

MIESIĘCZNIK  
POŁOSKI.

№ 11(39), 2022

Т о м I.  
Р о к 1818.

*«Вестник Полоцкого государственного университета»  
продолжает традиции первого в Беларуси литературно-  
научного журнала «Месячник Полоцкий».*

---

---

## ВЕСТНИК ПОЛОЦКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА Серия С. Фундаментальные науки

В серии С научно-теоретического журнала публикуются статьи, прошедшие рецензирование, содержащие новые научные результаты в области информатики, вычислительной техники и управления, физики и математики.

---

---

## ВЕСНІК ПОЛАЦКАГА ДЗЯРЖАУНАГА УНІВЕРСИТЭТА Серыя С. Фундаментальныя навукі

У серыі С навукова-тэарэтычнага часопіса друкуюцца артыкулы, якія прайшлі рэцэнзаваанне, змяшчаюць новыя навуковыя вынікі ў галіне інфарматыкі, вылічальнай тэхнікі і кіравання, фізікі і матэматыкі.

---

---

## HERALD OF POLOTSK STATE UNIVERSITY Series C. Fundamental sciences

Series C includes reviewed articles which contain novelty in research and its results in the field of computer science, computer engineering and management, physics and mathematics.

---

Журнал входит в Российский индекс научного цитирования.  
Электронная версия номера размещена на сайте <https://journals.psu.by/index.php/fundamental/index>.

Адрес редакции:  
Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой,  
ул. Блохина, 29, г. Новополоцк, 211440, Беларусь  
тел. + 375 (214) 59 95 44, e-mail: [vestnik@psu.by](mailto:vestnik@psu.by)

Отв. за выпуск: С. А. Вабищевич.  
Редактор С. Е. Рясова.

Подписано к печати 15.11.2022. Бумага офсетная 70 г/м<sup>2</sup>. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Ризография.  
Усл. печ. л. 14,41. Уч.-изд. л. 17,38. Тираж 50 экз. Заказ 650.

**ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ**

УДК 623.618

DOI 10.52928/2070-1624-2022-39-11-2-7

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДИКИ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ НОВЫХ РУБЕЖЕЙ ОХРАНЫ**

**Е. И. МИХНЁНОК**, канд. техн. наук, доц. **А. В. ХИЖНЯК**  
(Военная академия Республики Беларусь, Минск)

*Рассматривается порядок применения разработанной авторами методики оценки эффективности технических средств в составе интегрированной системы охраны Государственной границы для обоснования состава технических средств при проектировании новых рубежей охраны.*

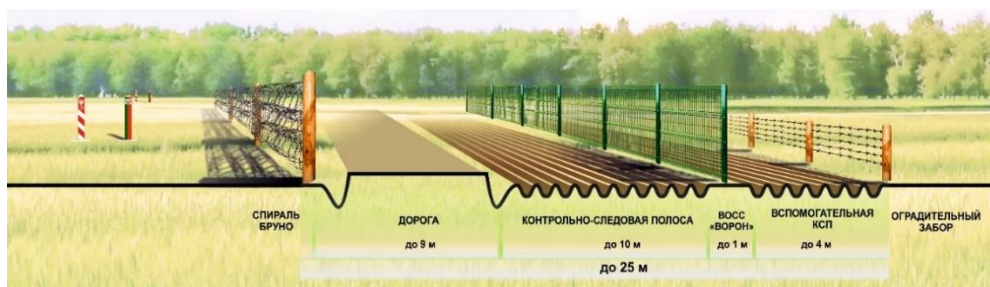
**Ключевые слова:** методика оценки, эффективность, технические средства охраны, рубеж охраны.

**Введение.** События последнего времени говорят о том, что вопрос повышения эффективности охраны Государственной границы становится как никогда актуальным. Решение данного вопроса осуществляется, в том числе прикрытием отдельных направлений новыми рубежами охраны. Определение подходов к обоснованию состава технических средств охраны, разворачиваемых на данных рубежах, является актуальной научной и практической задачей.

Авторами в рамках проводимых исследований разработана методика оценки эффективности технических средств в составе интегрированной системы охраны [1; 2]. Отличительной особенностью разработанной методики является возможность как оценки эффективности обнаружения «реального» нарушителя техническими средствами охраны, так и обоснование состава технических средств при проектировании новых рубежей охраны Государственной границы.

Таким образом, целью данной статьи является описание порядка применения методики оценки эффективности технических средств при проектировании новых рубежей охраны.

**Основная часть.** Проектирование технических систем охраны для рубежей (участков) Государственной границы, а также их оборудование и содержание, являются задачами инженерного обеспечения органов пограничной службы. Решение данных задач направлено на повышение эффективности охраны Государственной границы. Рубеж охраны является основным элементом системы инженерных сооружений и заграждений и представляет собой участок местности, на котором оборудуются контрольно-следовая полоса, дорога, инженерные заграждения, сооружения для наблюдения и устанавливаются технические средства охраны границы. Пример построения типового рубежа охраны представлен на рисунке 1<sup>1</sup>.



**Рисунок 1. – Пример типового рубежа охраны Государственной границы**

По типам технические средства охраны подразделяются: на технические средства и системы охраны; технические средства и системы наблюдения; технические средства и системы освещения местности.

По принципу действия технические средства, применяемые для решения задачи обнаружения нарушителей, делятся на группы как показано на рисунке 2.

<sup>1</sup> Инструкция об организации инженерного обеспечения оперативно-служебной деятельности территориальных органов пограничной службы Республики Беларусь : утв. приказом Председателя Гос. погран. ком. Респ. Беларусь 14.07.2017, № 351. – Минск : Госпогранкомитет, 2017. – 136 с.



Рисунок 2. – Классификация технических средств охраны Государственной границы

При проектировании технической системы нового рубежа охраны должны соблюдаться следующие условия: состав, структура построения и функции системы должны быть технически и экономически обоснованы; система должна удовлетворять требованиям рациональности, целостности, перспективности и динамичности.

Рациональность выбираемого варианта системы достигается ее условной оптимизацией. При этом должна соблюдаться минимизация затрат на его реализацию при заданной эксплуатационной надежности. Условность оптимизации определяется невозможностью математической формализации всего многообразия факторов. К таким факторам относятся: условия функционирования технических средств, тактика поведения нарушителей, различные дестабилизирующие факторы и др.

Целостность выбираемого варианта системы обеспечивается наилучшим сочетанием и взаимодействием ее составных частей, имеющих ограниченные тактико-технические возможности и ресурс. Перспективность выбираемого варианта системы означает, что она должна обеспечивать условия для своего развития с учетом возможных изменений в процессе эксплуатации объекта и появлением новых технических средств охраны. Динамичность выбираемого варианта системы заключается в гарантированном выполнении ею целевых функций в течение заданного срока эксплуатации с учетом износа и восстанавливаемости технических средств охраны.

Проектируемая техническая система охраны должна обеспечивать: экономичность и прогрессивность технических решений, надежность работы, взрывобезопасность, пожаробезопасность, требования технической эстетики, удобство и безопасность ее содержания, быть устойчивой к воздействиям внешних факторов, возникающих при ее эксплуатации, учитывать при функционировании возможное влияние помех бытовых радиоэлектронных, электронагревательных и вентиляционных приборов, животных, транспорта, вероятного присутствия людей в непосредственной близости от работающих приборов системы, предусматривать блокировку всех уязвимых мест.

Основу технических систем охраны, применяемых для оборудования участков Государственной границы, составляют технические средства, которые обеспечивают: обнаружение нарушителя при его воздействии на чувствительные элементы (зоны обнаружения) технических средств охраны; передачу в подразделения информации о проникновении на охраняемый объект с указанием места нарушения; видеонаблюдение за охраняемым участком, передачу в подразделения видеoinформации с участков охраны; сбор, обработку, хранение и представление в заданном виде сигнализационной и видеoinформации дежурной службе подразделения границы; дистанционный контроль и управление доступом.

При проектировании технической системы охраны наиболее часто используются: интегрированные системы охраны протяженных участков Государственной границы и телевизионного (тепловизионного) видеонаблюдения; быстроразвертываемые интегрированные системы охраны для охраны локальных участков Государственной границы (отдельных направлений); стационарные посты технического наблюдения (тепловизионные, радиолокационные, видеотеpловизионные, интегрированные) для охраны локальных участков Государственной границы.

Применение различных технических систем и средств, построенных в том числе на различных физических принципах, позволяет как воспрепятствовать движению транспортных средств, затруднить продвижение людей, так и обеспечить их своевременное обнаружение. Именно своевременность обнаружения факта нарушения позволяет должностным лицам оперативно принимать решения по применению имеющихся сил и средств в целях задержания нарушителей.

Следовательно, при определении состава технических средств ключевым является достижение требуемого качества решения задачи обнаружения нарушителей Государственной границы. Однако при проектировании и построении современной территориально распределенной системы охраны, к которой относится рубеж охраны Государственной границы, должна учитываться специфика, характерная для объектов с большим периметром. Она заключается в следующем:

1. Плотность нарушений зоны ответственности неравномерна. Технические средства охраны должны устанавливаться там, где плотность нарушений предполагается максимальной (например, около основных транспортных путей пересечения границы, а также на наиболее благоприятных для этого маршрутах).

2. Маскируемые быстроразвертываемые средства обнаружения имеют преимущество создания «невидимого» рубежа охраны. Технические средства охраны, стационарно установленные в зоне ответственности, с течением времени могут стать предметом исследования слабых мест потенциальными нарушителями, поэтому через некоторое время их эффективность обнаружения может снизиться. Однако при прогнозируемой долговременной повышенной плотности нарушений установка стационарных технических средств охраны оправдана.

3. При выборе конкретного технического средства должны учитываться как предполагаемые условия функционирования, так и его возможности, определяемые тактико-техническими характеристиками. При этом ограничения, накладываемые его физическим принципом действия, должны устраняться путем создания условий, способствующих реализации максимальной эффективности применения конкретного технического средства. Например, для применения оптико-электронных систем обнаружения в лесной местности необходимо обустривать просеки, размеры которых обеспечат максимально реализуемую дальность обнаружения.

4. Различные типы нарушителей имеют разный уровень подготовки к преодолению рубежей охраны [3].

Учитывая тот факт, что конечное решение об обнаружении нарушителя принимается дежурным по подразделению охраны, то технические средства должны обеспечивать однозначность понимания причин их срабатывания. Выполнение данного требования обеспечивается при отображении причин срабатывания дежурному по подразделению, что позволяет принять обоснованное решение на применение имеющихся сил и средств.

В разработанной авторами методике [2] впервые при оценке эффективности обнаружения технического средства учитывается вероятность возникновения ошибки при принятии решения о наличии «реального» нарушителя. Это позволяет достоверно оценивать технические средства охраны как с возможностью визуального отображения места их срабатывания, так и без него. Математическая формализация данной ошибки включает в себя возможные имитирующие действия нарушителя в целях повышения вероятности своего необнаружения, а также вероятность классификации нарушителя дежурным по подразделению охраны.

Применение данной методики в обратном порядке позволяет обосновывать состав технических средств охраны на конкретном рубеже с точки зрения достижения ими требуемой вероятности обнаружения «реального» нарушителя. В итоге вычисляется требуемая вероятность обнаружения техническим средством охраны, определяемая тактико-техническими характеристиками, что позволяет производить конечный выбор состава технических средств.

Исходными данными являются:

1. Значение вероятности обнаружения нарушителя на проектируемом участке.
2. Значение вероятности возникновения ошибки при принятии решения о наличии «реального» нарушителя.
3. Требования, предъявляемые к техническим средствам охраны, а также условия их эксплуатации.

Проведенные авторами исследования показали, что данные вероятности достаточно взаимосвязаны. На значение вероятности обнаружения «реального» нарушителя непосредственно влияет возможность визуального отображения информации о причине срабатывания технических средств охраны. Для технических средств без данной возможности значение вероятности возникновения ошибки при принятии решения о наличии «реального» нарушителя составляет 0,72–0,87, а вероятность обнаружения «реального» нарушителя 0,13–0,26. Данные значения определяются как количеством срабатываний технических средств от «реальных» нарушителей и внешних факторов, так и условиями их эксплуатации.

Вероятность обнаружения дежурным по подразделению  $i$ -го нарушителя, движущегося через  $k$ -й участок, на котором размещено  $M$   $j$ -х технических средств охраны, с учетом вероятности возникновения ошибки при принятии решения о наличии «реального» нарушителя имеет вид

$$P_{\text{обн}_i} = \left( 1 - \prod_{j=1}^M (1 - P_{o_{ij}}) \right) (1 - P_{\text{ош}_i}), \quad (1)$$

где  $P_{\text{обн}_i}$  – вероятность обнаружения  $i$ -го нарушителя;

$P_{o_{ij}}$  – вероятность обнаружения  $i$ -го нарушителя  $j$ -м техническим средством охраны;

$P_{\text{ош}_i}$  – вероятность возникновения ошибки при принятии решения о наличии  $i$ -го «реального» нарушителя дежурным по подразделению охраны;

$M$  – количество  $j$ -х технических средств охраны, размещенных на  $k$ -м участке.

Значение  $P_{o_{ij}}$  вычисляется в соответствии с выражением (2):

$$P_{o_{ij}} = P_{o_j} P_{mc_j} P_{\partial_j}, \quad (2)$$

где  $P_{o_j}$  – заявленная вероятность обнаружения  $j$ -м техническим средством охраны;

$P_{mc_j}$  – вероятность технически исправного состояния  $j$ -го технического средства охраны;

$P_{\partial_j}$  – вероятность доставки сообщения об обнаруженном нарушителе  $j$ -м техническим средством охраны.

При расчете вероятности  $P_{o_{ij}}$  возможно следующее допущение: технические средства охраны исправны, состояние каналов связи и передачи данных обеспечивает доставку сообщения об обнаруженном объекте. Следовательно, значения  $P_{mc_j}$  и  $P_{\partial_j}$  можно считать близкими к 1 и не учитывать.

Порядок расчета значения  $P_{o_{ш_i}}$  подробно рассмотрен в [1; 2]. Стоит отметить, что при проектировании нового рубежа охраны данных для расчета  $P_{o_{ш_i}}$  может не быть или они могут иметь ограниченный характер. В данном случае, опираясь на проведенные авторами исследования,  $P_{o_{ш_i}}$  задается исходя из следующих условий:

– при наличии возможности отображения дежурному по подразделению причины срабатывания технического средства охраны и ее классификации значение  $P_{o_{ш_i}}$  составляет менее 0,01;

– при отсутствии данной возможности значение  $P_{o_{ш_i}}$  находится в интервале от 0,72 до 0,87, поэтому целесообразно использовать среднее значение 0,8.

Рассмотрим порядок применения методики на примере. Необходимо определить состав технических средств, применение которых возможно при построении нового рубежа охраны Государственной границы. При этом вероятность обнаружения «реального» нарушителя должна составлять не менее 0,99, а вероятность возникновения ошибки при принятии решения о наличии «реального» нарушителя должна составлять не более 0,007. Технические средства должны обеспечивать возможность отображения визуальной информации о месте их срабатывания, а также обеспечить возможность автоматического обнаружения потенциальных нарушителей, движущихся вдоль проектируемого рубежа охраны.

Анализ решения задачи построения нового рубежа охраны позволяет сделать следующие выводы:

1. Необходимо использовать не менее двух технических средств, построенных на различных физических принципах.

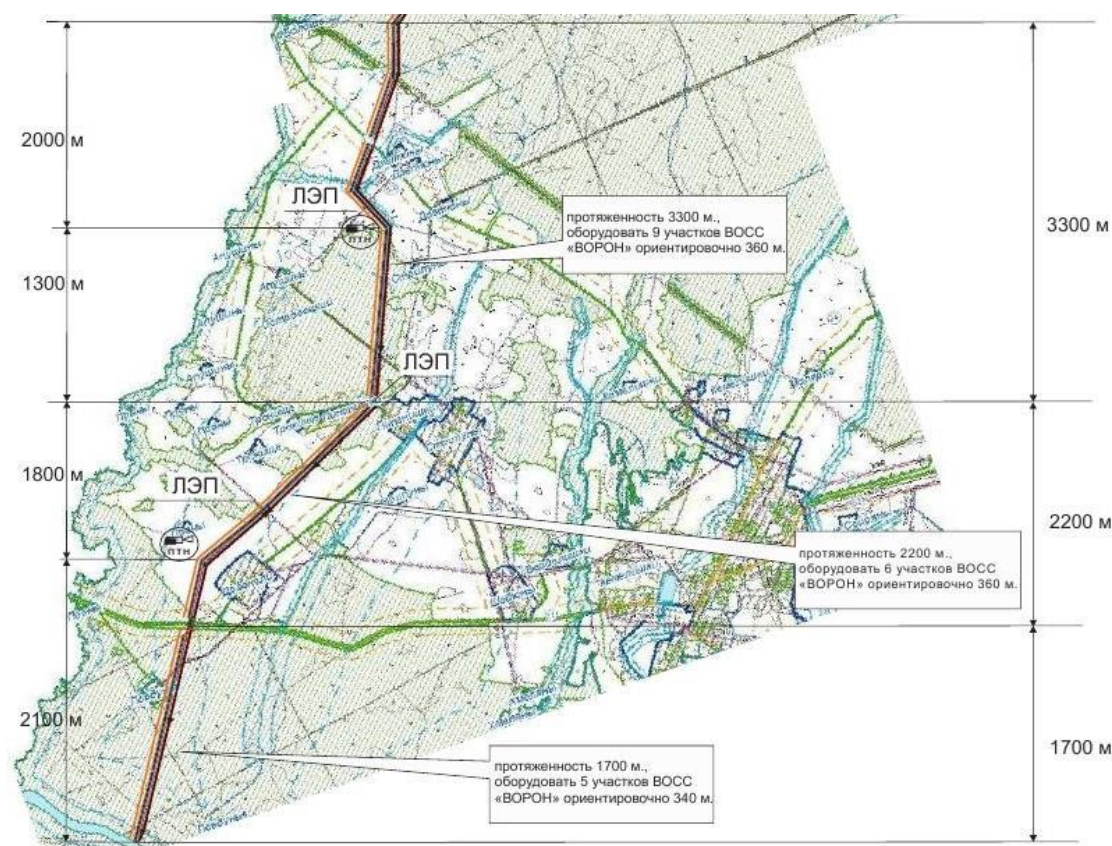
2. Технические средства должны обеспечивать возможность затруднения преодоления нарушителем рубежа охраны, при этом должен фиксироваться факт и попытка преодоления, а также передаваться информация о месте их срабатывания. Реализация данных требований возможна при применении комплексов периметровых средств охраны.

3. Так как требуется обеспечить возможность автоматического обнаружения потенциальных нарушителей, движущихся вдоль проектируемого рубежа охраны, а также отображение визуальной информации о месте срабатывания технического средства, то реализация данных требований возможна только при применении специализированной оптико-электронной системы наблюдения. Наряду с этим данная система должна обеспечивать совместное функционирование с другими техническими средствами охраны.

В настоящее время в качестве основного технического средства охраны в органах пограничной службы используется комплекс периметровых средств обнаружения «Ворон». Применение данного комплекса позволяет создавать многозонные и многорубежные периметровые системы обнаружения на основе волоконно-оптических распределенных датчиков деформаций на ограждениях различных типов. Заявленная производителем вероятность обнаружения нарушителя составляет 0,98. Следовательно, необходимо определить второе техническое средство охраны.

Подставив в выражение (1) заданные значения вероятностей, получим вероятность обнаружения второго технического средства охраны не менее 0,8. Учет данного значения, а также предъявляемых требований к возможностям технических средств, свидетельствует, что в качестве дополнительного технического средства охраны следует использовать устройство с опорно-поворотной платформой и реализованной функцией автоматического обнаружения потенциального нарушителя. Примером такого изделия является специализированный пост технического наблюдения (совместная разработка ОАО «Пеленг» и Военной академии). Данное изделие обеспечивает совместное функционирование с техническими средствами охраны путем отображения дежурному по подразделению охраны информации о месте их срабатывания, а также как отдельное средство автоматически обнаруживает потенциальных нарушителей, движущихся в своей зоне действия.

Вариант размещения технических средств охраны на местности представлен на рисунке 3.



**Рисунок 3. – Вариант построения технических средств для проектируемого рубежа охраны Государственной границы**

**Заключение.** В статье рассмотрен порядок применения разработанной авторами методики оценки эффективности технических средств в составе интегрированной системы охраны для обоснования состава технических средств при проектировании новых рубежей охраны Государственной границы с точки зрения достижения требуемой вероятности обнаружения «реального» нарушителя.

Проведенные авторами исследования показали, что разработанная методика является достаточно универсальным инструментарием. Она позволяет оценивать различные технические средства охраны как совместно функционирующие на одном участке, так и отдельно. При этом основным показателем выступает вероятность обнаружения дежурным по подразделению  $i$ -го нарушителя, движущегося через  $k$ -й участок, на котором размещено  $M$   $j$ -х технических средств охраны, с учетом вероятности возникновения ошибки при принятии решения о наличии «реального» нарушителя. Решение обратной задачи позволяет обосновать состав технических средств охраны на конкретном рубеже.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Михнёнок, Е. И. Подход к оценке эффективности технических средств применяемых для решения задач охраны Государственной границы / Е. И. Михнёнок, А. В. Хижняк // Изв. Гомел. гос. ун-та имени Ф. Скорины. – 2019. – № 3. – С. 112–116.
2. Михнёнок, Е. И. Методика оценки эффективности технических средств в составе интегрированной системы охраны Государственной границы / Е. И. Михнёнок, А. В. Хижняк // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2019. – № 12. – С. 67–70.
3. Звездинский, С. С. О сигнализационной надежности периметровых средств обнаружения / С. С. Звездинский // БДИ. – 2004. – № 2. – С. 32–38.

#### REFERENCES

1. Mikhnenok, E. I., & Khizhnyak, A. V. (2019). Podkhod k otsenke effektivnosti tekhnicheskikh sredstv primenyaemykh dlya resheniya zadach okhrany Gosudarstvennoi granitsy. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni F. Skoriny [Proceedings of Francisk Scorina Gomel State University]*, (3). 112–116. (In Russ., abstr. in Engl.).

2. Mikhnenok, E. I., & Khizhnyak, A. V. (2019). Metodika otsenki effektivnosti tekhnicheskikh sredstv v sostave integrirovannoi sistemy okhrany Gosudarstvennoi granitsy [Method of an estimation of efficiency of technical means part of an integrated system of State border protection]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (12), 67–70. (In Russ., abstr. in Engl.).
3. Zvezhinskii, S. S. (2004). O signalizatsionnoi nadezhnosti perimetrovykh sredstv obnaruzheniya [On the signaling reliability of perimeter detection tools]. *BDI*, (2), 32–38. (In Russ., abstr. in Engl.).

*Поступила 07.09.2022*

## **APPLICATION OF THE METHODOLOGY FOR EVALUATING THE EFFECTIVENESS OF TECHNICAL MEANS IN THE DESIGN OF NEW SECURITY FRONTIERS**

***E. MIKHNIONAK, A. KHIZNIAK***  
*(Military Academy of the Republic of Belarus, Minsk)*

*The article discusses the procedure for applying the methodology developed by the authors for evaluating the effectiveness of technical means as part of an integrated system of state border protection to substantiate the composition of technical means in the design of new security boundaries.*

**Keywords:** *assessment methodology, efficiency, technical means of protection, the border of protection.*

УДК 004.94, 621.39

DOI 10.52928/2070-1624-2022-39-11-8-15

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ АБОНЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЦЕПИ МАРКОВА ПРИ ФОРМИРОВАНИИ КАРТЫ РАДИОСРЕДЫ ДЛЯ КОГНИТИВНОЙ СИСТЕМЫ СВЯЗИ**

**Е. Р. АДАМОВСКИЙ**, д-р техн. наук, доц. **Р. П. БОГУШ**, канд. техн. наук, доц. **В. М. ЧЕРТКОВ**  
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)  
канд. техн. наук **Н. М. НАУМОВИЧ**, канд. техн. наук, доц. **И. К. СТЕЖКО**  
(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск)

*Представлена методика формирования расписаний перемещения и сеансов передачи данных абонентских устройств имитационной модели построения карты радиосреды для когнитивной системы сотовой связи. Методика определяет поведение абонентов как псевдослучайное на малых масштабах времени, но периодически повторяющееся в течение больших интервалов. Учитывается влияние на поведение абонентов некоторых временных параметров: типы дня, такие как рабочий, выходной, праздничный; номер дня недели; номер недели месяца. Формирование сценариев осуществляется с использованием бинарных последовательностей, получаемых с помощью цепи Маркова, и генератора импульсного шума для изменения состояния абонентов. Программная реализация модели выполнена в программной среде MatLab, представлены результаты исследований, которые подтверждают корректность работы модели и возможность использования предложенного подхода для формирования карты радиосреды.*

**Ключевые слова:** когнитивное радио, сценарии связи абонентов, имитационное моделирование.

**Введение.** Телекоммуникационные системы в процессе функционирования, как правило, не используют весь выделенный для них спектральный диапазон одновременно, при этом свободные частоты не могут быть использованы вторичными пользователями, поскольку вносимые ими помехи способны нарушить работу первичных пользователей. С увеличением числа систем связи и их абонентов, невозможность использования на вторичной основе лицензированных частот усугубляет дефицит частотного ресурса по причине его нерационального использования. Возможным решением проблемы является технология динамического доступа к спектру, в качестве практической реализации которой выступают системы когнитивного радио (*cognitive radio, CR*). Задача CR заключается в определении доступных временно свободных частот целевой системы связи, их использование и своевременное освобождение канала в случае появления первичных пользователей. При разработке таких систем первым этапом является моделирование системы связи, а значительную сложность представляет имитация поведения пользователей системы связи, которыми являются устройства под управлением человека, по причине большого числа факторов, влияющих на особенности поведения. Анализ источников свидетельствует об отсутствии общепринятой модели для описания поведения пользователей систем связи, поэтому существует ряд подходов, которые зависят от поставленных задач [1–3].

В работе [4] представлена имитационная модель системы сотовой связи для формирования карты радиосреды (*radio environment map, REM*) CR [5], объектами которой являются базовые станции (*base station, BS*) и абонентские устройства (*user equipment, UE*). Модель рассчитывает актуальное состояние REM в каждой ячейке координатной сетки с учетом потерь при распространении радиосигналов от излучающих устройств и сохраняет информацию для дальнейшей обработки на внешние файлы целевого устройства. Выходные данные модели могут быть использованы для прогнозирования конфигурации радиосреды вторичными пользователями, в качестве которых выступают системы когнитивного радио.

Следует отметить, что в реальности использование каналов связи абонентами не абсолютно случайно, так как их перемещения, входящие и исходящие сеансы передачи содержат в себе явные или скрытые периодичности и подчиняются сложным законам, которые, тем не менее, можно попытаться аппроксимировать более простыми функциями при моделировании. Например, анализ реальных наборов данных, полученных для различных систем связи [6; 7], подтверждает устойчивый общий характер изменения трафика в рамках суток: спад активности ночью, пики активности в обеденное время и вечером.

В работе [8] при моделировании поведения абонентов учитывались время суток, день недели, определенные даты, периоды месяца и года. Для формирования последовательностей, отражающих динамику трафика и активность пользователей, использовались процессы с распределением Пуассона [9], Парето [10], экспоненциальным распределением [11], а также цепи Маркова [12]. Таким образом, задача имитации абонентов системы связи сводится к генерации управляющих последовательностей, которые отражали бы закономерности в поведении, характерные для реальных пользователей.



Цель работы заключается в создании методики формирования сценариев поведения абонентов имитационной модели построения карты радиосреды для когнитивной системы сотовой связи и ее апробации на базе LTE.

**Методика генерации сценариев поведения абонентов.** Предлагается подход к имитации поведения абонентов системы сотовой связи, который рассматривает характер их поведения на масштабах времени в пределах суток как псевдослучайный и зависящий от значительного числа факторов, однако характеризующийся наличием достаточно устойчивых паттернов на больших временных интервалах. Решение основывается на предположении, что поведение реального пользователя является индивидуальным, т. е. практически невозможно с высокой вероятностью достоверности установить, когда абонент может кому-то позвонить и каково его местоположение. При этом с увеличением объема информации для каждого абонента возможно удовлетворительное выявление некоторых закономерностей, которые определяются его рабочим графиком, характерными точками местонахождения на карте, поведением в выходные и праздничные дни.

Алгоритм генерации сценариев сеансов связи включает следующие шаги: инициализация общего календаря – последовательности дней различных типов; формирование шаблонов для каждого абонента и возможного типа дня, которые определяют время и длительность событий; вычисление окончательного расписания на заданный интервал времени для всех объектов *UE* на основе календаря и шаблонов.

В описанной методике применяются цепи Маркова, поскольку этот инструмент позволяет настраивать вероятности переходов, что необходимо для системы с неравнозначными состояниями. Например, вероятность того, что во время телефонного разговора через минуту сеанс связи будет завершен, значительно выше, чем вероятность того, что в любой момент режима ожидания спустя аналогичный промежуток времени звонок будет начат (рисунок 1).

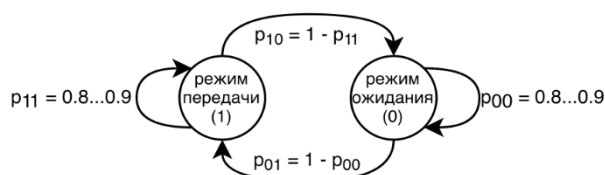


Рисунок 1. – Схема цепи Маркова для генерации расписания сеансов связи

При инициализации модели формируется календарь на заданный период (*N* дней), который каждому суточному отсчету назначает комбинацию свойств согласно определенному правилу: номер, тип дня и его номер в неделе, а также номер соответствующей недели в рамках месяца (таблица 1). Количество свойств может быть увеличено при необходимости формирования более сложных зависимостей.

Таблица 1. – Свойства суточных отсчетов

Свойство	Значения	Правила назначения
Номер	1, 2, ... <i>N</i>	Последовательно с единичным шагом
Тип дня	рабочий	Первые 5 отсчетов каждого фрагмента по 7 дней
	выходной	Последние 2 отсчета каждого фрагмента по 7 дней
	праздник	Вероятность 5% замены рабочего или выходного дня
День недели	понедельник, вторник, ..., воскресенье	Номер отсчета в каждом фрагменте по 7 дней
Номер недели месяца	1 – 4	Номер 7-дневного фрагмента в рамках периода 28 дней (1 месяц)

Для каждой комбинации свойств, за исключением порядкового номера, и объекта *UE* при помощи цепи Маркова с двумя состояниями («0» – режим ожидания, «1» – режим передачи) создается набор шаблонов. Вероятности переходов между состояниями каждый раз варьируются с помощью генератора псевдослучайных чисел в небольшом диапазоне.

При построении конечного расписания на *N* дней во встраиваемые в конечный массив копии выбранных шаблонов добавляются случайные искажения, которые носят характер импульсного шума, изменяя состояние отдельного отсчета на противоположное. Таким способом обеспечивается уникальность поведения абонента относительно случаев, когда рассматриваемый период моделирования достаточно большой (в данном случае – больше одного месяца) и шаблоны начинают повторяться.

Методика учитывает специфику системы сотовой связи *LTE*, которая определяется спецификацией *LTE TS 36.101*. В нисходящем канале связи применяется технология *Orthogonal Frequency-Division Multiplexing*, в восходящем – *Single-Carrier FDMA*. Режим передачи – с частотным или временным разделением. Каналы разбиваются на несущие шириной от 1,4 до 20 МГц, что соответствует от 6 до 100 ресурсным

блокам (*resource block, RB*) – единицам частотного ресурса. Каждый *RB* состоит из 12 поднесущих и 6–7 символов, его длительность равна 0,5 мс. Во временной области пара *RB* (2 слота) образует подкадр, а 10 подкадров формируют кадр *LTE* ( $t_{\text{кадр}} = 10$  мс). Основываясь на характерных значениях времени обнаружения сигналов и установления передачи, а также объема передаваемых данных для существующих систем связи, в качестве единицы времени *REM* выбран 1 кадр *LTE*, единица в частотной области *REM* – диапазон одного *RB* (180 кГц). Для каждой частотно-временной единицы модель вычисляет состояние, соответствующее ситуации «занято» или «свободно» на основе пороговой обработки суммарной мощности сигнала. Таким образом, выходные данные за каждый отсчет содержат матрицу состояний диапазонов всех ячеек с шагом 180 кГц в течение 10 мс.

**Реализация.** Имитационная модель на основе предложенной методики реализована в программной среде *MatLab* и включает инициализацию пространственной сетки координат, контейнера *REM* и заданных объектов (*BS* и *UE*) на ней, а также рабочий цикл, в котором реализуется их поведение, на основе чего генерируется результирующая *REM* и выходные данные (рисунок 2).

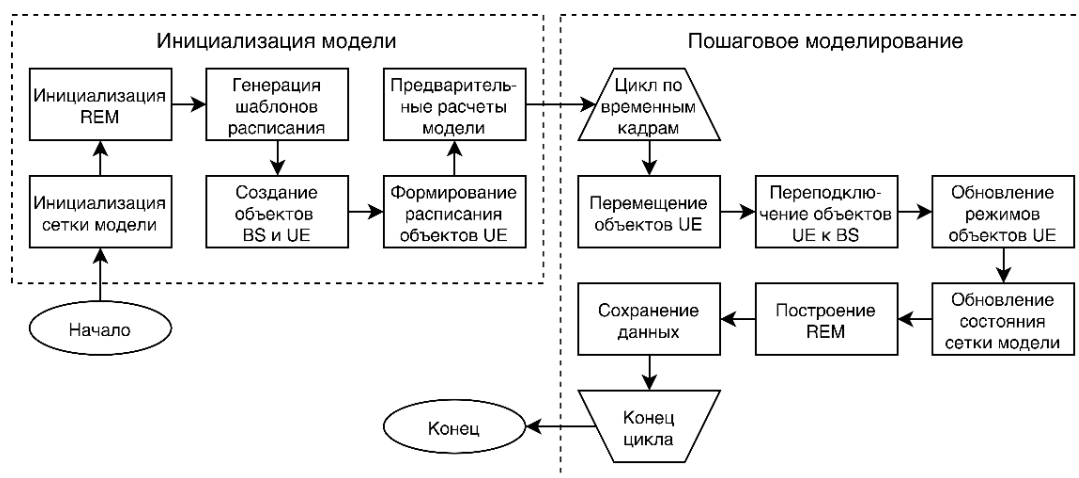


Рисунок 2. – Алгоритм формирования *REM*

Правила функционирования и взаимодействия объектов *BS* и *UE* сети *LTE* определяются спецификациями системы. Абонентские устройства всегда находятся в одном из двух состояний: режим ожидания или передача данных. Периодически они осуществляют поиск канала связи с наилучшим приемом, а после его обнаружения подключаются к соответствующей рабочей станции, которая поддерживает связь с устройствами даже тогда, когда передача пользовательских данных не происходит. При запросе от *UE* *BS* выделяет частотный ресурс для сеанса связи, а по его завершении – освобождает для других абонентов.

Представленная модель имитирует целевую систему связи с рядом упрощений: не учитывается высота антенны над поверхностью, фазы сигналов, доплеровский эффект, быстрые замирания и затенение; мощность излучения устройств фиксирована, а направленность излучения антенн равномерна; передается только пользовательская информация.

Одним из важных этапов является моделирование выделения и перераспределения частотного ресурса *BS* в виде зарезервированных *RB* всем подключенным *UE*. Каждая станция имеет по  $N_{DL} = 250$  *RB* для организации нисходящей линии связи в течение  $t_{\text{кадр}}$ , по 25 *RB* в одном подкадре, равном 1 мс.

Каждому подключенному устройству выделяется равное количество *RB*, которое зависит от общего числа подключенных к станции абонентов следующим образом:

$$UE\_DL\_RB(i) = RB_{DL}(j), i = \overline{(N_{DL\_UE} \times (i-1) + 1), (N_{DL\_UE} \times i)}, i = \overline{1, CNT_{UE}}, \quad (1)$$

где  $i$  – порядковый номер *UE*;

$CNT_{UE}$  – общее количество *UE*;

$N_{DL\_UE}$  – количество выделяемых *RB* для каждого *UE*, определяется как

$$N_{DL\_UE} = \left[ \frac{N_{DL} - 1}{CNT_{UE}} \right], \quad (2)$$

где  $[*]$  – целая часть числа;

$RB_{DL}$  – частотный ресурс станции для нисходящей линии связи, представляет собой вектор из порядковых номеров  $RB$  одного кадра, расположенных по возрастанию:

$$RB_{DL}(j) = j, j = \overline{1, N_{DL\_UE} \times CNT_{UE}}. \tag{3}$$

В таблице 2 представлен пример распределенного частотного ресурса для нисходящей линии связи между 4 подключенными устройствами.

Таблица 2. – Распределенные  $RB$  среди подключенных к станции  $UE$

Номер $UE$	Статус передачи данных	Номера выделенных $RB$ для каждого $UE$ (выделено по 62 $RB$ )														
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	61	62	63	
4	False	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	61	62	63	
7	True	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	...	123	124	125	
10	False	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	...	185	186	187	
11	False	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	...	247	248	249	

После выделения частного ресурса выполняется генерация ресурсной сетки  $BS$ , которая зависит от текущих статусов передачи данных подключенных  $UE$ . Если устройство не осуществляет передачу, то станция займет только первый выделенный  $RB$  этого устройства, а остальные зарезервированные для него блоки будут считаться в данном кадре незанятыми.

Через некоторый интервал времени каждый абонент изменяет свое местоположение на указанные в соответствующей записи пространственные координаты согласно своему расписанию. Вместе с этим происходит его повторное подключение или отключение от рабочей  $BS$  при возникновении ситуации, когда уровень принимаемого сигнала другой  $BS$  стал выше.

Отключение абонента происходит, когда уровень принимаемого сигнала становится меньше порогового уровня помех, при этом выделенный ему частотный ресурс повторно распределяется согласно (1). В таблице 3 представлен пример перераспределения частотного ресурса (таблица 2) для нисходящей линии связи между 3 устройствами при отключении  $UE$  под номером 10.

Таблица 3. – Распределенные  $RB$  среди подключенных к станции  $UE$

Номер $UE$	Статус передачи данных	Номера выделенных $RB$ для каждого $UE$ (выделено по 83 $RB$ )														
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	82	83	84	
4	False	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	82	83	84	
7	True	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	...	164	165	166	
11	False	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	...	248	249	250	

Сформированные шаблоны (рисунок 3) обладают заданной длительностью, которая зависит от шага моделирования  $t_{шаг}$ , на их основе определяются: время инициализации сеанса связи и его длительность в течение суток. Генерация шаблонов (листинг 1) включает в себя перебор всех возможных комбинаций свойств и присвоение каждой из них уникальной бинарной последовательности, сформированной цепью Маркова.

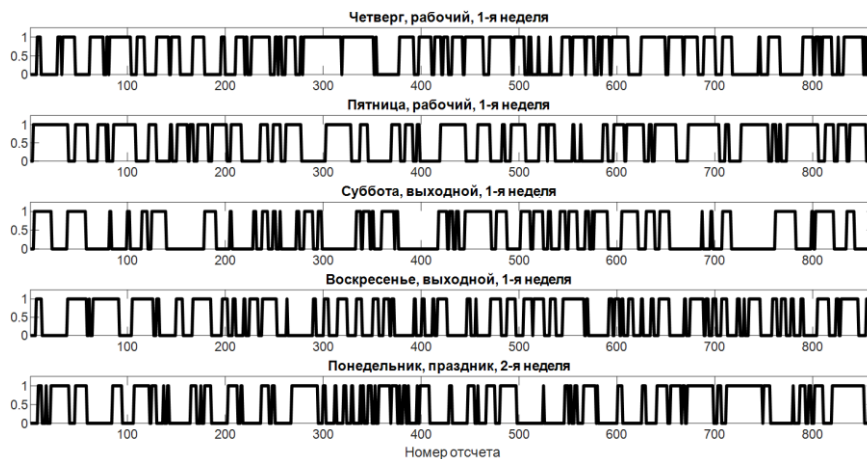


Рисунок 3. – Фрагмент сформированного набора шаблонов

## Листинг 1. – Генерация шаблонов

```

emissions = [0.5 0.5; 0.5 0.5]; % матрица выбросов
result_data = {}; % инициализация таблицы расписания
for l = 1:number_UE % цикл по каждому абоненту
    n = 1; % инициализация счетчика нумерации записей
    data = table; % инициализация новой записи
    for i = 1:days_in_week % цикл по количеству дней недели
        for j = 1:days_in_type % цикл по количеству типов дней
            for k = 1:week_in_month % цикл по количеству недель в месяце
                data.Combination(n, :) = % запись комбинации нормированных признаков
                [i / days_in_week j / days_in_type k / week_in_month];
                state_1 = 0.85 + (0.1 * rand()); % вероятность перехода в другое состояние
                state_2 = 1 - state_1; % вероятность перехода в то же состояние
                transitions = [state_1 state_2 % матрица переходов
                    state_2 state_1];
                [~, state] = % генерация последовательности
                hmmgenerate(samples_in_day, transitions, emissions);
                data.Base(n, :) = state - 1; % запись нормированной последовательности
                n = n + 1; % увеличение счетчика
            end
        end
    end
    result_data{l} = data; % добавление записи в таблицу
end

```

На основе календаря объектам *UE* задается расписание сеансов с влиянием двухуровневого импульсного шума заданной плотности (листинг 2). Дополнительно обнуляются начальные и конечные фрагменты шаблонов, что соответствует условному состоянию сна пользователя *UE*, т. е. периоду, когда он не активен.

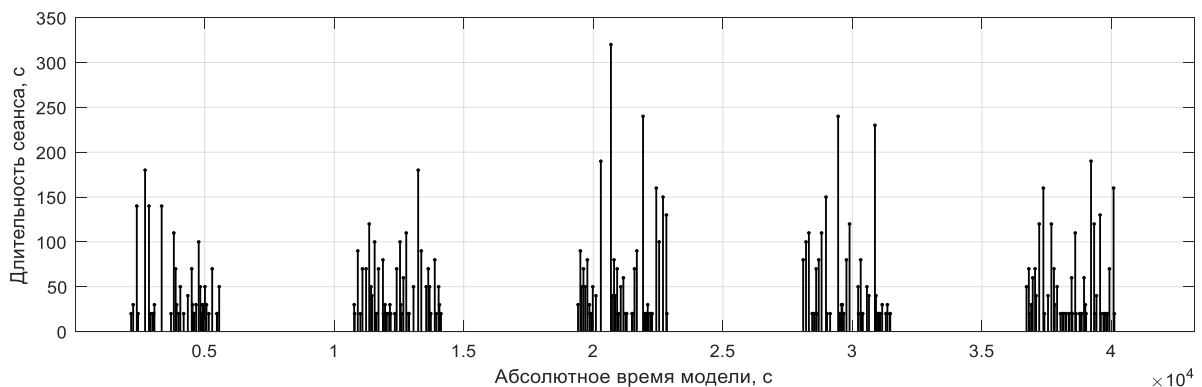
## Листинг 2. – Генерация поведения абонентов на весь период

```

for m = 1:number_UE % цикл по каждому абоненту
    prepared = []; % инициализация массива поведения
    for i = 1:years * days_in_year % цикл по количеству лет
        for j = 1:height(ref{m}) % цикл по готовым шаблонам
            if (week(:, i) == ref{m}.Combination(j, :)) % для подходящей комбинации
                temp = imnoise( % добавление в шаблон импульсного шума
                    ref{m}.Base(j, :), 'salt & pepper', noise_p);
                temp(1:UE{m}.home_time) = 0; % обнуление данных в утреннее время
                temp(UE{m}.work_time:samples_in_day) = 0; % обнуление данных в вечернее время
                prepared = [prepared temp]; % добавление фрагмента поведения
            end
        end
    end
end

```

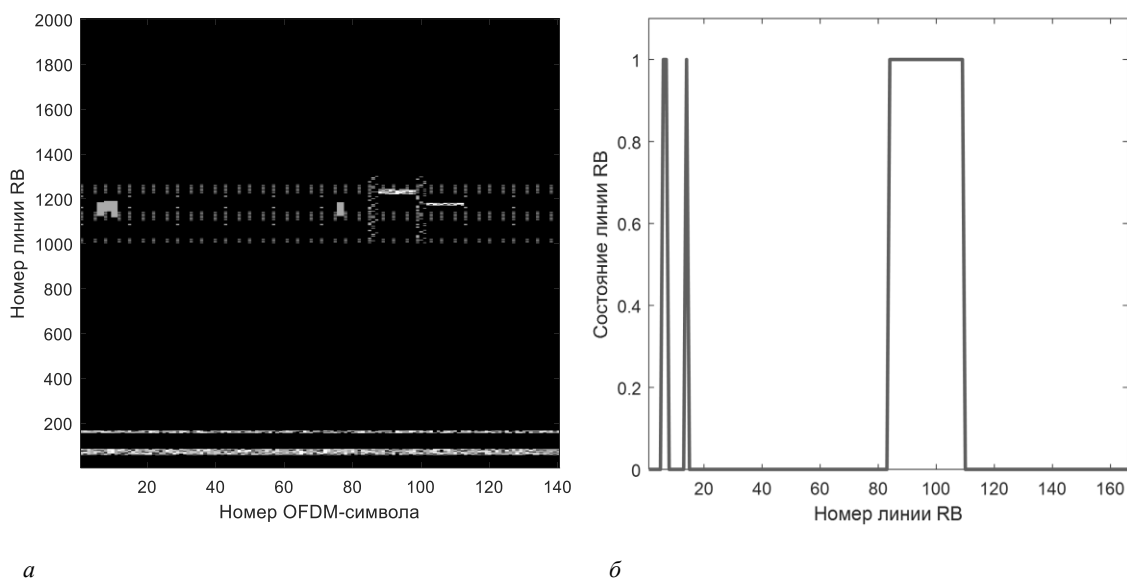
На рисунке 4 показан фрагмент сформированной для пяти дней последовательности, на основе которой объект *UE* принимает решение о начале и окончании сеанса связи.

Рисунок 4. – Фрагмент расписания сеансов связи объекта *UE*

Расписание перемещений задается путем определения времени начала и окончания рабочего дня, а также двух координат, которые символизируют рабочее место абонента и его место жительства. В рабочие дни объект *UE* находится в «рабочей» ячейке, а все остальное время – в «домашней» [3].

На рисунке 5, *а* демонстрируется ресурсная сетка в одной из ячеек карты после запуска моделирования, элементы с большей яркостью соответствуют сигналам большей мощности, принятым в точке наблюдения. В нижней части сетки располагается восходящий канал связи, в верхней части – нисходящий. Показано, что в текущей пространственно-временной точке действуют узкополосные сигналы двух объектов *UE* и широкополосный сигнал одного объекта *BS*.

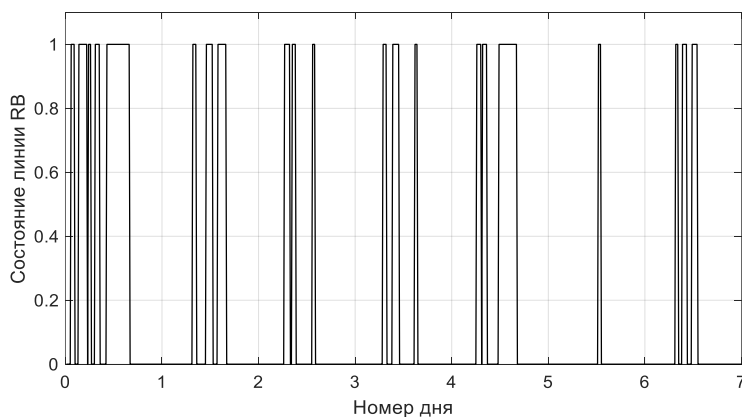
На рисунке 5, *б* показан результат обработки ресурсной сетки *REM*. Значением «1» отмечены линии *RB*, которые заняты сигналами, формируемыми объектами; значение «0» соответствует свободным линиям, они могут быть использованы на вторичной основе. Каждая линия *RB* соответствует частотному диапазону из 12 поднесущих в течение  $t_{\text{кадр}}$ . Анализ рисунка 5, *б* демонстрирует соответствие статусов линий *RB* и занятости поднесущих на рисунке 5, *а*.



*а* – ресурсная сетка в ячейке *REM*; *б* – вычисленное состояние линий *RB*  
**Рисунок 5. – Преобразование выходных данных имитационной модели**

Последовательность, представленная на рисунке 5, *б*, объединяется с данными других ячеек в текущем кадре и сохраняется в файл для последующего использования.

Обработка выходных данных имитационной модели позволяет проследить динамику занятости отдельных линий *RB* за моделируемый период. На рисунке 6 показано состояние линии *RB* в одной из ячеек и частотной области, соответствующей диапазону восходящего канала связи за период моделирования, равный неделе, в модели, которая содержит один объект *BS* и 5 объектов *UE*.



**Рисунок 6. – Динамика занятости линии *RB***

Анализ рисунка 6 подтверждает корректность реализации методики формирования сценариев, поскольку демонстрирует всплески активности абонентов в течение каждого дня, что соответствует правильному назначению временных меток расписания. При этом сопоставление последовательности с исходными расписаниями абонентов не позволяет идентифицировать их, что является следствием корректного учета совместного влияния сигналов объектов *UE* алгоритмом построения *REM*.

**Заключение.** Представлена методика формирования расписаний перемещения и сеансов передачи данных абонентских устройств имитационной модели построения карты радиосреды для когнитивной системы сотовой связи, которая использует массив шаблонов последовательностей цепи Маркова для комбинаций входных временных параметров. При этом алгоритм генерации сценариев сеансов связи состоит из инициализации общего календаря, формирования шаблонов для каждого абонента и возможного типа дня, вычисления расписания на заданный интервал времени для всех объектов модели на основе календаря и шаблонов. В описанной методике применяются цепи Маркова. Представлены промежуточные и конечные результаты работы программной реализации модели в среде *MatLab* на примере системы сотовой связи *LTE*. Данная модель может быть использована на этапе разработки когнитивных систем радиосвязи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Efficient Prediction of Network Traffic for Real-Time Applications / M. Iqbal [et al.] // *J. of Computer Networks and Communications*. – 2019. – P. 1–11. – DOI: [10.1155/2019/4067135](https://doi.org/10.1155/2019/4067135).
2. Prediction-Based Spectrum Management in Cognitive Radio Networks / Y. Zhao [et al.] // *IEEE Systems J.* – 2018. – Vol. 12, iss. 4. – P. 1–12. – DOI: [10.1109/JSYST.2017.2741448](https://doi.org/10.1109/JSYST.2017.2741448).
3. Богуш, Р. П. Состав и представление данных для модели когнитивной системы связи на базе LTE / Р. П. Богуш, Е. Р. Адамовский, В. М. Чертков // *Вестн. Полоцк. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки*. – 2021. – № 12. – С. 13–20.
4. Адамовский, Е. Р. Модель формирования карты радиосреды для когнитивной системы связи на базе сотовой сети LTE / Е. Р. Адамовский, В. М. Чертков, Р. П. Богуш // *Компьютерные исследования и моделирование*. – 2022. – Т. 14, № 1. – С. 127–146. – DOI: [10.20537/2076-7633-2022-14-1-127-146](https://doi.org/10.20537/2076-7633-2022-14-1-127-146).
5. Fette, B. *Cognitive radio technology* / B. Fette. – Amsterdam : Elsevier Inc, 2006. – 649 p. – DOI: [10.1016/B978-0-7506-7952-7.X5000-4](https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-7952-7.X5000-4).
6. Jihong, Z. NTAM-LSTM models of network traffic prediction / Z. Jihong, H. Xiaoyuan // *2021 Intern. Conf. on Physics, Computing and Mathematical (ICPCM2021)* – 2022. – Vol. 355. – P. 1–10. – DOI: [10.1051/mateconf/202235502007](https://doi.org/10.1051/mateconf/202235502007).
7. Trinh, H. Mobile Traffic Prediction from Raw Data Using LSTM Networks / H. Trinh, L. Giupponi, P. Dini // *IEEE PIMRC 2018, 9–12 September 2018*. – Bologna, 2018. – DOI: [10.1109/PIMRC.2018.8581000](https://doi.org/10.1109/PIMRC.2018.8581000).
8. Spectrum hole prediction and white space ranking using artificial neural network for cognitive radio application / I. Sunday [et al.] // *International J. of Scientific & Technology Research*. – 2015. – № 4(8). – P. 319–325.
9. Tumuluru, V. A neural network based spectrum prediction scheme for cognitive radio / V. Tumuluru, P. Wang, D. Niyato // *IEEE International Conference on Communications*. Cape Town, 23–27 May 2010. – DOI: [10.1109/ICC.2010.5502348](https://doi.org/10.1109/ICC.2010.5502348).
10. Learning based primary user activity prediction in cognitive radio networks for efficient dynamic spectrum access / A. Agarwal [et al.] // *Intern. Conf. on Signal Processing and Communications (SPCOM)*. 12–15 June 2016 / Indian Institute of Science. – Bangalore, 2016. – DOI: [10.1109/SPCOM.2016.7746632](https://doi.org/10.1109/SPCOM.2016.7746632).
11. A Energy Prediction Based Spectrum Sensing Approach for Cognitive Radio Networks / Z. Lin [et al.] // *5<sup>th</sup> Intern Conf. on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing*, 24–26 Sept. 2009. – Beijing. – 2009. – DOI: [10.1109/WICOM.2009.5302514](https://doi.org/10.1109/WICOM.2009.5302514).
12. Binary Inference for Primary User Separation in Cognitive Radio Networks / H. Nguyen [et al.] // *IEEE Transactions on Wireless Communications*. – 2013. – Vol. 12, iss. 4. – 1532–1542. – DOI: [10.1109/TWC.2013.022213.112260](https://doi.org/10.1109/TWC.2013.022213.112260).

#### REFERENCES

1. Iqbal, M., Zahid, M., Habib, D., & John, L. K. (2019). Efficient Prediction of Network Traffic for Real-Time Applications. *Journal of Computer Networks and Communications*, 1–11. DOI: [10.1155/2019/4067135](https://doi.org/10.1155/2019/4067135).
2. Zhao, Y., Hong, Z., Luo, Y., Wang, G., & Pu, L. (2018) Prediction-Based Spectrum Management in Cognitive Radio Networks. *IEEE Systems Journal*, 12(4), 3303–3314. DOI: [10.1109/JSYST.2017.2741448](https://doi.org/10.1109/JSYST.2017.2741448).
3. Adamovskiy, Y., Chertkov, V., & Bohush, R. (2021). Sostav i predstavlenie dannykh dlya modeli kognitivnoi sistemy svyazi na baze LTE. [Data composition and representation for cognitive communication system model based on LTE]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (12), 13–20. (In Russ., abstr. in Engl.).
4. Adamovskiy, Y., Chertkov, V., & Bohush, R. (2022). Model' formirovaniya karty radiosredy dlya kognitivnoy sistemy svyazi na baze sotovoy seti LTE [Model for building of the radio environment map for cognitive communication system based on LTE]. *Komp'yuternyye issledovaniya i modelirovaniye [Computer Research and Modeling]*, 1(14), 127–146. DOI: [10.20537/2076-7633-2022-14-1-127-146](https://doi.org/10.20537/2076-7633-2022-14-1-127-146). (In Russ., abstr. in Engl.).
5. Fette, B. (2006). *Cognitive radio technology*. Amsterdam: Elsevier Inc. DOI: [10.1016/B978-0-7506-7952-7.X5000-4](https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-7952-7.X5000-4).
6. Jihong, Z., & Xiaoyuan, H. (2022). NTAM-LSTM models of network traffic prediction. In *International Conference on Physics, Computing and Mathematical (ICPCM2021): Vol. 355 (1–10)*. DOI: [10.1051/mateconf/202235502007](https://doi.org/10.1051/mateconf/202235502007).
7. Trinh, H. D., Giupponi, L. & Dini, P. (2018). Mobile Traffic Prediction from Raw Data Using LSTM Networks. In *2018 IEEE 29<sup>th</sup> Annual International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC) (1827–1832)*. DOI: [10.1109/PIMRC.2018.8581000](https://doi.org/10.1109/PIMRC.2018.8581000).

8. Sunday, I., Goodyer, E., Gow, J., Gongora, M., & Shell, J. (2015). Spectrum hole prediction and white space ranking using artificial neural network for cognitive radio application. *International Journal of Scientific & Technology Research*. 4(8). 319–325.
9. Tumuluru, V., Wang, P., Niyato, D. (2010). A neural network based spectrum prediction scheme for cognitive radio. In *IEEE International Conference on Communications*. DOI: [10.1109/ICC.2010.5502348](https://doi.org/10.1109/ICC.2010.5502348).
10. Agarwal, A., Dubey, S., Asif, K., Gangopadhyay, R., & Debnath, S. (2016). Learning based primary user activity prediction in cognitive radio networks for efficient dynamic spectrum access. In *International Conference on Signal Processing and Communications (SPCOM)*. DOI: [10.1109/SPCOM.2016.7746632](https://doi.org/10.1109/SPCOM.2016.7746632).
11. Lin, Z., Jiang, X., Huang, L., & Yao, Y. (2009). A Energy Prediction Based Spectrum Sensing Approach for Cognitive Radio Networks. In *5<sup>th</sup> International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing*. DOI: [10.1109/WICOM.2009.5302514](https://doi.org/10.1109/WICOM.2009.5302514).
12. Nguyen, H., Zheng, G., Zheng, R., & Han, Z. (2013). Binary Inference for Primary User Separation in Cognitive Radio Networks. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 12(4), 1532–1542. DOI: [10.1109/TWC.2013.022213.112260](https://doi.org/10.1109/TWC.2013.022213.112260).

Поступила 07.09.2022

### USER ACTIVITY MODELING BASED ON MARKOV CHAIN FOR RADIO ENVIRONMENT MAP IN COGNITIVE RADIO NETWORKS

**Y. ADAMOVSKIY, R. BOHUSH, V. CHERTKOV,**  
(*Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk*);

**N. NAUMOVICH, I. STEGKO**  
(*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk*)

*A technique for generating schedules of movement and data transmission sessions for subscriber devices of a simulation model for constructing a radio environment map for a cognitive cellular communication system is presented. The technique defines the subscriber's behaviour as pseudo-random on small time scales, but periodically repeating over large intervals. The impact on the behaviour of several time parameters is taken into account: day types, such as working, weekend, holiday; weekday number; the week number of the month. Scenarios are generated using binary sequences obtained using a Markov chain and an impulse noise generator to change the subscribers state. The software model implementation is made in MatLab package, the results of studies are presented that confirm the correctness of the model and the possibility of using the proposed approach to form a radio environment map.*

**Keywords:** *cognitive radio, user communication scenarios, simulation modeling.*

УДК 004.032

DOI 10.52928/2070-1624-2022-39-11-16-20

## РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ БЛОКА УПРАВЛЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОГО СТЕНДА ПО МОДЕЛИРОВАНИЮ ТЕПЛОВЫХ РЕЖИМОВ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ

*Т. С. КАПАЧ, М. И. ХАМИЧЕНОК, канд. техн. наук, доц. Т. В. МОЛОДЕЧКИНА  
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)*

*Представлен блок управления, входящий в лабораторный стенд для моделирования тепловых режимов радиоэлектронных средств. Приведены основные функции, выполняемые блоком управления лабораторного стенда, описаны особенности его конструкции. Обоснован выбор программной среды Arduino IDE для разработки программного обеспечения. Проведен выбор библиотек, использующихся для организации взаимодействия между платой Arduino и компонентами стенда. Разработано и детально рассмотрено программное обеспечение для блока управления лабораторного стенда.*

**Ключевые слова:** тепловой режим, блок управления, программное обеспечение, среда Arduino IDE, программный код.

**Введение.** В настоящее время большинство электронной аппаратуры представляет собой программно-управляемые электронные средства (ПУЭС), которые сконструированы на основе микроконтроллеров и микропроцессоров. Такое конструкторское решение позволяет не только уменьшить размеры и вес аппаратуры, но и расширить область ее применения, сделать ее работу более точной и надежной. Однако таким ПУЭС необходимо встроенное программное обеспечение (ПО) – список инструкций, в соответствии с которыми ПУЭС будет функционировать и осуществлять необходимые действия [1].

В рамках данной статьи будут рассмотрены особенности разработки ПО для блока управления лабораторного стенда по моделированию тепловых режимов радиоэлектронных средств.

**Функции, выполняемые блоком управления лабораторного стенда.** Блок управления должен измерять температуру исследуемых резисторов, расположенных непосредственно в стенде, посредством датчиков измерения температуры на каждом из 6 резисторов и выводить показания температуры по каждому из них на дисплей в течение всего времени работы лабораторного стенда. Вывод показаний температуры должен производиться циклически, т. е. после вывода температуры, измеряемой датчиком № 6, следующими должны вновь выводиться температуры датчиков № 1, № 2 и т. д. [2].

**Особенности конструкции блока управления лабораторного стенда.** Блок управления представляет собой классическое ПУЭС, спроектированное на базе платформы Arduino, в котором роль программируемого микроконтроллера (МК) выполняет плата Arduino Nano v.3. Выбор платформы Arduino обусловлен не только широкими возможностями и гибкостью применения, но и простотой разработки и отладки программного обеспечения. Прошивка платы осуществляется через разъем USB Type Mini, присутствующий на плате по умолчанию, посредством подключения платы соответствующим кабелем к компьютеру. Запуск прошивки платы можно инициировать нажатием одной кнопки непосредственно в среде для разработки и отладки ПО.

Для измерения температуры используются датчики DS18B20<sup>1</sup>. Выбор данного датчика обусловлен его относительной дешевизной, возможностью измерения температур в широком диапазоне: от минус 55 до 125 °С при погрешности измерения не более 0,5 °С, что является приемлемым в случае данного ПУЭС.

Для вывода информации используется жидкокристаллический двухстрочный дисплей LCD1602<sup>2</sup>. Этот дисплей часто использовался в старых кассовых аппаратах, калькуляторах благодаря низкому энергопотреблению, четкому отображению выводимых символов. Он имеет параллельный интерфейс, поэтому с целью упрощения организации процесса взаимодействия дисплея с МК в данном устройстве LCD1602 используется совместно с переходником I2C – конвертером FC-113. Подобное решение позволит также уменьшить количество задействованных выводов МК (рисунком 1).

**Выбор среды для разработки ПО.** В качестве среды для разработки ПО используется среда Arduino IDE, рекомендуемая разработчиком платформы Arduino. В этой среде программное обеспечение составляется в виде последовательности команд – программного кода на языках С и С++.

Осуществлять разработку ПО для устройства на базе платы Arduino Nano можно различными методами и средствами.

<sup>1</sup> Датчик температуры Arduino DS18B20. URL: <https://arduinomaster.ru/datchiki-arduino/arduino-ds18b20/>.

<sup>2</sup> Подключение дисплея LCD 1602 к arduino по i2c / IIC. URL: <https://arduinomaster.ru/datchiki-arduino/lcd-i2c-arduino-display-ekran/>.



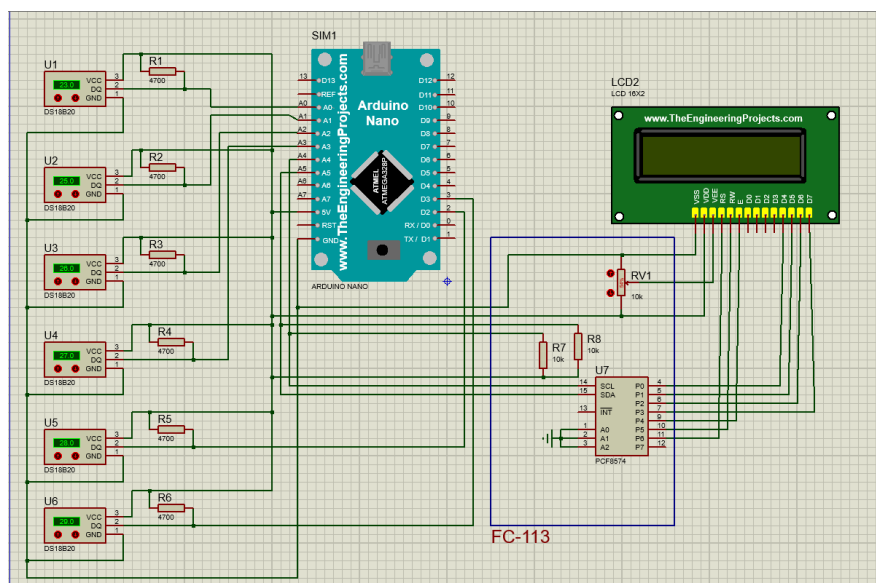


Рисунок 1. - Схема подключения электрорадиоэлемента в блоке управления лабораторного стенда

Классический метод программирования любой платы Arduino – написание программного кода в виде последовательного списка команд на языках C и C++ в среде Arduino IDE<sup>3</sup>.

Большим преимуществом данной среды является поддержка всех плат Arduino, а также удобное и быстрое подключение сторонних библиотек.

Единственный субъективный недостаток – необходимость знания базовых возможностей языков C и C++, так как именно на последнем пишется код программы в среде, а пользовательские библиотеки нередко написаны и на чистом C.

Одной из альтернативных сред разработки является FLProg<sup>4</sup>, позволяющая создавать прошивки для плат Arduino с помощью графических языков FBD и LAD, которые являются стандартом в области программирования промышленных контроллеров.

Достоинства FLProg заключаются в том, что при работе с программой пользователю нет необходимости заниматься написанием кода в виде последовательности команд, контролем за использованием входов – выходов, проверкой уникальности имен и согласованностью типов данных. За всем этим следит программа. Также она проверяет корректность проекта целиком и указывает на наличие ошибок.

Однако в этой среде существует весомый недостаток: далеко не для всех компонентов существует поддержка прямо в среде, следовательно, каждый неподдерживаемый «из коробки» компонент придется программировать с нуля. Не выйдет, как в Arduino IDE, просто добавить стороннюю библиотеку и работать с неподдерживаемым по стандарту компонентом с помощью удобных и понятных команд.

Еще одной достойной внимания средой разработки является XOD<sup>5</sup>. Эта среда, подобно FLProg, позволяет выстраивать программу с помощью визуальных блоков и создавать связи между ними, однако графический язык отличается от аналога.

Достоинство XOD: возможность графического программирования без какого-либо знания C и C++, понятный интерфейс. Эта среда распространяется абсолютно бесплатно, как и Arduino IDE, может работать в браузере, без установки.

Недостаток XOD аналогичен недостатку FLProg: сложность программирования отдельных неподдерживаемых компонентов.

Для разработки программы рассматриваемого устройства будет использоваться классический метод программирования МК путем написания программного кода в среде Arduino IDE. Главный аргумент в обоснование подобного выбора – возможность использования сторонних библиотек для взаимодействия платы с компонентами программно, что упрощает и ускоряет процесс программирования.

**Разработка ПО.** Стоит отметить, что компоненты, используемые в стенде, являются достаточно популярными среди разработчиков, поэтому для организации взаимодействия между платой Arduino и компонентами написано множество библиотек. Библиотеки, используемые в данном проекте, представляют собой программное обеспечение с открытым исходным кодом и могут быть использованы для некоммерческой деятельности с указанием разработчика библиотеки.

<sup>3</sup> Arduino IDE. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Arduino\\_IDE](https://ru.wikipedia.org/wiki/Arduino_IDE).

<sup>4</sup> URL: <https://flprog.ru>.

<sup>5</sup> A visual programming language for microcontrollers. URL: <https://xod.io>.

Таким образом, прежде чем приступить к разработке программного обеспечения для измерительной установки стенда, следует подобрать подходящие библиотеки для используемых компонентов.

Для организации взаимодействия между платой Arduino и датчиками DS18B20 удобно использовать библиотеки «OneWire»<sup>6</sup> и «DallasTemperature»<sup>7</sup>. Библиотека «OneWire» позволяет организовать работу платы Arduino с компонентами, поддерживающими протокол OneWire. Для использования данной библиотеки также необходимо подключить к скетчу библиотеку «Wire», которая уже присутствует в Arduino IDE. Библиотека «DallasTemperature» значительно упрощает разработку программного кода для взаимодействия платы Arduino с датчиками DS18B20 благодаря готовым функциям для инициализации датчиков, чтения измеряемых температур, настройки точности датчика и др.

Для организации взаимодействия между платой Arduino и жидкокристаллическим дисплеем LCD1602 с I2C-адаптером удобно использовать библиотеку «LiquidCrystal\_I2C»<sup>8</sup>. Данная библиотека имеет готовые функции для инициализации дисплея, его программной настройки и вывода на него необходимой информации.

Для начала необходимо установить вышеупомянутые библиотеки в Arduino IDE, а затем подключить их к скетчу следующим образом:

```
#include <OneWire.h>
#include <Wire.h>
#include <LiquidCrystal_I2C.h>
#include <DallasTemperature.h>
```

#### *Секция предварительной конфигурации и подготовки для работы с библиотеками*

Далее необходимо создать объект для работы с дисплеем, в который сразу передаются адрес и параметры дисплея. Этот объект далее будет использоваться в функциях работы с дисплеем:

```
LiquidCrystal_I2C lcd(0x27, 16, 2);
```

Затем следует создать объект для работы с датчиками, куда передаются обозначения выводов (пинов) платы Arduino, к которым подключены соответствующие выводы датчиков, по которым передаются данные посредством интерфейса OneWire:

```
OneWire ds18x20[] = { A0, A1, A2, A3, 2, 3 };
```

После этого создается переменная для учета датчиков. Она потребуется для определения датчиков:

```
const int oneWireCount = sizeof(ds18x20)/sizeof(OneWire);
```

И наконец определяем датчики в библиотеке:

```
DallasTemperature sensor[oneWireCount];
```

#### *Секция подготовки и инициализации*

Весь код, помещенный внутрь функции «setup», выполнится один раз при запуске измерительной установки. Таким образом, в рамках данной функции необходимо разместить код для инициализации компонентов, а также вывода тестовой (стандартной) информации для проверки работоспособности измерительной установки. В соответствии со всем перечисленным функция «setup» будет реализована следующим образом:

```
void setup(void) {
  //Инициализация дисплея LCD1602
  lcd.init();//Инициализация
  lcd.backlight();//Активация подсветки
  //Вывод стандартного сообщения для проверки работоспособности
  lcd.setCursor(0,0);//Перестановка курсора на нулевой символ 1-й строки
  lcd.println("Prog by Tikhon");//Вывод тестовой фразы на 1-ю строку
  lcd.setCursor(0,1);//Перестановка курсора на нулевой символ 2-й строки
  lcd.print("for ");//Вывод слова на 2-ю строку
  lcd.print(oneWireCount);//Вывод переменной, содержащей кол-во подключенных датчиков на 2-ю строку
  lcd.println(" sensors");//Вывод слова на 2-ю строку
  delay(1501);//Пауза

  // Запуск библиотеки циклом инициализации всех датчиков на указанных портах
  DeviceAddress deviceAddress;//Создание объекта для адресов подключенных датчиков
  //Инициализация всех подключенных датчиков
  for (int i = 0; i < oneWireCount; i++) {;
```

<sup>6</sup> URL: <https://github.com/PaulStoffregen/OneWire>.

<sup>7</sup> URL: <https://github.com/jmchiappa/DallasTemperature>.

<sup>8</sup> URL: [https://github.com/mrkaleArduinoLib/LiquidCrystal\\_I2C](https://github.com/mrkaleArduinoLib/LiquidCrystal_I2C).

```

    sensor[i].setOneWire(&ds18x20[i]);
    sensor[i].begin();
    if (sensor[i].getAddress(deviceAddress, 0)) sensor[i].setResolution(deviceAddress, 12);
  }
}

```

Выполнение данной функции во время работы устройства будет заметно по выводу тестового сообщения.

**Рисунок 2. – Вывод тестового сообщения на дисплей в процессе моделирования**



Тестовое сообщение выводит количество успешно определившихся и инициализировавшихся датчиков DS18B20. В случае выхода из строя одного или нескольких датчиков цифра будет отличной от 6.

