

УДК 548.232.4

**КОЛЕБАНИЯ СКОРОСТИ И КРИВИЗНЫ  
ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ФАЗОВОЙ ГРАНИЦЫ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ  
В ПЕРЕОХЛАЖДЕННОМ РАСПЛАВЕ**

*д-р физ.-мат. наук, проф. О.Н. ШАБЛОВСКИЙ; канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Г. КРОЛЬ  
(Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого)*

*Рассмотрены градиентные свойства теплового поля на фазовой границе высокоскоростной кристаллизации однокомпонентного переохлажденного расплава. Учтено, что по мере увеличения переохлаждения усиливается роль локально-неравновесного теплопереноса. При проведении аналитических преобразований применяется трехмерный ортогональный базис, соответствующий касательной, главной нормали и бинормали к фазовой границе. Получены в явном виде выражения производных от температуры и компонентов вектора теплового потока по нормальной координате. Математической моделью появления боковой ветви дендрита служит градиентная катастрофа, с наступлением которой производные от температуры и теплового потока становятся неограниченно большими. Показаны причины разрушения теплового поля. Представлены результаты численных расчетов влияния периодических по времени возмущений скорости и кривизны фазовой границы на структуру теплового поля. Выполнен сопоставительный анализ режимов колебаний вблизи вершины дендрита и на конечном удалении от нее. Построены фазовые портреты системы «расплав – кристалл». Расчеты выполнены для переохлажденного расплава никеля.*

**Ключевые слова:** эволюция фазовой границы, морфологическая устойчивость, вершина дендрита, боковая ветвь.

**Введение.** Процессы высокоскоростной кристаллизации глубоко переохлажденного расплава служат основой перспективных способов получения материалов с новыми функциональными свойствами. В настоящее время в экспериментальных условиях достигнуты скорости роста 20...70 м/с при глубине переохлаждения расплава до 300 К. История данного вопроса и библиография изложены в [1].

Важным аспектом проблемы роста является дендритное ветвление и анализ морфологической неустойчивости фазовой границы (ФГ). Современное состояние этой проблемы и библиография имеются в работах [2; 3]. В представляемой работе рассматривается рост кристалла из однокомпонентного переохлажденного расплава с позиций теории локально-неравновесного теплопереноса [4]. Работа продолжает исследования [5–8] и имеет следующие цели: 1) изучить градиентные свойства теплового поля на линии роста; 2) проанализировать корреляцию «кривизна – скорость перемещения вершины дендрита».

**Нормальные производные температуры и компонентов вектора теплового потока.** Рассмотрим ФГ (двумерную плоскую либо осесимметричную), обладающую нестационарной кривизной. Уравнение линии роста постулируем в следующем виде:

$$f \equiv x + A(t) - [B(y)]^{p(t)} = 0.$$

Эта априорная зависимость основана на экспериментальных сведениях [9] о существовании периодических по времени возмущений скорости и кривизны вершины дендрита. Здесь  $t$  – время; в плоском ( $v=0$ ) двухмерном случае  $x, y$  – прямоугольные декартовы координаты; в случае осевой симметрии ( $v=1$ ) координата  $x$  соответствует оси симметрии;  $y$  – радиальная координата;  $B = B(y)$  – непрерывная функция;  $B(y) \geq 1$ ,  $\dot{B}(y) \equiv dB/dy \geq 0$  при  $y \geq 0$ , причем  $B(y=0) = 1$ . Закон движения вершины дендрита ( $y=0$ ):  $x_j(t, y=0) \equiv x_0(t) = 1 - A(t)$ ,  $t \geq 0$ . Фазовая граница движется влево,  $dx_0/dt = -\dot{A}(t) < 0$ .

Геометрические свойства ФГ представляются формулами:

$$G = |\text{grad}f|, \quad G = [1 + p^2 B^{2(p-1)} \dot{B}^2]^{1/2}, \quad B_1 = p B^{p-1} \dot{B}, \quad p = p(t) \geq 1, \quad \sin \beta = \frac{1}{G}, \quad \cos \beta = \frac{B_1}{G}.$$

Алгоритм построения криволинейных координатных осей с ортогональным базисом  $s, n, b$  (касательная, главная нормаль и бинормаль к поверхности ФГ) изложен в [10], см. также [7]. Фазовая граница  $x_j = B^p - A$  перемещается со скоростью  $N = (\dot{p} B^p \ln B - \dot{A})/G$  и обладает средней кривизной

$$K = K_1 + K_2, \quad K_1 = \frac{B_2}{G^3}, \quad K_2 = \frac{v B_1}{y G}, \quad B_2 = B_2(y, t) = p B^{p-1} \ddot{B} + p(p-1) B^{p-2} \dot{B}^2. \quad (1)$$

В случае  $p(t) \equiv 1$  получаем зависимости для ФГ стационарной формы.

