

УДК 621.833

## ВЕЙВЛЕТ-ФУНКЦИИ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ

**Ю.П. АСЛАМОВ; А.П. АСЛАМОВ; канд. техн. наук И.Г. ДАВЫДОВ; А.В. ЦУРКО**  
(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск)

*Рассматриваются автоматические системы вибрационной диагностики, позволяющие решать задачи оценки технического состояния роторного оборудования без привлечения экспертов. Для обработки нестационарных вибрационных сигналов широкое распространение получил вейвлет-анализ. Однако качество вейвлет-анализа в большой степени зависит от выбранной базисной функции. Авторами статьи предложены базисные вейвлет-функции для диагностики зубчатых передач. Приведено их математическое обоснование и сравнительный анализ с другими базисными вейвлет-функциями. Представлены результаты тестирования базисных функций на модельных сигналах.*

**Ключевые слова:** вибродиагностика, цифровая обработка сигналов, вейвлет-преобразование, базисная функция.

**Введение.** Для оценки технического состояния роторного оборудования используются методы обработки вибросигналов в частотной и частотно-временной областях [1–4]. Широкоую практику применения в настоящее время получили спектральные методы вибрационной диагностики. В соответствии с указанным подходом каждому дефекту оборудования ставится в соответствие набор дефектных частот. Например, периодическое изменение жесткости зубьев и постоянная погрешность шага зацепления вызывают появление в вибрации зубчатой передачи колебаний на зубцовой частоте (частоте зацепления) и ее гармониках:

$$f_z = z_1 f_1 = z_2 f_2, \quad (1)$$

где  $z_1, z_2$  – соответственно число зубьев шестерен;  $f_1, f_2$  – частота вращения сопряженных колес, Гц.

По обнаруженному в спектре вибрации набору дефектных частот делается заключение о дефектном элементе оборудования, типе дефекта и степени его развития. Простота и универсальность спектральных методов стали причиной их широкого применения в задачах вибрационной диагностики.

Однако спектральные методы менее эффективны для диагностики оборудования с переменным режимом работы вследствие размытия спектра. В большинстве случаев нестационарность вибрационных сигналов в этом случае обусловлена изменяющейся во времени скоростью вращения вала. Примером подобного рода оборудования являются ветрогенераторы.

С одной стороны, решение указанной проблемы лежит в области алгоритмов уточнения частоты вращения вала и слежения за ней [5; 6]. Однако применение указанных алгоритмов не всегда достаточно для корректного использования спектральных методов, например в случаях смещения частоты вращения вала относительно его номинального значения более чем на 5...10%. С другой – удобным инструментом обработки нестационарных сигналов является вейвлет-анализ, математический аппарат которого разработан такими выдающимися учеными, как Морле, Добеши, Малла и др. [7; 8]. Хотя в практике вибрационной диагностики вейвлет-анализ еще не нашел широкого применения, данное направление, по нашему мнению, является перспективным.

Следует отметить, что существенное влияние на качество вейвлет-анализа оказывает выбор базисной функции. В частности, в работах [9; 10] показано, что выбор базисной функции, оптимизированной для указанного класса сигналов, позволяет повысить качество вейвлет-анализа и, как следствие, вибрационной диагностики в целом.

В настоящей работе авторами предложены базисные вейвлет-функции для диагностики зубчатых передач. Также приведены результаты экспериментов, проведенных на модельных вибрационных сигналах.

**Основная часть.** Линейное частотно-временное преобразование устанавливает связь сигнала с семейством волновых функций, хорошо сконцентрированных по времени и по частоте. Эти волновые функции называются частотно-временными атомами. Если рассмотреть общее семейство частотно-временных атомов  $\{\phi_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ , где  $\gamma$  может быть многоиндексным параметром, и предположить, что  $\phi_\gamma \in L^2(\mathbb{R})$  и  $\|\phi_\gamma\| = 1$ , тогда соответствующее линейное частотно-временное преобразование сигнала  $x \in L^2(\mathbb{R})$  определяется как

$$Tx(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\phi_\gamma^*(t) dt = \langle x, \phi_\gamma \rangle.$$

Атом Фурье с окном строится с помощью окна  $g$ , сдвинутого на  $u$  и модулированного частотой  $\omega$ :

$$\phi_\gamma(t) = g_{u,\omega}(t) = e^{i\omega t} g(t-u).$$

Вейвлет-атом – это растяжение в  $s$  раз и сдвиг на  $u$  материнского вейвлета  $\psi$ :

$$\phi_\gamma(t) = \psi_{s,u}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right).$$

Вейвлеты и преобразование Фурье с окном имеют энергию, хорошо локализованную во времени, в то время как их преобразование Фурье сконцентрировано главным образом в ограниченном диапазоне частот.

