УДК 534.121

О ВЛИЯНИИ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ МАТЕРИАЛА НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ БАЛОК

канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ
(Полоцкий государственный университет)

Рассматриваются свободные колебания упругой балки постоянного симметричного поперечного сечения с учетом разномодульности материала. Получено дифференциальное уравнение колебаний балки с учетом разномодульности её материала. Анализируется влияние различия модуля упругости при растяжении и сжатии материала балки на её собственных частотах. Установлены значения коэффициента разномодульности, при которых её влиянием можно пренебречь, но нельзя игнорировать при определении собственных частот балок.

Ключевые слова: *разномодульность, коэффициент разномодульности, балка, свободные колебания, собственные частоты.*

Одним из наиболее распространенных видов инженерных конструкций являются балки. Важную роль при их динамических расчетах играет спектр собственных частот свободных колебаний. Обычно при рассмотрении свободных колебаний балок их конструкционный материал считается однородным изотропным упругим телом, поведение которого описывается модулем упругости E одинаковым при растяжении и сжатии. Однако, как показывают экспериментальные исследования, модули упругости при растяжении E^+ и сжатии E^- для ряда конструкционных материалов существенно разнятся. Степень разномодульности конструкционного материала характеризуется коэффициентом разномодульности [1]

$$\mu = \frac{E^-}{E^+}.$$

Явление разномодульности в той или иной степени присуще практически всем традиционным конструкционным материалам.

Так, согласно [2], это явление установлено для многочисленных сталей и сплавов. Для них коэффициент разномодульности меньше единицы и изменяется в пределах от 0,75 до 0,97.

Существенно разномодульным материалом являются бетоны [3; 7]. Так, коэффициент разномодульности тяжелых бетонов больше единицы и изменяется в пределах от 1,07 до 1,82. В то же время коэффициент разномодульности легких бетонов может быть как больше, так и меньше единицы. Значительной степенью разномодульности обладают современные конструкционные пластмассы [4; 8].

Как показано в [5], учет разномодульности конструкционного материала может оказывать существенное влияние на жесткость стержневых конструкций, поэтому существует необходимость проведения исследований для изучения влияния разномодульности материала на собственные частоты свободных колебаний балок. Рассматриваются свободные поперечные колебания упругой балки постоянного симметричного поперечного сечения. Колебания рассматриваются без учета сил сопротивления.

Для получения дифференциального уравнения свободных колебаний балки с учетом разномодульности материала запишем дифференциальное уравнение движения элементарного участка балки как несвободной материальной точки:

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1}$$

Для нахождения производной $\frac{\partial Q}{\partial x}$ используем приближенное дифференциальное уравнение оси изогнутой балки с учетом разномодульности материала [1]:

$$D\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -M, \tag{2}$$

где D – приведенная изгибная жесткость поперечного сечения балки.

Для симметричного поперечного сечения произвольной формы приведенная изгибная жесткость определяется следующим образом:

$$D = E^- I^- + E^+ I^+.$$

Здесь величины I^- и I^+ характеризуют моменты инерции соответственно сжатой и растянутой частей поперечного сечения относительно нейтральной оси, положение которой определяется с помощью следующего уравнения:

$$E^- S^- = E^+ S^+,$$

где S^- – статический момент сжатой части поперечного сечения; S^+ – статический момент растянутой части поперечного сечения.

Продифференцировав (2) дважды по x, найдем

$$I^- \frac{\partial Q}{\partial x} = -D \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), получим дифференциальное уравнение свободных колебаний балки с учетом разномодульности материала

$$D \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

Для решения уравнения (4) используем метод Фурье, согласно которому искомое решение $y(x,t)$ можно представить в виде произведения двух функций

$$y(x,t) = X(x) \cdot T(t). \quad (5)$$

Входящая в (5) функция $X(x)$ описывает форму изгибных колебаний балки. Вторая функция $T(t)$ характеризует закон изменения формы колебаний во времени.

Подставляя (5) в (4), получим дифференциальное уравнение для отыскания функции $X(x)$

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - \zeta k^4 X = 0, \quad (6)$$

где $k^4 = \omega^2 \frac{m}{EI_z}$ – частотный коэффициент свободных колебаний балки без учета влияния разномодульности материала; ζ – коэффициент влияния разномодульности материала с учетом формы и размеров поперечного сечения балки.

Для поперечного сечения произвольной формы коэффициент ζ определяется по формуле [5]

$$\zeta = \frac{EI_z}{D}$$

и в зависимости от величины μ может принимать значения как меньше, так и больше единицы.

Функциональные зависимости коэффициентов ζ и μ для различных типов поперечных сечений получены автором представляемой работы в [5]. Так, например, для прямоугольного поперечного сечения эта зависимость описывается графиком, представленным на рисунке 1.