Работаем с двумерными уравнениями теплопереноса [4]:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{v}{y} q_2 = 0; \quad q_1 + \gamma \frac{\partial q_1}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}; \quad q_2 + \gamma \frac{\partial q_2}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}; \quad v = 0, 1..$$

Основные обозначения:  $T$  – температура;  $\mathbf{q}(q_1, q_2)$  – вектор удельного теплового потока;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $c$  – объемная теплоемкость;  $\gamma$  – время релаксации теплового потока;  $w^2 = \lambda/(\gamma c)$  – квадрат скорости распространения тепловых возмущений. После перехода от аргументов  $(x, y, t)$  к  $(s, n, t)$  получаем уравнения для функций  $T, q_n, q_s$ :

$$\left( \frac{c \xi_{3t}}{G} \right) \frac{\partial T}{\partial n} + \frac{\partial q_n}{\partial n} = \Pi_1, \quad (2)$$

$$\Pi_1 = \frac{v}{y} (q_n \cos \beta - q_s \sin \beta) - c \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{c B_1}{G} \xi_{1t} \frac{\partial T}{\partial s} - q_s \frac{\partial}{\partial y} (\sin \beta) + q_n \frac{\partial}{\partial y} (\cos \beta) - \frac{\partial q_s}{\partial s};$$

$$\frac{\lambda}{G} \frac{\partial T}{\partial n} + \left( \gamma \sin \beta \frac{\xi_{3t}}{G} \right) \frac{\partial q_n}{\partial n} + \left( \gamma \cos \beta \frac{\xi_{3t}}{G} \right) \frac{\partial q_s}{\partial n} = \Pi_2, \quad (3)$$

$$\Pi_2 = -\frac{B_1}{G} \lambda \frac{\partial T}{\partial s} - \gamma \frac{B_1^2}{G^2} \xi_{1t} \frac{\partial q_s}{\partial s} - \gamma \cos \beta \frac{\partial q_s}{\partial t} - \gamma \frac{B_1}{G^2} \xi_{1t} \frac{\partial q_n}{\partial s} - \gamma \sin \beta \frac{\partial q_n}{\partial t} -$$

$$- \gamma \left( q_n \frac{\partial \sin \beta}{\partial t} + q_s \frac{\partial \cos \beta}{\partial t} \right) - q_n \sin \beta - q_s \cos \beta;$$

$$- \frac{\lambda B_1}{G} \frac{\partial T}{\partial n} - \left( \gamma \cos \beta \frac{\xi_{3t}}{G} \right) \frac{\partial q_n}{\partial n} + \left( \gamma \sin \beta \frac{\xi_{3t}}{G} \right) \frac{\partial q_s}{\partial n} = \Pi_3, \quad (4)$$

$$\Pi_3 = -\frac{\lambda}{G} \frac{\partial T}{\partial s} + \gamma \frac{B_1^2}{G^2} \xi_{1t} \frac{\partial q_n}{\partial s} - \gamma \frac{B_1}{G^2} \xi_{1t} \frac{\partial q_s}{\partial s} + \gamma \cos \beta \frac{\partial q_n}{\partial t} - \gamma \sin \beta \frac{\partial q_s}{\partial t} -$$

$$- \gamma \left( q_s \frac{\partial \sin \beta}{\partial t} - q_n \frac{\partial \cos \beta}{\partial t} \right) + q_n \cos \beta - q_s \sin \beta.$$

Здесь  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_n + \mathbf{q}_s$ ;  $q_1 = q_n \sin \beta + q_s \cos \beta$ ,  $q_2 = -q_n \cos \beta + q_s \sin \beta$ .

$$\xi_{1t} = \dot{A} + \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{dy}{B_1(y, t)}, \quad \xi_{3t} = \dot{A} - \dot{p} B^p \ln B; \quad \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{B_1}{G} \frac{\partial B_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_1}{\partial t} = \dot{p} \dot{B} B^{p-1} (1 + p \ln B),$$

$$\dot{p} = dp(t)/dt, \quad \dot{B} = dB(y)/dy.$$

Данные три уравнения образуют систему линейных неоднородных алгебраических уравнений по отношению к нормальным производным  $\frac{\partial T}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial q_n}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial q_s}{\partial n}$ . Определитель этой системы равен

$$\Delta = \frac{\lambda \gamma \xi_{3t}}{G} (M^2 - 1), \quad M^2 = \frac{N^2}{w^2}, \quad N = -\frac{\xi_{3t}}{G}. \quad (5)$$