#### *Секция исполнительной части программы*

Весь код, помещенный внутрь функции «loop», будет выполняться циклически в течение всего периода работы измерительной установки. Таким образом, внутрь данной функции логично поместить код основной части программы. В соответствии с перечисленным функция «loop» будет реализована следующим образом:

```

void loop(void) {
  lcd.clear();//Очистка дисплея от всех символов
  lcd.setCursor(0,0);//Перестановка курсора на нулевой символ 1-й строки
  lcd.print("Requesting");//Вывод слова «запрашивани» на 1-ю строку
  //Цикл запроса показаний датчиков и вывода информации на экран
  for (int i = 0; i < oneWireCount; i++) {
    sensor[i].requestTemperatures();//Считывание данных i-го датчика
    delay(1000);//Пауза
    float temperature = sensor[i].getTempCByIndex(0);//Конвертирование полученной информации в градусы Цельсия и передача
    lcd.setCursor(0,0);//Перестановка курсора на нулевой символ 1-й строки
    lcd.print("Temperature -");//Вывод слова «температура»
    lcd.print(i + 1);//Вывод номера датчика
    lcd.print(" is ");
    lcd.setCursor(0,1);//Перестановка курсора на нулевой символ 2-й строки
    lcd.println(temperature);//Вывод температуры в градусах Цельсия
    delay(1500);//Пауза
  }
  lcd.clear();//Очистка дисплея
  lcd.setCursor(0,0);//Перестановка курсора на нулевой символ 1-й строки
  lcd.println("DONE");//Вывод слова «сделано», указывающего на успешное завершение текущего цикла измерений
  lcd.setCursor(0,1); //Перестановка курсора на нулевой символ 2-й строки
  lcd.println("Next loop");//Вывод фразы «следующий цикл», указывающей на переход к следующему циклу измерений
  delay(1500);//Пауза
}

```

**Заключение.** В данной статье был подробно рассмотрен процесс разработки ПО для блока управления лабораторного стенда. Корректность и работоспособность предлагаемого ПО была подтверждена как в ходе моделирования, так и при использовании в реальном устройстве.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дульнев, Г. Н. Методы расчета тепловых режимов прибора / Г. Н. Дульнев, В. Г. Парфенов, А. В. Сигалов. – М. : Радио и связь, 1990. – 312 с.
2. Конструкторско-технологическое проектирование электронной аппаратуры : учеб. для вузов / К. И. Билибин [и др.] ; под общ. ред. В. А. Шахнова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 528 с.

## REFERENCES

1. Dul'nev, G. N., Parfenov, V. G., Sigalov, A. V. (1990). *Metody rascheta teplovykh rezhimov pribora. [Methods of calculation of thermal modes of the device]*. Moscow: Radio i svyaz'. (In Russ.).
2. Bilibin, K. I. (2002). *Konstruktorsko-tekhnologicheskoe proektirovanie elektronnoi apparatury [Design and technological design of electronic equipment]*. Moscow: Izd-vo MGTU im. N. E. Baumana. (In Russ.).

Поступила 31.10.2022

**THE DEVELOPMENT OF THE CONTROL UNIT OF A LABORATORY STAND  
FOR SIMULATION THE THERMAL MODS OF RADIO-ELECTRONIC DEVICES**

**T. KAPACH, M. KHAMICHONAK, T. MALADZECHKINA**  
(*Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk*)

*The control unit included in the laboratory stand for modeling thermal modes of radio-electronic means is presented. The main functions performed by the control unit of the laboratory stand are given, the features of its design are described. The rationale for choosing the Arduino IDE software environment for software development is given. A selection of libraries used to organize the interaction between the Arduino board and the components of the stand was carried out. The software for the control unit of the laboratory stand has been developed and reviewed in detail.*

**Keywords:** *thermal mode, control unit, software, Arduino IDE environment, program code.*

УДК 004.032.26

DOI 10.52928/2070-1624-2022-39-11-21-29

## ОБУЧЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ НА ОСНОВЕ СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА

**В. В. МАЦКЕВИЧ**

(Белорусский государственный университет, Минск)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6964-542X>

*Рассматривается актуальная проблема, связанная с обучением нейронных сетей. Предлагается оригинальный алгоритм (со специальной процедурой распараллеливания), реализующий метод отжига. Эффективность обучения демонстрируется на примере архитектуры нейронной сети, ориентированной на параллельную обработку данных. Для задачи сжатия цветных изображений показано, что предложенный алгоритм существенно превосходит градиентные методы по эффективности. Полученные результаты позволяют повысить качество обучения нейронных сетей в целом и могут быть использованы для решения широкого класса прикладных задач.*

**Ключевые слова:** метод случайного поиска, метод градиентного спуска, метод отжига, обучение, ограниченная машина Больцмана, параллельные вычисления.

**Введение.** В условиях развития цифрового общества стремительно растет количество информации, получаемой из различных источников. В связи с этим актуализируется проблема обработки больших объемов данных.

При решении данной проблемы часто используется нейросетевой подход, который обладает высоким уровнем универсальности. Настройка нейронной сети на предметную область происходит путем ее предварительного обучения. Благодаря этому нейронные сети обладают достаточной гибкостью с возможностью решения широкого класса прикладных задач. Однако по мере увеличения объема обрабатываемых данных усложняется архитектура используемой нейронной сети.

Процесс обучения (настройки) нейронной сети является типичной оптимизационной задачей [1]. Для ее решения, как правило, применяется метод градиентного спуска. Однако метод обладает рядом недостатков, что приводит к тому, что полученное решение может оказаться далеко не оптимальным. В работе рассматривается альтернативный подход к обучению, основанный на идее случайного поиска. Предлагается оригинальный алгоритм, реализующий метод отжига, и исследуется его эффективность.

**Анализ проблемы.** Нейронная сеть фиксированной архитектуры (как любая алгоритмическая модель) задается соответствующим набором настраиваемых параметров. Обучение заключается в нахождении таких их значений, которые гарантируют достижение наилучшего решения. Таким образом, обучение нейронной сети является типичной оптимизационной задачей, где целевая функция зависит от решаемой задачи, данных и значений параметров сети. Последовательно изменяя значения параметров, необходимо получить оптимум целевой функции.

Для решения оптимизационных задач существуют различные методы, среди которых можно выделить точные и приближенные. Приближенные методы могут быть как конечными, так и итерационными. В свою очередь, итерационные методы могут быть направленными и ненаправленными. К первому классу, в частности, относятся методы, основанные на вычислении градиентов. Это, например, методы простого градиентного спуска, секущих, Ньютона и т. д. Ненаправленные методы (случайного поиска) характеризуются случайностью выбора последующего приближения. К ним можно отнести методы дифференциальной эволюции, отжига, генетические алгоритмы и т. д.

Направленные методы ограничены строгими правилами выбора последующего решения, что сужает пространство поиска решения, в то время как методы случайного поиска имеют практически неограниченное пространство для поиска. Это дает интуитивное преимущество случайного поиска над направленными методами.

Для обучения нейронных сетей традиционно применяются различные вариации метода градиентного спуска. Данный метод получил широкое распространение за счет высокой скорости его сходимости. В условиях малых мощностей компьютеров (на начальном этапе развития нейронных сетей) это было очень важно. Однако градиентные методы обладают существенным недостатком: на процесс решения накладываются сильные ограничения по сходимости. Например, метод Ньютона имеет строгие ограничения на множество начальных приближений. Кроме того, любой градиентный метод сходится в точках, где производная от целевой функции может быть равна нулю, поэтому полученное решение может оказаться точкой перегиба или локального минимума, т. е. гораздо хуже оптимального.

В работе исследуется альтернативный подход к обучению нейронных сетей, основанный на идее случайного поиска (на примере метода отжига). Известно, что при определенных условиях данный метод сходится к оптимальному решению, причем из любого начального приближения [2].

**Архитектура нейронной сети.** Рассмотрим процесс обучения нейронных сетей на примере ограниченной машины Больцмана (ОМБ) для задачи сжатия цветных изображений. Нейронные сети данной архитектуры успешно применяются в задачах прогнозирования [3], информационного поиска [4], анализа данных [5–7], обработки речи [8] и т. п. ОМБ также лежат в основе глубоких доверительных сетей [9].

Известно, что основой архитектуры ограниченной машины Больцмана является стохастический нейрон (рисунок 1).

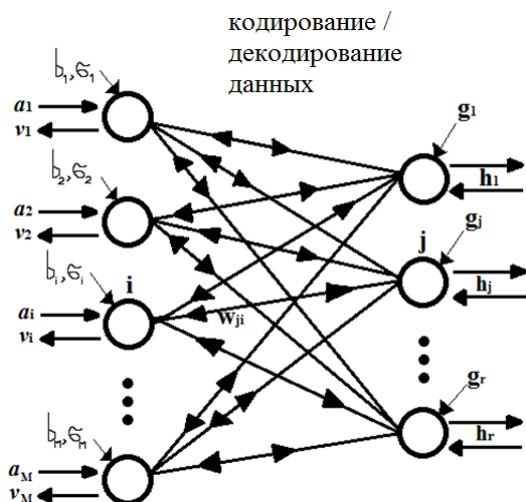


Рисунок 1. – Ограниченная машина Больцмана

Таким образом, формально архитектуру данной сети можно представить полностью связным двудольным графом  $G = (X, U)$ :

$$\begin{cases} X = X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2 = \emptyset; \\ U = \{u = (x_1, x_2) | \forall x_1 \in X_1, \forall x_2 \in X_2\}, \end{cases}$$

где  $X$  – множество вершин – стохастических нейронов;

$U$  – множество ребер – синаптических связей, при этом вершины подмножества  $X_1$  задают нейроны входного слоя, а  $X_2$  – нейроны выходного слоя.

Число нейронов во входном слое определяется размером входного образа, а количество нейронов в выходном слое определяется исходя из требований к степени сжатия данных.

Выходные сигналы слоев ограниченной машины Больцмана реализуют некоторые законы вероятностного распределения. В зависимости от используемых законов распределения строят различные типы машин. В данной работе речь пойдет о машинах типа Гаусс – Бернулли и Бернулли – Бернулли, т. к. они являются наиболее распространенными.

Для ограниченной машины Больцмана типа Гаусс – Бернулли каждой вершине входного слоя поставим в соответствие множества параметров  $VB = \{b\}$  – смещения и  $\sigma = \{\sigma\}$  – дисперсии вершин, а вершинам выходного слоя – множества параметров  $HB = \{g\}$  – смещение вершин. Размеры множеств равны соответственно  $|VB| = |\sigma| = |X_1|$ ,  $|HB| = |X_2|$ . Каждому ребру, связывающему пару вершин входного и выходного слоев, поставим в соответствие множества параметров  $W = \{w\}$  – весов ребер. Размер множества равен величине  $|W| = |X_1 \times X_2|$ .

Таким образом, описанное семейство нейронных сетей можно задать четырьмя типами параметров:  $RBM = (W, VB, \sigma, HB)$ . Стоит отметить, что у ограниченной машины Больцмана типа Бернулли – Бернулли отсутствует множества параметров  $\sigma$ .

Известно, что для качественного обучения нейронной сети объем обучающей выборки должен быть не меньше числа настраиваемых параметров сети. При этом вычислительная сложность обучения прямо пропорциональна произведению количества настраиваемых параметров сети на объем выборки, а количество настраиваемых параметров прямо пропорционально размерности входных данных. Таким образом, вычислительная сложность обучения прямо пропорциональна квадрату размерности входных данных.

Для снижения вычислительной сложности процесса обучения предлагается оригинальная архитектура ограниченной машины Больцмана, ориентированная на параллельную обработку данных.

Пусть входные данные имеют размерность  $N$ . Каждый элемент входных данных разбивается на  $k$  равных фрагментов размера  $m$  ( $km = N$ ). Значение  $k$  определяется на этапе проектирования архитектуры нейронной сети. После разбиения данных создаются  $k$  ограниченных машин Больцмана одинаковой архитектуры (по одной для каждого фрагмента данных).

Таким образом, исходные данные обрабатываются не одной, а ансамблем из  $k$  ограниченных машин Больцмана. Нетрудно видеть, что данный подход обладает следующими преимуществами:

- $k$  ограниченных машин Больцмана работают независимо друг от друга, что позволяет производить их параллельное обучение;
- в силу того, что вычислительная сложность обучения прямо пропорциональна размерности входных данных, вместо исходной квадратичной получаем линейную зависимость;
- уменьшение числа настраиваемых параметров нейронной сети понижает сложность обучения и приводит к повышению качества полученного решения (при условии разбиения данных на не слишком малые фрагменты).

**Задача обучения.** В общем случае задача обучения в случае ее решения методами случайного поиска может быть сформулирована следующим образом.

Пусть на конечном множестве допустимых решений  $\Omega$  определена целевая функция  $F$ , и для каждого элемента  $x \in \Omega$  задано множество соседних элементов  $N(x) \subset \Omega$ . Задачу условной оптимизации в данном случае можно задать в виде тройки  $(\Omega, F, N)$ . Рассмотрим возможности ее решения с помощью случайного поиска, в частности, с помощью метода отжига.

При изложении алгоритма обучения необходимо учитывать особенности обучаемых сетей. Любая сеть состоит из одного или нескольких слоев. В зависимости от типа сети отдельные ее слои могут выполнять абсолютно разные преобразования входных данных. В зависимости от этого слой может состоять из различных фрагментов, выполняющих разные преобразования. Любой фрагмент нейронной сети задается набором параметров. Из-за того, что фрагменты выполняют разные преобразования, соответствующие им наборы параметров могут иметь разный диапазон значений. Таким образом, архитектура нейронной сети может быть задана объединением из  $m$  наборов параметров  $NN = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ . В результате конкретная сеть получается путем фиксации значений всех ее параметров.

Опишем теперь предлагаемый алгоритм, реализующий метод отжига.

**Алгоритм обучения**

*Предварительный этап.* Инициализация начального состояния нейронной сети.

Задание начальных значений параметров сети  $NN_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})$  и последовательности температур, связанных соотношением

$$T_k = T_0 / \ln(k + 3), \quad k > 0, \tag{1}$$

где  $T_0$  – заранее заданное значение.

*Общая k-я итерация*

Шаг 1. Генерация случайных величин

Генерация  $m$  равномерно распределенных дискретных случайных величин  $a_1, a_2, \dots, a_m$  на отрезке от нуля до количества параметров в наборе.

Генерация  $m$  случайных перестановок длиной, равной количеству параметров в наборе. Первые  $a_1, a_2, \dots, a_m$  элементов перестановок задают индексы изменяемых параметров в каждом наборе параметров соответственно.

Шаг 2. Генерация нового решения.

Для каждого изменяемого параметра генерируются две равномерно распределенные случайные величины  $b, c$  на отрезках  $[0; 1]$ ,  $[0; l/2]$ . Величина  $l$  зависит от того, какому набору принадлежит изменяемый параметр, и равна  $l_1, l_2, \dots, l_m$  соответственно. Значения  $l$  для каждого набора задаются как параметры алгоритма.

Пусть  $x_i$  – изменяемый параметр, а его новое значение  $x'_i$  находим по формуле

$$x'_i = \begin{cases} x_i + c, & b \leq 0,5; \\ x_i - c, & b > 0,5. \end{cases}$$

Шаг 3. Принятие решения о переходе.

Пусть  $x$  – текущее решение,  $y$  – новое решение, сгенерированное на шаге 2. Тогда решение  $x'$  на следующей итерации определяется следующим образом:

$$P(x' = y | x) = \min \{1, \exp((F(x) - F(y)) / T_k)\}. \tag{2}$$

Шаг 4. Критерий остановки.

Если время на обучение нейронной сети истекло, то алгоритм завершается. В противном случае производится переход на следующую итерацию.

Рассмотрим проблему сходимости описанного выше алгоритма.

**Анализ сходимости.** При доказательстве сходимости алгоритма будем использовать известные теоретические результаты, полученные для метода отжига.

Вначале введем необходимые для дальнейших рассуждений понятия и определения.

Верхняя граница значения целевой функции  $h \in \mathfrak{R}$  называется высотой.

Путем, соединяющим решение  $x \in \Omega$  с решением  $y \in \Omega$ , называется последовательность  $x_1, x_2, \dots, x_n$  такая, что

$$\begin{cases} x_1 = x, x_n = y; \\ x_i \in \Omega, i = \overline{1, n}; \\ x_i \in N(x_{i-1}), i = \overline{2, n}. \end{cases}$$

Решение  $y \in \Omega$  является *достижимым* из  $x \in \Omega$ , если существует путь из  $x$  в  $y$ . И оно является *достижимым из  $x \in \Omega$  на высоте  $h$* , если

$$x = y, F(y) \leq h$$

или существует конечная последовательность решений  $x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_p = y, p > 0$  такая, что

$$\begin{cases} x_{k+1} \in N(x_k), \forall k = \overline{0, p-1}; \\ x_k \in \Omega, k = \overline{0, p}; \\ F(x_k) \leq h, \forall k = \overline{0, p}. \end{cases}$$

Пара множеств  $(\Omega, N)$  называется *несократимой*, если для  $\forall x, y \in \Omega$  – решение  $y$  достижимо из  $x$  тогда и только тогда когда  $x$  достижимо из  $y$ .

Задача  $(\Omega, F, N)$  обладает *свойством слабой обратимости*, если для  $\forall x, y \in \Omega$   $y$  достижимо из  $x$  на высоте  $h$  тогда и только тогда, когда  $x$  достижимо из решения  $y$  на высоте  $h$ .

Решение  $x$  является локальным минимумом задачи  $(\Omega, F, N)$ , если  $\neg \exists y: F(y) < F(x)$  и  $y$  достижимо из  $x$  на высоте  $F(x)$ .

*Глубиной локального минимума  $x$*  называется наименьшая величина  $E$ , для которой выполняется условие  $\exists y \in \Omega: F(y) < F(x)$ ,  $y$  достижимо из  $x$  на высоте  $F(x) + E$ . Для глобального минимума глубина определяется как плюс бесконечность.

Предположим теперь, что задача  $(\Omega, F, N)$  несократима, обладает свойством слабой обратимости и задана числовая последовательность  $T_k$ , для которой выполняется условие

$$\begin{cases} T_i \geq T_{i+1}, \forall i \in N \cup 0 \\ \lim_{i \rightarrow +\infty} T_i = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Тогда для метода отжига справедлива следующая теорема.

**Теорема 1** [2].

1. Для любого не локального минимума  $x$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P(x_k = x) = 0.$$

2. Если  $B$  – множество локальных минимумов глубины  $d$ , то для  $\forall x \in B$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P(x_k \in B) = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-d / T_k) = +\infty.$$



3. Пусть  $\Omega^*$  – множество глобальных минимумов и  $d^*$  – максимум из глубин локальных минимумов, не совпадающих ни с одним из глобальных

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P(x_k \in \Omega^*) = 1$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-d^*/T_k) = +\infty. \tag{4}$$

Покажем теперь, что описанный выше алгоритм сходится. Из приведенной теоремы следует, что для этого необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- новое решение должно выбираться с вероятностью (2);
- должны выполняться условия сходимости (критерий);
- задача  $(\Omega, F, N)$  должна быть несократимой и обладать свойством слабой обратимости;
- последовательность температур должна удовлетворять ограничениям (3), (4).

Покажем выполнение для алгоритма всех условий в рамках критерия сходимости. Сформулируем их в виде отдельных утверждений.

Выполнение первого условия достаточно очевидно и не требует доказательства. Докажем выполнение последующих условий.

**Утверждение 1.** Задача  $(\Omega, F, N)$  несократима и обладает свойством слабой обратимости.

*Доказательство.* Проверим выполнение условия слабой обратимости. Это свойство является более строгим требованием, чем условие несократимости. Поэтому из первого всегда следует второе.

Для каждого набора параметров (множителя исходного пространства поиска) задан параметр алгоритма  $l_i$  – длина отрезка для генерации равномерно распределенной случайной величины. Так как текущее значение изменяемого параметра (координаты) является осью симметрии данного отрезка, то это означает, что  $x + \Delta x \in N(x)$  тогда и только тогда, когда  $x - \Delta x \in N(x)$ . На основе этого докажем утверждение от противного.

Пусть задана пара произвольных решений  $x, y$  из  $\Omega$ . Предположим, что решение  $y$  достижимо из  $x$  на высоте  $h$ , но  $x$  не достижимо из  $y$ . Достижимость  $y$  из  $x$  означает, что существует некоторая последовательность  $x = x_0, x_2, \dots, x_n = y$ , для которой выполняется неравенство

$$\max_{i=0, n} f(x_i) \leq h.$$

Так как  $x_0, x_1, \dots, x_n$  – последовательность, то очевидно

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Построим теперь последовательность решений  $y = y_0, y_1, \dots, y_n, y_0 = x_n$  такую, что

$$y_i = y_{i-1} - \Delta x_{n-i+1}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда получим

$$x_i = y_{n-i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} f(x_i) = f(y_{n-i}), \quad i = \overline{1, n} \\ \max_{i=0, n} f(x_i) \leq h \Leftrightarrow \max_{i=0, n} f(y_i) \leq h. \end{cases}$$

Однако это противоречит предположению о недостижимости решения  $x$  из  $y$  на высоте  $h$ , что и доказывает наше утверждение.

**Утверждение 2.** Последовательность температур (1) удовлетворяет ограничениям (3), (4).

*Доказательство.* Так как натуральный логарифм по своей природе является неограниченной и монотонно возрастающей функцией, то последовательность (1) строго убывает и сходится к нулю. Покажем теперь расходимость ряда (4). Для этого значения  $T_k$  заменим формулой

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{d^*}{T_k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{d^*}{T_0} \ln(k+3)\right) \geq [T_0 \geq d^*] \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{d^*}{d^*} \ln(k+3)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\ln(k+3)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \exp \frac{1}{k+3} = +\infty.$$

Откуда и следует расходимость ряда.

Таким образом, построенный алгоритм удовлетворяет всем ограничениям и, следовательно, сходится к оптимальному решению, причем из любого начального приближения.

**Процедура распараллеливания.** Низкая скорость сходимости алгоритма обучения требует для получения результата совершения большого числа итераций. Из этого следует, что обучение данным алгоритмом требует большого объема вычислений и времени для сходимости. Время работы итерационного алгоритма определяется произведением числа итераций на время выполнения одной отдельной итерации. Для уменьшения времени выполнения одной отдельной итерации и, следовательно, времени работы всего алгоритма обучения предлагается следующая процедура распараллеливания.

Каждая итерация алгоритма обучения, как было указано выше, состоит из 4 этапов. Все этапы кроме вычисления значения функционала для нового решения выполняет процессор. Наиболее трудоемким этапом является вычисление значения функционала и, при малой архитектуре сети, генерация нового решения. Вычислительная мощность видеокарты выше мощности процессора в среднем в 20 раз. Это приводит к тому, что при обучении небольших нейронных сетей значительная часть времени расходуется на генерацию новых решений. Все этапы в отдельной итерации выполняются строго последовательно.

Пусть  $a$  времени требуется для обмена данными между видеокартой и процессором,  $b$  – время, необходимое для генерации нового решения,  $c$  – время, необходимое для вычисления значения функционала качества,  $g$  – время, необходимое для принятия или отклонения нового решения, проверки критерия останова. Таким образом, общее время одной итерации  $t$  в последовательном случае выполнения составит

$$t = a + b + c + g.$$

Генерация нового решения состоит из двух этапов: определение количества и выбор изменяемых параметров сети; изменение значений выбранных параметров сети. На определение количества и выбор изменяемых параметров требуется  $e$  времени, а для изменения их значений –  $f$  времени. Таким образом, получим

$$t = [b = e + f] = a + e + f + c + g.$$

Для снижения времени выполнения одной итерации можно воспользоваться тем фактом, что определение и выбор изменяемых параметров сети не зависят от этапа принятия нового решения. Это можно объяснить тем, что сгенерированное приращение к значениям изменяемых параметров при этом не изменится. Смена решения изменяет лишь исходные значения изменяемых параметров. В таком случае можно воспользоваться общеизвестным приемом сокращения вычислений.

*Процедура А1.* Определять количество и выбирать изменяемые параметры можно параллельно на процессоре, когда видеокарта производит вычисление значения функционала качества. В таких условиях результат выбора параметров используется для генерации нового решения уже на следующей итерации. В таком случае время выполнения одной итерации составит

$$t = a + f + \max\{e, c\} + g \approx [g \ll a, f, \max\{e, c\}] \approx a + f + \max\{e, c\}.$$

Стоит отметить, что время необходимое для принятия или отклонения решения с последующей проверкой критерия останова требует на порядок меньшего времени по сравнению с другими действиями в отдельной итерации.

*Процедура А2.* Для последующей оптимизации алгоритма обучения рассмотрим подробнее этап вычисления значения функционала.

Пусть текущее решение равно  $x$ , а новое решение –  $y$ . Во время вычисления значения функционала на видеокарте для решения  $y$  процессор одновременно генерирует два новых решения  $x_1 \in N(x)$  и  $y_1 \in N(y)$ . После вычисления значения функционала производится проверка необходимости перехода в новое решение. Если новое решение принято, то следующим проверяемым решением будет  $y_1$ , в противном случае  $x_1$ . Данная процедура позволяет замаскировать этап генерации нового решения. Таким образом, при переходе на следующую итерацию сразу будет производиться вычисление значения функционала для нового решения без его явной генерации. Однако при таком подходе объем вычислений на процессоре увеличивается практически вдвое, что может быть критично для небольшой по размеру сети. Время отдельной итерации при данном подходе составит

$$t = a + \max\{2e + 2f, c\}.$$

Оценим величину выигрыша времени  $r$  для отдельной итерации. Возможны три случая:

1)  $c > 2e + 2f$ . Такой случай возможен при обучении больших нейронных сетей либо при использовании слабой видеокарты, либо мощного процессора. В таком случае выигрыш составит

$$r = a + f + \max\{e, c\} - a - \max\{2e + 2f, c\} = f;$$

2)  $e \leq c \leq 2e + 2f$ . Наиболее распространенный случай на практике. Возникает при использовании видеокарты и процессора средней мощности и обучении нейронных сетей со средним количеством настраиваемых параметров. В таком случае величина выигрыша составит

$$r = a + f + \max\{e, c\} - a - \max\{2e + 2f, c\} = a + f + c - a - 2e - 2f = c - 2e - f.$$

В данном случае процедура A2 не всегда лучше процедуры A1. Если  $c \geq 2e - f$ , то процедура A2 имеет смысл. В противном случае процедура A1 лучше во всех отношениях: она вдвое снижает объем генерируемых случайных чисел, чем уменьшает их расход, вдвое сокращает объем вычислений на процессоре и тем самым оптимизирует расход электроэнергии процессором;

3)  $c < e$ . Данный случай возникает при обучении небольших нейронных сетей либо при использовании мощной видеокарты, либо слабого процессора. В таком случае выигрыш составит

$$r = a + f + \max\{e, c\} - a - \max\{2e + 2f, c\} = a + f + e - a - 2e - 2f = -(e + f).$$

В данном случае процедура A1 всегда лучше A2.

*Замечание.* Использование процедур A1 и A2 никак не влияет на качество обучения. Выбор между ними влияет только на конечное время обучения и, возможно, на энергоэффективность обучения сетей.

Для решения проблемы выбора оптимального алгоритма обучения сконструируем процедуру A3.

*Процедура A3.* Основная ее идея заключается в наиболее точной оценке скорости работы процедур A1 и A2 при решении конкретной прикладной задачи. Так как выполнение одной итерации алгоритма требует, как правило, менее одной тысячной секунды времени, а кэш процессора проявляется через некоторое время и таймер имеет ненулевую погрешность, то для точной оценки нужно использовать большое число итераций.

Шаг 1. Запуск процедуры A1 на двадцати тысячах итераций с замером времени работы.

Шаг 2. Запуск процедуры A2 на двадцати тысячах итераций с замером времени работы.

Шаг 3. На основе полученных результатов времени выполнения производится выбор процедуры обучения для оставшихся итераций с меньшим временем работы.

Эффективность работы описанного выше алгоритма обучения проверим на примере решения задачи сжатия цветных изображений.

**Результаты экспериментов.** Для экспериментов использовано два алгоритма обучения: разработанный выше алгоритм обучения с применением процедуры A3 и метод адаптивного момента как сильнейшего градиентного алгоритма обучения [10; 11].

В случае с градиентным алгоритмом обучения для повышения качества решения будет использоваться алгоритм CD-10. При большом количестве итераций (свыше десяти тысяч) он превосходит алгоритм PCD по качеству [12], а CD-100 требует на порядок большего объема вычислений, чем CD-10 [13]. В то же время алгоритм обучения CD-10 по эффективности примерно равен 10-PT5, однако требует гораздо меньшего объема вычислений [14].

Для сжатия использованы изображения выборок CIFAR-10<sup>1</sup> [15] и STL-10<sup>2</sup> [16]. В первом случае объекты на изображениях принадлежат одному из десяти определенных выборкой классов разрешением 32 на 32 пикселя. Во втором же случае изображения выборки разрешением 96 на 96 пикселей содержат абсолютно произвольные объекты, что существенно усложняет процедуру сжатия.

Эксперименты проводились для 16-кратной степени сжатия. Более высокая степень сжатия приводит к слишком большим потерям, более низкая – неэффективна по сравнению с классическими алгоритмами сжатия.

Для оценки качества сжатия были использованы распространенные функционалы оценки потерь: PSNR (Peak Signal to Noise Ratio), PSNR-HVS (Peak Signal to Noise Ratio Human Vision System), SSIM (Structure Similarity Image Measure), MSE (Mean Square Error). Оценка времени обучения производилась с помощью функции `gettimeofday`.

<sup>1</sup> Выборка CIFAR-10 [Электронный ресурс]. URL: <https://www.cs.toronto.edu/~kriz/cifar.html>.

<sup>2</sup> Выборка STL-10 [Электронный ресурс]. URL: <https://web.archive.org/web/20110803194852/http://www.stanford.edu/~acواتes/stl10/>.

Программная среда тестирования: Linux, 2x8 1600 Mhz DDR3 RAM, процессор intel i7-4770k (4 ядра), видеокарта nvidia rtx 3070 (5888 ядер). Для тестирования и обучения нейронных сетей разработан фреймворк на языке C++ с использованием библиотек OpenML, OpenCL.

Исходные изображения предварительно разбивались на блоки по 3 на 4 цветных пикселя. Более крупное разбиение существенно повышало сложность обучения, а разбиение на более мелкие – снижало качество обучения.

При использовании градиентного алгоритма обучения изображения разбивались на блоки по 3 на 2 цветных пикселя с использованием той же логики.

Также стоит отметить, что каждая отдельная ограниченная машина Больцмана обрабатывает одновременно все три цветовых канала изображений. Это повышает семантическую связность пикселей в пределах одного фрагмента изображения. За счет этого повышается качество обучения.

Из результатов экспериментов нетрудно заметить, что алгоритм, реализующий метод отжига, превосходит градиентные алгоритмы по качеству обучения более чем в 2,5 раза. При этом скорость обучения обоими алгоритмами примерно равная. Стоит также отметить скорости сходимости алгоритмов (таблица).

Таблица. – Результаты экспериментов

Алгоритм обучения	Алгоритм отжига		Алгоритм градиентного спуска	
	CIFAR-10	STL-10	CIFAR-10	STL-10
Выборка				
MSE	459	472	2940	2551
PSNR	21,6	21,5	13,7	14,4
PSNR-HVS	21,8	21,7	13,8	14,6
SSIM	0,749	0,618	0,227	0,346
время обучения, ч	1	6	1	6

В случае с алгоритмом отжига для достижения результата понадобилось порядка миллиона итераций. В случае с градиентным алгоритмом понадобилось порядка десятка тысяч итераций. Т. е. разница составляет около двух порядков. Однако за счет мощного оборудования метод отжига догоняет градиентные алгоритмы по скорости обучения.

**Заключение.** Таким образом, эксперименты показали, что алгоритм обучения, реализующий метод отжига, позволяет существенно повысить качество обучения нейронных сетей. Кроме того, скорость работы алгоритма повышена за счет специальных процедур распараллеливания. Экспериментально показано, что он не только в 2,5 раза превосходит градиентные методы по качеству получаемого решения, но практически не уступает им по скорости работы.

С учетом того, что компьютерная техника развивается быстрыми темпами, а нейронные сети применяются для решения широкого класса прикладных задач, можно сделать вывод, что полученные в работе результаты обладают хорошей перспективой для их использования на практике.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мацкевич, В. В. Возможности метода отжига в задаче обучения нейронных сетей / В. В. Мацкевич // Технологии передачи и обработки информации : материалы междунар. науч.-техн. семинара, Минск, март – апр. 2022 г. / Белорус. гос. ун-т информатики и радиоэлектроники. – Минск, 2022. – С. 69–73.
2. Hajek, B. Cooling schedules for optimal annealing / B. Hajek // Mathematics of operations research. – 1988. – Vol. 13, iss. 2. – P. 311–329. – URL: <http://www.jstor.org/stable/3689827>.
3. Li, W. Recurrent restricted Boltzmann machine for chaotic time-series prediction / W. Li, M. Han, J. Wang // 12<sup>th</sup> Intern. conf. on advanced computational intelligence (ICACI 2020). – P. 439–445. – DOI: [10.1109/ICACI49185.2020.9177510](https://doi.org/10.1109/ICACI49185.2020.9177510).
4. Sharma, Bh. Extractive text summarization using F-RBM / Bh. Sharma, M. Tomer, Kr. Kriti // J. of statistics and management systems. – 2020. – Vol. 23, iss. 6. – P. 1093–1104. – DOI: [10.1080/09720510.2020.1808353](https://doi.org/10.1080/09720510.2020.1808353).
5. A novel radar signal recognition method based on a deep restricted Boltzmann machine / D. Zhou [et al.] // Engineering Review. – 2017. – Vol. 37, iss. 2. – P. 165–171.
6. Experiment improvement of restricted Boltzmann machine methods for image classification / Ch. Devi [et al.] // Vietnam J. of Computer Science. – 2021. – Vol. 8, iss. 3. – P. 417–432. – DOI: [10.1142/S2196888821500184](https://doi.org/10.1142/S2196888821500184).
7. Ensemble RBM-based classifier using fuzzy integral for big data classification / J. Zhai [et al.] // International J. of machine learning and cybernetics. – Springer, 2019. – DOI: [10.1007/s13042-019-00960-3](https://doi.org/10.1007/s13042-019-00960-3).
8. Nakashika, T. LSTBM: a novel sequence representation of speech spectra using restricted Boltzmann machine with long short-term memory / T. Nakashika // Proc. Interspeech 2018, 2–6 September 2018. – Hyderabad, 2018. – P. 2529–2533. – DOI: [10.21437/Interspeech.2018-1753](https://doi.org/10.21437/Interspeech.2018-1753).
9. Krasnoproschin, V. V. Neural Network Data Processing Based on Deep Belief Networks / V. V. Krasnoproschin, V. V. Matkevich // Communications in Computer and Information Science ; vol. 1282: Open Semantic Technologies for Intelligent System. – Springer, 2020. – P. 234–244. – DOI: [10.1007/978-3-030-60447-9\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-030-60447-9_15).

10. Kingma, D. P., & Ba, J. L. (2015). Adam: A Method for Stochastic Optimization / D. P. Kingma, J. L. Ba // Proc. of the 3<sup>rd</sup> Intern. Conf. on Learning Representations (ICLR 2015). – P. 1–15.
11. Hamis, S., Zaharia, T., & Rousseau, O. (2019). Image Compression at Very Low Bitrate Based on Deep Learned Super-Resolution / S. Hamis, T. Zaharia, O. Rousseau // IEEE 23<sup>rd</sup> Intern. Symposium on Consumer Technologies (ISCT), Ancona, 19–21 June 2019. – Ancona, 2019. – P. 128–133. – DOI: [10.1109/ISCE.2019.8901038](https://doi.org/10.1109/ISCE.2019.8901038).
12. Oswin, K., Fischer, A., & Igel, Ch. (2018). Population-Contrastive-Divergence: Does consistency help with RBM training? / K. Oswin, A. Fischer, Ch. Igel // Pattern Recognition Letters. – 2018. – Vol. 102. – P. 1–7. – DOI: [10.48550/arXiv.1510.01624](https://doi.org/10.48550/arXiv.1510.01624).
13. Li, X., Gao, X., & Wang, Ch. (2021). A Novel Restricted Boltzmann Machine Training Algorithm With Dynamic Tempering Chains / X. Li, X. Gao, Ch. Wang // IEEE ACCESS. – 2021. – Vol. 9. – P. 21939–21950. – DOI: [10.1109/ACCESS.2020.3043599](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3043599).
14. Brugge, K., Fischer, A., & Igel, Ch. (2013). The flip-the-state transition operator for restricted Boltzmann machines / K. Brugge, A. Fischer, Ch. Igel // Machine Learning. – 2013. – Vol. 93, iss. 1. – P. 53–69. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10994-013-5390-3>.

## REFERENCES

1. Matskevich, V. V. (2022). Vozmozhnosti metoda otzhiga v zadache obucheniya neironnykh setei [Annealing method possibilities in the neural networks training problem]. In *Tekhnologii peredachi i obrabotki informatsii [Information transmission and processing technologies]* (69–73). Minsk: BSUIR (in Russ., abstr. in Engl.).
2. Hajek, B. (1988). Cooling Schedules for Optimal Annealing. *Mathematics of Operations Research*, 13(2), 311–329. <http://www.jstor.org/stable/3689827>.
3. Li, W., Han, M., & Wang, J. (2020). Recurrent restricted Boltzmann machine for chaotic time-series prediction. In *12<sup>th</sup> International Conference on Advanced Computational Intelligence (ICACI)* (439–445). DOI: [10.1109/ICACI49185.2020.9177510](https://doi.org/10.1109/ICACI49185.2020.9177510).
4. Sharma, Bh., Tomer, M., & Kriti, Kr. (2020). Extractive text summarization using F-RBM. *Journal of Statistics and Management Systems*, 23(6), 1093–1104. DOI: [10.1080/09720510.2020.1808353](https://doi.org/10.1080/09720510.2020.1808353).
5. Zhou, D., Wang, X., Tian, Y., & Wang, R. (2017). A novel radar signal recognition method based on a deep restricted Boltzmann machine. *Engineering Review*, 37(2), (165–171).
6. Devi, Ch., Chen, R-Ch, Hendry, & Hung, H.-T. (2021). Experiment improvement of restricted Boltzmann machine methods for image classification. *Vietnam Journal of Computer Science*, 8(3), (417–432). DOI: [10.1142/S2196888821500184](https://doi.org/10.1142/S2196888821500184).
7. Zhai, J., Zhou, X., Zhang, S., & Wang, T. (2019). Ensemble RBM-based classifier using fuzzy integral for big data classification. *International Journal of machine learning and cybernetics*, (10), 3327–3337. DOI: [10.1007/s13042-019-00960-3](https://doi.org/10.1007/s13042-019-00960-3).
8. Nakashika, T. (2018) LSTBM: a novel sequence representation of speech spectra using restricted Boltzmann machine with long short-term memory. In *Proc. Interspeech 2018* (2529–2533). DOI: [10.21437/Interspeech.2018-1753](https://doi.org/10.21437/Interspeech.2018-1753).
9. Krasnoproshin, V. V., & Matskevich, V. V. (2020). Neural Network Data Processing Based on Deep Belief Networks. In *Communications in Computer and Information Science. Vol. 1282: “Open Semantic Technologies for Intelligent System”* (234–244). Springer. DOI: [10.1007/978-3-030-60447-9\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-030-60447-9_15).
10. Kingma, D. P., & Ba, J. L. (2015). Adam: A Method for Stochastic Optimization. In *Proc. of the 3<sup>rd</sup> International Conference on Learning Representations* (1–15).
11. Hamis, S., Zaharia, T., & Rousseau, O. (2019). Image Compression at Very Low Bitrate Based on Deep Learned Super-Resolution. In *IEEE 23<sup>rd</sup> International Symposium on Consumer Technologies (ISCT)* (128–133). DOI: [10.1109/ISCE.2019.8901038](https://doi.org/10.1109/ISCE.2019.8901038).
12. Oswin, K., Fischer, A., & Igel, Ch. (2018). Population-Contrastive-Divergence: Does consistency help with RBM training? *Pattern Recognition Letters*, (102), 1–7. DOI: [10.48550/arXiv.1510.01624](https://doi.org/10.48550/arXiv.1510.01624).
13. Li, X., Gao, X., & Wang, Ch. (2021). A Novel Restricted Boltzmann Machine Training Algorithm With Dynamic Tempering Chains. *IEEE ACCESS*, (9), 21939–21950. DOI: [10.1109/ACCESS.2020.3043599](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3043599).
14. Brugge, K., Fischer, A., & Igel, Ch. (2013). The flip-the-state transition operator for restricted Boltzmann machines. *Machine Learning*, 93(1), 53–69. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10994-013-5390-3>.

Поступила 13.09.2022

## NEURAL NETWORKS TRAINING BASED ON RANDOM SEARCH

V. MATSKEVICH

(Belarusian State University, Minsk)

*The paper deals with a state-of-art problem, associated with neural networks training. Training algorithm (with special parallelization procedure) implementing the annealing method is proposed. The training efficiency is demonstrated by the example of a neural network architecture focused on parallel data processing. For the color image compression problem, it is shown that the proposed algorithm significantly outperforms gradient methods in terms of efficiency. The results obtained make it possible to improve the neural networks training quality in general, and can be used to solve a wide class of applied problems.*

**Keywords:** random search method, gradient descent method, annealing method, training, restricted Boltzmann machine, parallel computing.

## ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА СЖАТИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ДИАПАЗОНА ИНФРАКРАСНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ МАТРИЦЫ ТОНОВОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

С. И. РУДИКОВ<sup>1</sup>

д-р техн. наук, проф. В. Ю. ЦВЕТКОВ<sup>2</sup>

акад. Нац. акад. наук Беларуси, д-р физ.-мат. наук, проф. А. П. ШКАДАРЕВИЧ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(Научно-технический центр «ЛЭМТ» БелОМО, Минск)

<sup>2</sup>(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск)

*Предложена модель сжатия динамического диапазона инфракрасных (ИК) изображений, основанная на матрице тонового отображения, элементы которой связывают уровни яркости исходного изображения с широким динамическим диапазоном и уровни яркости нелинейно преобразованного изображения с узким динамическим диапазоном, а также указывают в зависимости от варианта формирования этой матрицы: а) на потери различения соседних пикселей из-за сжатия динамического диапазона; б) уровень нелинейных искажений сжатия; в) неоднозначность тонового отображения. На основе данной модели предложены интервальные показатели качества сжатия динамического диапазона ИК-изображений, позволяющие оценить потенциальную различающую способность, реальные потери различения соседних пикселей после преобразования, величину нелинейных искажений сжатия, равномерность использования динамического диапазона, неоднозначность тонового отображения для выбранного интервала динамического диапазона. Предложенные показатели позволяют повысить точность оценки качества сжатия динамического диапазона ИК-изображений, расширяя систему известных показателей, оценивающих контраст, энтропию, статистическую естественность преобразованных изображений и структурную точность тонового отображения.*

**Ключевые слова:** сжатие динамического диапазона, инфракрасные изображения, матрица тонового отображения, интервальные показатели качества изображений.

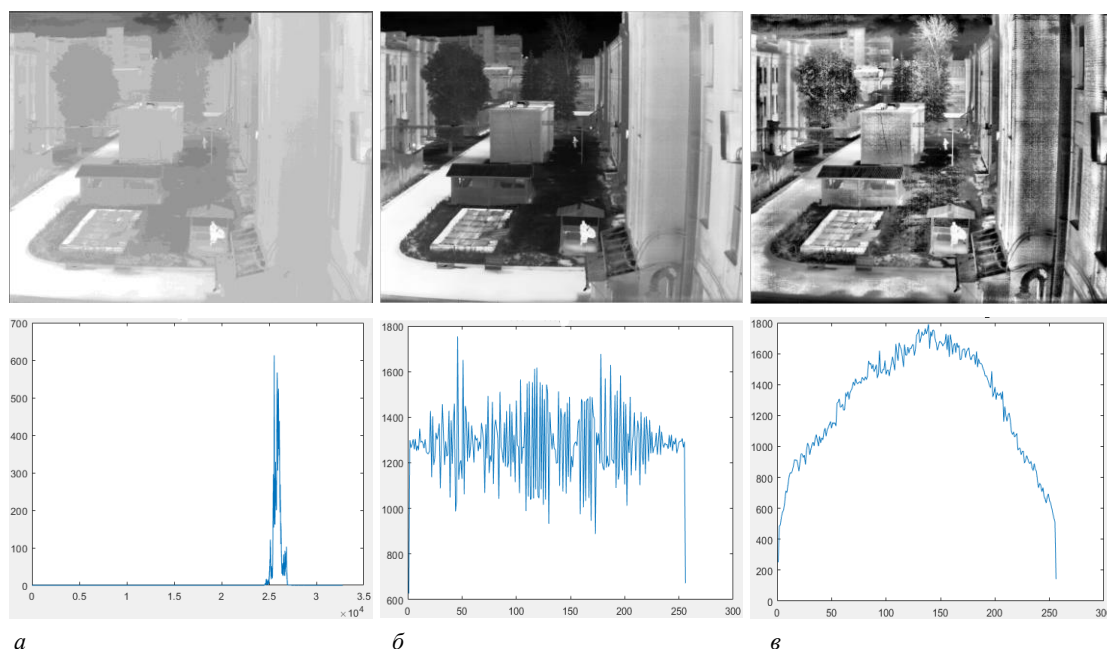
**Введение.** Для воспроизведения инфракрасных изображений, имеющих широкий динамический диапазон, на стандартных мониторах используется сжатие динамического диапазона. Известно множество алгоритмов тонового отображения, которые не только сжимают динамический диапазон, но и улучшают форму гистограммы яркости для лучшей передачи тонов. Многие основаны на эквализации гистограммы. Широко используется алгоритм глобальной эквализации гистограммы (Histogram Equalization, HE) [1], отличающийся низкой вычислительной сложностью. На его основе разработан блочный алгоритм адаптивной (локальной) эквализации гистограмм (Adaptive Histogram Equalization, AHE) [2], улучшающий тоновое отображение мелких деталей. На основе АНЭ разработано множество блочных алгоритмов, повышающих эффективность тонового отображения (представлены в [3–6]). В [7] предложен алгоритм адаптивного выравнивания, растяжения и сжатия гистограммы (Histogram Equalization, Compression and Stretching, HECS), улучшающий тоновое отображение на краях гистограммы яркости.

Качество алгоритмов тонового отображения определяется качеством преобразованных с их помощью изображений (безэталонные показатели качества) и схожестью этих изображений с исходными (эталонные показатели качества). Сравнение и рекомендации по использованию показателей качества можно найти в [8]. Благодаря относительной простоте вычисления широко используются безэталонные показатели, позволяющие оценить контраст, энтропию, статистическую естественность [9]. Для оценки качества тонового отображения на основе эталона в случае ИК-изображений с широким динамическим диапазоном часто используются показатели структурной точности [10] и качества тональной карты [11]. Несмотря на разнообразие показателей, они не учитывают ряд характеристик сжатия динамического диапазона, связанных, например, с линейностью и последовательностью передачи тонов, потерей различения соседних пикселей после преобразования и равномерностью использования динамического диапазона, ростом неоднозначности тонового отображения из-за различий передаточных характеристик блоков изображения при использовании для преобразования блочных алгоритмов. Кроме того, большинство известных показателей качества преобразования динамического диапазона вычисляются для всего динамического диапазона. Однако в ряде случаев необходимы интервальные показатели, позволяющие оценить качество тонового отображения в определенной части динамического диапазона преобразованного ИК-изображения. Данные недостатки известных показателей приводят к низкой точности и неоднозначности оценки качества сжатия динамического диапазона ИК-изображений.

Целью работы является повышение точности оценки качества сжатия динамического диапазона ИК-изображений за счет использования дополнительных интервальных показателей, характеризующих различающую способность преобразованных изображений, линейность и однозначность тонового отображения в выбранной части динамического диапазона преобразованного изображения.

**Постановка задачи.** Для оценки качества алгоритмов преобразования динамического диапазона широко используются показатели статистической естественности (Statistical Naturalness,  $N_s$ ) [9], структурной точности (Structural Fidelity,  $F_s$ ) [10] и основанный на них показатель качества тональной карты (Tone Mapped image Quality Index,  $I_{TMQ}$ ) [11]. Кроме того, для оценки качества изображения используются контраст (стандартное отклонение)  $D_{ST}$ , средний градиент  $G_A$ , энтропия  $E_1$ . Для оценки детализации изображения после преобразования в [7] предложено использовать количество  $N_{LE}$  локальных экстремумов.

На рисунках 1 и 2 приведены ИК-изображения и их гистограммы: исходное изображение с широким динамическим диапазоном (для отображения использовано линейное сжатие гистограммы), полученные на его основе изображения с узким динамическим диапазоном с помощью алгоритма HE [1] и блочных алгоритмов АНЕ [2], HECS [7] и его модификации HECSm на основе инверсии обрезанных краев глобальной гистограммы со смещением гистограммы яркости вправо (HECSm+) и влево (HECSm-) при размере блока  $64 \times 64$  пикселя. Для этих изображений в таблице 1 приведены значения рассмотренных показателей. Жирным шрифтом отмечены лучшие значения, курсивом – худшие.

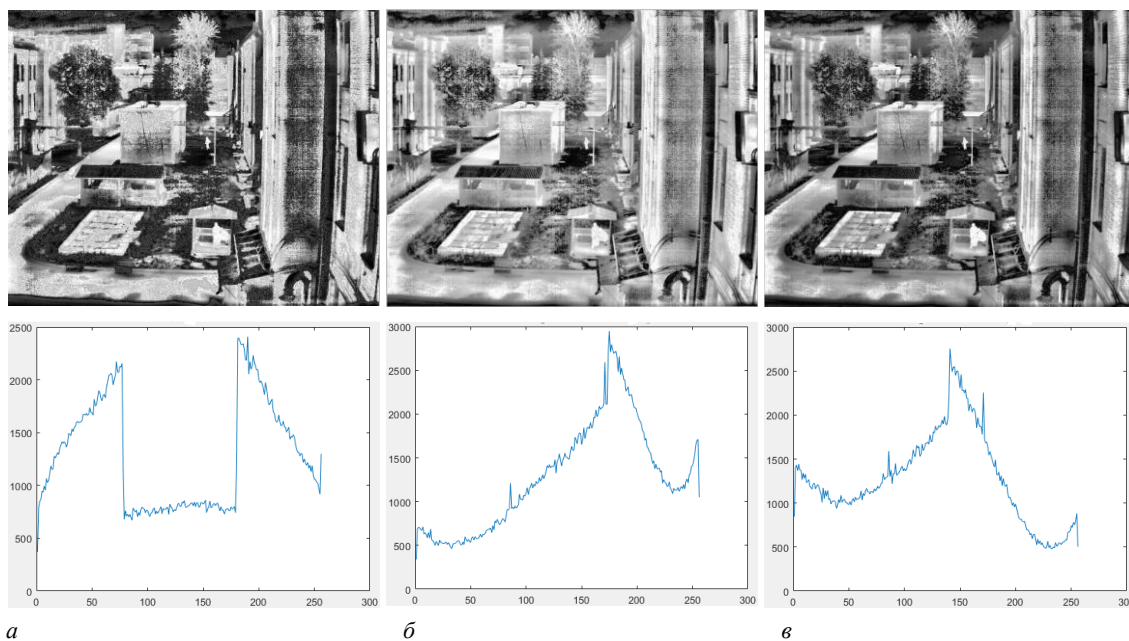


**а** – исходное изображение; **б** – преобразованное с помощью HE; **в** – преобразованное с помощью АНЕ

**Рисунок 1. – ИК-изображения и их гистограммы**

Таблица 1. – Значения показателей качества для изображений на рисунке 1

Показатели качества изображений	Алгоритм сжатия динамического диапазона								
	HE	Блоки $64 \times 64$ пикселя				Блоки $32 \times 32$ пикселя			
		АНЕ	HECS	HECSm+	HECSm-	АНЕ	HECS	HECSm+	HECSm-
$N_s$	0,0600	0,2996	<b>0,4987</b>	0,2670	0,3144	0,5004	0,5312	0,4693	<b>0,5358</b>
$F_s$	0,8239	<b>0,8779</b>	0,7849	0,8576	0,8591	<b>0,7934</b>	0,7677	0,7809	0,7851
$I_{TMQ}$	0,7824	0,8546	<b>0,8656</b>	0,8425	0,8525	0,8684	0,8662	0,8594	<b>0,8720</b>
$D_{ST}$	35,712	58,837	<b>73,320</b>	57,380	58,818	60,501	61,162	61,065	<b>61,874</b>
$G_A$	5,239	12,988	<b>19,330</b>	13,101	13,546	19,088	<b>21,009</b>	19,635	19,858
$E_1$	6,2973	7,6580	<b>7,7240</b>	7,5921	7,6372	7,7856	<b>7,8111</b>	7,7377	7,756
$N_{LE}$	34202	41467	<b>51188</b>	43317	43847	43324	<b>48958</b>	45524	45875



**а** – преобразованное с помощью HECS; **б** – преобразованное с помощью HECSm+;  
**в** – преобразованное с помощью HECSm-

**Рисунок 2. – Преобразованные ИК-изображения и их гистограммы**

Из таблицы 1 следует, что при размере блока  $64 \times 64$  пикселя по всем показателям, кроме  $F_s$ , алгоритм HECS превосходит другие алгоритмы. При размере блока  $32 \times 32$  пикселя алгоритм HECS уступает алгоритмам АНЕ и HECSm- по показателям  $F_s$  и  $I_{TMQ}$  и алгоритму HECSm- по показателям  $N_s$  и  $D_{ST}$ . При этом, как следует из рисунка 1, алгоритм HECS по сравнению с другими алгоритмами вносит в преобразованное изображение значительные нелинейные искажения, нарушая последовательность изменения оттенков (хорошо заметно на участках в области темного и светлого), что связано с ошибками переквантования. Единственный показатель, отражающий данный факт – это структурная точность  $F_s$ , которая в алгоритме HECS хуже по сравнению с другими алгоритмами. Однако показатель  $F_s$  имеет примерно одинаковые значения для результатов алгоритмов HECSm+ и HECSm-, представляемых существенно разными гистограммами и использующими различную нелинейность передаточных характеристик блоков в области темного и светлого. Таким образом, для повышения точности оценки качества сжатия динамического диапазона ИК-изображений актуальными задачами являются разработка модели сжатия динамического диапазона, учитывающей нелинейность передаточных характеристик блоков, а также показателей качества сжатия на основе данной модели и оценка их эффективности.

**Модель сжатия динамического диапазона ИК-изображений.** Предлагается модель сжатия динамического диапазона ИК-изображений на основе матрицы  $Q(V) = \|q(V, m, n)\|_{(m=0, L_{LDR}-1, n=0, L_{HDR}-1)}$  тонового отображения, нулевые значения элементов которой указывают на отсутствие отображения  $n$ -го уровня квантования исходного изображения  $I_{HDR}$  в  $m$ -й уровень квантования преобразованного изображения  $I_{LDR}$ , а отличные от нуля значения – на наличие такого отображения и, в зависимости от варианта  $V$  формирования матрицы:

- на потери различия соседних пикселей при отображении значения  $n$  пикселя исходного изображения  $I_{HDR}$  в значение  $m$  соответствующего пикселя преобразованного изображения  $I_{LDR}$  ( $V = A$ );
- уровень нелинейных искажений при отображении значения  $n$  пикселя исходного изображения  $I_{HDR}$  в значение  $m$  соответствующего пикселя преобразованного изображения  $I_{LDR}$  ( $V = B$ );
- количество всех пикселей со значением  $n$  исходного изображения  $I_{HDR}$ , отображенных в пиксели со значением  $m$  преобразованного изображения  $I_{LDR}$  ( $V = C$ ).

Значения элементов матрицы  $Q(A)$  определяются с учетом порога различия  $D$  (минимального значимого количества градаций яркости соседних пикселей в окрестности радиусом  $R$  пикселей, при котором



обеспечивается различимость этих пикселей на исходном  $I_{\text{HDR}}$  и преобразованном  $I_{\text{LDR}}$  изображениях), с помощью выражения (сначала все элементы нулевые)

$$\begin{aligned} & (i_{\text{HDR}}(y, x) = n) \wedge (i_{\text{LDR}}(y, x) = m) \Rightarrow (q(A, m, n) \leftarrow 1), \\ & (\forall k (k = \overline{-R, R}) \forall p (p = \overline{-R, R}) ((k \neq 0) \vee (p \neq 0)) (|i_{\text{HDR}}(y, x) - i_{\text{HDR}}(y + k, x + p)| > D) \wedge \\ & \wedge (|i_{\text{LDR}}(y, x) - i_{\text{LDR}}(y + k, x + p)| < D) \Rightarrow q(A, m, n) \leftarrow q(A, m, n) + \\ & + |i_{\text{HDR}}(y, x) - i_{\text{HDR}}(y + k, x + p)| L_{\text{LDR}} / L_{\text{HDR}} - |i_{\text{LDR}}(y, x) - i_{\text{LDR}}(y + k, x + p)|) \end{aligned} \quad (1)$$

при  $y = \overline{0, Y - 1}$ ,  $x = \overline{0, X - 1}$ .

Значения элементов матрицы  $Q(B)$  определяются на основе суммы квадратов разностей значений пикселей  $m$  преобразованного изображения  $I_{\text{LDR}}$  и значений, полученных из значений  $n$  соответствующих пикселей исходного изображения  $I_{\text{HDR}}$ , с помощью выражения (сначала все элементы нулевые)

$$(i_{\text{HDR}}(y, x) = n) \wedge (i_{\text{LDR}}(y, x) = m) \Rightarrow q(B, m, n) \leftarrow q(B, m, n) + (i_{\text{HDR}}(y, x) L_{\text{LDR}} / L_{\text{HDR}} - i_{\text{LDR}}(y, x))^2 \quad (2)$$

при  $y = \overline{0, Y - 1}$ ,  $x = \overline{0, X - 1}$ .

Значения элементов матрицы  $Q(C)$  определяются с помощью выражения (сначала все элементы нулевые)

$$(i_{\text{HDR}}(y, x) = n) \wedge (i_{\text{LDR}}(y, x) = m) \Rightarrow q(C, m, n) \leftarrow q(C, m, n) + 1 \text{ при } y = \overline{0, Y - 1}, x = \overline{0, X - 1}. \quad (3)$$

На основе матрицы  $Q(V)$  в зависимости от варианта ее формирования могут быть получены:

- компрессионная характеристика  $F_{\text{DP}} = \|f_{\text{DP}}(m)\|_{(m=\overline{0, L_{\text{LDR}}-1})}$ , описывающая распределение по динамическому диапазону  $[0, L_{\text{LDR}} - 1]$  преобразованного изображения  $I_{\text{LDR}}$  количества уровней квантования исходного изображения  $I_{\text{HDR}}$  ( $V = A$ );

- характеристика  $F_{\text{DE}} = \|f_{\text{DE}}(m)\|_{(m=\overline{0, L_{\text{LDR}}-1})}$  потерь различения соседних пикселей преобразованного изображения, описывающая распределение по динамическому диапазону  $[0, L_{\text{LDR}} - 1]$  разностей в различениях соседних пикселей на исходном  $I_{\text{HDR}}$  и преобразованном  $I_{\text{LDR}}$  изображениях ( $V = A$ );

- дистрибутивная характеристика  $F_{\text{D}} = \|f_{\text{D}}(n)\|_{(n=\overline{0, L_{\text{HDR}}-1})}$ , описывающая распределение по прореженному динамическому диапазону  $[0, L_{\text{HDR}} - 1]$  исходного изображения  $I_{\text{HDR}}$  количества соответствующих уровней квантования преобразованного изображения  $I_{\text{LDR}}$ , где  $L_{\text{HDR}}$  – количество уровней квантования, для которых существуют пиксели исходного изображения  $I_{\text{HDR}}$  с соответствующей яркостью ( $V = A$ );

- характеристика  $F_{\text{MS}} = \|f_{\text{MS}}(m)\|_{(m=\overline{0, L_{\text{LDR}}-1})}$  нелинейности тонового отображения, описывающая распределение по динамическому диапазону  $[0, L_{\text{LDR}} - 1]$  преобразованного изображения  $I_{\text{LDR}}$  нелинейных искажений, возникающих при тоновом отображении по сравнению с линейным преобразованием ( $V = B$ );

- характеристика  $F_{\text{H}} = \|f_{\text{H}}(m)\|_{(m=\overline{0, L_{\text{LDR}}-1})}$  использования динамического диапазона преобразованного изображения (гистограмма яркости), описывающая распределения значений пикселей преобразованного изображения  $I_{\text{LDR}}$  по динамическому диапазону  $[0, L_{\text{LDR}} - 1]$  ( $V = C$ ).

Значения функций  $F_{\text{DP}}$ ,  $F_{\text{DE}}$ ,  $F_{\text{MS}}$ ,  $F_{\text{H}}$ ,  $F_{\text{D}}$  определяются с помощью выражений:

$$f_{\text{DP}}(m) = \sum_{n=0}^{L_{\text{HDR}}-1} (q(A, m, n) > 0), \quad (4)$$

$$f_{\text{DE}}(m) = \sum_{n=0}^{L_{\text{HDR}}-1} (q(A, m, n) - 1), \quad (5)$$

$$f_{MS}(m) = \sum_{n=0}^{L_{HDR}-1} q(B, m, n), \quad (6)$$

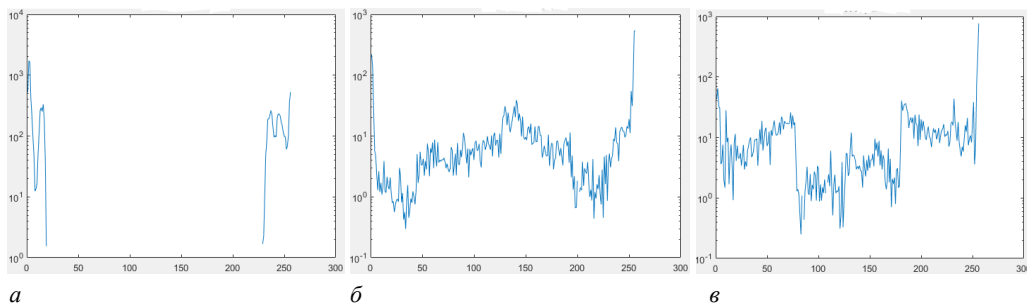
$$f_H(m) = \sum_{n=0}^{L_{HDR}-1} q(C, m, n) \quad (7)$$

при  $m = \overline{0, L_{LDR} - 1}$ ;

$$\left( \sum_{m=0}^{L_{LDR}-1} (q(A, m, n) > 0) > 0 \right) \Rightarrow \left( \left( f_D(k) = \sum_{m=0}^{L_{LDR}-1} (q(A, m, n) > 0) \right), (k \leftarrow k+1) \right) \quad (8)$$

при  $k \leftarrow 0, n = \overline{0, L_{HDR} - 1}, k \in [0, L_{HDR} - 1]$ .

Характеристика  $F_{DE}$  ИК-изображений, полученных с помощью алгоритмов HE, AHE, HECS (см. рисунки 1, 2), показана на рисунке 3.



*a* – для алгоритма HE; *б* – для алгоритма AHE; *в* – для алгоритма HECS

Рисунок 3. – Функция  $F_{DE}$

**Показатели качества сжатия динамического диапазона ИК-изображений.** Для оценки качества сжатия динамического диапазона ИК-изображений предлагаются интервальные и интервально-блочные показатели, основанные на функциях  $F_{DP}$ ,  $F_{DE}$ ,  $F_{MS}$ ,  $F_H$ ,  $F_D$  и характеризующие:

- потенциальную различающую способность  $P_D$  на выбранном интервале  $[m_L, m_R]$  динамического диапазона преобразованного изображения  $I_{LDR}$ ;
- потери  $E_D$  различения соседних пикселей на выбранном интервале  $[m_L, m_R]$  динамического диапазона преобразованного изображения  $I_{LDR}$ , обусловленные тоновым отображением;
- величину  $E_{MS}$  нелинейных искажений сжатия динамического диапазона на выбранном интервале  $[m_L, m_R]$  динамического диапазона преобразованного изображения  $I_{LDR}$  относительно линейно преобразованного изображения  $I_{HDR} L_{LDR} / L_{HDR}$ ;
- равномерность  $U_H$  использования динамического диапазона на выбранном интервале  $[m_{L1}, m_{R1}]$  динамического диапазона преобразованного изображения  $I_{LDR}$  относительно базового интервала  $[m_{L2}, m_{R2}]$ ;
- неоднозначность  $L_{DH}$  тонового отображения, обусловленную различиями передаточных характеристик блоков в интервале  $[m_L, m_R]$  динамического диапазона преобразованного изображения  $I_{LDR}$ , соответствующего интервалу  $[K_{HL} m_L, K_{HL} m_R]$  прореженного динамического диапазона исходного изображения  $I_{HDR}$ , где  $K_{HL}$  – коэффициент, зависящий от количества уровней квантования  $L_{LDR}$  и  $L_{HDR}$ ,  $K_{HL} = L_{HDR} / L_{LDR}$ ;
- величину  $L_{DL}$  нелинейных искажений, связанных с неоднозначностью тонового отображения, в интервале  $[m_L, m_R]$  динамического диапазона преобразованного изображения  $I_{LDR}$ , соответствующего интервалу  $[K_{HL} m_L, K_{HL} m_R]$  прореженного динамического диапазона исходного изображения  $I_{HDR}$ .

Значения показателей  $P_D$ ,  $E_D$ ,  $E_{MS}$ ,  $U_H$ ,  $L_{DH}$ ,  $L_{DL}$  определяются с помощью выражений:

$$P_D = \left( \sum_{m=m_L}^{m_R-1} f_{DP}(m) - \sum_{m=0}^{L_{LDR}-1} f_{DP}(m) / L_{LDR} \right) / (m_R - m_L), \quad (9)$$

$$E_D = \left( \sum_{m=m_L}^{m_R-1} f_{DE}(m) - \sum_{m=0}^{L_{LDR}-1} f_{DE}(m) / L_{LDR} \right) / (m_R - m_L), \quad (10)$$

$$E_{MS} = \frac{1}{10^3} \sum_{m=m_L}^{m_R-1} f_{MS}(m) / \sum_{m=m_L}^{m_R-1} f_H(m), \quad (11)$$

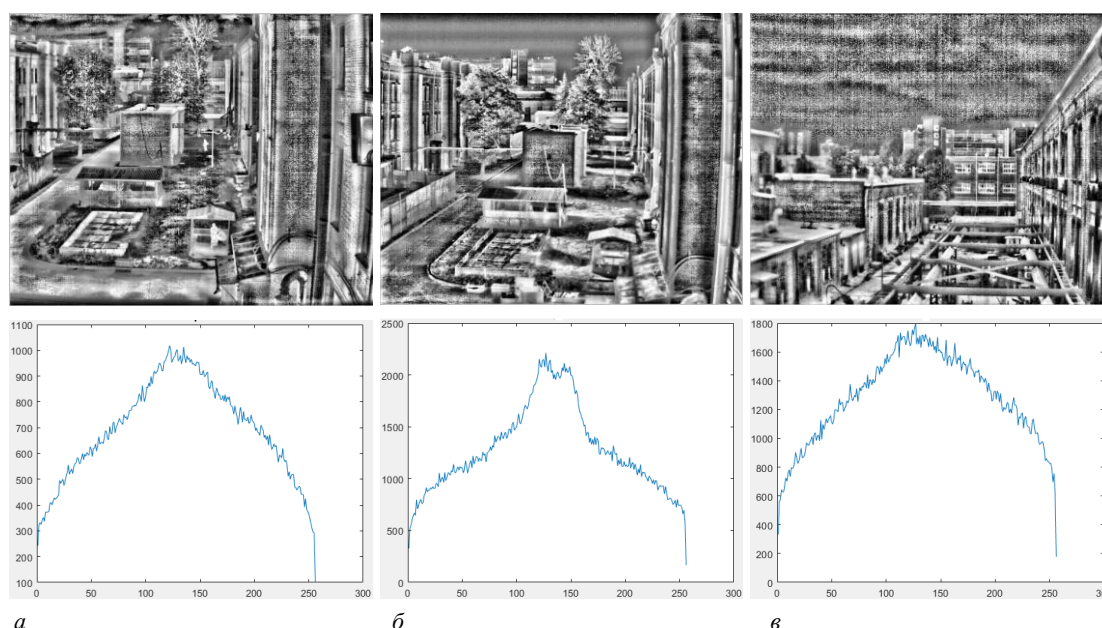
$$U_H = \sum_{m=m_{L1}}^{m_{R1}-1} f_H(m) / \sum_{m=m_{L2}}^{m_{R2}-1} f_H(m), \quad (12)$$

$$L_{DH} = \sum_{n=K_{HL}m_L}^{K_{HL}m_R-1} f_D(n) / (K_{HL}(m_R - m_L)), \quad (13)$$

$$L_{DL} = \sum_{n=K_{HL}m_L}^{K_{HL}m_R-1} f_D(n) / \sum_{m=m_L}^{m_R-1} f_H(m). \quad (14)$$

Из выражений (1)–(14) следует, что показатели  $P_D$ ,  $E_D$ ,  $E_{MS}$ ,  $L_{DH}$ ,  $L_{DL}$  позволяют произвести эталонную оценку качества сжатия динамического диапазона ИК-изображений (для вычисления этих показателей используются исходное  $I_{HDR}$  и преобразованное  $I_{LDR}$  изображения). Показатель  $U_H$  предназначен для безэталонной оценки качества сжатия динамического диапазона ИК-изображений.

**Оценка эффективности показателей качества сжатия динамического диапазона ИК-изображений.** На рисунке 4 приведены ИК-изображения с узким динамическим диапазоном  $L_{LDR} = 256$ , преобразованные с помощью алгоритма АНЕ из трех изображений  $I_{HDR}(1) - I_{HDR}(3)$  с широким динамическим диапазоном  $L_{HDR} = 32768$  при размере блока  $32 \times 32$  пикселя. Для изображений, приведенных на рисунке 4, а также аналогичных изображений, полученных из изображений  $I_{HDR}(1) - I_{HDR}(3)$  с широким динамическим диапазоном с помощью алгоритма НЕ и различных блочных алгоритмов при размерах блока  $64 \times 64$  и  $32 \times 32$  пикселя, в таблицах 2, 3 приведены значения показателей качества сжатия динамического диапазона  $N_S$ ,  $F_S$ ,  $I_{TMQ}$ ,  $D_{ST}$ ,  $G_A$ ,  $E_I$ ,  $N_{LE}$ , а также предложенные показатели  $P_D$ ,  $E_D$ ,  $E_{MS}$ ,  $U_H$ ,  $L_{DH}$ ,  $L_{DL}$  при  $D = 8$  и  $R = 1$  (таблица 2 дополняет таблицу 1).



а – для  $I_{HDR}(1)$ ; б – для  $I_{HDR}(2)$ ; в – для  $I_{HDR}(3)$

Рисунок 4. – ИК-изображения, полученные с помощью алгоритма АНЕ с размером блока  $32 \times 32$  пикселя, и их гистограммы

В таблицах 2, 3 жирным шрифтом отмечены лучшие значения, курсивом – худшие. Поскольку гистограммы яркости выбранных изображений отличаются формой и положениями максимумов, для нормировки интервалы вычисления показателей  $P_D$ ,  $E_D$ ,  $E_{MS}$ ,  $U_H$ ,  $L_{DH}$ ,  $L_{DL}$  приведены к центральным значениям  $h_{MAX}$  максимумов гистограмм и составляют:  $[m_L, m_R] = [m_{L1}, m_{R1}] = [0, 3h_{MAX}/4]$ ,  $[m_{L2}, m_{R2}] = [h_{MAX}/2, 3h_{MAX}/2]$  (левая часть динамического диапазона – интервал L);  $[m_L, m_R] = [m_{L1}, m_{R1}] = [h_{MAX}/2, 3h_{MAX}/2]$ ,  $[m_{L2}, m_{R2}] = [0, 3h_{MAX}/4] \cup [5h_{MAX}/4, L_{LDR} - 1]$  (центральная часть динамического диапазона – интервал С);  $[m_L, m_R] = [m_{L1}, m_{R1}] = [5h_{MAX}/4, L_{LDR} - 1]$ ,  $[m_{L2}, m_{R2}] = [h_{MAX}/2, 3h_{MAX}/2]$  (правая часть динамического диапазона – интервал R). Показатели  $E_{MS}$ ,  $L_{DH}$ ,  $L_{DL}$  вычисляются также для всего динамического диапазона  $[0, L_{LDR} - 1]$  (интервал Т).