Для анализа структуры сигналов различной длительности необходимы частотно-временные атомы с различными временными носителями. Вейвлет-преобразование раскладывает сигналы по растянутым и сдвинутым вейвлетам.

Функция  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  называется вейвлетом, если выполняются следующие условия:

1. Функция  $\psi(t)$  имеет нулевое среднее

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (2)$$

Функция  $\psi(t)$  нормирована,  $\|\psi\| = 1$ , и имеет центр в  $t = 0$ . Часто для практических приложений оказывается необходимым, чтобы не только нулевой, но и первые  $k$  моментов были равны нулю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0 \quad \text{для } 0 \leq k < p, \quad (3)$$

тогда  $\psi(t)$  ортогональна любому многочлену степени  $p - 1$ . Такой вейвлет называется вейвлетом  $k$ -го порядка. Вейвлеты, обладающие большим количеством нулевых моментов, позволяют анализировать мелкомасштабные флуктуации и особенности высокого порядка, игнорируя регулярные полиномиальные составляющие сигнала.

2. Функция  $\psi(t)$  непрерывна по всей длине, т.е. не имеет точек разрыва. В некоторых приложениях требуется непрерывная дифференцируемость [8].

3. Функция  $\psi(t)$  должна быть ограничена и локализована по времени и по частоте. Необходимым и достаточным условием является

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty. \quad (4)$$

Локализация вейвлет-функций во времени подразумевает выполнение одного из законов убывания: а)  $t^{-m}$ , где  $m = \text{const}$ ; б) экспоненциального  $e^{-k|t|}$ , где  $k > 0$ , либо более быстрого. Хорошо локализованная функция  $\psi(t)$  имеет быстрое убывание, при этом означает, что для любого показателя  $m \in \mathbb{N}$  существует константа  $C_m$  такая, что

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |\psi(t)| \leq \frac{C_m}{1 + |t|^m}. \quad (5)$$

4. Автомодельность базиса, что означает, что все вейвлеты семейства  $\psi_{u,s}(t)$  имеют одинаковую форму (число осцилляций), так как получаются посредством масштабирования и сдвига материнского вейвлета  $\psi(t)$ .

Вейвлет-преобразование от времени  $u$  и масштаба  $s$  есть

$$Wx(u, s) = \langle x, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt.$$

Вейвлет-преобразование может быть переписано в виде свертки

$$Wx(u, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left( \frac{t-u}{s} \right) dt = x \cdot \tilde{\psi}_s(u), \quad (6)$$

где

$$\tilde{\psi}_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left( \frac{-t}{s} \right).$$

Преобразование Фурье  $\hat{\psi}_s(u)$  есть

$$\hat{\psi}_s(\omega) = \sqrt{s} \hat{\psi}(s\omega).$$

Так как  $\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$ , то  $\hat{\psi}$  – передаточная характеристика диапазонного фильтра, т.е. вейвлет-преобразование (5) вычисляет свертку с растянутым диапазонным фильтром. Если  $\psi$  – вещественный вейвлет, тогда

$$Wx(u, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left( \frac{t-u}{s} \right) dt.$$

Для вейвлет-преобразования выполняется закон сохранения энергии, но вейвлет удовлетворяет условию допустимости, определяемой теоремой Кальдера, Морле и Гроссмана [7]. Пусть  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  – вещественная функция, такая что

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|}{\omega} d\omega < +\infty, \quad (7)$$

тогда любая  $x \in L^2(\mathbb{R})$  удовлетворяет равенству:

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wx(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left( \frac{t-u}{s} \right) du \frac{ds}{s^2}. \quad (8)$$

Предположение (7) называется условием допустимости для вейвлетов. Для того чтобы интеграл был конечным, требуется  $\hat{\psi}(0) = 0$ . Это объясняет, почему вейвлеты должны иметь нулевое среднее значение. Если  $\hat{\psi}(0) = 0$  и  $\hat{\psi}(\omega)$  непрерывно дифференцируема, то условие допустимости выполняется. Выражение (8) задает обратное вейвлет-преобразование.

