаны основные этапы развития классической теории гиперкомплексных чисел, а также определена, аналогично введенному в 2013 г. иранскими математиками Х. Мортазаилом и М. Джафари множеству полукватернионов [8], совокупность полуоктав и изучены отдельные ее свойства.

**Основная часть.** Данная статья продолжает исследования по полуоктавам, начатые в работе [7].

Напомним следующие дефиниции, введенные в статье [7].

**Определение 1 [7].** Действительной полуоктавой (или просто *полуоктавой*) назовем формальное выражение вида

$$w = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7,$$

где  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$  – действительные числа;

$i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7$  – базисные (мнимые) единицы, удовлетворяющие следующим равенствам:

$$i_k^2 = -1 \text{ при } k = \overline{1,3} \text{ и } i_k^2 = 0 \text{ при } k = \overline{4,7},$$

$$i_k \cdot i_l = i_{k+l} = -i_l \cdot i_k \text{ при } k < l \text{ и } k+l \leq 4,$$

$$i_k \cdot i_l = 0 \text{ при } k+l > 4.$$

Всюду далее множество полуоктав будем обозначать через  $W$ .

**Определение 2 [7].** Суммой полуоктав

$$w_1 = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7 \in W \text{ и } w_2 = b_0 + b_1i_1 + b_2i_2 + b_3i_3 + b_4i_4 + b_5i_5 + b_6i_6 + b_7i_7 \in W$$

назовем полуоктаву  $w_1 + w_2 \in W$ , определяемую равенством

$$w_1 + w_2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i_1 + (a_2 + b_2)i_2 + (a_3 + b_3)i_3 + (a_4 + b_4)i_4 + (a_5 + b_5)i_5 + (a_6 + b_6)i_6 + (a_7 + b_7)i_7.$$

**Определение 3 [1].** Пусть  $c \in R$  и  $w = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7 \in W$ . Произведением действительного числа  $c \in R$  на полуоктаву  $w \in W$  назовем полуоктаву

$$cw = (ca_0) + (ca_1)i_1 + (ca_2)i_2 + (ca_3)i_3 + (ca_4)i_4 + (ca_5)i_5 + (ca_6)i_6 + (ca_7)i_7 \in W.$$

**Определение 4.** Произведением полуоктавы  $w_1 = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7$  на полуоктаву  $w_2 = b_0 + b_1i_1 + b_2i_2 + b_3i_3 + b_4i_4 + b_5i_5 + b_6i_6 + b_7i_7$  назовем полуоктаву  $w_1w_2 \in W$ , определяемую равенством

$$\begin{aligned} w_1w_2 = & (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_1b_0 + a_0b_1)i_1 + \\ & + (a_2b_0 + a_0b_2)i_2 + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)i_3 + \\ & + (a_0b_4 + a_4b_0 + a_1b_3 - a_3b_1)i_4 + (a_5b_0 + a_0b_5)i_5 + (a_6b_0 + a_0b_6)i_6 + (a_7b_0 + a_0b_7)i_7. \end{aligned}$$

Основным результатом работы [7] была следующая

**Теорема 1 [7].** Множество полуоктав  $W$  является неассоциативной, некоммутативной, дистрибутивной алгеброй.

В настоящей статье введено понятие линейного уравнения в полуоктавах и получено решение такого уравнения. Кроме того, для множества полуоктав установлен аналог формул Эйлера и Муавра, справедливых для комплексных чисел.

Прежде чем переходить к понятиям линейного уравнения над полуоктавами и его решения, введем следующие, необходимые в дальнейшем, определения операции сопряжения полуоктав и нормы полуоктавы.

**Определение 5.** Сопряженной полуоктавой для полуоктавы  $w = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7$  назовем полуоктаву

$$\bar{w} = a_0 - (a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7).$$

**Пример 1.** Пусть дана полуоктава  $w = -1 + 2i_1 + 3i_2 - 7i_3 + i_4 - 4i_6 + 8i_7$ . Тогда сопряженной для данной будет полуоктава  $\bar{w} = -1 - 2i_1 - 3i_2 + 7i_3 - i_4 + 4i_6 - 8i_7$ .