Таблица 2. – Значения показателей качества для изображения  $I_{HDR}$  (1)

Интервалы	Показатели	Значения показателей для алгоритмов сжатия динамического диапазона								
		HE	Блоки 64×64 пикселя				Блоки 32×32 пикселя			
			AHE	HECS	HECSm+	HECSm-	AHE	HECS	HECSm+	HECSm-
L	$P_D$	3,167	-54,351	-38,422	<b>-147,916</b>	-18,759	-101,685	-98,716	<b>-175,918</b>	-26,308
	$E_D$	23,888	-5,590	-5,661	<b>-8,361</b>	-3,911	-11,409	-10,502	<b>-16,060</b>	-9,817
	$E_{MS}$	19,913	21,004	20,334	<b>15,839</b>	21,547	20,518	21,415	<b>17,288</b>	22,971
	$U_H$	<b>0,987</b>	0,728	<b>1,011</b>	0,483	0,726	0,681	0,668	0,480	<b>0,729</b>
	$L_{DH}$	<b>1,000</b>	<b>38,268</b>	67,420	57,900	38,896	<b>30,961</b>	31,597	59,558	35,872
	$L_{DL}$	<b>0,007</b>	<b>0,299</b>	0,525	0,638	0,300	<b>0,265</b>	0,268	0,663	0,273
C	$P_D$	-5,847	133,171	<b>-21,362</b>	159,146	134,799	155,731	<b>141,580</b>	164,163	150,889
	$E_D$	<b>-41,331</b>	3,611	<b>-5,453</b>	0,738	0,217	<b>7,639</b>	8,924	10,404	9,910
	$E_{MS}$	4,312	6,071	<b>2,251</b>	2,873	5,161	6,022	6,520	<b>3,297</b>	6,125
	$U_H$	<b>1,005</b>	1,364	<b>0,894</b>	1,519	1,620	1,496	<b>1,456</b>	1,570	1,619
	$L_{DH}$	<b>1,000</b>	111,790	114,230	<b>109,622</b>	111,635	120,155	122,946	120,175	<b>119,822</b>
	$L_{DL}$	<b>0,007</b>	0,663	0,900	<b>0,592</b>	0,634	0,685	0,704	<b>0,657</b>	0,680
R	$P_D$	0,996	-54,311	72,273	72,865	<b>-154,433</b>	-54,856	-37,391	50,478	<b>-164,268</b>
	$E_D$	3,026	6,286	19,724	8,538	<b>0,019</b>	-2,773	-3,523	0,503	<b>-8,256</b>
	$E_{MS}$	0,565	<b>0,570</b>	0,756	0,717	0,585	<b>0,545</b>	0,650	0,728	0,722
	$U_H$	<b>1,002</b>	0,739	1,227	<b>0,833</b>	0,508	0,656	0,706	<b>0,793</b>	0,507
	$L_{DH}$	<b>1,000</b>	39,808	33,829	<b>32,439</b>	40,098	57,158	57,926	<b>35,267</b>	51,073
	$L_{DL}$	<b>0,007</b>	0,338	0,223	<b>0,217</b>	0,455	0,482	0,475	<b>0,251</b>	0,587
T	$E_{MS}$	10,576	9,400	10,951	<b>6,269</b>	10,449	9,254	9,168	<b>6,619</b>	10,887
	$L_{DH}$	<b>1,000</b>	67,544	70,179	<b>66,140</b>	67,666	73,752	75,384	<b>72,712</b>	73,650
	$L_{DL}$	<b>0,007</b>	0,496	0,516	<b>0,486</b>	0,497	0,542	0,554	<b>0,534</b>	0,541

Из таблиц 1–3 следует, что предложенные показатели  $P_D$ ,  $E_D$ ,  $E_{MS}$ ,  $U_H$ ,  $L_{DH}$ ,  $L_{DL}$  качества сжатия динамического диапазона вводят новые критерии для определения эффективности алгоритмов тонного ото-бражения дополнительно к существующим критериям, определяемым известными показателями  $N_S$ ,  $F_S$ ,  $I_{TMQ}$ ,  $D_{ST}$ ,  $G_A$ ,  $E_I$ ,  $N_{LE}$ . Являясь интервальными, предложенные показатели позволяют оценить качество сжатия динамического диапазона в интересующем поддиапазоне, что важно для поиска объектов на ИК-изображениях в различных технологических системах (например, для определения притока холодного воздуха – яркость таких объектов находится в нижней части динамического диапазона, для обнаружения работающей и греющейся техники – яркость таких объектов находится в верхней части динамического диапазона).

Таблица 3. – Значения показателей качества для изображений  $I_{HDR}(2)$  и  $I_{HDR}(3)$

Интервалы	Показатели	Значения показателей для алгоритмов сжатия динамического диапазона									
		для изображения $I_{HDR}(2)$ , интервалы L, T					для изображения $I_{HDR}(3)$ , интервалы R, T				
		HE	Блоки 64×64 пикселя				HE	Блоки 32×32 пикселя			
АНЕ	HECS		HECSm+	HECSm-	АНЕ	HECS		HECSm+	HECSm-		
L(R)	$P_D$	-0,268	-119,857	-98,826	<b>-227,549</b>	-82,349	0,868	18,103	39,799	60,460	<b>-51,054</b>
	$E_D$	8,516	-5,670	-4,571	<b>-28,039</b>	-17,270	13,716	-1,603	0,168	-7,765	<b>-14,381</b>
	$E_{MS}$	24,950	18,484	18,096	<b>14,816</b>	20,460	1,127	0,740	0,886	<b>0,727</b>	0,806
	$U_H$	<b>0,987</b>	0,753	<b>0,789</b>	0,475	0,708	<b>1,000</b>	0,812	<b>0,931</b>	0,778	0,530
	$L_{DH}$	<b>1,000</b>	52,552	63,416	55,456	<b>47,427</b>	<b>1,000</b>	18,852	16,944	<b>11,021</b>	17,824
	$L_{DL}$	<b>0,014</b>	0,780	0,929	1,197	<b>0,699</b>	<b>0,005</b>	0,105	0,085	<b>0,058</b>	0,141
T	$E_{MS}$	9,447	8,576	8,771	<b>5,649</b>	9,558	10,314	9,192	9,847	<b>6,520</b>	10,611
	$L_{DH}$	<b>1,000</b>	37,943	42,065	<b>37,454</b>	37,654	<b>1,000</b>	63,921	67,486	<b>62,369</b>	63,409
	$L_{DL}$	<b>0,014</b>	0,529	0,587	<b>0,522</b>	0,525	<b>0,005</b>	0,342	0,361	<b>0,334</b>	0,340
	$N_S$	0,064	0,336	<b>0,536</b>	0,291	0,333	0,083	0,673	<b>0,763</b>	0,576	0,659
	$F_S$	0,837	<b>0,843</b>	0,682	0,817	0,824	0,829	<b>0,797</b>	0,762	0,792	0,791
	$I_{TMQ}$	0,787	<b>0,852</b>	0,841	0,836	0,846	0,791	0,898	<b>0,902</b>	0,881	0,894
	$D_{ST}$	35,407	60,728	<b>65,264</b>	58,072	58,633	28,087	62,849	<b>69,173</b>	58,466	60,135
	$G_A$	5,723	13,634	<b>21,931</b>	13,295	13,612	5,960	22,965	<b>27,280</b>	21,453	22,224
	$E_I$	6,351	7,692	<b>7,845</b>	7,598	7,637	6,104	7,817	<b>7,883</b>	7,677	7,727
	$N_{LE}$	28360	35522	<b>48095</b>	37724	37728	43929	48982	<b>55705</b>	50739	51089

Показатель  $P_D$  позволяет выявить алгоритм тонового отображения, обеспечивающий лучшее потенциальное различие соседних пикселей после тонового отображения в интересующем интервале динамического диапазона. Наименьшие (лучшие) значения данного показателя в нижней и верхней частях динамического диапазона для большинства ИК-изображений обеспечивают алгоритмы HECSm+ и HECSm-. Минимальным значениям показателя  $P_D$  в нижней и верхней частях динамического диапазона соответствуют, как правило, минимальные или близкие к минимальным значения потерь  $E_D$  различия соседних пикселей преобразованного изображения и  $E_{MS}$  нелинейных искажений сжатия динамического диапазона (характерно для алгоритмов HECSm+ и HECSm-).

Показатель  $U_H$  позволяет определить алгоритмы, обеспечивающие наибольшую равномерность использования динамического диапазона. Наиболее равномерное использование динамического диапазона обеспечивает алгоритм HE, а в группе блочных алгоритмов – HECS.

Показатель неоднозначности  $L_{DH}$  и связанный с ним показатель  $L_{DL}$  нелинейных искажений имеют лучшие значения для алгоритма HE, а в группе блочных алгоритмов – в зависимости от типа изображения и интервала. Следствием низкой неоднозначности алгоритма HE являются характерные для него высокие значения показателя  $F_S$  структурной точности. Соответствие между значениями показателей  $L_{DH}$  неоднозначности тонового отображения,  $L_{DL}$  нелинейных искажений и  $F_S$  структурной точности прослеживается для всех алгоритмов сжатия динамического диапазона.

Из таблиц 1–3 также следует, что существует взаимосвязь между известными показателями  $N_S$  натуральной естественности и  $D_{ST}$  контраста,  $G_A$  градиента,  $E_I$  энтропии,  $N_{LE}$  количества локальных экстремумов. Лучшие значения для большинства случаев обеспечивает алгоритм HECS. Однако при этом он имеет, как правило, худшие значения глобальных показателей  $L_{DH}$  неоднозначности тонового отображения,  $L_{DL}$  нелинейных искажений и  $F_S$  структурной точности.

**Заключение.** Разработана модель сжатия динамического диапазона ИК-изображений, основанная на матрице тонового отображения, элементы которой указывают на связь между значениями пикселей исходного и преобразованного изображений с учетом разницы в различениях соседних пикселей этих изображений, линейности и возможной неоднозначности преобразования из-за блочного характера обработки

исходного изображения. На основе данной модели предложены интервальные показатели потенциальной различающей способности, потерь различения при сжатии динамического диапазона, величины нелинейных искажений сжатия, равномерности использования динамического диапазона, неоднозначности тонового отображения и величины нелинейных искажений из-за неоднозначности отображения. Проведены исследования зависимости этих показателей от типа ИК-изображения, алгоритма тонового отображения, интервалов динамического диапазона, порога различения соседних пикселей и радиуса окрестности оценки различения на исходном и преобразованном изображениях, а также связи предложенных показателей между собой и с известными показателями качества. Установлено, что при улучшении потенциальной различающей способности преобразованных изображений, как правило, уменьшаются реальные потери различения соседних пикселей и среднеквадратическое отклонение значений пикселей преобразованного изображения от значений соответствующих пикселей линейно преобразованного изображения. Процесс улучшения различения соседних пикселей преобразованного изображения в отдельном интервале динамического диапазона сопровождается обычно уменьшением равномерности гистограммы, ростом неоднозначности тонового отображения и связанных с ней нелинейных искажений в этом интервале, а также снижением структурной точности. Структурная точность и статистическая естественность для многих ИК-изображений находятся в противопоставлении, поэтому снижение структурной точности, как правило, приводит к улучшению статистической естественности ИК-изображений и связанных с ней контраста и энтропии. Таким образом, предложенные показатели, основанные на матрице тонового отображения, повышают точность оценки качества сжатия динамического диапазона за счет расширения системы известных показателей и ввода дополнительных критериев качества, ориентированных на оценку различающей способности, линейности и однозначности тонового отображения в различных интервалах динамического диапазона преобразованного изображения. Это позволяет выбирать алгоритмы тонового отображения, обеспечивающие лучшие характеристики в значимых интервалах с учетом глобальных показателей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Nithyananda, C. R. Review on Histogram Equalization based Image Enhancement Techniques / C. R. Nithyananda, A. C. Ramachandra, Preethi // *International Conference on Electrical, Electronics, and Optimization Techniques (ICEEOT)*, Chennai. – 2016. – P. 2512–2517. – DOI: [10.1109/ICEEOT.2016.7755145](https://doi.org/10.1109/ICEEOT.2016.7755145).
2. Kim, T. K. Contrast enhancement system using spatially adaptive histogram equalization with temporal filtering / T. K. Kim, J. K. Paik, B. S. Kang // *IEEE Trans. Consum. Electron.* – 1998. – Vol. 44, iss. 1. – P. 82–87. – DOI: [10.1109/30.663733](https://doi.org/10.1109/30.663733).
3. Kim, J.-Y. An advanced contrast enhancement using partially overlapped sub-block histogram equalization / J.-Y. Kim, L.-S. Kim, S.-H. Hwang // *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*. – 2001. – Vol. 11, iss. 4. – P. 475–484. – DOI: [10.1109/76.915354](https://doi.org/10.1109/76.915354).
4. Reza, A. M. Realization of the contrast limited adaptive histogram equalization (CLAHE) for real-time image enhancement / A. M. Reza // *J. of VLSI Signal Process.-Syst. Signal Image Video Technol.* – 2004. – Vol. 38, iss. 1. – P. 35–44. – DOI: [10.1023/B:VLSI.0000028532.53893.82](https://doi.org/10.1023/B:VLSI.0000028532.53893.82).
5. Huang, S.-C. Image contrast enhancement for preserving mean brightness without losing image features / S.-C. Huang, C.-H. Yeh // *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. – 2013. – Vol. 26, № 5. – P. 1487–1492. – DOI: [10.1016/j.engappai.2012.11.011](https://doi.org/10.1016/j.engappai.2012.11.011).
6. Al-Sammarai, M. F. Contrast enhancement of roads images with foggy scenes based on histogram equalization / M. F. Al-Sammarai // *10<sup>th</sup> Intern. Conf. on Computer Science and Education (ICCSE)*, Cambridge, 22–24 July 2015. – Cambridge, 2015. – P. 95–101. – DOI: [10.1109/ICCSE.2015.7250224](https://doi.org/10.1109/ICCSE.2015.7250224).
7. Рудиков, С. И. Уменьшение динамического диапазона инфракрасных изображений на основе адаптивного выравнивания, растяжения и сжатия гистограммы / С. И. Рудиков, В. Ю. Цветков, А. П. Шкадаревич // *Вестні Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фізика-тэхнічных навук*. – 2021. – Т. 66, № 4. – С. 470–482. – DOI: [10.29235/1561-8358-2021-66-4-470-482](https://doi.org/10.29235/1561-8358-2021-66-4-470-482).
8. Голуб, Ю. И. Влияние уменьшения размеров изображения на вычисление оценки его качества / Ю. И. Голуб, Ф. В. Старовойтов, В. В. Старовойтов // *Системный анализ и прикладная информатика*. – 2020. – № 2. – С. 35–45.
9. Independence of luminance and contrast in natural scenes and in the early visual system / V. Mante [et al] // *Nat Neurosci.* – 2005. – Vol. 8. – P. 1690–1697. – DOI: [10.1038/nn1556](https://doi.org/10.1038/nn1556).
10. Wang, Z. Multiscale structural similarity for image quality assessment / Z. Wang, E. P. Simoncelli, A. C. Bovik // *37<sup>th</sup> Asilomar Conf. on Signals, Systems & Computers*. Pacific Grove, CA, USA. – 2003. – Vol. 2. – P. 1398–1402. – DOI: [10.1109/ACSSC.2003.1292216](https://doi.org/10.1109/ACSSC.2003.1292216).
11. Yeganeh, H. Objective Quality Assessment of Tone-Mapped Images / H. Yeganeh, Z. Wang // *IEEE Transactions on Image Processing*. – 2013. – Vol. 22, iss. 2. – P. 657–667. – DOI: [10.1109/TIP.2012.2221725](https://doi.org/10.1109/TIP.2012.2221725).

#### REFERENCES

1. Nithyananda, C. R., Ramachandra, A. C., & Preethi. (2016). Review on Histogram Equalization based Image Enhancement Techniques. In *International Conference on Electrical, Electronics, and Optimization Techniques (ICEEOT)*, Chennai (2512–2517). DOI: [10.1109/ICEEOT.2016.7755145](https://doi.org/10.1109/ICEEOT.2016.7755145).

2. Kim, T. K., Paik, J. K., & Kang, B. S. (1998). Contrast enhancement system using spatially adaptive histogram equalization with temporal filtering. *IEEE Trans. Consum. Electron*, 44(1), 82–87. DOI: [10.1109/30.663733](https://doi.org/10.1109/30.663733).
3. Kim, J.-Y., Kim, L.-S., & Hwang, S.-H. (2001). An advanced contrast enhancement using partially overlapped sub-block histogram equalization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 11(4), 475–484. DOI: [10.1109/76.915354](https://doi.org/10.1109/76.915354).
4. Reza, A. M. (2004). Realization of the contrast limited adaptive histogram equalization (CLAHE) for real-time image enhancement. *Journal of VLSI Signal Process.-Syst. Signal Image Video Technol.*, 38(1), 35–44. DOI: [10.1023/B:VLSI.0000028532.53893.82](https://doi.org/10.1023/B:VLSI.0000028532.53893.82).
5. Huang, S.-C., & Yeh, C.-H. (2013). Image contrast enhancement for preserving mean brightness without losing image features. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 26(5), 1487–1492. DOI: [10.1016/j.engappai.2012.11.011](https://doi.org/10.1016/j.engappai.2012.11.011).
6. Al-Sammarai, M. F. (2015). Contrast enhancement of roads images with foggy scenes based on histogram equalization. In *10<sup>th</sup> International Conference on Computer Science and Education (ICCSE)* (95–101). Cambridge. DOI: [10.1109/ICCSE.2015.7250224](https://doi.org/10.1109/ICCSE.2015.7250224).
7. Rudikov, S. I., Tsvetkov, V. Yu., & Shkadarevich, A. P. (2021). Umen'shenie dinamicheskogo diapazona infrakrasnykh izobrazhenii na osnove adaptivnogo vyravnivaniya, rastyazheniya i szhatiya gistogrammy [Dynamic range reduction of infrared images based on adaptive equalization, stretch and compression of histogram]. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-tekhnichnykh navuk. [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical serie]*, 66(4), 470–482. DOI: [10.29235/1561-8358-2021-66-4-470-482](https://doi.org/10.29235/1561-8358-2021-66-4-470-482). (In Russ., abstr. in Engl.).
8. Golub, Yu. I., Starovoitov, F. V., & Starovoitov, V. V. (2020). Vliyanie umen'sheniya razmerov izobrazheniya na vychislenie otsenki ego kachestva [Impact of image size reducing for image quality assesment]. *Sistemnyi analiz i prikladnaya informatika [System analysis and applied information science]*, (2), 35–45. (In Russ., abstr. in Engl.).
9. Mante, V., Frazor, R. A., Bonin, V., Geisler, W. S., & Carandini, M. (2005). Independence of luminance and contrast in natural scenes and in the early visual system. *Nat Neurosci*, (8), 1690–1697. DOI: [10.1038/nn1556](https://doi.org/10.1038/nn1556).
10. Wang, Z., Simoncelli, E. P., & Bovik, A. C. (2003). Multiscale structural similarity for image quality assessment. *37<sup>th</sup> Asilomar Conference on Signals, Systems & Computers. Pacific Grove, CA, USA*, 2, 1398–1402. DOI: [10.1109/ACSSC.2003.1292216](https://doi.org/10.1109/ACSSC.2003.1292216).
11. Yeganeh, H., & Wang, Z. (2013). Objective Quality Assessment of Tone-Mapped Images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 22(2), 657–667. DOI: [10.1109/TIP.2012.2221725](https://doi.org/10.1109/TIP.2012.2221725).

Поступила 07.09.2022

## INTERVAL QUALITY INDICATORS OF THE DYNAMIC RANGE COMPRESSION OF INFRARED IMAGES ON THE BASIS OF A TONE MAPPING MATRIX

S. RUDIKOV<sup>1</sup>, V. TSVIATKOU<sup>2</sup>, A. SHKADAREVICH<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(UE “STC “LEMT” BelOMO”)

<sup>2</sup>(Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk)

The article proposes a dynamic range compression model for infrared (IR) images based on a tone mapping matrix, the elements of which relate the brightness levels of the original image with a wide dynamic range and the brightness levels of a non-linearly transformed image with a narrow dynamic range, and also indicate, depending on the variant of formation of this matrices on: a) loss of discrimination between adjacent pixels due to compression of the dynamic range; b) the level of non-linear compression distortions; c) ambiguity of tone mapping. Based on this model, interval indicators of the quality of compression of the dynamic range of infrared images are proposed, which allow estimating the potential distinguishing power, the real loss of discrimination between adjacent pixels after transformation, the magnitude of nonlinear compression distortions, the uniformity of the use of the dynamic range, and the ambiguity of tone mapping for the selected interval of the dynamic range. The proposed indicators improve the accuracy of assessing the quality of compression of the dynamic range of IR images by expanding the system of known indicators that evaluate the contrast, entropy, statistical naturalness of the converted images, and the structural accuracy of tone mapping.

**Keywords:** dynamic range compression, infrared images, tone mapping matrix, quality intervals indicators of images.

УДК 004.02

DOI 10.52928/2070-1624-2022-39-11-40-46

**УПРОЩЕННЫЙ АЛГОРИТМ ГРАФИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ДАННЫХ ПРИ RAD-РАЗРАБОТКЕ ОКОННЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ В СРЕДЕ PascalABC.NET**

**Я. Н. СУПРУНЧИК, П. А. КОХАН, канд. техн. наук, доц. В. В. ДАВЫДОВСКАЯ**  
(Мозырский государственный педагогический университет имени И. П. Шамякина)

*Разработан алгоритм отображения трехмерной графической зависимости в среде PascalABC.NET с использованием класса Bitmap посредством «поверхностей уровней» при RAD-разработке пользовательских оконных приложений (Windows Form Application). Проведен сравнительный анализ графической интерпретации результатов вычисления в системах компьютерной математики MATLAB, MathCAD и PascalABC.NET.*

**Ключевые слова:** трехмерная графика, поверхности уровней, PascalABC.NET, RAD-разработка, Windows Form Application, класс Bitmap.

**Введение.** При проведении любого научного исследования неотъемлемой частью является анализ и интерпретация полученных результатов. Графическое представление и визуализация – один из наиболее приоритетных способов представления полученных данных.

Современные интегрированные математические пакеты (например, MATLAB, MathCAD, Maple) обладают широкими возможностями по работе с декартовыми и полярными графиками, графиками поверхностей и т. д. Однако работа в данных пакетах имеет определенную специфику, которая требует специальных навыков работы в них. Для многих исследователей, студентов и школьников использование систем компьютерной математики является проблематичным.

В настоящее время широко используются программы с графическим интерфейсом. Для повышения скорости создания таких программ применяют среды быстрой разработки.

Среды быстрой разработки представляют собой развитие концепции интегрированных сред разработки. Интегрированная среда разработки – это пакет программ. В нем, помимо компилятора и компоновщика, содержатся редактор исходного кода и отладчик. Редактор исходного кода представляет собой текстовый редактор с подсветкой синтаксиса [1].

В основе быстрых средств разработки лежит идея визуального проектирования интерфейса при помощи редактора форм. Сама работа программы определяется совокупностью обработчиков событий. Событием называется действие пользователя или операционной системы [2].

Часто возникает необходимость внедрения в такие приложения научной или математической графики, что требует от программиста глубоких знаний по использованию сторонних библиотек и модулей и специфике работы с ними.

Студентам педагогического профиля, обучающимся по специальности 1-02 05 01 «Математика и информатика» на дисциплинах «Методы алгоритмизации», «Технологии программирования», «Языки программирования школьной информатики» предлагается для изучения среда PascalABC.NET, которая позволяет писать программы на высокоуровневом языке программирования в легкой, компактной и понятной форме. PascalABC.NET может использоваться как в образовательных, так и в научных целях.

В рамках дисциплины «Программирование в визуализированных средах» изучаются основы программирования в мультимедийной среде «Scratch», которая позволяет пробудить у учащихся интерес к созданию компьютерных программ и освоить современную технологию объектно-ориентированного программирования.

В среде PascalABC.NET также содержится дизайнер форм, который позволяет разрабатывать пользовательские оконные приложения (Windows Form Application) с использованием RAD-технологии (Rapid Application Development – быстрое создание приложений).

В рамках сотрудничества вузов с учреждениями среднего образования, работы филиалов кафедр, при прохождении студентами педагогической и преддипломной практики, нередко возникают вопросы, связанные с разработкой и оформлением исследовательских работ учащихся школ. Одной из часто возникающих проблем является помещение в приложения, созданные в PascalABC.NET, пространственных поверхностей как функций двух переменных, в то время как введение в объектно-событийное программирование, разработка приложений с графическим интерфейсом изучаются в школе только в 11-м классе [3].

Решением проблемы может быть использование класса Bitmap, который предназначен для работы с растровыми изображениями, содержит методы создания и обработки точечных изображений, а также обладает возможностью построения так называемых контурных графиков, представляющих собой совокупность линий, каждая из которых соответствует одинаковому значению функции, зависящей от двух переменных (изолинии).



**Теория.** В статье описан разработанный алгоритм получения трехмерной графической зависимости в среде PascalABC.NET. Одним из способов отображения таких зависимостей являются «поверхности уровней», которые представлены во всех современных интегрированных пакетах.

Основная идея заключается в том, что сначала высчитываются значения матрицы, соответствующей заданной функции в известной области, затем весь интервал значений от минимального до максимального значения функции разбивается на десять уровней, и при «прорисовке» функции точка (пиксель) окрашивается в соответствующий цвет в зависимости от значения функции в данной точке.

Цвета для создания контурного графика определены заранее с помощью массива:

colors: **array of Color** := (Color.Purple, Color.Teal, Color.Blue, Color.Aqua, Color.SkyBlue, Color.Green, Color.Lime, Color.Yellow, Color.Orange, Color.Red);

Предполагается, что в приложение добавлен элемент PictureBox, в который будет добавляться изображение, представляющее собой контурный график функции двух переменных.

В отличие от двумерных графиков, которые используют дискретные аргументы и функции, трехмерные графики требуют предварительного создания матрицы значений поверхности.

Построение контурного графика будет осуществляться поточно с использованием метода SetPixel, который содержится в классе Bitmap.

По аналогии с построением декартова графика [3] приложение также будет предусматривать ввод интервалов построения для переменных  $x \in [x_0; x_n]$  и  $y \in [y_0; y_n]$  с помощью элементов TextBox. Цветовая шкала (ColorMap): соответствие цветов значениям функции организовано с помощью элемента DataGridView, в котором ячейки первого столбца будут заливаться цветами в соответствии с ранее определенным массивом цветов, во втором столбце будут выведены соответствующие значения функции.

Построение графика будет осуществляться по нажатию на кнопку «Вычислить».

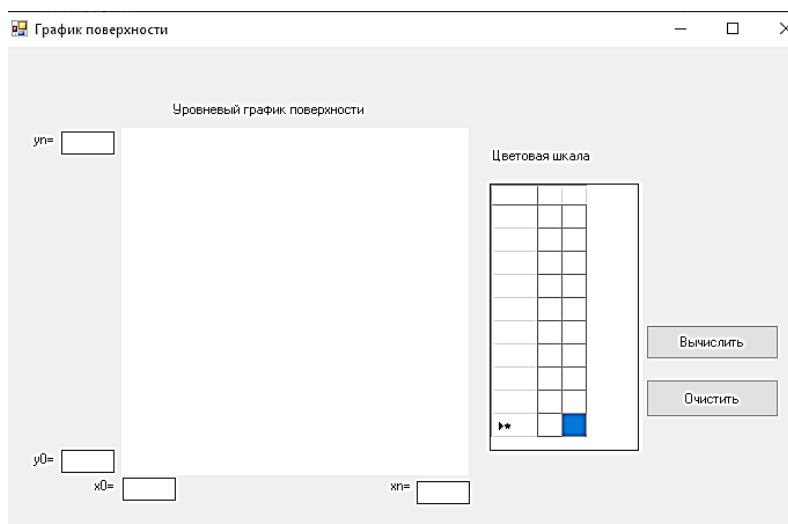


Рисунок 1. – Интерфейс приложения, созданного в PascalABC для построения графика функции

Элемент PictureBox имеет свою систему координат. По умолчанию начало отсчета находится в левом верхнем углу формы. Ось  $x$  направлена вправо, ось  $y$  – вниз.

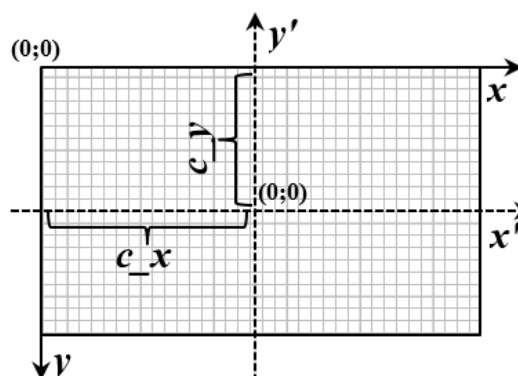


Рисунок 2. – Преобразование системы координат для построения графика функции

Как показано на рисунке 2, при построении графика поверхности использовалось стандартное расположение декартовых осей координат. Для этого был выполнен ряд преобразований: смещение начала координат на величины  $c_x$  и  $c_y$  вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно, поворот оси  $y$ , а также для использования произвольного интервала построения было проведено масштабирование по размеру элемента PictureBox, координаты умножались на масштабирующий коэффициент  $k$ . В нашем приложении область рисования имеет размеры  $300 \times 300$  пикселей и одинаковый шаг изменения  $x$  и  $y$ , поэтому для обеих осей коэффициент  $k$  будет одинаковым.

```
k:=trunc(PictureBox1.Width/(xn-x0));
c_x:=PictureBox1.Width div 2;
c_y:=PictureBox1.Height div 2;
```

Пиксель – это минимально возможная точка, физические размеры которой зависят от установленной в операционной системе разрешающей способности экрана. В приложении каждый пиксель соответствует определенному значению функции.

Для выполнения всех последующих программных блоков первоначально следует вычислить матрицу, соответствующую значениям функции.

Для примера рассмотрим построение поверхности уровней, соответствующей функции  $z(x, y) = x^2 - y^2$  в области  $x \in [-10; 10]$ ,  $y \in [-10; 10]$ :

```
for var i:=1 to N do begin
  x[i]:=x0+(i-1)*h;
  y[i]:=y0+(i-1)*h;
end;
for var i:=1 to N do begin
  for var j:=1 to N do
    z[i,j]:=sqr(x[i])-sqr(y[j]);
  end;
```

Далее для создания цветовой карты необходимо вычислить интервал между максимальным и минимальным значениями функции:

```
max:=z[1,1];
min:=z[1,1];
for var i:=1 to N do begin
  for var j:=1 to N do begin
    if z[i,j]>max then max:=z[i,j];
    if z[i,j]<min then min:=z[i,j];
  end;
end;
int:=(max-min)/10; //10 цветовых уровней
```

Затем с помощью элемента DataGridView формируется цветовая шкала:

```
DataGridView1.RowCount:=10;
DataGridView1.ColumnCount:=2;
for var i:=0 to 9 do begin
  DataGridView1.Item[0,i].Style.BackColor:=colors[i];
  DataGridView1.Item[1,i].Value:=trunc((i)*int+min);
end;
```

Последним программным блоком является пиксельная прорисовка контурного графика поверхности:

```
for var i:=1 to N do begin
  for var j:=1 to N do begin
    zk:=z[i,j];
    if (trunc(-k*y[j])+c_y>=0) and (trunc(-k*y[j])+c_y<2*c_y) then begin
      cvet_point(zk,int,min,colors,cvp);
      bm.SetPixel(trunc(k*x[i])+c_x,trunc(-k*y[j])+c_y,cvp);
    end;
  end;
end;
```

В описанном выше фрагменте листинга присутствует пользовательская процедура `cvet_point`, которая отвечает за выбор соответствующего цвета для закраски пикселей:

```

procedure cvet_point(zk, int,min: real;colors:array of Color; var cvp:Color);
begin
  cvp:=colors[0];
  for var i:=1 to 9 do
    if zk>=(i)*int+min then cvp:=colors[i];
end;
    
```

Также в программе введены следующие обозначения:

bm: Bitmap;  
 cvp: Color;

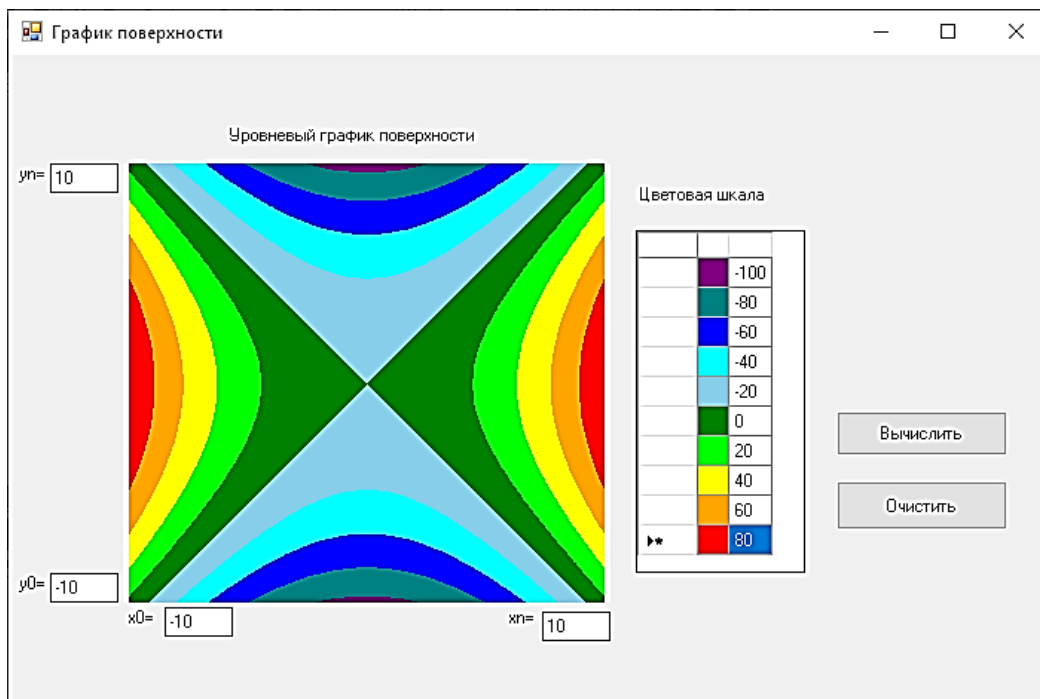


Рисунок 3. – Результат выполнения разработанного алгоритма построения поверхностей уровня

Следует отметить, что при решении многих задач такой способ отображения поверхностей является приоритетным (например, задачи распределения температуры, задачи упругости и др.)

Для примера рассмотрим задачу о нахождении стационарного распределения температуры в квадратной пластине со стороной 1, описываемого уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

с краевыми условиями вида

$$u(0, y)=0, (0 \leq y \leq 1), u(1, y)= \sin(y), (0 \leq y \leq 1),$$

$$u(x, 0)=0, (0 \leq x \leq 1), u(x, 1)= \sin(x), (0 \leq x \leq 1).$$

Рассмотрим решение данной задачи в среде PascalABC методом верхней релаксации [4] с последующим графическим отображением распределения температуры в квадратной пластине с использованием приведенного выше алгоритма. Отличительной особенностью этого построения будет являться то, что начало осей координат сместится в нижний левый угол (рисунок 4).

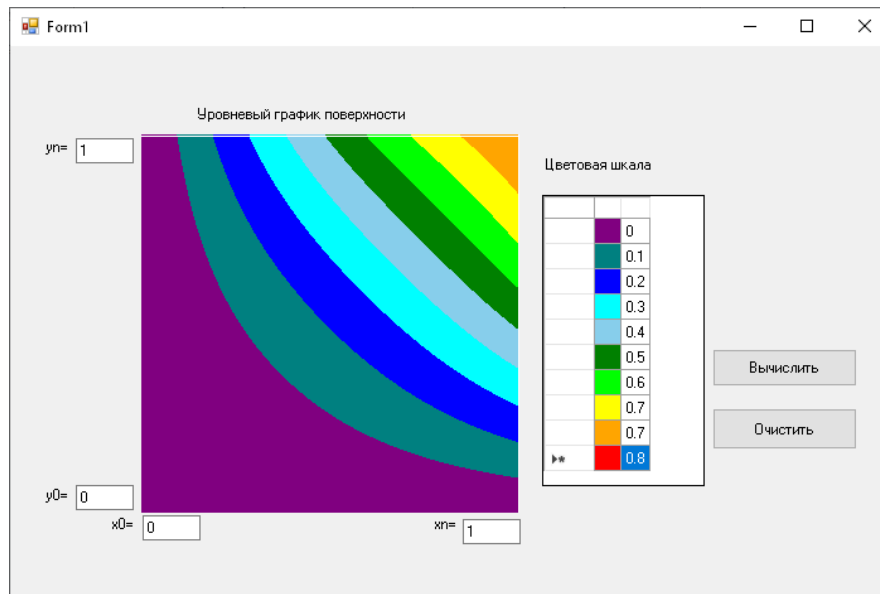


Рисунок 4. – Решение уравнения Лапласа в среде PascalABC.NET

Для сравнения рассмотрим решение данной задачи в PDEToolbox, среда MATLAB (рисунок 5).

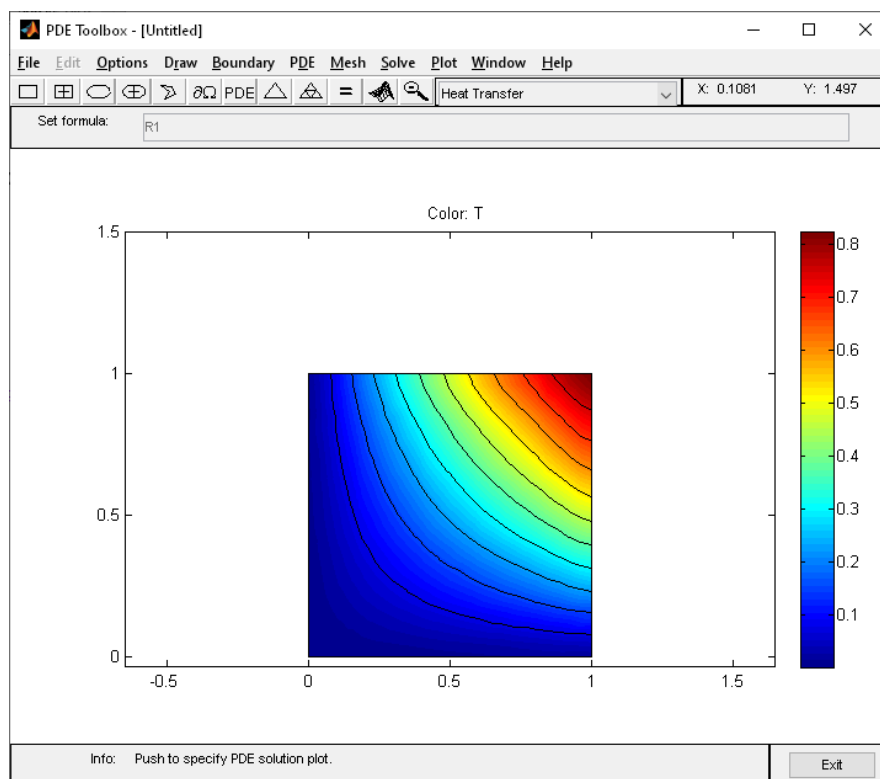


Рисунок 5. – Решение уравнения Лапласа в MATLAB

При сопоставлении рисунков 4 и 5 можно сделать вывод, что предложенный алгоритм графического отображения в среде PascalABC.NET не уступает встроенным возможностям MATLAB. Полученное распределение может быть подробно проанализировано, что позволит сделать корректные выводы. Тем не менее следует отметить тот факт, что скорость вычислений будет выше в математических пакетах, однако предложенный алгоритм является очень простым и не требует глубоких познаний в программировании и может быть реализован в любой системе программирования, имеющей возможности работы с растровой пиксельной графикой с небольшими изменениями в синтаксисе основного программного кода. Данный

алгоритм был также реализован в среде визуального программирования Scratch с использованием инструмента «Перо» [5].

После подключения библиотеки System.Windows.Forms.DataVisualization станет доступным элемент Chart (Диаграмма) из WindowsForms.

Работа с Chart не изучается в школьном курсе информатики, но может существенно упростить построение декартовых графиков и диаграмм без пересчета координат, рисования осей координат и нанесения шкалы. Проведя некоторые преобразования, элемент Chart можно использовать и для построения графиков поверхностей функций двух переменных, однако в некоторых случаях такое отображение уступает описанному выше алгоритму, который был нами разработан, т. к. требуется дополнительное преобразование цветовых шкал, настройки осей, поворота и освещения элемента Chart, а начинающие программисты, тем более учащиеся школ, не всегда обладают этими навыками.

Для примера рассмотрим построение графика поверхности, представленного на рисунке 3, с использованием элемента Chart (рисунок 6):

```
//удаление серии, добавленной по умолчанию
chart1.Series.RemoveAt(0);
//добавление необходимого количества серий на диаграмму
for var i:=1 to N do
  chart1.Series.Add('Series' + i.ToString());
//построение диаграммы
for var i:=1 to N do begin
  x[i]:=x0+(i-1)*h;
  for var j:=1 to N do begin
    y[j]:=y0+(j-1)*h;
    Chart1.Series['Series' + i.ToString()].Points.AddXY(j,f(x[i],y[j]));
  end;
end;
```

Присутствующая во фрагменте функция  $f$  отвечает за вычисление значений функции  $f(x, y)$ :

```
function f (x,y:real):real;
begin
  f:=x*x-y*y;
end;
```

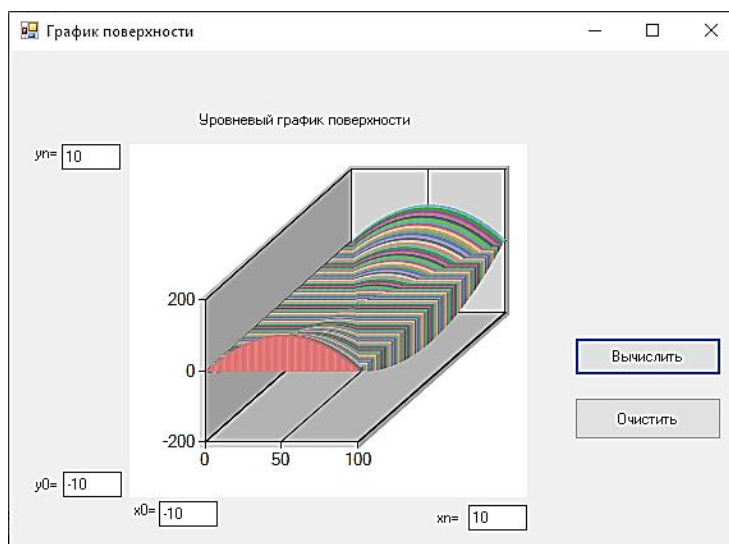


Рисунок 6. – График поверхности, построенный с использованием элемента Chart

В [3] предлагается способ построения декартовых графиков, гистограмм и круговых диаграмм с использованием классов Witmar и Graphics, однако в данном случае, в отличие от графиков поверхностей, использование Chart может заметно упростить эту задачу.

**Заключение.** В статье показано, что разработанный алгоритм отображения трехмерной графики на Windows Pascal Forms в ряде случаев дает лучшее представление об особенностях ее распределения и тем самым упрощает ее описание и анализ.

Все теоретические результаты, полученные в данной статье, могут служить методическим дополнением к современному учебнику информатики для 11-го класса в процессе обучения основам работы с Windows Forms в среде PascalABC.NET с целью оформления пользовательских приложений с необходимостью добавления высокоуровневой графики, а также при подготовке исследовательских работ и работе с одаренными учащимися на факультативных занятиях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гагарина, Л. Г. Технология разработки программного обеспечения / Л. Г. Гагарина, Е. В. Кокорева, Б. Д. Виснадул. – М. : Форум : Инфра-М, 2016. – 423 с.
2. Лукин, В. В. Технология разработки программного обеспечения : учеб. пособие / В. В. Лукин, В. Н. Лукин, Т. В. Лукин. – М. : Вузовская книга, 2015. – 214 с.
3. Информатика : учеб. пособие / В. М. Котов [и др.]. – Минск : Народная асвета, 2021. – 112 с.
4. Самарский, А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – 2-е изд., испр. – М. : Физматлит, 2002. – 320 с.
5. Косярский, А. А. Элементы программирования с использованием среды Scratch 2.0 / А. А. Косярский. – Казань : Бук, 2020. – 266 с.

#### REFERENCES

1. Gagarina, L. G., Kokoreva, E. V., & Visnadul, B. D. (2016). *Tekhnologiya razrabotki programmnogo obespecheniya [Software Development Technology]*. Moscow: Forum, Infra-M. (In Russ.).
2. Lukin, V. V., Lukin, V. N., & Lukin, T. V. (2015). *Tekhnologiya razrabotki programmnogo obespecheniya [Software Development Technology]*. Moscow: Vuzovskaya kniga. (In Russ.).
3. Kotov, V. M., Lapo, A. I., Bykadorov, Yu. A., & Voitekhovich, E. N. (2021). *Informatika [Computer science]*. Minsk: Narodnaya asveta. (In Russ.).
4. Samarskii, A. A., & Mikhailov, A. P. (2002). *Matematicheskoe modelirovanie: Idei. Metody. Primery [Mathematical modeling: Ideas. Methods. Examples]*. Moscow: Fizmatlit. (In Russ.).
5. Косярский, А. А. (2020). Элементы программирования с использованием среды Scratch 2.0. Казань: Бук. *Kosyarskii, A. A. (2020). Elementy programmirovaniya s ispol'zovaniem sredy Scratch 2.0 [Programming elements using Scratch 2.0 environment]*. Kazan': Buk.

Поступила 07.09.2022

#### SIMPLIFIED ALGORITHM FOR GRAPHIC REPRESENTATION OF THREE-DIMENSIONAL DATA IN RAD DEVELOPMENT OF WINDOW APPLICATIONS IN THE PASCALABC.NET ENVIRONMENT

*Y. SUPRUNCHYK, P. KOHAN, V. DAVYDOUSKAYA*  
(*Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin*)

*An algorithm for presentation a three-dimensional graphical dependency in the PascalABC.NET environment using the Bitmap class, by means of "contour surfaces" in the RAD development of custom window applications (Windows Form Application) has been developed. A comparative analysis of the graphical interpretation of the calculation results in the computer mathematics systems MATLAB, MathCAD and PascalABC.NET has been carried out.*

**Keywords:** *3D-graphics, contour surfaces, PascalABC.NET, RAD development, Windows Form Application, Bitmap class.*

## ФИЗИКА

УДК 537.8.029.6:621.37.029.6

DOI 10.52928/2070-1624-2022-39-11-47-52

## ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБЪЕМНОГО РАДИОПОГЛОЩАЮЩЕГО МАТЕРИАЛА НА ОСНОВЕ НАНОУГЛЕРОДА

*д-р физ.-мат. наук, проф. В. А. БОГУШ, канд. физ.-мат. наук В. Н. РОДИОНОВА*  
(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск);  
*О. В. ТАНАНА*  
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

*Представлена методика экспериментального исследования электродинамических характеристик радиопоглощающего материала. Приведены результаты экспериментального исследования коэффициента отражения и коэффициента ослабления образцов объемных материалов электромагнитной защиты на основе нанουглерода в диапазоне частот 8–12 ГГц. Даны рекомендации по практическому применению исследуемых материалов: СВЧ-поглотители могут применяться внутри рабочих полостей узлов и аппаратуры для предотвращения многократных переотражений СВЧ-волн и позволяют решить проблему экранирования на высоких частотах посредством поглощения рассеянного излучения.*

**Ключевые слова:** *сверхвысокие частоты, объемные поглощающие материалы, поглощение и отражение электромагнитного излучения, электромагнитная защита, углеродные наноматериалы.*

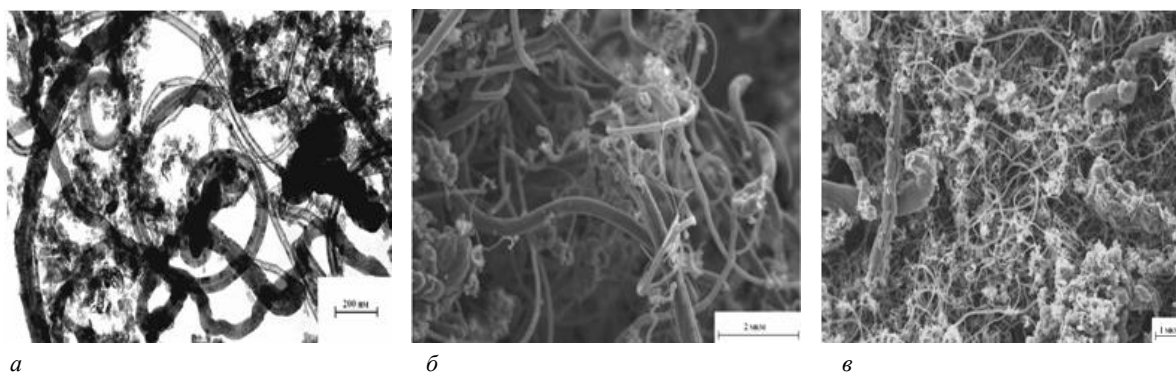
**Введение.** Разработка новых материалов для решения проблемы уменьшения помех и электромагнитной совместимости устройств становится весьма актуальной в связи с развитием и увеличением мощности устройств СВЧ-радиоэлектроники. Это приводит к тому, что возникающее при их работе электромагнитное излучение на частотах высших типов гармоник создает значительные помехи радиоэлектронной аппаратуре. Важную роль приобретают материалы, эффективно поглощающие сверхвысокочастотные электромагнитные излучения [1–6]. Радиопоглощающие материалы (РПМ) СВЧ-диапазона являются также незаменимыми в радиолокации и специальной технике [7]. Существенное снижение взаимных помех в передающих и приемных трактах устройств возможно за счет применения при создании РПМ на основе углеродных наноматериалов нового поколения, обеспечивающих расширение функциональных и тактико-технических возможностей электронных средств специальной техники.

Кроме того, развитие экспериментальной радиофизики в значительной мере связано с освоением коротковолновой части сантиметрового и миллиметрового диапазонов радиоволн. Важным аспектом освоения данных диапазонов также является создание новых типов материалов с улучшенными электрическими и эксплуатационными характеристиками. Развитие современных технологий (наноструктуры, метаматериалы) открыло ряд новых возможностей для СВЧ-материаловедения. Особое место занимают здесь материалы на основе различных форм нанουглерода (графен, материалы на основе фуллеренов и нанотрубок и т. д.). Интерес к ним обусловлен различными факторами. Эти материалы, в частности, характеризуются небольшой массой, низкой стоимостью, простотой получения и относительно высокой электропроводностью [8–11]. Они перспективны для создания высокоэффективных отражающих и поглощающих [12–16] покрытий. Кроме того, данные материалы обладают уникальными механическими характеристиками, такими как высокая прочность.

Развитие СВЧ-устройств различного назначения определяет актуальность поиска путей управления частотной дисперсией комплексной диэлектрической проницаемости с помощью полимерных композитов, наполненных полидисперсными углеродными нанопорошками. С этой целью активно проводятся теоретические и экспериментальные исследования полимерных композиционных материалов для аппаратуры СВЧ-диапазона, устанавливаются закономерности изменения свойств радиопоглощающих композитов в магнитных и электрических полях, что позволяет разрабатывать теоретические положения и рекомендации в области создания и применения композиционных материалов для систем СВЧ-техники, обеспечения электромагнитной совместимости и помехозащищенности радиоэлектронной аппаратуры.

**Объемные радиопоглощающие материалы.** Для создания композиционных РПМ использовались углеродные наноматериалы, полученные путем разложения углеводородов в плазме высоковольтного разряда атмосферного давления и формирования углеродных нанотрубок и нановолокон из продуктов реакций на металлической стенке реактора (этот способ является модификацией известного CVD-метода) [17]. Конечный продукт представляет собой порошок черного цвета со средней насыпной плотностью 0,2 г/см<sup>3</sup>. Содержание углеродных наноструктур в продукте определялось с использованием просвечивающей и сканирующей электронной микроскопии (ПЭМ и СЭМ). Исследуемый материал содержит совокупность образований из углерода, состоящую из углеродных нановолокон диаметром

50–80 нм (около 50%), аморфного углерода (около 30%), многостенных углеродных нанотрубок (около 15%) и соединений металла (3–5%) (СТБ 1873-2008). На рисунке 1 представлены фотографии материала, на которых видно, что часть углеродных структур представляет собой волокна различной длины и формы с характерными диаметрами 100–200 нм и выше. Кроме того, материал содержит структуры меньших диаметров 50–70 нм, длина которых достигает 1 мкм. По мнению производителя, данные структуры следует отнести к многостенным углеродным нанотрубкам.



*а* – полученные посредством ПЭМ; *б, в* – полученные посредством СЭМ

**Рисунок 1. – Фотографии углеродного наноматериала, образующегося на металлической поверхности камеры осаждения**

В таблице приведены физические свойства синтезированного углеродного наноматериала [18].

Таблица. – Физические свойства углеродного наноматериала

Объемная плотность, г/см <sup>3</sup>	0,2
Удельная поверхность, м <sup>2</sup> /г	750–870
Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)	1000–1500
Температура начала окисления, °С	500
Удельное сопротивление, Ом/см	0,42

Из данного углеродного наноматериала были изготовлены объемные поглотители электромагнитного излучения. Объемные материалы электромагнитной защиты представляют собой многокомпонентные композиционные материалы, в состав которых входят неметаллическая матрица и мелкодисперсные порошкообразные или дискретные проводящие наполнители или их сочетание (углеродосодержащие составляющие, ферромагнитные наночастицы, наночастицы металлов и др.). При взаимодействии электромагнитного излучения с радиопоглощающим материалом происходят одновременные процессы поглощения, рассеяния и интерференции радиоволн. Путем подбора состава и свойств наполнителя и матрицы (связующего), их соотношения, ориентации наполнителя можно получить материалы с требуемыми эксплуатационными характеристиками. В качестве полимерного связующего практически всегда используют различные низковязкие реактопласты невысокой молекулярной массы (эпоксидные, фенолформальдегидные, кремнийорганические, полиэфирные и др.), которые после формования изделия отверждают химическим путем. Таким образом, технологический процесс получения объемных материалов электромагнитной защиты на основе композиционных полимерных материалов делится на два этапа: получение заготовки заданной конфигурации и ее формование. Полимерные композиционные материалы после отверждения являются твердыми телами. Характеристики готового изделия (такие как габаритные размеры, форма, объемы выпуска) обуславливают выбор состава композиции, способа ее получения и формования.

Исследуемые в данной работе образцы объемных материалов электромагнитной защиты изготовлены на основе эпоксидной смолы ЭД-20 (ГОСТ 10587-84), отвердителя Этал-45М (ТУ 2257-045-18826195-01), углерода наноструктурированного технического (СТБ 1873-2008), ацетона технического (ГОСТ 2768-84); диаметр образца 82 мм, толщина 8 мм, вес 49 г, содержание углеродного наноматериала 7% (рисунок 2).



**Рисунок 2 – Внешний вид экспериментального образца объемного радиопоглощающего материала**



**Экспериментальные исследования.** Для широкого практического внедрения новых наноматериалов, необходимо исследование комплекса электрофизических параметров: отражения и поглощения электромагнитных волн в материале, диэлектрической постоянной, тангенса угла диэлектрических потерь, нелинейных восприимчивостей второго и третьего порядка. Первоначальными электрофизическими параметрами, характеризующими радиоматериалы, с точки зрения практического использования их в сверхвысокочастотном диапазоне являются коэффициент отражения и величина ослабления.

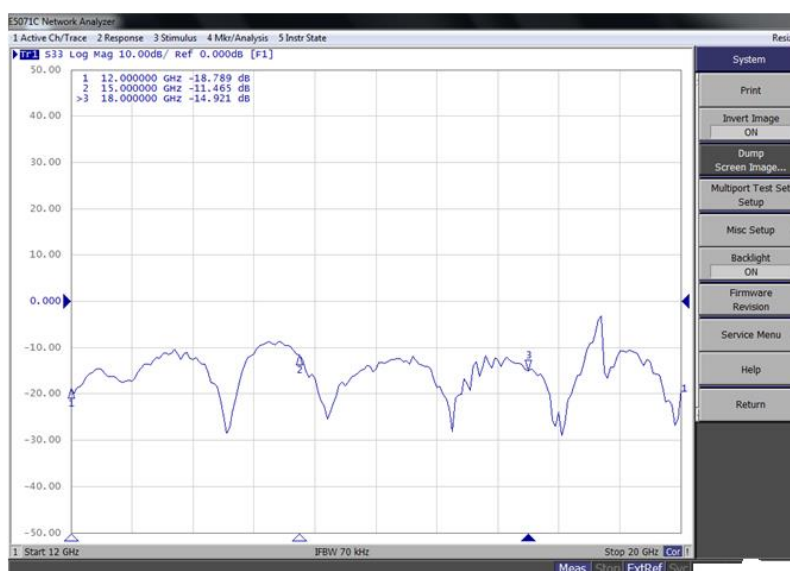
Экспериментальные исследования образцов объемных материалов электромагнитной защиты проводились на 4-портовом векторном анализаторе электрических цепей Agilent 5071C с рабочим диапазоном от 10 МГц до 40 ГГц.

Векторный анализатор электрических цепей – это прибор, который измеряет характеристики прохождения сигнала через тестируемое устройство и характеристики отражения сигнала от его портов. Эти характеристики называются  $S$ -параметрами. Для четырехпортовых устройств характеристики отражения от первого и третьего портов называются  $S_{11}$  и  $S_{33}$ , характеристики передачи в прямом направлении –  $S_{21}$  и  $S_{34}$ , характеристики передачи в обратном направлении –  $S_{12}$  и  $S_{43}$ , характеристика отражения от второго порта –  $S_{22}$ , а от четвертого –  $S_{44}$ . Каждый  $S$ -параметр содержит амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики тестируемого устройства в соответствующем направлении. Существует много стандартных способов отображения измеренных  $S$ -параметров на экране векторного анализатора электрических цепей: в виде графика коэффициента стоячей волны или обратной потерь от частоты, диаграммы Смита, амплитуды, фазы, вносимого затухания или усиления, групповой задержки и др.

Измеренная с помощью векторного анализатора матрица  $S$ -параметров позволяет однозначно определить параметры распространения электромагнитных волн в среде. При этом для многих практических применений, например в случае разработки радиопоглощающих покрытий и электромагнитных экранов, достаточно измерять только модуль коэффициента отражения (либо коэффициент стоячей волны по напряжению).

Эффективность поглощения электромагнитного излучения радиопоглощающими материалами определяется характеристиками отражения этих материалов: частотной зависимостью коэффициента отражения и угловой зависимостью коэффициента отражения, показывающими какая доля электромагнитного излучения, падающего на радиопоглощающий материал, отражается в обратном направлении, а какая рассеивается в заданном направлении.

На рисунках 3, 4 представлены результаты экспериментального исследования коэффициента отражения и коэффициента ослабления образцов объемных материалов электромагнитной защиты в диапазоне частот 8–12 ГГц. На рисунке 3 приведены характеристики коэффициента отражения одного из экспериментальных образцов РПМ (остальные образцы имеют идентичные характеристики). Ось абсцисс – частота (ГГц), ось ординат – коэффициент отражения  $S_{33}$ .



**Рисунок 3. – Результаты экспериментального исследования коэффициента отражения объемного радиопоглощающего материала в диапазоне частот 8–12 ГГц**

На рисунке 4 приведены характеристики коэффициента ослабления одного из экспериментальных образцов РПМ (остальные образцы имеют идентичные характеристики). Ось абсцисс – частота (ГГц), ось ординат – коэффициент ослабления  $S_{34}$ .

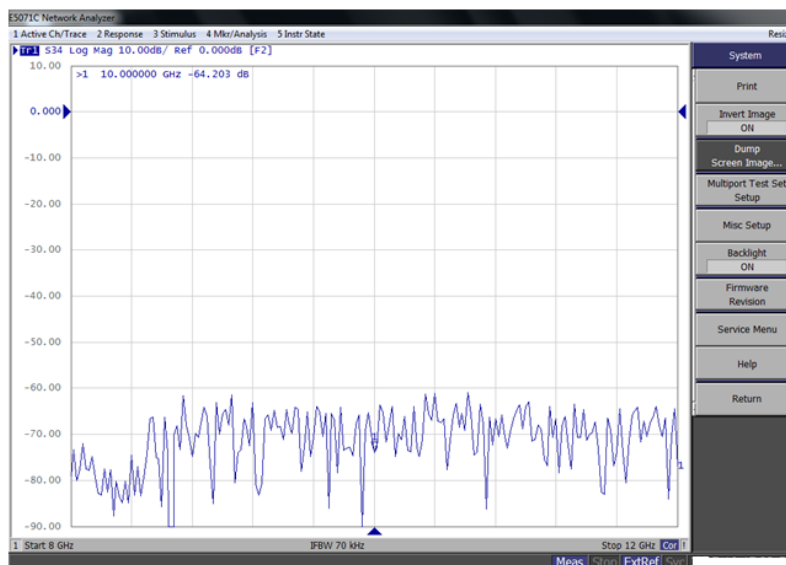


Рисунок 4. – Результаты экспериментального исследования коэффициента ослабления объемного радиопоглощающего материала в диапазоне частот 8–12 ГГц

Коэффициент отражения электромагнитного излучения экспериментальных образцов объемного радиопоглощающего материала в диапазоне частот 8,0–12,05 ГГц не превышает  $-10,0$  дБ (минимальное значение  $-10,1$  дБ, максимальное значение  $-11,2$  дБ). Ослабление электромагнитного излучения экспериментальных образцов объемного радиопоглощающего материала в диапазоне частот 8,0–12,05 ГГц превышает  $20,0$  дБ (минимальное значение  $22,1$  дБ, максимальное значение  $25,9$  дБ).

Электромагнитные волны диффузионно рассеиваются в объеме РПМ. При этом наряду с процессами поглощения электромагнитных волн, обусловленными потерями в диэлектрическом слое РПМ, имеют место процессы многократного отражения и переотражения падающих волн от хаотично расположенных многостенных углеродных нанотрубок (УНТ), из которых и состоит РПМ, сопровождающиеся дополнительным поглощением энергии электромагнитных волн. Высокое поглощение электромагнитного излучения РПМ также возможно, когда на УНТ падает электромагнитная волна, электрический вектор которой параллелен оси УНТ. Эффективный диаметр УНТ в этом случае может в несколько сотен раз превышать ее геометрический диаметр. Это размерный эффект, природа которого, возможно, связана с возбуждением токов при определенных соотношениях между эффективным диаметром УНТ и длиной волны электромагнитного излучения.

**Заключение.** Вновь созданные радиопоглощающие наноуглеродные композитные материалы представляют собой новый класс дешевых объемных радиопоглощающих материалов с высокими техническими параметрами. Результаты экспериментальных исследований образцов объемных материалов электромагнитной защиты показали перспективу применения данных материалов для техники сверхвысоких частот:

- для поглотителей электромагнитных волн: защита информации, то есть предупреждение несанкционированного съема по электромагнитному каналу; решение проблем электромагнитной совместимости радиоэлектронной аппаратуры; решение проблем медико-биологической электромагнитной безопасности (защита от вредного воздействия побочных излучений электронных приборов);

- для поглотителей электромагнитных излучений в волноводных и антенно-фидерных системах, высокочастотных блоках приборов и безэховых камерах (в них проверяют радиоаппаратуру на уровень излучения, когда требуется избежать отражения волн). В безэховых камерах с недавнего времени проверяют излучение автомобильной электроники. Это связано с тем, что машин появилось слишком много и их системы зажигания и другие электроприборы в сумме оказывают серьезное влияние на окружающую среду, хотя, казалось бы, металлический капот должен надежно экранировать излучение);

- для обеспечения электромагнитной совместимости на авиационных, аэрокосмических и морских объектах с высокой плотностью размещения радиоэлектронной аппаратуры, работающей в различных диапазонах частот.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ковнеристый, Ю. К. Материалы, поглощающие СВЧ-излучение / Ю. К. Ковнеристый, И. Ю. Лазарева, А. А. Раваев. – М. : Наука, 1982. – 165 с.
2. Власенко, Е. А. Композиционный радиопоглощающий материал на основе наполненной резины и модифицированного нетканого полотна / Е. А. Власенко, Е. С. Бокова, А. В. Дедов // Материаловедение. – 2016. – № 2. – С. 41–43.

3. Радиопоглощающие свойства содержащих карбонильное железо композитов на СВЧ и КВЧ / В. А. Журавлев [и др.] // Исследовано в России. – 2010. – № 35. – С. 404–411.
4. Голубева, Н. С. Основы радиоэлектроники сверхвысоких частот / Н. С. Голубева, В. Н. Митрохин. – М. : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 486 с.
5. Побочные колебания в электронных приборах СВЧ / под ред. М. Б. Цейтлина. – М. : Радио и связь, 2004. – 152 с.
6. Латыпова, А. Ф. Анализ перспективных радиопоглощающих материалов / А. Ф. Латыпова, Ю. Е. Калинин // Вестн. Воронеж. гос. техн. ун-та. – 2012. – Т. 8, № 6. – С. 70–76.
7. Обзор композиционных материалов, сочетающих звукозащитные и радиозащитные свойства / И. Д. Краев, Е. М. Шулешов, М. М. Платонов, Г. Ю. Юрков // Авиационные материалы и технологии. – 2016. – № 4(45). – С. 61–67.
8. Николайчук, Г. А. Радиопоглощающие материалы на основе наноструктур / Г. А. Николайчук, В. П. Иванов, С. В. Яковлев // Электроника: наука, технология, бизнес. – 2010. – № 1. – С. 92–95.
9. Chung, D. D. L. Electromagnetic interference shielding effectiveness of carbon materials / D. D. L. Chung // Carbon. – 2001. – Vol. 39. – P. 279–285.
10. Банний, В. А. Модифицированные углеродным наполнителем радиопоглощающие композиционные материалы на основе полиэтилена / В. А. Банний, И. В. Царенко, С. И. Красюк // Современные проблемы машиноведения : материалы XII Междунар. науч.-техн. конф. (науч. чтения, посвящ. П. О. Сухому), Гомель, 22–23 нояб. 2018 г. / М-во образования Респ. Беларусь, Гомел. гос. техн. ун-т им. П. О. Сухого, Филиал ПАО «Компания «Сухой» ОКБ «Сухого» ; под общ. ред. А. А. Бойко. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2018. – С. 129–130.
11. Конструкционные материалы радиотехнического назначения, модифицированные углеродными нанотрубками / И. Д. Краев [и др.] // Пластические массы. – 2020. – № 9–10. – С. 62–66.
12. Фальковский, О. И. Техническая электродинамика : учеб. / О. И. Фальковский. – 2-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2009. – 432 с.
13. Development and simulation of microwave artificial magnetic composites utilizing nonmagnetic inclusions / A. N. Lagarkov [et al.] // J. Magn. Magn. Mater. – 2003. – Vol. 258–259. – P. 161–166.
14. Физико-механические свойства композиционных радиопоглощающих материалов на основе ферритов / С. В. Серебрянников [и др.] // Радиолокация и радиосвязь : сб. науч. тр. XVI междунар. конф. / Моск. энергет. ин-т. – М., 2008. – С. 579–587.
15. Advances in complex electromagnetic materials / A. Priou [et al.] // NATO ASI Series. 3. High Technology, Kluwer Academic Publishers. – The Netherlands, 1997. – Vol. 28. – P. 396.
16. Новые материалы для экранов электромагнитного излучения / Л. М. Лыньков [и др.] // Доклады БГУИР. – 2004. – № 3. – С. 152–167.
17. Образование углеродных наноструктур при разложении метана в плазме высоковольтного разряда атмосферного давления / С. А. Жданок [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2008. – Т. 81, № 4. – С. 617–620.
18. Радиопоглощающие свойства углеродных наноматериалов / С. А. Жданок [и др.] // Нанотехника. – 2011. – № 2. – С. 72–75.

## REFERENCES

1. Kovneristyj, Ju. K., Lazareva, I. Ju., & Ravaev, A. A. (1982). *Materialy, pogloshchayushchie SVCh-izluchenie [Materials that absorb microwave radiation]*. Moscow: Science. (In Russ).
2. Vlasenko, E. A., Bokova, E. S., & Dedov, A. V. (2016). Kompozicionnyj radiopogloshhajushhij material na osnove napolnennoj reziny i modifitsirovannogo netkanogo polotna [Composite radio-absorbing material based on bone rubber and modified non-woven fabric]. *Materialovedenie [Materials Science]*, (2), 41–43. (In Russ).
3. Zhuravlev, V. A., Susljaev, V. I., Korovin, E. Ju., & Docenko, O. A. (2010). Radiopogloshhajushhie svoystva soderzhashih karbonil'noe zhelezo kompozitov na SVCh i KVCh [Radio absorbing properties of composites containing carbonyl iron at microwave and EHF]. *Issledovano v Rossii [Investigated in Russia]*, (35), 404–411.
4. Golubeva, N. S., & Mitrohin, V. N. (2006). *Osnovy radiojelektroniki sverhvysokih chastot [Fundamentals of microwave radio electronics]*. Moscow: Publishing house of MSTU named after N. E. Bauman. (In Russ).
5. Cejtlin, M. B. (2004). *Pobochnye kolebanija v jelektronnyh priborah SVCh [Side oscillations in microwave electronic devices]*. Moscow: Radio and Communications. (In Russ).
6. Latypova, A. F., & Kalinin, Ju. E. (2012). Analiz perspektivnyh radiopogloshhajushhij materialov [Analysis of promising radio-absorbing materials]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta [Bulletin of the Voronezh State Technical University]*, 8(6), 70–76. (In Russ).
7. Kraev, I. D., Shul'deshov, E. M., Platonov, M. M., & Jurkov, G. Ju. (2016). Obzor kompozicionnyh materialov, sochetajushhij zvukozashhitnye i radiozashhitnye svoystva [Review of composite materials combining soundproof and radio-protective properties]. *Aviacionnye materialy i tehnologii [Aviation materials and technologies]*, 4(45), 61–67. (In Russ).
8. Nikolajchuk, G. A., Ivanov, V. P., & Jakovlev, S. V. (2010). Radiopogloshhajushhie materialy na osnove nanostruktur [Radar absorbing materials based on nanostructures]. *Jelektronika: nauka, tehnologija, biznes [Electronics: science, technology, business]*, (1), 92–95. (In Russ).
9. Chung, D. D. L. (2001). Electromagnetic interference shielding effectiveness of carbon materials. *Carbon*, (39), 279–285.
10. Bannyj, V. A., Careno, I. V., & Krasjuk, S. I. (2018). Modifitsirovannye uglerodnym napolnitelem radiopogloshhajushhie kompozicionnye materialy na osnove polijetilena [Radar-absorbing composite materials based on polyethylene modified with carbon filler]. In *Sovremennye problemy mashinovedenija [Modern problems of mechanical engineering]* (129–130). Gomel: GSTU im. P. O. Sukhoi. (In Russ).
11. Kraev, I. D., Sorokin, A. E., Olihova, Ju. V., & Titkova, Ju. M. (2020). Konstrukcionnye materialy radiotehničeskogo naznachenija, modifitsirovannye uglerodnymi nanotrubkami [Structural materials for radio engineering, modified with carbon nanotubes]. *Plasticheskie massy [Plastic masses]*, (9–10), 62–66. (In Russ).