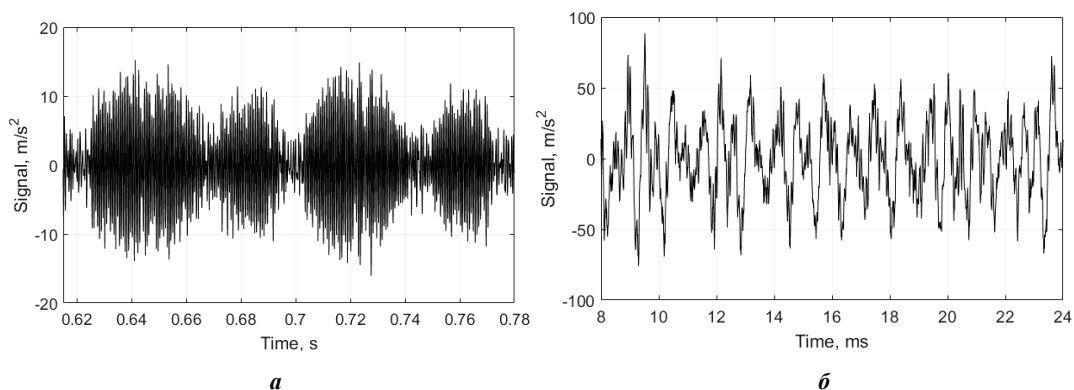
Следует отметить, что вейвлет может считаться базисной функцией  $L^2(\mathbb{R})$  только в том случае, если построенный с помощью его базис ортонормирован и обратное преобразование существует. Однако строгие доказательства полноты и ортогональности сложны и громоздки [8]. Кроме того, для практических целей часто достаточным является устойчивость и «приблизительная» ортогональность системы функций разложения. Как правило, для анализа сигналов используются такие «почти базисные» вейвлеты.

**Вейвлет-функции для диагностики зубчатых передач.** Множество научных работ посвящено разработке моделей ударных процессов в зубчатых передачах при наличии дефектов. В частности, работы [1–4] рассматривают дефекты зубчатых передач с точки зрения спектральной вибродиагностики. Например, переменная погрешность в шаге зацепления и нарушения соосности (перекосы осей валов) вызывают вибрацию на частотах вращения валов обоих колес и (или) на модуляционных частотах  $kf_1$ ,  $kf_2$  и  $mf_z \pm kf_1$ ,  $mf_z \pm kf_2$ , где  $k, m = 1, 2, \dots$ . В то же время работы [11–14] содержат результаты моделирования ударных процессов в зубчатых передачах с точки зрения механики.

Эксплуатационные дефекты зубчатой передачи можно разделить на следующие виды [1]:

- 1) абразивный износ зубчатого зацепления;
- 2) выкрашивание зубьев (питтинг) зубчатых колес;
- 3) трещины и излом зубьев зубчатых колес.

Примеры вибрационных сигналов зубчатых передачи при наличии дефектов представлены на рисунке 1.



**а** – выкрашивание нескольких зубьев шестерни; **б** – абразивный износ шестерен

**Рисунок 1. – Дефекты зубчатых передач**

Как видно из рисунка 1, сигнальные шаблоны, характеризующие наличие того или иного дефекта, можно условно разделить на два класса. К первому классу относятся амплитудно-модулированные колебания (рисунок 1, *а*). Сигналы данного класса соответствуют физическому повреждению зубьев шестерен (дефекты 2 и 3). При этом в спектральной области при таком виде дефектов присутствуют гармоники вида  $mf_z \pm nf_{1,2}, kf_{1,2}$ , где  $k, m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$ .

Представители второго класса сигнальных шаблонов близки по форме к синусоидальным колебаниям (рисунок 1, *б*). Сигналы данного класса соответствуют абразивному износу шестерен зубчатой передачи, хотя во многих случаях также характеризуют нормальное состояние зубчатой передачи при усиленной нагрузке или при наличии постоянной погрешности зацепления [1]. При этом в спектре присутствуют гармоники  $mf_z, kf_{1,2}, k, m = 1, 2, \dots$ .

Базисные функции для выявления указанных дефектов зубчатых передач должны максимально соответствовать форме описанных сигнальных шаблонов и иметь хорошую локализацию во временной и частотной областях. С этой целью были разработаны следующие базисные функции: *AMP*, *BP* и *SINP*.

Для обнаружения в сигнале амплитудно-модулированных шаблонов был разработан вейвлет *AMP* (*amplitude modulated pulse* – амплитудно-модулированный импульс), описываемый выражением:

$$\psi^{AMP}(t, \omega, FF) = s^{AM}(t, \omega, FF) \cdot g(t, \omega, FF), \tag{9}$$

где  $s^{AM}(t, \omega, FF)$  – амплитудно-модулированный сигнал,  $\omega = 2\pi f_0$  – циклическая несущая частота, рад/с;  $FF > 0$  – коэффициент формы;  $g(t, \omega, FF)$  – прямоугольная оконная функция с гауссовым затуханием по краям:

$$s^{AM}(t, \omega, FF) = \left[ 1 + \cos\left(\frac{\omega t}{FF}\right) \right] \cdot \frac{\sin(\omega t)}{2}, \tag{10}$$

$$g(t, \omega, FF) = \begin{cases} \exp\left(-k\omega^2\left(t + \frac{\omega}{4\pi FF}\right)^2\right), & t > -\frac{\omega}{4\pi FF}; \\ 1, & -\frac{\omega}{4\pi FF} \leq t \leq \frac{\omega}{4\pi FF}; \\ \exp\left(-k\omega^2\left(t - \frac{\omega}{4\pi FF}\right)^2\right), & t < \frac{\omega}{4\pi FF}, \end{cases} \tag{11}$$

где  $k$  – коэффициент затухания.