Нормальные производные подсчитываем по формулам:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\Delta_1^1}{c \gamma G (N^2 - w^2)}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial q_n}{\partial n} = \frac{\Delta_2^1}{c \gamma G^2 (N^2 - w^2)}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial q_s}{\partial n} = \frac{\Pi_3 + B_1 \Pi_2}{\gamma \xi_{3t}}. \quad (8)$$

$$\Delta_1^1 = \Pi_1 \gamma \xi_{3t} + B_1 \Pi_3 - \Pi_2; \quad \Delta_2^1 = c \xi_{3t} (\Pi_2 - B_1 \Pi_3) - \lambda \Pi_1 G^2.$$

Фазовую границу кристаллизации моделируем поверхностью сильного разрыва теплового поля. Динамические условия совместности получаем обычным образом [11]:

$$q_{sj} \equiv q_j \cos(\beta - \beta_j) = q_* \cos \beta; \quad (9)$$

$$q_{nj} \equiv q_j \sin(\beta - \beta_j) = q_* \sin \beta + N(u_j - u_*) - L \left( N + \gamma \frac{\partial N}{\partial t} \right); \quad (10)$$

$$T_j = T_c - \frac{T_c U}{L} K - \frac{|N|}{\mu}; \quad q_j = |q_j|, \quad q_* = |q_*|; \quad U, \mu - \text{const}. \quad (11)$$

Звездочкой отмечены параметры расплава; индекс  $j$  указывает, что значение функции определено на правой стороне разрыва, в твердой фазе;  $L$  – теплота фазового перехода единицы объема вещества;  $\mu$  – кинетический коэффициент роста;  $U$  – поверхностная энергия границы раздела фаз;  $T_c$  – равновесная температура кристаллизации;  $c = du / dT$ .

Подробное обсуждение условий (9)–(11) имеется в [7]. Здесь допускается случай одномерного нестационарного теплового поля расплава:  $q_* = q_*(x, t)$ ,  $T_* = T_*(x, t)$ . Для определенности анализируем вариант  $N = Nn$ ,  $q_* = q_* \dot{i}_1$ , принимая  $N < 0$ ,  $q_* > 0$ . Функции  $T_j$ ,  $q_{nj}$ ,  $q_{sj}$  определяем с помощью (9)–(11) через параметры расплава  $q_*$ ,  $T_*$ . Продифференцировав по касательной координате формулы (9)–(11), находим

$$\left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_j = \frac{\partial T_j}{\partial s}, \quad \left( \frac{\partial q_n}{\partial s} \right)_j = \frac{\partial q_{nj}}{\partial s}, \quad \left( \frac{\partial q_s}{\partial s} \right)_j = \frac{\partial q_{sj}}{\partial s}.$$

Нормальные производные на фазовой границе

$$\left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_j, \quad \left( \frac{\partial q_n}{\partial n} \right)_j, \quad \left( \frac{\partial q_s}{\partial n} \right)_j \quad (12)$$

подсчитываем на основе (9)–(11) и их дифференциальных следствий, получаемых воздействием операторов  $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x} \cos \beta + \frac{\partial}{\partial y} \sin \beta$  и  $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} \sin \beta - \frac{\partial}{\partial y} \cos \beta$ .

Таким образом, мы решаем полуобратную задачу: задаем из физических соображений вид фазовой границы; указываем температурное поле расплава  $T_*(x)$ ,  $q_*(x)$  и вычисляем в твердой фазе  $T$ ,  $q_n$ ,  $q_s$ , а также их производные  $\partial/\partial n$  по нормали к линии роста. Данный подход позволяет найти: связь скорости  $N$  и кривизны  $K$ ; закономерности влияния колебаний функций  $A(t)$ ,  $p(t)$  на поведение теплового поля; условия появления неустойчивостей в системе «расплав – кристалл» под воздействием периодической неоднородности теплового потока  $q_*(x)$ .

**Обсуждение результатов.** Математической моделью появления боковой ветви дендрита на фазовой границе служит градиентная катастрофа, с наступлением которой производные (12) становятся неограниченно большими. Анализ полученных выражений позволяет утверждать, что существуют три причины разрушения теплового поля на линии роста.

I. Из (6), (7) ясно, что разрушение происходит в «звуковой» точке  $(x_j^1, y^1, t^1)$ , когда  $N^2(y^1, t^1) = w_j^2$ ; здесь  $x_j^1 = x_j(y^1, t^1)$ .