12. Fal'kovskij, O. I. (2009). *Tekhnicheskaja jelektrodinamika [Technical electrodynamics]*. St. Petersburg: Publ. Lan. (In Russ).
13. Lagarkov, A. N., Semenenko, V. N., Kisel, V. N. & Chistyayev, V. A. (2003). Development and simulation of microwave artificial magnetic composites utilizing nonmagnetic inclusions. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, (258–259), 161–166.
14. Serebrjannikov, S. V., Borodulin, V. N., Cheparin, V. P., Smirnov, D. O., & Konkin, D. N. (2008). Fiziko-mehanicheskie svojstva kompozicionnyh radiopogloshhajushhih materialov na osnove ferritov [Physical and mechanical properties of composite radio-absorbing materials based on ferrites]. In *Radiolokacija i radiosvjaz' [Radar and Radio Communications]* (579–587). Moscow: MPEI. (In Russ).
15. Priou, A., Sihvola, A., Tretyakov, S., & Vinogradov, A. (1997). Advances in complex electromagnetic materials. *NATO ASI Series. 3. High Technology, Kluwer Academic Publishers*, (28), 396.
16. Lyn'kov, L. M., Bogush, V. A., Borbot'ko, T. V., Ukraineec, E. A., & Kolbun, N. V. (2004). Novye materialy dlja jekranov jelektromagnitnogo izluchenija [New materials for screens of electromagnetic radiation]. *Doklady BGUIR [Reports of BSUIR]*, (3), 152–167. (In Russ).
17. Zhdanok, S. A., Krauklis, A. V., Bujakov, I. F., Volzhankin, V. M., Borisevich, K. O., & Samcov, P. P. (2008). Obrazovanie uglerodnyh nanostruktur pri razlozhenii metana v plazme vysokovol'nogo razrjada atmosfernogo davlenija [Formation of Carbon Nanostructures during the Decomposition of Methane in High-Voltage Discharge Plasma at Atmospheric Pressure]. *Inzhenerno-fizicheskij zhurnal [Engineering Physics Journal]*, 81(4), 617–620. (In Russ).
18. Zhdanok, S. A., Krauklis, A. V., Bujakov, I. F., Karpovich, V. A., Rodionova, V. N., & Tanana, O. V. (2011). Radiopogloshhajushhie svojstva uglerodnyh nanomaterialov [Radio absorbing properties of carbon nanomaterials]. *Nanotekhnika [Nanotechnology]*, (2), 72–75. (In Russ).

Поступила 31.10.2022

## ELECTRODYNAMIC CHARACTERISTICS OF A VOLUME RADIO-ABSORBING MATERIAL BASED ON NANOCARBON

V. BOGUSH, V. RODIONOVA

(Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk)

O. TANANA

(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

*The paper presents a technique for experimental study of the electrodynamic characteristics of radio-absorbing material. The results of an experimental study of the reflection coefficient and the attenuation coefficient of samples of bulk materials of electromagnetic protection based on nanocarbon in the frequency range of 8–12 GHz are presented. Recommendations are given for the practical application of the materials under study: microwave absorbers can be used inside the working cavities of units and equipment to prevent multiple reflections of microwave waves, and allow solving the problem of shielding at high frequencies by absorbing scattered radiation.*

**Keywords:** *microwaves, bulk absorbing materials, absorption and reflection of electromagnetic radiation, electromagnetic shielding, carbon nanomaterials.*

УДК 541.183

DOI 10.52928/2070-1624-2022-39-11-53-58

**ОПТИЧЕСКИЕ И ПРОЧНОСТНЫЕ СВОЙСТВА ЖЕРТВЕННЫХ СЛОЕВ  
НА ОСНОВЕ ПОЛИИМИДНЫХ ПЛЕНОК**

*канд. физ.-мат. наук, доц. С. А. ВАБИЩЕВИЧ, Н. В. ВАБИЩЕВИЧ  
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой);*

*канд. физ.-мат. наук Д. И. БРИНКЕВИЧ,*

*канд. физ.-мат. наук, доц. В. С. ПРОСОЛОВИЧ*

*(Белорусский государственный университет, Минск);*

*канд. физ.-мат. наук В. В. КОЛОС, О. А. ЗУБОВА*

*(ОАО «ИНТЕГРАЛ» – управляющая компания холдинга «ИНТЕГРАЛ», Минск)*

*Исследованы оптические и прочностные свойства пленок полиимидной композиции (полиимида PI-2610) для создания жертвенного слоя, нанесенной на поверхность пластин монокристаллического кремния марки КДБ-10 методом центрифугирования. Установлено, что они ведут себя как упругоэластические материалы. Истинная микротвердость полиимида PI-2610, измеренная при нагрузке 2 г, составляла ~0,5 ГПа. Проведено сравнение спектров нарушенного полного внутреннего отражения (НПВО) полиимида PI-2610 со спектрами НПВО пиррола и полиимида марки каптон. В спектре НПВО полиимида PI-2610 присутствуют полосы колебаний 5-членного кольца и валентных колебаний групп C–N<sub>st</sub> и CO–C<sub>st</sub>. Наиболее интенсивной полосой в спектре НПВО (как и в пирроле) является полоса деформационных колебаний C–H с максимумом при 734 см<sup>-1</sup>. Полоса при ~1700 см<sup>-1</sup>, обусловленная валентными колебаниями двойной связи C=O, имеет два близкорасположенных максимума при 1706 и 1692 см<sup>-1</sup>, что свидетельствует о двух вариантах силового поля вокруг связи C=O. Обнаружено присутствие в спектрах полиимида PI-2610 гидроксильных O–H-групп, обусловленных наличием остаточной воды в структуре полиимида.*

**Ключевые слова:** *жертвенный слой, жидкие композиции, полиимид, микротвердость, нарушенное полное внутреннее отражение, адгезия.*

**Введение.** Полиимидная пленка используется в качестве жертвенного слоя при производстве изделий микроэлектроники. Полиимид химически стоек к большинству органических растворителей, снимается только в сильных кислотах и щелочах, а также в плазме кислорода. Он обладает термической стойкостью до 360 °С [1].

В полиимидной пленке на кремниевой пластине путем плазменного травления через жесткую маску вскрываются контакты к слоям, которые находятся под полиимидом. Затем на нее наносятся необходимые слои (например, диэлектрики, такие как нитрид или оксид кремния, металлы), создается топологический рисунок. Далее в кислородной плазме происходит удаление полиимида, и сформированная на нем многослойная структура как бы повисает в воздухе, держась за подложку только в местах контактов с нижележащими слоями. Такая подвесная конструкция необходима для ряда изделий микроэлектроники, например, для неохлаждаемых фотоприемных устройств (микроболометров), которые используются в тепловизионных системах.

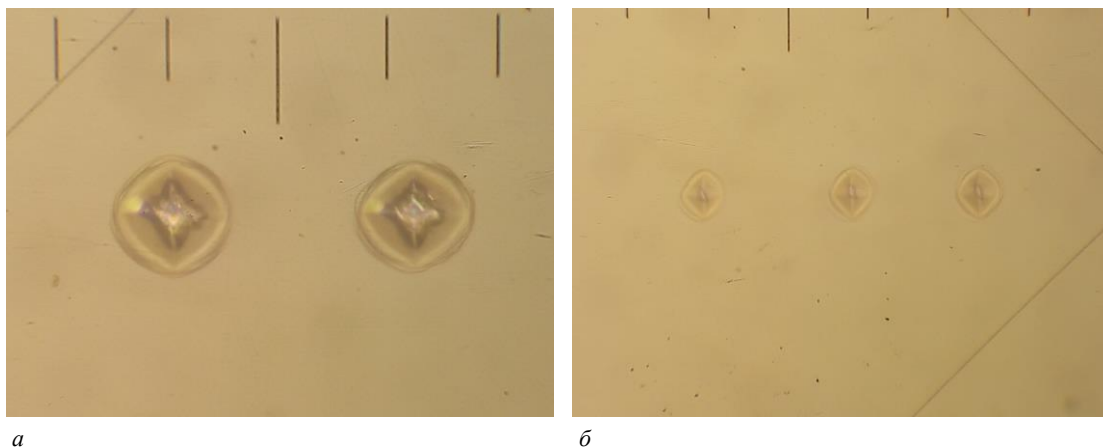
Целью настоящей работы являлось исследование оптических и прочностных свойств пленок на основе полиимида.

**Методы исследования.** Пленки полиимида PI-2610 толщиной 2,5 мкм наносились на поверхность Si методом центрифугирования. В качестве подложек использовались пластины диаметром 100 мм монокристаллического кремния марки КДБ-10 с ориентацией (111). Сушка пленки проводилась при температуре 150 °С в атмосфере N<sub>2</sub>. Имидизация выполнялась при 300 °С.

Микроиндентирование проводилось на приборе ПМТ-3 по стандартной методике при комнатной температуре [2]. В качестве индентора использовался алмазный наконечник в форме четырехгранной пирамиды с квадратным основанием и углом при вершине  $\alpha = 136^\circ$ . Нагрузка  $P$  на индентор варьировалась в пределах 1...50 г. Длительность нагружения составляла 2 с; выдержка под нагрузкой – 5 с. При измерении для каждой экспериментальной точки на поверхность образца наносилось не менее 50 отпечатков. Обработка результатов измерений проводилась с использованием методов математической статистики [3]. Это обеспечивало погрешность измерений микротвердости  $H$  менее 2,5% (с доверительной вероятностью 0,95). Спектры нарушенного полного внутреннего отражения в диапазоне волновых чисел  $\nu = 400 - 4000$  см<sup>-1</sup> регистрировались при комнатной температуре ИК-Фурье спектрофотометром ALPHA (Bruker Optik GmbH). Разрешение составляло 2 см<sup>-1</sup>, количество сканов – 24. Коррекция фона проводилась перед каждым измерением [4].

**Экспериментальные результаты и их обсуждение.** Отпечатки микроиндентора в пленке полиимида PI-2610 представлены на рисунке 1. Способ съемки обычный – светлое поле. При нагрузке 1 г до 60% отпечатков после снятия нагрузки частично или полностью восстанавливались, уменьшаясь в размерах или полностью исчезая. Однако при нагрузке 5 г эффект восстановления отпечатка не столь выражен: имело

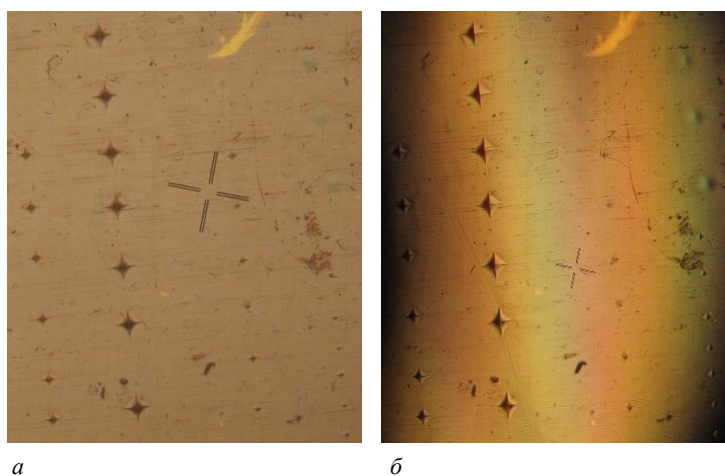
место только искажение формы отпечатка, все отпечатки сохранились. Форма отпечатков индентора в полиимидной пленке на кремнии схожа с отпечатками, наблюдавшимися в других полимерных пленках на кремнии (полиметилметакрилат [5] и диазохинон-новолачные фоторезисты [6]). Для всех нагрузок после снятия нагрузки форма отпечатков бочковидная, что свидетельствует о наличии в пленке растягивающих напряжений, образующихся при сушке пленки. При нагрузках свыше 10 г имело место проникновение индентора в кремний (светлые квадраты в центре отпечатка на рисунке 1, а). Параллельно сторонам отпечатка наблюдались навалы сферической формы, обусловленные выносом (выдавливанием) материала из-под индентора (см. рисунок 1, а). На фоне навалов наблюдались темные замкнутые линии, по форме близкие к концентрическим окружностям. Предположительно, это складки на поверхности навалов. Трещин в углах отпечатков, где при индентировании имеют место максимальные напряжения, не наблюдалось. Полученные экспериментальные данные указывают на упругопластический характер деформации пленок полиимида PI-2610.



а – при нагрузке 50 г, увеличение 700×; б – при нагрузке 10 г, увеличение 350×

Рисунок 1. – Отпечатки микроиндентора на пленке полиимида PI-2610

Поведение при индентировании полиимидной пленки PI-2610 существенным образом отличается от поведения полиимида марки каптон. При индентировании пленок каптона толщиной 50 мкм отпечатки индентора при обычной съемке (рисунок 2, а) плохо видны и представляют собой крестообразные отпечатки ребер пирамиды. Они мало пригодны для анализа и измерения микротвердости. При наблюдении в поляризованном свете (рисунок 2, б) выявляется специфика отпечатков: с вогнутыми сторонами, видны искривления поверхностей отпечатков в связи с упругим восстановлением их формы. Данный эффект наблюдается для нагрузок в интервале 5–10 г. Для меньших нагрузок 5–2 г отпечатки обычные – квадратной формы, без упругого восстановления. Таким образом, формы отпечатков в полиимиде PI-2610 и каптоновой полиимидной пленке отличаются существенным образом: в каптоне имеют место напряжения сжатия, т. е. восстановление отпечатка имеет противоположный знак по сравнению с полиимидной пленкой PI-2610.

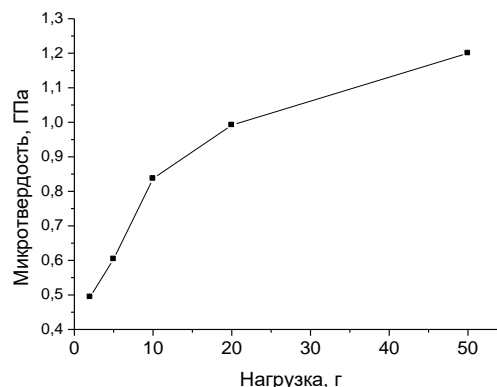


Способ съемки: а – светлое поле; б – метод дифференциально-интерференционного контраста

Рисунок 2. – Микрофотографии отпечатков после индентирования пленок полиимида марки каптон толщиной 50 мкм. Нагрузка на индентор варьировалась от 50 до 5 г

Зависимость восстановленной микротвердости от нагрузки для структур полиимид PI-2610 / кремний представлена на рисунке 3. Когда глубина проникновения индентора не превышает 0,5 толщины пленки (при нагрузке 2 г), значения микротвердости соответствуют истинной микротвердости полиимида PI-2610 ~0,5 ГПа. При увеличении нагрузки начинает сказываться влияние твердой подложки (микротвердость кремния ~9 ГПа) и значения измеренной микротвердости возрастают. Особенно резкий рост измеренных значений микротвердости наблюдается при приближении и пересечении индентором границы раздела полиимид / кремний. В исследованной пленке индентор достигал границы раздела полиимид / кремний при нагрузке 5 г, и при этой же нагрузке начинался существенный рост измеренной микротвердости.

**Рисунок 3. – Зависимость микротвердости от нагрузки для пленок полиимида PI-2610 на кремнии**



Отметим, что адгезия полиимидной пленки PI-2610 к кремнию низкая: пленка достаточно легко отделяется от поверхности кремниевой пластины. На рисунке 4 приведены спектры НПВО пленки полиимида PI-2610 на кремнии (PI/Si) и этой же пленки, отделенной от кремниевой пластины (пленка PI). Оба спектра в большинстве спектральных диапазонов совпадают. Исключение составляет только полоса в диапазоне волновых чисел 1240–1400  $\text{см}^{-1}$ . Ее структура в пленках PI и PI/Si имеет заметные отличия. Так, в пленке PI имеется ярко выраженный максимум при 1349  $\text{см}^{-1}$ , в то время как в PI/Si наблюдается два максимума одинаковой интенсивности. Кроме максимума при 1349  $\text{см}^{-1}$  в PI/Si присутствует также широкий максимум при ~1250  $\text{см}^{-1}$ . Вероятнее всего, он обусловлен влиянием кремниевой подложки. Известно [7], что в спектрах НПВО кремния наблюдается полоса с максимумом при ~1240  $\text{см}^{-1}$ , связанная с образованием комплексов  $\text{Si}_x\text{O}_y$  у поверхности кремния. Эффективная глубина проникновения  $d_{\text{эф}}$  поля в исследуемом образце при НПВО составляет ~0,5 длины волны зондирующего излучения [4]. При волновых числах ~1200  $\text{см}^{-1}$   $d_{\text{эф}}$  составляет ~4,5 мкм, что превышает толщину пленки исследовавшегося полиимида PI-2610.

С эффектом проникновения зондирующего поля в кремниевую подложку связан также эффект подъема фона спектра НПВО структуры PI/Si при волновых числах ниже 800  $\text{см}^{-1}$ . Более низкая интенсивность спектра структуры PI/Si по сравнению со спектром пленки PI обусловлена условиями измерений – более слабым прижимом структуры PI/Si к источнику излучения. Это приводит к возникновению воздушного зазора между образцом и источником излучения и, соответственно, к увеличению рассеяния в этом зазоре.

Спектр НПВО полиимидной пленки PI-2610 близок к спектру пиррола, однако отличается от спектра полиимида марки каптон (рисунок 5). Как и в пирроле, в спектре полиимида PI-2610 присутствуют полосы колебаний 5-членного кольца (1511, 1474 и 1419  $\text{см}^{-1}$ ) и валентных колебаний группы  $\text{CO}-\text{C}_{\text{st}}$  (1014, 1048 и 1074  $\text{см}^{-1}$ ) [8; 9]. Наиболее интенсивной полосой в спектре НПВО (как и в пирроле) является полоса деформационных колебаний  $\text{C}-\text{H}$  с максимумом при 734  $\text{см}^{-1}$ . Полосы в диапазоне волновых чисел 1200–1350  $\text{см}^{-1}$  (1266, 1319 и 1349  $\text{см}^{-1}$ ) связаны с валентными колебаниями связи  $\text{C}-\text{N}_{\text{st}}$  [9; 10]. Валентными асимметричными колебаниями двойной связи  $\text{C}=\text{O}$  в имидном цикле обусловлена полоса при ~1700  $\text{см}^{-1}$  [8; 11]. Она имеет два близкорасположенных максимума – 1706 и 1692  $\text{см}^{-1}$  (см. рисунок 4), что свидетельствует о двух вариантах силового поля вокруг связи  $\text{C}=\text{O}$ . Не исключено, что это обусловлено двумя разными (несимметричными) положениями этой связи в имидном кольце. Полос с максимумами при ~3400  $\text{см}^{-1}$ , присущих валентным колебаниям  $\text{N}-\text{H}$ -связей в пирроле и лактамах, в спектрах НПВО не наблюдалось.

В спектре НПВО присутствует полоса с максимумом при 3077  $\text{см}^{-1}$ , обусловленная валентными колебаниями  $\text{C}-\text{H}$ -связей имидного кольца. Отметим, что аналогичная полоса, наблюдавшаяся в спектрах каптона (см. рисунок 5), обладала 3 максимумами, что указывает на 3 разных несимметричных положения этой связи в структуре каптона [12]. Наблюдался также ряд слабых полос с максимумами при 2916, 2851, 2792 и 2720  $\text{см}^{-1}$ , обусловленных асимметричными и симметричными валентными колебаниями  $\text{CH}_2$ - и  $\text{CH}_3$ -групп. Авторы [10] связывают первые две полосы этой группы с колебаниями  $\text{C}-\text{H}$ -связей в метоксигруппе. Следует также отметить наличие в спектре НПВО полос, обусловленных валентными колебаниями свободных (3630  $\text{см}^{-1}$ ) и связанных водородной связью (3490  $\text{см}^{-1}$ ) гидроксильных  $\text{O}-\text{H}$ -групп (см. рисунок 5). Соотношение интенсивностей этих полос указывает на преобладание связанных гидроксильных групп в структуре полиимида. Аналогичные полосы в полиимиде марки каптон наблюдались в работе [12] и были обусловлены присутствием остаточной воды в структуре полиимида.

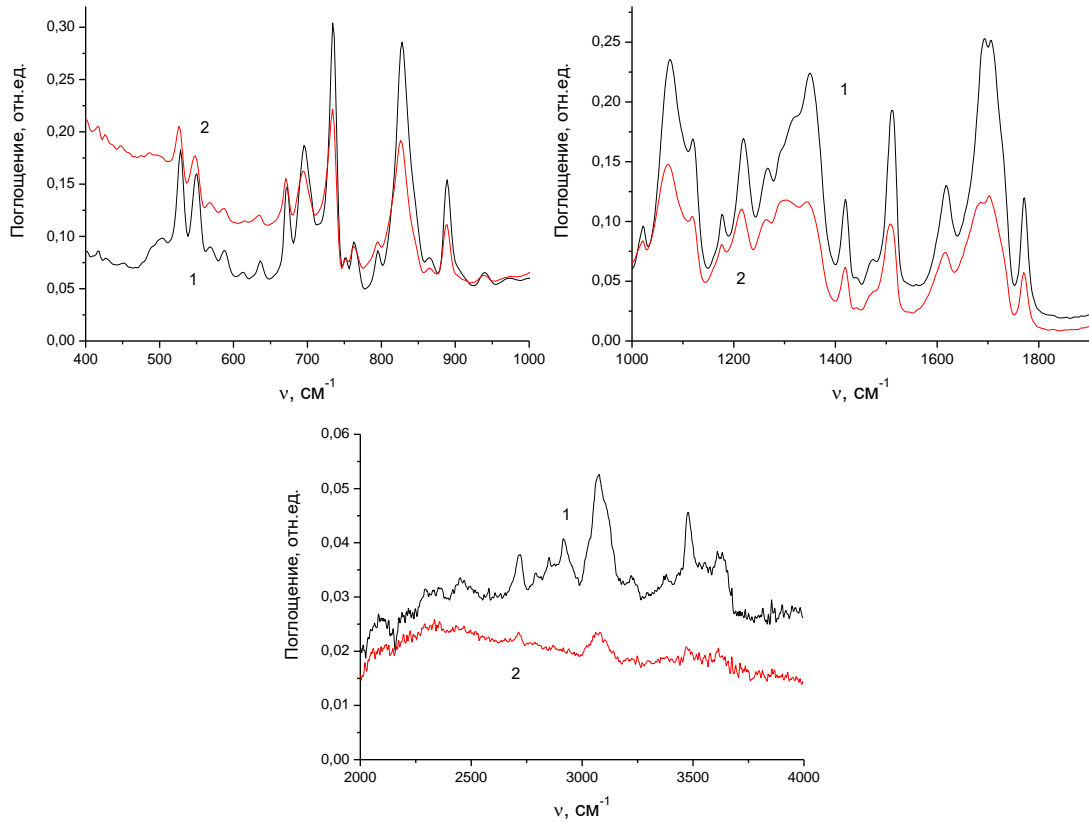


Рисунок 4. – Спектры ИРВО пленок полиимида PI-2610 (1) и структур PI/Si (2)

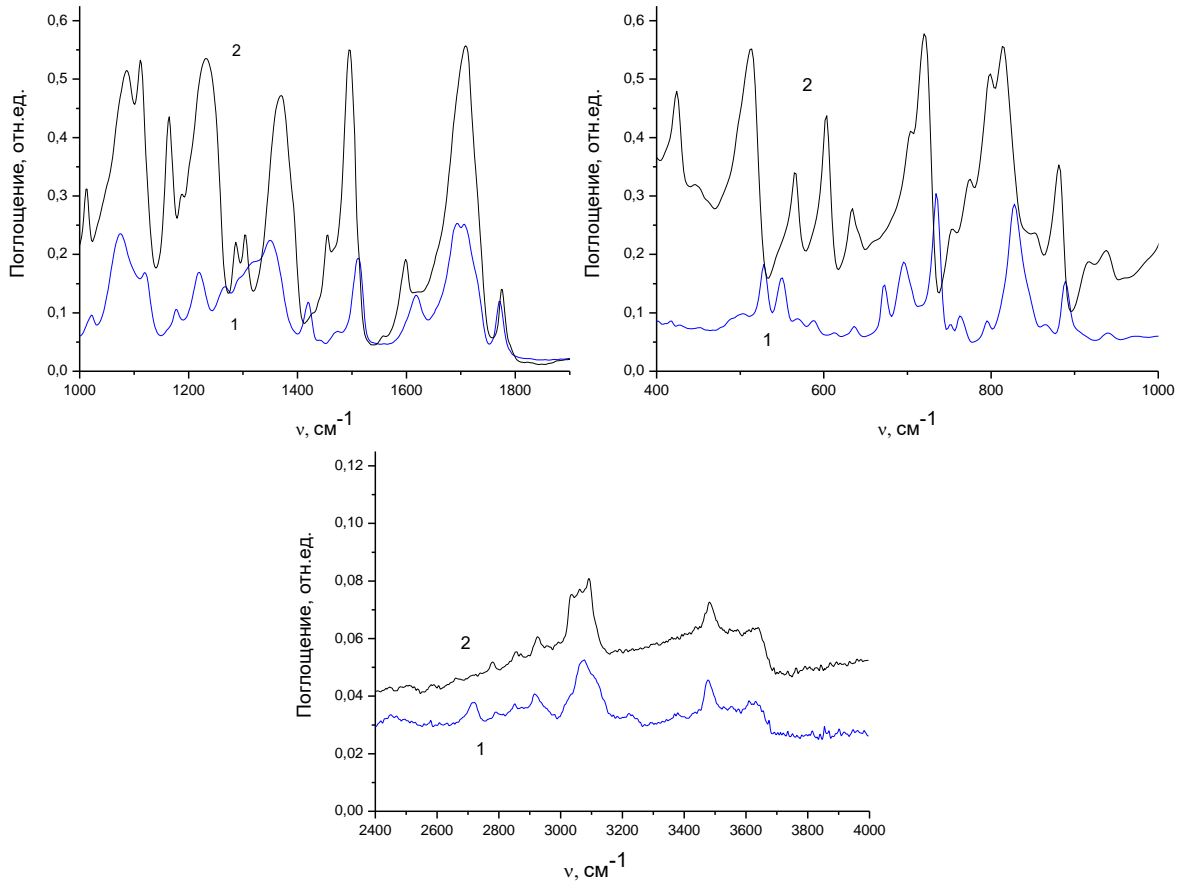


Рисунок 5. – Спектры ИРВО пленок полиимида PI-2610 (1) и полиимида марки каптон (2)



**Заключение.** Показано, что пленки полиимидной композиции (полиимида PI-2610) ведут себя как упругопластические материалы. Истинная микротвердость полиимида PI-2610, измеренная при нагрузке 2 г, составила  $\sim 0,5$  ГПа. Проведено сравнение спектров нарушенного полного внутреннего отражения полиимида PI-2610 со спектрами НПВО пиррола и полиимида марки каптон. В спектре НПВО полиимида PI-2610 присутствуют полосы колебаний 5-членного кольца и валентных колебаний групп  $C-N_{st}$  и  $CO-C_{st}$ . Наиболее интенсивной полосой в спектре НПВО (как и в пирроле) является полоса деформационных колебаний  $C-H$  с максимумом при  $734\text{ см}^{-1}$ . Полоса при  $\sim 1700\text{ см}^{-1}$ , обусловленная валентными колебаниями двойной связи  $C=O$ , имеет два близкорасположенных максимума при  $1706$  и  $1692\text{ см}^{-1}$ , что свидетельствует о двух вариантах силового поля вокруг связи  $C=O$ . Обнаружено присутствие в спектрах полиимида PI-2610 гидроксильных  $O-H$ -групп, обусловленных присутствием остаточной воды в структуре полиимида.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Микротвердость пленок полиимида и полиэтилентерефталата, облученных гамма-квантами  $^{60}\text{Co}$  / Д. И. Бринкевич [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2017. – № 12. – С. 30–34.
2. Бринкевич, Д. И. Прочностные свойства термообработанного кремния, выращенного в магнитном поле / Д. И. Бринкевич, Н. В. Вабищевич, С. А. Вабищевич // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2009. – № 3. – С. 152–157.
3. Бринкевич, Д. И. Физико-механические свойства эпитаксиальных слоев фосфида галлия / Д. И. Бринкевич, Н. В. Вабищевич, С. А. Вабищевич // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2010. – № 9. – С. 92–97.
4. Модификация пленок диазохинон-новолачного фоторезиста за областью внедрения ионов  $B^+$  / С. Д. Бринкевич [и др.] // Химия высоких энергий. – 2020. – Т. 54, № 5. – С. 377–386. – DOI: [10.31857/S0023119320050046](https://doi.org/10.31857/S0023119320050046). (Modification of Diazoquinone–Novolac Photoresist Films beyond the Region of Implantation of  $B^+$  Ions / S. D. Brinkevich [et al.] // High energy chemistry. – 2020. – Vol. 54, iss. 5. – P. 342–351. – DOI: [10.1134/S0018143920050045](https://doi.org/10.1134/S0018143920050045)).
5. Микротвердость структур полимер – кремний / Н. В. Вабищевич [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2009. – № 9. – С. 97–102.
6. Прочностные свойства структур фоторезист-кремний,  $\gamma$ -облученных и имплантированных ионами  $B^+$  и  $P^+$  / С. А. Вабищевич [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2016. – № 12. – С. 30–36.
7. Ростовые кислородсодержащие дефекты в кремнии, выращенном в слабом вертикальном магнитном поле / Д. И. Бринкевич [и др.] // Микроэлектроника. – 2011. – Т. 40, № 4. – С. 309–312. (Growth oxygen-containing defects in silicon grown in a weak vertical magnetic field / D. I. Brinkevich [et al.] // Russian Microelectronics – 2011. – Vol. 40, iss. 4. – P. 289–292. – DOI: [10.1134/S1063739711040044](https://doi.org/10.1134/S1063739711040044)).
8. Тарасевич, Б. Н. ИК спектры основных классов органических соединений. Справочные материалы / Б. Н. Тарасевич. – М. : МГУ, 2012. – 54 с.
9. Преч, Э. Определение строения органических соединений. Таблицы спектральных данных / Э. Преч, Ф. Бюльманн, К. Аффольгер. – М. : Мир : Бином, 2006. – 438 с.
10. Оптические спектры термостойких полимерных пленок сетчатой структуры / В. Т. Аванесян [и др.] // Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения : междунар. науч.-техн. конф. (INTERMATIC–2015), Москва, 1–5 дек. 2015 г. : ч. 2 / Моск. гос. ун-т информ. технологий, радиотехники и электроники. – М., 2015. – С. 112–114.
11. Исследование молекулярной ориентации в поверхностных слоях полиимидных пленок методом спектроскопии нарушенного полного внутреннего отражения в области основных колебательных полос / И. В. Хейнонен [и др.] // Высокомолекулярные соединения. – 1998. – Т. 40, № 9. – С. 1526–1530.
12. Радиационно-индуцированные процессы в структурах DLC/полиимид при облучении  $\gamma$ -квантами  $^{60}\text{Co}$  / А. А. Харченко [и др.] // Химия высоких энергий. – 2022. – Т. 56, № 5. – С. 378–387. – DOI: [10.31857/S0023119322050059](https://doi.org/10.31857/S0023119322050059).

## REFERENCES

1. Brinkevich, D. I., Lukashevich, M. G., Prosolovich, V. S., Harchenko, A. A., Vabishchevich, S. A., & Vabishchevich, N. V. (2017). Mikrotverdost' plenok poliimida i polietilentereftalata, obluchennyh gamma-kvantami  $^{60}\text{Co}$  [Microhardness of polyimide and polyethylene terephthalate films irradiated with  $^{60}\text{Co}$  gamma quanta]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C. Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (12), 30–34. (In Russ., abstr. in Engl.).
2. Brinkevich, D. I., Vabishchevich, N. V., & Vabishchevich, S. A. (2009). Prochnostnye svojstva termoobrabotannogo kremniya, vyrashchennogo v magnitnom pole. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C. Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (3), 152–157. (In Russ.).
3. Brinkevich, D. I., Vabishchevich, N. V., & Vabishchevich, S. A. (2010). Fiziko-mekhanicheskie svojstva epitaksial'nyh sloev fosfida galliya [Physicomechanical properties of epitaxial layers gallium phosphide] // *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C. Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (9), 92–97. (In Russ., abstr. in Engl.).
4. Brinkevich, S. D., Grinyuk, E. V., Brinkevich, D. I., & Prosolovich, V. S. (2020). Modifikaciya plenok diazohinon-novolachnogo fotorezista za oblast'yu vnedreniya ionov  $B^+$ . *Himiya vysokih energij*, 54(5), 377–386. (In Russ.). DOI: [10.31857/S0023119320050046](https://doi.org/10.31857/S0023119320050046). (Brinkevich, S. D., Grinyuk, E. V., Brinkevich, D. I., & Prosolovich, V. S. (2020). Modification of Diazoquinone–Novolac Photoresist Films beyond the Region of Implantation of  $B^+$  Ions. *High energy chemistry*, 54(5), 342–351). DOI: [10.1134/S0018143920050045](https://doi.org/10.1134/S0018143920050045).

5. Vabishchevich, N. V., Vabishchevich, S. A., Brinkevich, D. I., & Brinkevich, S. D. (2009). Mikrotverdost' struktur polimer – kremnij. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C. Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (9), 97–102. (In Russ.).
6. Vabishchevich, S. A., Vabishchevich, N. V., Brinkevich, D. I., Prosolovich, V. S., Yankovskij, Yu. N., & Brinkevich, S. D. (2016). Prochnostnye svojstva struktur fotorezist-kremnij,  $\gamma$ -obluchennyh i implantirovannyh ionami B<sup>+</sup> i P<sup>+</sup> [Strength properties of photoresist-silicon structures,  $\gamma$ -irradiated and implanted by B<sup>+</sup> and P<sup>+</sup> ions]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C. Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (12), 30–36. (In Russ., abstr. in Engl.).
7. Brinkevich, D. I., Odzhaev, V. B., Petlickij, A. N., & Prosolovich, V. S. (2011). Rostovye kislorodsoderzhashchie defekty v kremnii, vyrashchennom v slabom vertikal'nom magnitnom pole. *Mikroelektronika*, 40(4), 309–312. (In Russ.). (Brinkevich, D. I., Odzhaev, V. B., Petliskii, A. N., & Prosolovich, V. S. (2011). Growth oxygen-containing defects in silicon grown in a weak vertical magnetic field. *Russian Microelectronics*, 40(4), 290–293).
8. Tarasevich, B. N. (2012). *IK spektry osnovnyh klassov organicheskikh soedinenij. Spravochnye materialy [IR spectra of the main classes of organic compounds. Reference materials]*. Moscow: MGU. (In Russ.).
9. Prech, E., Byul'mann, F., & Affol'ter, K. (2006). *Opreделение stroeniya organicheskikh soedinenij. Tablicy spektral'nyh dannyh [Determination of the structure of organic compounds. Spectral data tables]*. Moscow: Mir, Binom. (In Russ.).
10. Avanesyan, V. T., Vaganov, G. V., Rakina, A. V., & Platko, A. P. (2015). Opticheskie spektry termostojkih polimernyh plenok setchatoj struktury. In *Fundamental'nye problemy radioelektronnogo priborostroeniya (INTERMATIC-2015), ch. 2* (112–114). Moscow: MIREA. (In Russ.).
11. Hejnonen, I. V., Mamedov, R. K., Bobasheva, A. S., Lajus, L. A., & Zolotarev, V. M. (1998). Issledovanie molekulyarnoj orientacii v poverhnostnyh sloyah poliimidnyh plenok metodom spektroskopii nareshennogo polnogo vnutrennegootrazheniya v oblasti osnovnyh kolebatel'nyh polos [Study of Molecular Orientation in Surface Layers of Polyimide Films by Attenuated Total Internal Reflection Spectroscopy in the Region of Main Vibrational Bands]. *Vysokomolekulyarnye soedineniya [Polymer Science]*, 40(9), 1526–1530.
12. Harchenko, A. A., Fedotova, Yu. A., Zur, I. A., Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., Grinyuk, E. V., ... Lastovskij, S. B. (2022). Radiacionno-inducirovannye processy v strukturah DLC/poliimid pri obluchenii  $\gamma$ -kvantami <sup>60</sup>So. [Processes Induced in DLC/Polyimide Structures with Irradiation with 60Co  $\gamma$ -Rays]. *Himiya vysokih energij [High energy chemistry]*, 56(5), 378–387. DOI: 10.31857/S0023119322050059.

Поступила 07.09.2022

## OPTICAL AND STRENGTH PROPERTIES OF SACRIFICIAL LAYERS BASED ON POLYIMIDE FILMS

**S. VABISHCHEVICH, N. VABISHCHEVICH**  
(*Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk*);  
**D. BRINKEVICH, V. PROSOLOVICH**  
(*Belarusian State University, Minsk*);  
**V. KOLOS, O. ZUBOVA**  
(*“INTEGRAL” Joint Stock Company, Minsk*)

*Optical and strength properties of films of a polyimide composition (polyimide PI-2610) for creating a sacrificial layer deposited on the surface of single-crystal silicon plates of the KDB-10 brand by centrifugation are investigated. It has been established that they behave like elastoplastic materials. The true microhardness of polyimide PI-2610, measured at a load of 2 g, was ~0,5 GPa. The spectra of the disturbed total internal reflection (NPVO) of polyimide PI-2610 were compared with the spectra of the NPVO of pyrrole and kapton polyimide. In the spectrum of the polyimide PI-2610, there are bands of vibrations of the 5-membered ring and valence vibrations of the C–N<sub>st</sub> and CO–C<sub>st</sub> groups. The most intense band in the spectrum of NPVO (as in pyrrole) is the band of deformation vibrations C–H with a maximum at 734 cm<sup>-1</sup>. The band at ~1700 cm<sup>-1</sup>, caused by valence vibrations of the C=O double bond, has two closely spaced maxima at 1706 and 1692 cm<sup>-1</sup>, which indicates two variants of the force field around the C=O bond. The presence of hydroxyl O–H groups in the spectra of polyimide PI-2610 was detected due to the presence of residual water in the polyimide structure.*

**Keywords:** *sacrificial layer, liquid compositions, polyimide, microhardness, attenuated total reflection, adhesion.*

## РАДИОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ВЫВОДА ЦИКЛОТРОНА ИЗ ЭКСПЛУАТАЦИИ

**А. Н. КИЙКО**

(Белорусский государственный институт метрологии, Минск);  
канд. физ.-мат. наук, доц. С. А. ВАБИЩЕВИЧ, Н. В. ВАБИЩЕВИЧ  
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой);  
канд. физ.-мат. наук Д. И. БРИНКЕВИЧ  
(Белорусский государственный университет, Минск)

*Рассмотрены радиологические и экономические вопросы демонтажа циклотронов различных типов, накопление радионуклидов (РН) в деталях самого циклотрона и активация стен бункера циклотрона вследствие захвата вторичных нейтронов. В бетоне бункера циклотрона в результате ( $n, \gamma$ )-реакций на тепловых нейтронах образуются радионуклиды  $^{152}\text{Eu}$ ,  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{46}\text{Sc}$  с периодом полураспада от 2,6 до 14 лет и активностью 0,1–11 кБк/кг. Максимум их распределения обычно лежит на глубине 10–15 см. В деталях циклотрона и металлической инфраструктуре бункера основными радионуклидами являются  $^{54}\text{Mn}$ ,  $^{57}\text{Co}$ ,  $^{65}\text{Zn}$ . Проведенный анализ накопления долгоживущих радионуклидов имеет важное значение для проектирования новых циклотронных производств с целью обеспечения радиационной безопасности и хранения радиоактивных отходов и, как следствие, минимизации дозовых нагрузок персонала при демонтаже циклотрона.*

**Ключевые слова:** циклотрон, вывод из эксплуатации, радионуклиды, нейтронная активация бетона.

**Введение.** В настоящее время в мире работают более двух тысяч коммерческих циклотронов. Основным предназначением более 70% из них является производство медицинских радионуклидов [1]. Бурное развитие ПЭТ-технологии началось в конце 80-х гг. прошлого столетия. Поскольку срок службы «медицинских» циклотронов составляет 20 лет, в настоящее время начинается процесс вывода их из эксплуатации, который со временем будет интенсифицироваться. Следует заметить, что за последние несколько лет токи пучка, используемые в коммерчески доступных циклотронах, резко увеличились, поэтому активация материалов в хранилищах циклотронов теперь может представлять более серьезные радиологические опасности. Это требует более тщательного регулирующего надзора за работой и обслуживанием циклотронов и актуализирует вопросы будущей деятельности по выводу их из эксплуатации [2]. Исследование накопления долгоживущих радионуклидов также необходимо для проектирования новых циклотронных производств с целью обеспечения радиационной безопасности и хранения радиоактивных отходов (РАО).

Стоимость вывода «медицинского» циклотрона из эксплуатации сильно зависит от номенклатуры и активности накопленных в результате работы циклотрона долгоживущих радионуклидов [3]. Для снижения будущих затрат на демонтаж необходимо заранее оценить количество радиоактивных отходов, чтобы определить оптимальную стратегию вывода из эксплуатации. Это обстоятельство обуславливает необходимость идентификации радионуклидов и определения их активности непосредственно после вывода циклотрона из эксплуатации [4]. Литературные данные по данной проблеме ограничены и в основном касаются циклотронов с токами пучка 10–35 мкА [1; 4–6]. В современных циклотронах токи пучка достигают 100–300 мкА [7], что неизбежно будет приводить к более сильной активации материалов в хранилищах циклотронов и, соответственно, увеличивать стоимость работ по выводу их из эксплуатации. Отметим, что в литературе ощущается явный недостаток информации для оценки реальных радиологических и экономических последствий будущего демонтажа циклотронов [5].

**Вывод циклотрона из эксплуатации.** У рассматриваемой проблемы есть два аспекта: накопление радионуклидов в деталях самого циклотрона и активация стен бункера циклотрона вследствие захвата вторичных нейтронов. Накопление в наиболее часто заменяемых деталях циклотрона (стриппере, входном окне и теле мишени) было рассмотрено ранее в работах [8–14]. Ниже будет рассмотрено накопление РН в других деталях циклотрона и бетоне стен бункера. Отметим, что активация воздуха в хранилище циклотрона при надлежащей вентиляции не представляет значительной радиологической опасности для персонала при интенсивностях луча, используемых в настоящее время [2].

Активация бетонной защиты – одна из важнейших проблем при выводе циклотрона из эксплуатации. Активация бетона производится вторичными нейтронами и фотонами. Они генерируются при столкновении протонов с деталями ускорителя во время транспортировки пучка и при взаимодействии с мишенью. Хотя принципы активации хорошо известны, доступны лишь ограниченные исследования наведенной радиоактивности в бетонной защите [1; 4; 5]. Отметим, что исследованию воздействия нейтронного излучения от циклотрона на различные объекты в бункере циклотрона в последние годы посвящен ряд работ [5; 15–18].

В работе [5] представлены результаты исследований для циклотрона, находившегося в Vrije Universiteit Brussel (максимальная энергия протонов 43 МэВ, максимальная интенсивность ионного пучка 100 мкА). Отбирались керны бетонной защиты диаметром 50 мм. Они были проанализированы гамма-спектрометром высокого разрешения (HPGe-детектор) с поправкой на самопоглощение и с учетом геометрии измерения. Куски арматурной стали измерялись отдельно.

В таблице 1 показаны радионуклиды, обнаруженные в бетоне после гамма-спектрометрического анализа. Из-за высокого сечения захвата тепловых нейтронов  $^{151}\text{Eu}$  и длительного периода полураспада  $^{152}\text{Eu}$  этот нуклид присутствует в больших количествах в активированном бетоне. Наибольшая обнаруженная удельная активность  $^{152}\text{Eu}$  составила 11 кБк/кг. При использовании баритбетона и бетона с высоким содержанием Na наиболее важными радионуклидами являются  $^{133}\text{Ba}$  и  $^{22}\text{Na}$ . Максимальная удельная активность  $^{133}\text{Ba}$  составляла 1,8 кБк/кг. На профилях активации бетона по глубине для циклотрона наблюдается максимум на глубине 15 см [5]. Затем происходит квазиэкспоненциальный спад активности.

В активированном бетоне также был обнаружен тритий с удельной активностью до 380 кБк/кг. Активность  $^3\text{H}$  хорошо коррелирует с соответствующей активностью  $^{152}\text{Eu}$ . Авторами [5] было высказано предположение, что тритий производится реакциями расщепления, которые происходят вокруг ускорителя. Однако требуются дальнейшие исследования для достоверного объяснения образования  $^3\text{H}$  в бетоне.

Таблица 1. – Радионуклиды, идентифицированные в бетонной защите [5]

Радионуклид	Возможная реакция	Сечение реакции	Период полураспада
$^{152}\text{Eu}$	$^{151}\text{Eu} (n, \gamma) ^{152}\text{Eu}$	9198 barn	13,33 лет
$^{154}\text{Eu}$	$^{153}\text{Eu} (n, \gamma) ^{154}\text{Eu}$	312 barn	8,8 лет
$^{60}\text{Co}$	$^{59}\text{Co} (n, \gamma) ^{60}\text{Co}$	37 barn	5,3 лет
$^{134}\text{Cs}$	$^{133}\text{Cs} (n, \gamma) ^{134}\text{Cs}$ $^{134}\text{Ba} (n, p) ^{134}\text{Cs}$	29 barn 9 mbarn at $E_n = 16 \text{ MeV}$	2,06 лет
$^{46}\text{Sc}$	$^{45}\text{Sc} (n, \gamma) ^{46}\text{Sc}$	27 barn	83 лет
$^{133}\text{Ba}$	$^{132}\text{Ba} (n, \gamma) ^{133}\text{Ba}$	7 barn	10,5 лет
$^{54}\text{Mn}$	$^{55}\text{Mn} (n, 2n) ^{54}\text{Mn}$ $^{54}\text{Fe} (n, p) ^{54}\text{Mn}$	910 mbarn at $E_n = 18 \text{ MeV}$ 590 mbarn at $E_n = 10 \text{ MeV}$	312 дней
$^{22}\text{Na}$	$^{23}\text{Na} (n, 2n) ^{22}\text{Na}$ $^{27}\text{Al} (n, 2p4n) ^{22}\text{Na}$	40 mbarn at $E_n = 15 \text{ MeV}$ 10 mbarn at $E_n = 25 \text{ MeV}$	2,6 лет
$^{137}\text{Cs}$	$^{136}\text{Ba} (n, \gamma) ^{137m}\text{Ba} \rightarrow ^{137}\text{Cs}$ $^{137}\text{Ba} (n, p) ^{137}\text{Cs}$	0,4 barn 3,7 mbarn at $E_n = 16 \text{ MeV}$	30 лет

Удельная активность РН в бетонной защите, металлической инфраструктуре и деталях машин по результатам измерений 3 ускорителей разных типов предоставлена в таблице 2. Отметим широкий диапазон значений, ясно указывающий на то, что в разных ускорителях можно ожидать значительных различий в уровнях активации.

Таблица 2. – Удельная активность радионуклидов в бетоне и металлических деталях циклотронных комнат [5]

Материал	Радионуклид	Удельная активность, Бк/кг
Бетон	$^{152}\text{Eu}$	700–12000
	$^{60}\text{Co}$	80–8000
	$^{46}\text{Sc}$	800–900
Металлическая инфраструктура бункера	$^{60}\text{Co}$	0,10–100
	$^{54}\text{Mn}$	0,09–380
	$^{65}\text{Zn}$	1,64–170
Части ускорителей	$^{60}\text{Co}$	32–5000
	$^{54}\text{Mn}$	0,9–1000
	$^{22}\text{Na}$	1000–10000
	$^{57}\text{Co}$	0,25–100

Авторами [5] также проводился отбор проб различных металлических деталей (алюминий, нержавеющая сталь, обычная сталь, медь, латунь и оцинкованная сталь), находившихся в помещениях ускорителей различного типа, мишенных комнатах и экспериментальных залах. Образцы брались как с ускорителей, так и из окружающей инфраструктуры, которая могла быть активирована нейтронами. В инфраструктурных частях циклотрона, находившегося в Vrije Universiteit Brussel (максимальная энергия протонов 43 МэВ, максимальная интенсивность ионного пучка 100 мкА), обнаружены значительные количества  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{65}\text{Zn}$  и  $^{54}\text{Mn}$  с удельной активностью от 1 до 200 кБк/кг. Большинство алюминиевых деталей обладали удельной активностью ниже 1 кБк/кг, в то время как некоторые части конструкций из стали и нержавеющей стали имеют удельную активность выше 200 кБк/кг. Обращает на себя внимание тот факт, что ядра основных магнитов и переключающих магнитов, изготовленные из стали с низким содержанием кобальта, в которых Co присутствует только в качестве возможной примеси, активируются лишь незначительно. Высоко активированными частями ускорителя являются устройства вывода пучка, а также ускоряющие конструкции. Они имели удельную активность значительно выше 1 МБк/кг. Арматурные стержни бетонных стен были активированы до 300 кБк/кг.

Активация бетона в бункерах «медицинских» циклотронов GE PETtrace (энергия протонов 16,5 МэВ) и IVA Cyclone 18 HC (энергия 18 МэВ, ток пучка до 100 мкА) исследовалась в работе [17]. Основными долгоживущими радионуклидами, обнаруженными в бетоне, были  $^{152}\text{Eu}$ ,  $^{54}\text{Mn}$ ,  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{46}\text{Sc}$ ,  $^{134}\text{Cs}$  с удельными активностями от 0,01 до 0,6 Бк/г. Во всех проведенных измерениях общая концентрация активности превышала уровень допуска, указанный в Директиве (2013) / 59 / Евратом. С учетом гипотетического вывода из эксплуатации двух циклотронов, количество низкоактивных радиоактивных отходов (бетона) оценивается авторами [17] примерно в 93 м<sup>3</sup> в случае циклотрона GE PETtrace, и около 58 м<sup>3</sup> для IVA Cyclone 18 HC.

В работе [18] проведены теоретические и экспериментальные исследования влияния нейтронного излучения на активацию материалов в бункере работающего «медицинского» циклотрона CYPRI-S-HM18 с энергией протонов 18 МэВ. Режим работы циклотрона – каждое утро в будний день в течение одного часа при ионном токе 50 мкА (наработка  $^{18}\text{F}$ ). Циклотрон отработал около 200 дней в году, что является типичным для «медицинских» циклотронов. В винте из корпуса циклотрона были обнаружены  $^{51}\text{Cr}$ ,  $^{59}\text{Fe}$  и  $^{60}\text{Co}$ , с активностями 24, 0,51 и 3,8 Бк/г соответственно. Указанные РН образуются в результате реакций захвата тепловых нейтронов. В наборе ключей, находившихся в сейфе бункера, индуцировался  $^{65}\text{Zn}$  с активностью 12 Бк/г. Они могут быть классифицированы как РАО с очень низкой активностью. У всех РН, кроме  $^{60}\text{Co}$ , период полураспада менее 250 дней и при выдержке в течение года их активность будет ниже предела перевода в нерадиоактивные отходы. Большой интерес представляет  $^{60}\text{Co}$ , у которого период полураспада 5,27 лет. При длительной работе циклотрона он будет накапливаться и потребуются длительная выдержка для выведения из состава РАО.

В работе [1] была проведена серия ядерных спектроскопических измерений для определения характера и степени протонной и нейтронной активации бункера исследовательского 17-МэВ циклотрона Scanditronix, выведенного из эксплуатации после 20-летней работы (суммарная наработка – 300 000 мкА·ч). Через неделю после вывода из эксплуатации в бетонной стене бункера были обнаружены радионуклиды  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{152}\text{Eu}$ ,  $^{40}\text{K}$ ,  $^{54}\text{Mn}$  и других. Однако их концентрации были <1 Бк/г, что ниже норм штата Айова, определяющих транспортировку и долговременную экологически безопасную утилизацию. Это обусловило их стандартное захоронение. При исследовании циклотрона через две недели после последнего запуска был выявлен ожидаемый набор коротко- и среднеживущих радионуклидов:  $^7\text{Be}$ ,  $^{22}\text{Na}$ ,  $^{24}\text{Na}$ ,  $^{48}\text{Sc}$ ,  $^{51}\text{Cr}$ ,  $^{52}\text{Mn}$ ,  $^{54}\text{Mn}$ ,  $^{56}\text{Co}$ ,  $^{57}\text{Co}$ ,  $^{58}\text{Co}$ ,  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{57}\text{Ni}$ ,  $^{59}\text{Fe}$ ,  $^{65}\text{Zn}$  с активностями от 2 до 1700 МБк. Последующие расчеты показали, что уровень активности снизится практически до фонового значения через 15 лет, при этом общая остаточная активность всего циклотрона упадет ниже 37 МБк (1 мКи).

Результаты исследований AVF циклотрона (Tohoku University, Япония), среднегодовое время работы которого составляло 1200 ч при токе пучка ~10 мкА, представлены в работе [4]. Через 2 месяца после последнего облучения была определена остаточная радиоактивность основных элементов циклотрона (дефлектора, диэлектрода, пластины заземления, блока ускорителя, ядра магнита) и бетонной стены хранилища циклотрона, которые были сильно активированы за 20 лет эксплуатации. Были обнаружены радиоизотопы  $^{65}\text{Zn}$  и  $^{60}\text{Co}$  в медных деталях,  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{58}\text{Co}$ ,  $^{51}\text{Cr}$  и  $^{54}\text{Mn}$  в нержавеющей стали и  $^{152}\text{Eu}$ ,  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{46}\text{Sc}$ ,  $^{54}\text{Mn}$  и  $^{22}\text{Na}$  в бетоне. Наибольшая активность РН наблюдалась в деталях дефлектора (устройство вывода пучка). Основными РН были  $^{65}\text{Zn}$  с активностью до 5030 Бк/г и  $^{60}\text{Co}$  с активностью до 3570 Бк/г. Активности  $^{54}\text{Mn}$  и  $^{22}\text{Na}$  существенно ниже (< 30 Бк/г) и обнаруживались не во всех точках дефлектора. Существенные активности  $^{58}\text{Co}$ ,  $^{56}\text{Co}$ ,  $^{54}\text{Mn}$ ,  $^{65}\text{Zn}$  и  $^{60}\text{Co}$  (до 900 Бк/г) были обнаружены в ускоряющем электроде и пластине заземления. В блоке ускорителя под воздействием вторичных нейтронов индуцировались следующие РН:  $^{60}\text{Co}$  (активность до 487 Бк/г),  $^{58}\text{Co}$  (до 66 Бк/г),  $^{51}\text{Cr}$  (до 263 Бк/г) и  $^{54}\text{Mn}$  (до 32 Бк/г). Основную долю

в остаточную активность циклотрона (44%) вносил  $^{60}\text{Co}$ . Через год после удаления циклотрона распределение мощности дозы в различных точках бункера варьировалось в пределах 0,3–1,2 мкЗв/ч, что почти на порядок выше естественного радиационного фона, однако ниже, чем фон, допустимый японским регулятором (1,8 мкЗв/ч). В бетоне удельные активности РН  $^{152}\text{Eu}$ ,  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{46}\text{Sc}$ ,  $^{54}\text{Mn}$  и  $^{22}\text{Na}$  варьировались в диапазоне 0,1–2 Бк/г. Радионуклиды  $^{152}\text{Eu}$ ,  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{46}\text{Sc}$  образуются в результате (n,  $\gamma$ )-реакций на тепловых нейтронах и имеют максимум распределения на глубине 10 см. Это хорошо согласуется с данными работы [5], приведенными выше.  $^{54}\text{Mn}$  и  $^{22}\text{Na}$  обусловлены (n, 2n)-реакциями на быстрых нейтронах, в связи с чем имеют спадающий характер распределения активности по глубине.

Проведенные исследования распределения активности позволяют оценить в реальных ситуациях как немедленные, так и отложенные затраты на вывод циклотронов из эксплуатации с учетом национального законодательства, цены на обращение с отходами, затраты на рабочую силу и оценить эффективность разных методов вывода из эксплуатации.

**Закключение.** Таким образом, в бетоне бункера циклотрона в результате (n,  $\gamma$ )-реакций на тепловых нейтронах образуются радионуклиды  $^{152}\text{Eu}$ ,  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{46}\text{Sc}$  с периодом полураспада от 2,6 до 14 лет и активностью 0,1–11 кБк/кг. Максимум их распределения обычно лежит на глубине 10–15 см. В деталях циклотрона и металлической инфраструктуре бункера основными радионуклидами являются  $^{54}\text{Mn}$ ,  $^{57}\text{Co}$ ,  $^{65}\text{Zn}$ . Вывод из эксплуатации ускорителей частиц можно рассматривать как техническую операцию без каких-либо особых трудностей. Относительно низкий уровень радиоактивности в деталях циклотрона и бетоне бункера позволяет использовать практические методы, аналогичные применяемым при техобслуживании и ремонте. Никаких усиленных защитных мер при выводе из эксплуатации не требуется, за исключением недопущения распространения активности во время демонтажных работ (например, использования взрывных технологий).

Однако следует учитывать, что количество РАО может быть значительным из-за активации больших объемов низкоактивных бетонных конструкций бункера. Кроме того, необходимо отметить, что затраты на вывод из эксплуатации ускорителей составляют от 50 до 100% сегодняшних инвестиционных затрат на подобные устройства. Этот факт обычно недооценивается пользователями ускорителей. В докладе European Organization for Nuclear Research отмечается, что проблемы вывода циклотронов из эксплуатации необходимо учитывать уже на этапе проектирования [6].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Consideration, measurements and logistics associated with low-energy cyclotron decommissioning / J. J. Sunderland [et al.] // 14<sup>th</sup> Intern. Workshop on Targetry and Target Chemistry. AIP Conf. Proc. – 2012. – V. 1509. – P. 16–20. – DOI: [10.1063/1.4773931](https://doi.org/10.1063/1.4773931).
2. Activation of air and concrete in medical isotope production facilities. / A. C. Dodd [et al.] // AIP Conference Proceedings. – 2017. – Vol. 1845. – DOI: [10.1063/1.4983537](https://doi.org/10.1063/1.4983537).
3. Study on the regulation improvement of domestic cyclotron decommissioning through the questionnaires on the current cyclotron operation status [Electronic resource] / Da-yeong Gwon [et al.] // Transactions of the Korean Nuclear Society Spring Meeting Jeju, Korea, May 18–19, 2017. – Mode of access: [www.kns.org/files/pre\\_paper/37/17S-309권다연.pdf](http://www.kns.org/files/pre_paper/37/17S-309권다연.pdf). – Date of access: 18.10.2022.
4. Measurements of residual radioactivity of machine elements and concrete on the cyclotron decommissioning / T. Shiomi [et al.] // J. Nuclear Science Technology. – March 2000. – S. 1. – P. 357–361.
5. Radiological and economic impact of decommissioning charged particle accelerators / M. Sonck [et al.] // IRPA-10: Proc. of the 10<sup>th</sup> intern. congress of the International Radiation Protection Association on harmonization of radiation, human life and the ecosystem, Hiroshima, 14–19 May 2000 / Japan Health Physics Society. – Hiroshima, 2000. – P. 1v.
6. Spinney, G. Thoughts on decommissioning the CERN synchrocyclotron [Electronic resource] / G. Spinney // Proc. of the 13<sup>th</sup> Intern. Conf. on Cyclotrons and their Applications / Vancouver, BC, Canada. – 1992. – P. 47–49. – Mode of access: <https://accelconf.web.cern.ch/c92/papers/i-07.pdf>. – Date of access: 18.10.2022.
7. Routine  $^{18}\text{F}$ -production with 180  $\mu\text{A}$  to 200  $\mu\text{A}$  target beam current on a GE PETtrace 800 Cyclotron / Eberl S. [et al.] // AIP Conference Proceedings. – 2012. – V. 1509. – P. 66–70. – DOI: [10.1063/1.4773942](https://doi.org/10.1063/1.4773942).
8. Бринкевич, С. Д. Активационные радионуклиды при облучении ниобиевой мишени на циклотроне Cyclone 18/9 НС / С. Д. Бринкевич, Д. И. Бринкевич, А. Н. Кийко // Ядерная физика и инжиниринг. – 2019. – Т. 10, № 6. – С. 574–580.
9. Пленки пиролитического графита, облученного ионами водорода  $\text{H}^+$  / С. А. Вабищевич [и др.] // Взаимодействие излучений с твердым телом : материалы 13-й Междунар. конф., Минск, 30 сент. – 3 окт. 2019 г. / Белорус. гос. ун-т ; редкол.: В. В. Углов (отв. ред.) [и др.]. – Минск, 2019. – С. 43–45.
10. Gamma-ray spectrometric characterization of waste activated target components in a PET cyclotron / P. Guarino [et al.] // Cyclotrons and Their Applications–2007: Eighteenth International Conference (01–05.10.2007). Giardini Naxos, Italy. – P. 295–297.
11. Долгоживущие радионуклиды в производстве 2- $^{18}\text{F}$ фтордезоксиглюкозы / Д. И. Бринкевич [и др.] // Медицинская физика. – 2018. – № 1(77). – С. 80–88.
12. Обращение с водными радиоактивными отходами при производстве радиофармпрепаратов на основе  $^{18}\text{F}$  / В. О. Крот [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2018. – № 4. – С. 128–134.

13. Бринкевич, Д. И. Активация воды контура охлаждения циклотрона Cyclone 18/9 HC при наработке  $^{18}\text{F}$  / Д. И. Бринкевич, А. Я. Малиборский, С. Д. Бринкевич // Ядерная физика и инжиниринг. – 2018. – Т. 9, № 4 – С. 404–410. – DOI: [10.1134/S2079562918040024](https://doi.org/10.1134/S2079562918040024).
14. Накопление радионуклидов в сменных деталях и водной мишени циклотрона / А. Н. Кийко [и др.] // Вестн. Полт. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2022. – № 4(38). – С. 69–80.
15. Biegała, M. Levels of exposure to ionizing radiation among the personnel engaged in cyclotron operation and the personnel engaged in the production of radiopharmaceuticals, based on radiation monitoring system / M. Biegała, T. Jakubowska // Radiation Protection Dosimetry. – 2020. – Vol. 189, iss. 1 – P. 56–62. – DOI: [10.1093/rpd/ncaa012](https://doi.org/10.1093/rpd/ncaa012).
16. Estimation of neutron production yields from  $\text{H}_2^{18}\text{O}$  as the  $^{18}\text{F}$ -production target bombarded by 18-MeV protons / M. Bakhtiari [et al.] // Radiation Physics and Chemistry. – 2020. – Vol. 177, iss. 14. – P. 109120. – DOI: [10.1016/j.radphyschem.2020.109120](https://doi.org/10.1016/j.radphyschem.2020.109120).
17. Activation studies of a PET cyclotron bunker / S. Vichi [et al.] // Radiation Physics and Chemistry. – 2019. – Vol. 161. – P. 48–54. – DOI: [10.1016/j.radphyschem.2019.04.001](https://doi.org/10.1016/j.radphyschem.2019.04.001).
18. Neutron transport calculation for Activation Evaluation for Decommissioning of PET cyclotron Facility / F. Nobuhara [et al.] // EPJ Web of Conferences. – 2017. – Vol. 153, 04007. – DOI: [10.1051/epjconf/201715304007](https://doi.org/10.1051/epjconf/201715304007).

## REFERENCES

1. Sunderland, J. J., Erdahl, C. E., Bender, B. R., Sensoy, L., & Watkins, G. L. (2012). Consideration, measurements and logistics associated with low-energy cyclotron decommissioning. *14<sup>th</sup> Intern. Workshop on Targetry and Target Chemistry. AIP Conf. Proc. V. 1509*. (16–20). DOI: [10.1063/1.4773931](https://doi.org/10.1063/1.4773931).
2. Dodd, A. C., Shackleton, R. J., Carr, D. A., & Ismail, A. (2017). Activation of air and concrete in medical isotope production facilities. *AIP Conference Proceedings: Vol. 1845*. DOI: [10.1063/1.4983537](https://doi.org/10.1063/1.4983537).
3. Da-yeong Gwon, Yong-min Kim, Kyu-young Jeong, Nam-suk Jung, & Hee-seock Lee. (2017). Study on the regulation improvement of domestic cyclotron decommissioning through the questionnaires on the current cyclotron operation status. In *Transactions of the Korean Nuclear Society Spring Meeting Jeju*. [www.kns.org/files/pre\\_paper/37/17S-309권다연.pdf](http://www.kns.org/files/pre_paper/37/17S-309권다연.pdf).
4. Shiomi, T., Azeyanagi Y., Yamadera, A., & Nakamura, T. (2000). Measurements of residual radioactivity of machine elements and concrete on the cyclotron decommissioning. *J. Nuclear Science Technology*, (1), 357–361.
5. Sonck, M., Buls, N., Hermanne, A., & Eggermont, G. (2000). Radiological and economic impact of decommissioning charged particle accelerators. In *IRPA-10: Proc. of the 10<sup>th</sup> intern. congress of the International Radiation Protection Association on harmonization of radiation, human life and the ecosystem* (1v). Hiroshima, Japan.
6. Spinney, G. (1992) Thoughts on decommissioning the CERN synchrocyclotron. In *Proc. of the 13<sup>th</sup> Intern. Conf. on Cyclotrons and their Applications* (47–49). Vancouver, BC, Canada. <https://accelconf.web.cern.ch/c92/papers/i-07.pdf>.
7. Eberl, S., Eriksson, T., Svedberg, O., Norling, J., Henderson, D., Lam, P., ... Fulham, M. (2012). Routine  $^{18}\text{F}$ -production with 180  $\mu\text{A}$  to 200  $\mu\text{A}$  target beam current on a GE PETtrace 800 Cyclotron. In *AIP Conf. Proc.: Vol. 1509* (66–70). DOI: [10.1063/1.4773942](https://doi.org/10.1063/1.4773942).
8. Brinkevich, S. D., Brinkevich, D. I., & Kiiko, A. N. (2020). Activation radionuclides in the process of irradiation of a niobium target at the Cyclone 18/9 HC cyclotron. *Physics of atomic nuclei*, 12(83), 1732–1737.
9. Vabishchevich, S. A., Vabishchevich, N. V., Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., & Nevzorov, D. I. (2019). Plenki piroliticheskogo grafitá, obluchennogo ionami vodoroda N<sup>+</sup> [Pyrolytic Graphite Films Irradiation with H<sup>+</sup> Ions]. In V. V. Uglov (Eds.), *Vzaimodeistvie izluchenií s tverdyim telom [Interaction of Radiation with Solids]* (43–45). Minsk: Publ. BSU. (In Russ., abstr. in Engl.).
10. Guarino, P., Rizzo, S., Tomarchio, E., & Greco, D. (2007). Gamma-ray spectrometric characterization of waste activated target components in a PET cyclotron. *Cyclotrons and Their Applications–2007* (295–297). Giardini Naxos, Italy.
11. Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., Baranovskii, O. A., Chizh, G. V., & Ivanyukovich, A. A. (2018). Dolgozhivushchie radionuklidy v proizvodstve 2-[ $^{18}\text{F}$ ]ftordezoksiglyukozy [Long-lived radionuclides in the production of 2-[ $^{18}\text{F}$ ]fluorodeoxyglucose]. *Meditsinskaya fizika [Medical physics]*, 1(77), 80–88. (In Russ., abstr. in Engl.).
12. Krot, V. O., Tugay, O. V., Brinkevich, D. I., Brinkevich, S. D., Chizh, G. V., & Vabishchevich, S. A. (2018). Obrashchenie s vodnymi radioaktivnymi otkhodami pri proizvodstve radiofarmpreparatov na osnove  $^{18}\text{F}$  [Management of Aqueous Radioactive Wastes in the Production of  $^{18}\text{F}$ -Labeled Radiopharmaceuticals]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (4), 128–134. (In Russ., abstr. in Engl.).
13. Brinkevich, D. I., Maliborskij, A. Ya., & Brinkevich, S. D. Aktivatsiya vody kontura okhlazhdeniya tsiklotrona Cyclone 18/9 HC pri narabotke  $^{18}\text{F}$  [Activation of cooling water for cyclotron Cyclone 18/9 HC at  $^{18}\text{F}$  production]. *Yadernaya fizika i inzhiniring [Nuclear physics and engineering]*, 9(4), 404–410. DOI: [10.1134/S2079562918040024](https://doi.org/10.1134/S2079562918040024). (In Russ., abstr. in Engl.).
14. Kijko, A.N., Vabishchevich, S. A., Vabishchevich, N. V., & Brinkevich, D. I. (2022). Nakoplenie radionuklidov v smennykh detal'yakh i vodnoi misheni tsiklotrona [Accumulation of radionuclides in replaceable parts and water target cyclotron]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, 4(38), 69–80. (In Russ., abstr. in Engl.).
15. Biegała, M., & Jakubowska, T. (2020). Levels of exposure to ionizing radiation among the personnel engaged in cyclotron operation and the personnel engaged in the production of radiopharmaceuticals, based on radiation monitoring system. *Radiation Protection Dosimetry*, 189(1), 56–62. DOI: [10.1093/rpd/ncaa012](https://doi.org/10.1093/rpd/ncaa012).

16. Bakhtiari, M., Mokhtari Oranj, L., Jung, N.-S., Lee, A., & Lee, H.-S. (2020). Estimation of neutron production yields from  $H_2^{18}O$  as the  $^{18}F$ -production target bombarded by 18-MeV protons. *Radiation Physics and Chemistry*, 177(14), R. 109120. DOI: [10.1016/j.radphyschem.2020.109120](https://doi.org/10.1016/j.radphyschem.2020.109120).
17. Vichi, S., Zagni, F., Cicoria, G., Infantino, A., Riga, S., Zeller, M., ... Mostacci, D. (2019). Activation studies of a PET cyclotron bunker. *Radiation Physics and Chemistry*, (161), 48–54. DOI: [10.1016/j.radphyschem.2019.04.001](https://doi.org/10.1016/j.radphyschem.2019.04.001).
18. Nobuhara, F., Kuroyanagi, M., Masumoto, K., Nakamura, H., Toyoda, A. & Takahashi, K. (2017). Neutron transport calculation for Activation Evaluation for Decommissioning of PET cyclotron Facility. *EPJ Web of Conferences*, (153), 04007. DOI: [10.1051/epjconf/201715304007](https://doi.org/10.1051/epjconf/201715304007).

Поступила 07.09.2022

## RADIOLOGICAL ASPECTS OF CYCLOTRON DECOMMISSIONING

**A. KIYKO**

*(Belarusian State Institute of Metrology, Minsk);*

**S. VABISHCHEVICH, N. VABISHCHEVICH**

*(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk);*

**D. BRINKEVICH**

*(Belarusian State University, Minsk)*

*In this paper, the radiological and economic issues of dismantling cyclotrons of various types, the accumulation of radionuclides in the details of the cyclotron itself, and the activation of the walls of the cyclotron bunker due to the capture of secondary neutrons are considered. As a result of  $(n,\gamma)$ -reactions on thermal neutrons, radionuclides  $^{152}Eu$ ,  $^{60}Co$ ,  $^{46}Sc$  are formed in the concrete of the cyclotron bunker with a half-life of 2,6 to 14 years and an activity of 0,1–11 kBq/kg. The maximum of their distribution usually lies at a depth of 10–15 cm. In the details of the cyclotron and the metal infrastructure of the bunker, the main radionuclides are  $^{54}Mn$ ,  $^{57}Co$ ,  $^{65}Zn$ . The analysis of the accumulation of long-lived radionuclides is of great importance for the design of new cyclotron facilities in order to ensure radiation safety and storage of radioactive waste and, as a result, to minimize the radiation exposure of personnel during the dismantling of the cyclotron.*

**Keywords:** *cyclotron, decommissioning, radionuclides, neutron activation of concrete.*



УДК 657.2: 336.645.3(043.3)

DOI 10.52928/2070-1624-2022-39-11-65-79

ЛОКАЛИЗАЦИЯ АТОМОВ АЗОТА В СТРУКТУРАХ Si-SiO<sub>2</sub>

*д-р физ.-мат. наук, проф. В. Б. ОДЖАЕВ, канд. физ.-мат. наук, доц. В. С. ПРОСОЛОВИЧ*  
(Белорусский государственный университет, Минск);  
*канд. физ.-мат. наук, доц. А. Н. ПЕТЛИЦКИЙ, канд. техн. наук, доц. Н. С. КОВАЛЬЧУК,*  
*канд. физ.-мат. наук, доц. Я. А. СОЛОВЬЕВ, Д. В. ЖИГУЛИН, Д. В. ШЕСТОВСКИЙ*  
(ОАО «ИНТЕГРАЛ» – управляющая компания холдинга «ИНТЕГРАЛ», Минск)

*Исследованы методом времяпролетной масс-спектропии вторичных ионов подзатворные оксиды кремния, азотированные методом ионной имплантации (ИИ) либо высокотемпературным отжигом в атмосфере N<sub>2</sub>. ИИ азота производилась энергией 40 кэВ дозами  $2,5 \times 10^{14}$  и  $1 \times 10^{15}$  см<sup>-2</sup>. Отжиг проводился при температуре 1200 °С в течение 2 ч либо при 1100 °С в течение 30 мин. Установлено, что на границе раздела Si-SiO<sub>2</sub> после проведения азотирования методом ИИ либо высокотемпературным отжигом наблюдается максимум с высокой концентрацией атомов азота. Показано, что после проведения ИИ азота дозой  $2,5 \times 10^{14}$  см<sup>-2</sup> через защитный SiO<sub>2</sub> толщиной 23 нм и быстрой термообработки (БТО) при 1000 °С в течение 15 с на границе раздела Si-SiO<sub>2</sub> наблюдается основной максимум распределения азота ( $1 \times 10^{19}$  см<sup>-3</sup>), что указывает на наличие концентрации насыщения границы раздела Si-SiO<sub>2</sub>.*

*Предложена зарядовая одномерная модель Ферми для описания ускоренной диффузии атомов азота. Основным механизмом является диффузия междоузельных атомов, которая может протекать с предварительным вытеснением узловых атомов азота собственными атомами внедрения. Показано, что атомы азота могут выступать в качестве центров аннигиляции точечных дефектов в кристаллической решетке кремния.*

**Ключевые слова:** азотирование, ионная имплантация, высокотемпературный отжиг, подзатворный оксид кремния, граница раздела Si-SiO<sub>2</sub>, концентрация насыщения, диффузия азота.