Для получения более резких фронтов оконной функции  $g(t, \omega, FF)$  выбрано значение  $k = 2$ . Выбор основан на экспериментальных исследованиях, результаты которых в рамках данной статьи не приводятся.

Для обнаружения процессов биения в вибрационных сигналах был разработан вейвлет *BP* (*beating pulse* – ударный импульс), описываемый выражением (12).

$$\Psi^{BP}(t, \omega, FF) = s^B(t, \omega, FF) \cdot g(t, \omega, FF), \quad (12)$$

где  $g(t, \omega, FF)$  – оконная функция с гауссовым затуханием по краям, определяемая выражением (11);  $s^B(t, \omega, FF)$  – сигнал биений:

$$s^B(t, \omega, FF) = \cos\left(\frac{\omega t}{FF}\right) \cdot \sin(\omega t). \quad (13)$$

Следует отметить, что в качестве базисной функции для выявления амплитудно-модулированных сигнальных шаблонов также рассматривается вейвлет *MORL*:

$$\Psi^{MORL}(t, \omega) = \cos(5\omega t) \exp(-\omega^2 t^2). \quad (14)$$

Для обнаружения в вибрационном сигнале синусоидальных шаблонов был разработан вейвлет *SINP* (*sin pulse*), определяемый выражением:

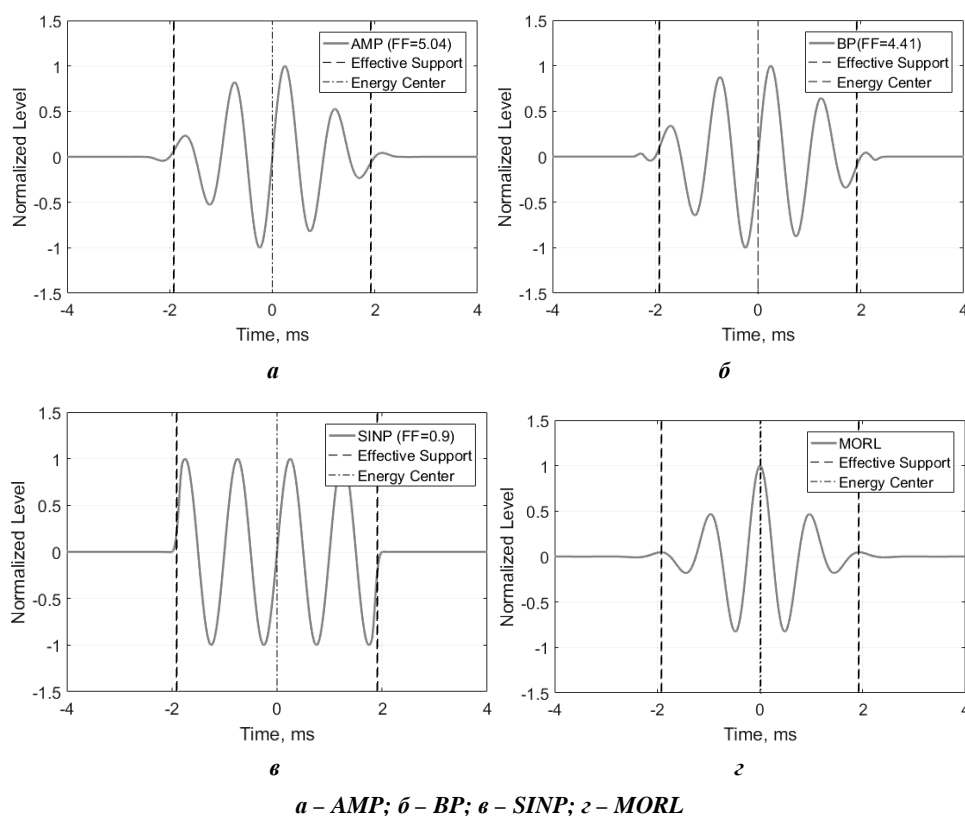
$$\Psi^{SINP}(t, \omega, FF) = \sin(\omega t) \cdot g(t, \omega, FF). \quad (15)$$

Вейвлеты *AMP*, *BP*, *SINP* непрерывны по всей длине и, следовательно, интегрируемы. Локализация вейвлетов осуществляется оконной функцией  $g(t, \omega, FF)$ , поэтому  $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(t)|^2 dt < \infty$ . Частотная локализация обеспечивается сохранением несущей частоты.

