

УДК 656.13.05

DOI 10.52928/2070-1616-2023-47-1-77-81

**ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ФОРМИРОВАНИЯ СЕКТОРОВ  
ПРИ ОРГАНИЗАЦИИ РАБОТЫ ВОДИТЕЛЕЙ  
НА ПРЕДПРИЯТИЯХ МАРШРУТНОГО ПАССАЖИРСКОГО ТРАНСПОРТА  
НА ОСНОВЕ ПСЕВДОБУЛЕВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ**

*д-р техн. наук, доц. Д.В. КАПСКИЙ*

*(Высшая аттестационная комиссия Республики Беларусь, Минск)  
канд. физ.-мат. наук Д.С. САРАЖИНСКИЙ, С.С. СЕМЧЕНКОВ  
(Белорусский национальный технический университет, Минск)*

*Рассмотрен подход к решению оптимизационной задачи, возникающей при формировании секторов на предприятиях маршрутного пассажирского транспорта (МПТ) секторальным методом, позволяющим повысить эффективность режима использования рабочего времени водителей и снизить непродуктивные затраты предприятия. Представленный подход и его реализация на основе псевдодобулевой оптимизации с привлечением методов гладкой оптимизации, в частности, метода внутренней точки, нашли применение при организации работы водителей.*

**Ключевые слова:** *маршрутный пассажирский транспорт, режим использования рабочего времени, непродуктивные затраты, задача оптимизации, псевдодобулева функция, секторальный метод, повышение эффективности работы.*

**Введение.** В настоящее время вопросы снижения себестоимости перевозок пассажиров и повышения эффективности работы МПТ являются особенно актуальными для предприятий, выполняющих перевозки пассажиров в регулярном сообщении по установленным маршрутам. Решение данных вопросов возможно выбором пассажироместимости применяемых транспортных средств, назначением интервалов движения, соответствующих сложившимся объемам перевозок пассажиров, преобразованием существующей маршрутной сети, изменением трасс маршрутов и режимов их работы [1; 2]. Альтернативным путем является снижение себестоимости перевозок пассажиров за счет повышения качества организации эксплуатационной работы предприятия МПТ с использованием рационального режима рабочего времени водителей [3].

**Состояние вопроса.** Традиционно используемые методы организации работы водителей МПТ предусматривают закрепление водителей за постоянными маршрутами. Исследование фонда рабочего времени в разрезе маршрутов показывает значительную неоднородность последних, что приводит к росту непродуктивных затрат, природа возникновения которых описана в [4]. Повысить рациональность использования рабочего времени водителей представляется возможным применением секторального метода [5; 6].

Секторальный метод предусматривает закрепление водителей предприятия МПТ не за маршрутами, а за секторами [7]. Работа водителей внутри сектора организована так, что, чередуясь в рамках сектора между закрепленными за каждым сменами, водители вырабатывают равную норму рабочего времени без существенных отклонений, что приводит к снижению непродуктивных затрат<sup>1</sup>. В связи с неоднородностью распределения продолжительности смен на маршрутах<sup>2</sup> [8] объективным показателем, характеризующим сектор, является средневзвешенная продолжительность работы водителя по сменам, закрепленным за сектором, с учетом наборов смен, отличающихся по характерным дням недели и количеством этих дней в рассматриваемом периоде [5].

Задача формирования секторов на предприятиях МПТ при использовании секторального метода сводится к оптимальному разбиению существующих на предприятии смен по создаваемым секторам, при котором значение средневзвешенной продолжительности работы в каждом сформированном секторе будет различаться между секторами незначительно, при этом в каждом сформированном секторе должно находиться не менее порогового значения смен, заканчивающихся до 24:00 (далее – «особая смена»), для обеспечения ими водителей перед их выходным днем [8].

---

<sup>1</sup> Некоторые вопросы системного подхода к планированию работы водителей городского пассажирского транспорта / Д.В. Капский, Е.Н. Кот, С.С. Семченков // Социально-экономические проблемы развития и функционирования транспортных систем городов и зон их влияния: Материалы XXVI Междунар. (XXIX Екаренбург.) науч.-практ. конф. / Екатеринбург (16–17 июня 2020 г.) / науч. ред. С.А. Ваксман. – Екатеринбург: АМБ, 2020. – С. 269–280.