**Введение.** Рост конкуренции на рынке электронных компонентов предъявляет все более высокие требования к эксплуатационным параметрам и надежности силовых МОП-транзисторов, ключевым элементом которых является подзатворный оксид кремния [1; 2]. Наличие структурных дефектов как на границе раздела Si-SiO<sub>2</sub>, так и в оксиде кремния сопровождается образованием соответствующих им локализованных зарядовых центров, что оказывает негативное влияние на эксплуатационные параметры и надежность МОП-транзисторов [2; 3]. Азотирование тонких (7–12 нм) и ультратонких (2–5 нм) подзатворных оксидов кремния и их границы раздела с Si методами нитрирования в атмосфере с добавлением N<sub>2</sub>O, NO либо NH<sub>3</sub> приводит к снижению концентрации зарядовых центров и увеличению электрической прочности [4; 5]. Недостатками применения таких процессов являются образование большого количества ловушек на границе раздела Si-SiO<sub>2</sub> из-за наличия атомов водорода (в случае азотирования NH<sub>3</sub>), а также сложности при введении нужного количества атомов азота в оксид кремния из газовой фазы. Наиболее перспективным является азотирование SiO<sub>2</sub> затвора и его границы с кремнием методом ионной имплантации, которое обладает хорошей воспроизводимостью, а также возможностью прецизионного и локального введения заданного количества атомов азота. Ввиду низкой стоимости и широкого практического применения N<sub>2</sub> в высокотехнологичных отраслях производства также представляет интерес азотирование подзатворного SiO<sub>2</sub> силовых МОП-транзисторов в атмосфере N<sub>2</sub>.

В [6] предположено, что увеличение заряда пробоя подзатворного оксида и снижение тока утечки затвора силовых ДМОП-транзисторов с диэлектриком затвора, азотированным методом ИИ, может быть обусловлено пассивацией дефектов на границе раздела Si-SiO<sub>2</sub> вследствие диффузии в эту область атомов азота. В результате на границе раздела происходит компенсация оборванных связей, образовавшихся из-за несоответствий кристаллических решеток Si и SiO<sub>2</sub>, и формирование прочных ковалентных связей в кремниевых структурах с атомами азота. Широкое распространение получило легирование азотом кремния, получаемого методом бестигельной зонной плавки, с целью подавления ростовых микродефектов [7]. Однако невыясненными остаются механизмы диффузии атомов азота к границе раздела Si-SiO<sub>2</sub> и механизмы подавления остаточного дефектообразования с их участием. Это обуславливает актуальность проведения исследований локализации атомов азота в системе подзатворный SiO<sub>2</sub> – кремний.

**Методика эксперимента.** Пластины монокристаллического кремния ориентацией (100) *p*-типа проводимости с удельным сопротивлением ( $\rho$ ) 0,005 Ом×см либо 12 Ом×см с основной легирующей примесью бора применялись в качестве исходных образцов. В таблице приведены режимы технологических операций обработки исследуемых образцов. На пластинах изначально формировался SiO<sub>2</sub> толщиной 100 нм для ликвидации механически-нарушенного поверхностного слоя Si. Затем оксид кремния полностью удалялся

жидкостным травлением и производилась химическая очистка поверхности Si по методике [8], разработанной Radio Corporation of America (RCA).

Таблица. – Этапы обработки исследуемых образцов

№ образца	$\rho$ , Ом·см	Толщина защитного SiO <sub>2</sub> , нм	Доза ИИ азота с энергией 40 кэВ, см <sup>-2</sup>	Температура БТО (длительность 15 с), °С	Снятие защитного SiO <sub>2</sub>	Толщина подзатворного оксида, нм	Отжиг в атмосфере N <sub>2</sub> с добавлением O <sub>2</sub>	
							Температура, °С	Длительность, мин
2	0,005	23	$2,5 \cdot 10^{14}$	1000	–	–	–	–
3	0,005	23	$2,5 \cdot 10^{14}$	1000	+	44	–	–
7	12	–	–	–	+	44	1200	120
8	12	–	–	–	+	44	1100	30
10	0,005	23	$1,0 \cdot 10^{15}$	1000	+	44	–	–

*Примечание.* Номера образцов указаны в соответствии с их порядком при запуске в технологический процесс.

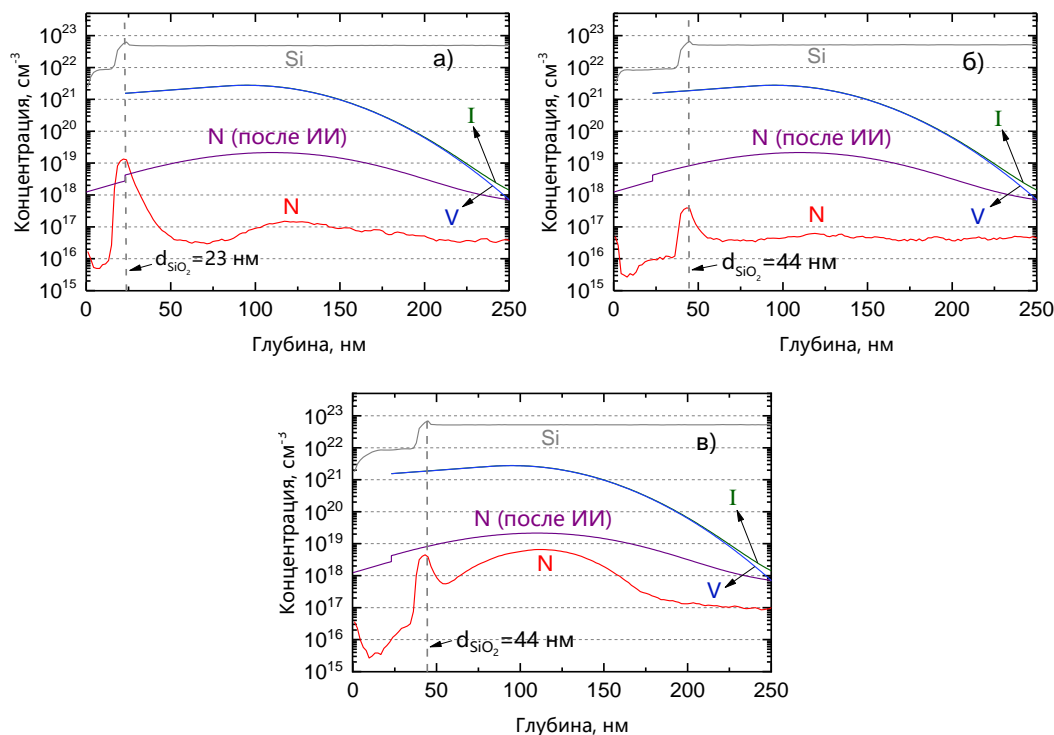
Для первой группы образцов (№ 2, 3, 10) защитный оксид кремния толщиной ~23 нм формировался методом пирогенного окисления при температуре 850 °С. Имплантация ионов азота энергией 40 кэВ дозами имплантации  $2,5 \cdot 10^{14}$  см<sup>-2</sup> (образцы № 2 и 3) или  $1 \cdot 10^{15}$  см<sup>-2</sup> (образец № 10) проводилась через защитный SiO<sub>2</sub>. После химической очистки методом RCA пластины отжигались быстрой термообработкой при температуре 1000 °С либо 1050 °С длительностью 15 с в атмосфере воздуха. Полное удаление защитного оксида кремния жидкостным травлением и проведение химической очистки поверхности Si методом RCA производилось для образцов № 2 и 10. Потом на поверхности данных образцов пирогенным окислением при температуре 850 °С выращивался оксид кремния толщиной ~44 нм.

Для второй группы образцов (№ 7 и 8) формировался термический оксид кремния толщиной ~44 нм методом пирогенного окисления при температуре 850 °С. Затем данные образцы подвергались высокотемпературному отжигу при 1200 °С в течение 2 ч либо при 1100 °С 30 мин, обе термообработки проводились в атмосфере N<sub>2</sub> с добавлением малого количества O<sub>2</sub>.

Моделирование процесса ИИ производилось с применением средства аппаратного проектирования Sentaurus 2017 (Synopsys, США) методом Монте-Карло. Профили распределения концентрации примесей по глубине структуры диэлектрик – кремний определялись методом времяпролетной масс-спектропии вторичных ионов (time of flight secondary mass spectroscopy, TOF-SIMS) системой TOF.SIMS 5 (IONTOF, Германия) с чувствительностью  $5 \cdot 10^{15}$  –  $1 \cdot 10^{16}$  ат/см<sup>3</sup>. Травление образца производилось потоком ионов Cs величиной 100 нА, ускоряемых напряжением 2 кэВ. Измерение объемной концентрации примесей производилось в импульсном режиме с временем цикла 50–100 мкс. В качестве первичных применялись ионы Bi, ускоряемые напряжением 30 кэВ. Расположение границы раздела Si–SiO<sub>2</sub> определялось по профилю распределения концентрации изотопов кремния <sup>30</sup>Si.

**Основная часть.** В ходе проведения регистрации спектров методом TOF-SIMS наблюдалась низкая чувствительность метода к ионам азота, однако наблюдалась высокая чувствительность к отрицательно заряженным комплексам SiN<sup>-</sup>. На рисунке 1, а, б приведены профили распределения концентрации атомов азота в структурах Si–SiO<sub>2</sub> на промежуточном и завершающем этапах процесса азотирования методом ИИ дозой  $2,5 \cdot 10^{14}$  см<sup>-2</sup>. Также приведены профили распределения имплантированных атомов азота и постимплантационных собственных дефектов кристаллической решетки кремния.

Для образца № 2, имплантированного ионами азота дозой  $2,5 \cdot 10^{14}$  см<sup>-2</sup>, после проведения процесса БТО при температуре 1000 °С в течение 15 с (см. рисунок 1, а) наблюдается максимум концентрации атомов азота на границе раздела Si–SiO<sub>2</sub>. Применение БТО после ИИ обусловлено необходимостью отжига постимплантационных дефектов в Si с целью последующего выращивания SiO<sub>2</sub> высокого качества на имплантированном кремнии. Наличие максимума распределения атомов азота с высокой концентрацией на границе раздела Si–SiO<sub>2</sub> после проведения БТО указывает на процессы ускоренной диффузии азота в направлении к границе раздела. Еще один максимум концентрации атомов азота, совпадающий с максимумом профиля распределения имплантированных атомов, наблюдался на глубине ~120 нм структуры Si–SiO<sub>2</sub>. На основе анализа профилей распределения азота (см. рисунок 1, а) можно предположить наличие концентрации насыщения на границе раздела Si–SiO<sub>2</sub> (определяющейся структурой веществ этой границы раздела). Так, для образца № 2 на границе раздела Si–SiO<sub>2</sub> объемная концентрация атомов азота составляет  $1 \cdot 10^{19}$  см<sup>-3</sup>.



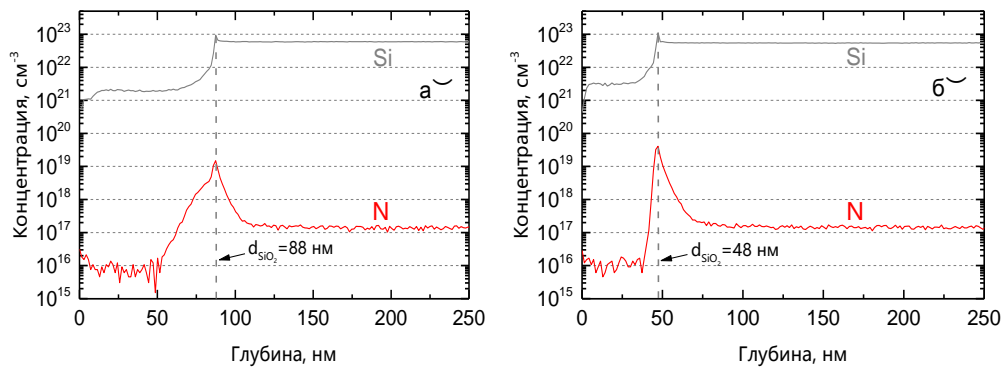
**Рисунок 1. – Профили распределения концентрации атомов азота (N) в системе Si–SiO<sub>2</sub> для образцов № 2 (а), 3 (б), 10 (в) с азотированием системы методом ИИ (режимы получения образцов указаны в таблице). Профили распределения концентрации междуузлий (I), вакансий (V) и атомов азота (N после ИИ) получены путем моделирования ИИ системы Si–SiO<sub>2</sub>**

После снятия защитного SiO<sub>2</sub> и выращивания оксида кремния толщиной 44 нм наблюдается снижение концентрации азота в объеме исследуемой части структуры Si–SiO<sub>2</sub> вследствие удаления части атомов азота вместе с защитным оксидом кремния толщиной 23 нм (см. рисунок 1, б), а также вследствие испарения с поверхности кремния части атомов азота в процессе отжига при формировании SiO<sub>2</sub>. Испарение атомов азота с поверхности Si в процессе термообработки, отмеченное ранее в работе [6], определяет снижение концентрации азота на границе раздела Si–SiO<sub>2</sub> и практически полную ликвидацию максимума на глубине ~120 нм. Из-за снижения общей концентрации атомов азота в объеме на границе раздела Si–SiO<sub>2</sub> концентрация насыщения не достигается.

Для образца № 10, имплантированного ионами азота дозой  $1 \times 10^{15} \text{ см}^{-2}$ , после БТО, снятия защитного оксида и формирования оксида кремния толщиной 44 нм (см. рисунок 1, в) наблюдается максимум распределения атомов азота также, как и для образцов № 2 и 3, на границе раздела Si–SiO<sub>2</sub>. Однако объемная концентрация в максимуме на границе Si–SiO<sub>2</sub> составила  $5 \times 10^{18} \text{ см}^{-2}$ , что в 2 раза меньше, чем для образца № 2. При этом для образца № 10 основной максимум с наибольшей концентрацией азота расположен в максимуме распределения имплантированных атомов. После проведения БТО при 1050 °C и выращивания оксида кремния максимум профиля азота не смещается в объем Si либо к границе раздела Si–SiO<sub>2</sub>, что нехарактерно для примесных атомов в полупроводниках.

Распределение концентрации N на рисунке 1, в показывает, что большая часть атомов азота, находящихся на глубине проецированного пробега, не диффундирует при проведении термообработок. Это может быть связано со взаимодействием атомов азота с постимплантационными дефектами в Si, не отожженными в процессе БТО и при последующей термообработке. В данном случае реакционная поверхность сформировавшихся остаточных радиационных дефектов, образовавшихся при ИИ, будет превышать количество структурных несовершенств на границе раздела Si–SiO<sub>2</sub>, вследствие чего большая часть атомов азота будет локализована в ионно-нарушенной области. В [9] показано, что при ИИ азота дозой  $5 \times 10^{14} \text{ см}^{-2}$  в кремнии происходит образование сложных комплексов дефектов (в частности, дислокационных петель), которые впоследствии не отжигаются. Остаточные концентрации азота в объеме Si также обнаруживались в работе [10] после ИИ азота энергией 50 кэВ дозой  $5 \times 10^{15} \text{ см}^{-2}$  и проведения термообработок при 1000 °C 1–2 ч. В рассматриваемых случаях атомы азота преимущественно взаимодействуют с находящимися вблизи структурными дефектами кремния и с меньшей вероятностью локализуются на границе раздела. Этот факт указывает на возможность образования ковалентных связей атомов азота с некомпенсированными связями размерных дефектов в кремнии, что является принципиально новым.

На рисунке 2 приведены профили распределения концентрации атомов азота в пластинах кремния с SiO<sub>2</sub> толщиной 44 нм после высокотемпературного отжига в атмосфере N<sub>2</sub> с добавлением малого количества кислорода. Наличие областей с постоянной концентрацией азота обусловлено особенностями регистрации комплексов SiN<sup>-</sup> методом TOF-SIMS, концентрация азота в этих областях меньше предела обнаружения. После проведения термообработки для образцов № 7 и 8 наблюдается рост толщины оксида, однако, несмотря на движение границы раздела в объем кремния, происходит и движение максимума распределения азота и его локализация на границе раздела Si–SiO<sub>2</sub>, что подтверждает приведенные выше рассуждения. В процессе высокотемпературных обработок в атмосфере N<sub>2</sub> с добавлением небольшого количества O<sub>2</sub> при 1100–1200 °С реакция взаимодействия кремния с кислородом является приоритетной, параллельно протекает также реакция азотирования. Атомы азота, проникая в слой сформировавшегося структурированного оксида, не находят энергетически выгодного положения, достигая границы раздела, встраиваются в дефекты структуры переходного слоя Si–SiO<sub>2</sub>. Наличие несовершенств из-за несоответствий периодов решеток Si и SiO<sub>2</sub> позволяет атомам азота локализовываться на границе раздела.



**Рисунок 2. – Профили распределения концентрации атомов азота (N) в системе Si–SiO<sub>2</sub> для образцов № 7 (а), 8 (б) с азотированием оксида кремния высокотемпературным отжигом (режимы получения образцов указаны в таблице)**

Рассмотрим процессы диффузии атомов азота и их локализации на границе раздела Si–SiO<sub>2</sub> на основе зарядовой одномерной модели Ферми. Процесс миграции атомов азота к границе раздела Si–SiO<sub>2</sub> можно представить как результат многочисленных реакций:



$$I + I \leftrightarrow \text{Clast}_{I_2}; \quad (12)$$

$$V + V \leftrightarrow \text{Clast}_{V_2}; \quad (13)$$

$$\text{Clast}_{I_n} + I \leftrightarrow \text{Clast}_{I_{n+1}} \rightarrow 3 \leq n + 1 \leq 4; \quad (14)$$

$$\text{Clast}_{I_n} + V \leftrightarrow \text{Clast}_{I_{n-1}} \rightarrow 2 \leq n \leq 4; \quad (15)$$

$$\text{Clast}_{I_2} + I_2 \leftrightarrow \text{Clast}_{I_4}; \quad (16)$$

$$\text{Clast}_{I_4} + V_2 \leftrightarrow \text{Clast}_{I_{n2}}; \quad (17)$$

$$\text{Clast}_{I_3} + V_2 \leftrightarrow I; \quad (18)$$

$$\text{Clast}_{I_4} + I \rightarrow \text{Clast}_{(311)}; \quad (19)$$

$$14I \leftrightarrow \text{Clast}_{(311)}; \quad (20)$$

$$7I_2 \leftrightarrow \text{Clast}_{(311)}; \quad (21)$$

$$\text{Clast}_{V_n} + V \leftrightarrow \text{Clast}_{V_{n+1}}, \quad n \geq 2; \quad (22)$$

$$\text{Clast}_{V_n} + V_2 \leftrightarrow \text{Clast}_{V_{n+2}}, \quad n \geq 2; \quad (23)$$

$$\text{Clast}_{V_n} + I_2 \leftrightarrow \text{Clast}_{V_{n-2}}, \quad n \geq 4; \quad (24)$$

$$\text{Clast}_{V_3} - V_2 \leftrightarrow V; \quad (25)$$

$$\text{Clast}_{I_4} + I_2 \rightarrow \text{Clast}_{(311)}, \quad (26)$$

где  $Ns^i$  – атом азота, находящийся в узле решетки (атом замещения);  
 $Ni^k$  – атом азота, находящийся в междоузельном положении (атом внедрения);  
 $NV$  – пара атома азота с вакансией;  
 $V^m$  – вакансия в кристаллической решетке кремния;  
 $I^j$  – собственный атом кремния, находящийся в междоузельном положении;  
 $V_2^l$  – дивакансия;  
 $I_2^p$  – комплекс дефектов, состоящий из двух междоузлий;  
 $\text{Clast}_{V_n}$  – вакансионные кластеры;  
 $\text{Clast}_{I_n}$  – кластеры (междоузлий),  
 $\text{Clast}_{(311)}$  –  $\{311\}$  дефект;  
 $i, j, k, m, s, l, h, f, g, t, u, t, p$  – показатели зарядового состояния,  $n \in N$ .

В зависимости от положения уровня Ферми реагенты могут находиться в зарядовых состояниях  $0, \pm 1, \pm 2$ , маловероятным является наличие зарядов  $\pm 3$  и более [11; 12]. В кремнии атомы азота, точечные дефекты и их простейшие комплексы могут быть отрицательно заряженными, нейтральными и положительно заряженными [12]. Также при изменении положения уровня Ферми возможным является перезарядка реагентов и продуктов реакции (6)–(10). Для более сложных комплексов дефектов (кластеров) различные зарядовые состояния не приводятся ввиду отсутствия достаточной информации о постоянных кластеризации для них.

Рассмотрим процессы, протекающие на микроскопическом уровне, согласно уравнениям реакций более подробно. Один из подходов к описанию процессов микромодели предполагает рассмотрение диффузии атомов примеси как самостоятельно, так и совместно с собственными дефектами кристаллической решетки, и лежит в основе большинства программных средств моделирования технологических процессов. Вопрос о внесении большего вклада вакансий или междоузлий в скорость диффузии атомов азота может быть решен с применением анализа энергий активации вакансионного и междоузельного равновесных процессов.

Возможным является как образование (2), так и распад  $NV$ -комплексов (4). Однако образование  $NV$ -пар является затруднительным из-за высокого энергетического барьера реакции взаимодействия атома азота с вакансией (4,4 эВ) [13], что делает протекание реакции (2) маловероятным. Согласно [14] основным является междоузельный механизм диффузии азота, в основе которого лежит реакция вытеснения атома азота собственным атомом кремния в междоузельное положение. О высокой подвижности междоузельных атомов кремния и их способности взаимодействовать с примесями замещения, вытесняя их в междоузлия, говорится и в работах [15–17]. Так, в процессе термообработок атомы замещения, ковалентные радиусы которых отличаются от радиуса атома решетки, смещаются по механизму Воткинса из узлов решетки междоузельными атомами Si. Находясь в узлах кристаллической решетки, атомы азота в кремнии, вследствие существенной разницы радиусов и энергии связи N–Si существенно большей, чем между атомами Si [6], вызывают смещения ближних собственных узловых атомов к атомам азота внедрения. Возникающие таким образом деформационные напряжения изменяют параметр решетки и способствуют тому, что атомы азота, находящиеся в узлах кристаллической решетки, вытесняются междоузельными атомами Si, в результате чего образуются  $N_i$ . В работе [18] показано, что азот, находящийся в узлах в нейтральном зарядовом состоянии, при температуре 160 °С легко вытесняется в междоузельное положение. Исследования в [19; 20] показали, что диффузия атомов бора существенно подавляется в присутствии имплантированных атомов азота. С учетом того, что диффузия бора протекает по механизму связанной диффузии с образованием пар В–I, можно предположить, что часть междоузлий уже используется атомами азота для процессов парной диффузии, что затрудняет парную диффузию примесей бора. В соответствии с этим основным является механизм диффузии междоузельных атомов азота с высокой подвижностью с первоначальным протеканием реакции вытеснения (1). Атомы азота могут продолжить диффузию к границе раздела Si–SiO<sub>2</sub> по междоузельному каналу, но могут быть захвачены вакансией при их достаточном количестве (3). Реакции (3), (4) протекают с образованием замещающих атомов азота, которые сами по себе неподвижны.

Узловые атомы азота, взаимодействуя с междоузельными атомами кремния по механизму Воткинса (1) с последующим захватом  $N_i$  вакансией (3), являются катализаторами процесса ликвидации точечных дефектов, что позволяет уменьшить количество остаточных протяженных дефектов (действует механизм подавления остаточного дефектообразования атомами азота). Согласно данным, приведенным в [14], при дозах имплантации  $N$  менее  $1 \times 10^{13}$  см<sup>-2</sup> атомы азота находятся в междоузельном положении и не проявляют электрическую активность. Для доз имплантации от  $3 \times 10^{13}$  до  $5 \times 10^{14}$  см<sup>-2</sup> около 1% атомов азота находятся в узлах решетки кремния и образуют донорные уровни  $0,017 \pm 0,002$  эВ в запрещенной зоне Si.

В настоящий момент исследования ИИ азота в кремнии с помощью методов ядерной физики и ИК-спектроскопии (доля узлового кремния – от 1% до 4%), касающиеся энергетического положения уровней узлового азота в запрещенной зоне кремния, разноречивы [15; 16]. Согласно [17; 18] в условиях равновесия атомы азота слабо растворяются в кремнии, но с возрастанием концентрации радиационных дефектов могут переходить в узлы кристаллической решетки. Так, например, при дозе ИИ  $4 \times 10^{14}$  см<sup>-2</sup> объемная концентрация атомов азота в узлах решетки составила  $6 \times 10^{18}$  см<sup>-3</sup> при полной концентрации атомов азота  $1 \times 10^{19}$  см<sup>-3</sup>. Для дозы ИИ азота  $4 \times 10^{15}$  см<sup>-2</sup> концентрация узловых атомов азота составила  $3 \times 10^{19}$  см<sup>-3</sup> при полной концентрации  $1 \times 10^{20}$  см<sup>-3</sup>. В соответствии с этим в нашем случае применение доз ИИ порядка  $10^{14}$  см<sup>-2</sup> –  $10^{15}$  см<sup>-2</sup> позволяет предположить, что часть атомов азота после процессов имплантации находится в узловом положении, находясь в котором они неподвижны, другая часть находится в междоузлиях. При проведении последующих термообработок атомы азота, находящиеся в междоузлиях, без реакции замещения могут сразу совершать длиннопробежную диффузию по междоузельному каналу.

Процессы ионной имплантации протекают с образованием вдоль трека внедряемых атомов комплексов дефектов, содержащих вакансии [21]. В процессе отжига вакансии образуют ди-, три-, квадровкакансии – небольшие кластеры (13, 22, 23). Такое же поведение характерно и для междоузлий (12, 14, 16, 19–21) [22]. Именно небольшие кластеры являются хранилищами доступных для кинетических процессов междоузлий и вакансий. Они легко распадаются при отжиге с высвобождением междоузлий, которые принимают участие в реакции вытеснения по Воткинсу [23]. В ионно-имплантированных слоях диффузия атомов азота будет ускоряться ввиду наличия большого количества неравновесных междоузельных атомов кремния. Возможно протекание следующих процессов: перезарядка (6–10), аннигиляция собственных точечных дефектов (5), а также аннигиляция дивакансий и комплексов из двух междоузлий (11), аннигиляция с участием противоположного типа дефектов, входящих в кластеры (15, 17, 18, 24).

Большая часть точечных постимплантационных дефектов отжигается в процессе термообработки. Энергия активации процесса ликвидации дефектов различна и определяется структурой дефектов. Возможно формирование остаточных протяженных или плоскостных дефектов (дислокационные петли, стержнеобразные дефекты (19, 20, 21, 26), которые остаются устойчивыми к процессам отжига. В [24] предположено, что дислокационные петли и {311}-дефекты контролируют уровень избыточных междоузлий в процессе отжига и являются продуктами их кластеризации. Исследование эволюции остаточных нарушений проводилось в работах [25; 26]. Термообработка в течение 5 мин при 800 °С приводила к образованию {311}-дефектов, при дальнейшем отжиге возникали дислокационные петли при одновременном растворении

{311}-дефектов [25]. Авторы [26] считают, что материалом для образования дислокационных петель служат собственные междоузлия, освобождающиеся при распаде стержнеобразных {311}-дефектов. Значительная часть радиационных дефектов может перестраиваться в процессе отжига в остаточные протяженные дефекты – междоузельные кластеры в  $Clast_{in}$ . При  $n > 5$ , происходит образование стержнеобразных дефектов, находящихся в плоскости {311} ({311}-дефектов) [27]. Согласно [23] формированию как {311}-междоузельных дефектов, так и более простых междоузельных кластеров предшествует выстраивание междоузлий вдоль направлений  $\langle 011 \rangle$  в плоскости {311}. При этом образовавшиеся дефекты представляют собой цепочки их собственных междоузельных атомов. Формирование остаточных кластеров носит пороговый характер и определяется концентрацией точечных дефектов. Так, например, пороговая доза образования остаточных протяженных дефектов при ИИ атомами В, Si, Р составляет  $\sim 10^{14}$  см<sup>-2</sup> [28].

После проведения ИИ азота дозой  $5 \times 10^{13}$  см<sup>-2</sup> с энергией 40 кэВ и отжига при 750 °С (120 мин) методом просвечивающей электронной микроскопии не было обнаружено нарушений кристаллической решетки Si в том числе и {311}-дефектов [29], что не характерно для ИИ атомами кремния в сопоставимых дозах и энергиях [30]. Плотность {311}-дефектов и концентрация в них междоузлий после ИИ атомами азота будет существенно ниже, чем после ИИ кремния. Для больших доз имплантации кроме механизма Воткина с последующим захватом вакансией, возможен еще один механизм снижения концентрации точечных дефектов путем их перехода под действием возникающих упругих напряжений из области скопления при термообработке. Атомы N при ИИ создают скопления дефектов кристаллической решетки, что способствует возникновению локальных упругих напряжений, под действием которых происходит вытеснение избыточных собственных дефектов кремния из области больших концентраций к границе раздела Si–SiO<sub>2</sub> с их последующей аннигиляцией. При ИИ тяжелыми атомами возникает большее число дефектов, в результате возникающие упругие напряжения в областях скопления дефектов могут компенсировать друг друга, и эффект миграции точечных дефектов ослабевает, что способствует образованию остаточных нарушений.

Процессы, связанные с образованием дефектов высоких порядков, могут замедлять процессы диффузии атомов азота к поверхности. Часть атомов азота при высоких дозах ИИ ( $5 \times 10^{14}$  см<sup>-2</sup> и более) может задержаться в ионно-нарушенном кремнии, взаимодействуя с образовавшимися дефектами. Максимум распределения концентрации возникающих при ионной имплантации радиационных дефектов расположен как правило несколько ближе к поверхности кристалла, чем максимум распределения внедренных атомов ( $\sim 0,7 R_p$ , где  $R_p$  – проецированный пробег) [21]. Также достаточно большая часть атомов азота в результате диффузии при БТО легко переходит в слой защитного оксида, встраиваясь в его структуру [14].

В рамках предлагаемой модели диффузии ниже приведены уравнения непрерывности согласно зарядовой одномерной модели диффузии Ферми для всех реагентов: атомов примеси в узлах и междоузлиях, собственных междоузлий и вакансий, комплексов примесь – дефект, кластеров точечных дефектов, причем для каждого зарядового состояния отдельно.

Уравнение реакции в общем виде для реагентов  $A^i$  и  $B^j$  с показателями заряда  $i$  и  $j$  и продуктом реакции, комплексом  $(AB)^{i+k}$  в зарядовом состоянии  $i+k$ , можно представить в виде



Кинетика протекания такой реакции описывается уравнением

$$R_{A^i+B^j} = k_{A^i+B^j}^f \cdot C_A \cdot C_B - k_{A^i+B^j}^r \cdot C_{AB} \cdot \left( \frac{C_n}{C_{n_i}} \right)^{k-j} = k_{A^i+B^j}^f \cdot \left( C_A \cdot C_B - \frac{1}{k_{A^i+B^j}^{Eq}} \cdot C_{AB} \left( \frac{C_n}{C_{n_i}} \right)^{k-j} \right), \quad (28)$$

где  $R_{A^i+B^j}$  – разница между скоростью прямой реакции и скоростью обратной реакции (по закону действующих масс);

$k_{A^i+B^j}^f$  – константа скорости прямой реакции;

$k_{A^i+B^j}^r$  – константа скорости обратной реакции;

$k_{A^i+B^j}^{Eq}$  – константа равновесия:  $k_{A^i+B^j}^{Eq} = k_{A^i+B^j}^f / k_{A^i+B^j}^r$ ;

$C_n$  – концентрация свободных носителей заряда в полупроводнике,

$C_{n_i}$  – собственная концентрация носителей заряда в полупроводнике.

Таким образом, каждое из уравнений реакции (1)–(26) дополняется кинетическим уравнением.

Кинетика образования комплекса  $(NV)^{i+l}$  для уравнения реакции (2)

$$R_2 = k_{N_s^i/V^m}^f \cdot \left( C_{N_s^i} \cdot C_{V^m} - \frac{1}{k_{N_s^i/V^m}^{Eq}} \cdot C_{(NV)^{i+l}} \left( \frac{C_n}{C_{n_i}} \right)^{l-m} \right). \quad (29)$$

Уравнения реакций (6)–(10) показывают процессы перезарядки примесей, пары примесь – дефект и собственных дефектов. Одно из наиболее общих допущений, что данные реакции протекают очень быстро, поэтому для кинетических уравнений (6)–(10)

$$R_6 = R_7 = R_8 = R_9 = R_{10} = 0. \quad (30)$$

Уравнения непрерывности в общем виде (для реагента S)

$$\frac{\partial C_S}{\partial t} = -\nabla J_S^{diff} - \nabla J_S^{drift} + \sum_n R_{s/Q_n}, \quad (31)$$

где  $J_S^{diff}$  – диффузионный поток реагента S;

$J_S^{drift}$  – дрейфовый поток реагента S;

$R_{s/Q_n}$  – кинетические составляющие для всех реакций, протекающих с участием реагентов S и  $Q_n$ ,  $n \in N$ .

Разность потенциалов между положением уровня Ферми в рассматриваемом полупроводнике ( $E_F / q$ ) и положением уровня Ферми в собственном полупроводнике ( $E_i / q$ )

$$\varphi = \frac{E_F - E_i}{q} = -\frac{k_B T}{q} \ln \left( \frac{n}{n_i} \right), \quad (32)$$

где  $q$  – заряд электрона;

$k_B$  – постоянная Больцмана;

$T$  – температура.

Скорость диффундирующих атомов во внешнем поле

$$\vec{v} = \mu \cdot \vec{E}. \quad (33)$$

Подвижность диффундирующих атомов (соотношение Эйнштейна)

$$\mu = \frac{q \cdot D}{k_B \cdot T}, \quad (34)$$

где  $D$  – коэффициент диффузии частицы;

$q$  – заряд частицы.

С учетом (33) и (34) напряженность электрического поля в полупроводнике

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \phi &= -\frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( -\frac{k_B \cdot T}{q} \cdot \ln \frac{C_{N_i^k}}{C_{n_i}} \right) = \frac{k_B \cdot T}{q} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{C_{N_i^k}}{C_{n_i}} = \frac{k_B \cdot T}{q} \frac{1}{C_{n_i}} \frac{\partial C_{N_i^k}}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{C_{N_i^k}}{C_{n_i}} = \\ &= \frac{k_B \cdot T}{q} \cdot \frac{1}{C_{N_i^k}} \cdot \frac{\partial C_{N_i^k}}{\partial x} = \frac{k_B \cdot T}{q} \cdot \frac{1}{C_{N_i^k}} \cdot \frac{\partial C_{N_i^k}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (35)$$

где  $C_{N_i^k}$  – концентрация междоузельных атомов азота;

$k$  – показатель зарядового состояния междоузельных атомов азота.



Для атомов азота при показателе зарядового состояния  $k = -1$  результирующий поток (без учета зарядов в оксиде и на его границе с кремнием, при изотропном коэффициенте диффузии)

$$\begin{aligned} \overline{J}_{N_i^{-1}}^{total} &= \overline{J}_{N_i^{-1}}^{diff} + \overline{J}_{N_i^{-1}}^{drift} = -D_{N_i} \cdot \overline{\nabla} C_{N_i^{-1}} - v_{N_i^{-1}}^{drift} \cdot C_{N_i^{-1}} = -D_{N_i} C_{N_i^{-1}} - \mu_{N_i} \cdot \overline{E} \cdot C_{N_i^{-1}} = \\ &= -D_{N_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} C_{N_i^{-1}} - D_{N_i} \frac{\partial}{\partial x} C_{N_i^{-1}} = -2D_{N_i} \frac{\partial}{\partial x} C_{N_i^{-1}}, \end{aligned} \quad (36)$$

где  $D_{N_i}$  – коэффициент диффузии междоузельных атомов азота;

$v_{N_i^{-1}}^{drift}$  – скорость диффузии междоузельных атомов азота с показателем зарядового состояния  $-1$ ;

$\mu_{N_i}$  – подвижность междоузельных атомов азота.

Результирующий поток для междоузельных атомов азота с различным показателем заряда  $k$

$$\begin{aligned} \overline{J}_{N_i^k}^{total} &= -D_{N_i} \cdot \overline{\nabla} C_{N_i^k} + |k| \cdot v_{N_i^k}^{drift} \cdot C_{N_i^k} = -D_{N_i} \overline{\nabla} C_{N_i^k} + |k| \cdot \mu_{N_i} \cdot \overline{E} \cdot C_{N_i^k} = \\ &= -D_{N_i} \frac{\partial}{\partial x} C_{N_i^k} - |k| \cdot D_{N_i} \frac{\partial}{\partial x} C_{N_i^k} = -( |k| + 1 ) \cdot D_{N_i} \frac{\partial}{\partial x} C_{N_i^k}. \end{aligned} \quad (37)$$

Вследствие наличия внутреннего электрического поля в кремнии коэффициент диффузии, а, соответственно, и результирующий поток, могут возрастать в  $h$  раз:

$$\overline{J}_{N_i^k}^{total} = -h \cdot D_{N_i} \frac{\partial}{\partial x} C_{N_i^k}. \quad (38)$$

Согласно [31] значение  $h$  не превышает 2, что подтверждается уравнением (36). Тем не менее, в работе [11] отмечено, что для реального случая коэффициент диффузии может возрастать во много раз больше. Значительное увеличение коэффициента диффузии может указывать на возникновение дополнительного потенциала, обусловленного наличием заряженных дефектов, которые приведут к возникновению дополнительной дрейфовой составляющей. В процессе БТО пластина подвергается высокотемпературной обработке, в результате чего происходит ионизация примесей и дефектов в кремнии. Подвижность электронов значительно превышает подвижность диффузанта и в сочетании с градиентом концентрации приводит к разделению зарядов и возникновению электрического поля. По этой причине под действием электрического поля коэффициент диффузии может возрастать в несколько раз.

Дрейфовый поток, обусловленный влиянием внутреннего электрического потенциала, создаваемого дефектами и примесями в слое защитного оксида и на его границе Si–SiO<sub>2</sub>,

$$J_{N_i^k}^{drift2} = k \cdot \mu_{N_i^k} \cdot \overline{E} \cdot C_{N_i^k} = k \cdot \mu_{N_i^k} \frac{Q_{Me}^{SiO_2}(x) + Q_{Defects}^{SiO_2}(x)}{x^2} C_{N_i^k}, \quad (39)$$

где  $Q_{Me}^{SiO_2}$  – распределение заряда в слое защитного оксида, обусловленное наличием ионов металлов;

$Q_{Defects}^{SiO_2}(x)$  – распределение заряда в слое защитного оксида, обусловленное наличием дефектов.

На эффективность диффузии примеси также могут оказывать влияние упругие напряжения в кристаллической решетке кремния, обусловленные как процессами окисления, так и несоответствиями, вызванными различием кристаллических решеток кремния и оксида кремния. В [32] было показано влияние оксидов различной толщины на распределение упругих напряжений по глубине пластины: с ростом толщины оксида в области, примыкающей к границе раздела Si–SiO<sub>2</sub>, наблюдается увеличение упругих напряжений. В нашем случае можно ограничиться распределением для толщины 46 нм, и, как правило, с возрастанием толщины формируемого оксида такие напряжения возрастают.

Зависимость коэффициента диффузии от упругих напряжений в кристаллической решетке приведена в [33]:

$$D(s)_{N_i}^s = D_{N_i} \exp \left[ - \frac{\Delta E^s \times \sigma(x)_{Si-SiO_2}^s}{k \times T} \right], \quad (40)$$

где  $D(s)_{N_i}^s$  – коэффициент диффузии азота с учетом влияния упругих напряжений в кремнии;

$D_{N_i}$  – коэффициент диффузии азота без учета влияния упругих напряжений;

$\sigma(x)_{Si-SiO_2}^s$  – коэффициент, характеризующий изменения объема кристаллической решетки из-за наличия упругих напряжений;

$\Delta E^s$  – энергия активации.

Коэффициент изменения объема кристаллической решетки для учета в процессе моделирования получен путем линейной интерполяции зависимости, представленной в [32]. Для описания диффузии имплантированного азота в кремнии приведена система уравнений непрерывности, составленных с учетом влияния упругих напряжений в решетке кремния вследствие наличия  $SiO_2$  на поверхности  $D(s)_{N_i}^s$  процессов диффузии  $\nabla \overline{J_{N_i}^{diff}}$  и дрейфа  $\nabla \overline{J_{N_i}^{drift}}$ , внутреннего электрического поля, создаваемого дефектами  $\overline{J_{N_i}^{drift2}}$ :

$$\frac{\partial C_{N_i}}{\partial t} = -\nabla \overline{J_{N_i}^{diff}} - \nabla \overline{J_{N_i}^{drift}} - \nabla \overline{J_{N_i}^{drift2}} + R_{N_{s/I}} - R_{N_{s/V}}; \quad (41)$$

$$\frac{\partial C_I}{\partial t} = -\nabla \overline{J_{N_i}^{diff}} - \nabla \overline{J_{N_i}^{drift}} - R_{N_{s/I}} - R_{NV/I} - R_{I/V} - R_{I/I} - R_{I41/Clast(311)} - R_{I/Clastn} - R_{I/ClastVn} - R_{I/Clast4} - R_{I/Clastln}; \quad (42)$$

$$\frac{\partial C_V}{\partial t} = -\nabla \overline{J_V^{diff}} - \nabla \overline{J_V^{drift}} - R_{N_{s/V}} - R_{Ni/V} - R_{V/I} - R_{V/V} - R_{V/Clastn} - R_{V/ClastVn}; \quad (43)$$

$$\frac{\partial C_{NV}}{\partial t} = R_{N_{s/V}} - R_{NV/I}; \quad (44)$$

$$\frac{\partial C_{Ns}}{\partial t} = R_{N_{s/V}} + R_{NV/I} - R_{N_{s/V}} - R_{N_{s/I}}; \quad (45)$$

$$\frac{\partial C_{V2}}{\partial t} = R_{V2/I2} + R_{V2/Clast4} - R_{V2/Clast3} - R_{V2/ClastVn} + R_{ClastV3/V2}; \quad (46)$$

$$\frac{\partial C_{I2}}{\partial t} = -R_{I2/V2} - R_{I2/Clast2} - R_{I2/Clast(311)} - R_{I2/ClastVn} - R_{I2/Clast4}; \quad (47)$$

$$\frac{\partial C_{Clastn}}{\partial t} = R_{Clastn/I} - R_{Clastn/V} + R_{Clastn/I2} - R_{Clast4/I} - R_{Clast4/I2}; \quad (48)$$

$$\frac{\partial C_{Clastln}}{\partial t} = R_{ClastVn/V} - R_{ClastVn/I} + R_{ClastVn/V2}. \quad (49)$$

Кинетические составляющие реакций (1), (3), входящие в уравнение (41):

$$R_{N_{s/I}^i} = k_{N_{s/I}^i}^f C_{N_i^s} C_{I^j} - k_{N_{s/I}^i}^r C_{N_i^i} \left( \frac{n}{n_i} \right)^{k-i-j} = k_{N_{s/I}^i}^f \cdot \left( C_{N_i^s} C_{I^j} - \frac{1}{k_{N_{s/I}^i}^{Eq}} C_{N_i^i} \left( \frac{n}{n_i} \right)^{k-i-j} \right); \quad (50)$$

$$R_{N_{s/V}^k} = k_{N_{s/V}^k}^f C_{N_i^k} C_{V^m} - k_{N_{s/V}^k}^r C_{N_i^k} \left( \frac{n}{n_i} \right)^{i-k-m} = k_{N_{s/V}^k}^f \cdot \left( C_{N_i^k} C_{V^m} - \frac{1}{k_{N_{s/V}^k}^{Eq}} C_{N_i^k} \left( \frac{n}{n_i} \right)^{i-k-m} \right); \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{N_i^k}}{\partial t} &= -\nabla \overline{J_{N_i^k}^{diff}} - \nabla \overline{J_{N_i^k}^{drift}} - \nabla \overline{J_{N_i^k}^{drift2}} + R_{N_{s/I}^i} - R_{N_{s/V}^k} = [\text{с учетом (33) и (34)}] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{N_i^k}^s(x) \frac{\partial C_{N_i^k}}{\partial x} \right) - \left( k \cdot \mu_{N_i} \cdot \vec{E} \cdot \frac{\partial C_{N_i^k}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \cdot \mu_{N_i} \cdot C_{N_i^k} \cdot \vec{E} \right) + R_{N_{s/I}^i} - R_{N_{s/V}^k} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = [ \text{с учетом (28) и (39)} ] = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{N_i}^s(x) \frac{\partial C_{N_i^k}}{\partial x} \right) - k \cdot D_{N_i} \frac{\partial^2 C_{N_i^k}}{\partial x^2} - k \cdot \mu_{N_i} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q_{Me}^{SiO_2}(x) + Q_{Defects}^{SiO_2}(x)}{x^2} C_{N_i^k} \right) + \\
 + k_{N_i^i/I^j}^f \cdot \left( C_{N_i^i} C_{I^j} - \frac{1}{k_{N_i^i/I^j}^{Eq}} C_{N_i^i} \left( \frac{n}{n_i} \right)^{k-i-j} \right) - k_{N_i^i/V^m}^f \times \left( C_{N_i^i} C_{V^m} - \frac{1}{k_{N_i^i/V^m}^{Eq}} C_{N_i^i} \left( \frac{n}{n_i} \right)^{k-i-j} \right), \quad (52)
 \end{aligned}$$

где  $n_i$  – концентрация свободных электронов в собственном полупроводнике;

$n$  – концентрация свободных электронов в полупроводнике  $n$ -типа проводимости.

Аналогично можно записать уравнения непрерывности для других составляющих кинетического процесса:

$$\frac{\partial C_I}{\partial t}, \frac{\partial C_V}{\partial t}, \frac{\partial C_{NV}}{\partial t}, \frac{\partial C_{N_S}}{\partial t}, \frac{\partial C_{V_2}}{\partial t}, \frac{\partial C_{I_2}}{\partial t}, \frac{\partial C_{ClasVn}}{\partial t}, \frac{\partial C_{ClasIn}}{\partial t}.$$

Ниже указаны граничные условия системы дифференциальных уравнений для диффузии азота. При диффузии точечных дефектов к поверхности без присутствия оксида будет происходить их аннигиляция на поверхности. Уравнения, характеризующие аннигиляцию вакансий и междоузлий [34] на поверхности:

$$-D_I \frac{dC}{dx} \Big|_{x=0} = J_I \times S = k_r \times C_I = \frac{3D_I S}{\lambda} C_I; \quad (53)$$

$$-D_V \frac{dC}{dx} \Big|_{x=0} = J_V \times S = k_r \times C_V = \frac{3D_V S}{\lambda} C_V, \quad (54)$$

где  $k_r$  – константа прямой реакции выброса атома кремния из узла кристаллической решетки;

$S = 0,5$  – вероятность аннигиляции на поверхности;

$D$  – коэффициент диффузии вакансий / междоузлий;

$\lambda = 0,27$  нм (расстояние между ближайшими атомами кремния  $\lambda = 2,73 \text{ \AA}$ ), т. е. чистый поток, равный скорости поверхностной аннигиляции, равен произведению общего падающего потока на вероятность аннигиляции на поверхности.

Часть атомов азота, достигая границы раздела Si–SiO<sub>2</sub>, может располагаться в междоузлиях либо в узлах кристаллической решетки кремния, занимая места вакансий. Согласно рассуждениям, приведенным выше, наибольший вклад будет вносить диффузия азота по междоузлиям:



Количество несоответствий на границе раздела Si(100)–SiO<sub>2</sub> ограничено ее структурой, скорость заполнения атомами азота несоответствий на слоях границы раздела кремния будет снижаться:

$$v \left( \frac{N}{N^{interface}} \right) \approx \left( C_{interface}^{defects} - C_{interface} \right) \cdot N, \quad (57)$$

где  $C_{interface}^{defects}$  – концентрация дефектов на границе раздела Si–SiO<sub>2</sub>;

$C_{interface}$  – концентрация атомов азота, захваченных на несоответствиях границы раздела Si–SiO<sub>2</sub>;

$N$  – концентрация атомов азота в кремнии.

Таким образом, при отжиге после ИИ азот будет локализоваться в области радиационных дефектов, где имеются нарушения упорядоченности структуры – оборванные связи, отклонения углов связей и межатомных расстояний. Меньший размер атома азота дает преимущество при его локализации на дефектах, азот легче реализует выигрыш в энергии связи, подстраивая под себя междоузельные атомы кремния. Таким образом может происходить перестройка (упорядочение) структуры, сближение атомов, уплотнение и пассивация дефектов. После упорядочивания структуры выталкиваемый по механизму Воткинса междоузельными атомами кремния азот мигрирует в направлении границы Si–SiO<sub>2</sub>, где также «сшивает» дефекты и уплотняет структуру. Возникающие при этом сжимающие разупорядоченную область напряжения способствуют и реструктуризации границы раздела Si–SiO<sub>2</sub>.

**Заключение.** Установлено, что для пластин кремния, имплантированных ионами азота с энергией 40 кэВ дозой  $2,5 \times 10^{14}$  см<sup>-2</sup> через защитный SiO<sub>2</sub> толщиной 23 нм, после проведения БТО при 1000 °С в течение 15 с происходит локализация атомов азота на границе раздела Si–SiO<sub>2</sub> вследствие различия кристаллических решеток Si и SiO<sub>2</sub>. Наличие несовершенств из-за несоответствий периодов решеток Si и SiO<sub>2</sub> позволяет азоту локализоваться на границе раздела, достигая которой атомы азота встраиваются в дефекты структуры переходного слоя Si–SiO<sub>2</sub>. Максимум распределения со значением концентрации азота  $1 \times 10^{19}$  см<sup>-3</sup> указывает на наличие концентрации насыщения на границе раздела Si–SiO<sub>2</sub>, которая определяется количеством дефектов структуры. Показано, что после проведения азотирования подзатворного оксида толщиной 44 нм методом ИИ дозами имплантации  $2,5 \times 10^{14}$  см<sup>-2</sup> и  $1 \times 10^{15}$  см<sup>-2</sup> с энергией ионов 40 кэВ либо после проведения азотирования оксида толщиной 44 нм высокотемпературным отжигом в атмосфере N<sub>2</sub> при 1200 °С в течение 2 ч либо при 1100 °С в течение 30 мин также происходит локализация атомов азота в значительных концентрациях на границе раздела Si–SiO<sub>2</sub>.

После ИИ азота с энергией 40 кэВ дозой  $1 \times 10^{15}$  см<sup>-2</sup>, проведения БТО с последующим снятием защитного оксида и выращивания SiO<sub>2</sub> толщиной 44 нм наблюдается локализация большего количества атомов азота в области максимума распределения имплантированного азота. После проведения термообработки максимум распределения атомов азота не смещается, что не свойственно примесным атомам в полупроводниках. В данном случае большинство атомов азота не диффундируют в процессе термообработок, что может быть обусловлено образованием ковалентных связей атомов азота с оборванными связями сложных комплексов постимплантационных дефектов. Атомы азота взаимодействуют преимущественно с находящимися вблизи структурными дефектами кремния, а не с дефектами границы раздела Si–SiO<sub>2</sub>, реакционная поверхность сформировавшихся остаточных дефектов превышает количество структурных несовершенств на границе раздела Si–SiO<sub>2</sub>.

Наличие максимума распределения атомов азота в больших концентрациях на границе раздела Si–SiO<sub>2</sub> после проведения БТО указывает на ускоренную диффузию азота. Для описания процессов ускоренной диффузии атомов азота с учетом взаимодействия с дефектами в кремнии предложена зарядовая одномерная модель диффузии Ферми. Основным механизмом является диффузия междоузельных атомов азота с высокой подвижностью. Такой механизм может протекать с предварительным вытеснением узловых атомов азота собственными атомами внедрения, остальные узловые атомы азота являются неподвижными.

Показано, что атомы азота, находясь в узлах кристаллической решетки, могут выступать в качестве центров аннигиляции точечных дефектов. Вследствие разницы радиусов атомов азота и кремния, а также разницы энергий связи N–Si и Si–Si, происходит смещение ближних собственных узловых атомов к атомам внедрения азота, что способствует вытеснению атомов азота в междоузлия по механизму Воткинса. Затем атомы азота могут быть захвачены вакансиями. В результате происходит аннигиляция междоузельного Si и вакансии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Quinn, C. A. Empowering the electronics industry: A power technology roadmap / C. A. Quinn, D. B. Dalal // CPSS Transactions on Power Electronics and Applications. – 2017. – Vol. 2, iss. 4. – P. 306–319. – DOI: [10.24295/CPSSSTPEA.2017.00028](https://doi.org/10.24295/CPSSSTPEA.2017.00028).
2. Baliga, B. J. Advanced power MOSFET concepts / B. J. Baliga. – New York : Springer Science + Business Media, 2010. – DOI: [10.1007/978-1-4419-5917-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-5917-1).
3. Влияние технологических примесей на электрофизические параметры МОП-транзистора / В. Б. Оджаев [и др.] // Изв. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2014. – № 4. – С. 14–17.
4. Growth and characterization of ultrathin nitrided silicon oxide films. / E. P. Gusev [et al.] // IBM J. of Research and Development. – 1999. – Vol. 43, iss. 3. – P. 265–286. – DOI: [10.1147/rd.433.0265](https://doi.org/10.1147/rd.433.0265).
5. Красников, Г. Я. Конструктивно-технологические особенности субмикронных МОП-транзисторов / Г. Я. Красников. – М. : ТЕХНОСФЕРА, 2011. – 800 с.
6. Влияние ионной имплантации азота на электрофизические свойства подзатворного диэлектрика силовых МОП-транзисторов / В. Б. Оджаев [и др.] // Журн. Белорус. гос. ун-та. Физика. – 2020. – № 3. – С. 55–64.
7. Влияние отжига на электрические свойства легированных азотом монокристаллов кремния, выращенных методом бестигельной зонной плавки / Г. И. Воронкова [и др.] // Физика твердого тела. – 2009. – Т. 51, № 11. – С. 2128–2134.
8. Nishi, Y. Handbook of semiconductor manufacturing technology / Y. Nishi, R. Doering. – Boca Raton : CRC press, 2008. – 1720 p.
9. Nam, I.-H. Annealing Effects on QBD of Ultra-Thin Gate Oxide Grown on Nitrogen Implanted Silicon / I.-H. Nam // J. of the Institute of Electronics Engineers of Korea. – 2000. – Vol. 200037, iss. 3. – P. 6–13.
10. Josquin, W. The application of nitrogen ion implantation in silicon technology / W. Josquin // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. – 1983. – Vol. 209. – P. 581–587. – DOI: [10.1016/0167-5087\(83\)90855-4](https://doi.org/10.1016/0167-5087(83)90855-4).
11. Королёв, М. А. Технология, конструкции и методы моделирования кремниевых интегральных микросхем : в 2 ч. / М. А. Королёв [и др.] ; под общей ред. чл.-корр. РАН проф. Ю. А. Чаплыгина. – 3-е изд. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – Ч. 1 : Технологические процессы изготовления кремниевых интегральных схем и их моделирование. – 397 с.

12. Lee, W.-C. First-principles study of the self-interstitial diffusion mechanism in silicon / W.-C. Lee, S.-G. Lee, K.-J. Chang // *J. of Physics: Condensed Matter*. – 1998. – Vol. 10, iss. 5. – P. 995–1002. – DOI: [10.1088/0953-8984/10/5/009](https://doi.org/10.1088/0953-8984/10/5/009).
13. A physical model for implanted nitrogen diffusion and its effect on oxide growth / L. S. Adam [et al.] // *Intern. Electron Devices Meeting 2000. Technical Digest. IEDM (Cat. No. 00CH37138)*. – 2000. – P. 507–510. – DOI: [10.1109/IEDM.2000.904366](https://doi.org/10.1109/IEDM.2000.904366).
14. Adam, L. S. On implant-based multiple gate oxide schemes for system-on-chip integration / L. S. Adam, C. Bowen, M. E. Law // *IEEE Transactions on Electron Devices*. – 2003. – Vol. 50, iss. 3. – P. 589–600. – DOI: [10.1109/TED.2003.810473](https://doi.org/10.1109/TED.2003.810473).
15. Определение энергетического положения Si-B3-центра в облученном кремнии / С. Ж. Токмолдин [и др.] // *Физика и техника полупроводников*. – 1983. – Т. 17, № 6. – С. 1166.
16. Nitrogen as dopant in silicon and germanium / P. V. Pavlov [et al.] // *Phys. Stat. Sol. (a)*. – 1976. – Vol. 35, iss. 1. – P. 11–36. – DOI: [10.1002/pssa.2210350102](https://doi.org/10.1002/pssa.2210350102).
17. Челябинский, А. Р. Эффект Воткина в полупроводниках. Явление и приложения в микроэлектронике / А. Р. Челябинский, В. Б. Оджаев // *Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика*. – 2011. – № 3. – С. 10–17.
18. Челябинский, А. Р. Накопление радиационных дефектов в кремнии при имплантации ионов азота / А. Р. Челябинский, В. Ю. Явид, П. Венгерк // *Взаимодействие излучений с твердым телом: материалы V междунар. науч. конф., Минск, 6–9 окт. 2003 г. / Белорус. гос. ун-т. – Минск, 2003. – С. 206–208*.
19. Effect of Nitrogen Implants on Boron Transient Enhanced Diffusion / O. Dokumaci [et al.] // *MRS Online Proc. Library*. – 1999. – Vol. 610. – DOI: [10.1557/PROC-610-B5.9](https://doi.org/10.1557/PROC-610-B5.9).
20. The effects of implanted nitrogen on diffusion of boron and evolution of extended defects / H. Park // *MRS Online Proc. Library*. – 1997. – Vol. 469. – P. 425–430. – DOI: [10.1557/PROC-469-425](https://doi.org/10.1557/PROC-469-425).
21. Вавилов, В. С. Механизмы образования и миграции дефектов в полупроводниках / В. С. Вавилов, А. Е. Кив, О. Р. Нязова. – М.: Наука, 1981. – 368 с.
22. Pichler, P. Intrinsic Point Defects, Impurities, and Their Diffusion in Silicon / P. Pichler // *Computational Microelectronics*; ed.: S. Selberherr. – Vienna: Springer Vienna, 2004.
23. Челябинский, А. Р. Дефектно-примесная инженерия в имплантированном кремнии / А. Р. Челябинский, Ф. Ф. Комаров // *Успехи физических наук*. – Т. 173, № 8. – С. 813–846.
24. Pre-amorphization damage in ion-implanted silicon / R. J. Schreutelkamp [et al.] // *Materials Science Reports*. – 1991. – Vol. 6, iss. 7. – P. 275–366.
25. Tamura, M. Damage formation and annealing of high energy ion implantation in Si / M. Tamura, T. Suzuki // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. – 1989. – Vol. 39, iss. 1. – P. 318–329. – DOI: [10.1016/0168-583X\(89\)90795-7](https://doi.org/10.1016/0168-583X(89)90795-7).
26. Mechanisms of implant damage annealing and transient enhanced diffusion Si / N. E. B. Cowern [et al.] // *Appl. Phys. Lett.* – 1994. – Vol. 65, iss. 23. – DOI: [10.1063/1.112483](https://doi.org/10.1063/1.112483).
27. Zographos, N. Efficient TCAD Model for the Evolution of Interstitial Clusters, {311} Defects, and Dislocation Loops in Silicon / N. Zographos, C. Zechner, I. Avci // *MRS Online Proc. Library*. – 2006. – 994. – DOI: [10.1557/PROC-0994-F10-01](https://doi.org/10.1557/PROC-0994-F10-01).
28. Остаточные дефекты в кремнии, имплантированном ионами бора и фосфора / Ф. Ф. Комаров [и др.] // *Физика и химия обработки материалов*. – 2004. – № 4. – С. 33–36.
29. Nitrogen implantation and diffusion in silicon / L. S. Adam [et al.] // *MRS Online Proc. Library*. – 1999. – Vol. 568. – P. 277–281. – DOI: [10.1557/PROC-568-277](https://doi.org/10.1557/PROC-568-277).
30. Energy Dependence of Transient Enhanced Diffusion and {311} Defect Kinetics / H. Saleh [et al.] // *MRS Online Proceedings Library*. – 2011. – Vol. 610. – DOI: [10.1557/PROC-610-B6.7](https://doi.org/10.1557/PROC-610-B6.7).
31. Пилипенко, В. А. Быстрые термообработки в технологии СБИС / В. А. Пилипенко. – Минск: Изд. центр БГУ, 2004. – 531 с.
32. Stress Distribution in Ultra Thin SiO<sub>2</sub> Film/Si Substrate System Measured by a Low Level Birefringence Detection Technique / X. H. Liu [et al.] // *MRS Online Proceedings Library*. – 2004. – Vol. 821. – P. 24–29. – DOI: [10.1557/PROC-821-P8.8](https://doi.org/10.1557/PROC-821-P8.8).
33. Aziz, M. J. Pressure and stress effects on diffusion in Si / M. J. Aziz // *Defect and Diffusion Forum*. – 1998. – Vol. 153. – P. 1–10. – DOI: [10.4028/www.scientific.net/ddf.153-155.1](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/ddf.153-155.1).
34. Kwok, C. T. A method for quantifying annihilation rates of bulk point defects at surfaces / C. T. Kwok // *J. of applied physics*. – 2005. – Vol. 98, iss. 1. – DOI: [10.1063/1.1946195](https://doi.org/10.1063/1.1946195).

## REFERENCES

1. Quinn, C. A., Dalal, D. B. (2017). Empowering the electronics industry: A power technology roadmap. *CPSS Transactions on Power Electronics and Applications*, 2(4), 306–319. DOI: [10.24295/CPSS/TPA.2017.00028](https://doi.org/10.24295/CPSS/TPA.2017.00028).
2. Baliga, B. J. (2010). *Advanced power MOSFET concepts*. New York: Springer Science + Business Media, DOI: [10.1007/978-1-4419-5917-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-5917-1).
3. Odzhaev, V. B., Petlitskii, A. N., Prosllovich, V. S., Turtsevich, A. S., Shvedov, S. V., Filipenya, V. A., ..., Dubrovskii, V. A. (2014). Vliyaniye tekhnologicheskikh primesei na elektrofizicheskie parametry MOP-tranzistora [Influence of technological impurities on electrical parameters of MOS-transistor]. *Izvestiya Nacional'noj akademii nauk Belarusi. Seriya fiziko-texnicheskix nauk [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series]*, (4), 14–17. (In Russ., abstr. in Engl.). <https://rep.bntu.by/handle/data/49430>.
4. Gusev, E. P., Lu, H. C., Garfunkel, E. L., Gustafsson, T., & Green, M. L. (1999). Growth and characterization of ultrathin nitrided silicon oxide films. *IBM Journal of Research and Development*, 43(3), 265–286. DOI: [10.1147/rd.433.0265](https://doi.org/10.1147/rd.433.0265).
5. Krasnikov, G. Ya. (2011). *Konstruktivno-tekhnologicheskie osobennosti submikronnykh MOP-tranzistorov [Structural and technological features of submicron MOS transistors]*. Moscow: TEXNOSFERA. (In Russ.)

6. Odzhaev, V. B., Panfilenko, A. K., Petlitskii, A. N., Prosolovich, V. S., Koval'chuk, N. S., Solov'ev, Ya. A., ... Shestovskii, D. V. (2020). Vliyanie ionnoi implantatsii azota na elektrofizicheskie svoistva podatvornogo dielektrika silovykh MOP-tranzistorov [Influence of nitrogen ion implantation on the electrophysical properties of the gate dielectric of power MOS transistors]. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Fizika [Journal of the Belarusian State University. Physics]*, (3), 55–64. (In Russ., abstr. in Engl.).
7. Voronkova, G. I., Batunina, A. V., Voronkov, V. V., Golovina, V. N., Gulyaeva, A. S., Tyurina, M. G., & Mil'vidskii, N. B. (2009). Vliyanie otzhiga na elektricheskie svoistva legirovannykh azotov monokristallov kremniya, vyrashchennykh metodom bestigel'noi zonnnoi plavki. *Fizika tverdogo tela [Influence of annealing on the electrical properties of doped nitrogen silicon single crystals grown by crucibleless zone melting] [Solid State Physics]*, 51(11), C. 2128–2134. (In Russ.)
8. Nishi, Y., & Doering, R. (2008). *Handbook of semiconductor manufacturing technology*. Boca Raton: CRC press.
9. Nam, I.-H. (2000). Annealing Effects on QBD of Ultra-Thin Gate Oxide Grown on Nitrogen Implanted Silicon. *Journal of the Institute of Electronics Engineers of Korea*, 37(3), 6–13.
10. Josquin, W. (1983). The application of nitrogen ion implantation in silicon technology. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, (209), 581–587. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-5087\(83\)90855-4](https://doi.org/10.1016/0167-5087(83)90855-4).
11. Korolev, M. A., Krupkina, T. Yu., & Reveleva, M. A. (2015). *Tekhnologiya, konstruktivnykh i metody modelirovaniya kremnievykh integral'nykh mikroskhem: v 2 ch. Ch. 1: Tekhnologicheskie protsessy izgotovleniya kremnievykh integral'nykh skhem i ikh modelirovanie [Technology, designs and modeling methods for silicon integrated circuits (in 2 part. Part 1: Technological processes of manufacturing silicon integrated circuits and their modeling)]*. In Yu. A. Chaplygin (Eds.). Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy. (In Russ.)
12. Lee, W.-C., Lee, S.-G., & Chang, K.-J. (1998). First-principles study of the self-interstitial diffusion mechanism in silicon. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 10(5), 995–1002. DOI: [10.1088/0953-8984/10/5/009](https://doi.org/10.1088/0953-8984/10/5/009).
13. Adam, L. S., Law, M. E., Dokumaci, O., & Hegde, S. (2000). A physical model for implanted nitrogen diffusion and its effect on oxide growth. In *International Electron Devices Meeting 2000. Technical Digest. IEDM (Cat. No.00CH37138)* (507–510). DOI: [10.1109/IEDM.2000.904366](https://doi.org/10.1109/IEDM.2000.904366).
14. Adam, L. S., Bowen, C., & Law, M. E. (2003). On implant-based multiple gate oxide schemes for system-on-chip integration. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 50(3), 589–600. DOI: [10.1109/TED.2003.810473](https://doi.org/10.1109/TED.2003.810473).
15. Tokmoldin, S. Zh., Mukashev, B. N., Gorelkinskii, Yu. V., & Nevinnyi, N. N. (1983). Opredelenie energeticheskogo polozheniya Si-B3-tsentra v obluchennom kremnii [Determination of the energy position of the Si-B3 center in irradiated silicon]. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov [Soviet physics. Semiconductors]*, 17(6), 1166. (In Russ.)
16. Pavlov, P. V., Zorin, E. I., Tetelbaum, D. I., & Khokhlov, A. F. (1976). Nitrogen as dopant in silicon and germanium. *Physica status solidi (a)*, 35(1), 11–36. DOI: [10.1002/pssa.2210350102](https://doi.org/10.1002/pssa.2210350102).
17. Chelyadinskii, A. R., & Odzhaev, V. B. (2011). Effekt Votkinsa v poluprovodnikakh. Yavlenie i prilozheniya v mikroelektronike [Watkins effect in semiconductors. Phenomenon and applications in microelectronics]. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fizika. Matematika. Informatika [Bulletin of BSU. Series 1, Physics. Mathematics. Computer science]*, 1(3), 11–17. (In Russ., abstr. in Engl.).
18. Chelyadinskii, A. R., Yavid, V. Yu., & Vengerek, P. (2003). Nakoplenie radiatsionnykh defektov v kremnii pri implantatsii ionov azota [Accumulation of radiation defects in silicon during implantation of nitrogen ions]. In *Vzaimodeystvie izlucheniya s tverdyim telom [Interaction of radiation with solids]* (206–208). Minsk: Publ. BSU. (In Russ.)
19. Dokumaci, O., Ronsheim, P., Hegde, S., Chidambarrao, D., Shaik-Adam, L., & Law, M. (1999). Effect of Nitrogen Implants on Boron Transient Enhanced Diffusion. *MRS Online Proc. Library*, 610. DOI: [10.1557/PROC-610-B5.9](https://doi.org/10.1557/PROC-610-B5.9).
20. Park, H., Ilderem, V., Jasper, C., Kaneshiro, M., Christiansens, J., & Jones, K. (1997). The effects of implanted nitrogen on diffusion of boron and evolution of extended defects. *MRS Online Proceedings Library*, (469), 425–430. DOI: [10.1557/PROC-469-425](https://doi.org/10.1557/PROC-469-425).
21. Vavilov, V. S., Kiv, A. E., & Niyazova, O. R. (1981). *Mekhanizmy obrazovaniya i migratsii defektov v poluprovodnikakh [Mechanisms of formation and migration of defects in semiconductors]*. Moscow: Nauka. (In Russ.)
22. Pichler, P. (2004). Intrinsic Point Defects, Impurities, and Their Diffusion in Silicon. In S. Selberherr (Eds.), *Computational Microelectronics*. Vienna: Springer Vienna.
23. Chelyadinskii, A. R., & Komarov, F. F. (2003). Defektno-primesnaya inzheneriya v implantirovannom kremnii [Defect-impurity engineering in implanted silicon]. *Uspekhi fizicheskikh nauk [Physics-Uspekhi]*, 173(8), 813–846.
24. Schreutelkamp, R. J., Custer, J. S., Liefing, J. R., Lu, W. X., & Saris F. W. (1991). Pre-amorphization damage in ion-implanted silicon. *Materials Science Reports*, 6(7), 275–366.
25. Tamura, M., & Suzuki, T. (1989). Damage formation and annealing of high energy ion implantation in Si. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, 39(1), 318–329. DOI: [10.1016/0168-583X\(89\)90795-7](https://doi.org/10.1016/0168-583X(89)90795-7).
26. Cower, N. E. B., van de Walle, G. F. A., Zalm, P. C. D., & Vandenhoudt, W. E. (1994). Mechanisms of implant damage annealing and transient enhanced diffusion in Si. *Applied Physics Letters*, 65(23). DOI: [10.1063/1.112483](https://doi.org/10.1063/1.112483).
27. Zographos, N., Zechner, C., & Avci, I. (2007). Efficient TCAD Model for the Evolution of Interstitial Clusters, {311} Defects, and Dislocation Loops in Silicon. *MRS Online Proceedings Library*, (994). DOI: [10.1557/PROC-0994-F10-01](https://doi.org/10.1557/PROC-0994-F10-01).
28. Komarov, F. F., Dzhadan, M., Gaiduk, P. I., Chelyadinskii, A. R., Yavid, V. Yu., Zhukovskii, P. V., Partyka, Ya., Vengerek, P. (2004). Ostatochnye defekty v kremnii, implantirovannom ionami bora i fosfora [Residual defects in silicon implanted with boron and phosphorus ions]. *Fizika i khimiya obrabotki materialov [Physics and chemistry of material processing]*, (4), 33–36. (In Russ., abstr. in Engl.).
29. Adam, L.S., Law, M. E., Dokumaci, O., Haddara, Ya., Murthy, Ch., Park, H., ... Srinivasan, R. (1999). Nitrogen implantation and diffusion in silicon. *MRS Online Proceedings Library*, (568), 277–281. DOI: [10.1557/PROC-568-277](https://doi.org/10.1557/PROC-568-277).
30. Saleh, H., Mark, M. E., Bharatan, L. S., Kevin S., Jones, K. S., Krishnamoorthy, W., & Buyuklimanli, T. (2011). Energy Dependence of Transient Enhanced Diffusion and {311} Defect Kinetics. *MRS Online Proceedings Library*, (610). DOI: [10.1557/PROC-610-B6.7](https://doi.org/10.1557/PROC-610-B6.7).