В силу того, что сигналы  $s^{AM}(t, \omega, FF)$ ,  $s^B(t, \omega, FF)$  и  $\sin(\omega t)$  есть нечетные функции, а оконная функция  $g(t, \omega, FF)$  четная, то вейвлеты  $\Psi^{AMP}(t, \omega, FF)$ ,  $\Psi^{BP}(t, \omega, FF)$  и  $\Psi^{SINP}(t, \omega, FF)$  также нечетные функции. Следовательно, вейвлеты *AMP*, *BP* и *SINP* обладают нулевым средним (2), поэтому для них выполняется условие допустимости (7).

Полученные функции не изменяют свою форму при изменении частоты (масштаба), поэтому построенные на их основе базисы обладают свойством автомодельности (5).

Внешний вид вейвлетов *AMP*, *BP*, *SINP* и *MORL* представлен на рисунке 2.



*a* – AMP; *б* – BP; *в* – SINP; *z* – MORL

Рисунок 2. – Вейвлеты для диагностики зубчатых передач

Вейвлет-функции  $AMP$ ,  $BP$  и  $SINP$  не обладают компактным носителем вследствие наличия экспоненциального закона затухания в выражении для оконной функции  $g(t, \omega, FF)$  (11). В этом случае используется термин длины эффективного носителя. Длина эффективного носителя  $\Delta T_{eff}^{\Psi}$  вейвлета  $\psi(t)$  есть интервал, на котором сосредоточена значительная часть энергии вейвлета

$$\Delta T_{eff}^{\Psi} = t_2 - t_1, \quad t_2 > t_1 \quad \Rightarrow \quad (16)$$

где  $\varepsilon \leq 0,05$  – доля энергии вне эффективного носителя;  $\|\psi\| = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt \right)^{1/2}$  – норма функции  $\psi(t)$ .

В силу симметричности вейвлетов  $AMP$ ,  $BP$  и  $SINP$  их энергетический центр

$$t_c = \frac{1}{\|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t |\psi(t)|^2 dt$$

находится в точке  $t_{c0} = 0$  при любом значении коэффициента формы  $FF^{\Psi}$ . На рисунке 2 для каждого вейвлета пунктирной и штрихпунктирной линиями обозначены соответственно интервал эффективного носителя  $\Delta T_{eff}^{\Psi}$  и положение энергетического центра  $t_{c0}$ .

При уменьшении коэффициента формы  $FF^{\Psi}$  ниже определенного значения наблюдается сдвиг несущих частот вейвлетов  $f_0$  относительно их номинального значения. На основе экспериментальных исследований были установлены минимальные значения коэффициентов формы для каждого из используемых вейвлетов, которые соответствуют нулевому сдвигу несущей частоты:  $FF^{AMP} = 2,25$ ,  $FF^{BP} = 3,36$  и  $FF^{SINP} = 1,26$ .

Стоит отметить, что введение коэффициента формы  $FF$  в выражение для вейвлетов позволяет построить набор базисных функций с различным частотно-временным разрешением в пределах одного масштаба (частоты). Это свойство, в частности, используется для построения базиса алгоритма разреженной вейвлетной декомпозиции [15].

**Результаты и их обсуждение.** Для оценки эффективности выделения сигнальных шаблонов в вибрационном сигнале дефектной зубчатой передачи проведен сравнительный анализ четырех рассматриваемых вейвлетов на модельных сигналах.

Как упоминалось выше, в работах [11–14] модели вибрационных сигналов для нормального и дефектного состояния зубчатых передач рассматриваются сугубо с точки зрения механики и описываются кинематическими уравнениями. Для моделирования данный подход неудобен, поэтому для синтеза тестовых сигналов вместо кинематических уравнений за основу выбраны шаблоны спектров вибрации для дефектного и нормального состояния зубчатых передач [1; 2].

Для упрощения моделирования тестовые сигналы содержат информацию только об одной паре шестерен, значение частоты зацепления считается неизменной (не имитируется ее нестабильность и, как следствие, размытие спектра), также не имитируются биения вала дефектной шестерни. Поэтому получаемый модульный сигнал можно сравнить с сигналом вибрации после узкополосной фильтрации.