II. Согласно (5), (8), градиентная катастрофа наступает в точке остановки  $(x_{jr}, y_r, t_r)$  ФГ, когда  $N(y_r, t_r) = 0$ , т.е.  $(\dot{p} B^p \ln B)_r = (\dot{A})_r$ . Этот вариант возможен только при нестационарной кривизне ФГ, когда функция  $p(t)$  не является тождественной константой. В частном случае, когда  $p(t) \equiv \text{const}$ , кривизна стационарна ( $\partial K / \partial t \equiv 0$ , см. (1)), и градиентная катастрофа может появиться только в «звуковой» точке.

Отметим также, что в кинематическом отношении  $\dot{A}(t)$  характеризует скорость, отвечающую поступательной компоненте движения ФГ;  $\dot{p}(t)$  определяет угловую скорость касательной к ФГ в каждой ее точке. В физическом отношении  $\dot{A}(t)$  описывает скорость движения вершины дендрита;  $p(t)$  входит в формулу для кривизны  $K(y=0, t) = p(t) \ddot{B}(y=0)$ .

III. При подсчете производной  $(\partial q_n / \partial t)_j$ , входящей в  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ , появляется  $\partial^2 N / \partial t^2$ , т.е. формулы (12) содержат производные третьего порядка  $d^3 A(t) / dt^3$ ,  $d^3 p(t) / dt^3$ .

Градиентная катастрофа появляется, когда  $p(t)$  и (или)  $A(t)$  содержат входящую аддитивно степенную либо логарифмическую особенности:

$$(t_3 - t)^{3-\alpha}, t_3 > 0, 0 < \alpha < 1; (t_3 - t)^3 \ln(t_3 - t), t_3 > 0.$$

Из рассмотрения аналитических выражений  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  ясно, что локальная неравновесность проявляет себя не только по отношению к тепловому потоку (см. слагаемые, содержащие множители  $\gamma \partial q_n / \partial t$ ,  $\gamma \partial q_s / \partial t$ ), но и по отношению к углу  $\beta$ , характеризующему двумерные геометрические свойства ФГ (см. слагаемые, содержащие множители  $\gamma \partial \sin \beta / \partial t$ ,  $\gamma \partial \cos \beta / \partial t$ ). Таким образом, нормальные производные (6)–(8) содержат слагаемые вида  $\gamma \frac{\partial}{\partial t}(q_n \cos \beta)$ ,  $\gamma \frac{\partial}{\partial t}(q_s \cos \beta)$ , а это значит, что на фоне локальной неравновесности процесса роста наблюдается нелинейное (мультипликативное) взаимодействие тепловых и морфологических свойств ФГ.

Приведем здесь примеры расчета высокоскоростного затвердевания переохлажденного расплава никеля. Вычисления выполняем в безразмерных переменных. Берем следующие масштабы величин:  $c_b = c_* = c_j$ ,  $\lambda_b = \lambda_* = \lambda_j$ ,  $T_b = T_c$ ,  $y_b = 10^{-6} \text{ м}$ ,  $K_b = 10^6 \text{ м}$ ,  $N_b = 3 \text{ м/с}$ ,  $x_b = \lambda_b / (c_b N_b) = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ,  $t_b = x_b / N_b = (4/3) \cdot 10^{-6} \text{ с}$ ,  $q_b = c_b T_b N_b$ ,  $L_b = L / (c_b T_b)$ ,  $\mu_b = N_b / T_b$ . Теплофизические свойства никеля:  $c = 5,62 \cdot 10^6, \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{град})$ ;  $\lambda = 69, \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{град})$ ;  $L = 2,14 \cdot 10^9, \text{ Дж}/\text{м}^3$ ;  $T_c = 1728 \text{ К}$ ;  $U = 1,81, \text{ Дж}/\text{м}^2$ ;  $\mu \in [1544; 2594], \text{ м}/(\text{с} \cdot \text{град})$ ;  $\gamma = 1,38 \cdot 10^{-7}, \text{ с}$ ;  $T_* = 1661 \text{ К}$ . Здесь числовые значения  $\mu$  и  $\gamma$  соответствуют расплаву чистого никеля, переохлажденного на 67 К [5]. Тепловое поле расплава создается источником  $q_v^*(x)$ :

$$q_* = -\lambda_* \frac{dT_*(x)}{dx}, \quad \frac{dq_*(x)}{dx} = q_v^*(x), \quad x \in [x_1, 0], \quad x_1 < 0.$$