<sup>2</sup> Семченков С.С., Седюкевич В.Н. Подготовка суточных нарядов на работу водителей транспортных средств при перевозках пассажиров в регулярном сообщении // Совершенствование организации дорожного движения и перевозок пассажиров и грузов: Сб. науч. ст. по результатам ежегод. Междунар. науч.-практ. конф. / редкол. Ф.А. Романюк и др. – Минск: БНТУ, 2014. – С. 286–292. URL: <https://rep.bntu.by/bitstream/handle/data/16275/%d0%a1.%20286-292.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Поставленная задача оригинальна тем, что разбиение осуществляется под контролем равенства средневзвешенного значения продолжительности смены в каждом формируемом секторе с рядом ограничений при неизвестном заранее количестве секторов и количестве смен в них. Решение задачи формирования сектора в настоящее время осуществляется экспертным методом, расчеты осуществляются вручную, что приводит к снижению эффективности.

*Принимаемые обозначения.* Для формализации и решения задачи примем следующее:

$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  – набор продолжительностей рабочего времени, соответствующих сменам 1, 2, ...,  $n$ ;

$b_1, b_2, \dots, b_n$  – набор бинарных значений ( $b \in B = \{0,1\}$ ), отвечающих признаку «особой смены»;

$m$  – максимально допустимое количество результирующих секторов, по которым предполагается распределять смены,  $m \leq n$ ;

$k$  – минимальное количество результирующих секторов, по которым должны распределяться смены,  $1 < k \leq m$ ;

$\eta_0$  – минимально допустимая доля «особых смен» в секторе.

*Формализация задачи.* Введем бинарные переменные  $x_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$  (которые можно рассматривать в виде матрицы  $[x_{ij}]_{m \times n}$ ) и договоримся трактовать значение  $x_{ij} = 1$  ( $x_{ij} = 0$ ) как признак принадлежности (отсутствия принадлежности)  $j$ -й смены  $i$ -му сектору. Тогда задачу разбиения можно представить как

$$f\left([x_{ij}]_{m \times n}\right) = \max_{\substack{i_1, i_2=1, \dots, m \\ i_1 \neq i_2 \\ \sum_{j=1}^n x_{i_1 j} \neq 0, \sum_{j=1}^n x_{i_2 j} \neq 0}} \left( \frac{\sum_{j=1}^n x_{i_1 j} \tau_j}{\sum_{j=1}^n x_{i_1 j}} - \frac{\sum_{j=1}^n x_{i_2 j} \tau_j}{\sum_{j=1}^n x_{i_2 j}} \right)^2 \rightarrow \min, \quad (1)$$

где  $x_{ij} \in B - (Y_0)$  (область значений переменных);

$$\sum_{i,j=1}^{m,n} x_{ij} = n - (Y_1) \text{ (условие сохранения общего числа смен по секторам);}$$

$$\sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 \neq i_2}}^m x_{i_1 j} x_{i_2 j} = 0 - (Y_2) \text{ (условие принадлежности смены только одному сектору);}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} > 0, \quad i = 1, \dots, k - (Y_3) \text{ (условия на } k \text{ непустых секторов);}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^n x_{ij} b_j}{\sum_{j=1}^n x_{ij}} \geq \eta_0, \quad i = 1, \dots, m - (Y_4) \text{ (условия на минимальную долю «особых смен» в секторе).}$$

Для поиска решения этой задачи имеет смысл обратиться к теории псевдоболевых (pseudoBoolean) функций (вещественнозначных функций с аргументами из  $B$ ) [9].

Согласно теории, если псевдоболева функция представлена формулой, в которой участвуют только суммы произведений аргументов, то минимум такой функции совпадает с минимумом функции, заданной этой же формулой, но в которой аргументам разрешается принимать значения не только из  $B$ , но и из отрезка  $U = [0, 1]$  (расширение функции с  $B$  на  $U$ ).

Поскольку в решаемой задаче функция  $f$  и ограничения «похожи» на указанную форму задания функции, то с учетом сказанного имеет смысл провести релаксацию исходной задачи до задачи с расширением  $B$  до  $U$  и полагать, что решение этой релаксированной задачи будет совпадать с решением исходной задачи. Для релаксированной же задачи, в свою очередь, применимы численные методы вещественной оптимизации.