**Определение 6.** Норму полуоктавы  $w \in W$  определим следующим образом:  $N_w = w \cdot \bar{w}$ .

В силу определения 4 операции произведения полуоктав имеем равенства

$$\begin{aligned} \bar{w}w = & (a_0a_0 - a_1(-a_1) - a_2(-a_2) - a_3(-a_3)) + (a_1a_0 + a_0(-a_1))i_1 + (a_2a_0 + a_0(-a_2))i_2 + (a_0(-a_3) + a_3a_0) + a_1(-a_2) - a_2(-a_1))i_3 + \\ & + (a_0(-a_4) + a_4a_0 + a_1(-a_3) - a_3(-a_1))i_4 + (a_5a_0 + a_0(-a_5))i_5 + (a_6a_0 + a_0(-a_6))i_6 + (a_7a_0 + a_0(-a_7))i_7 = \\ & = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w \cdot \bar{w} = & (a_0a_0 - (-a_1)a_1 - (-a_2)a_2 - (-a_3)a_3) + (-a_1a_0 + a_0a_1)i_1 + (-a_2a_0 + a_0a_2)i_2 + (a_0a_3 + (-a_3)a_0 + (-a_1)a_2 - (-a_2)a_1)i_3 + \\ & + (a_0a_4 + (-a_4)a_0 + (-a_1)a_3 - (-a_3)a_1)i_4 + ((-a_5)a_0 + a_0a_5)i_5 + ((-a_6)a_0 + a_0(-a_6))i_6 + ((-a_7)a_0 + a_0a_7)i_7 \\ & = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2. \end{aligned}$$

Поэтому норма полуоктавы  $w = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7$  – это неотрицательное действительное число, которое вычисляется по формуле

$$N_w = w \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot w = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2. \quad (1)$$

**Пример 2.** Пусть дана полуоктава  $w = -1 + 2i_1 + 3i_2 - 7i_3 + i_4 - 4i_6 + 8i_7$ . Тогда нормой этой полуоктавы является число  $N_w = (-1)^2 + 2^2 + 3^2 + (-7)^2 = 63$ .

Установим некоторые свойства операции сопряжения полуоктав.

**Теорема 2.** При всяких  $w, w_1, w_2 \in W$  и  $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  для операции сопряжения полуоктав имеют место следующие свойства:

- 1)  $\overline{\bar{w}} = w$ ;
- 2)  $\overline{c_1w_1 + c_2w_2} = c_1\bar{w}_1 + c_2\bar{w}_2$ ;
- 3)  $N_{cw} = c^2N_w$ ;
- 4)  $N_{w_1w_2} \neq N_{w_1} \cdot N_{w_2}$ ;
- 5)  $N_{\bar{w}} = N_w$ .

**Доказательство.**

1. Пусть дана полуоктава  $w = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7 \in W$ . Тогда на основании определения операции сопряжения имеем равенства

$$\begin{aligned} \overline{\overline{w}} &= \overline{a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7} = a_0 - a_1i_1 - a_2i_2 - a_3i_3 - a_4i_4 - a_5i_5 - a_6i_6 - a_7i_7 = \\ &= a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7 = w. \end{aligned}$$

2. В силу определения и свойств операций суммы полуоктав и произведения действительного числа на полуоктаву, а также определения операции сопряжения полуоктав для любых действительных чисел  $c_1, c_2$  и полуоктав  $w_1 = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7$ ,  $w_2 = b_0 + b_1i_1 + b_2i_2 + b_3i_3 + b_4i_4 + b_5i_5 + b_6i_6 + b_7i_7$ , имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \overline{c_1w_1 + c_2w_2} &= \overline{(c_1a_0 + c_2b_0) + (c_1a_1 + c_2b_1)i_1 + (c_1a_2 + c_2b_2)i_2 + (c_1a_3 + c_2b_3)i_3 +} \\ &\quad \overline{+ (c_1a_4 + c_2b_4)i_4 + (c_1a_5 + c_2b_5)i_5 + (c_1a_6 + c_2b_6)i_6 + (c_1a_7 + c_2b_7)i_7} = \\ &= (c_1a_0 + c_2b_0) - (c_1a_1 + c_2b_1)i_1 - (c_1a_2 + c_2b_2)i_2 - (c_1a_3 + c_2b_3)i_3 - \\ &\quad - (c_1a_4 + c_2b_4)i_4 - (c_1a_5 + c_2b_5)i_5 - (c_1a_6 + c_2b_6)i_6 - (c_1a_7 + c_2b_7)i_7 = \\ &= ((c_1a_0) - (c_1a_1)i_1 - (c_1a_2)i_2 - (c_1a_3)i_3 - (c_1a_4)i_4 - (c_1a_5)i_5 - (c_1a_6)i_6 - (c_1a_7)i_7) + \\ &= (c_2b_0) - (c_2b_1)i_1 - (c_2b_2)i_2 - (c_2b_3)i_3 - (c_2b_4)i_4 - (c_2b_5)i_5 - (c_2b_6)i_6 - (c_2b_7)i_7 = c_1\overline{w_1} + c_2\overline{w_2}. \end{aligned}$$