Рассматриваем физически содержательный вариант незатухающего теплового потока:

$$q_*(x) = q_*^1 \sin^2(k_* x); \quad q_*^1, k_* = \text{const}, \quad q_*^1 > 0,$$

$$T_*(x) = T_*^0 - \left( \frac{q_*^1}{\lambda} \right) \left[ \frac{x}{2} - \frac{1}{4k_*} \sin(2k_* x) \right], \quad \frac{2\pi}{k_*} < (-x_1), \quad T_*(x=0) = T_*^0 > 0.$$

В частном случае  $q_*^1 = 0$ , т.е. при  $q_*(x) \equiv 0$  имеем однородное тепловое поле  $T_* = T_*^0 \equiv \text{const}$ ,  $x \in (-\infty, 0]$ . Кроме того, был рассмотрен затухающий по координате тепловой поток вида  $q_*(x) = q_*^1 e^{n_* x} \sin^2(k_* x)$ ;  $q_*^1, k_*, n_*$  – положительные величины. Отметим, что результаты расчетов для  $n_* = 0$  и  $n_* > 0$  не содержат существенных качественных различий.

Цель расчетов – найти  $T_j, q_n, q_s, \partial T_j / \partial n, \partial q_n / \partial n, \partial q_s / \partial n$  как функции аргументов  $y, t$ .

Графики этих зависимостей строим при фиксированном  $y > 0$  при  $t \geq 0$ . Здесь  $y = 0$  – вершина дендрита; чем больше радиальная координата  $y$ , тем дальше находится изучаемая точка линии роста от оси дендрита;  $N_m = -N$ . Вычисление производных выполнялось с помощью программы Mathcad.

На рисунках 1–3 представлены результаты расчета осесимметричной (конической) ФГ для варианта  $B(y) = 1 + n_1 y, y > 0$ ,

$$A_1(t) = \frac{a_1}{\omega_1} (1 - \cos \omega_1 t), \quad t \geq 0. \tag{13}$$

Это значит, что скорость ФГ испытывает периодическое возмущение  $a_1 \sin \omega_1 t$ .

Для  $p(t)$  допускаются два случая:

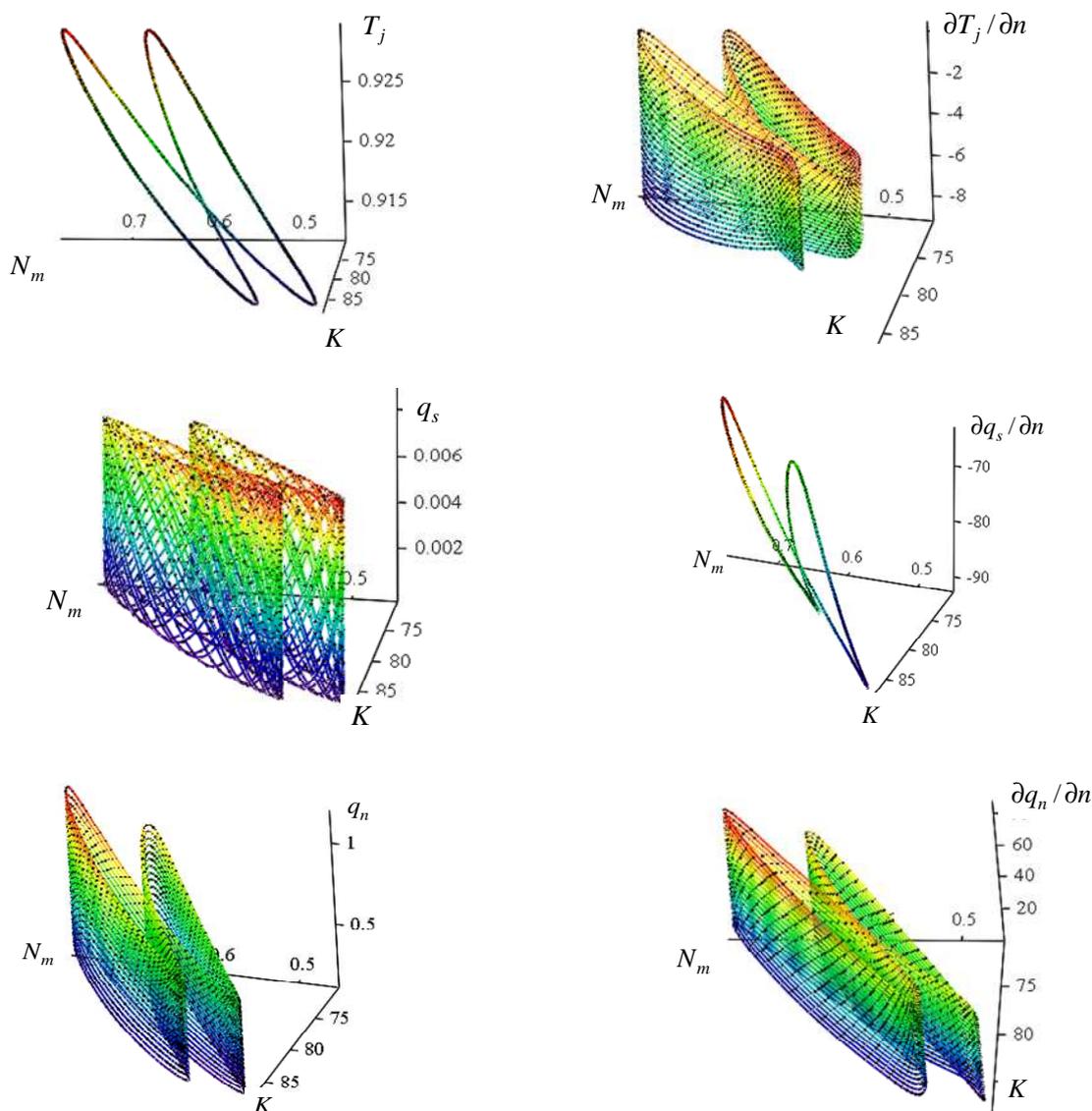
$$p(t) = 1 + (a_2 \sin \omega_2 t)^2; \tag{14}$$