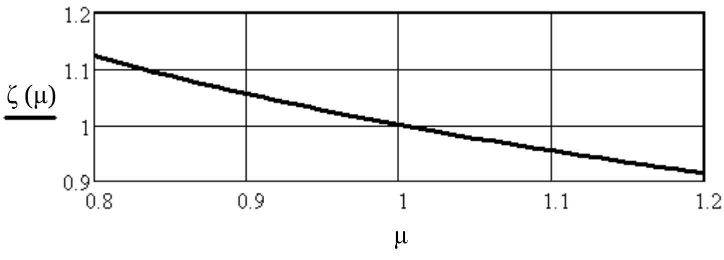

Рисунок 1. – Зависимости коэффициентов ζ и μ для прямоугольного поперечного сечения

Общее решение уравнения (6) имеет вид

$$X(x) = AS(\zeta kx) + BT(\zeta kx) + CU(\zeta kx) + DV(\zeta kx). \quad (7)$$

В уравнении (7) A, B, C, D – произвольные постоянные, зависящие от граничных условий задачи; $S(\zeta kx)$, $T(\zeta kx)$, $U(\zeta kx)$, $V(\zeta kx)$ – обобщенные функции Крылова, учитывающие влияние разномодульности материала:

$$S(\zeta kx) = \frac{1}{2}(ch\zeta kx + \cos\zeta kx),$$

$$T(\zeta kx) = \frac{1}{2}(sh\zeta kx + \sin\zeta kx),$$

$$U(\zeta kx) = \frac{1}{2}(ch\zeta kx - \cos\zeta kx),$$

$$V(\zeta kx) = \frac{1}{2}(sh\zeta kx - \sin\zeta kx).$$

Подчиняя (7) граничным условиям балки, можно получить частотное уравнение для определения собственных частот свободных колебаний с учетом разномодульности материала.

Оценим влияние разномодульности материала на спектр собственных частот свободных колебаний для балки прямоугольного поперечного сечения с шарнирным опиранием концов.

Частотное уравнение для такой балки имеет вид

$$\sin(\zeta kl) = 0.$$

Корни уравнения описываются аналитическим выражением

$$\sin(kl)_n = \frac{n\pi}{\zeta}, \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots) \tag{8}$$

и образуют спектр собственных частот рассматриваемой балки с учетом влияния разномодульности материала.

Из соотношения (8) следует, что при значениях коэффициента разномодульности материала $\mu < 1$ частотные коэффициенты будут увеличиваться, а при значениях $\mu > 1$ – уменьшаться.

Относительная погрешность определения частотного коэффициента не зависит от его номера и для рассматриваемой балки описывается графиком (рисунок 2).

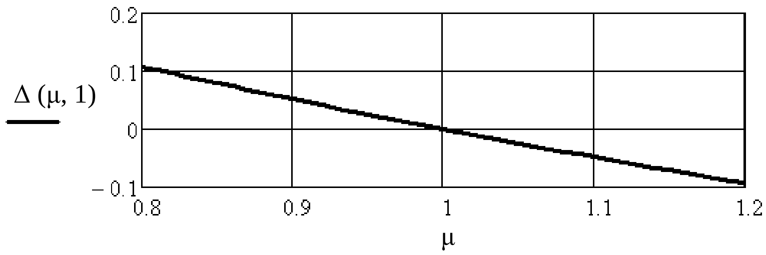

Рисунок 2. – Зависимость величины относительной погрешности определения частотного коэффициента от степени разномодульности материала балки

Таким образом, из полученного графика следует:

- если различие модулей упругости при растяжении и сжатии не превышает 10%, изменение величин частотных коэффициентов не превышает 5% и, следовательно, в этих случаях влиянием разномодульности материала можно пренебрегать при определении собственных частот свободных колебаний балок;

- в остальных случаях неучет разномодульности конструкционного материала может приводить к ошибкам, величина которых может достигать 10%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян, С.А. Разномодульная теория упругости / С.А. Амбарцумян. – М. : Физматгиз, 1982. – 317 с.
2. Иванов, Г.П. Исследование несовершенной упругости металлов : автореф. дис. … канд. техн. наук / Г.П. Иванов. – Минск, 1973. – 18 с.
3. Авхимков, А.П. Об уравнениях обобщенного закона упругости материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию и некоторых их приложениях : автореф. дис. … канд. техн. наук / А.П. Авхимков. – М., 1975. – 23 с.
4. Одинокова, О.А. Расчет на прочность элементов конструкций с учетом разномодульности и ползучести материалов / О.А. Одинокова. – Хабаровск : Изд-во ТОГУ, 2015. – 101 с.
5. Турищев, Л.С. К вопросу о расчете стержневых конструкций с учетом влияния разномодульности материала / Л.С. Турищев // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия В, Промышленность. Прикладные науки. – 2010. – № 2. – С. 63–67.

Поступила 04.02.2019

ON THE IMPACT MULTIMODULE OF THE MATERIAL ON EIGENFREQUENCIES OF BEAMS

L. TOURISCHEV

The free oscillations of an elastic beam of a constant symmetric cross-section are considered taking into account the multimodule of the material. The differential equation of beam oscillations is obtained taking into account the multi-modularity of its material. Analyzes the impact of differences of modulus of elasticity in tension and compression of the material of the beam at its own frequency. It is established at what values of the coefficient of multimodule its influence can and can not be neglected in determining the eigenfrequencies of the beams.

Keywords: *roznorodnosci, the coefficient of roznorodnosci, beam, free vibrations, natural frequencies.*