*Релаксация задачи и подготовка для численных методов.*

1. Во избежание необходимости при вычислении функции  $f$  отбирать при поиске максимума только случаи  $\sum_{j=1}^n x_{i_1 j} \neq 0, \sum_{j=1}^n x_{i_2 j} \neq 0$  можно заменить ее выражением вида

$$f_\varepsilon\left([x_{ij}]_{m \times n}\right) = \max_{\substack{i_1, i_2=1, \dots, m \\ i_1 \neq i_2}} \left( \frac{\sum_{j=1}^n x_{i_2 j} \sum_{j=1}^n x_{i_1 j} \tau_j - \sum_{j=1}^n x_{i_1 j} \sum_{j=1}^n x_{i_2 j} \tau_j}{\left(\varepsilon + \sum_{j=1}^n x_{i_1 j}\right) \left(\varepsilon + \sum_{j=1}^n x_{i_2 j}\right)} \right)^2, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  – некоторое достаточно малое положительное число.

2. Для того чтобы сделать целевую функцию дифференцируемой во всех точках (и тем самым облегчить применение методов оптимизации, использующих производные), аппроксимируем операцию взятия максимума операцией «LogSumExp», а именно,  $\max\{a_1, \dots, a_r\} \rightarrow \frac{1}{\gamma} \ln(e^{\gamma a_1} + \dots + e^{\gamma a_r})$ , где  $\gamma > 0$  – параметр, отвечающий

за точность приближения (чем выше  $\gamma$ , тем точнее аппроксимация). Кроме того, поскольку логарифм – монотонная функция, можно его и отбросить, чтобы упростить расчеты для вычислительных методов (решение задачи поиска минимума целевой функции при этом не поменяется).

3. Для уменьшения вычисления для сумм, в которых производится суммирование по всем несопадающим индексам  $i_1, i_2$  и участвуют симметричные по перестановке местами этих индексов слагаемые, имеет смысл ограничиться только выражением с суммированием по  $i_1 < i_2$ . Таким образом, получаем функцию

$$f_{\varepsilon\gamma}([x_{ij}]_{m \times n}) = \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^m x_{i_1 j} \exp \left( \frac{\sum_{j=1}^n x_{i_2 j} \sum_{j=1}^n x_{i_1 j} \tau_j - \sum_{j=1}^n x_{i_1 j} \sum_{j=1}^n x_{i_2 j} \tau_j}{\left(\varepsilon + \sum_{j=1}^n x_{i_1 j}\right) \left(\varepsilon + \sum_{j=1}^n x_{i_2 j}\right)} \right)^2 \rightarrow \min, \quad (3)$$

где  $x_{ij} \in U - (Y_0)$  (область значений переменных);

$$\sum_{i,j=1}^{m,n} x_{ij} = n - (Y_1) \text{ (условие сохранения общего числа смен по секторам);}$$

$$\sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^m x_{i_1 j} x_{i_2 j} = 0 - (Y_2) \text{ (условие принадлежности смены только одному сектору);}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} > 0, \quad i = 1, \dots, k - (Y_3) \text{ (условия на } k \text{ непустых секторов);}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} (b_j - \eta_0) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m - (Y_4) \text{ (условия на минимальную долю «особых смен» в секторе).}$$

Решить такую задачу можно, например, методом внутренней точки (interior point method), хотя и следует ожидать, что найденные решения будут локальными минимумами и, соответственно, для поиска глобального может потребоваться запускать этот метод с разными начальными условиями (random search with interior point method).

*Реализация и результаты.* Решение задачи реализовано с помощью системы Wolfram Mathematica 13.2 [10] и включает в себя блок исходных данных, ограничений, задание целевой функции и критериев оптимизации, непосредственно оптимизацию и вывод результатов расчетов. Нахождение оптимального значения реализовано методом “Interior point” при ограничении максимального числа итераций до 2000. Результаты решения оптимизационной задачи представлены в матричном виде.

В результате выполненного расчета на примере предприятия МПТ трамвая при заданных  $\tau_i, b_i$  (таблица),  $m = 4, k = 3, \eta_0 = 0,33$  сформированы два сектора, разбитые на смены, со средневзвешенными продолжительностями работы в целом по выпускам 16,12 и 16,04 (на одну смену водителя приходится 8,06 ч и 8,02 ч для первого и второго сектора, соответственно) для каждого сектора соответственно с соблюдением доли «особых смен» 0,50 и 0,47 по сформированным секторам.