$$p(t) = 1 + a_2 (1 - \sin \omega_2 t), \quad a_2 > 0. \tag{15}$$

Здесь  $a_1, a_2, n_1, \omega_1, \omega_2$  – постоянные величины. Для зависимости (14) имеем неотрицательное отклонение от единицы; зависимость (15) дает знакопеременное отклонение  $a_2 \sin \omega_2 t$  от  $1 + a_2$ .

Обсудим результаты расчетов, полученные при  $\nu = 1$ ,  $N_m^0 = -N_0 = 3,07$  м/с,  $k_s = 1$ .

Информация, представленная на рисунках 1 и 2, позволяет судить об интервалах, в которых меняются основные параметры теплового поля на линии роста. Расчеты показали, что изменение режима колебаний функции  $p(t)$  не влияет принципиальным образом на нестационарные свойства скорости роста.



**Рисунок 1. – Тепловое состояние дендрита в конечной окрестности его вершины для режима колебаний (15):  $n_1 = 1$ ;  $a_1 = 0,1$ ;  $\omega_1 = 0,5$ ;  $a_2 = 0,4$ ;  $\omega_2 = 1$ ;  $q^*_s = 0,01$ ,  $y = 0,01$**

Сравнение рисунков 1 и 3 говорит о том, что варианты (14) и (15) различаются геометрическими конфигурациями фазовых портретов. Принципиальных различий физического характера между этими режимами колебаний нет.

Рисунок 2 относится к периферии дендрита:  $y = 1,0$ ; рисунок 1 демонстрирует свойства процесса в конечной окрестности вершины ( $y = 0,01$ ), где большая кривизна линии роста в значительной степени влияет на градиентные свойства теплового поля.

Были также проведены расчеты для двумерных плоских ФГ. Подробности этих вычислений здесь не приводятся. Результаты сравнения позволяют утверждать, что различия между плоской и осесимметричной ФГ хорошо выражены в количественном отношении. Для представленных здесь режимов роста отсутствуют принципиальные качественные различия между вариантами  $\nu = 0$  и  $\nu = 1$ .