3. Возьмём произвольное число  $c \in \mathbb{R}$  и полуоктаву  $w = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7$ . Тогда по определению 3 операции умножения действительного числа на полуоктаву справедливо равенство

$$cw = (ca_0) + (ca_1)i_1 + (ca_2)i_2 + (ca_3)i_3 + (ca_4)i_4 + (ca_5)i_5 + (ca_6)i_6 + (ca_7)i_7.$$

На основании формулы (1) для вычисления нормы полуоктавы, а также элементарных свойств действительных чисел имеем требуемые соотношения

$$N_{cw} = (ca_0)^2 + (ca_1)^2 + (ca_2)^2 + (ca_3)^2 = c^2(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = c^2N_w. \quad (2)$$

4. Из формулы (1) и определения 4 произведения полуоктав следуют соотношения

$$\begin{aligned} N_{w_1 \cdot w_2} - N_{w_1} \cdot N_{w_2} &= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)^2 + (a_1b_0 + a_0b_1)^2 + (a_2b_0 + a_0b_2)^2 + \\ &\quad + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)^2 - (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = \\ &= 2a_1b_1a_3b_3 + 2a_2b_2a_3b_3 + 2a_0b_3a_1b_2 - 2a_0b_3a_2b_1 + 2a_3b_0a_1b_2 - 2a_3b_0a_2b_1 - a_1^2b_3^2 - a_2^2b_3^2 - a_3^2b_1^2 - a_3^2b_2^2 \neq 0. \end{aligned}$$

5. В силу равенства  $\overline{\overline{w}} = a_0 - (a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7)$  и формулы (1) выполняются соотношения  $N_{\overline{\overline{w}}} = a_0^2 + (-a_1)^2 + (-a_2)^2 + (-a_3)^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = N_w$ .

**Теорема 2** доказана.

**Определение 7.** Обратной для полуоктавы  $w \in W$ , где  $N_w \neq 0$ , назовем полуоктаву  $w^{-1} \in W$ , вычисляемую по формуле

$$w^{-1} = \frac{\overline{w}}{N_w}.$$

**Замечание 1.** Определение 8 корректно, поскольку в силу определения операций умножения действительного числа на полуоктаву, умножения полуоктав и сопряжения полуоктав справедливы следующие соотношения:

$$w \cdot w^{-1} = w \cdot \frac{\overline{w}}{N_w} = (a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7) \times$$

$$\times \left( \frac{a_0}{N_w} - \frac{a_1}{N_w} i_1 - \frac{a_2}{N_w} i_2 - \frac{a_3}{N_w} i_3 - \frac{a_4}{N_w} i_4 - \frac{a_5}{N_w} i_5 - \frac{a_6}{N_w} i_6 - \frac{a_7}{N_w} i_7 \right) = \frac{a_0^2}{N_w} + \frac{a_1^2}{N_w} + \frac{a_2^2}{N_w} + \frac{a_3^2}{N_w} = \frac{N_w}{N_w} = 1,$$

$$w^{-1} \cdot w = \frac{\overline{w}}{N_w} \cdot w = \frac{1}{N_w} \cdot (\overline{w} \cdot w) = \frac{1}{N_w} \cdot N_w = 1.$$

**Теорема 3.** Пусть даны  $c \in \mathbb{R}$ ,  $w \in W$ , причем  $N_w \neq 0$ . Тогда для полуоктавы  $w^{-1}$ , обратной к  $w$ , выполняются следующие свойства:

$$1) (cw)^{-1} = \frac{1}{c} \cdot w^{-1}; \quad 2) N_{w^{-1}} = \frac{1}{N_w}.$$