31. Pilipenko, V. A. (2004). *Bystrye termoobrabotki v tekhnologii SBIS [Faster heat treatment in VLSI technology]*. Minsk: Publ. BSU. (In Russ.).
32. Liu, X. H., Peng, H. J., Wong, S. P., & Shouan, Z. (2004). Stress Distribution in Ultra Thin SiO<sub>2</sub> Film/Si Substrate System Measured by a Low Level Birefringence Detection Technique. *MRS Online Proceedings Library*, (821), 24–29. DOI: [10.1557/PROC-821-P8.8](https://doi.org/10.1557/PROC-821-P8.8).
33. Aziz, M. J. (1998). Pressure and stress effects on diffusion in Si. *Defect and Diffusion Forum*, (153), 1–10. DOI: [10.4028/www.scientific.net/ddf.153-155.1](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/ddf.153-155.1).
34. Kwok, C. T. (2005). A method for quantifying annihilation rates of bulk point defects at surfaces. *Journal of applied physics*, 98(1). DOI: [10.1063/1.1946195](https://doi.org/10.1063/1.1946195).

Поступила 07.09.2022

## LOCALIZATION OF NITROGEN ATOMS IN Si–SiO<sub>2</sub> STRUCTURES

V. ODZAEV, U. PRASALOVICH  
(Belarusian State University, Minsk)

A. PYATLITSKI, N. KOVALCHUK, Ya. SOLOVIEV, D. ZHIGULIN, D. SHESTOVSKI  
(“INTEGRAL” Joint Stock Company, Minsk)

*Studies have been carried out by time-of-flight mass spectroscopy of secondary ions of subcutaneous silicon oxides, nitridation by ion implantation (II) or nitrided by high-temperature annealing in an atmosphere of N<sub>2</sub>. Nitrogen AI was produced with an energy of 40 keV, implantation doses of  $2,5 \times 10^{14}$  and  $1 \times 10^{15}$  cm<sup>-2</sup>. High-temperature annealing was carried out at a temperature of 1200 °C for 2 hours or at 1100 °C for 30 minutes. It is established that at the Si–SiO<sub>2</sub> interface, after nitriding by II or high-temperature annealing, a maximum with a high concentration of nitrogen atoms is observed. It is shown that after conducting nitrogen AI with a dose of  $2,5 \times 10^{14}$  cm<sup>-2</sup> through a protective SiO<sub>2</sub> with a thickness of 23 nm and RTA at 1000 °C for 15 seconds, the main maximum of nitrogen distribution ( $1 \times 10^{19}$  cm<sup>-3</sup>) is observed at the Si–SiO<sub>2</sub> interface, which indicates the presence of a saturation concentration of the Si–SiO<sub>2</sub> interface.*

*A charge-based one-dimensional Fermi model is proposed to describe the accelerated diffusion of nitrogen atoms. The main mechanism is the diffusion of interstitial atoms, which can occur with the preliminary displacement of nodal nitrogen atoms by their own embedding atoms. It is shown that nitrogen atoms can act as annihilation centers of point defects in the silicon crystal lattice.*

**Keywords:** nitridation, ion implantation, high-temperature annealing, subcutaneous silicon oxide, Si–SiO<sub>2</sub> interface, saturation concentration, nitrogen diffusion.

УДК 621.371: 550.837.6

DOI 10.52928/2070-1624-2022-39-11-80-88

## ХАРАКТЕРИСТИКИ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ НАД УГЛЕВОДОРОДАМИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ И МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

канд. техн. наук, доц. В. Ф. ЯНУШКЕВИЧ

(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

*Исследованы характеристики анизотропной среды над углеводородами при комплексном использовании электромагнитных методов георазведки. Проведено моделирование компонент тензоров диэлектрической проницаемости в режиме амплитудно-модулированных, частотно-модулированных, амплитудно-частотно-модулированных и радиоимпульсных сигналов. Установлены частоты электронного плазменного и электронного циклотронного резонансов для указанных режимов. Проведено исследование влияния режимов зондирующих сигналов на характеристики анизотропной среды над залежами и компоненты тензора диэлектрической проницаемости. Проанализировано влияние вариации концентраций частиц на вещественные составляющие компонент диэлектрической проницаемости анизотропной среды над углеводородными залежами (УВЗ). Даны рекомендации по совершенствованию методов электроразведки и их применению для поисковой геофизики.*

**Ключевые слова:** анизотропные среды, углеводородная залежь, электромагнитные методы.

**Введение.** Актуальность разработки новых эффективных электромагнитных методов (ЭММ) и аппаратуры для поиска и оконтуривания скоплений нефти и газа (углеводородов) [1–3] основывается на анализе электрохимических и электрофизических процессов в образованных над УВЗ анизотропных средах (АС) и применении свойств зондирующих сигналов, позволяющих дифференцировать объекты по откликам на формирующее воздействие. Активное совершенствование имеющихся и внедрение [4; 5] новых методик и технологий заключается в использовании широкого спектра аномальных эффектов, полученных от воздействия сигналов с повышенной избирательностью к наличию углеводородов. Выбор ЭММ и методики проведения экспериментальных испытаний определяются путем расширения зависимостей характеристик среды над УВЗ от режимов воздействующих сигналов [6]. Внедрение методов и аппаратуры для поиска и оконтуривания УВЗ основано на решении данных задач с использованием различных режимов зондирования [7]. Разрабатываются методики по высокоэффективному, научно-обоснованному прогнозированию, оконтуриванию и освоению продуктивных зон [8]. Аппаратура для мониторинга пластов и геотермальной разведки состоит из системы с использованием архитектуры, подобной сейсмической узловой системе и совмещающей регистрацию микросейсмических и электромагнитных данных в одном блоке [9]. 3D-модели удельного сопротивления, полученные путем инвертирования данных CSEM, помогают найти области, представляющие интерес, и снизить потенциальные риски [10]. Активное внедрение различных методов и аппаратуры для поиска и оконтуривания УВЗ базируется на широком диапазоне направлений современных высокоэффективных технологий георазведки. При этом учитывается исследование взаимодействия окружающей среды и кристаллического скелета, образованного в АС над УВЗ и пронизанного проводящими включениями и электролитом с наличием минералов с электронной проводимостью [11].

Комплексное использование магнитотеллурических данных с интеграцией гравиметрических и сейсмических данных активно применялось на севере Германии для исследований соляного купола [12]. Современные возможности науки и техники в сочетании с применением управляемых источников излучения и их использованием в сложной геологической обстановке улучшают чувствительность и информативность методов поиска и оконтуривания месторождений УВЗ [13]. Исследования содействуют модернизации имеющихся ЭММ с повышением их эффективности, примером чего являются электроразведочные работы, проводимые методом зондирования становлением поля в ближней зоне (ЗСБ), при картировании рифейских отложений на территории Республики Саха (Якутия) [14] и многопараметровая аэро-разведка на основе метода сверхдлинноволнового радиоприемника (СДВР) для аэрогеофизических исследований нефтяных объектов Татарии [15]. Экспериментальные испытания и опыт практического применения морских методов может быть использован в поисковой геофизике [16]. Использование амплитудно-модулированных, частотно-модулированных, амплитудно-частотно-модулированных сигналов с регистрацией амплитудных и фазовых компонент поверхностного импеданса геологического участка местности возможно при поиске, оконтуривании залежей нефти и газа [17–20].

**Режимы зондирования углеводородов.** Цель данной работы заключается в разработке и совершенствовании ЭММ поиска и оконтуривания углеводородов на основе применения высокочастотных и модулированных сигналов. Для повышения точности и достоверности определения границ УВЗ следует рекомендовать радиокомплексирование указанных выше ЭММ.



Режим высокочастотного сигнала характеризуют составляющие  $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3$  с частотной компонентой  $\tilde{\omega}_2$ , плазменная частота  $\omega_{\text{Пл}}$ ; гиротропная частота  $\omega_{\text{ГТ}}$ ; частота столкновения частиц  $\nu_i$ ; относительная диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon_r$ ; проводимость среды  $\sigma_r$ ; диэлектрическая постоянная  $\epsilon_0$ ;  $\alpha = \omega_2 - \omega_1 = \omega_2(1 - k_\omega)$  – разность частот двух ЭМВ с амплитудами и частотами  $A_1, A_2, \omega_1, \omega_2$ . Компоненты тензора диэлектрической проницаемости АС над УВЗ в высокочастотном режиме (для двухчастотного воздействия) имеют вид [6]

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_1 = \epsilon_r \frac{\tilde{\omega}_2}{\omega_2} + \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{\omega_{\text{Пл}}^2 \tilde{\omega}_2}{\omega_2} \frac{\omega_{\text{ГТ}}^2 - \tilde{\omega}_2^2 - \nu_i^2}{(\nu_i^2 + \omega_{\text{ГТ}}^2 - \tilde{\omega}_2^2)^2 + 4\tilde{\omega}_2^2 \nu_i^2} - j \left[ \frac{\sigma_r}{\omega_2 \epsilon_0} + \frac{\omega_{\text{Пл}}^2 \nu_i}{\omega_2 (\nu_i^2 + \omega_{\text{ГТ}}^2 - \tilde{\omega}_2^2)^2 + 4\tilde{\omega}_2^2 \nu_i^2} \right] \right]; \\ \dot{\epsilon}_2 = \sum_{i=1}^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega_{\text{Пл}}^2 \omega_{\text{ГТ}}}{\omega_2} \frac{\omega_{\text{ГТ}}^2 - \tilde{\omega}_2^2 + \nu_i^2}{(\nu_i^2 + \omega_{\text{ГТ}}^2 - \tilde{\omega}_2^2)^2 + 4\tilde{\omega}_2^2 \nu_i^2} - \\ - \frac{2j\tilde{\omega}_2 \nu_i \omega_{\text{Пл}}^2 \omega_{\text{ГТ}}}{[(\nu_i^2 + \omega_{\text{ГТ}}^2 - \tilde{\omega}_2^2)^2 + 4\tilde{\omega}_2^2 \nu_i^2] \omega_2} \end{array} \right\}; \\ \dot{\epsilon}_3 = \epsilon_r \frac{\tilde{\omega}_2}{\omega_2} - \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\text{Пл}}^2 \tilde{\omega}_2}{\omega_2} \frac{1}{\nu_i^2 + \tilde{\omega}_2^2} - j \left[ \frac{\sigma_r}{\omega_2 \epsilon_0} + \frac{\omega_{\text{Пл}}^2 \nu_i}{\omega_2} \frac{1}{\tilde{\omega}_2^2 + \nu_i^2} \right] \right\}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Коэффициенты соотношения амплитуд двух волн и их частот

$$k_E = \frac{A_2}{A_1}; \quad k_\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (2)$$

выбираются из условий

$$\left\{ \begin{array}{l} k_E \gg 1; \\ k_\omega \ll 1. \end{array} \right. \quad (3)$$

Представляет интерес анализ частотных характеристик комбинационных составляющих (4).

Проводился анализ комбинационных составляющих тензора диэлектрической проницаемости среды над УВЗ для параметров среды над залежами углеводородов [2]:

– значения диэлектрической проницаемости вмещающих пород  $\epsilon_r = 1 - 30$  и электрической проводимости  $\sigma_r = 1 \cdot 10^{-5} - 1$  См/м;

– концентрации частиц  $N_e = N_n = (10^{16} - 10^{18}) \text{ м}^{-3}$ .

– частота столкновения частиц  $\nu = 2 \cdot \pi \cdot 10^9$  рад/с.

Рассмотрим воздействие на АС над углеводородами радиосигнала тональной амплитудной модуляции (АМ) вида

$$e(t) = E(1 + k_m \cos \Omega t) \cos \omega t, \quad (5)$$

где  $E$  – амплитуда несущего колебания;

$k_m$  – коэффициент амплитудной модуляции;

$\Omega = 2\pi F, \omega = 2\pi f$  – соответственно модулирующая и несущая частоты.

Для данного режима проводился анализ комбинационных составляющих тензора диэлектрической проницаемости среды над УВЗ и компонент поверхностного импеданса  $\dot{Z}_{11}$  и  $\dot{Z}_{12}$  (6).

Компоненты тензора диэлектрической проницаемости для двухчастичного потока определяются следующим образом [6]:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_r + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Gamma i}^2}{\omega} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2 - v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 v_i^2} + j \left[ \frac{\varepsilon_r k_m \Omega \sin \Omega t}{\omega(1 + k_m \cos \Omega t)} - \frac{\sigma_r}{\omega \varepsilon_0} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega_{\Pi i}^2 v_i}{\omega} \frac{\omega^2 + v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 v_i^2} \right\}; \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Pi i} \omega_{\Gamma i}}{\omega} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2 + v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 v_i^2} - \frac{2j v_i \omega_{\Pi i} \omega_{\Gamma i}}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 v_i^2} \right\}; \\ \dot{\varepsilon}_3 &= \varepsilon_r + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Pi i}^2}{\omega} \frac{1}{v_i^2 + \omega^2} + j \left[ \frac{\varepsilon_r k_m \Omega \sin \Omega t}{\omega(1 + k_m \cos \Omega t)} - \frac{\sigma_r}{\omega \varepsilon_0} - \frac{\omega_{\Pi i}^2 v_i}{\omega} \frac{1}{\omega^2 + v_i^2} \right] \right\}. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Процесс распространения радиосигнала частотной модуляции (ЧМ) над средой с наличием углеводородов, определяющей электродинамический отклик, имеет интерес с точки зрения анализа взаимодействия электромагнитных волн (ЭМВ) с АС и может быть представлен выражением

$$e(t) = E_2 \cos(\omega_2 t + \beta \sin \omega_1 t), \quad (7)$$

где  $E_2$  и  $\omega_2$  – соответственно амплитуда и частота несущего колебания;

$\omega_1$  – модулирующая частота;

$\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_1}$  – индекс модуляции,

где  $\Delta\omega$  – девиация частоты.

Компоненты тензора для двухчастичного потока представлены формулами [6]:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_r (1 + \beta \cdot k_\omega \cos \omega_1 t) + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Pi i}^2 \tilde{\omega}_3}{\omega_2} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_3^2 - v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_3^2)^2 + 4\tilde{\omega}_3^2 v_i^2} - j \left[ \frac{\sigma_r}{\omega_2 \varepsilon_0} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\omega_{\Pi i}^2 v_i}{\omega_2} \frac{\tilde{\omega}_3^2 + v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_3^2)^2 + 4\tilde{\omega}_3^2 v_i^2} \right] \right\}; \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Pi i} \omega_{\Gamma i}}{\omega_2} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_3^2 + v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_3^2)^2 + 4\tilde{\omega}_3^2 v_i^2} - \frac{2j \tilde{\omega}_3 v_i \omega_{\Pi i} \omega_{\Gamma i}}{[(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_3^2)^2 + 4\tilde{\omega}_3^2 v_i^2] \omega_2} \right\}; \\ \dot{\varepsilon}_3 &= \varepsilon_r (1 + \beta \cdot k_\omega \cos \omega_1 t) + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Pi i}^2 \tilde{\omega}_3}{\omega_2} \frac{1}{v_i^2 + \tilde{\omega}_3^2} - j \left[ \frac{\sigma_r}{\omega_2 \varepsilon_0} + \frac{\omega_{\Pi i}^2 v_i}{\omega_2} \frac{1}{\tilde{\omega}_3^2 + v_i^2} \right] \right\}. \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Режим ЧМ-сигнала характеризуется частотной составляющей

$$\tilde{\omega}_3 = \omega_2 [1 + \beta \cdot k_\omega \cos \omega_1 t]. \quad (9)$$

Проведено исследование влияния режимов зондирующих сигналов на характеристики АС над залежами.

**Результаты исследований.** На основании проведенного анализа была предложена адаптивная геоэлектрическая модель залежей углеводородов (рисунок 1). Она представляет собой комбинирование моделей Москвичёва и Сейфуллина с учетом проведенных исследований.

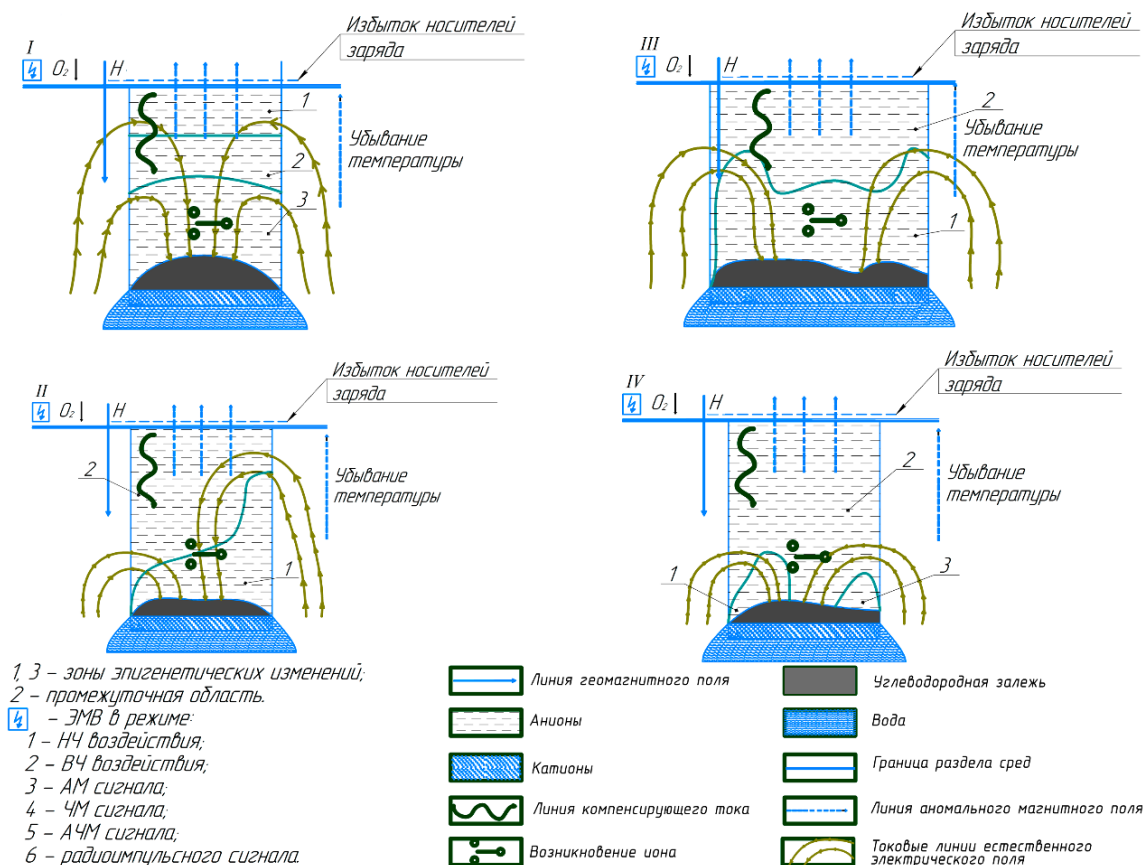


Рисунок 1. – Геоэлектрические модели залежей углеводородов

По модели Москвичёва [2] были задействованы положения:

- среда над залежью углеводородов – избирательная система многорезонансного характера;
- данная среда – анизотропное образование плазмopodobного типа с наличием магнитной аномалии поля  $\Delta \vec{H}$ ;
- физико-химические процессы во вмещающих породах приводят к смещению свободных носителей заряда по температурному градиенту;
- увеличение удельного электрического сопротивления над углеводородами из-за магнитной аномалии.

По модели Сейфуллина [21] приняты следующие факторы:

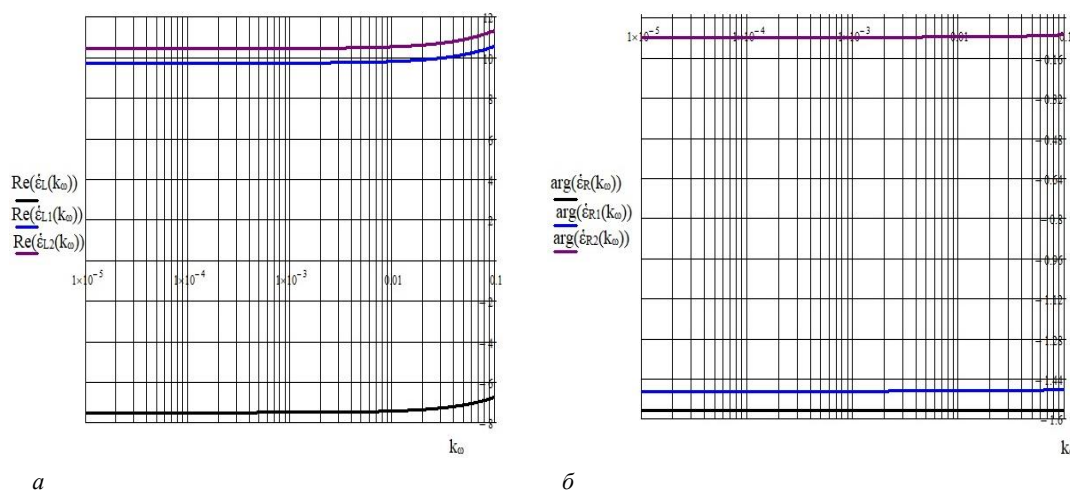
- повышение удельного сопротивления среды над УВЗ (совпадает с положением Москвичёва);
- формирование в таких средах источников естественных электрических полей (у Москвичёва более расширенная трактовка) и повышение поляризуемости этих же объемов среды;
- учет факторов, влияющих на эффект миграции вещества и на глубинность исследований;
- наличие вариантов моделей в зависимости от сочетания различных факторов.

Автором данной работы предложено дополнение к комбинированной модели, заключающееся в анализе свойств АС над УВЗ на основе определения тензоров диэлектрической проницаемости среды в следующих режимах:

- двухчастотное взаимодействие ЭМВ и среды над углеводородами (режимы мощного низкочастотного и мощного высокочастотного сигналов);
- взаимодействие модулированных ЭМВ с УВЗ (режимы АМ, ЧМ и амплитудно-частотно-модулированных (АЧМ) сигналов);
- режим радиоимпульсных сигналов.

Было принято решение назвать такую модель адаптивной вследствие возможности ее дополнения в будущем результатами исследований среды над УВЗ в других режимах зондирования и получения большего объема информации о характеристиках данной среды. Также предполагается коррекция модели по результатам экспериментальных исследований, применения для этого методов радиокомплексирования и выделения варианта модели залежи углеводородов по методике Сейфуллина [21].

Системы поиска на основе двухканальных схем определения комбинационных составляющих позволяют использовать характеристики сигналов согласно рисунку 2. Представляет интерес отрезок значений коэффициента отношения частот 0,01 – 0,1. Вариация данного параметра влияет на разностную компоненту, и данное обстоятельство позволяет учитывать возможность выполнения более глубоких зондирований с лучшей помехозащищенностью при активном использовании методик испытаний и ряд других факторов.



- a** –  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_L(k_\omega))$  – для  $\epsilon_r = 30, k_E = 10, f_2 = 10^5$  Гц;  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{L1}(k_\omega))$  – для  $\epsilon_r = 20, k_E = 10, f_2 = 10^7$  Гц;  
 $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{L2}(k_\omega))$  – для  $\epsilon_r = 10, k_E = 10, f_2 = 10^9$  Гц;
- б** –  $\text{arg}(\dot{\epsilon}_R(k_\omega))$  – для  $\epsilon_r = 30, k_E = 10, f_2 = 10^5$  Гц;  $\text{arg}(\dot{\epsilon}_{R1}(k_\omega))$  – для  $\epsilon_r = 20, k_E = 10, f_2 = 10^7$  Гц;  
 $\text{arg}(\dot{\epsilon}_{R2}(k_\omega))$  – для  $\epsilon_r = 10, k_E = 10, f_2 = 10^9$  Гц

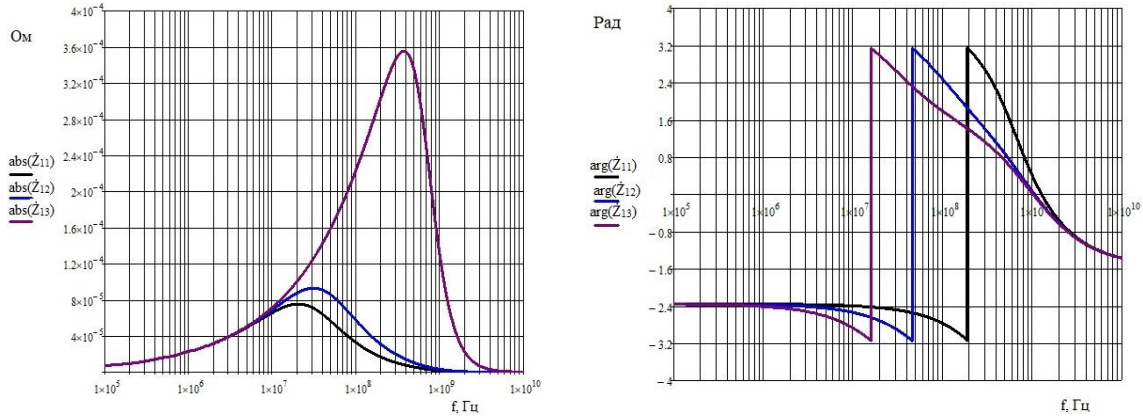
**Рисунок 2.** – Зависимости вещественной и фазовой составляющих разностной компоненты тензора от коэффициента отношения частот ( $N_e = 10^{16} \text{ м}^{-3}, N_n = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ )

Установлено, что фаза суммарной компоненты не подвержена влиянию коэффициента отношения частот. В каждом конкретном случае учитывается значение скорости миграций заряженных частиц в отдельных участках вертикального разреза над залежью, влияние концентрации отдельных химических элементов и корреляция результатов расчетов с данными полевых измерений, применение особенностей профилей местности и корректирующих факторов при испытаниях.

Таким образом, при осуществлении геологоразведочных работ на нефть и газ проводится большой комплекс исследований: полевых геологических, геофизических, геохимических, электроразведочных и буровых работ. В зависимости от целей, масштаба, особенностей изучаемой территории и стадийности работ доминирует тот или иной метод.

Проведен анализ компонент поверхностного импеданса среды над УВЗ. Абсолютные и фазовые значения для компонент поверхностного импеданса среды над УВЗ  $\dot{Z}_{11}$  приведены на рисунке 3. На частотах (10 – 400) МГц происходит резонансное увеличение данной компоненты поверхностного импеданса. Зондирование АС двухчастотными ЭМВ в режиме АМ-сигналов позволяет исследовать физико-геологические свойства пород-коллекторов вдоль геологического профиля, волновые эффекты, основанные на исследовании поглощения радиоволн горными породами и рудами, процессы отражения, преломления и дифракции на исследуемых геологических объектах. С увеличением диэлектрической проницаемости наполнителя вмещающих пород частота резонанса смещается влево по оси абсцисс.

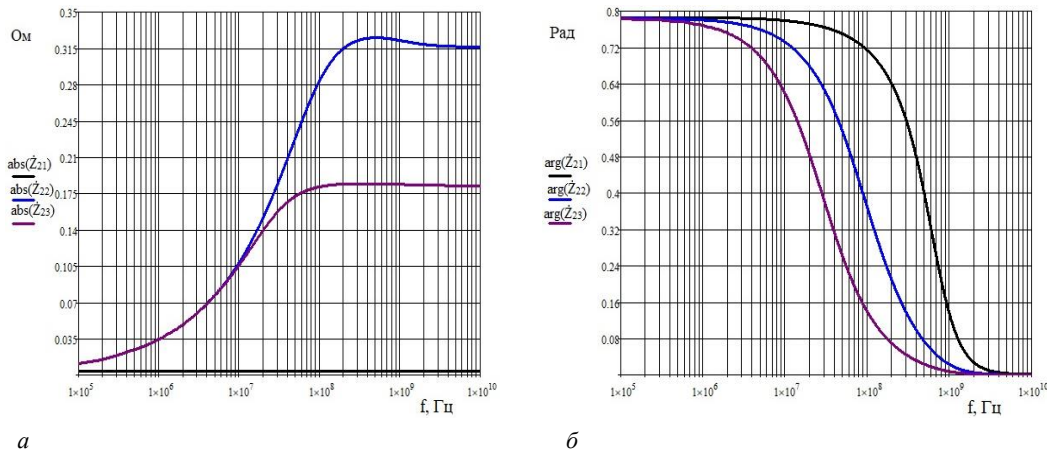
Значения составляющих тензора анизотропной среды над углеводородами зависят от поглощения радиоволн в мощности пласта породы, поэтому частота резонанса может смещаться в область высоких частот. Наблюдается скачкообразный рост фазовой составляющей на частотах 20 МГц – 200 МГц. С увеличением значения диэлектрической проницаемости среды частота увеличения фазы смещается влево. Фазовые характеристики рассматриваемой компоненты не меняются в диапазоне частот 10 кГц – 1 МГц. На участке 60 МГц – 10 ГГц происходит уменьшение фазы с положительных значений на отрицательные и переходом через нуль между (1 – 2) ГГц.



**а** —  $|\dot{Z}_{11}(f)|$  — для  $k_m = 0,5$ ,  $\epsilon_r = 10$ ,  $F = 10^4$  Гц;  $|\dot{Z}_{12}(f)|$  — для  $k_m = 0,5$ ,  $\epsilon_r = 10$ ,  $F = 10^4$  Гц;  
 $|\dot{Z}_{13}(f)|$  — для  $k_m = 0,5$ ,  $\epsilon_r = 10$ ,  $F = 10^4$  Гц;  
**б** —  $\arg(\dot{Z}_{11}(f))$  — для  $k_m = 0,5$ ,  $\epsilon_r = 10$ ,  $F = 10^4$  Гц;  $\arg(\dot{Z}_{12}(f))$  — для  $k_m = 0,5$ ,  $\epsilon_r = 10$ ,  $F = 10^4$  Гц;  
 $\arg(\dot{Z}_{13}(f))$  — для  $k_m = 0,5$ ,  $\epsilon_r = 10$ ,  $F = 10^4$  Гц

**Рисунок 3. – Зависимости абсолютной и фазовой составляющих поверхностного импеданса  $\dot{Z}_{11}$  от частоты несущего колебания**

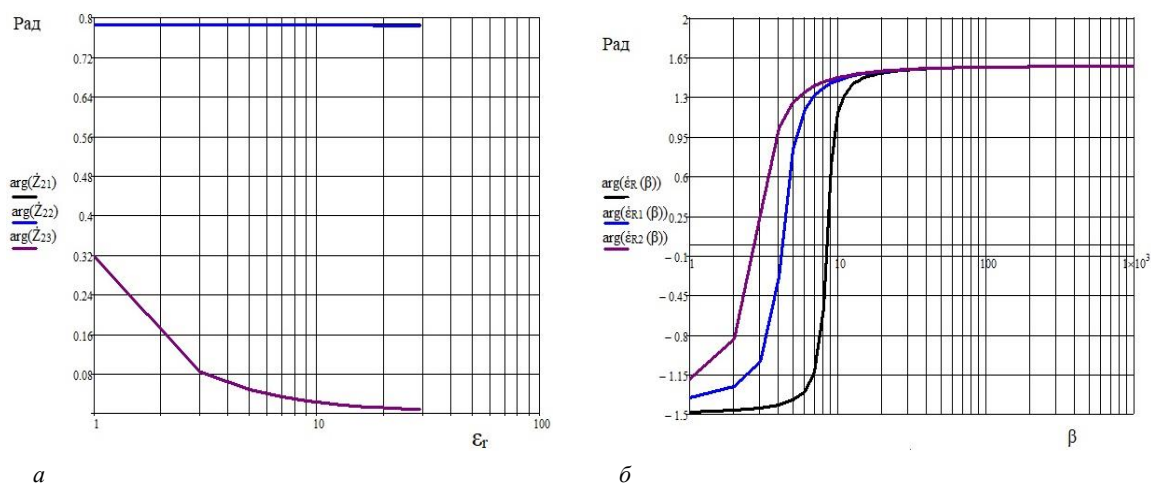
Дополнительно были проанализированы амплитудные составляющие компонент поверхностного импеданса среды над УВЗ для  $|\dot{Z}_{21}(f_2)|$  (рисунок 4, а). Закон изменения абсолютной составляющей для данной компоненты отличается от рассмотренной выше характеристики. На участке (1 МГц – 1 ГГц) происходит увеличение поверхностного импеданса и при дальнейшем росте частоты зондирования характеристика не меняется. Проведено моделирование зависимостей фазовых характеристик компонент данной составляющей поверхностного импеданса от частоты (рисунок 4, б). Установлено, что низкие значения частоты  $f_2$  не влияют на амплитудную компоненту рассматриваемой составляющей. На участке (1 МГц – 1 ГГц) происходит уменьшение фазы поверхностного импеданса, и при дальнейшем росте частоты зондирования характеристика не меняется.



**а** —  $|\dot{Z}_{21}(f)|$  — для  $k_m = 0,5$ ,  $\epsilon_r = 10$ ,  $F = 10^4$  Гц;  $|\dot{Z}_{22}(f)|$  — для  $k_m = 0,5$ ,  $\epsilon_r = 10$ ,  $F = 10^4$  Гц;  
 $|\dot{Z}_{23}(f)|$  — для  $k_m = 0,5$ ,  $\epsilon_r = 10$ ,  $F = 10^4$  Гц;  
**б** —  $\arg(\dot{Z}_{21}(f))$  — для  $k_m = 0,5$ ,  $\epsilon_r = 10$ ,  $F = 10^4$  Гц;  $\arg(\dot{Z}_{22}(f))$  — для  $k_m = 0,5$ ,  $\epsilon_r = 10$ ,  $F = 10^4$  Гц;  
 $\arg(\dot{Z}_{23}(f))$  — для  $k_m = 0,5$ ,  $\epsilon_r = 10$ ,  $F = 10^4$  Гц

**Рисунок 4. – Зависимости абсолютной и фазовой составляющих поверхностного импеданса  $\dot{Z}_{12}$  от частоты несущего колебания**

Проведено моделирование зависимостей фаз поверхностного импеданса  $\dot{Z}_{21}$  и диэлектрической проницаемости среды над УВЗ  $\arg(\dot{\epsilon}_R)$ , представленных на рисунке 5.



**а** –  $\arg(\dot{Z}_{21}(\epsilon_r))$  – для  $f_2 = 10^4$  Гц,  $\beta = 1$ ;  $\arg(\dot{Z}_{22}(\epsilon_r))$  – для  $f_2 = 10^5$  Гц,  $\beta = 1$ ;  
 $\arg(\dot{Z}_{23}(\epsilon_r))$  – для  $f_2 = 10^9$  Гц,  $\beta = 1$ ;  
**б** –  $\arg(\dot{\epsilon}_R(\beta))$  – для  $k_m = 0,5$ ,  $\epsilon_r = 10$ ;  $\arg(\dot{\epsilon}_{R1}(\beta))$  – для  $k_m = 0,5$ ,  $\epsilon_r = 20$ ;  
 $\arg(\dot{\epsilon}_{R2}(\beta))$  – для  $k_m = 0,5$ ,  $\epsilon_r = 30$

**Рисунок 5.** – Зависимости фазовых составляющих поверхностного импеданса  $\dot{Z}_{21}$  и диэлектрической проницаемости среды над УВЗ  $\arg(\dot{\epsilon}_R)$

Установлено, что данные характеристики (см. рисунок 5, а) не изменяются при низких значениях частоты несущей. На частоте  $f_2 = 10^9$  Гц с ростом диэлектрической проницаемости характеристики имеют большую крутизну. Это влияние проявляется для значений диэлектрических проницаемостей меньше 10. Фазовые характеристики для компонент диэлектрической проницаемости среды над УВЗ для ЭМВ с правой круговой поляризацией имеют наибольшие изменения при значениях индекса частотной модуляции 1 – 10.

**Заключение.** Проведенный анализ ЭММ при распространении ЭМВ в среде над углеводородами показал следующее:

- в режиме АМ сигнала частота электронного плазменного резонанса лежит в пределах (5 – 15) МГц, частота электронного циклотронного резонанса соответствует значениям (15 – 25) кГц, вещественная составляющая компоненты  $\dot{\epsilon}_3$  при частоте несущего колебания  $f = (1 \cdot 10^6 - 30 \cdot 10^7)$  Гц скачкообразно уменьшается;

- в режиме ЧМ сигнала вещественная составляющая ЭМВ с правой поляризацией имеет частоты электронного плазменного резонанса в пределах (8 – 20) МГц, частота электронного циклотронного резонанса лежит в пределах (15 – 20) кГц;

- в режиме АЧМ сигнала частоты электронного плазменного резонанса находятся в пределах (6 – 30) МГц, частота электронного циклотронного резонанса лежит в пределах (20 – 40) кГц;

- в режиме радиоимпульсного сигнала вещественная составляющая ЭМВ с правой поляризацией имеет частоты электронного плазменного резонанса в пределах 800 кГц – 1,5 МГц, частота электронного циклотронного резонанса лежит в пределах (70 – 90) кГц.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бурцев, М. И. Поиски и разведка месторождений нефти и газа / М. И. Бурцев – М. : Рос. ун-т дружбы народов. – 2006. – 264 с.
2. Moskvichew, V. N. Interaction of electromagnetic waves (EMW) with anisotropic inclusion in communication line / V. N. Moskvichew // 9<sup>th</sup> Microw. Conf. NICON – 91, Rydzyna, May 20–22, 1991. – Vol. 1. – P. 240–244.
3. Effect of a powerful low-frequency signal on an anisotropic medium over hydrocarbon / V. F. Yanushkevich [et al.] // J. of Physics : Conference Series. – 2021. – Vol. 1889. – DOI: [10.1088/1742-6596/1889/2/022059](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1889/2/022059).
4. Геофизические методы исследования : учеб. пособие для геологических специальностей вузов / В. К. Хмелевской [и др.]. – Петропавловск-Камчатский : КГПУ, 2004. – 227 с.

5. Сейсмические методы при разведке полезных ископаемых и планировании горных работ – Введение / А. Малехмир [и др.] // Геофизика. – 2012. – DOI: [10.1190/2012-0724-SPSEIN.1](https://doi.org/10.1190/2012-0724-SPSEIN.1).
6. Янушкевич, В. Ф. Электромагнитные методы поиска и идентификации углеводородных залежей / В. Ф. Янушкевич. – Новополоцк : ПГУ, 2017. – 232 с.
7. Time lapse CSEM reservoir monitoring of the Norne field with vertical dipoles / T. Holten [et al.] // SEG Technical Program Expanded Abstracts. – 2016. – Vol. 35. – P. 971–975.
8. Шайдуллин, Р. П. Поиск перспективных на углеводороды объектов с использованием методов ГИС на примере отложений Саргаевского горизонта / Р. П. Шайдуллин, С. Е. Воронков // Междунар. журн. гуманитарных и естественных наук. – Vol. 4-1 (67), 2022. – P. 66–73. – DOI: [10.24412/2500-1000-2022-4-1-66-73](https://doi.org/10.24412/2500-1000-2022-4-1-66-73).
9. Geldmacher, I. A Fit-for-purpose electromagnetic System for Reservoir Monitoring and Geothermal Exploration / I. Geldmacher, K. Strack // GRC Transactions. – 2017. – Vol. 41. – P. 1649–1658.
10. Gabrielsen, P. T. 3D CSEM for hydrocarbon exploration in the Barents Sea / P. T. Gabrielsen, D. V. Shantsev, S. Fanavoll // EAGE 5<sup>th</sup> St. Petersburg conf. & exhib. – 2012. – DOI: [10.3997/2214-4609.20143664](https://doi.org/10.3997/2214-4609.20143664).
11. Гололобов, Д. В. Взаимодействие электромагнитных волн и углеводородных залежей / Д. В. Гололобов. – Минск : Бестпринт, 2009. – 185 с.
12. Subsalt imaging in Northern Germany using multi-physics (magnetotellurics, gravity, and seismic) / C. H. Henke [et al.] // Interpretatio. – 2020. – Vol. 8. – № 4. – P. 15–24.
13. Helwig, S. L. Vertical-vertical controlled-source electromagnetic instrumentation and acquisition / S. L. Helwig, W. Wood, B. Gloux // Geophysical Prospecting. – 2019. – Vol. 67. – № 6. – P. 1582–1594.
14. Мисюркеева, Н. В. Результаты электроразведочных работ методом ЗСБ при картировании рифейских отложений на территории Республики Саха (Якутия) / Н. В. Мисюркеева, И. В. Буддо, Ю. А. Агафонов // Геология, геофизика и минеральное сырье Сибири : материалы II науч.-практ. конф., Новосибирск, 21–24 апр. 2015 г. / Сиб. НИИ геологии, геофизики и минер. сырья. – Новосибирск, 2015. – С. 80–83.
15. Барышников, И. А. Многопараметровая аэроаэрозондировка методом СДВР при аэрогеофизических исследованиях на нефтяных объектах Татарии / И. А. Барышников, А. Ю. Татарский // Электромагнитные исследования с контролируемые источники : тез. докл. междунар. геофиз. конф., СПб., 24–31 мая 1996 г. / ВИРГ – Рудгеофизика ; редкол.: А. А. Петров [и др.]. – СПб., 1996. – С. 39–40.
16. Anderson, C. An integrated approach to marine electromagnetic surveying using a towed streamer and source / C. Anderson, J. Mattsson // First Break. – 2010. – Vol. 28, iss. 5. – P. 71–75.
17. Гололобов, Д. В. Влияние параметров амплитудно-модулированного воздействия на фазовые составляющие поверхностного импеданса анизотропной среды плазмopodobного типа / Д. В. Гололобов, О. В. Орлова, В. Ф. Янушкевич // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – Новополоцк, 2010. – № 9. – С. 98–101.
18. Взаимодействие ЧМ-сигналов с анизотропной средой / Д. В. Гололобов [и др.]. // Проблемы проектирования и производства радиоэлектронных средств : сб. материалов 2-й междунар. науч.-техн. конф., Новополоцк, 15–17 мая 2002 г. / Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2002. – С. 300–303.
19. Степуленок, С. В. Взаимодействие амплитудно-частотно-модулированных сигналов со средой над углеводородными залежами / С. В. Степуленок, В. Ф. Янушкевич // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2009. – № 9. – С. 103–108.
20. Гололобов, Д. В. Взаимодействие АМ-сигнала с углеводородной залежью / Д. В. Гололобов, В. Ф. Янушкевич // Современные проблемы радиотехники, электродинамики и связи : тез. докл. науч.-техн. конф., посвященной столетию радио / Бел. гос. ун-т информатики и радиоэлектроники. – Минск, 1995. – С. 6–7.
21. Эффективность электроразведки при поисках залежей углеводородов на западе Украины / Р. С. Сейфуллин [и др.] // Методика и практика геофизических исследований. – Львов : УкрНИГРИ, 1981. – С. 101–103.

## REFERENCES

1. Burtsev, M. I. (2006). *Poiski i razvedka mestorozhdenii nefiti i gaza [Search and exploration of oil and gas fields]*. Moscow: RUDN. (In Russ.).
2. Moskvichew, V. N. (1991). Interaction of electromagnetic waves (EMW) with anisotropic inclusion in communication line, *9th Microw. Conf. NICON – 91: Vol. 1*, (240–244). Rydzyna.
3. Yanushkevich, V. F., Dauhiala, D. A., Adamovich, A. L., Abramenska, S. N., & Bogush, V. A. (2021). *Effect of a powerful low-frequency signal on an anisotropic medium over hydrocarbon // Journal of Physics [Conference Series]*, (1889). DOI: [10.1088/1742-6596/1889/2/022059](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1889/2/022059).
4. Khmelevskoi, V. K., Gorbachev, Yu. I., Kalinin, A. V., Popov, M. G., Seliverstov, N. I., & Shevnin, V. A. (2004). *Geofizicheskie metody issledovaniya [Geophysical research methods]*. Petropavlovsk-Kamchatskii: KGPU.
5. Malekhmir, A., Urosevich, M., Bellefler, G., Dzhukhlin C., & Milkerait, B. (2012). *Seismicheskie metody pri razvedke poleznykh iskopaemykh i planirovani gornyykh rabot – Vvedenie [Seismic methods in mineral exploration and mine planning]*. *Geofizika*. DOI: [10.1190/2012-0724-SPSEIN.1](https://doi.org/10.1190/2012-0724-SPSEIN.1).
6. Yanushkevich, V. F. (2017). *Elektromagnitnye metody poiska i identifikatsii uglevodorodnykh zalezhei [Electromagnetic methods for searching and identifying hydrocarbon deposits]*. Novopolotsk: PGU. (In Russ.).
7. Holten, T., Luo, X., Naevdal, G., & Helwig, S. L. (2016). Time lapse CSEM reservoir monitoring of the Norne field with vertical dipoles. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, (35), 971–975.
8. Shaidullin, R. R., & Voronkov, S. E. (2022). Poisk perspektivnykh na uglevodorody ob'ektov s ispol'zovaniem metodov GIS na primere otlozhenii Sargaevskogo gorizonta (Search for objects promising for hydrocarbons using well logging methods on the example of deposits of the Sargaev horizon). *Mezhdunarodnyi zhurnal gumanitarnykh i estestvennykh nauk [International Journal of Humanities and Natural Sciences]*, 4-1(67), 66–73. DOI: [10.24412/2500-1000-2022-4-1-66-73](https://doi.org/10.24412/2500-1000-2022-4-1-66-73).

9. Geldmacher, I., & Strack, K. (2017). A Fit-for-purpose electromagnetic System for Reservoir Monitoring and Geothermal Exploration. *GRC Transactions*, (41), 1649–1658.
10. Gabrielsen, P.T., Shantsev, D.V., & Fanavoll, S. (2012). 3D CSEM for hydrocarbon exploration in the Barents Sea. In *EAGE 5<sup>th</sup> St. Petersburg conf. & exhib.* DOI: [10.3997/2214-4609.20143664](https://doi.org/10.3997/2214-4609.20143664).
11. Gololobov, D. V. (2009) *Vzaimodeistvie elektromagnitnykh voln i uglevodorodnykh zalezhei [Interaction of electromagnetic waves and hydrocarbon deposits]*. Minsk: Bestprint. (In Russ.).
12. Henke, C. H., Krieger, M., Strack, K., & Zerilli, A. (2020). Subsalt imaging in Northern Germany using multi-physics (magnetotellurics, gravity, and seismic). *Interpretatio*, 8(4), 15–24.
13. Helwig, S. L., Wood, W., & Gloux B. (2019). Vertical-vertical controlled-source electromagnetic instrumentation and acquisition. *Geophysical Prospecting*, 67(6), 1582–1594.
14. Misyurkeeva, N. V., Buddo, I. V., & Agafonov, Yu. A. (2015). Rezul'taty elektrorazvedochnykh rabot metodom ZSB pri kartirovaniy rifeiskikh otlozhenii na territorii Respubliki Sakha (Yakutiya) [The results of electrical exploration works using the TSB method when mapping Riphean deposits on the territory of the Republic of Sakha (Yakutia)]. In *Geologiya, geofizika i mineral'noe syr'e Sibiri [Geology, geophysics and mineral raw materials of Siberia]* (80–83). Novosibirsk: SNIIGIMS. (In Russ., abstr. in Engl.).
15. Baryshnikov, I. A., & Tatarskii, A. Yu. (1996). Mnogoparametrovaya aerorazvedka metodom SDVR pri aerogeofizicheskikh issledovaniyakh na nefyanykh ob'ektakh Tatarii [Multi-parameter aerial survey using the SDVR method in airborne geophysical studies at oil facilities in Tataria]. In A. A. Petrov [et al.] (Eds.) *Elektromagnitnye issledovaniya s kontroli-ruemyimi istochnikami [Electromagnetic research with controlled sources]* (39–40). St. Petersburg: VIRG – Rudgeofizika. (In Russ.).
16. Anderson, C., & Mattsson, J. (2010). An integrated approach to marine electromagnetic surveying using a towed streamer and source. *First Break*, 28(5), 71–75.
17. Gololobov, D. V., Orlova, O. V., & Yanushkevich, V. F. (2010). Vliyanie parametrov amplitudno-modulirovannogo vozdeistviya na fazovye sostavlyayushchie poverkhnostnogo impedansa anizotropnoi sredy plazmopodobnogo tipa [Influence of the amplitude-modulated effect parameters on the phase components of the surface impedance of an anisotropic plasma-like medium]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (9), 98–101. (In Russ., abstr. in Engl.).
18. Gololobov, D. V., Tsyvis, N. V., Yanushkevich, V. F., Kalintsev, S. V., & Khadyko, D. L. (2002). Vzaimodeistvie ChM-signalov s anizotropnoi sredoi [Interaction of FM signals with an anisotropic medium]. In *Problemy proektirovaniya i proizvodstva radioelektronnykh sredstv [Problems of design and production of radio electronic facilities]* (300–303). Novopolotsk: Publ. PSU. (In Russ.).
19. Stepulenok, S. V., & Yanushkevich, V. F. (2009). Vzaimodeistvie amplitudno-chastotno-modulirovannykh signalov so sredoi nad uglevodo-rodnyimi zalezhami [Interaction of amplitude-frequency-modulated signals with the environment above hydrocarbon deposits]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (9), 103–108. (In Russ., abstr. in Engl.).
20. Gololobov, D. V., & Yanushkevich, V. F. (1995). Vzaimodeistvie AM-signala s uglevodorodnoi zalezh'yu [Interaction of the AM-signal with a hydrocarbon reservoir]. In *Sovremennye problemy radiotekhniki, elektrodinamiki i svyazi [Modern problems of radio engineering, electrodynamics and communications]* (6–7). Minsk: Publ. BSUIR. (In Russ.).
21. Seifullin, R. S., Ozerskii, I. P., Freik, I. N., & Khavenzy, I. V. (1981). Effektivnost' elektrorazvedki pri poiskakh zalezhei uglevodorodov na zapade Ukrainy [The effectiveness of electrical exploration in the search for hydrocarbon deposits in the west of Ukraine]. In *Metodika i praktika geofizicheskikh issledovaniy [Methods and Practice of Geophysical Research]* (101–103). Lviv: UkrNIGRI. (In Russ.).

Поступила 22.06.2022

## ELECTROMAGNETIC METHODS OF SEARCHING AND DEFINITION OF HYDROCARBON DEPOSITS

V. YANUSHKEVICH  
(*Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk*)

*The article studies the characteristics of an anisotropic medium over hydrocarbons with the complex use of electromagnetic geo-exploration methods. The simulation of the components of dielectric permittivity tensors in the mode of amplitude-modulated, frequency-modulated, amplitude-frequency-modulated and radio pulse signals is carried out. The frequencies of the electron plasma and electron cyclotron resonances for the specified regimes are established. A study was made of the influence of modes of probing signals on the characteristics of an anisotropic medium above deposits and the components of the dielectric tensor. The effect of particle concentration variation on the real components of the components of the dielectric permittivity of an anisotropic medium above the UVZ is analyzed. Recommendations are given for improving the methods of electrical exploration and their application for prospecting geophysics.*

**Keywords:** *electromagnetic methods, hydrocarbon reservoir, permittivity tensor.*



УДК 621.371: 550.837.6

DOI 10.52928/2070-1624-2022-39-11-89-98

## МЕТОДЫ ПОИСКА И ОКОНТУРИВАНИЯ УГЛЕВОДОРОДНЫХ ЗАЛЕЖЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДУЛИРОВАННЫХ И РАДИОИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ

канд. техн. наук, доц. В. Ф. ЯНУШКЕВИЧ

(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

*Исследованы характеристики анизотропной среды над углеводородами с использованием модулированных и радиоимпульсных сигналов. Проведено моделирование компонент поверхностного импеданса среды над углеводородными залежами в режиме амплитудно-частотно-модулированных сигналов и вещественных составляющих тензора диэлектрической проницаемости в режиме радиоимпульсных сигналов. Акцентировано внимание на применение радиокомплексирования электромагнитных методов при увеличении количества информационных каналов. Исследовано влияние режимов зондирующих сигналов на характеристики анизотропной среды над залежами и компоненты тензора диэлектрической проницаемости. Предложены методы и способы геоэлектроразведки углеводородных залежей.*

**Ключевые слова:** электромагнитные методы, углеводородная залежь, тензор диэлектрической проницаемости.

**Введение.** В настоящее время в поисковой геофизике при поиске углеводородных залежей (УВЗ) предпочтение отдается внедрению электромагнитных методов (ЭММ) георазведки [1–3]. При обнаружении углеводородов (нефти и газа) используется метод интегральных уравнений для трехмерной анизотропной инверсии электромагнитных данных, собранных системой с буксируемой косой и одновременной регистрацией сейсмических и электромагнитных данных [4]. Применение широкополосных магнитотеллурических данных естественного поля позволило улучшить определение контрастов удельного сопротивления с окружающими породами и визуализацию верхней части солевых пластов [5]. Геофизические методы исследования широко применяются на практике [6]. Использование вертикальных диполей с помощью CSEM методов позволяет разрабатывать аппаратуру с новыми методиками испытаний [7]. Результаты комплексного анализа материалов геофизических и гидродинамических исследований являются надежной основой эффективного использования промысловой геофизики для подсчета запасов и разработки месторождений [8].

Внедряются системы со структурой, подобной сейсмической аппаратуре с совмещением регистрации электромагнитных и микросейсмических данных в одном блоке [9]. Особенности режимов с применением модулированных сигналов позволяют повысить информативность ЭММ [10]. Современный этап проведения геолого-разведочных работ при поиске УВЗ характеризуется усложнением горно-геологических и природно-климатических условий их проведения [11]. Глубина исследований может достигать 15...16 км<sup>1</sup>. Вертикально-вертикальный ЭММ с контролируемым источником является альтернативой другим методам получения трехмерных изображений удельного сопротивления недр. Он использует мощный вертикальный дипольный передатчик и комплекты приемников электрического поля с вертикальными и горизонтальными дипольными датчиками [12]. Использование дистанционных технологий поиска полезных ископаемых на основе установленного собственного изучения углеводородов [13] актуально для повышения производительности геолого-разведочных работ. Режимы зондирования в каждом конкретном способе георазведки основаны на особенностях проявления электродинамических откликов сред над УВЗ<sup>2</sup> [14; 15]. Установлено, что использование частотно-модулированных и амплитудно-частотно-модулированных сигналов позволяет повысить информативность методов поиска УВЗ за счет следующих эффектов: составляющие тензоров диэлектрической проницаемости сред над углеводородами имеют функциональную зависимость от характеристик сигналов и имеется отличие условий распространения электромагнитных волн (ЭМВ) над исследуемой анизотропной средой (АС) в различных режимах [16; 17].

Комплексное применение методов поиска выделения границ залежей углеводородов является одним из направлений современных высокоэффективных ЭММ [18] поисковой геофизики.

**Методы поиска с использованием модулированных и радиоимпульсных сигналов.** Цель данной работы заключается в установлении дополнительных закономерностей физико-химических процессов

<sup>1</sup> Способ и устройство для геофизических исследований путем обнаружения неоднородностей с использованием электромагнитных полей с экстремально низкими частотами : пат. US 5777478 / J. R. Jackson [et al.]. – Оpubл. 07.07.1998.

<sup>2</sup> Способ радиоволнового зондирования и устройство для его осуществления / В. К. Томилиг, Г. П. Астафьев, В. И. Луконин : пат. RU 2152060. – Оpubл. 27.06.2000.

в анизотропных средах над УВЗ с помощью радиокомплексирования ЭММ георазведки на основе применения модулированных и радиоимпульсных сигналов.

При одночастотной гармонической модуляции амплитуды и частоты радиосигнал имеет вид

$$e(t) = E_{\omega} (1 + k_m \cos \Omega t) \cos [\omega t + \beta \cdot \cos \Omega t], \quad (1)$$

где  $E_{\omega}$  – амплитуда сигнала несущей частоты  $\omega$ ;

$k_m, \beta$  – соответственно коэффициент амплитудной модуляции и индекс частотной модуляции.

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_r (1 - k_m^2 \sin^2 \Omega \cdot t) + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Pi i}^2 \tilde{\omega}_4}{\omega} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2 - v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2} + j \left[ \frac{\varepsilon_r \beta \cdot k_m \sin \Omega \cdot t}{1 + \beta \cdot \cos \Omega \cdot t} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\sigma_r}{\omega \varepsilon_0} - \frac{\omega_{\Pi i}^2 v_i}{\omega} \frac{\tilde{\omega}_4^2 + v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2} \right] \right\}, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Pi i}^2 \omega_{\Gamma i}}{\omega} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2 + v_i^2}{(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2} - \frac{2j \tilde{\omega}_4 v_i \omega_{\Pi i}^2 \omega_{\Gamma i}}{\omega [(v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - \tilde{\omega}_4^2)^2 + 4\tilde{\omega}_4^2 v_i^2]} \right\}, \\ \dot{\varepsilon}_3 &= \varepsilon_r (1 - k_m^2 \sin^2 \Omega \cdot t) + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\omega_{\Pi i}^2 \tilde{\omega}_4}{\omega} \frac{1}{v_i^2 + \tilde{\omega}_4^2} + j \left[ \frac{\varepsilon_r \beta \cdot k_m \sin \Omega \cdot t}{1 + \beta \cdot \cos \Omega \cdot t} - \frac{\sigma_r}{\omega \varepsilon_0} - \frac{\omega_{\Pi i}^2 v_i}{\omega} \frac{1}{\tilde{\omega}_4^2 + v_i^2} \right] \right\}, \end{aligned} \right. \quad (2)$$

при этом

$$\tilde{\omega}_4 = \omega [1 - k_m^2 \sin^2 \Omega t]. \quad (3)$$

Был проведен расчет компонент матрицы поверхностного импеданса анизотропной среды над УВЗ:

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} \\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Компоненты матрицы (4) определяются по формулам

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{11} = \dot{Z}_{22} &= -\frac{1}{2j\sqrt{\dot{\varepsilon}_R \dot{\varepsilon}_L}} (\sqrt{\dot{\varepsilon}_R} - \sqrt{\dot{\varepsilon}_L}); \\ \dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} &= \frac{1}{2\sqrt{\dot{\varepsilon}_R \dot{\varepsilon}_L}} (\sqrt{\dot{\varepsilon}_R} + \sqrt{\dot{\varepsilon}_L}). \end{aligned} \quad (5)$$

Представляет интерес анализ частотных характеристик комбинационных составляющих

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_R &= \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = \operatorname{Re} \dot{\varepsilon}_R + j \operatorname{Im} \dot{\varepsilon}_R; \\ \dot{\varepsilon}_L &= \dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2 = \operatorname{Re} \dot{\varepsilon}_L + j \operatorname{Im} \dot{\varepsilon}_L. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим воздействие ЭМВ на УВЗ радиоимпульсным сигналом вида

$$A(f) = \frac{U \cdot \tau}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(2 \cdot \pi \cdot f - 2 \cdot \pi \cdot F_2) \cdot \tau}{2}}{(2 \cdot \pi \cdot f - 2 \cdot \pi \cdot F_2) \cdot \tau} + \frac{\sin \frac{(2 \cdot \pi \cdot f + 2 \cdot \pi \cdot F_2) \cdot \tau}{2}}{(2 \cdot \pi \cdot f + 2 \cdot \pi \cdot F_2) \cdot \tau}, \quad (7)$$

где  $U$  – амплитуда сигнала;

$f$  – частота сигнала;

$F_2$  – частота несущего сигнала;

$\tau$  – длительность импульса.

Значение

$$F = \frac{\tau}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi \cdot n \cdot F_1 \cdot \tau)}{\pi \cdot n \cdot F_1 \cdot \tau}, \quad (8)$$

где  $T$  – период,

$F_1$  – частота следования импульсов;

$n$  – количество гармоник спектра радиоимпульсного сигнала.

Компоненты тензора диэлектрической проницаемости для такого режима взаимодействия имеют следующий вид [14]:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \epsilon_r \cdot F \left(1 + \frac{n\Omega_1}{\omega}\right) + \sum_{i=1}^2 \left\{ \begin{aligned} &\frac{F \cdot \omega_{\Gamma i}^2}{\omega} \cdot \frac{(\omega + n\Omega_1) \cdot [\omega_{\Gamma i}^2 - (\omega + n\Omega_1)^2 - v_i^2]}{[v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - (\omega + n\Omega_1)^2]^2 + 4(\omega + n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} - \\ &-jF \left[ \frac{\omega_{\Gamma i}^2}{\omega} \cdot v_i \cdot \frac{(\omega + n\Omega_1)^2 + v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2}{[v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - (\omega + n\Omega_1)^2]^2 + 4(\omega + n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} + \frac{\delta_r F}{\omega \epsilon_0} \right] \end{aligned} \right\}; \\ \dot{\epsilon}_2 &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \begin{aligned} &\frac{\omega_{\Gamma i}^2}{\omega} \cdot F \cdot \omega_{\Gamma i} \cdot \frac{v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - (\omega + n\Omega_1)^2}{[v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - (\omega + n\Omega_1)^2]^2 + 4(\omega + n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} - \\ &-2j \frac{\omega_{\Gamma i}^2}{\omega} \cdot F \cdot \omega_{\Gamma i} \cdot v_i \cdot \frac{\omega + n\Omega_1}{[v_i^2 + \omega_{\Gamma i}^2 - (\omega + n\Omega_1)^2]^2 + 4(\omega + n\Omega_1)^2 \cdot v_i^2} \end{aligned} \right\}; \\ \dot{\epsilon}_3 &= \sum_{i=1}^2 \left\{ F \left(1 + \frac{n\Omega_1}{\omega}\right) \cdot \left[ \epsilon_r - \frac{\omega_{\Gamma i}^2}{\omega} \cdot \frac{1}{(\omega + n\Omega_1)^2 + v_i^2} \right] - j \left[ \frac{\omega_{\Gamma i}^2}{\omega} \cdot F \cdot v_i \cdot \frac{1}{(\omega + n\Omega_1)^2 + v_i^2} + \frac{\delta_r F}{\omega \epsilon_0} \right] \right\}, \end{aligned} \right. \quad (9)$$

где  $\Omega_1$  – круговая частота следования импульсов.

Проведено моделирование для параметров среды над залежами углеводородов [1]: значения диэлектрической проницаемости вмещающих пород  $\epsilon_r = 1 - 30$  и электрической проводимости  $\sigma_r = 1 \cdot 10^{-3}$  См/м; частота столкновения частиц  $\nu = 2 \cdot \pi \cdot 10^9$  рад/с, концентрации частиц  $N_e = N_n = (10^{16} - 10^{18})$  м<sup>-3</sup>.

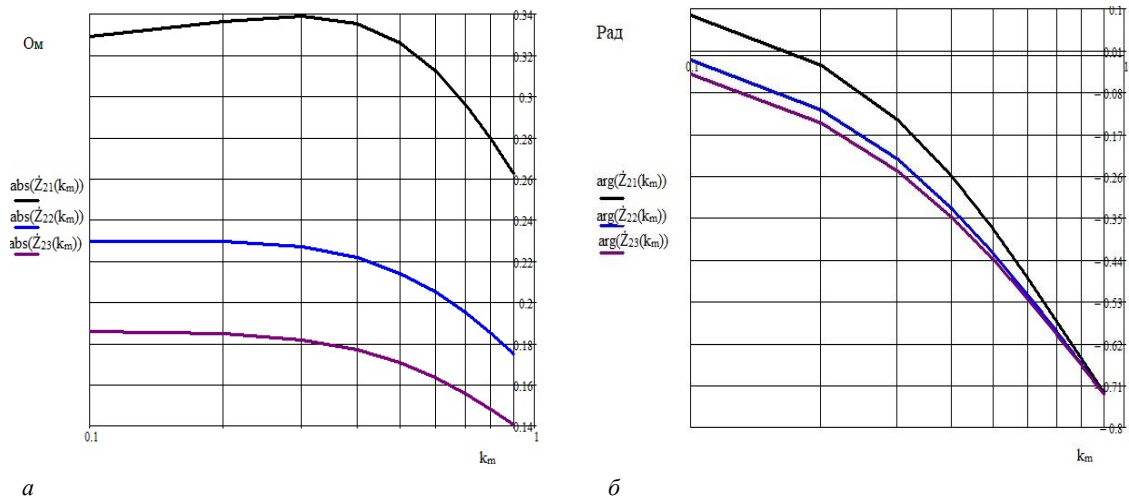
Проведено исследование влияния режимов зондирующих сигналов на характеристики анизотропной среды над залежами с учетом геомагнитной аномалии, физико-химической обстановки над УВЗ и изменения компонент тензора диэлектрической проницаемости.

**Результаты исследований.** Проведен анализ выражений (5) для компонент поверхностного импеданса среды над УВЗ в зависимости от коэффициента амплитудной модуляции. Абсолютные и фазовые значения для компонент поверхностного импеданса среды над УВЗ  $Z_{21}$  показаны на рисунке 1. С увеличением коэффициента амплитудной модуляции более 0,3 происходит уменьшение данной компоненты поверхностного импеданса. С уменьшением диэлектрической проницаемости наполнителя вмещающих пород значение этой компоненты поверхностного импеданса увеличивается, а ее фазовые характеристики с увеличением коэффициента амплитудной модуляции уменьшаются, причем диэлектрическая проницаемость при больших значениях не влияет на фазу. Дополнительно проводились экспериментальные исследования в диапазоне (1 – 3) ГГц, для реализации способа разработаны антенны в виде решетки спиральных излучателей. Результаты показали, что точность определения границ УВЗ можно повысить на (10 – 15)%.

Абсолютные и фазовые значения для компонент поверхностного импеданса среды над УВЗ  $Z_{11}$  в зависимости от индекса модуляции приведены на рисунке 2. Характерно резонансное поведение модуля данной составляющей поверхностного импеданса. С ростом диэлектрической проницаемости наполнителя вмещающих пород величина модуля уменьшается. Наиболее информативны значения индексов модуляции 3–10, когда наблюдаются максимумы поверхностного импеданса исследуемых сред. На фазовые характеристики данной составляющей поверхностного импеданса влияет диапазон индексов модуляции 1 – 10, когда наблюдается рост фазы поверхностного импеданса исследуемых АС.

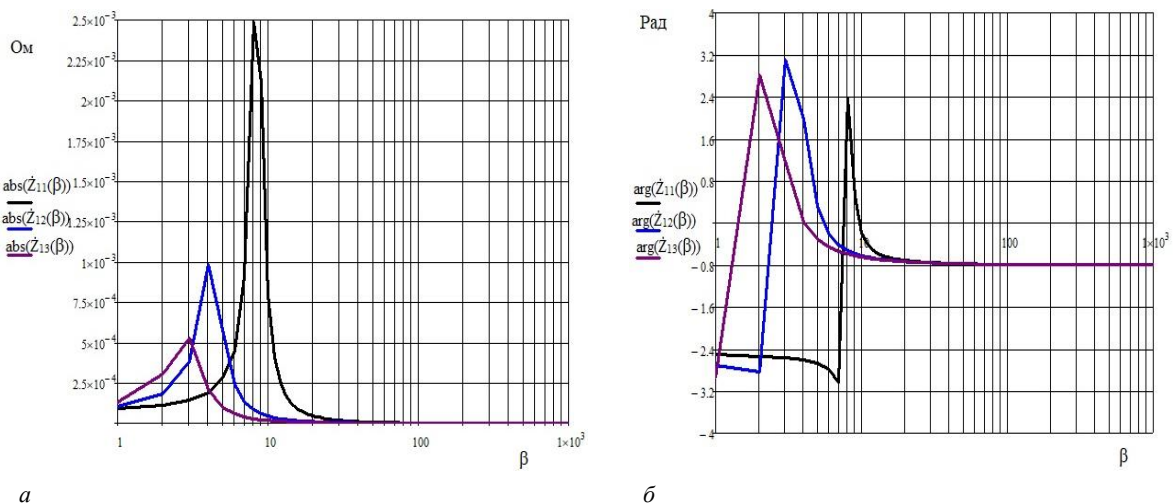
Проведено моделирование зависимостей компонент поверхностного импеданса  $Z_{21}$  от индекса модуляции (рисунок 3).

Установлено, что на модуль оказывают наибольшее влияние значения индексов модуляции 3–10, когда происходит резонансное увеличение поверхностного импеданса. Меньшим значениям диэлектрической проницаемости соответствуют большие значения поверхностного импеданса. Фаза данной составляющей поверхностного импеданса наиболее подвержена влиянию значения индексов модуляции в диапазоне 1–10, когда наблюдается резкое уменьшение фазы поверхностного импеданса с изменением знака сопротивления.



$a - |\dot{Z}_{21}(k_m)|$  для  $\varepsilon_r = 10, \beta = 1, f = 10^7$  Гц,  $|\dot{Z}_{22}(k_m)|$  для  $\varepsilon_r = 20, \beta = 1, f = 10^7$  Гц,  
 $|\dot{Z}_{23}(k_m)|$  для  $\varepsilon_r = 30, \beta = 1, f = 10^7$  Гц;  $b - \arg(\dot{Z}_{21}(k_m))$  для  $\varepsilon_r = 10, \beta = 1, f = 10^7$  Гц,  
 $\arg(\dot{Z}_{22}(k_m))$  для  $\varepsilon_r = 20, \beta = 1, f = 10^7$  Гц,  $\arg(\dot{Z}_{23}(k_m))$  для  $\varepsilon_r = 30, \beta = 1, f = 10^7$  Гц

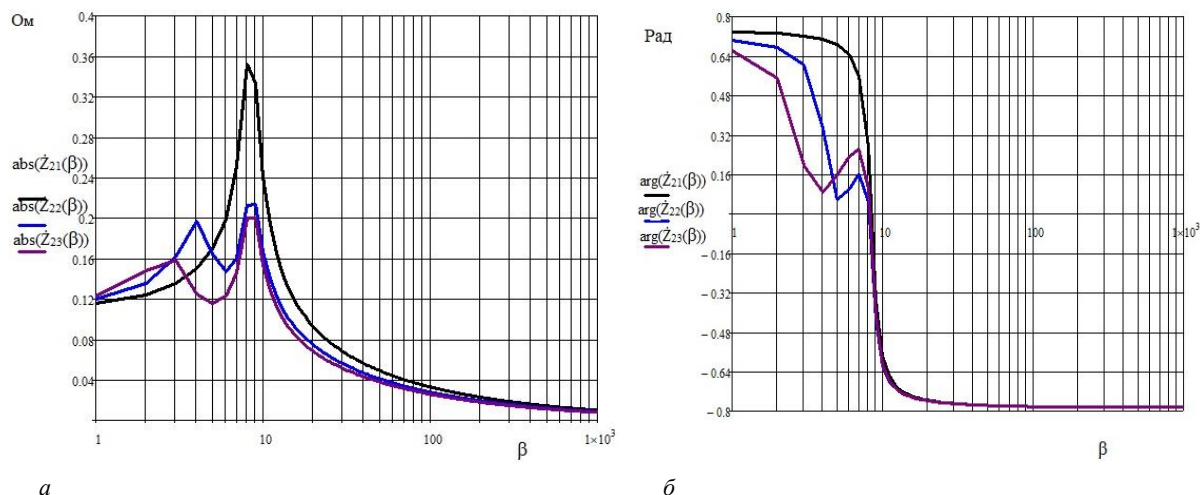
Рисунок 1. – Зависимости абсолютной и фазовой составляющих компоненты поверхностного импеданса  $\dot{Z}_{21}$  от коэффициента амплитудной модуляции



$a - |\dot{Z}_{11}(\beta)|$  для  $\varepsilon_r = 10, k_m = 0,5, f = 10^7$  Гц,  $|\dot{Z}_{12}(\beta)|$  для  $\varepsilon_r = 20, k_m = 0,5, f = 10^7$  Гц,  
 $|\dot{Z}_{13}(\beta)|$  для  $\varepsilon_r = 30, k_m = 0,5, f = 10^7$  Гц;  
 $b - \arg(\dot{Z}_{11}(\beta))$  для  $\varepsilon_r = 10, k_m = 0,5, f = 10^7$  Гц,  $\arg(\dot{Z}_{12}(\beta))$  для  $\varepsilon_r = 20, k_m = 0,5, f = 10^7$  Гц,  
 $\arg(\dot{Z}_{13}(\beta))$  для  $\varepsilon_r = 30, k_m = 0,5, f = 10^7$  Гц

Рисунок 2. – Зависимости абсолютной и фазовой составляющих компоненты поверхностного импеданса  $\dot{Z}_{11}$  от индекса модуляции

Такое поведение характеристик поверхностного импеданса связано с наличием над залежью потока заряженных частиц, перемещающихся в полифазной среде от УВЗ к дневной поверхности, причем поток частиц вызывает проявление геомагнитных аномалий за счет сложения магнитного поля Земли и отрицательного магнитного поля перемещающихся заряженных частиц. Изменение геомагнитного поля приводит к изменению удельного сопротивления вмещающих пород над УВЗ и свидетельствует об анизотропном характере среды над УВЗ, присущем плазменным и плазмоподобным образованиям [1].