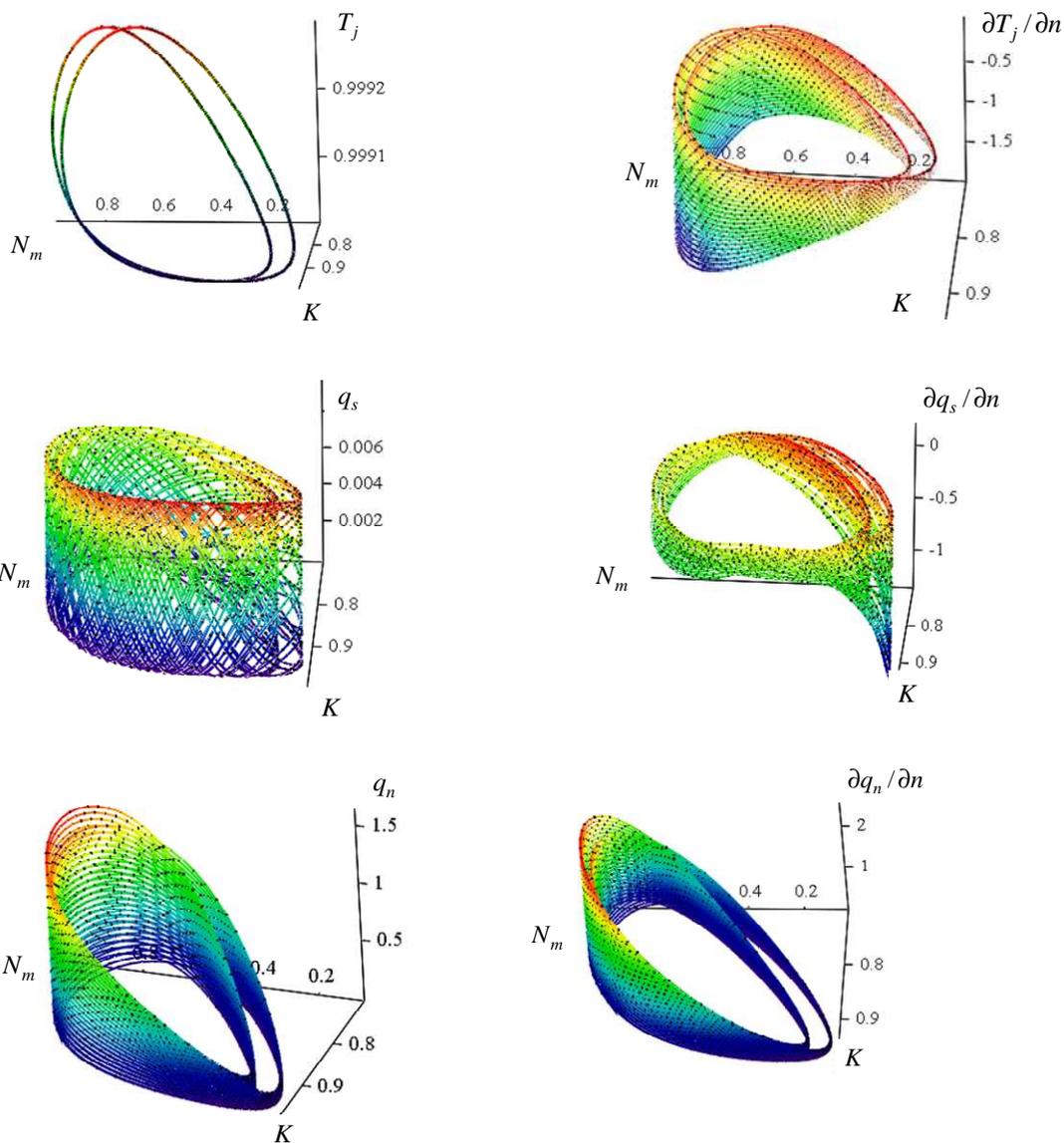


Рисунок 2. – Свойства теплового поля на периферии осесимметричного дендрита  $y = 1$  для режима колебаний (15) (входные параметры задачи такие же, как на рисунке 1)

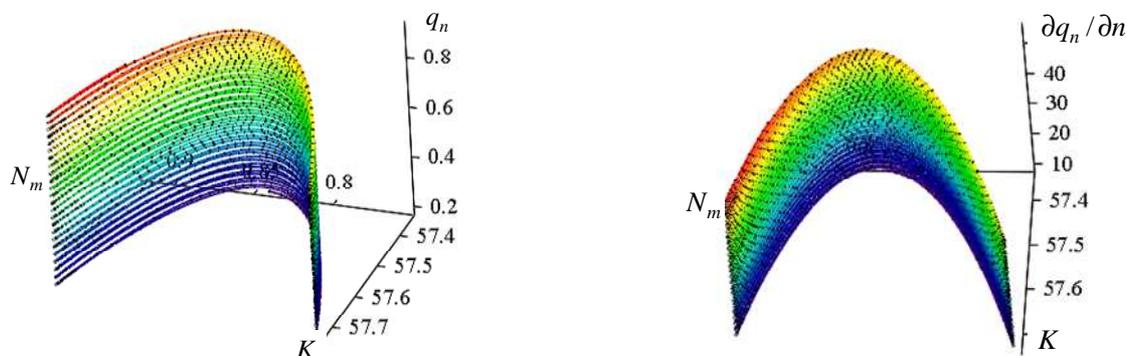


Рисунок 3. – Нормальная составляющая теплового потока в окрестности вершины осесимметричного дендрита для режима колебаний (14):  $n_1 = 0,7; a_1 = 0,1; \omega_1 = 0,5; a_2 = 0,1; \omega_2 = 0,5; q_1^* = 0,005, y = 0,01$