Для имитации вибросигналов зубчатой передачи используется сигнал вида

$$s(t, FF) = \sum_i \sum_j A_{i,j} \cdot \sin \left( 2\pi f_{zi} \left( 1 + \frac{n_{i,j}}{FF} \right) t \right), \quad (17)$$

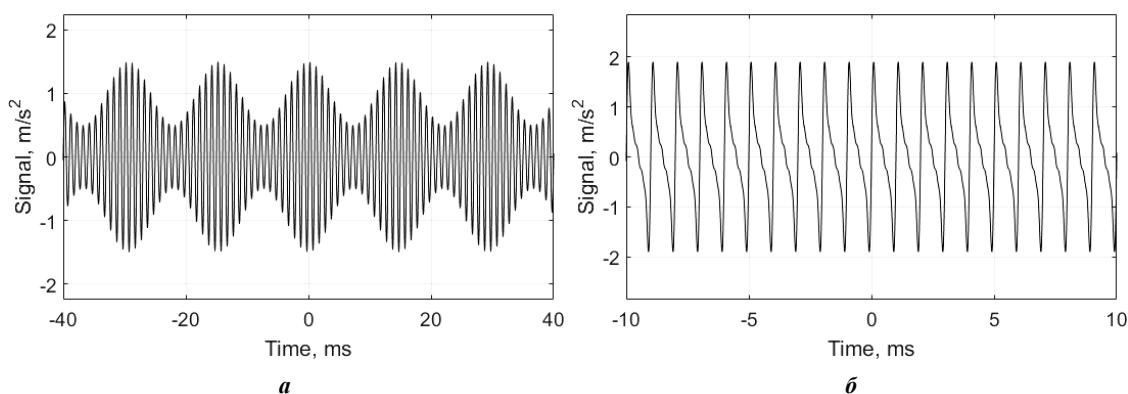
где  $f_{zi}$  –  $i$ -я гармоника зубцовой частоты (Гц),  $i \in \mathbb{N}$ ;  $j$  – порядковый номер боковых составляющих,  $j \in \mathbb{N}$ ;  $n_{i,j}$  – номер гармоники,  $n_{i,j} \in \mathbb{Z}$ ;  $A_{i,j}$  – амплитуда гармоники,  $A_{i,j} \in \mathbb{R}$ ;  $FF$  – коэффициент формы, определяющий частоту модулирующего колебания в (10), так как

$$F = f_0 / FF. \quad (18)$$

На основе (17) сформированы два класса сигналов: амплитудно-модулированных и синусоидальных (рисунок 3). Несущая частота тестовых сигналов  $f_0 = 1$  кГц, длительность реализаций  $T = 10$  с.

Для проведения сравнительного анализа длины эффективных носителей  $\Delta T_{eff}^{\Psi}$  вейвлетов  $AMP$ ,  $BP$  и  $SINP$  посредством изменения их коэффициентов формы приведены к длине эффективного носи-

теля  $\Delta T_{eff}^{MORL}$ . Были получены следующие значения коэффициентов формы для сравниваемых вейвлетов:  $FF^{AMP} = 5,04$ ,  $FF^{BP} = 4,41$  и  $FF^{SINP} = 0,90$ .



**а** – абразивный износ зубьев шестерни; **б** – повышенный зазор между шестернями

**Рисунок 3. – Модельные сигналы зубчатой передачи**

Каждая вейвлет-функция  $\psi(t)$  подвергается предварительной нормировке:

$$\bar{\psi}(t) = \frac{\psi(t)}{\|\psi\|}. \quad (19)$$

Сравнение вейвлетов проводится в терминах отклика  $resp(\psi, FF)$ . Под откликом  $resp(\psi, FF_i)$  вейвлета  $\psi$  на сигнал  $s(t)$  понимается

$$resp(\psi, FF_i) = \frac{\max \left[ \text{env} \left( \text{corr} \left( \bar{\psi}(t), s(t, FF_i) \right) \right) \right]}{\|s(t, FF_i) \cdot \text{rect}(t, t_{\max}, \Delta T_{eff})\|}, \quad (20)$$

где  $\text{env}(x(t))$  – огибающая по Гильберту сигнала  $x(t)$ ;  $\text{corr}(x(t), y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t-\tau)d\tau$  – корреляционная функция сигналов  $x(t)$  и  $y(t)$ ;  $\bar{\psi}(t)$  – нормированная по (19) вейвлет-функция  $\psi(t)$ ;  $\text{rect}(t, t_{\max}, \Delta T_{eff})$  – прямоугольная оконная функция

$$\text{rect}(t, t_{\max}, \Delta T_{eff}^{\psi}(FF)) = \begin{cases} 1, & t_{\max} - \frac{\Delta T_{eff}}{2} \leq t \leq t_{\max} + \frac{\Delta T_{eff}}{2}, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