**а** –  $|\dot{Z}_{21}(\beta)|$  для  $\epsilon_r = 10, k_m = 0,5, f = 10^7$  Гц,  $|\dot{Z}_{22}(\beta)|$  для  $\epsilon_r = 20, k_m = 0,5, f = 10^7$  Гц,  
 $|\dot{Z}_{23}(\beta)|$  для  $\epsilon_r = 30, k_m = 0,5, f = 10^7$  Гц;  
**б** –  $\arg \dot{Z}_{21}(\beta)$  для  $\epsilon_r = 10, k_m = 0,5, f = 10^7$  Гц,  $\arg \dot{Z}_{22}(\beta)$  для  $\epsilon_r = 20, k_m = 0,5, f = 10^7$  Гц,  
 $\arg \dot{Z}_{23}(\beta)$  для  $\epsilon_r = 30, k_m = 0,5, f = 10^7$  Гц

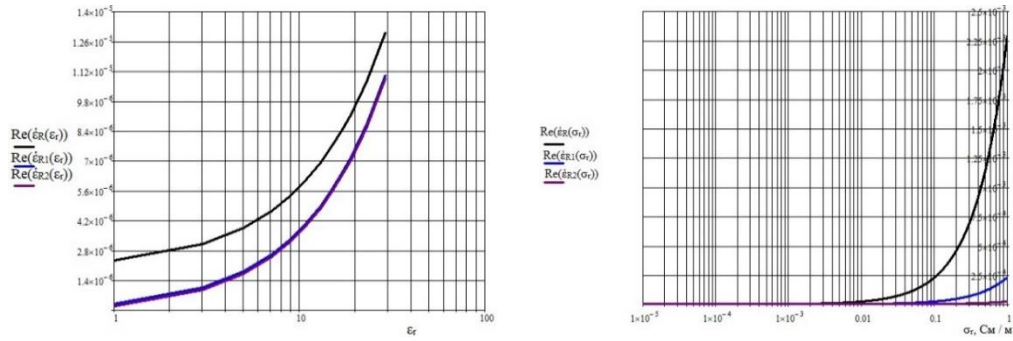
**Рисунок 3. – Зависимости абсолютной части компоненты поверхностного импеданса  $\dot{Z}_{21}$  от индекса модуляции**

Особенности строения геологических профилей местности и их идентификационные характеристики устанавливаются по отличию литолого-физических свойств пластов осадочного чехла от подстилающих и перекрывающих пород (наличие глины в известняковых пластах и т. д.). При этом участки с повышенным импедансом в структуре пород указывают о присутствии месторождений углеводородов.

Проведено моделирование зависимостей вещественных составляющих суммарной компоненты тензора диэлектрической проницаемости от диэлектрической проницаемости наполнителя (рисунок 4, а). Установлено, что вещественные значения комбинационной составляющей для тензора диэлектрической проницаемости ЭМВ с правой поляризацией возрастают с ростом диэлектрической проницаемости, причем с увеличением частоты радиоимпульса наблюдается уменьшение данной компоненты. Значительный вклад в величину диэлектрической проницаемости наполнителя вносит влажность грунтов  $W$ , которая для песков и суглинков, осадочных пород и сред с большой влажностью имеет существенные отличия. Об этом свидетельствуют многочисленные экспериментальные исследования, подтверждающие сильное влияние влагосодержания сред на диэлектрическую проницаемость [6].

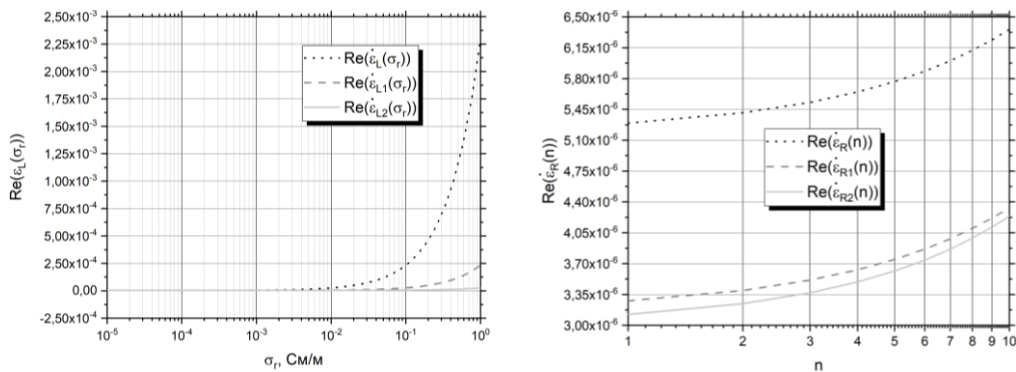
Проведено моделирование зависимостей вещественных составляющих компонент диэлектрической проницаемости от проводимости (рисунок 4, б; рисунок 5, а). На данную составляющую компонент диэлектрической проницаемости проводимость среды оказывает основное воздействие в диапазоне (0,01 – 1) См/м. При этом данная компонента резко увеличивается. Установлено, что на нее оказывают большее влияние низкие значения частоты радиоимпульса. Однако это приводит к недостатку данного метода – низкой разрешающей способности, хотя появляется неоспоримое преимущество – большая глубинность исследования при применении метрового и дециметрового диапазонов волн.

Установлено, что вещественные значения комбинационной составляющей для тензора диэлектрической проницаемости ЭМВ с правой и левой поляризациями (рисунки 5, б; 6, а) возрастают с ростом количества гармоник спектра радиоимпульсного сигнала, причем с увеличением частоты радиоимпульса наблюдается уменьшение данной компоненты. Для концентраций частиц  $N_1 = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ ,  $N_2 = 10^{18} \text{ м}^{-3}$  закономерности изменения характеристик отличаются численными значениями (рисунок 6, б).



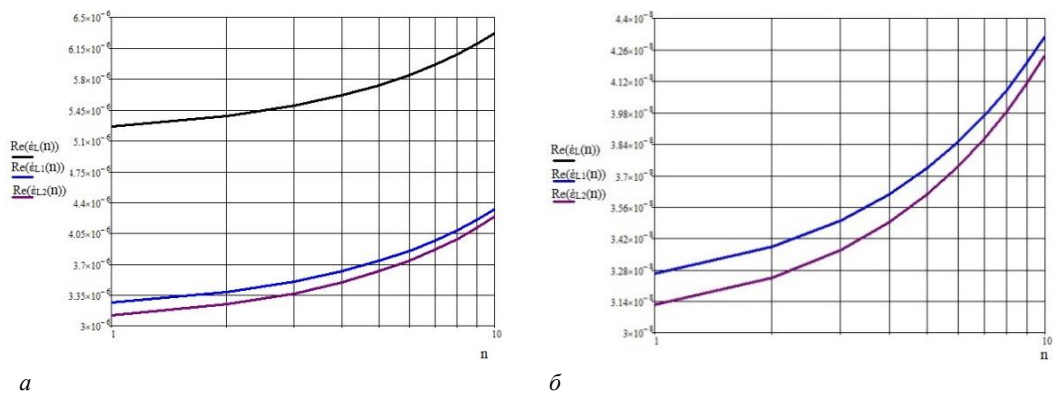
**а** – при  $T = 2\tau$   $\text{Re}(\dot{\epsilon}_R(\epsilon_r))$  для  $F_2 = 10^6$  Гц,  $n = 5$ ,  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{R1}(\epsilon_r))$  для  $F_2 = 10^7$  Гц,  $n = 5$ ,  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{R2}(\epsilon_r))$  для  $F_2 = 10^8$  Гц,  $n = 5$ ;  
**б** – при  $T = 5\tau$   $\text{arg}(\dot{\epsilon}_R(\epsilon_r))$  для  $F_2 = 10^6$  Гц,  $n = 5$ ,  $\text{arg}(\dot{\epsilon}_{R1}(\epsilon_r))$  для  $F_2 = 10^7$  Гц,  $n = 5$ ,  $\text{arg}(\dot{\epsilon}_{R2}(\epsilon_r))$  для  $F_2 = 10^8$  Гц,  $n = 5$

**Рисунок 4. – Зависимости вещественных составляющих суммарной компоненты тензора**



**а** –  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_L(\sigma_r))$  для  $F_2 = 10^6$  Гц,  $n = 5$ ,  $\epsilon_r = 10$ ,  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{L1}(\sigma_r))$  для  $F_2 = 10^7$  Гц,  $n = 5$ ,  $\epsilon_r = 10$ ,  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{L2}(\sigma_r))$  для  $F_2 = 10^8$  Гц,  $n = 5$ ,  $\epsilon_r = 10$ ;  
**б** –  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_R(n))$  для  $F_2 = 10^6$  Гц,  $\epsilon_r = 10$ ,  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{R1}(n))$  для  $F_2 = 10^7$  Гц,  $\epsilon_r = 10$ ,  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{R2}(n))$  для  $F_2 = 10^8$  Гц,  $\epsilon_r = 10$

**Рисунок 5. – Зависимости вещественных составляющих разностной и суммарной компонент тензора для  $T = 2\tau$**



**а** – для  $N_1 = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ ,  $N_2 = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ ; **б** – для  $N_1 = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ ,  $N_2 = 10^{18} \text{ м}^{-3}$   
 $\text{Re}(\dot{\epsilon}_L(n))$  для  $F_2 = 10^6$  Гц,  $n = 5$ ,  $\epsilon_r = 10$ ,  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{L1}(n))$  для  $F_2 = 10^6$  Гц,  $n = 5$ ,  $\epsilon_r = 10$ ,  $\text{Re}(\dot{\epsilon}_{L2}(n))$  для  $F_2 = 10^6$  Гц,  $n = 5$ ,  $\epsilon_r = 10$

**Рисунок 6. – Зависимости вещественных составляющих суммарной компоненты тензора от количества гармоник**

Для повышения точности и достоверности определения границ УВЗ следует рекомендовать радиокомплексирование указанных ЭММ при увеличении количества информационных каналов.

Таким образом, в ходе проведенного исследования:

- 1) предложен способ геоэлектроразведки углеводородных залежей в режиме радиоимпульсных сигналов с частотой 100 кГц, позволяющий измерять глубины залегания углеводородов до 500 м;
- 2) разработаны антенны для способа геоэлектроразведки углеводородных залежей в режиме амплитудно-модулированных сигналов с несущей частотой в диапазоне (1 – 3) ГГц, представляющие собой решетки спиральных излучателей;
- 3) апробирован способ геоэлектроразведки углеводородных залежей, основанный на измерении напряженности электрического поля на трех измерительных каналах в диапазоне частот (1 – 10) МГц, (10 – 20) МГц, (20 – 30) МГц.

### Заключение

1. Впервые получены общие выражения компонент тензоров диэлектрической проницаемости АС над УВЗ при воздействии двухчастотных, модулированных и радиоимпульсных сигналов, позволяющие установить закономерности физико-химических процессов в анизотропных средах над углеводородными залежами при изменении значения диэлектрической проницаемости вмещающих пород 1 – 30 и электрической проводимости  $1 \cdot 10^{-5} - 1$  См/м, концентрации частиц  $N_e = N_n = (10^{15} - 10^{18}) \text{ м}^{-3}$ , частоте столкновения частиц  $\nu = 1 \cdot 10^9 - 1 \cdot 10^{10}$  рад/с.

2. Установлены закономерности дисперсии тензоров диэлектрической проницаемости среды и изменения компонент поверхностного импеданса над УВЗ для режима ЧМ взаимодействия, на основе которых при значениях диэлектрической проницаемости среды  $\epsilon_r = 8 - 20$ , электрической проводимости  $\sigma_r = 10^{-3}$  См/м, частоте столкновения частиц  $\nu = 2 \cdot \pi \cdot 10^9$  рад/с определены частоты электронного циклотронного резонанса, соответствующие значениям (15 – 20) кГц, электронного плазменного резонанса, равные (8 – 20) МГц при концентрациях частиц  $N_e = 10^{16} \text{ м}^{-3}$  и  $N_i = 10^{18} \text{ м}^{-3}$ , установлены резонансное увеличение компоненты поверхностного импеданса  $\dot{Z}_{11}$  на частотах (10 – 400) МГц, увеличение составляющей поверхностного импеданса  $\dot{Z}_{21}$  на участке (1 МГц – 1 ГГц) при концентрациях частиц  $N_e = 10^{16} \text{ м}^{-3}$  и  $N_i = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ .

3. Определены закономерности дисперсии тензоров диэлектрической проницаемости среды и изменения компонент поверхностного импеданса над УВЗ для режима АЧМ взаимодействия, на основе которых при значениях диэлектрической проницаемости среды  $\epsilon_r = 5 - 25$ , электрической проводимости  $\sigma_r = 10^{-3}$  См/м, частоте столкновения частиц  $\nu = 2 \cdot \pi \cdot 10^9$  рад/с установлены частоты электронного циклотронного резонанса, равные (20 – 40) кГц, частоты электронного плазменного резонанса, соответствующие (6 – 30) МГц, при концентрациях частиц  $N_e = 10^{16} \text{ м}^{-3}$  и  $N_i = 10^{18} \text{ м}^{-3}$ , установлены резонансное увеличение компоненты поверхностного импеданса  $\dot{Z}_{11}$  на частотах (10 – 400) МГц, увеличение составляющей поверхностного импеданса  $\dot{Z}_{21}$  на участке (1 МГц – 1 ГГц) при концентрациях частиц  $N_e = 10^{16} \text{ м}^{-3}$  и  $N_i = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ .

4. Установлены закономерности дисперсии тензоров диэлектрической проницаемости среды и изменения компонент поверхностного импеданса над УВЗ в режиме радиоимпульсного сигнала, на основе которых при значениях диэлектрической проницаемости среды  $\epsilon_r = 10 - 20$ , электрической проводимости  $\sigma_r = 10^{-3}$  См/м, частоте столкновения частиц  $\nu = 2 \cdot \pi \cdot 10^9$  рад/с определены частоты электронного циклотронного резонанса, равные (70 – 90) кГц, частоты электронного плазменного резонанса, соответствующие 800 кГц – 1,5 МГц, при концентрациях частиц  $N_e = 10^{16} \text{ м}^{-3}$  и  $N_n = 10^{18} \text{ м}^{-3}$ , установлены резонансное увеличение компоненты поверхностного импеданса  $\dot{Z}_{11}$  на частотах (10 – 400) МГц, увеличение составляющей поверхностного импеданса  $\dot{Z}_{21}$  на участке (1 МГц – 1 ГГц) при концентрациях частиц  $N_e = 10^{16} \text{ м}^{-3}$  и  $N_i = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ .

5. Предложены методы и способы геоэлектроразведки углеводородных залежей (таблица).

Таблица. – Методы и способы геоэлектроразведки углеводородных залежей

Методы и способы	Частоты, МГц	Точность определения границ, м	Уровень идентификации, %	Возможность использования транспортного средства
1. Способ регистрации естественного излучения УВЗ	8500	30...50	90	+
2. Метод регистрации границ УВЗ по аномальным изменениям поля на двух частотах	$f_1 = 1...10$ ; $f_2 = 10...100$	10...30	95	+
3. Метод использования акустического сигнала	0,0001; 50	50...80	85	–
4. Метод использования модулированных сигналов	$F1 = 1...10$ ; $f_2 = 10...100$	30...50	90	+
5. Метод использования измерений импеданса антенн	$f_1 = 10000$ ; $f_2 = 34000$	40...60	85	+
6. Метод измерения диаграммы направленности	0,001...0,003; 1...50	60...80	80	–
7. Способ измерения фазовых характеристик в режиме АМ-сигнала	$f_1 = 1000...5000$ ; $F2 = 10...100$	35...55	85	+
8. Способ измерения фазовых характеристик поверхностного импеданса в режиме АЧМ-сигнала	$f_1 = 100...2000$ ; $F2 = 10...100$	30...50	90	+
9. Способ исследования отражательных характеристик	$f_1 = 1...10$ ; $f_2 = 10...100$	30...50	90	+
10. Способ исследования отражательных характеристик в режиме мощного НЧ-сигнала	$f_1 = 1...10$ ; $f_2 = 10...300$	20...40	90	–
11. Способ исследования отражательных характеристик в режиме мощного ВЧ-сигнала	$f_1 = 1...10$ ; $f_2 = 10...300$	20...40	90	–
12. Метод использования радиоимпульсного сигнала	20...35, 0,9–6	5...20	95	+
13. Способ геоэлектроразведки углеводородных залежей, основанный на измерении напряженности электрического поля на трех измерительных каналах	1 – 10, 10 – 20, 20 – 30	5...10	95	+

## ЛИТЕРАТУРА

1. Moskvichew, V. N. Interaction of electromagnetic waves (EMW) with anisotropic inclusion in communication line / V. N. Moskvichew // 9<sup>th</sup> Microw. Conf. NICON – 91, Rydzyna, May 20–22, 1991. – Vol. 1. – P. 240–244.
2. Effect of a powerful low-frequency signal on an anisotropic medium over hydrocarbon / V. F. Yanushkevich [et al.] // J. of Physics : Conference Series. – 2021. – Vol. 1889. – DOI: [10.1088/1742-6596/1889/2/022059](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1889/2/022059).
3. Гололобов, Д. В. Взаимодействие электромагнитных волн и углеводородных залежей / Д. В. Гололобов. – Минск : Бестпринт, 2009. – 185 с.
4. Anderson, C. An integrated approach to marine electromagnetic surveying using a towed streamer and source / C. Anderson, J. Mattsson // First Break. – 2010. – Vol. 28, iss. 5. – P. 71–75.
5. Subsalt imaging in Northern Germany using multi-physics (magnetotellurics, gravity, and seismic) / C. H. Henke [et al.] // Interpretatio. – 2020. – Vol. 8. – № 4. – P. 15–24.
6. Геофизические методы исследования : учеб. пособие для геологических специальностей вузов / В. К. Хмелевской [и др.]. – Петропавловск-Камчатский : КГПУ, 2004. – 227 с.
7. Time lapse CSEM reservoir monitoring of the Norne field with vertical dipoles / T. Holten [et al.] // SEG Technical Program Expanded Abstracts. – 2016. – Vol. 35. – P. 971–975.
8. Косков, В. Н. Геофизические исследования скважин : учеб. пособие / В.Н. Косков. – Пермь : Перм.гос. техн. ун-т. – 2004. – 122 с.
9. Geldmacher, I. A Fit-for-purpose electromagnetic System for Reservoir Monitoring and Geothermal Exploration / I. Geldmacher, K. Strack // GRC Transactions. – 2017. – Vol. 41. – P. 1649–1658.
10. Гололобов, Д. В. Взаимодействие АМ-сигнала с углеводородной залежью / Д. В. Гололобов, В. Ф. Янушкевич // Современные проблемы радиотехники, электроники и связи : тез. докл. науч.-техн. конф., посвященной 100-летию радио, Минск, 1995 г. / Бел. гос. ун-т информатики и радиоэлектроники. – Минск, 1995. – С. 6–7.
11. Бурцев, М. И. Поиски и разведка месторождений нефти и газа / М. И. Бурцев – М. : Рос. ун-т дружбы народов. – 2006. – 264 с.



12. Helwig, S. L. Vertical–vertical controlled-source electromagnetic instrumentation and acquisition / S. L. Helwig, W. Wood, B. Gloux // *Geophysical Prospecting*. – 2019. – Vol. 67. – № 6. – P. 1582–1594.
13. Райлян, И. Г. Новая российская спутниковая технология поиска местоположений нефти, газа и других полезных ископаемых / И. Г. Райлян // *Нефть, газ и бизнес*. – 2002. – № 6. – С. 20.
14. Янушкевич, В. Ф. Электромагнитные методы поиска и идентификации углеводородных залежей / В. Ф. Янушкевич. – Новополоцк : ПГУ, 2017. – 232 с.
15. Гололобов, Д. В. Влияние параметров амплитудно-модулированного воздействия на фазовые составляющие поверхностного импеданса анизотропной среды плазмopodobного типа. / Д. В. Гололобов, О. В. Орлова, В. Ф. Янушкевич // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки*. – Новополоцк, 2010. – № 9. – С. 98–101.
16. Взаимодействие ЧМ-сигналов с анизотропной средой / Д. В. Гололобов [и др.] // *Проблемы проектирования и производства радиоэлектронных средств : сб. материалов II междунар. науч.-техн. конф., Новополоцк, 15–17 мая 2002 г.* / Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2002. – С. 300–303.
17. Степуленок, С. В. Взаимодействие амплитудно-частотно-модулированных сигналов со средой над углеводородными залежами / С. В. Степуленок, В. Ф. Янушкевич // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки*. – 2009. – № 9. – С. 103–108.
18. Гололобов, Д. В. Радиоконспектирование методов электромагнитной разведки при поиске залежей углеводородов / Д. В. Гололобов // *Докл. БГУИР*. – 2008. – № 8(38). – С. 30–36.

## REFERENCES

1. Moskvichew, V. N. (1991). Interaction of electromagnetic waves (EMW) with anisotropic inclusion in communication line, *9th Microw. Conf. NICON – 91: Vol. 1*, (240–244). Rydzyna.
2. Yanushkevich, V. F., Dauhiala, D. A., Adamovich, A. L., Abramenska, S. N., & Bogush, V. A. (2021). *Effect of a powerful low-frequency signal on an anisotropic medium over hydrocarbon* // *Journal of Physics [Conference Series]*, (1889). DOI: [10.1088/1742-6596/1889/2/022059](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1889/2/022059).
3. Gololobov, D. V. (2009) *Vzaimodeistvie elektromagnitnykh voln i uglevodorodnykh zalezhei [Interaction of electromagnetic waves and hydrocarbon deposits]*. Minsk: Bestprint. (In Russ.).
4. Anderson, C., & Mattsson, J. (2010). An integrated approach to marine electromagnetic surveying using a towed streamer and source. *First Break*, 28(5), 71–75.
5. Henke, C. H., Krieger, M., Strack, K., & Zerilli, A. (2020). Subsalt imaging in Northern Germany using multi-physics (magnetotellurics, gravity, and seismic). *Interpretatio*, 8(4), 15–24.
6. Khmelevskoi, V. K., Gorbachev, Yu. I., Kalinin, A. V., Popov, M. G., Seliverstov, N. I., & Shevnin, V. A. (2004). *Geofizicheskie metody issledovaniya [Geophysical research methods]*. Petropavlovsk-Kamchatskii: KGPU.
7. Holten, T., Luo, X., Naevdal, G., & Helwig, S. L. (2016). Time lapse CSEM reservoir monitoring of the Norne field with vertical dipoles. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, (35), 971–975.
8. Koskov, V. N. (2004). *Geofizicheskie issledovaniya skvazhin [Geophysical research of wells]*. Perm: Perm. gos. tekhn. un-t. (In Russ.).
9. Geldmacher, I., & Strack, K. (2017). A Fit-for-purpose electromagnetic System for Reservoir Monitoring and Geothermal Exploration. *GRC Transactions*, (41), 1649–1658.
10. Gololobov, D. V., & Yanushkevich, V. F. (1995). Vzaimodeistvie AM-signalov s uglevodorodnoi zalezhu [Interaction of the AM-signal with a hydrocarbon reservoir]. In *Sovremennye problemy radiotekhniki, elektroniki i svyazi [Modern problems of radio engineering, electro-dynamics and communications]* (6–7). Minsk: BSUIR. (In Russ.).
11. Burtsev, M. I. (2006). *Poiski i razvedka mestorozhdenii nefi i gaza [Search and exploration of oil and gas fields]*. Moscow: RUDN. (In Russ.).
12. Helwig, S. L., Wood, W., & Gloux B. (2019). Vertical–vertical controlled-source electromagnetic instrumentation and acquisition. *Geophysical Prospecting*, 67(6), 1582–1594.
13. Railyan, I. G. (2002). Novaya rossiiskaya sputnikovaya tekhnologiya poiska mestopolozhenii nefi, gaza i drugikh poleznykh iskopaemykh [New Russian satellite technology for searching for the locations of oil, gas and other minerals]. *Neft', gaz i biznes*, (6), 20. (In Russ.).
14. Yanushkevich, V. F. (2017). *Elektromagnitnye metody poiska i identifikatsii uglevodorodnykh zalezhei [Electromagnetic methods for searching and identifying hydrocarbon deposits]*. Novopolotsk: PGU. (In Russ.).
15. Gololobov, D. V., Orlova, O. V., & Yanushkevich, V. F. (2010). Vliyanie parametrov amplitudno-modulirovannogo vozdeistviya na fazovye sostavlyayushchie poverkhnostnogo impedansa anizotropnoi sredy plazmopodobnogo tipa [Influence of the amplitude-modulated effect parameters on the phase components of the surface impedance of an anisotropic plasma-like medium]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (9), 98–101. (In Russ., abstr. in Engl.).
16. Gololobov, D. V., Tsyvis, N. V., Yanushkevich, V. F., Kalintsev, S. V., & Khadyko, D. L. (2002). Vzaimodeistvie ChM-signalov s anizotropnoi sredoi [Interaction of FM signals with an anisotropic medium]. In *Problemy proektirovaniya i proizvodstva radioelektronnykh sredstv [Problems of design and production of radio electronic facilities]* (300–303). Novopolotsk: PSU. (In Russ.).
17. Stepuhlenok, S. V., & Yanushkevich, V. F. (2009). Vzaimodeistvie amplitudno-chastotno-modulirovannykh signalov so sredoi nad uglevodo-rodnyimi zalezhami [Interaction of amplitude-frequency-modulated signals with the environment above hydrocarbon deposits]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (9), 103–108. (In Russ., abstr. in Engl.).

18. Gololobov, D. V. (2008). Radiokompleksirovanie metodov elektromagnitnoi razvedki pri poiske zalezhei uglevodorodov [Radiocomplexation of the electromagnetic geological methods for exploration of hydrocarbon objects]. *Doklady BGUIR*, 8(38), 30–36. (In Russ., abstr. in Engl.).

Поступила 07.09.2022

## METHODS OF SEARCHING AND DELINERING OF HYDROCARBON DEPOSITS USING MODULATED AND RADIO PULSE SIGNALS

V. YANUSHKEVICH

(*Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk*)

*The article studies the characteristics of an anisotropic medium over hydrocarbons using modulated and radio pulse signals. The modeling of the components of the surface impedance of the medium over hydrocarbon deposits in the mode of amplitude-frequency-modulated signals and the real components of the permittivity tensor in the mode of radio pulse signals was carried out. Attention is focused on the use of radio complexing of electromagnetic methods with an increase in the number of information channels. A study was made of the influence of probing signal modes on the characteristics of an anisotropic medium above deposits and the components of the permittivity tensor. Recommendations are given for the practical use of the results. Methods and techniques for geoelectric exploration of hydrocarbon deposits are proposed.*

**Keywords:** *electromagnetic methods, hydrocarbon reservoir, permittivity tensor.*

## МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

DOI 10.52928/2070-1624-2022-39-11-99-116

КРИТЕРИЙ ГЛАДКОСТИ ЧАСТНОГО КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ  
НЕОДНОРОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ  
В ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ*д-р физ.-мат. наук, проф. Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ*  
(Белорусский государственный университет, Минск)

Выведен критерий гладкости на правую часть  $f$  для классического решения  $F$  уравнения  $u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) - a^{-1}(x,t)a_t(x,t)u_t(x,t) - a(x,t)a_x(x,t)u_x(x,t) = f(x,t)$ ,  $(x,t) \in \dot{G}_\infty = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , с переменной скоростью  $a(x,t)$  в первой четверти плоскости  $\dot{G}_\infty$ . Критерий гладкости состоит из необходимых и достаточных требований гладкости на правую часть этого модельного телеграфного уравнения. Необходимые требования гладкости на  $f$  обоснованы методом корректировки пробных решений, предложенным ранее автором настоящей статьи. Этот метод указал на дважды непрерывную дифференцируемость функции  $F$  без ее корректировки, поэтому производные вдоль двух семейств неявных характеристик данного уравнения дают необходимую гладкость на  $f$ . Отсюда легко выводится их достаточность для дважды непрерывной дифференцируемости  $F$ . Когда  $f$  зависит только от  $x$  или  $t$ , тогда этот критерий гладкости равносильен непрерывности  $f$  соответственно по  $x$  или  $t$ . Для уравнения построен общий интеграл с критерием гладкости его правой части  $f$ .

**Ключевые слова:** модельное телеграфное уравнение, переменная скорость, неявные характеристики, метод корректировки, классическое решение, критерий гладкости.

**Введение.** В настоящей работе методом корректировки пробных решений выведен критерий (необходимые и достаточные условия) гладкости на правую часть неоднородного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью  $a(x,t)$  для его явного частного классического решения  $F$  в первой четверти плоскости. Для нашей функции  $F$  с модулем координат  $x$  точек струны под двойным интегралом оно может оказаться не дважды непрерывно дифференцируемым на  $G_+$ . Этот факт подтверждает метод корректировки пробных решений в [1] при постоянных коэффициентах  $a_1 \neq a_2$  общего волнового уравнения (замечание 1). Следовательно, для модельного телеграфного уравнения даже при одном постоянном коэффициенте  $a_1 = a_2 = a > 0$  эта принадлежность функции  $F$  множеству классических решений может быть строго обоснована обобщением метода корректировки из [1] путем непосредственного дифференцирования по новым переменным решения  $\tilde{F}$ , полученного заменой переменных из  $F$ .

Итак, в настоящей статье методом корректировки доказана дважды непрерывная дифференцируемость частного решения  $F$  неоднородного модельного телеграфного уравнения со скоростью  $a(x,t)$  без его корректировки. Поэтому производные вдоль двух семейств неявных характеристик данного уравнения представляют необходимые интегральные требования гладкости на правую часть  $f$  уравнения (1). Достаточность установленных необходимых требований гладкости для дважды непрерывной дифференцируемости указанного решения  $F$  вытекает из свойств решений линейной системы двух алгебраических уравнений относительно его первых частных производных с непрерывно дифференцируемыми правыми частями. С помощью этого обоснованного классического решения неоднородного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью  $a(x,t)$  построен его общий интеграл в первой четверти плоскости для решения смешанных задач. Все доказательства существенно опираются на тождества обращения неявных функций характеристик уравнения и их неявных обратных функций. В статье [2] исследуемая формула его классического решения во всей первой четверти плоскости использовалась при решении первой смешанной задачи для модельного телеграфного уравнения без продолжений исходных данных. В ней модельное телеграфное

уравнение позаимствовано из кандидатской диссертации<sup>1</sup>, где решалась первая смешанная задача методом продолжений исходных данных. В указанной диссертации первая смешанная задача в полуполосе плоскости за счет периодических продолжений коэффициентов со специальными свойствами и входных данных на верхнюю полуплоскость сведена к задаче Коши и формуле Даламбера, которые в [2] отсутствуют на  $G_+$ .

**1. Модельное телеграфное уравнение.** В первой четверти плоскости  $\dot{G}_\infty = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  ищется некоторое классическое решение  $F = F(x, t)$  с минимальной гладкостью правой части  $f = f(x, t)$  уравнения

$$u_{tt}(x, t) - a^2(x, t)u_{xx}(x, t) - a^{-1}(x, t)a_t(x, t)u_t(x, t) - a(x, t)a_x(x, t)u_x(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \dot{G}_\infty, \quad (1)$$

где  $f$  – заданная вещественная функция переменных  $x$  и  $t$ , коэффициент  $a(x, t) \geq a_0 > 0$ ,  $(x, t) \in G_\infty = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , и  $a \in C^2(G_\infty)$ . Мы обозначаем числом нижних индексов функций соответствующие порядки их частных производных. Здесь  $C^k(\Omega)$  – множество  $k$  раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$ , и  $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ .

Общеизвестно, что уравнению (1) соответствуют характеристические уравнения

$$dx = (-1)^i a(x, t) dt, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

которые имеют в  $G_\infty$  общие интегралы  $g_i(x, t) = C_i$ ,  $C_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ . Если коэффициент  $a$  строго положителен, т. е.  $a(x, t) \geq a_0 > 0$ ,  $(x, t) \in G_\infty$ , то в плоскости  $Oxt$  переменная  $t$  на характеристиках  $g_1(x, t) = C_1$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}$ , строго убывает и на характеристиках  $g_2(x, t) = C_2$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}$ , строго возрастает вместе с ростом  $x$ . Поэтому неявные функции  $y_i = g_i(x, t) = C_i$ ,  $x \geq 0, t \geq 0$ , имеют строго монотонные обратные функции  $x = h_i\{y_i, t\}$ ,  $t \geq 0$ ,  $t = h^{(i)}[x, y_i]$ ,  $x \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ . По определению обратных отображений они удовлетворяют в  $G_\infty$  следующим тождествам обращения [2]:

$$g_i(h_i\{y_i, t\}, t) = y_i, \quad \forall y_i, \quad h_i\{g_i(x, t), t\} = x, \quad x \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

$$g_i(x, h^{(i)}[x, y_i]) = y_i, \quad \forall y_i, \quad h^{(i)}[x, g_i(x, t)] = t, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

$$h_i\{y_i, h^{(i)}[x, y_i]\} = x, \quad x \geq 0, \quad h^{(i)}[h_i\{y_i, t\}, y_i] = t, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

В правых частях тождеств (3)–(5) вместе с взаимнообратными функциями исключаются переменные, повторяющиеся дважды в левых частях, если даже в левых частях этих тождеств повторяется дважды лишь одно из возможных значений этих переменных. Если коэффициент  $a(x, t) \geq a_0 > 0$ ,  $(x, t) \in G_\infty$ ,  $a \in C^2(G_\infty)$ , то функции  $g_i, h_i, h^{(i)} \in C^2$  по  $x, t, y_i$ ,  $i = 1, 2$  в  $G_\infty$  [2].

В случае  $a(x, t) = a = \text{const} > 0$  ими являются функции:  $g_1(x, t) = x + at$ ,  $g_2(x, t) = x - at$ ,  $h_1\{y_1, t\} = y_1 - at$ ,  $h_2\{y_2, t\} = y_2 + at$ ,  $h^{(1)}[x, y_1] = (y_1 - x)/a$ ,  $h^{(2)}[x, y_2] = (x - y_2)/a$ .

**Определение 1.** Функция  $u = u(x, t)$  называется классическим решением уравнения (1) на множестве  $\Omega \cap \dot{G}_\infty$ , если она имеет гладкость  $u \in C^2(\Omega)$  и удовлетворяет этому уравнению в обычном смысле для каждого  $(x, t) \in \Omega \cap \dot{G}_\infty$ .

Во-первых, если существует хотя бы одно классическое решение  $u \in C^2(\Omega)$  неоднородного уравнения (1) в  $\Omega \cap \dot{G}_\infty$ , то его правая часть очевидно необходима быть непрерывной  $f \in C(\Omega)$ . Во-вторых, согласно определению 1 функция  $F$  должна быть, по крайней мере, дважды непрерывно дифференцируемой, т. е.  $F \in C^2(\Omega)$ , и удовлетворять поточечно уравнению (1) на  $\Omega$ . В-третьих, если функция  $F$  окажется не дважды непрерывно дифференцируемой, то провести ее корректировку некоторой функцией (обобщенным частным решением  $F_0$  однородного уравнения (1) так, чтобы новая функция  $F_1(x, t) = F(x, t) - F_0(x, t)$  стала дважды непрерывно дифференцируемой в  $\Omega$  [1]. Разность двух менее гладких функций (обобщенных решений уравнения) может быть более гладкой функцией (классическим решением уравнения). Ниже нам не понадобится проводить корректировку нашей пробной функции  $F$ , потому что она окажется дважды

<sup>1</sup> Барановская, С. Н. О классическом решении первой смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / С. Н. Барановская. – Минск, 1991. – 59 с.

непрерывно дифференцируемой и будет удовлетворять уравнению (1) для каждого  $(x, t)$  из  $G_\infty$  (см. замечание 1). В статье [1] такая корректировка нужна для аналога функции  $F$  при коэффициентах  $a_1 \neq a_2$ .

Найдем классическое решение уравнения (1) в  $\dot{G}_\infty$  и критерий (необходимые и достаточные требования) гладкости на  $f$  в  $G_\infty$  с помощью корректирующей задачи Гурса из [1].

**2. Корректирующая задача Гурса.** Гладкость решений уравнения (1) в первой четверти плоскости существенно зависит от критической характеристики  $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$ , которая делит первую четверть плоскости  $G_\infty$  на два множества [2]:

$$G_- = \{(x, t) \in G_\infty : g_2(x, t) > g_2(0, 0)\}, \quad G_+ = \{(x, t) \in G_\infty : g_2(x, t) \leq g_2(0, 0)\}.$$

Выводим классическое решение уравнения (1) и критерий гладкости на  $f$  в  $G_+$ .

**Теорема 1.** Пусть коэффициент  $a(x, t) \geq a_0 > 0$ ,  $(x, t) \in G_\infty$ ,  $a \in C^2(G_\infty)$ ,  $f \in C(G_\infty)$ . Функция

$$F(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{f(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)} ds d\tau \tag{6}$$

является классическим решением неоднородного уравнения (1) в  $G_+$  тогда и только тогда, когда

$$H_+^{(i)}(x, t) \equiv \int_0^t \frac{f(|h_i\{g_i(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_i\{g_i(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), \tau\}}{\partial g_i} d\tau \in C^1(G_+), \quad i = 1, 2. \tag{7}$$

**Доказательство. Необходимость.** Если  $F$  вида (6) – классическое решение уравнения (1) в  $G_+$ , то из определения 1 имеем, что  $F \in C^2(G_+)$  и только  $f \in C(G_+)$ , чего явно недостаточно для существования и непрерывности интегралов (7), в которых ведется интегрирование и в  $G_-$ . Поэтому в теореме 1 предполагаем непрерывность  $f \in C(G_\infty)$ . Кроме того, из гладкости  $f \in C(G_\infty)$  и (7), конечно, следует гладкость  $F \in C^2(G_+)$ , но, вообще говоря, совсем не очевидно то, что для  $f \in C(G_\infty)$  функция  $F \in C^2(G_+)$  вида (6) удовлетворяет уравнению (1), если его правая часть  $f$  зависит от  $x$  и  $t$ . Соответственно, сначала докажем, что  $F$  вида (6) – классическое решение уравнения (1) в  $G_+$ . Во-первых, из ложного утверждения теоремы 1 о том, что  $F$  вида (6) – классическое решение уравнения (1) в  $G_+$ , можно получить ложную необходимую гладкость (7), например, так же как в случае  $a_1 \neq a_2$  из [1]. Во-вторых, потом не надо будет приводить это доказательство в достаточности, где оно обязательно.

Можно начать доказательство того, что функция  $F$  вида (6) является классическим решением уравнения (1) в  $G_+$  с предположения существования некоторого классического решения  $u_0 \in C^2(G_\infty)$  уравнения (1) на  $G_\infty$ . Например, подстановкой в это уравнение можно убедиться в том, что функция (6) для любой  $f \in C^1(G_\infty)$  является его классическим решением (см. равенства (48)). В результате доказательства нами будет предьявлено классическое решение этого уравнения, что укажет на правомерность сделанного предположения. Минимальная гладкость  $f$  могла нарушаться у  $F$  на  $G_+$  из-за модуля  $|s|$ , так как нижний предел интегрирования  $h_2\{g_2(x, t), \tau\}$  меняет знак на характеристике  $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$  при  $\tau = h^{(2)}[0, g_2(0, 0)]$  по первому тождеству обращения из (5) при  $i = 2$ .

Сначала покажем, что в любой точке  $(x^{(0)}, t^{(0)})$  из  $G_+$  функция (6) действительно является классическим решением уравнения (1). Каждая точка  $(x^{(0)}, t^{(0)}) \in G_+$  содержится строго внутри различных ограниченных криволинейных четырехугольников  $G_0$ , находящихся в  $G_\infty$ , сторонами которых служат отрезки характеристик

$$g_1(x, t) = C_1, \quad g_2(x, t) = C_2, \quad C_1, C_2 \in R. \tag{8}$$

Уравнение (1) в различных четырехугольниках  $G_0$  невырожденной заменой

$$\xi = g_1(x, t), \quad \eta = g_2(x, t) \tag{9}$$

с невырожденным якобианом  $J(x, t) = \xi_x \eta_t - \xi_t \eta_x \neq 0$  в  $G_\infty$ , потому что  $a(x, t) \geq a_0 > 0$  в  $G_\infty$ , приводится к виду

$$\begin{aligned} & [(\xi_t)^2 - a^2(\xi_x)^2] \tilde{u}_{\xi\xi} + 2aJ(x, t) \tilde{u}_{\xi\eta} + [(\eta_t)^2 - a^2(\eta_x)^2] \tilde{u}_{\eta\eta} + \\ & + [\xi_{tt} - a^2 \xi_{xx} - a^{-1} a_t \xi_t - a a_x \xi_x] \tilde{u}_{\xi\xi} + [\eta_{tt} - a^2 \eta_{xx} - a^{-1} a_t \eta_t - a a_x \eta_x] \tilde{u}_{\eta\eta} = \tilde{f}(\xi, \eta) = f(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)) \end{aligned} \quad (10)$$

относительно функции  $\tilde{u}(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)) \in C^2(\tilde{G}_\infty)$ . Здесь множество  $\tilde{G}_\infty$  (указанное в формуле (31) ниже) – образ четверти плоскости  $G_\infty$  при замене (9). Согласно (2) полные дифференциалы равны нулю

$$dg_i = (g_i)_x dx + (g_i)_t dt = [(g_i)_t + (-1)^i a(x, t)(g_i)_x] dt \equiv 0, \quad (x, t) \in G_\infty, \quad i = 1, 2,$$

и, следовательно, ввиду (8) имеем соотношения

$$(g_i)_t \equiv (-1)^{i+1} a(x, t)(g_i)_x, \quad (x, t) \in G_\infty, \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

$$\xi_t - a(x, t)\xi_x = 0, \quad \eta_t + a(x, t)\eta_x = 0, \quad (x, t) \in G_\infty. \quad (12)$$

Каждое из уравнений (12) дифференцируем раз по  $t$  и  $x$ , результаты дифференцирования по  $t$  складываем с произведением на коэффициент  $a(x, t)$  результатов дифференцирования по  $x$ , в полученных суммах соответственно применяем эти же уравнения (12) и имеем

$$\begin{aligned} \xi_{tt} - a^2 \xi_{xx} &= a^{-1} a_t \xi_t + a a_x \xi_x, \\ \eta_{tt} - a^2 \eta_{xx} &= a^{-1} a_t \eta_t + a a_x \eta_x, \quad (x, t) \in G_\infty. \end{aligned} \quad (13)$$

На основании тождеств (12), (13) уравнение (10) становится уравнением

$$\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \tilde{f}(\xi, \eta) / [2\tilde{a}(\xi, \eta)J(x, t)], \quad (\xi, \eta) \in \tilde{G}_0, \quad (14)$$

где  $\tilde{a}(\xi, \eta) = \tilde{a}(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$ , в различных прямоугольниках  $\tilde{G}_0 = \{(\xi, \eta) : \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1, \eta_0 \leq \eta \leq \eta_1\}$ .

В силу дважды непрерывной дифференцируемости и не вырожденности якобиана  $J(x, t) \neq 0$  замены (9) для непрерывной функции  $f \in C(G_\infty)$  непрерывна функция  $\tilde{f} \in C(\tilde{G}_\infty)$ . Поскольку по нашему предположению существует классическое решение  $u_0 \in C^2(G_\infty)$  уравнения (1), то ввиду этих же свойств замены (9) уравнение (14) в  $\tilde{G}_\infty$  имеет классическое решение

$$\tilde{u}^{(0)}(\xi, \eta) = u_0(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)) \in C^2(\tilde{G}_\infty). \quad (15)$$

Для любой  $\tilde{f} \in C(\tilde{G}_\infty)$  существует последовательность непрерывно дифференцируемых функций  $\tilde{f}_n \in C^1(\tilde{G}_\infty)$ , которая при  $n \rightarrow \infty$  равномерно сходится к  $\tilde{f}$  на каждом компакте  $\tilde{\tilde{G}}_0$ , где  $\tilde{\tilde{G}}_0$  – замыкание образов  $\tilde{G}_0$  четырехугольников  $G_0$  в результате замены (9).

В различных прямоугольниках  $\tilde{G}_0$  рассматриваем дифференциальное уравнение

$$(\tilde{u}_n^{(0)})_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \tilde{f}_n(\xi, \eta) / [2a(x, t)J(x, t)], \quad (\xi, \eta) \in \tilde{G}_0, \quad (16)$$

с согласованными условиями Гурса

$$\tilde{u}_n^{(0)}(\xi_0, \eta) = \tilde{u}_n^{(0)}(\xi_0, \eta), \quad \eta \in [\eta_0, \eta_1], \quad \tilde{u}_n^{(0)}(\xi, \eta_0) = \tilde{u}_n^{(0)}(\xi, \eta_0), \quad \xi \in [\xi_0, \xi_1], \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Задача Гурса (16), (17) в  $\tilde{G}_0$  решается методом характеристик. Общий интеграл уравнения (16) в  $C^1(\tilde{G}_0)$  состоит из непрерывно дифференцируемых функций

$$\tilde{u}_n^{(0)}(\xi, \eta) = g(\xi) + h(\eta) + \tilde{F}_n(\xi, \eta), \tag{18}$$

где  $g, h$  – любые непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов и функции  $\tilde{F}_n$  получаются из функции  $F$  вида (6) с подынтегральными функциями  $f_n(|s|, \tau)$  вместо  $f(|s|, \tau)$  в результате замены (9). Для правых частей  $\tilde{f}_n \in C^1(\tilde{G}_\infty)$  очевидно решения  $\tilde{F}_n \in C^2(\tilde{G}_\infty)$ . Функции (18) подставляются в условия Гурса (17) и ввиду  $\tilde{u}^{(0)} \in C^2(\tilde{G}_\infty)$  и не вырожденности замены (9) выводятся ее единственные классические решения из  $C^2(\tilde{G}_0)$ :

$$\tilde{u}_n^{(0)}(\xi, \eta) = \tilde{u}^{(0)}(\xi, \eta_0) + \tilde{u}^{(0)}(\xi_0, \eta) - \tilde{u}^{(0)}(\xi_0, \eta_0) - \tilde{F}_n(\xi, \eta_0) + \tilde{F}_n(\xi_0, \eta_0) + \tilde{F}_n(\xi, \eta) - \tilde{F}_n(\xi_0, \eta), \quad n = 1, 2, \dots \tag{19}$$

Как разность классических решений функции  $\tilde{v}_n(\xi, \eta) = \tilde{u}^{(0)}(\xi, \eta) - \tilde{u}_n^{(0)}(\xi, \eta)$ , конечно, являются классическими решениями задачи Гурса:

$$(\tilde{v}_n)_{\xi\eta}(\xi, \eta) = [\tilde{f}(\xi, \eta) - \tilde{f}_n(\xi, \eta)] / 2a(x, t)J(x, t), \quad (\xi, \eta) \in \tilde{G}_0, \tag{20}$$

$$\tilde{v}_n(\xi_0, \eta) = 0, \quad \eta \in [\eta_0, \eta_1], \quad \tilde{v}_n(\xi, \eta_0) = 0, \quad \xi \in [\xi_0, \xi_1], \quad n = 1, 2, \dots \tag{21}$$

Умножая уравнение (20) на сумму первых частных производных  $(\tilde{v}_n)_\xi + (\tilde{v}_n)_\eta$ , интегрируя результат умножения по области  $]\xi_0, \tau_1[ \times ]\eta_0, \tau_2[$  с помощью однородных условий Гурса (21), применяя элементарные оценки и беря точную верхнюю грань по  $(\tau_1, \tau_2) \in ]\xi_0, \xi_1[ \times ]\eta_0, \eta_1[$  в полученном неравенстве, так же, как в [3, с. 1020], выводится априорная оценка

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{\eta_0 < \eta < \eta_1 \\ \xi_0 < \xi < \xi_1}} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left( |(\tilde{v}_n)_\xi(\xi, \eta)|^2 + |\tilde{v}_n(\xi, \eta)|^2 \right) d\xi + \sup_{\substack{\xi_0 < \xi < \xi_1 \\ \eta_0 < \eta < \eta_1}} \int_{\eta_0}^{\eta_1} \left( |(\tilde{v}_n)_\eta(\xi, \eta)|^2 + |\tilde{v}_n(\xi, \eta)|^2 \right) d\eta \leq \\ & \leq c_0 \iint_{G_0} |\tilde{f}_n(\xi, \eta) - \tilde{f}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{22}$$

где постоянная  $c_0 > 0$  не зависит от  $\tilde{v}_n, \xi, \eta$  и  $n$ .

Поскольку в априорной оценке (22) правая часть сходится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , то из сходимости его левой части к нулю при  $n \rightarrow \infty$  заключаем равномерную сходимость на прямоугольниках  $\tilde{G}_0$  последовательности  $\tilde{v}_n$  к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , потому что для пространств Соболева  $W_2^1(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}$ , справедливы непрерывные вложения пространств  $W_2^1(\xi_0, \xi_1) \subset C[\xi_0, \xi_1], W_2^1(\eta_0, \eta_1) \subset C[\eta_0, \eta_1]$  [4]. Это означает равномерную сходимость на прямоугольниках  $\tilde{G}_0$  последовательности  $\tilde{u}_n^{(0)}$  к  $\tilde{u}^{(0)}$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому благодаря неравенствам (22) из решений (19) предельным переходом при  $n \rightarrow \infty$  получаем тождество

$$\begin{aligned} & \tilde{u}^{(0)}(\xi, \eta) = \tilde{u}^{(0)}(\xi, \eta_0) + \tilde{u}^{(0)}(\xi_0, \eta) - \tilde{u}^{(0)}(\xi_0, \eta_0) - \\ & - \tilde{F}(\xi, \eta_0) + \tilde{F}(\xi_0, \eta_0) + \tilde{F}(\xi, \eta) - \tilde{F}(\xi_0, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \tilde{G}_0, \end{aligned} \tag{23}$$

где функция  $\tilde{F}(\xi, \eta) = F(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$  получена из функции  $F$  вида (6) заменой (9).

Проанализируем гладкость слагаемых правой части этого тождества. Слагаемые  $\tilde{u}^{(0)}(\xi, \eta_0)$  и  $\tilde{u}^{(0)}(\xi_0, \eta)$  очевидно дважды непрерывно дифференцируемы соответственно по  $\xi$  и  $\eta$ , так как в (15) решение  $\tilde{u}^{(0)} \in C^2(G_0)$  по совокупности переменных  $\xi$  и  $\eta$ .

Из уравнений характеристик  $ds/d\tau = (-1)^i a(s, \tau), i = 1, 2$ , в (2) и чётности функции  $a(|s|, \tau)$  по  $s$  заключаем, что в каждой фиксированной точке  $(s, \tau) \in \dot{G}_\infty$  тангенсы углов наклона касательных к характеристикам  $g_i(s, \tau) = C_i, i = 1, 2$ , с осью  $Ox$  отличаются противоположными знаками. Значит, для всех вершин  $M(0, t), t > 0$ , на оси  $Ox$  треугольники  $\Delta MPG$  являются криволинейными «равнобедренными».

Поэтому на рисунке 1, а характеристики  $g_2(s, \tau) = C_2$  и  $g_1(s, \tau) = C_1$ , при  $s < 0$  симметричны соответственно характеристикам  $g_1(s, \tau) = C_1$  и  $g_2(s, \tau) = C_2$  при  $s > 0$  относительно оси  $O\tau$ .

Чтобы выяснить гладкость остальных слагаемых в (23), воспользуемся геометрическим представлением функции  $F$  вида (6) через двойной интеграл по характеристическому треугольнику  $\Delta MPQ$  с вершиной  $M(x, t) \in G_+$  и вершинами его основания  $P(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)$ ,  $Q(h_1\{g_1(x, t), 0\}, 0)$ :

$$F(x, t) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta MPQ} \frac{f(|x|, t)}{a(|x|, t)} dxdt = \frac{1}{2} \iint_{\Delta OP'Q'} \frac{f(x, t)}{a(x, t)} dxdt + \frac{1}{2} \iint_{\Delta OQM'} \frac{f(x, t)}{a(x, t)} dxdt, \tag{24}$$

где точка  $P'(-h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)$  – симметричная к точке  $P(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)$  относительно оси  $O\tau$  и точка  $Q'(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)])$ .

Чтобы в функции (24) перейти к новым переменным типа (9)

$$v = g_1(s, \tau), \quad \rho = g_2(s, \tau),$$

найдем образ  $\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$  треугольника  $\Delta MPQ$  и его частей в плоскости  $\tilde{O}v\rho$ .

Нетрудно убедиться в том, что для любой точки  $M(x, t) \in G_+$  в (6) двойной интеграл равен двойному интегралу по криволинейному характеристическому треугольнику  $\Delta MPQ$  (рисунок 1, а). В плоскости  $Ost$  через его вершину  $M(x, t) \in G_+$  очевидно проходят две характеристики:  $g_2(s, \tau) = g_2(x, t)$  и  $g_1(s, \tau) = g_1(x, t)$ , которые пересекают ось  $O\tau$  при  $\tau = 0$  соответственно в точках основания  $P(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)$  и  $Q(h_1\{g_1(x, t), 0\}, 0)$ . На оси  $O\tau$  точка  $P'(-h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)$  симметрична точке  $P(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)$  относительно оси  $O\tau$ . Точка  $Q'(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)])$  является точкой пересечения характеристики  $g_2(s, \tau) = g_2(x, t)$  с осью  $O\tau$ . Все это легко подтверждается подстановкой их координат в соответствующие уравнения характеристик, используя определения обратных отображений  $h_i$ ,  $h^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , и тождества обращения (3)–(5).

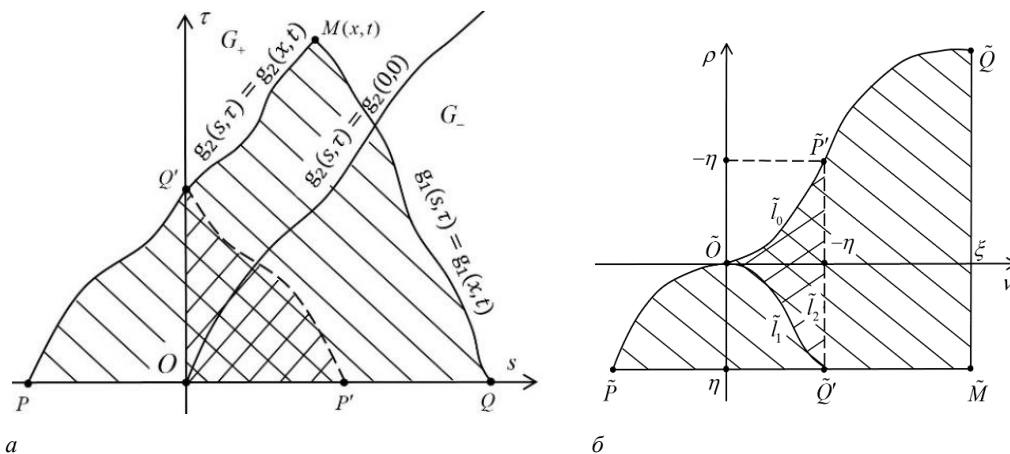
Отображение (9) переводит точку  $M(x, t)$  плоскости  $Ost$  в точку  $\tilde{M}(\xi, \eta)$  плоскости  $\tilde{O}v\rho$ .

Тогда после замены переменных типа (9) уравнения характеристик  $g_i(s, \tau) = g_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$ , боковых сторон  $MP$  и  $MQ$  треугольника  $\Delta MPQ$  становятся соответственно уравнениями

$$v = g_1(s, \tau) = g_1(x, t) = \xi, \tag{25}$$

$$\rho = g_2(s, \tau) = g_2(x, t) = \eta \tag{26}$$

боковых сторон  $\tilde{M}\tilde{P}$  и  $\tilde{M}\tilde{Q}$  треугольника  $\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$  в плоскости  $\tilde{O}v\rho$ . Эти стороны  $\tilde{M}\tilde{P}$  и  $\tilde{M}\tilde{Q}$  лежат соответственно на прямых  $\rho = \eta$  и  $v = \xi$  (рисунок 1, б).



а – для функции  $F$ ; б – для функции  $\tilde{F}$

Рисунок 1. – Область интегрирования на множестве  $G_+$



В замену типа (9) подставляем координаты вершин основания  $P(h_2\{g_2(x,t),0\},0)$ ,  $Q(h_1\{g_1(x,t),0\},0)$  и в силу первых тождеств обращения из (3) вычисляем соответственно

$$v = g_1(h_2\{\eta,0\},0), \quad \rho = g_2(h_2\{\eta,0\},0) = \eta; \quad v = g_1(h_1\{\xi,0\},0) = \xi, \quad \rho = g_2(h_1\{\xi,0\},0) \quad (27)$$

координаты вершин  $\tilde{P}(g_1(h_2\{\eta,0\},0),\eta)$ ,  $\tilde{Q}(\xi, g_2(h_1\{\xi,0\},0))$  треугольника  $\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$  в плоскости  $\tilde{O}\nu\rho$ , так как  $g_1(x,t) = \xi$ ,  $g_2(x,t) = \eta$ . Подставляя координаты точек  $P'(-h_2\{g_2(x,t),0\},0)$ ,  $Q'(0, h^{(2)}[0, g_2(x,t)])$  в эту замену переменных, в силу первой формулы обращения из (4) при  $i = 2$  находим соответственно

$$v = g_1(-h_2\{\eta,0\},0), \quad \rho = g_2(-h_2\{\eta,0\},0); \quad v = g_1(0, h^{(2)}[0, \eta]), \quad \rho = g_2(0, h^{(2)}[0, \eta]) = \eta \quad (28)$$

координаты точек  $\tilde{P}'(g_1(-h_2\{\eta,0\},0), g_2(-h_2\{\eta,0\},0))$ ,  $\tilde{Q}'(g_1(0, h^{(2)}[0, \eta]), \eta)$  в плоскости  $\tilde{O}\nu\rho$ .

Ищем образ отрезка  $OP'$  с уравнением  $\tau = 0$ ,  $s \in [0, -h_2\{g_2(x,t),0\}]$  при отображении типа (9) из плоскости  $Ost$  в плоскость  $\tilde{O}\nu\rho$ . Из этого отображения при  $\tau = 0$  приходим к уравнениям  $v = g_1(s,0)$ ,  $\rho = g_2(s,0)$ . Из них ввиду единственности решений  $s = h_1\{v,0\}$ ,  $s = h_2\{\rho,0\}$  системы типа (9) относительно  $(s,\tau)$  и тождеств обращения из (3) имеем уравнение

$$v_0(\rho) \equiv v = g_1(h_2\{\rho,0\},0) : \quad h_2\{\rho,0\} - h_1\{v,0\} = 0 \quad (29)$$

кривой  $\tilde{O}\tilde{P}'$  вида  $\tilde{l}_0$  в плоскости  $\tilde{O}\nu\rho$ . Подставив координаты точек  $\tilde{P}'(g_1(-h_2\{\eta,0\},0), g_2(-h_2\{\eta,0\},0))$  и  $\tilde{O}(0,0)$  в уравнение (29), можно еще раз увидеть, что кривая  $\tilde{l}_0$  проходит через них, потому что в силу вторых тождеств обращения из (3)

$$h_2\{\rho,0\} - h_1\{v,0\} = h_2\{g_2(-h_2\{\eta,0\},0),0\} - h_1\{g_1(-h_2\{\eta,0\},0),0\} = -h_2\{\eta,0\} + h_2\{\eta,0\} = 0.$$

Уравнение (29) выполняется для координат точки  $\tilde{O}(0,0)$ , так как отрезок  $OP'$  действительно соединяет начало координат  $O(0,0)$  и точку  $P'$  в плоскости  $Ost$  и уравнение (29) найдено невырожденной заменой типа (9) из уравнения отрезка  $OP'$ . Из формул производных обратных функций  $(h_i)_i = 1/(g_i)_x$ ,  $i = 1, 2$ , строгого возрастания функции  $g_2$  и строго убывания функции  $g_1$  с ростом  $x$  следует строгое возрастание значений  $\rho$  функции (29) вместе с ростом  $v$  в плоскости  $\tilde{O}\nu\rho$ . Непосредственной подстановкой координат точек  $\tilde{P}$  и  $\tilde{Q}$  в уравнение (29) можно убедиться в том, что кривая уравнения (29) проходит и через эти точки  $\tilde{P}$  и  $\tilde{Q}$ , т. е. кривая  $\tilde{l}_0$  уравнения (29) является криволинейным основанием треугольника  $\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$  в плоскости  $\tilde{O}\nu\rho$  (см. рисунок 1, б). Верхняя полуплоскость  $Ost$ ,  $\tau \geq 0$ , взаимно однозначно отображается заменой типа (9) в часть  $h_2\{\rho,0\} \leq h_1\{v,0\}$ ,  $v, \rho \in R$ , плоскости  $\tilde{O}\nu\rho$ .

Чтобы найти образ отрезка  $OQ'$  из  $Ost$  в  $\tilde{O}\nu\rho$  из замены типа (9) при  $s = 0$ , выводим уравнения  $v = g_1(0,\tau)$ ,  $\rho = g_2(0,\tau)$ . Из их единственных решений  $\tau = h^{(1)}[0, v]$ ,  $\tau = h^{(2)}[0, \rho]$  системы типа (9) относительно  $(s,\tau)$  и вторых тождеств обращения из (4) находим уравнение

$$v_1(\rho) \equiv v = g_1(0, h^{(2)}[0, \rho]) : \quad h^{(1)}[0, v] - h^{(2)}[0, \rho] = 0 \quad (30)$$

кривой  $\tilde{O}\tilde{Q}'$  вида  $\tilde{l}_1$  в плоскости  $\tilde{O}\nu\rho$  (см. рисунок 1, б). Так же, как и выше для  $\tilde{l}_0$ , устанавливается строгое убывание значений  $\rho$  функции (30) для  $\tilde{l}_1$  с ростом  $v$  в плоскости  $\tilde{O}\nu\rho$ . Кроме того, замена типа (9) взаимно однозначно отображает первую четверть  $G_\infty$  плоскости  $Ost$  на

$$\tilde{G}_\infty = \{(v,\rho) : h_2\{\rho,0\} < h_1\{v,0\}, \rho > 0; h^{(2)}[\rho,0] \leq h^{(1)}[v,0], \rho \leq 0; v \geq 0\}, \quad (31)$$

т. е. на эту криволинейную четверть из плоскости  $\tilde{O}\nu\rho$ .

Аналогично характеристике  $MQ$ , которая при замене типа (9) становится прямой уравнения  $v = \xi$ , характеристика  $Q'P'$  уравнения  $g_1(s, \tau) = g_1(-h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)$ , проходящая через точку  $P'$ , будет тоже некоторой прямой уравнения  $v = v^{(0)}$ , также параллельной оси  $\tilde{O}\rho$ . Для вычисления значения  $v^{(0)}$  воспользуемся равнобедренностью треугольника  $\Delta Q'PP'$ . Следовательно, в плоскости  $Ost$  для точек  $Q'$  оси  $O\tau$  штриховую характеристику  $Q'P'$  из семейства  $g_1(s, \tau) = C_1$  можно искать в форме  $-g_2(-s, \tau) = C_2$ ,  $C_2 \in R$ , и характеристики из семейства  $g_2(s, \tau) = C_2$  – в форме  $-g_1(-s, \tau) = C_1$ ,  $C_1 \in R$ . Если воспользоваться этой взаимной заменяемостью характеристик  $v = g_1(s, \tau) = -g_2(-s, \tau) = C_2$ ,  $C_2 \in R$ , то можно найти уравнение образа  $\tilde{Q}'\tilde{P}'$  кривой  $Q'P'$  в плоскости  $\tilde{O}\nu\rho$ . По координатам точки  $Q'(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)])$  вычисляем значение не зависящей от  $s$  и  $\tau$  постоянной  $C_2 = -g_2(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]) = -g_2(x, t)$  ввиду первого тождества обращения из (4) при  $i=2$ . В итоге, имеем равносильные уравнения

$$v = g_1(s, \tau) = -g_2(x, t) = -\eta, \quad g_2(-s, \tau) = g_2(x, t)$$

заштрихованной кривой  $Q'P'$ , проходящей также через точку  $P'(-h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)$ , так как  $g_2(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0) = g_2(x, t)$  по первому тождеству обращения (3) при  $i=2$ . Таким образом, кривую  $Q'P'$  указанного выше уравнения  $g_1(s, \tau) = g_1(-h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)$  первого семейства характеристик со своей постоянной  $C_1$  действительно можно записать в виде уравнения  $g_2(-s, \tau) = g_2(x, t)$  второго семейства характеристик из (8). Из первого уравнения после замены типа (9) в плоскости  $\tilde{O}\nu\rho$  для образа  $\tilde{Q}'\tilde{P}'$  имеем уравнение прямой  $\tilde{l}_2$ :

$$v_2(\rho) \equiv v^{(0)} = -\eta, \quad \eta \leq \rho \leq g_2(-h_2\{\eta, 0\}, 0) = \rho^{(0)}. \quad (32)$$

На основе установленной выше взаимной заменяемости семейств характеристик  $g_i(s, \tau) = C_i$ ,  $i=1, 2$ , на оси  $O\tau$  отсюда вытекают реальные значения координат точек

$$\tilde{P}'(-\eta, g_2(-h_2\{\eta, 0\}, 0)), \quad \tilde{Q}'(-\eta, \eta). \quad (33)$$

Между прочим, после замены типа (9) критическая характеристика  $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$  из первой четверти плоскости  $G_\infty$  взаимно однозначно переходит в полуось  $\rho=0, v \geq 0$  плоскости  $\tilde{O}\nu\rho$ , так как эта характеристика проходит через начало координат  $O(0, 0)$  при  $s = \tau = 0$ , которой в замене типа (9) соответствует начало координат  $\tilde{O}(0, 0)$  в  $\tilde{O}\nu\rho$ , и ось  $\tilde{O}v$  перпендикулярна оси  $\tilde{O}\rho$ .

В равенствах (24) проводим замену типа (9) и имеем интегральное представление  $\tilde{F}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \iint_{\Delta M\tilde{P}\tilde{Q}} \frac{\tilde{f}(\xi, \eta)}{\tilde{a}(\xi, \eta)} J(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Delta OP'Q'} \frac{\tilde{f}(\xi, \eta)}{\tilde{a}(\xi, \eta)} J(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{1}{2} \iint_{OQM\tilde{Q}'} \frac{\tilde{f}(\xi, \eta)}{\tilde{a}(\xi, \eta)} J(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (34) \end{aligned}$$

где  $J(\xi, \eta) = 1/J(x, t) \neq 0$  – невырожденный якобиан обратного к преобразованию типа (9) и ввиду (25)–(28), (33) точки  $\tilde{O}(0, 0)$ ,  $\tilde{M}(\xi, \eta)$ ,  $\tilde{P}(g_1(h_2\{\eta, 0\}, 0), \eta)$ ,  $\tilde{Q}(\xi, g_2(h_1\{\xi, 0\}, 0))$ ,  $\tilde{P}'(-\eta, g_2(-h_2\{\eta, 0\}, 0))$ ,  $\tilde{Q}'(-\eta, \eta)$  из  $\tilde{O}\nu\rho$  являются соответственно образами точек  $O(0, 0)$ ,  $M(x, t)$ ,  $P(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)$ ,  $Q(h_1\{g_1(x, t), 0\}, 0)$ ,  $P'(-h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)$ ,  $Q'(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)])$  из  $Ost$ .

В равенстве (34) используем уравнение (14), двойные интегралы выражаем через повторные интегралы и получаем сумму повторных интегралов

$$\tilde{F}(\xi, \eta) = \int_{\eta}^0 \int_{v_1(\rho)}^{-\eta} \tilde{u}_{\nu\rho}^{(0)}(v, \rho) dv d\rho + \int_0^{g_2(-h_2\{\eta, 0\}, 0)} \int_{v_0(\rho)}^{-\eta} \tilde{u}_{\nu\rho}^{(0)}(v, \rho) dv d\rho +$$

$$+ \int_{\eta}^0 \int_{v_1(\rho)}^{\xi} \tilde{u}_{vp}^{(0)}(v, \rho) dv d\rho + \int_0^{g_2(h_1\{\xi, 0\}, 0)} \int_{v_0(\rho)}^{\xi} \tilde{u}_{vp}^{(0)}(v, \rho) dv d\rho. \quad (35)$$

Применяя уравнения (29), (30), (32) линий  $\tilde{l}_0, \tilde{l}_1, \tilde{l}_2$ , берем производные и исследуем гладкость

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \int_{\eta}^0 \tilde{u}_{vp}^{(0)}(v, \rho) \Big|_{v=\xi} d\rho + \int_{v_0(\rho) \Big|_{\rho=g_2(h_1\{\xi, 0\}, 0)}}^{\xi} \tilde{u}_{vp}^{(0)}(v, \rho) dv \Big|_{\rho=g_2(h_1\{\xi, 0\}, 0)} \frac{\partial g_2(h_1\{\xi, 0\}, 0)}{\partial \xi} + \\ &+ \int_0^{g_2(h_1\{\xi, 0\}, 0)} \tilde{u}_{vp}^{(0)}(v, \rho) \Big|_{v=\xi} d\rho = \tilde{u}_{\xi}^{(0)}(\xi, \rho) \Big|_{\rho=g_2(h_1\{\xi, 0\}, 0)} - \tilde{u}_v^{(0)}(v, \eta) \Big|_{v=\xi} \in C^1(\tilde{G}_0), \\ \frac{\partial \tilde{F}(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= - \int_{v_1(\rho) \Big|_{\rho=\eta}}^{-\eta} \tilde{u}_{vp}^{(0)}(v, \rho) dv \Big|_{\rho=\eta} - \int_{\eta}^0 \tilde{u}_{vp}^{(0)}(v, \rho) \Big|_{v=-\eta} d\rho + \\ &+ \int_{v_0(\rho) \Big|_{\rho=g_2(-h_2\{\eta, 0\}, 0)}}^{-\eta} \tilde{u}_{vp}^{(0)}(v, \rho) dv \Big|_{\rho=g_2(-h_2\{\eta, 0\}, 0)} \frac{\partial g_2(-h_2\{\eta, 0\}, 0)}{\partial \eta} - \int_0^{g_2(-h_2\{\eta, 0\}, 0)} \tilde{u}_{vp}^{(0)}(v, \rho) \Big|_{v=-\eta} d\rho - \\ &- \int_{v_1(\rho) \Big|_{\rho=\eta}}^{\xi} \tilde{u}_{vp}^{(0)}(v, \rho) dv \Big|_{\rho=\eta} = \tilde{u}_v^{(0)}(v, \eta) \Big|_{v=-\eta} - \tilde{u}_v^{(0)}(v, g_2(-h_2\{\eta, 0\}, 0)) \Big|_{v=-\eta} + \\ &+ \tilde{u}_{\eta}^{(0)}(v, \eta) \Big|_{v=-\eta} - \tilde{u}_{\eta}^{(0)}(v, \eta) \Big|_{v=\xi} \in C^1(\tilde{G}_0), \end{aligned}$$

так как  $\tilde{u}^{(0)} \in C^2(\tilde{G}_0)$  согласно (15) и

$$\begin{aligned} v_0(\rho) \Big|_{\rho=g_2(h_1\{\xi, 0\}, 0)} &= g_1(h_2\{\rho, 0\}, 0) \Big|_{\rho=g_2(h_1\{\xi, 0\}, 0)} = \xi, \\ v_0(\rho) \Big|_{\rho=g_2(-h_2\{\eta, 0\}, 0)} &= g_1(h_2\{\rho, 0\}, 0) \Big|_{\rho=g_2(-h_2\{\eta, 0\}, 0)} = g_1(-h_2\{\eta, 0\}, 0) = -\eta, \\ v_1(\eta) &= g_1(0, h^{(2)}[0, \rho]) \Big|_{\rho=\eta} = g_1(0, h^{(2)}[0, \eta]) = -\eta \end{aligned}$$

в силу (29), (30), (33), первого при  $i=1$  и второго при  $i=2$  тождеств обращения (3). Отметим, что непрерывная дифференцируемость первых производных  $\partial \tilde{F} / \partial \xi$  и  $\partial \tilde{F} / \partial \eta$  на  $\tilde{G}_0$  сохраняется даже тогда, когда в них соответственно при множителях  $\partial g_2(h_1\{\xi, 0\}, 0) / \partial \xi$  и  $\partial g_2(-h_2\{\eta, 0\}, 0) / \partial \eta$  интегралы не обращались бы в ноль. Она сохраняется даже без применения реальных координат (33) точек  $\tilde{P}'$  и  $\tilde{Q}'$  благодаря тому, что в плоскости  $\tilde{O}v\rho$  образом отрезка  $Q'P'$  характеристики служит отрезок  $\tilde{Q}'\tilde{P}'$  некоторой прямой, параллельный оси  $\tilde{O}\rho$ .