**Заключение.** Представлены результаты аналитического и численного исследования тепловых свойств двумерных линий роста, обладающих плоской и осевой симметриями. Анализ выполнен для случаев периодического по времени возмущения скорости и кривизны осесимметричной фазовой границы. Обнаружены существенные количественные различия между режимами колебаний вблизи вершины дендрита и на конечном удалении от нее.

Показано, что основными параметрами влияния на тепловое состояние линии роста являются частота и фаза колебаний. Установлено, что на фоне локальной неравновесности процесса роста наблюдается нелинейное взаимодействие тепловых и морфологических свойств фазовой границы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Herlach, D. M. *Metastable Solids from Undercooled Melts* / D. M. Herlach, P. Galenko, D. Holland-Moritz. – Oxford : Pergamon, 2007. – 448 p.
2. Mullis, A.M. *Deterministic side-branching during thermal dendritic growth* / A.M. Mullis // IOP Conf. Series : Materials Science and Engineering. – 2015. – Vol. 84. – P. 1–9.
3. Glicksman, M.E. *Capillary-mediated interface perturbations: Deterministic pattern formation* / M.E. Glicksman // Journal of Crystal Growth. – 2016. – Vol. 450. – P. 119–139.
4. Жоу, Д. *Расширенная необратимая термодинамика* / Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон. – Москва ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. – 528 с.
5. Шабловский, О.Н. *Тепловые свойства фронта кристаллизации однокомпонентного чистого переохлажденного расплава* / О.Н. Шабловский, Д.Г. Кроль // Расплавы. – 2005. – № 4. – С. 69–81.
6. Шабловский, О.Н. *Расчет кинетических параметров фронта кристаллизации глубоко переохлажденного расплава* / О.Н. Шабловский, Д.Г. Кроль // Материалы, технологии, инструменты. – 2007. – Т. 12, № 1. – С. 5–10.
7. Шабловский, О.Н. *Тепловая градиентная катастрофа и рост двумерного свободного дендрита в переохлажденном расплаве* / О.Н. Шабловский // Прикладная физика. – 2007. – № 3. – С. 29–37.
8. Шабловский, О.Н. *Морфологические свойства линии роста двумерного дендрита в переохлажденном расплаве* / О.Н. Шабловский // Прикладная физика. – 2012. – № 4. – С. 40–46.
9. Evidence for tip velocity oscillations in dendritic solidification / J.C. La Combe [et. al.] // Phys. Rev. E. – 2002. – Vol. 65, No. 3. – P. 031604-1–031604-6.
10. Emanuel, G. *Shock wave derivatives* / G. Emanuel, Min-Shan Lin // Phys. Fluids. – 1998. – Vol. 31, № 12. – P. 3625–3633.
11. Седов, Л. И. *Механика сплошной среды* / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1973, Т. 1. – 536 с.

Поступила 24.05.2018

#### THE OSCILLATIONS OF THE VELOCITY AND CURVATURE OF THE AXIALLY-SYMMETRICAL PHASE BOUNDARY AT CRYSTALLIZATION IN AN OVERCOOLED MELT

*O. SHABLOVSKY, D. KROLL*

*The gradient properties of the heat field on the phase boundary are studied at high-speed crystallization of a unicomponent overcooled melt. The increasing role of locally-nonequilibrium heat transfer at intensified overcooling is taken into account. The analytical transformations were carried out with the aid of a three-dimensional orthogonal basis, which corresponded to the tangent, the main normal and the binormal of the phase boundary. Explicit expressions for the derivatives of the temperature and the heat flux vector are obtained. The origin of a lateral branch of a dendrite was simulated mathematically by the gradient catastrophe when the derivatives of the temperature and the heat flux vector become infinitely large. The tree reasons for the heat field destruction are indicated. Numerical calculations for the influence of time-periodical perturbations in the velocity and the curvature of the phase boundary affecting the structure of the heat field. The oscillation regimes at the dendrite top and in the distant zone are collated. The phase portraits for the system “melt – crystal” were built in the coordinates “velocity – curvature – temperature”, “velocity – curvature – heat flux” etc. All the calculations were carried out for the overcooled nickel melt.*

**Keywords:** *interface evolution, morphological stability, tip of dendrite, side branch.*