Таблица. – Данные продолжительности смен по выпуску  $\tau_i$  с признаками «особой смены»  $b_i$

$i$	$\tau_i, \text{ ч}$	$b_i$	$i$	$\tau_i, \text{ ч}$	$b_i$	$i$	$\tau_i, \text{ ч}$	$b_i$	$i$	$\tau_i, \text{ ч}$	$b_i$	$i$	$\tau_i, \text{ ч}$	$b_i$	$i$	$\tau_i, \text{ ч}$	$b_i$
1	19,55	0	7	18,5	0	13	17,68	0	19	16,83	1	25	14,15	1	31	11,4	1
2	19,06	0	8	18,45	0	14	17,41	0	20	15,83	1	26	13,31	1	32	11,05	1
3	19,05	0	9	18,33	0	15	17,38	0	21	15,78	1	27	13,25	1	33	10,63	1
4	18,98	0	10	18,31	0	16	17,18	0	22	15,61	1	28	12,19	1	–	–	–
5	18,92	0	11	18	0	17	17,14	0	23	14,78	1	29	12,15	1	–	–	–
6	18,67	0	12	17,82	0	18	16,87	1	24	14,67	1	30	11,43	1	–	–	–

Оптимизационные расчеты выполнены на компьютере с процессором Intel i5-3210M под управлением Windows 10 при времени выполнения вычислений 297 с. Стоит отметить, что несмотря на то, что в предлагаемом подходе количество переменных, по которым производится оптимизация, растет как  $m \times n$  (что теоретически при больших величинах  $m$  и  $n$  может значительно замедлить работу по поиску решения методом наподобие внутренней точки), он может рассматриваться как практичный, поскольку в реальных предприятиях МПТ типичные величины  $m$  и  $n$  редко превосходят значения 4 и 30 соответственно.

**Заключение.** Разработанный подход к решению задачи формирования секторов для организации работы водителей секторальным методом на основе псевдоболевой оптимизации и его реализация в системе Wolfram Mathematica 13.2 показали положительные результаты и позволяют повысить оперативность и снизить трудоемкость процесса формирования секторов. Примененный подход к решению задачи дает возможность сформировать пригодные для организации эксплуатационной работы сектора для действующих предприятий МПТ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Семченков С.С., Капский Д.В. Снижение непродуктивных затрат маршрутного пассажирского транспорта секторальным методом // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. В, Пром-сть. Приклад. науки. – 2022. – № 3. – С. 85–90.
2. Schneider Lars. Betriebsplanung im öffentlichen Personennahverkehr: Ziele, Methoden, Konzepte. – Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015. – 193 с.
3. Семченков С.С., Капский Д.В. Управление режимом работы маршрутного пассажирского транспорта секторальным методом // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. В, Пром-сть. Приклад. науки. – 2022. – № 9. – С. 59–63.
4. Семченков С.С., Капский Д.В. Повышение эффективности работы предприятий маршрутного пассажирского транспорта в современных условиях // Новости науки и технологий. – 2022. – № 5 (60). – С. 16–26.
5. Семченков С.С., Капский Д.В. Повышение эффективности работы маршрутного пассажирского транспорта применением секторального метода // Транспорт и транспортные системы: конструирование, эксплуатация, технологии: сб. науч. ст. / гл. ред. С.В. Харитончик. – Вып. 3. – Минск: БНТУ, 2021. – С. 170–185.
6. Application of the sectoral method to improve the efficiency of route passenger transport / S. Semchenkov, D. Kapsky, A. Czerepicky // WUT Journal of Transportation Engineering. – 2022. – № 134 – С. 17–33.
7. Планирование устойчивой городской мобильности / А.О. Лобашов, С.С. Семченков, Е.Н. Кот и др. – Минск: БНТУ, 2022. – 175 с.
8. Семченков С.С., Капский Д.В. Разработка рациональных графиков работ водителей маршрутного пассажирского транспорта при использовании секторального метода // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. В, Пром-сть. Приклад. науки. – 2022. – № 9. – С. 64–72.
9. Boros E., Hammer, P.L. Pseudo-Boolean optimization // Discrete Applied Mathematics. – 2022. – 123 (1-3). – P. 155–225. DOI: 10.1016/s0166-218x(01)00341-9
10. Иванов О.А., Фридман Г.М. Дискретная математика и программирование в Wolfram Mathematica: для бакалавров / Г.М. Фридман, О.А. Иванов. – СПб.: Питер, 2019. – 352 с. – (Учебник для вузов).