Таким образом, отсюда вытекает дважды непрерывная дифференцируемость функции  $\tilde{F}$  вида (34) на  $\tilde{G}_0$  и, следовательно, одновременно дважды непрерывная дифференцируемость функции  $F$  на  $G_0$ . Поэтому в любой внутренней точке  $(x^{(0)}, t^{(0)}) \in G_+$ , в которую взаимно и однозначно отображение типа (9) переводит точку  $(\xi^{(0)}, \eta^{(0)}) \in \tilde{G}_0$ , функция  $F$  вида (6) не нуждается в корректировке. Итак, мы уже доказали, что действительно  $F \in C^2(G_+)$ .

На основании вышеизложенного заключаем, что при каждом  $n = 1, 2, \dots$  верны тождества

$$(F_n)_{nn}(x, t) - a^2(x, t)(F_n)_{xx}(x, t) - a^{-1}(x, t)a_t(x, t)(F_n)_t(x, t) - a(x, t)a_x(x, t)(F_n)_x(x, t) = f_n(x, t)$$

для всех  $(x, t) \in G_0$ . В них переходим к пределу  $f_n \rightarrow f$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на каждом компакте  $\bar{G}_0$ , содержащем произвольную точку  $(x^{(0)}, t^{(0)}) \in G_+$ , и получаем тождество

$$F_{tt}(x,t) - a^2(x,t)F_{xx}(x,t) - a^{-1}(x,t)a_t(x,t)F_t(x,t) - a(x,t)a_x(x,t)F_x(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in G_+, \quad (36)$$

которое означает, что функция  $F$  вида (6) поточечно удовлетворяет неоднородному уравнению (1) в  $G_+$ . Здесь  $\bar{G}_0$  – замыкание криволинейных четырехугольников  $G_0$  в плоскости  $Oxt$ .

Обращаем внимание читателя на то, что после того как мы убедились в дважды непрерывной дифференцируемости функции  $F \in C^2(G_+)$ , мы могли не подставлять  $F$  в уравнение (1) на  $G_+$ . В силу  $F \in C^2(G_+)$  вместо уравнения (1) можно было подставить  $\tilde{F}$  в канонический вид (14), потому что для  $F \in C^2(G_+)$  уравнение (1) на  $G_+$  эквивалентно своему каноническому виду (14). Действительно, мы можем продифференцировать по  $\eta$  и  $\xi$  функцию  $\tilde{F}$  из (34) в виде двойного повторного интеграла

$$\tilde{F}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta MPQ} \frac{\tilde{f}(\xi, \eta)}{\tilde{a}(\xi, \eta)} J(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{2} \int_{g_2(h_1(\xi, 0), 0)}^{\xi} \int_{g_1(h_2(\rho, 0), 0)}^{\rho} \frac{\tilde{f}(v, \rho)}{\tilde{a}(v, \rho)} J(v, \rho) dv d\rho \quad (37)$$

и получить правую часть уравнения (14)

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{f}(\xi, \eta)}{\tilde{a}(\xi, \eta)} J(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \frac{\tilde{f}(\xi, \eta)}{\tilde{a}(\xi, \eta) J(x, t)}, \quad (\xi, \eta) \in \tilde{G}_+, \quad (38)$$

на образе  $\tilde{G}_+ = \{(v, \rho) : h^{(2)}[\rho, 0] \leq h^{(1)}[v, 0], \rho \leq 0; v \geq 0\}$  множества  $G_+$  при замене типа (9).

Теперь для выявления дополнительных необходимых требований гладкости (7) на правую часть  $f$  к непрерывности  $f \in C(G_\infty)$  вычисляем производную от  $F$  из (6) вдоль характеристик  $g_i(x, t) = C_i$  из (8), т. е. вдоль векторов  $\vec{\sigma}_i = \{(g_i)_t, -(g_i)_x\}$ ,  $i=1, 2$ . Ортогональные к ним  $(\overrightarrow{\text{grad}} g_i(x, t), \vec{\sigma}_i) = (g_i)_x(g_i)_t - (g_i)_t(g_i)_x = 0$ ,  $(x, t) \in G_\infty$ , градиенты  $\overrightarrow{\text{grad}} g_i(x, t) = \{(g_i)_x, (g_i)_t\}$ ,  $i=1, 2$ , направлены вдоль нормалей к этим характеристикам. В силу вторых тождеств обращения из (3) первые частные производные от функции  $F$  равны

$$F_t = \frac{1}{2} \int_0^t \left[ \frac{f(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial t} - \frac{f(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial t} \right] d\tau,$$

$$F_x = \frac{1}{2} \int_0^t \left[ \frac{f(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial x} - \frac{f(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial x} \right] d\tau.$$

Производными вдоль характеристик (8) от дважды непрерывно дифференцируемой функции  $F \in C^2(G_+)$  являются непрерывно дифференцируемые функции

$$(g_1)_t F_x - (g_1)_x F_t = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{f(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)} \left[ (g_1)_x \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial t} - (g_1)_t \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial x} \right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} J(x, t) \int_0^t \frac{f(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial g_2} d\tau \in C^1(G_+), \quad (39)$$

$$(g_2)_t F_x - (g_2)_x F_t = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{f(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)} \left[ (g_2)_t \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial x} - (g_2)_x \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial t} \right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} J(x, t) \int_0^t \frac{f(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial g_1} d\tau \in C^1(G_+), \quad (40)$$

так как для частных производных от функций  $h_i = h_i\{g_i(x, t), \tau\}$  справедливы соотношения

$$\begin{aligned} & (g_i)_x \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), \tau\}}{\partial t} - (g_i)_t \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), \tau\}}{\partial x} = \\ & = (g_i)_x \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), \tau\}}{\partial g_i} (g_i)_t - (g_i)_t \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), \tau\}}{\partial g_i} (g_i)_x \equiv 0, \quad i = 1, 2. \\ & (g_1)_x \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial t} - (g_1)_t \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial x} = [(g_1)_x (g_2)_t - (g_1)_t (g_2)_x] \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial g_2} = J(x, t) \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial g_2}, \\ & (g_2)_t \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial x} - (g_2)_x \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial t} = \\ & = [(g_1)_x (g_2)_t - (g_1)_t (g_2)_x] \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial g_1} = J(x, t) \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial g_1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость включений (7), так как якобиан  $J(x, t) \neq 0$  в  $G_\infty$  и  $J \in C^1(G_\infty)$ . Необходимость интегральных требований гладкости (7) доказана.

**Достаточность** непрерывности  $f \in C(G_\infty)$  и требований гладкости (7) для  $F \in C^2(G_+)$  вытекает из непрерывной дифференцируемости в  $G_+$  первых частных производных  $F_t$  и  $F_x$  от функции  $F$  как решений линейной системы алгебраических уравнений (39), (40) с непрерывно дифференцируемыми правыми частями этой системы благодаря (7) [2]. Выше методом корректировки пробных решений нами доказано, что функция  $F \in C^2(G_+)$  вида (6) поточечно удовлетворяет уравнению (1) в  $G_+$ . Теорема 1 доказана.

*Замечание 1.* В статье [1] методом корректировки показано, что соответствующая функция  $F$  типа (6) при  $a_1 \neq a_2$  не является классическим решением волнового уравнения  $u_{tt}(x, t) + (a_1 - a_2)u_{xt}(x, t) - a_1 a_2 u_{xx}(x, t) = f(x, t)$  с постоянными коэффициентами  $a_1, a_2 > 0$  в  $G_+$ , так как  $F$  не дважды непрерывно дифференцируема в  $G_+$  при  $a_1 \neq a_2$  для функций  $f = f(x, t) \in C(G_\infty)$ , зависящих от  $x$  и  $t$ . Эта функция  $F$  при  $a_1 = a_2 = a = const > 0$  равна нашей функции (6). В учебнике [5, с. 83] для того, чтобы не брать значения правой части  $f(x, t)$  для точек  $x < 0$ , в которых она не задана, в формуле (31) даже кусочно-гладкого решения первой смешанной задачи для интегрального уравнения (29) колебаний полуограниченной струны взят модуль нижнего предела интегрирования  $|x - a(t - \tau)|$  в аналогичном интеграле  $F$ . В статье [1] для классических решений простейшего уравнения колебаний полуограниченной струны и, в частности, этого же интегрального уравнения (29) из [5] вместо модуля этого нижнего предела интегрирования автором берется модуль от  $x$  подынтегральной функции  $f(|x|, t)$  и доказывается дважды непрерывная дифференцируемость соответствующего интеграла  $F$  в первой четверти плоскости  $G_\infty$ . Очень важно отметить, что хотя в [1] функция  $F$  при  $a_1 \neq a_2$  не нуждается в корректировке на  $G_-$ , так как  $F \in C^2(G_-)$ , проводится корректировка этой функции  $F$  на  $G_-$  в теореме 3 из [1] с помощью предела интегрирования  $t_0(x) = (k - 1)(x - a_1 t) / (a_1 + a_2)$ ,  $k \geq 1$ , для построения различных общих интегралов из дважды непрерывно дифференцируемых решений указанного выше волнового уравнения при  $a_1 \neq a_2$  в первой четверти плоскости  $G_\infty$ .

**Следствие 1.** Пусть коэффициент  $a(x, t) \geq a_0 > 0$ ,  $(x, t) \in G_\infty$ ,  $a \in C^2(G_\infty)$ . Если правая часть  $f$  уравнения (1) не зависит от  $x$  или  $t$  в  $G_\infty$ , то непрерывности  $f$  соответственно по  $t$  или  $x$  необходимо и достаточно для того, чтобы функция  $F$  из (6) являлась классическим решением неоднородного уравнения (1) в  $G_+$ .

**Доказательство. Необходимость** непрерывности  $f \in C[0, +\infty[$  по  $t$  или  $x$  этого следствия строго обоснована выше. Фактически остается показать **достаточность** этой непрерывности  $f \in C[0, +\infty[$  по  $t$  или  $x$  тем, что в этом случае соответствующие интегральные требования гладкости (7) автоматически выполняются.

Если правая часть  $f = f(t)$  не зависит от  $x$ , то функция  $F$  из (6) принимает вид

$$F(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{f(\tau)}{a(|s|, \tau)} ds d\tau. \tag{41}$$

Согласно обоснованию включения  $F \in C^2(G_+)$  в начале доказательства теоремы 1 функция (41) является решением уравнения (1) в  $G_+$ . Для всех  $f \in C[0, +\infty[$  ее первые частные производные очевидно непрерывно дифференцируемы в  $G_+$ :

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^t \left[ \frac{f(\tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial t} - \frac{f(\tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial t} \right] d\tau \in C^1(G_+),$$

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{2} \int_0^t \left[ \frac{f(\tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial x} - \frac{f(\tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial x} \right] d\tau \in C^1(G_+),$$

где мы воспользовались вторыми тождествами обращения из (3).

Если правая часть  $f = f(x)$  не зависит от  $t$ , то функция  $F$  из (6) приобретает вид

$$F(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{h_2\{g_2(x,t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x,t), \tau\}} \frac{f(|s|)}{a(|s|, \tau)} ds d\tau. \quad (42)$$

Также, как в начале доказательства следствия 1, из теоремы 1 имеем, что эта функция дважды непрерывно дифференцируема  $F \in C^2(G_+)$  и удовлетворяет уравнению (1) в  $G_+$ . Проверим ее дважды непрерывную дифференцируемость для  $f \in C[0, +\infty[$ . Первая частная производная по  $t$  от (42) равна функции

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^t \left[ \frac{f(|h_1\{g_1(x,t), \tau\}|)}{a(|h_1\{g_1(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial t} - \frac{f(|h_2\{g_2(x,t), \tau\}|)}{a(|h_2\{g_2(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial t} \right] d\tau,$$

в которой мы также применили вторые тождества обращения из (3). Когда здесь мы перейдем к новым переменным интегрирования  $y = h_1\{g_1(x,t), \tau\}$ ,  $z = h_2\{g_2(x,t), \tau\}$ , тогда мы получим уже очевидное непрерывно дифференцируемое на  $G_+$  представление этой производной

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x,t)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \int_{h_1\{g_1(x,t), 0\}}^x \left[ \frac{f(|y|)}{a(|y|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial t} \left( \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial \tau} \right)^{-1} \right]_{\tau=h^{(1)}[y, g_1(x,t)]} dy - \\ &- \frac{1}{2} \int_{h_2\{g_2(x,t), 0\}}^x \left[ \frac{f(|z|)}{a(|z|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial t} \left( \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial \tau} \right)^{-1} \right]_{\tau=h^{(2)}[z, g_2(x,t)]} dz \in C^1(G_+), \end{aligned}$$

в котором мы воспользовались вторыми тождествами обращения из (3) и тождествами  $\tau = h^{(1)}[y, g_1(x,t)]$ ,  $\tau = h^{(2)}[z, g_2(x,t)]$  благодаря вторым тождествам обращения из (5).

Для всех  $f \in C[0, +\infty[$  первой частной производной по  $x$  от (42) является функция

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{2} \int_0^t \left[ \frac{f(|h_1\{g_1(x,t), \tau\}|)}{a(|h_1\{g_1(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial x} - \frac{f(|h_2\{g_2(x,t), \tau\}|)}{a(|h_2\{g_2(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t), \tau\}}{\partial x} \right] d\tau,$$

в которой мы использовали вторые тождества обращения из (3). После перехода здесь к новым переменным интегрирования  $y = h_1\{g_1(x,t), \tau\}$ ,  $z = h_2\{g_2(x,t), \tau\}$  эта частная производная приобретает очевидное для  $f \in C[0, +\infty[$  непрерывно дифференцируемое на  $G_+$  представление

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{2} \int_{h_1\{g_1(x,t), 0\}}^x \left[ \frac{f(|y|)}{a(|y|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial x} \left( \frac{\partial h_1\{g_1(x,t), \tau\}}{\partial \tau} \right)^{-1} \right]_{\tau=h^{(1)}[y, g_1(x,t)]} dy -$$

$$-\frac{1}{2} \int_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^x \left[ \frac{f(|z|)}{a(|z|,\tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x} \left( \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial \tau} \right)^{-1} \right]_{\tau=h^{(2)}[z,g_2(x,t)]} dz \in C^1(G_+),$$

где мы применили те же самые тождества, что и для частной производной от  $F$  по  $t$ .

Итак, достаточность  $f \in C[0,+\infty[$  для  $F \in C^2(G_+)$  проверена. Факт выполнения уравнения (1) в  $G_+$  для функции  $F$  вида (6) с непрерывной и зависящей только от  $t$  или  $x$  правой частью  $f \in C[0,+\infty[$  очевидно следует из теоремы 1. Следствие 1 доказано.

**Теорема 2.** Пусть коэффициент  $a(x,t) \geq a_0 > 0$ ,  $(x,t) \in G_-$ ,  $a \in C^2(G_-)$ . Функция (6) является классическим решением неоднородного уравнения (1) в  $G_-$  тогда и только тогда, когда его правая часть  $f \in C(G_-)$  и

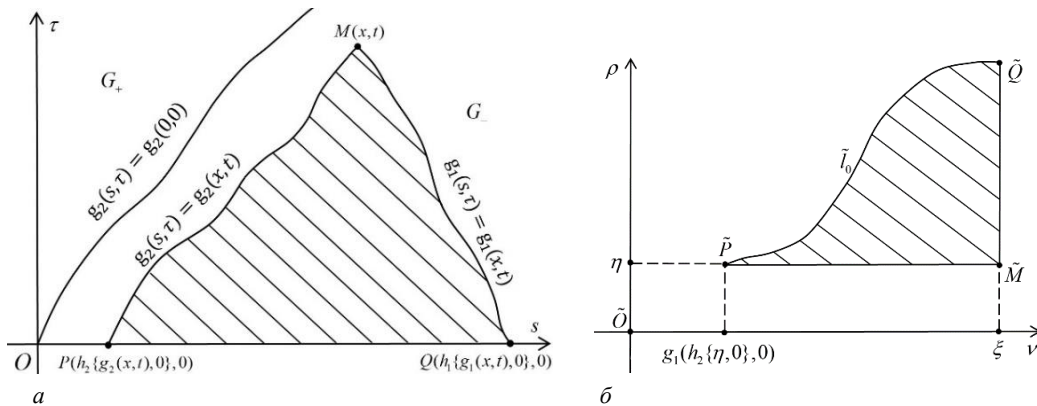
$$H_-^{(i)}(x,t) \equiv \int_0^t \frac{f(h_i\{g_i(x,t),\tau\},\tau)}{a(h_i\{g_i(x,t),\tau\},\tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i} d\tau \in C^1(G_-), \quad i=1,2. \tag{43}$$

**Доказательство. Достаточность.** Из гладкости  $f \in C(G_-)$  и (43), конечно, следует гладкость  $F \in C^2(G_-)$ . Остается показать то, что функция  $F$  вида (6) поточечно удовлетворяет уравнению (1) на  $G_-$ . Поскольку в функции  $F$  вида (6) на  $G_-$  под интегралом у правой части  $f$  модуль  $|x|=x$ , то замена переменных (9) дважды непрерывно дифференцируема на  $G_-$ , и поэтому уравнение (1) эквивалентно каноническому виду (14) на  $G_-$ . Значит, можно не проверять дважды непрерывную дифференцируемость функции  $F$  на  $G_-$  и не подставлять ее в уравнение (1) на  $G_-$ , т. е. не проверять  $F \in C^2(G_-)$  и вместо уравнения (1) на  $G_-$  подставить функцию  $\tilde{F}$  из (37) в его канонический вид (14) на образе  $\tilde{G}_- = \{(v,\rho) : h_2\{\rho,0\} < h_1\{v,0\}, \rho > 0, v > 0\}$  множества  $G_-$  после замены переменных типа (9) так же, как выше в (38) на  $G_+$ .

Но можно еще убедиться в дважды непрерывной дифференцируемости  $F$  на  $G_-$  так же, как в доказательстве теоремы 1. Точки  $(x^{(0)}, t^{(0)}) \in G_-$  – внутренние точки ограниченных криволинейных четырехугольников  $G_0 \subset G_\infty$  со сторонами характеристиками (8). В плоскости  $Ost$  функция (6) выражается через двойной интеграл по криволинейному характеристическому треугольнику  $\Delta MPQ$  с вершиной  $M(x,t) \in G_-$  и вершинами его основания  $P(h_2\{g_2(x,t),0\},0)$ ,  $Q(h_1\{g_1(x,t),0\},0)$  (рисунок 2, а), который в плоскости  $\tilde{O}\nu\rho$  с помощью замены типа (9), где уже  $\eta = g_2(x,t) > g_2(0,0)$ , приводится к двойному интегралу

$$F(x,t) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta MPQ} \frac{f(x,t)}{a(x,t)} dxdt = \frac{1}{2} \iint_{\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}} \frac{\tilde{f}(\xi,\eta)}{\tilde{a}(\xi,\eta)} J(\xi,\eta) d\xi d\eta = \tilde{F}(\xi,\eta) \tag{44}$$

по треугольнику  $\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$  с вершиной  $\tilde{M}(\xi,\eta) \in \tilde{G}_0$  и вершинами  $\tilde{P}(g_1\{h_2\{\eta,0\},0\},\eta)$ ,  $\tilde{Q}(\xi,g_2\{h_1\{\xi,0\},0\})$  его криволинейного основания  $\tilde{P}\tilde{Q}$  на кривой  $\tilde{l}_0$  из (29) (рисунок 2, б).



а – для функции  $F$  ; б – для функции  $\tilde{F}$

Рисунок 2. – Область интегрирования на множестве  $G_-$

Двойной интеграл из равенства (44) выражаем через уравнение (14) и повторный интеграл

$$\tilde{F}(\xi, \eta) = \iint_{\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}} \tilde{u}_{\nu\rho}^{(0)}(\nu, \rho) d\nu d\rho = \int_{\eta}^{g_2(h_1\{\xi, 0\}, 0)} \int_{\nu_0(\rho)}^{\xi} \tilde{u}_{\nu\rho}^{(0)}(\nu, \rho) d\nu d\rho,$$

дифференцируем один раз функцию  $\tilde{F}$  по  $\xi$  и  $\eta$  и находим первые частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \int_{\nu_0(\rho)|_{\rho=g_2(h_1\{\xi, 0\}, 0)}}^{\xi} \tilde{u}_{\nu\rho}^{(0)}(\nu, \rho) d\nu \Big|_{\rho=g_2(h_1\{\xi, 0\}, 0)} \frac{\partial g_2(h_1\{\xi, 0\}, 0)}{\partial \xi} + \int_{\eta}^{g_2(h_1\{\xi, 0\}, 0)} \tilde{u}_{\nu\rho}^{(0)}(\nu, \rho) \Big|_{\nu=\xi} d\rho = \\ &= \tilde{u}_{\nu}^{(0)}(\nu, g_2(h_1\{\xi, 0\}, 0)) \Big|_{\nu=\xi} - \tilde{u}_{\xi}^{(0)}(\xi, \eta) \in C^1(\tilde{G}_0), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tilde{F}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = - \int_{\nu_0(\rho)|_{\rho=\eta}}^{\xi} \tilde{u}_{\nu\rho}^{(0)}(\nu, \rho) d\nu \Big|_{\rho=\eta} = \tilde{u}_{\rho}^{(0)}(g_1(h_2\{\eta, 0\}, 0), \rho) \Big|_{\rho=\eta} - \tilde{u}_{\eta}^{(0)}(\xi, \eta) \in C^1(\tilde{G}_0),$$

так как  $\tilde{u}^{(0)} \in C^2(\tilde{G}_0)$  согласно (15) и  $\nu_0(\rho) \Big|_{\rho=g_2(h_1\{\xi, 0\}, 0)} = g_1(h_2\{\rho, 0\}, 0) \Big|_{\rho=g_2(h_1\{\xi, 0\}, 0)} = \xi$  согласно первому при  $i=1$  и второму при  $i=2$  тождествам обращения (3).

Отсюда следует дважды непрерывная дифференцируемость функции  $\tilde{F}$  на  $\tilde{G}_0$  и, значит, одновременно дважды непрерывная дифференцируемость функции  $F$  на  $G_0$ . Итак, для точек  $(x^{(0)}, t^{(0)}) \in G_-$  тем более не нужна корректировка функции  $F$ . Далее так же, как в доказательстве теоремы 1, можно еще вывести тождество (36) на  $G_-$ .

**Необходимость.** Непрерывность  $f \in C(G_-)$  вытекает из уравнения (1), которому удовлетворяет  $F$  в  $G_-$ . Гладкости (43) можно вывести так же, как при доказательстве теоремы 1, из дважды непрерывной дифференцируемости функции  $F \in C^2(G_-)$ . Теорема 2 доказана.

**Следствие 2.** Пусть коэффициент  $a(x, t) \geq a_0 > 0$ ,  $(x, t) \in G_-$ ,  $a \in C^2(G_-)$ . Если правая часть  $f$  уравнения (1) не зависит от  $x$  или  $t$  в  $G_-$ , то непрерывности  $f$  соответственно по  $t$  или  $x$  необходимо и достаточно для того, чтобы функция  $F$  из (6) являлась классическим решением неоднородного уравнения (1) в  $G_-$ .

**Доказательство** этого следствия аналогично доказательству следствия 1.

**Замечание 2.** Для вывода критериев корректности смешанных (начально-краевых) задач для неоднородных телеграфных уравнений в первой четверти плоскости  $G_\infty$  утверждения теорем 1 и 2 и их следствий 1 и 2 было целесообразно записать одной теоремой (без предположения непрерывности  $f \in C(G_\infty)$ ) и одним следствием (см. следствие 5). Они продублированы нами ради прозрачности и подробности изложения доказательств с помощью разных рисунков 1 и 2.

Теоремы 1 и 2 объединяет одна общая

**Теорема 3.** Пусть коэффициент  $a(x, t) \geq a_0 > 0$ ,  $(x, t) \in G_\infty$ ,  $a \in C^2(G_\infty)$ . Функция (6) является классическим решением неоднородного уравнения (1) в  $G_\infty$  тогда и только тогда, когда его правая часть

$$f \in C(G_\infty), \quad H_i(x, t) \equiv \int_0^t \frac{f(h_i\{g_i(x, t), \tau\}, \tau)}{a(h_i\{g_i(x, t), \tau\}, \tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), \tau\}}{\partial g_i} d\tau \in C^1(G_\infty), \quad i=1, 2. \quad (45)$$

**Доказательство. Достаточность.** Требования (45) обеспечивают то, что функция  $F$  вида (6) представляет собой классическое решение уравнения (1) в  $G_+$  и  $G_-$ , ввиду теорем 1 и 2, а также и на критической характеристике  $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$ , так как требования (45) гарантируют дважды непрерывную дифференцируемость  $F$  в окрестности этой характеристики.

**Необходимость.** Если функция  $F$  вида (6) является классическим решением уравнения (1) в  $G_\infty$ , то  $F \in C^2(G_\infty)$  и, следовательно, справедливы требования гладкости (45).

Для явного решения смешанных (начально-краевых) задач для модельного телеграфного уравнения (1) методом характеристик [5] важно знать его общий интеграл.



**Следствие 3.** Пусть выполняются  $a(x,t) \geq a_0 > 0$ ,  $(x,t) \in G_\infty$ ,  $a \in C^2(G_\infty)$  и (45) для  $f$ . Тогда общим интегралом уравнения (1) в первой четверти плоскости  $G_\infty$  во множестве классических (дважды непрерывно дифференцируемых в  $G_\infty$ ) решений являются функции

$$u(x,t) = \tilde{f}_1(g_1(x,t)) + \tilde{f}_2(g_2(x,t)) + F(x,t), \quad (x,t) \in G_\infty, \quad (46)$$

где  $\tilde{f}_1$  и  $\tilde{f}_2$  – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции переменных  $\xi, \eta$  вида

$$\tilde{f}_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(g_2(0,0)), \quad \tilde{f}_2(\eta) = f_2(\eta) - f_2(g_2(0,0)). \quad (47)$$

**Доказательство.** Для непрерывной правой части  $f \in C(G_\infty)$  интегральные требования гладкости (45) из следствия 3 очевидно равносильны одновременно интегральным требованиям гладкости (7) из теоремы 1, (43) из теоремы 2 и требованию непрерывности первых частных производных от функций  $H_+^{(i)}, H_-^{(i)}, i=1,2$ , в некоторой окрестности характеристики  $g_2(x,t) = g_2(0,0)$ . Ясно, что для  $f \in C(G_\infty)$  в (6) непрерывно дифференцируема функция  $F \in C^1(G_\infty)$  и, значит, функции  $H_+^{(i)}, H_-^{(i)}, i=1,2$ , непрерывны на характеристике  $g_2(x,t) = g_2(0,0)$  так же, как на характеристике  $x = at$  в кандидатской диссертации<sup>2</sup>.

Поэтому согласно теоремам 1 и 2 предположения следствия 3 гарантируют то, что действительно функция  $F \in C^2(G_\infty)$  и поточечно удовлетворяет неоднородному уравнению (1) в  $G_\infty$ . Тогда формулы (46), (47) представляют собой множество всех классических решений уравнения (1) на  $G_\infty$ , в которых классические решения (47) однородного уравнения (1) получены «методом погружения в решения с фиксированными значениями» из [6] для упрощения процедуры решений систем дифференциальных уравнений. Следствие 3 доказано.

**Следствие 4.** Пусть коэффициент  $a(x,t) \geq a_0 > 0$ ,  $(x,t) \in G_\infty$ ,  $a \in C^2(G_\infty)$ . Если функция  $f$  зависит от  $x$  и  $t$ , то для  $f \in C(G_\infty)$  требование принадлежности интегралов из (45) пространству  $C^1(G_\infty)$  эквивалентно требованию их принадлежности пространству  $C^{(1,0)}(G_\infty)$  или  $C^{(0,1)}(G_\infty)$ . Здесь  $C^{(1,0)}(G_\infty)$ ,  $C^{(0,1)}(G_\infty)$  – соответственно пространства непрерывно дифференцируемых по  $x$  и  $t$  и непрерывных по  $t$  и  $x$  функций на  $G_\infty$ .

**Доказательство.** Непрерывно дифференцируемые правые части  $f \in C^1(G_\infty)$  очевидно удовлетворяют интегральным требованиям из (45). Заменаи  $s_i = h_i\{g_i(x,t), \tau\}$  переменной интегрирования  $\tau$ , например, интегралы из (45) приводятся к интегралам

$$\begin{aligned} H_i(x,t) &= \int_0^t \frac{f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i} d\tau = \\ &= \int_{h_i\{g_i(x,t), 0\}}^x \left[ \frac{f(|s_i|, \tau)}{a(|s_i|, \tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i} \left( \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial \tau} \right)^{-1} \right]_{\tau=h^{(i)}[s_i, g_i(x,t)]} ds_i \in C^1(G_\infty), i=1,2, \end{aligned} \quad (48)$$

которые для  $f \in C^1(G_\infty)$  действительно непрерывно дифференцируемы по  $x$  и  $t$  в  $G_\infty$ , потому что в последних интегралах (48) под модулем  $|s_i|$  отсутствуют переменные  $x$  и  $t$ . В противном случае модуль дал бы разрыв производных. Здесь мы применили вторые тождества обращения из (3) и равенства  $\tau = h^{(i)}[s_i, g_i(x,t)]$ ,  $i=1,2$ , ввиду вторых тождеств из (5).

Сначала для более гладких  $f \in C^1(G_\infty)$  берем производную от (45)

$$\frac{\partial H_i(x,t)}{\partial t} = \frac{f(|h_i\{g_i(x,t), t\}|, t)}{a(|h_i\{g_i(x,t), t\}|, t)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), t\}}{\partial g_i} + \int_0^t \left[ \frac{f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i} \right]'_t d\tau =$$

<sup>2</sup> Новиков, Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / Е. Н. Новиков. – Минск, 2017. – 258 л.

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(x,t)}{a(x,t)} \frac{1}{(g_i)_x} + (-1)^{i+1} a(x,t) \int_0^t \left[ \frac{f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i} \right]_x d\tau = \\
&= \frac{f(x,t)}{a(x,t)} \frac{1}{(g_i(x,t))_x} + (-1)^{i+1} a(x,t) \frac{\partial H_i(x,t)}{\partial x}, \quad i=1,2, \tag{49}
\end{aligned}$$

в силу вторых тождеств обращения из (3), формулы производной обратной функции, (11) и

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)}{\partial t} = \frac{\partial f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)}{\partial h_i} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i} (g_i)_t = \\
&= (-1)^{i+1} a(x,t) \frac{\partial f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)}{\partial h_i} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i} (g_i)_x = (-1)^{i+1} a(x,t) \frac{\partial f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)}{\partial x}, \\
&\frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial t \partial g_i} = \frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i^2} (g_i(x,t))_t = \\
&= (-1)^{i+1} a(x,t) \frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i^2} (g_i(x,t))_x = (-1)^{i+1} a(x,t) \frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial x \partial g_i}, \quad i=1,2.
\end{aligned}$$

Затем два равенства первых и самых последних частей из (49), не содержащих явных производных от функции  $f$  по  $x$  и  $t$  в  $G_\infty$ , распространяются предельным переходом по  $f$  с более гладких  $f \in C^1(G_\infty)$  на непрерывные функции  $f \in C(G_\infty)$ , удовлетворяющие (45) в  $G_\infty$ . Эти полученные после предельного перехода два равенства (49) подтверждают справедливость утверждения следствия 4 на  $G_\infty$ .

Отметим, что в равенствах (49) наши значения индекса  $i=1$  и  $i=2$  соответствуют значениям индекса  $i=2$  и  $i=1$  в замечании 2.1 диссертации Е. Н. Новикова при  $a(x,t) = a = \text{const} > 0$ <sup>3</sup> из-за взаимно обратного соответствия характеристик. Следствие 4 доказано.

**Следствие 5.** Пусть коэффициент  $a(x,t) \geq a_0 > 0$ ,  $(x,t) \in G_\infty$ ,  $a \in C^2(G_\infty)$ . Если правая часть  $f$  уравнения (1) не зависит от  $x$  или  $t$  в  $G_\infty$ , то непрерывности  $f$  соответственно по  $t$  или  $x$  необходимо и достаточно для того, чтобы функция  $F$  из (6) являлась классическим решением неоднородного уравнения (1) в  $G_\infty$ .

**Доказательство** сводится к применению следствий 1 и 2.

Под интегралом в виде множителей функции  $f$  гладкий невырожденный коэффициент  $a \in C^2(G_\infty)$  и функции  $g_i, h_i \in C^2(G_\infty)$ ,  $i=1,2$ , не препятствуют требованию (45) на  $f \in C(G_\infty)$ .

*Замечание 3* [2]. Для коэффициента  $a(x,t) \geq a_0 > 0$ ,  $(x,t) \in G_\infty$ ,  $a \in C^2(G_\infty)$  интегральные требования гладкости из (45) на непрерывную  $f \in C(G_\infty)$  равносильны требованиям

$$\int_0^t f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau) d\tau \in C^1(G_\infty), \quad i=1,2.$$

**Заключение.** Найден критерий дважды непрерывной дифференцируемости решения  $F$  вида (6) неоднородного модельного телеграфного уравнения в первой четверти плоскости  $G_\infty$ . Он состоит из требования непрерывности правой части  $f \in C(G_\infty)$  уравнения (1) и двух интегральных требований гладкости (45) в  $G_\infty$ . Установлено, что если правая часть  $f$  не зависит от  $x$  или  $t$  в  $G_\infty$ , то непрерывности  $f$  соответственно по  $t$  или  $x$  необходимо и достаточно для того, чтобы функция  $F$  из (6) являлась классическим решением неоднородного уравнения (1) в  $G_\infty$ . Построен общий интеграл (46), (47) из дважды непрерывно

<sup>3</sup> Новиков, Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / Е. Н. Новиков. – Минск, 2017. – 258 л.

дифференцируемых функций для явного решения различных смешанных (начально-граничных) задач для модельного телеграфного уравнения (1) в  $G_\infty$ .

Работа выполнена при поддержке БРФФИ (проект № Ф22КИ-001 от 05 ноября 2021 г.).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ломовцев, Ф. Е. Метод корректировки пробного решения общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части / Ф. Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2017. – № 3. – С. 38–52.
2. Ломовцев, Ф. Е. Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой / Ф. Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2021. – № 1. – С. 18–38. – DOI: [10.33581/2520-6508-2021-1-18-38](https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-18-38).
3. Бриш Н. И. Задача Гурса для абстрактных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. / Н. И. Бриш, Н. И. Юрчук // Дифференциальные уравнения. – 1971. – Т. 7, № 6. – С. 1017–1030.
4. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. – М. : Наука, 1988. – 333 с.
5. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 2004. – 798 с.
6. Ломовцев, Ф. Е. Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных. / Ф. Е. Ломовцев, В. В. Лысенко // Вестн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2019. – № 3(104). – С. 5–17.

#### REFERENCES

1. Lomovtsev, F. E. (2017). Metod korektyrovki probnogo resheniya obshchego volnovogo uravneniya v pervoi chetverti ploskosti dlya minimal'noi gladkosti ego pravoi chasti [Correction method of test solutions of the general wave equation in the first quarter of the plane for the minimum smoothness of its right-hand side]. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika [Journal of the Belarusian State University. Mathematics and informatics]*, (3), 38–52. (In Russ., abstr. in Engl.).
2. Lomovtsev, F. E. (2021). Pervaya smeshannaya zadacha dlya obshchego telegrafnogo uravneniya s peremennymi koeffitsiyentami na polupryamoy [The first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line]. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika [Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics]*, (1), 18–38. DOI: [10.33581/2520-6508-2021-1-18-38](https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-18-38). (In Russ., abstr. in Engl.).
3. Brish, N. I., & Yurchuk, N. I. (1971). Zadacha Gursa dlya abstraktnykh lineinykh differentsial'nykh uravnenii vtorogo poryadka [The Goursat problem for abstract second-order linear differential equations]. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations ]*, 7(6), 1017–1030. (In Russ.).
4. Sobolev, S. L. (1988). *Nekotoryye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoy fizike [Some applications of functional analysis in mathematical physics]*. Moscow: Nauka. (In Russ.).
5. Tikhonov, A. N., & Samarskiy, A. A. (2004). *Uravneniia matematicheskoi fiziki [The equations of mathematical physics]*. Moscow: Nauka.
6. Lomovtsev, F. E., & Lysenko, V. V. (2019). Nekharakteristicheskaya smeshannaya zadacha dlya odnomernogo volnovogo uravneniya v pervoi chetverti ploskosti pri nestatsionarnykh granichnykh vtorykh proizvodnykh [A non-characteristic mixed problem for a one-dimensional wave equation in the first quarter of the plane with non-stationary boundary second derivatives]. *Vestnik Vitsebskaga dzyarzhavnaga universiteta [Bulletin of the Vitebsk Dzyarzhavnaga University]*, 3(104), 5–17. (In Russ., abstr. in Engl.).

Поступила 27.06.2022

### SMOOTHNESS CRITERION FOR A PARTICULAR CLASSICAL SOLUTION OF AN INHOMOGENEOUS MODEL TELEGRAPH EQUATION IN THE FIRST QUARTER OF THE PLANE

**F. LOMOVTSEV**  
(Belarusian State University, Minsk)

The smoothness criterion is derived on the right-hand side  $f$  for classical solution  $F$  of the equation  $u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) - a^{-1}(x,t)a_t(x,t)u_t(x,t) - a(x,t)a_x(x,t)u_x(x,t) = f(x,t)$ ,  $(x,t) \in \dot{G}_\infty = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , at variable rate  $a(x,t)$  in the first quarter of the plane  $\dot{G}_\infty$ . The smoothness criterion consists of the necessary and sufficient smoothness requirements for the right-hand side of this model telegraph equation. The necessary smoothness requirements on  $f$  are justified by the correction method of test solutions proposed earlier by the author of this article. This method indicated a doubly continuous differentiability of the function  $F$  without correcting it.

Therefore, the derivatives along two families of implicit characteristics of this equation give the necessary smoothness on  $f$ . From here it is easy to deduce their sufficiency for the doubly continuous differentiability of  $F$ . When  $f$  depends only on  $x$  or  $t$ , then this smoothness criterion is equivalent to continuity  $f$ , respectively, over  $x$  or  $t$ . For the equation, a general integral is constructed with a smoothness criterion of its right-hand side  $f$ .

**Keywords:** model telegraph equation, variable rate, implicit characteristics, correction method, classical solution, smoothness criterion.

УДК 517.983+517.444

DOI 10.52928/2070-1624-2022-39-11-117-123

**ДВА ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯ ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО G-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ  
В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ**

*д-р физ.-мат. наук, доц. С. М. СИТНИК*

*(Белгородский государственный национальный исследовательский университет);*

*канд. физ.-мат. наук, доц. О. В. СКОРОМНИК, М. В. ПАПКОВИЧ*

*(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)*

Рассматриваются два двумерных интегральных преобразования со специальными функциями одного типа в ядрах. Применяя технику преобразования Меллина, показываем, что они являются частными случаями двумерного G-преобразования. На основании теории G-преобразования в работе исследованы свойства рассматриваемых интегральных преобразований в весовых пространствах интегрируемых функций в области  $R_{++}^2 = R_+^1 \times R_+^1$ . Результаты исследования обобщают полученные ранее для соответствующих одномерных аналогов.

**Ключевые слова:** двумерное интегральное G-преобразование, G-функция Мейера, двумерное преобразование Меллина, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.

**Введение.** Рассматриваются двумерные интегральные преобразования

$$(G_{1,0;0,1} f)(x) = x^b \int_0^\infty t^b \exp(-xt) f(t) dt \quad (x > 0), \tag{1.1}$$

$$(G_{1,0;1,1} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\omega+1)} \int_0^\infty (xt)^\omega (1-xt)^\omega f(t) dt \quad (x > 0) \tag{1.2}$$

и двумерное G-преобразование [1–4]

$$(G f)(x) = \int_0^\infty G_{p,q}^{m,n} \left[ xt \left| \begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] f(t) dt \quad (x > 0), \tag{1.3}$$

где (см., например, [1–6; 7, §28.4])  $x = (x_1, x_2) \in R^2$ ;  $t = (t_1, t_2) \in R^2$  – векторы,  $R^2$  – Евклидово двумерное пространство;  $x > t$  означает  $x_1 > t_1, x_2 > t_2$  и аналогично для знаков  $\geq, <, \leq$ ;  $\int_0^\infty := \int_0^\infty \int_0^\infty$ ;  $N = \{1, 2, \dots\}$  – пространство натуральных чисел,  $N_0 = N \cup \{0\}$ ,  $N_0^2 = N_0 \times N_0$ ;  $R_+^2 = R_+^1 \times R_+^1 = \{x \in R^2, x > 0\}$ ;  $C^2$  – двумерное пространство комплексных чисел  $z = (z_1, z_2)$ ,  $z_1, z_2 \in C$ ;  $b = (b_1, b_2) \in C^2$ ;  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in C^2$ ;  $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in C^2$ .

$$m = (m_1, m_2) \in N_0^2 \text{ и } m_1 = m_2; \quad n = (n_1, n_2) \in N_0^2 \text{ и } n_1 = n_2;$$

$$p = (p_1, p_2) \in N_0^2 \text{ и } p_1 = p_2; \quad q = (q_1, q_2) \in N_0^2 \text{ и } q_1 = q_2; \quad (0 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p);$$

$$a_i = (a_{i_1}, a_{i_2}), \quad 1 \leq i \leq p, \quad a_{i_1}, a_{i_2} \in C \quad (1 \leq i_1 \leq p_1, 1 \leq i_2 \leq p_2);$$

$$b_j = (b_{j_1}, b_{j_2}), \quad 1 \leq j \leq q, \quad b_{j_1}, b_{j_2} \in C \quad (1 \leq j_1 \leq q_1, 1 \leq j_2 \leq q_2);$$

$$k = (k_1, k_2) \in N_0^2 = N_0 \times N_0 \quad (k_1 \in N_0, k_2 \in N_0) \text{ – индекс с } k! = k_1! k_2! \text{ и } |k| = k_1 + k_2; \text{ для } l = (l_1, l_2) \in R_+^2$$

$D^l = \frac{\partial^{|k|}}{(\partial x_1)^{l_1} (\partial x_2)^{l_2}}$ ;  $dt = dt_1 \cdot dt_2$ ;  $f(t) = (t_1, t_2)$ ; функции в ядрах преобразований (1.1) и (1.2) представляют собой следующие произведения соответственно:

$$x^b t^b \exp(-xt) = \prod_{i=1}^2 (x_i t_i)^{b_i} \exp(-x_i t_i); \quad (xt)^\sigma (1-xt)^\omega = \prod_{i=1}^2 (x_i t_i)^{\sigma_i} (1-x_i t_i)^{\omega_i};$$

$$G_{p,q}^{m,n} \left[ xt \left| \begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] \text{ – функция вида [1–4]}$$

$$G_{p,q}^{m,n} \left[ \text{xt} \left[ \begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,q} \end{matrix} \right] \right] = \prod_{k=1}^2 G_{p_k, q_k}^{m_k, n_k} \left[ x_k t_k \left[ \begin{matrix} (a_{i_k})_{1, p_k} \\ (b_{j_k})_{1, q_k} \end{matrix} \right] \right],$$

является произведением  $G$ -функций Мейера  $G_{p,q}^{m,n} [z]$  [8, гл. 1].

$G$ -функцией Мейера порядка  $(m, n, p, q)$ , где  $0 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p$ , называется функция, определяемая интегралом Меллина – Барнса

$$G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left[ \begin{matrix} (a)_p \\ (b)_q \end{matrix} \right] \right] = G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left[ \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right] \right] = G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left[ \begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \right] \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L G_{p,q}^{m,n}(s) z^{-s} ds, z \neq 0, \quad (1.4)$$

где

$$G_{p,q}^{m,n} \left[ \begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] = G_{p,q}^{m,n} \left[ \begin{matrix} (a)_p \\ (b)_q \end{matrix} \middle| s \right] = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - s)}{\prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i + s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s)}. \quad (1.5)$$

Здесь  $L$  – специально выбранный бесконечный контур, оставляющий полюса  $s = -b_j - k, j = 1, 2, \dots, m, k = 0, 1, 2, \dots$ , слева, а полюса  $s = 1 - a_j + k, j = 1, 2, \dots, n, k = 0, 1, 2, \dots$  – справа, пустые произведения, если таковые имеются, считаются равными единице. Более подробно с теорией  $G$ -функции (1.4) можно ознакомиться, например, в [8, гл. 6].

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [1–6; 9]. Мы рассматриваем еще два класса интегральных преобразований вида (1.1) и (1.2) в весовых пространствах  $\mathfrak{L}_{\bar{v}, \bar{2}}, \bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 (v_1 = v_2), \bar{2} = (2, 2)$ , интегрируемых функций  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2)$  на  $\mathbb{R}_+^2$ , для которых  $\|f\|_{\bar{v}, \bar{2}} < \infty$ , где

$$\|f\|_{\bar{v}, \bar{2}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_2^{v_2 \cdot 2 - 1} \left[ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_1^{v_1 \cdot 2 - 1} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 \right] dx_2 \right\}^{1/2} < \infty.$$

Используя технику преобразования Меллина, показываем, что преобразования (1.1) и (1.2) являются частными случаями двумерного  $G$ -преобразования (1.3). На основании теории  $G$ -преобразования, построенной в [1], мы исследуем свойства рассматриваемых интегральных преобразований в пространствах  $\mathfrak{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ . Результаты исследования обобщают полученные ранее для соответствующих одномерных аналогов в [8].

**2. Предварительные сведения.** Двумерное преобразование Меллина функции  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2)$ ,  $x_1 > 0, x_2 > 0$ , определяется формулой (см., например, [1–6; 9; 10])

$$(\mathfrak{M}f)(\mathbf{s}) = f^*(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}_+^2} f(t) t^{s-1} dt, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{s} = (s_1, s_2), s_j \in \mathbb{C} (j = 1, 2)$ .

Обратное преобразование Меллина для  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$  дается формулой

$$(\mathfrak{M}^{-1}g)(\mathbf{x}) = \mathfrak{M}^{-1}[g(\mathbf{s})](\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \int_{\gamma_2 - i\infty}^{\gamma_2 + i\infty} \mathbf{x}^{-\mathbf{s}} g(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad \gamma_j = \text{Re}(s_j) (j = 1, 2).$$

В [1] получили формулу преобразования Меллина (2.1) от  $G$ -преобразования (1.3)

$$(\mathfrak{M}Gf)(\mathbf{s}) = \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left[ \begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| \mathbf{s} \right] (\mathfrak{M}f)(1 - \mathbf{s}), \quad (2.2)$$

где функция  $\bar{G}_{p,q}^{m,n}(\mathbf{s})$  является произведением функций вида (1.5)

$$\bar{G}_{p,q}^{m,n}(\mathbf{s}) \equiv \bar{G}_{p,q}^{m,n} \left[ \begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| \mathbf{s} \right] = \prod_{k=1}^2 G_{p_k, q_k}^{m_k, n_k} \left[ \begin{matrix} (a_{i_k})_{1, p_k} \\ (b_{j_k})_{1, q_k} \end{matrix} \middle| s_k \right].$$

Исключительным множеством  $\mathcal{E}_{\bar{G}}$  функции  $\bar{G}_{p,q}^{m,n}(s)$  [1–6; 9] назовем множество векторов  $\bar{v} = (v_1, v_2) \in R^2$  ( $v_1 = v_2$ ) таких, что  $\alpha_1 < 1 - v_1 < \beta_1$ ,  $\alpha_2 < 1 - v_2 < \beta_2$  и функции вида (1.5)  $G_{p_1, q_1}^{m_1, n_1}(s_1)$ ,  $G_{p_2, q_2}^{m_2, n_2}(s_2)$  имеют нули на прямых  $\text{Re}(s_1) = 1 - v_1$ ,  $\text{Re}(s_2) = 1 - v_2$  соответственно.

Нам понадобятся: гамма-функция  $\Gamma(z)$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \text{Re}(z) > 0, \tag{2.3}$$

бета-функция

$$B(z, \eta) = \int_0^1 x^{z-1} (1-x)^{\eta-1} dx, \quad \text{Re}(z) > 0, \quad \text{Re}(\eta) > 0, \tag{2.4}$$

которая выражается через гамма-функцию (2.3) по формуле

$$B(z, \eta) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\eta)}{\Gamma(z+\eta)} \tag{2.5}$$

(см., например, [7, формулы (1.54), (1.68), (1.69)]).

Для формулировки утверждений, представляющих  $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{z}}$ -теорию  $G_{1,0;0,1}$ - и  $G_{1,0;1,1}$ -преобразований, нам понадобятся следующие постоянные [1, формулы (3.3)–(3.7)]:

$$\alpha_1 = \begin{cases} -\min_{1 \leq j_1 \leq m_1} [\text{Re}(b_{j_1})], & m_1 > 0, \\ -\infty, & m_1 = 0, \end{cases} \quad \beta_1 = \begin{cases} 1 - \max_{1 \leq i_1 \leq n_1} [\text{Re}(a_{i_1})], & n_1 > 0, \\ \infty, & n_1 = 0; \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} -\min_{1 \leq j_2 \leq m_2} [\text{Re}(b_{j_2})], & m_2 > 0, \\ -\infty, & m_2 = 0, \end{cases}, \quad \beta_2 = \begin{cases} 1 - \max_{1 \leq i_2 \leq n_2} [\text{Re}(a_{i_2})], & n_2 > 0, \\ \infty, & n_2 = 0; \end{cases} \tag{2.7}$$

$$a_1^* = 2(m_1 + n_1) - p_1 - q_1, \quad a_2^* = 2(m_2 + n_2) - p_2 - q_2; \tag{2.8}$$

$$\Delta_1 = q_1 - p_1, \Delta_2 = q_2 - p_2; \tag{2.9}$$

$$\mu_1 = \sum_{j=1}^{q_1} b_{j_1} - \sum_{i=1}^{p_1} a_{i_1} + \frac{p_1 - q_1}{2}, \quad \mu_2 = \sum_{j=1}^{q_2} b_{j_2} - \sum_{i=1}^{p_2} a_{i_2} + \frac{p_2 - q_2}{2}. \tag{2.10}$$

Через  $[X, Y]$  обозначим множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства  $X$  в банахово пространство  $Y$ .

**3.  $G_{1,0;0,1}$ - и  $G_{1,0;1,1}$ -преобразования как  $G$ -преобразование.** Применяем двумерное преобразование Меллина (2.1) к  $G_{1,0;0,1}$ -преобразованию (1.1), далее последовательно меняем порядок интегрирования и используем формулу (2.3) во внутреннем интеграле, с учетом (1.5) окончательно получаем

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M}G_{1,0;0,1} f)(s) &= \int_0^{\infty} x^{s-1} dx \int_0^{\infty} (xt)^b \exp(-xt) f(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} t^{(1-s)-1} f(t) dt \int_0^{\infty} (xt)^{b+s-1} \exp(-xt) d(xt) = \Gamma(b+s)(\mathfrak{M}f)(1-s) = \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left[ \frac{\cdot}{b} \middle| s \right] (\mathfrak{M}f)(1-s). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$(\mathfrak{M}G_{1,0;0,1} f)(s) = \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left[ \frac{\cdot}{b} \middle| s \right] (\mathfrak{M}f)(1-s). \tag{3.1}$$

Из (2.2) и (3.1) следует представление преобразования (1.1)  $G_{1,0;0,1} f$  в виде G-преобразования (1.3):

$$(G_{1,0;0,1} f)(x) = \int_0^{\infty} G_{0,1}^{1,0} \left[ xt \middle| \frac{\quad}{b} \right] f(t) dt \quad (x > 0). \quad (3.2)$$

Определим параметры (2.6)–(2.10) в (3.1):

$$m_1 = m_2 = 1; n_1 = n_2 = 0; \quad p_1 = p_2 = 0; q_1 = q_2 = 1; \alpha_1 = -\operatorname{Re}(b_1), \alpha_2 = -\operatorname{Re}(b_2), \beta_1 = \beta_2 = \infty;$$

$$a_1^* = a_2^* = 1; \Delta_1 = \Delta_2 = 1; \mu_1 = \operatorname{Re}(b_1) - \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = \operatorname{Re}(b_2) - \frac{1}{2}.$$

Применяем двумерное преобразование Меллина (2.1) к  $G_{1,0;1,1}$ -преобразованию (1.2), далее последовательно меняем порядок интегрирования, во внутреннем интеграле вводим новые переменные  $x = \frac{\tau}{\tau-1}$ ,  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$  и используем формулы (2.4), (2.5), с учетом (1.5) окончательно получаем

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M} G_{1,0;1,1} f)(s) &= \frac{1}{\Gamma(\omega+1)} \int_0^{\infty} x^{s-1} dx \int_0^{\infty} (xt)^{\sigma} (1-xt)^{\omega} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\omega+1)} \int_0^{\infty} t^{-s} f(t) dt \int_0^{\infty} (xt)^{\sigma+s-1} (1-xt)^{\omega} d(xt) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\omega+1)} \int_0^{\infty} t^{(1-s)-1} f(t) dt \int_0^1 \left( \frac{\tau t}{\tau-1} \right)^{\sigma+s-1} \left( 1 - \frac{\tau t}{\tau-1} \right)^{(\omega+1)-1} d\left( \frac{\tau t}{\tau-1} \right) = \\ &= \frac{\Gamma(\sigma+s)}{\Gamma(\sigma+\omega+s+1)} (\mathfrak{M} f)(1-s) = \bar{\mathcal{G}}_{1,1}^{1,0} \left[ \begin{matrix} \sigma+\omega+1 \\ \sigma \end{matrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M} f)(1-s). \end{aligned}$$

Таким образом, получили

$$(\mathfrak{M} G_{1,0;1,1} f)(s) = \bar{\mathcal{G}}_{1,1}^{1,0} \left[ \begin{matrix} \sigma+\omega+1 \\ \sigma \end{matrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M} f)(1-s). \quad (3.3)$$

Из (2.2) и (3.3) вытекает представление преобразования (1.2)  $G_{1,0;1,1} f$  в виде G-преобразования (1.3):

$$(G_{1,0;1,1} f)(x) = \int_0^{\infty} G_{1,1}^{1,0} \left[ xt \middle| \frac{\sigma+\omega+1}{\sigma} \right] f(t) dt \quad (x > 0). \quad (3.4)$$

Определим параметры (2.6)–(2.10) в (3.2):

$$m_1 = m_2 = 1; n_1 = n_2 = 0; \quad p_1 = p_2 = 1; q_1 = q_2 = 1; \alpha_1 = -\operatorname{Re}(\sigma_1), \alpha_2 = -\operatorname{Re}(\sigma_2), \beta_1 = \beta_2 = \infty;$$

$$a_1^* = a_2^* = 0; \Delta_1 = \Delta_2 = 0; \mu_1 = -\operatorname{Re}(\omega_1) - 1, \quad \mu_2 = -\operatorname{Re}(\omega_2) - 1.$$

**4.  $\mathfrak{L}_{\bar{v},2}$ -теория  $G_{1,0;0,1}$ -преобразования.** В следующей теореме представлена  $\mathfrak{L}_{\bar{v},2}$ -теория преобразования  $G_{1,0;0,1} f$  (1.1).

**Теорема 4.1.** Пусть

$$-\infty < v_1 < 1 + \min[\operatorname{Re}(b_1), \operatorname{Re}(b_2)], \quad -\infty < v_2 < 1 + \min[\operatorname{Re}(b_1), \operatorname{Re}(b_2)], \quad v_1 = v_2, \quad (4.1)$$

$$a_1^* = 1, \quad a_2^* = 1. \quad (4.2)$$



Верны следующие утверждения:

А. Существует взаимно однозначное преобразование  $G_{1,0,0,1} \in [\mathcal{L}_{\bar{v},2}, \mathcal{L}_{1-\bar{v},2}]$  такое, что равенство (3.1) выполняется для  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v},2}$  и  $\text{Re}(s) = 1 - \bar{v}$ .

В. Если  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v},2}$  и  $g \in \mathcal{L}_{\bar{v},2}$ , то имеет место формула

$$\int_0^\infty f(x)(G_{1,0,0,1} g)(x) dx = \int_0^\infty (G_{1,0,0,1} f)(x)g(x) dx.$$

С. Пусть  $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_1) \in C^2$  и  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v},2}$ . Если  $\text{Re}(\bar{\lambda}) > -\bar{v}$ , преобразование  $G_{1,0,0,1} f$  (1.1) представимо в виде

$$(G_{1,0,0,1} f)(x) = x^{-\bar{\lambda}} \frac{d}{dx} x^{\bar{\lambda}+1} \int_0^\infty G_{1,2}^{1,1} \left[ xt \left| \begin{matrix} - \\ b, -\bar{\lambda} - 1 \end{matrix} \right. \right] f(t) dt,$$

а при  $\text{Re}(\bar{\lambda}) < -\bar{v}$  дается формулой

$$(G_{1,0,0,1} f)(x) = -x^{-\bar{\lambda}} \frac{d}{dx} x^{\bar{\lambda}+1} \int_0^\infty G_{1,2}^{2,0} \left[ xt \left| \begin{matrix} - \\ -\bar{\lambda} - 1, b \end{matrix} \right. \right] f(t) dt.$$

Д. Преобразование  $G_{1,0,0,1} f$  не зависит от  $\bar{v}$  в том смысле, что если  $\bar{v}$  и  $\bar{v}'$  удовлетворяют (4.1) и выполняются условия (4.2), а также преобразования  $G_{1,0,0,1} f$  и  $\tilde{G}_{1,0,0,1} f$  определяются в пространствах  $\mathcal{L}_{\bar{v},2}$  и  $\mathcal{L}_{\bar{v}',2}$  равенством (3.1), то  $G_{1,0,0,1} f = \tilde{G}_{1,0,0,1} f$  для  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v},2} \cap \mathcal{L}_{\bar{v}',2}$ .

Е. Если выполняются условия (4.2), то для  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v},2}$  преобразование  $G_{1,0,0,1} f$  дается формулами (1.1) и (3.2).

Доказательство следует из непосредственной проверки с учетом представления (3.1), из результатов в [1, теорема 1; 8, теорема 6.1], из существования всех приведенных операторов в указанных классах функций.

**5.  $\mathcal{L}_{\bar{v},2}$ -теория  $G_{1,0,1,1}$ -преобразования.** В следующей теореме представлена  $\mathcal{L}_{\bar{v},2}$ -теория преобразования  $G_{1,0,1,1} f$  (1.2).

**Теорема 5.1.** Пусть

$$-\infty < v_1 < 1 + \min[\text{Re}(\sigma_1), \text{Re}(\sigma_2)], \quad -\infty < v_2 < 1 + \min[\text{Re}(\sigma_1), \text{Re}(\sigma_2)], \quad v_1 = v_2, \quad (5.1)$$

$$a_1^* = 0, a_2^* = 0, \quad \text{Re}(\omega_1) + 1 > 0, \quad \text{Re}(\omega_2) + 1 > 0. \quad (5.2)$$

Верны следующие утверждения:

А. Существует взаимно однозначное преобразование  $G_{1,0,1,1} \in [\mathcal{L}_{\bar{v},2}, \mathcal{L}_{1-\bar{v},2}]$  такое, что равенство (3.3) выполняется для  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v},2}$  и  $\text{Re}(s) = 1 - \bar{v}$ .

В. Если  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v},2}$  и  $g \in \mathcal{L}_{\bar{v},2}$ , то имеет место формула

$$\int_0^\infty f(x)(G_{1,0,1,1} g)(x) dx = \int_0^\infty (G_{1,0,1,1} f)(x)g(x) dx.$$

С. Пусть  $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_1) \in C^2$  и  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v},2}$ . Если  $\text{Re}(\bar{\lambda}) > -\bar{v}$ , преобразование (1.2) представимо в виде

$$(G_{1,0,1,1} f)(x) = x^{-\bar{\lambda}} \frac{d}{dx} x^{\bar{\lambda}+1} \int_0^\infty G_{2,2}^{1,1} \left[ xt \left| \begin{matrix} -\bar{\lambda}, \sigma + \omega + 1 \\ \sigma, -\bar{\lambda} - 1 \end{matrix} \right. \right] f(t) dt,$$

а при  $\text{Re}(\bar{\lambda}) < -\bar{v}$  дается формулой

$$(G_{1,0,1,1} f)(x) = -x^{-\bar{\lambda}} \frac{d}{dx} x^{\bar{\lambda}+1} \int_0^\infty G_{2,2}^{2,0} \left[ xt \left| \begin{matrix} \sigma + \omega + 1, -\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda} - 1, \sigma \end{matrix} \right. \right] f(t) dt.$$

Д. Преобразование  $G_{1,0,1,1} f$  не зависит от  $\bar{v}$  в том смысле, что если  $\bar{v}$  и  $\bar{\bar{v}}$  удовлетворяют (5.1) и выполняются условия (5.2), а также преобразования  $G_{1,0,1,1} f$  и  $\tilde{G}_{1,0,0,1} f$  определяются в пространствах  $\mathcal{L}_{\bar{v},2}$  и  $\mathcal{L}_{\bar{\bar{v}},2}$  равенством (3.3), то  $G_{1,0,1,1} f = \tilde{G}_{1,0,1,1} f$  для  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v},2} \cap \mathcal{L}_{\bar{\bar{v}},2}$ .

Е. Если выполняются условия (5.2), то для  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v},2}$  преобразование  $G_{1,0,1,1} f$  дается формулами (1.2) и (3.4).

Доказательство следует из непосредственной проверки с учетом представления (3.3), из результатов в [1, теорема 1; 8, теорема 6.1], из существования всех приведенных операторов в указанных классах функций.

**Заключение.** В работе получены условия ограниченности и взаимной однозначности операторов преобразований (1.1) и (1.2) из одних пространств интегрируемых функций в другие, получены аналоги формулы интегрирования по частям. Для таких преобразований установлены различные интегральные представления.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция – 2025», подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.2.01.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Папкович, М. В. Двумерное интегральное преобразование с G-функцией Мейера в ядре в пространстве суммируемых функций / М. В. Папкович, О. В. Скоромник // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2019. – № 4(32). – С. 131–136.
2. Папкович, М. В. Многомерное интегральное преобразование с G-функцией Мейера в ядре в весовых пространствах суммируемых функций / М. В. Папкович, О. В. Скоромник // Уфимская осенняя математическая школа–2020 : сб. тез. междунар. мат. конф., Уфа, 11–14 нояб. 2020 г. / М-во науки и высш. образования Рос. Федер., Башкир. гос. ун-т, Ин-т математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Научно-образовательный математический центр Приволжского федерального округа ; отв. ред. З. Ю. Фазуллин. – Уфа, 2020. – С. 142–144.
3. Скоромник, О. В. Многомерные модифицированные G-преобразования и интегральные преобразования с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций / О. В. Скоромник, М. В. Папкович // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2022. – № 1(114). – С. 11–25.
4. Ситник, С. М. Многомерные модифицированные G- и H-преобразования и их частные случаи / С. М. Ситник, О. В. Скоромник, М. В. Папкович // АМАДЕ-2021 : сб. тр. 10-го междунар. науч. семинара, Минск, 13–17 сент. 2021 г. / Белорус. гос. ун-т. – Минск : ИВЦ Минфина, 2022. – С. 104–116.
5. Ситник, С. М. Многомерное общее интегральное преобразование со специальными функциями в ядре / С. М. Ситник, О. В. Скоромник, С. А. Шлапаков // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2019. – № 3(104). – С. 18–27.
6. Sitnik, S. M. One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman-Erdelyi type with Legendre Functions in kernels S. M. Sitnik, O. V. Skoromnik // Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. – Cham, Switzerland : Birkhäuser Basel (Springer), 2020. – P. 293–319.
7. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688с.
8. Kilbas, A. A. H-Transforms. Theory and Applications / A. A. Kilbas, M. H. Saigo. – London [etc.] : Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
9. Sitnik, S. M. Multi-dimensional generalized integral transform in the weighted spaces of summable functions / S. M. Sitnik, O. V. Skoromnik, S. A. Shlapakov // Lobachevskii J. of Mathematics. – 2022. – Vol. 43, iss. 6. – P. 1170–1178.
10. Theory and applications of fractional differential equations / North-Holland Mathematics Studies ; ed.: A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. – Amsterdam : Elsevier.xv, 2006. – Vol. 204. – 523 p.

#### REFERENCES

1. Papkovich, M. V., & Skoromnik, O. V. (2019). Dvumernoe integral'noe preobrazovanie s G-funksiei Meiera v yadre v prostranstve summiruemykh funktsii [Two-Dimensional Integral Transform With the Meijer G-Function in the Kernel in the Space of Summable Functions]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, 4(32), 131–136. (In Russ., abstr. in Engl.).
2. Papkovich, M. V., & Skoromnik O. V. (2020). Mnogomernoe integral'noe preobrazovanie s G-funksiei Meiera v yadre v vesovykh prostranstvakh summiruemykh funktsii [Multidimensional integral transformation with Meijer's G-function in the kernel in the weighted spaces of summable functions]. In Z. Yu. Fazullin (Eds.) *Ufimskaya osemnyaya matematicheskaya shkola–2020: sb. tezisov [Ufa Autumn Mathematical School–2020]* (142–144). – Ufa: Bashkir State University. (In Russ.)
3. Skoromnik, O. V., & Papkovich, M. V. (2022). Mnogomernye modifitsirovannye G-preobrazovaniya i integral'nye preobrazovaniya s gipergeometricheskoi funktsiei Gaussa v yadrah v vesovykh prostranstvakh summiruemykh funktsii [Multidimensional modified G-transformations and integral transformations with hypergeometric Gauss functions in kernels in weight spaces of summed functions]. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhaynaga universiteta [Bulletin of VSU]*, 1(114), 11–25. (In Russ., abstr. in Engl.).
4. Sitnik S. M., Skoromnik, O. V., & Papkovich, M. V. (2022). Mnogomernye modifitsirovannye G- i H-preobrazovaniya i ikh chastnye sluchai [Multidimensional modified G- and H-transforms and their special cases]. In *AMADE-2021: sb. trudov* (104–116). Minsk: IVTs Minfina. (In Russ., abstr. in Engl.).

5. Sitnik, S. M., Skoromnik, O. V., & Shlapakov, S. A. (2019). Mnogomernoe obshchee integral'noe preobrazovanie so special'nymi funktsiyami v yadre [Multidimensional general integral transformation with special functions in the kernel]. *Vesnik Vitebskaya dzyarzhavnaya universiteta [Bulletin of VSU]*, 3(104), 18–27. (In Russ., abstr. in Engl.).
6. Sitnik, S. M., & Skoromnik, O. V. (2020). One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman-Erdelyi type with Legendre Functions in kernels. In *Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics* (293–319). Cham, Switzerland: Birkhäuser Basel (Springer).
7. Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1987). *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]*. Minsk: Nauka i tekhnika.
8. Kilbas, A. A., & Saigo, M. H. (2004). *H-Transforms. Theory and Applications*. London [etc.]: Chapman and Hall. CRC Press.
9. Sitnik, S. M., Skoromnik, O. V., & Shlapakov, S. A. (2022). Multi-dimensional generalized integral transform in the weighted spaces of summable functions. *Lobachevskii J. of Mathematics*, 43(6), 1170–1178.
10. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (Ed.). (2006). *Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies* (Vol. 204). Amsterdam: Elsevier.xv.

Поступила 14.11.2022

## TWO SPECIAL CASES OF TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL G-TRANSFORMATION IN THE WEIGHTED SPACES OF SUMMABLE FUNCTIONS

S. SITNIK

(Belgorod State National Research University "BelGU");

O. SKOROMNIK, M. PAPKOVICH

(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

Two-dimensional integral transformations with special functions of the same type in kernels are considered. Using the Mellin transformation technique, it is shown that they are special cases of a two-dimensional G-transformation. Based on the theory of the G-transformation, the properties of the considered integral transformations in the weighted spaces of integrable functions in the domain  $R_{++}^2 = R_+^1 \times R_+^1$  are investigated. The results obtained generalize the data obtained for the corresponding one-dimensional analogues.

**Keywords:** two-dimensional integral G-transform, Meijer G-function, two-dimensional Mellin transform, the space of integrable functions, fractional integrals and derivatives.

## СОДЕРЖАНИЕ

### ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

<i>Михнёнок Е. И., Хижняк А. В.</i> Применение методики оценки эффективности технических средств при проектировании новых рубежей охраны .....	2
<i>Адамовский Е. Р., Богуш Р. П., Чертков В. М., Наумович Н. М., Стежко И. К.</i> Моделирование поведения абонентов с использованием цепи Маркова при формировании карты радиосреды для когнитивной системы связи .....	8
<i>Капач Т. С., Хамиченок М. И., Молодечкина Т. В.</i> Разработка программного обеспечения для блока управления лабораторного стенда по моделированию тепловых режимов радиоэлектронных средств .....	16
<i>Мацкевич В. В.</i> Обучение нейронных сетей на основе случайного поиска .....	21
<i>Рудиков С. И., Цветков В. Ю., Шкадаревич А. П.</i> Интервальные показатели качества сжатия динамического диапазона инфракрасных изображений на основе матрицы тонового отображения .....	30
<i>Супрунчик Я. Н., Кохан П. А., Давыдовская В. В.</i> Упрощенный алгоритм графического представления трехмерных данных при RAD-разработке оконных приложений в среде PascalABC.NET .....	40

### ФИЗИКА

<i>Богуш В. А., Родионова В. Н., Танана О. В.</i> Электродинамические характеристики объемного радиопоглощающего материала на основе нанопуглерода .....	47
<i>Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Бринкевич Д. И., Просолович В. С., Колос В. В., Зубова О. А.</i> Оптические и прочностные свойства жертвенных слоев на основе полиимидных пленок .....	53
<i>Кийко А. Н., Вабищевич С. А., Вабищевич Н. В., Бринкевич Д. И.</i> Радиологические аспекты вывода циклотрона из эксплуатации .....	59
<i>Оджаев В. Б., Просолович В. С., Петлицкий А. Н., Ковальчук Н. С., Соловьев Я. А., Жигулин Д. В., Шестовский Д. В.</i> Локализация атомов азота в структурах Si-SiO <sub>2</sub> .....	65
<i>Янушкевич В. Ф.</i> Характеристики анизотропной среды над углеводородами при воздействии высокочастотных и модулированных сигналов .....	80
<i>Янушкевич В. Ф.</i> Методы поиска и оконтуривания углеводородных залежей с использованием модулированных и радиоимпульсных сигналов .....	89

### МАТЕМАТИКА

<i>Ломовцев Ф. Е.</i> Критерий гладкости частного классического решения неоднородного модельного телеграфного уравнения в первой четверти плоскости .....	99
<i>Ситник С. М., Скоромник О. В., Папкович М. В.</i> Два частных случая двумерного интегрального G-преобразования в весовых пространствах суммируемых функций.....	117