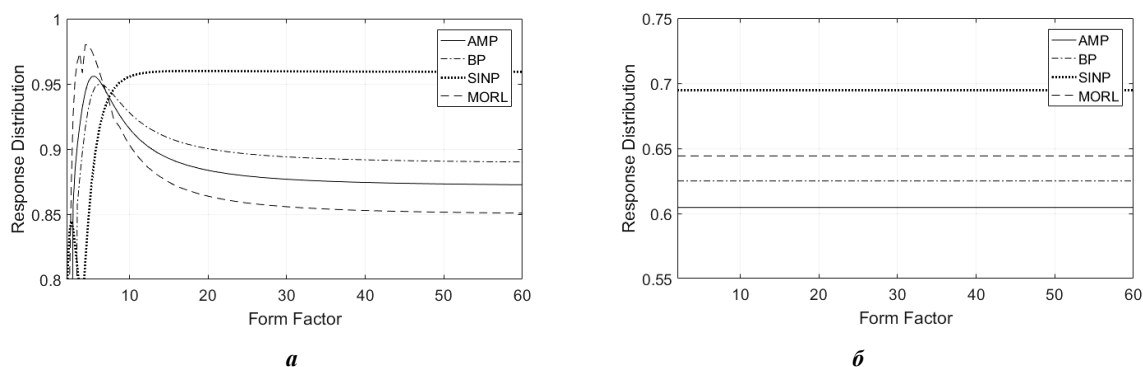
$t_{\max}$  – положение максимума на огибающей корреляционной функции. В данном эксперименте длина эффективного носителя рассчитывается при остаточной доле энергии  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

Кривые отклика вейвлетов на сформированные тестовые сигналы представлены на рисунке 4.

По результатам проведенного эксперимента (рисунок 4) из четырех рассматриваемых вейвлетов для анализа зубчатых передач можно выделить *MORL* и *SINP*, обладающие максимальным откликом на амплитудно-модулированные и синусоидальные воздействия соответственно.

В случае амплитудно-модулированных колебаний (см. рисунок 3, *а*) в диапазоне коэффициентов формы тестовых сигналов  $FF \leq 7$  отклик вейвлета *MORL* превышает отклик вейвлетов *AMP* на 7,04%, *BP* – на 3,8% и *SINP* – на 15,8% (рисунок 4, *а*). Однако для коэффициентов формы тестовых сигналов  $FF > 7$  отклик *SINP* в среднем на 7,6...15,4% превосходит отклики вейвлетов *AMP*, *BP* и *MORL*.

Наилучшим откликом во всем диапазоне коэффициентов формы на колебания, близкие по форме к синусоидальным (см. рисунок 3, *б*), обладает вейвлет *SINP* (рисунок 4, *б*). Отклик *SINP* на указанные воздействия на 7,8% больше, чем у *MORL*; на 11,13% больше, чем у *BP*, и на 14,90% больше, чем у *AMP*.



*a* – абразивный износ зубьев шестерни; *б* – повышенный зазор между зубьями шестерен

Рисунок 4. – Отклик вейвлетов на модельные сигналы

Следует отметить, что отклик вейвлетов *AMP*, *BP* и *MORL*, в отличие от *SINP*, сосредоточен в области коэффициентов формы тестовых сигналов *FF*, в пределах которой их сходство с ударными процессами максимально (рисунок 4, *a*). Поэтому с ростом продолжительности модуляционных процессов (увеличение *FF* сигналов) максимальный отклик вейвлетов будет смещаться в сторону больших  $FF^{AMP} / FF^{BP} / FF^{MORL}$ .

Следовательно, изменяя коэффициент формы вейвлетов *FF*, можно построить семейство базисных функций, результирующий отклик которого полностью покрывает шкалу коэффициентов формы *FF* тестовых сигналов. При этом отклик семейства вейвлетов *MORL* на амплитудно-модулированные колебания во всем диапазоне коэффициентов формы *FF* в среднем на 2,5...4,4% выше, чем у вейвлетов семейств *AMP*, *BP* и *SINP* (рисунок 5). Данное свойство используется при построении вейвлетного словаря для разреженной вейвлетной декомпозиции [15].

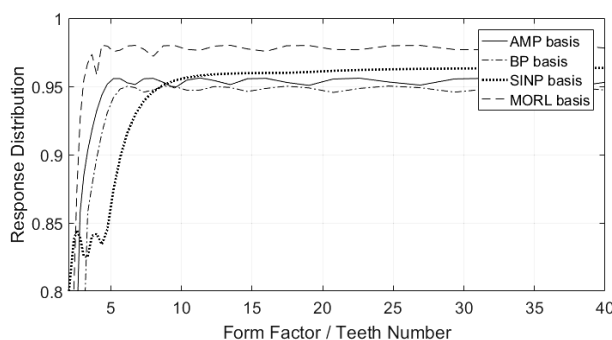


Рисунок 5. – Отклик семейств вейвлетов на амплитудно-модулированные сигналы

На основе выражений (1) и (18) можно провести условную параллель между коэффициентом формы *FF* амплитудно-модулированного сигнала (см. рисунок 3, *a*) и количеством зубьев *z* дефектной шестерни, сигнал которой имитируется. Поэтому по оси *FF* может быть отложено количество зубьев дефектной шестерни *z* (см. рисунок 5).