## REFERENCES

1. Semchenkov, S.S. & Kapskii, D.V. (2022). Snizhenie neproduktivnykh zatrat marshrutnogo passazhirskogo transporta sektoral'nym metodom [Reduction of unproductive costs of route passenger transport by the sectoral method]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya V. Promyshlennost'. Prikladnye nauki [Bulletin of the Polotsk State University. Series B. Industry. Applied Science]*, (3), 85–90. (In Russ., abstr. in Engl.)
2. Schneider, Lars (2015). *Betriebsplanung im öffentlichen Personennahverkehr: Ziele, Methoden, Konzepte*. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
3. Semchenkov, S.S. & Kapskii, D.V. (2022). Upravlenie rezhimom raboty marshrutnogo passazhirskogo transporta sektoral'nym metodom [Management of the operating mode of route passenger transport by the sectoral method]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya V. Promyshlennost'. Prikladnye nauki [Bulletin of the Polotsk State University. Series B. Industry. Applied Science]*, (9), 59–63. (In Russ., abstr. in Engl.)
4. Semchenkov, S.S. & Kapskii, D.V. (2022). Povyshenie effektivnosti raboty predpriyatii marshrutnogo passazhirskogo transporta v sovremen-nykh usloviyakh [Improving the efficiency of the enterprises of route passenger transport in modern conditions]. *Novosti nauki i tekhnologii [Science and Technology News]*, 5 (60), 16–26. (In Russ., abstr. in Engl.)
5. Semchenkov, S.S. & Kapskii, D.V. (2021). Povyshenie effektivnosti raboty marshrutnogo passazhirskogo transporta primeneniem sektoral'nogo metoda [Improving the efficiency of the route passenger transport using the sectoral method]. In S.V. Kharitonov (Eds.), *Transport i transportnye sistemy: konstruirovaniye, ekspluatatsiya, tekhnologii: sbornik nauchnykh statei [Transport and transport systems: design, operation, technologies: collection of scientific articles: collection of scientific articles]*, (3), 170–185. Minsk: BNTU. (In Russ., abstr. in Engl.)
6. Semchenkov, S., Kapskiy, D. & Czerepicky, A. (2022). Application of the sectoral method to improve the efficiency of route passenger transport. *WUT Journal of Transportation Engineering*, (134), 17–33.
7. Lobashov, A.O., Semchenkov, S.S., Kot, E.N., Kapskii, D.V. & Bogdanovich, S.V. (2022). *Planirovaniye ustoichivoi gorodskoi mobil'nosti*. Minsk: BNTU. (In Russ.)
8. Semchenkov, S.S. & Kapskii, D.V. (2022). Razrabotka ratsional'nykh grafikov rabot voditelei marshrutnogo passazhirskogo transporta pri ispol'zovanii sektoral'no-go metoda [Development of rational work schedules for drivers of route passenger transport using the sectoral method]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya V. Promyshlennost'. Prikladnye nauki [Bulletin of the Polotsk State University. Series B. Industry. Applied Science]*, (9), 64–72. (In Russ., abstr. in Engl.)
9. Boros, E. & Hammer, P.L. (2002). Pseudo-Boolean optimization. *Discrete Applied Mathematics*, 123 (1-3), 155–225. DOI: 10.1016/s0166-218x(01)00341-9
10. Ivanov, O.A. & Fridman, G.M. (2019). *Diskretnaya matematika i programmirovaniye v Wolfram Mathematica: dlya bakalavrov*. St. Petersburg: Piter. (In Russ.)

Поступила 12.01.2023

**APPROACH TO SOLVING THE PROBLEM OF SECTOR FORMATION  
IN ORGANIZING THE WORK OF DRIVERS  
AT THE ENTERPRISES OF ROUTE PASSENGER TRANSPORT  
BASED ON PSEUDOBOOLEAN OPTIMIZATION**

***D. KAPSKII***

*(Higher Attestation Commission of the Republic of Belarus, Minsk)*

***D. SARAZHINSKY, S. SEMTCHENKOV***

*(Belarusian National Technical University, Minsk)*

*An approach to solving the optimization problem arising during formation of sectors at the enterprises of route passenger transport by the sectoral method is considered, which allows to increase the efficiency of the mode of using drivers' working hours and reduce unproductive costs of the enterprise. The presented approach and its implementation based on pseudo-boolean optimization with the use of smooth optimization methods, in particular, "inner point" method have found their application in organization of drivers' work.*

**Keywords:** *route passenger transport, mode of use of working time, unproductive costs, optimization problem, pseudo-Boolean function, sectoral method, improving work efficiency.*