**Доказательство.**

1. Пусть дана полуоктава  $w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7$ . Из определений для обратной полуоктавы, операций умножения числа на полуоктаву, сопряжения полуоктав, а также формулы (2) вытекают равенства

$$\begin{aligned} (cw)^{-1} &= \frac{\overline{cw}}{N_{cw}} = \frac{\overline{(ca_0) + (ca_1)i_1 + (ca_2)i_2 + (ca_3)i_3 + (ca_4)i_4 + (ca_5)i_5 + (ca_6)i_6 + (ca_7)i_7}}{c^2 N_w} = \\ &= \frac{(ca_0) - (ca_1)i_1 - (ca_2)i_2 - (ca_3)i_3 - (ca_4)i_4 - (ca_5)i_5 - (ca_6)i_6 - (ca_7)i_7}{c^2 N_w} = \\ &= \frac{c(a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - a_3 i_3 - a_4 i_4 - a_5 i_5 - a_6 i_6 - a_7 i_7)}{c^2 N_w} = \frac{\overline{cw}}{c^2 N_w} = \frac{1}{c} \cdot w^{-1}. \end{aligned}$$

2. Поскольку выполняются равенства

$$\begin{aligned} w^{-1} &= \frac{\overline{w}}{N_w} = \frac{a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - a_3 i_3 - a_4 i_4 - a_5 i_5 - a_6 i_6 - a_7 i_7}{N_w} = \\ &= \frac{a_0}{N_w} - \frac{a_1}{N_w} i_1 - \frac{a_2}{N_w} i_2 - \frac{a_3}{N_w} i_3 - \frac{a_4}{N_w} i_4 - \frac{a_5}{N_w} i_5 - \frac{a_6}{N_w} i_6 - \frac{a_7}{N_w} i_7, \end{aligned}$$

то в силу формулы для нормы полуоктавы имеют место соотношения

$$N_{w^{-1}} = \left( \frac{a_0}{N_w} \right)^2 + \left( \frac{a_1}{N_w} \right)^2 + \left( \frac{a_2}{N_w} \right)^2 + \left( \frac{a_3}{N_w} \right)^2 = \frac{1}{N_w^2} (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = \frac{N_w}{N_w^2} = \frac{1}{N_w}.$$

**Теорема 3** доказана.

**Определение 8.** Линейным уравнением во множестве полуоктав назовем уравнения вида

$$w_1 \cdot x = w_2 \quad \text{и} \quad y \cdot w_1 = w_2,$$

где  $w_1, w_2 \in W$  – заданные полуоктавы;

$x, y \in W$  – неизвестные.

Рассмотрим эти уравнения при  $N_{w_1} \neq 0$ . В таком случае существует обратная полуоктава  $w_1^{-1} \in W$ , умножая обе части уравнений на которую (первое уравнение – слева, а второе – справа), получим решение этих уравнений

$$x = w_1^{-1} \cdot w_2 = \frac{\overline{w_1}}{N_{w_1}} \cdot w_2 \quad \text{и, соответственно,} \quad y = w_2 \cdot w_1^{-1} = w_2 \cdot \frac{\overline{w_1}}{N_{w_1}}. \quad (3)$$

**Пример 3.** Пусть дано уравнение в полуоктавах

$$(-1+2i_1+3i_2-7i_3+i_4-4i_6+8i_7) \cdot x = 3+i_1+4i_2-i_3+5i_4-2i_5+4i_6.$$

Обозначим  $w_1 = -1+2i_1+3i_2-7i_3+i_4-4i_6+8i_7$ ,  $w_2 = 3+i_1+4i_2-i_3+5i_4-2i_5+4i_6$ . Из примера 2 следует  $N_{w_1} = 63 \neq 0$ . Тогда в силу формул (3) решением рассматриваемого уравнения будет полуоктава