**Заключение.** В работе рассмотрены базисные функции для вибрационной диагностики зубчатых передач. Разработаны вейвлеты *AMP*, *BP* и *SINP*, проведено их математическое обоснование. Представлен сравнительный анализ рассматриваемых вейвлетов в терминах отклика на заданные модельные сигналы. Выявлено, что лучшим откликом на тестовые сигналы, имитирующие дефекты зубчатых передач, обладают вейвлеты *MORL* и *SINP*. Дальнейшие исследования предлагается направить на разработку базисов разреженной вейвлетной декомпозиции.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов, И.Л. Вибродиагностика энергетического оборудования : учеб. пособие по дисциплине «Диагностика в теплоэнергетике» / И.Л. Абрамов. – Кемерово, 2011. – 80 с.
2. Барков, А.В. Вибрационная диагностика машин и оборудования. Анализ вибрации : учеб. пособие / А.В. Барков, Н.А. Баркова. – СПб. : СПбГМТУ, 2004. – 156 с.



3. Баркова, Н.А. Вибрационная диагностика машин и оборудования. Расчет основных частей вибрации узлов машин, параметров измерительной аппаратуры и практическая экспертиза : учеб. пособие / Н.А. Баркова, А.А. Борисов. – СПб. : СПбГМТУ, 2004. – 156 с.
4. Костюков В.Н. Основы виброакустической диагностики и мониторинга машин : учеб. пособие / В.Н. Костюков, А.П. Науменко. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2011. – 360 с.
5. Eltabach, M. Rotating machine speed estimation using vibration statistical approach / M. Eltabach, G. Govaert // First World Congress on Condition Monitoring 2017 (WCCM 2017) The International Society for Condition Monitoring (ISCM), British Institute of Non-Destructive Testing.
6. Алгоритмы уточнения частоты вращения вала в задачах вибродиагностики роторного оборудования / Ю.П. Асламов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. В, Промышленность. Прикладные науки. – 2017. – № 11. – С. 51–58.
7. Mallat, S. A wavelet tour of signal processing. The sparse way / S. Mallat, Academic Press, 2009.
8. Астафьева, Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. – Т. 166, № 11. – 1996.
9. Диагностика качества подшипников качения с применением вейвлет-анализа / И.Г. Давыдов [и др.] // Докл. БГУИР. – 2005. – № 3 (11). – С. 48–52.
10. Васюкевич, С.Ю. Технические средства защиты информации / С.Ю. Васюкевич, И.Г. Давыдов, С.А. Мигалевич : тез. докл. VIII Белорус.-рос. науч.-техн. конф., Браслав, 24–28 мая 2010. – С. 106.
11. Chaari, F. Analytical modelling of spur gear tooth crack and influence on gearmesh stiffness / F. Chaari, T. Fakhfakh, M. Haddar // European Journal of Mechanics A/Solids, 28 (2009). – P. 461–468.
12. Dong, W. Time-domain modeling and analysis of dynamic gear contact force in a wind turbine gearbox with respect to fatigue assessment / W. Dong, Y. Xing, T. Moan // Energies, 5 (2012). – P. 4350–4371.
13. Klein, R. Model Based approach for identification of gears and bearings failure modes / R. Klein, E. Rudyk, E. Masad // International Journal of Prognostics and Health Management, 2 (2011). – P. 100–109.
14. Pitting damage levels estimation for planetary gear sets based on mode simulation and grey relational analysis / C. Zhe [et al.] // Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, 35 (2011). – P. 403–417.
15. Разреженная вейвлетная декомпозиция в задачах вибродиагностики роторного оборудования / Ю.П. Асламов [и др.] // Докл. БГУИР. – 2017. – № 8. – С. 91–98.

Поступила 29.01.2018

## WAVELET FUNCTIONS FOR GEARING DIAGNOSIS

Y. ASLAMOV, A. ASLAMOV, D. DAVYDOV, A. TSURKO

*Automatic systems of vibration-based diagnostics allowing to solve problems of estimation of a technical condition of rotary equipment without involvement of experts are considered. Wavelet analysis became widely used to process non-stationary signals. However, the quality of the wavelet analysis strongly depends on the chosen wavelet function. The authors of the article proposed basis functions intended for the gearing diagnosis. Wavelets mathematical justification and comparative analysis with other wavelets are provided. The article contains the results of testing the proposed wavelets on model signals.*

**Keywords:** vibration-based diagnostics, digital signal processing, wavelet transform, basis function.