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1+2i_1+3i_2-7i_3+i_4-4i_6+8i_7}{63} \cdot (3+i_1+4i_2-i_3+5i_4-2i_5+4i_6) = \\ &= \frac{1}{63} \cdot (-1-2i_1-3i_2+7i_3-i_4+4i_6-8i_7) \cdot (3+i_1+4i_2-i_3+5i_4-2i_5+4i_6) = \\ &= \frac{1}{63} (((-1) \cdot 3 - (-2) \cdot 1 - (-3) \cdot 4 - 7 \cdot (-1)) + ((-2) \cdot 3 + (-1) \cdot 1)i_1 + ((-3) \cdot 3 + (-1) \cdot 4)i_2 + \\ &\quad + ((-1) \cdot (-1) + 7 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 - (-3) \cdot 1)i_3 + ((-1) \cdot 5 + (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) - 7 \cdot 1)i_4 + \\ &\quad + (0 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2))i_5 + (4 \cdot 3 + (-1) \cdot 4)i_6 + ((-8) \cdot 3 + (-1) \cdot 0)i_7) = \\ &= \frac{18}{63} - \frac{7}{63}i_1 - \frac{13}{63}i_2 + \frac{17}{63}i_3 - \frac{13}{63}i_4 + \frac{2}{63}i_5 + \frac{8}{63}i_6 - \frac{24}{63}i_7. \end{aligned}$$

Установим теперь формулы Эйлера и Муавра для полуоктав. Для этого введем вначале

**Определение 9.** Любая ненулевая полуоктава  $w = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7$  может быть представлена в полярном виде

$$w = r(\cos \phi + \vec{v} \cdot \sin \phi),$$

где

$$r = \sqrt{N_w} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi,$$

причем

$$\cos \phi = \frac{a_0}{r}, \quad \sin \phi = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{r}.$$

**Определение 10.** Единичный вектор  $\vec{v}$  полуоктавы  $w = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7 \in W$ , где  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$ , определим следующим образом:

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \cdot (a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7).$$

Тогда, пользуясь определением произведения полуоктав, получим равенства

$$\begin{aligned} \vec{v}^2 &= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot (a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7) \cdot (a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7) = \\ &= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot ((0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) + (a_1 \cdot 0 + 0 \cdot a_1)i_1 + (a_2 \cdot 0 + 0 \cdot a_2)i_2 + (0 \cdot a_3 + a_3 \cdot 0 + a_1 \cdot a_2 - a_2 \cdot a_1)i_3 + \\ &\quad + (0 \cdot a_4 + a_4 \cdot 0 + a_1 \cdot a_3 - a_3 \cdot a_1)i_4 + (a_5 \cdot 0 + 0 \cdot a_5)i_5 + (a_6 \cdot 0 + 0 \cdot a_6)i_6 + (a_7 \cdot 0 + 0 \cdot a_7)i_7) = -1, \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\vec{v}^2 = -1.$$

Отсюда с учетом формулы 5) теоремы 2 получим соотношения  $\vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot (-1) = (-1) \cdot \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v}$ , т.е.

$$(\vec{v} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{v}).$$

Последнее равенство говорит о том, что можно корректно определить любую натуральную степень  $n$  единичного вектора  $\vec{v}$ , т.е.

$$\vec{v}^n = \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v} \cdot \dots \cdot \vec{v}}_{n \text{ раз}}$$

Определяя в этом случае для произвольного действительного числа  $\phi$  и единичного вектора  $\vec{v} \in W$  экспоненциальную функцию  $e^{\vec{v}\phi}$  как формальный ряд

$$e^{\vec{v}\phi} = 1 + (\vec{v}\phi) + \frac{(\vec{v}\phi)^2}{2!} + \frac{(\vec{v}\phi)^3}{3!} + \dots,$$

который существует в силу определенных ранее операций сложения полуоктав [7], произведения полуоктавы на число [7], степеней действительного числа  $\phi$  и единичного вектора  $\vec{v}$ , а также очевидного включения  $\vec{v} \in W$ , с учетом соотношения  $\vec{v}^2 = -1$ , получим обобщение формулы Эйлера для единичных векторов  $\vec{v} \in W$

$$e^{\vec{v}\phi} = 1 + (\vec{v}\phi) + \frac{(\vec{v}\phi)^2}{2!} + \frac{(\vec{v}\phi)^3}{3!} + \dots = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \dots + \vec{v}(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \dots) = \cos \phi + \vec{v} \sin \phi,$$

верное при любом действительном  $\phi$ . Таким образом, справедлива

**Теорема 4.** Пусть  $\vec{v}$  – единичный вектор полуоктавы  $w \in W$ , тогда для него справедливо равенство (формула Эйлера)

$$e^{\vec{v}\phi} = \cos \phi + \vec{v} \sin \phi.$$

**Лемма 1.** Пусть  $\vec{v}$  – единичный вектор полуоктавы  $w \in W$ , тогда имеет место равенство

$$(\cos \phi + \vec{v} \sin \phi)(\cos \psi + \vec{v} \sin \psi) = \cos(\phi + \psi) + \vec{v} \sin(\phi + \psi).$$

**Доказательство.** Возьмем произвольную полуоктаву  $w \in W$ , для которой выполняется неравенство  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$ , и рассмотрим единичный вектор  $\vec{v}$  этой полуоктавы. Тогда на основании свойств операций суммы и произведения полуоктав [7], а также равенства  $\vec{v}^2 = -1$  и формулы косинуса и синуса суммы действительных аргументов имеем соотношения

$$\begin{aligned} (\cos \phi + \vec{v} \sin \phi)(\cos \psi + \vec{v} \sin \psi) &= \cos \phi \cos \psi + (\vec{v} \sin \phi) \cos \psi + \cos \phi (\vec{v} \sin \psi) + (\vec{v} \sin \phi) \cdot (\vec{v} \sin \psi) = \\ &= \cos \phi \cos \psi + \vec{v}(\sin \phi \cos \psi) + \vec{v}(\cos \phi \sin \psi) + (\vec{v} \cdot \vec{v}) \cdot (\sin \phi \sin \psi) = \\ &= \cos \phi \cos \psi + \vec{v}(\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi) + (-1)(\sin \phi \sin \psi) = \cos(\phi + \psi) + \vec{v} \sin(\phi + \psi). \end{aligned}$$

**Лемма 1** доказана.

**Определение 11.** Единичной полуоктавой  $w \in W$  назовем полуоктаву вида

$$w_e = e^{\vec{v}\phi} = \cos \phi + \vec{v} \sin \phi,$$

где  $\vec{v}$  – единичный вектор полуоктавы  $w \in W$ .

Тогда в силу определения 9 любая ненулевая полуоктава ( $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$ )

$$w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7$$

представляется через соответствующую единичную полуоктаву в виде

$$w = r \cdot w_e,$$

где, как и ранее,

$$r = \sqrt{N_w} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

**Теорема 5.** Пусть  $w_e \in W$  – единичная полуоктава. Тогда для любого натурального числа  $n$  справедлива формула (формула Муавра)

$$w_e^n = \cos n\phi + \bar{v} \sin n\phi.$$

**Доказательство** проведем методом математической индукции. Для  $n=2$  формула непосредственным образом следует из леммы 1. Предположим, что формула Муавра верна для  $n=k$  и докажем ее для случая  $n=k+1$ . На основании леммы 1 имеем равенства

$$\begin{aligned} w_e^{k+1} &= (\cos \phi + \bar{v} \sin \phi)(\cos \phi + \bar{v} \sin \phi)^k = (\cos \phi + \bar{v} \sin \phi)(\cos k\phi + \bar{v} \sin k\phi) = \\ &= \cos(\phi + k\phi) + \bar{v} \sin(\phi + k\phi) = \cos(k+1)\phi + \bar{v} \sin(k+1)\phi. \end{aligned}$$

По принципу математической индукции **теорема 6** доказана.

Из леммы 1 следует равенство  $(\cos \phi + \bar{v} \sin \phi)(\cos(-\phi) + \bar{v} \sin(-\phi)) = \cos(\phi + (-\phi)) + \bar{v} \sin(\phi + (-\phi)) = \cos 0 + \bar{v} \sin 0 = 1$ . Отсюда получаем, что

$$w_e^{-1} = \cos(-\phi) + \bar{v} \sin(-\phi).$$

Тогда в силу теоремы 3 имеет место равенство

$$w_e^{-n} = \cos(-n\phi) + \bar{v} \sin(-n\phi),$$

которое означает, что для любой единичной полуоктавы  $w_e \in W$  корректно определена любая целая степень  $w_e^l \in W$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ .

**Пример 4.** Пусть дана полуоктава  $w = -1 + \frac{1}{2}i_1 - \frac{1}{2}i_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}i_3 - 2i_4 + 6i_5 - 3i_6 + i_7$ . Для нахождения степени этой полуоктавы (например, десятой степени) воспользуемся теоремой 5. Тогда имеем равенства

$$\begin{aligned} r = \sqrt{N_w} &= \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}. \\ \cos \phi = \frac{a_0}{r} &= \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \phi = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{r} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Из последних двух формул вытекает равенство  $\phi = \frac{3\pi}{4}$ . Поэтому имеет место соотношение

$$w = r \cdot \left( \cos \frac{3\pi}{4} + \bar{v} \sin \frac{3\pi}{4} \right),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \cdot (a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} \left( \frac{1}{2}i_1 - \frac{1}{2}i_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}i_3 - 2i_4 + 6i_5 - 3i_6 + i_7 \right) = \frac{1}{2}i_1 - \frac{1}{2}i_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}i_3 - 2i_4 + 6i_5 - 3i_6 + i_7. \end{aligned}$$

На основании формулы Муавра (теорема 5) имеем равенства

$$w^{10} = (r \cdot (\cos \frac{3\pi}{4} + \bar{v} \sin \frac{3\pi}{4}))^{10} = r^{10} \cdot (\cos \frac{3\pi}{4} + \bar{v} \sin \frac{3\pi}{4})^{10} = (\sqrt{2})^{10} (\cos(10 \cdot \frac{3\pi}{4}) + \bar{v} \sin(10 \cdot \frac{3\pi}{4})) = 2^5 (0 - \bar{v}) = -2^5 \bar{v} =$$

$$= -2^4 i_1 + 2^4 i_2 - (2^4 \cdot \sqrt{2}) i_3 + (2 \cdot 2^5) i_4 - (6 \cdot 2^5) i_5 + (3 \cdot 2^5) i_6 - 2^5 i_7 = -16i_1 + 16i_2 - 16\sqrt{2}i_3 + 32i_4 - 192i_5 + 96i_6 - 32i_7.$$

**Заключение.** Данная работа продолжает исследования, начатые в статье [7]. Здесь введено определение нормы полуоктавы, на основании которого были получены формулы для решения линейных уравнений над полуоктавами. Кроме того, пользуясь введенным в настоящей статье разбиением полуоктавы на сумму ее скалярной и векторной частей, автор доказал для полуоктав справедливость формул Эйлера и Муавра, изначально имевших место для комплексных чисел.

Приемы и методы, используемые в настоящей работе, позволяют в дальнейшем исследовать уравнения над полуоктавами более высоких порядков (например, второго, третьего и т.д.).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Яглом, И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии / И. М. Яглом. – М. : Физматлит, 1963. – 192 с.
2. Павлов, Д. Г. Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной / Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2010. – № 2(14), т. 7. – С. 11–37.
3. Петров, А. М. Кватернионное представление вихревых движений / А. М. Петров. – М. : Компания «СПУТНИК», 2006. – 32 с.
4. Пенроуз, Р. Спиноры и пространство–время : в 2 т. / Р. Пенроуз, В. Риндлер. – М. : Мир, 1987–1988. – 2 т.
5. Кубышкин, Е. И. Нелинейная алгебра пространства-времени / Е. И. Кубышкин. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 304 с.
6. Кубышкин, Е. И. Октавы и наш восьмимерный мир / Е. И. Кубышкин. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 256 с.
7. Козлов, А. А. Множество полуоктав. I / А. А. Козлов // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2016. – № 12. – С. 75–85.
8. Mortazaasl, H. A study on semi-quaternions algebra in semi-Euclidean 4-space / H. Mortazaasl, M. Jafari // Mathematical Sciences And Applications E-Notes. – 2013. – Vol. 1, № 2. – P. 20–27.

#### REFERENCES

1. Yaglom, I. M. (1963). *Kompleksnyye chisla i ikh primeneniye v geometrii*. Moscow: Fizmatlit. (In Russ.).
2. Pavlov, D. G., & Kokarev, S. S. (2010). Algebraicheskaya edinaya teoriya prostranstva-vremeni i materii na ploskosti dvoynoi peremennoi. *Giperkompleksnyye chisla v geometrii i fizike*, 2(14), vol. 7, 11–37. (In Russ.).
3. Petrov, A. M. (2006). *Kvaternionnoe predstavlenie vikhrevykh dvizhenii*. Moscow: Kompaniya «SPUTNIK». (In Russ.).
4. Penrouz, R., & Rindler, V. (1987–1988). *Spinory i prostranstvo–vremya [Spinors and space-time]* (in 2 vol). Moscow: Mir. (In Russ.).
5. Kubyshkin, E. I. (2009). *Nelineinaya algebra prostranstva-vremeni*. Moscow: Knizhnyi dom «LIBROKOM». (In Russ.).
6. Kubyshkin, E. I. (2013). *Oktavy i nash vos'mimernyi mir*. Moscow: Knizhnyi dom «LIBROKOM». (In Russ.).
7. Kozlov, A. A. (2016). Mnozhestvo poluoktav. I [The set of semi octave. I]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (12), 75–85. (In Russ., abstr. in Engl.).
8. Mortazaasl, H., & Jafari, M. (2013). A study on semi-quaternions algebra in semi-Euclidean 4-space. *Mathematical Sciences And Applications E-Notes*, 1(2), 20–27.

Поступила 13.04.2022

#### THE SET OF SEMI OCTAVE. II

A. KOZLOV

Today, the theory of hypercomplex numbers is a rapidly developing field of mathematical knowledge due to its numerous applications in various branches of physics. For example, dual numbers allow us to model the physical space-time quite accurately mathematically, quaternions are used in electrodynamics, in the study of vortex motions, octaves also represent a mathematical model of a possible description of our reality [1-6].

*In the article [7], by analogy with the work [8] of the Iranian mathematicians X. Mortazashl and M. Jafari, who gave the concept of a semi-quaternion, the definition of semi-octaves and operations on them is introduced, as well as some properties of these operations are established.*

*This work continues the research started in [7]. Definitions of the norm of semi-octaves and linear equations over semi-octaves are introduced here, formulas for solving such equations are found. Analogs of the Euler and Moivre formulas, which originally took place for complex numbers, are also established for semi-octaves.*

**Keywords:** *semi-octave, hypercomplex numbers.*

## СОДЕРЖАНИЕ

### ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

<i>Kechik D., Kosmach N., Riabtsev P., Tolkach R., Davydov I.</i> System of vessel vibrational diagnosing .....	2
<i>Ехилевский С. Г., Голубева О. В., Забелендик О. Н.</i> Метод статистических моментов в полиномиальной регрессии корреляционной зависимости .....	6
<i>Игнатъева С. А.</i> Принципы организации и анализ подходов к повышению точности повторной идентификации людей в распределенных системах видеонаблюдения .....	13
<i>Оськин А. Ф., Оськин Д. А.</i> Алгоритм и программа численной оптимизации, реализующие метод роя частиц .....	26
<i>Ходосевич А. В., Богущ Р. П.</i> Клиент-серверная система управления парковками на основе анализа данных систем видеонаблюдения .....	32

### ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ (ФИЗИКА)

<i>Аманова М. А., Навныко В. Н., Шепелевич В. В.</i> Влияние обратного пьезоэлектрического и фотоупругого эффектов на указательную поверхность нормальной составляющей обратного тензора диэлектрической проницаемости кристалла $Bi_{12}TiO_{20}$ .....	38
<i>Богущ В. А., Родионова В. Н., Танана О. В.</i> Моделирование параметров устройства связи измерительного резонатора с СВЧ-трактом .....	43
<i>Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Бринкевич Д. И., Просолович В. С., Колос В. В., Зубова О. А.</i> Прочностные свойства фоторезистов для взрывной литографии .....	49
<i>Вершинин А. С., Грозберг Ю. Г.</i> Повышение эффективности прямого преобразования механической энергии в тепловую .....	56
<i>Довгяло Д. А., Янушкевич В. Ф., Тихонович В. А.</i> Пусковые токи в тороидальных трансформаторах .....	62
<i>Кийко А. Н., Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Бринкевич Д. И.</i> Накопление радионуклидов в сменных деталях и водной мишени циклотрона .....	69
<i>Янушкевич В. Ф., Алиева С. П., Калинин С. В.</i> Электромагнитные методы поиска и оконтуривания углеводородных залежей .....	81

### ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ (МАТЕМАТИКА)

<i>Ломовцев Ф. Е.</i> Задача Гурса для сопряженного модельного телеграфного уравнения со скоростью $a(s, \tau)$ в верхней полуплоскости .....	92
<i>Козлов А. А.</i> Множество полуоктав. II .....	103