УДК 534.121.1

К ВОПРОСУ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И СОБСТВЕННЫХ ФОРМ СВОБОДНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК

канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ
(Полоцкий государственный университет)

Задача отыскания собственных частот и собственных форм свободных колебаний свободной прямоугольной изотропной пластинки является одной из трудных задач и имеет как теоретическое, так и прикладное значение. Математически задача заключается в отыскании собственных чисел и собственных функций уравнения свободных колебаний пластинки, решение которого должно подчиняться только динамическим граничным условиям. Имеющие большое распространение вариационные методы позволяют для такой задачи определять практически только низшие собственные частоты и соответствующие им собственные формы свободных колебаний. В связи с этим представляет интерес метод Эдмана, который позволяет для рассматриваемой задачи сравнительно просто вычислять собственные числа и собственные функции любого номера. Однако в методе Эдмана встречаются скрытые особенности, не исследованные автором метода. В данной работе приводятся результаты исследования этих особенностей и обсуждаются пути их учета при численной реализации метода.

Важной задачей, имеющей теоретическое и прикладное значение, является задача получения собственных частот и собственных форм свободных колебаний прямоугольной изотропной пластинки с произвольной схемой опирания. Математически задача заключается в нахождении собственных чисел и собственных функций уравнения

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-k^4 w=0. \tag{1}$$

Решение этого уравнения осуществляется при некоторых граничных условиях

$$u_i(w)=0, \quad (i=1,\dots,n). \tag{2}$$

Известно, что задача (1), (2) является наиболее трудной в случае свободной прямоугольной пластинки. Трудность решения такой задачи заключается в необходимости подчинения решения уравнения (1) только динамическим граничным условиям следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=0,a}=0;\\
&\left|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=0,b}=0;\\
&\left|\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right|_{x=0,a}=0;\\
&\left|\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right|_{y=0,b}=0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Наибольшее распространение для решения задачи (1), (3) получили вариационные методы. Однако следует заметить, что, несмотря на их универсальность, они удобны только для определения низших собственных частот. В связи с этим представляет интерес вычисление собственных частот и собственных форм свободных колебаний свободной прямоугольной пластинки методом Эдмана [1]. Это объясняется тем, что вычисление собственной частоты любого номера не связано с составлением и раскрытием определителя, а построение соответствующей ей собственной формы производится по относительно несложной одночленной формуле. Поэтому метод Эдмана сравнительно просто численно реализуется с помощью ЭВМ.

Суть метода Эдмана заключается в следующем [1]. Решение дифференциального уравнения (1) ищется в виде

$$w \approx c u(\lambda; x) v(\mu; y), \tag{4}$$

где c – произвольная постоянная; u, v – некоторые неизвестные функции от x и y, соответственно четыре раза непрерывно дифференцируемые и содержащие соответственно неизвестные параметры λ и μ.

Подставляя выражение (4) в уравнение (1) и применяя формулу Галеркина, после всех преобразований приходим к следующему выражению для нахождения собственных чисел:

$$k^4 = B_\lambda + \frac{2}{\varepsilon^2} A_\lambda A_\mu + \frac{1}{\varepsilon^4} B_\mu, \tag{5}$$

$$A_\lambda = \frac{\int u'' u dx}{\int u^2 dx}; \quad B_\lambda = \frac{\int u^{IV} u dx}{\int u^2 dx};$$

$$A_\mu = \frac{\int v'' v dy}{\int v^2 dy}; \quad B_\mu = \frac{\int v^{IV} v dy}{\int v^2 dy};$$

$$\varepsilon = \frac{b}{a}.$$

Следовательно, если входящие в условия (3) функции u и v будут известны, то по формуле (5) можно определять для уравнения (1) собственные числа любого номера.

Для нахождения функций u и v выражение (4) подставляется в уравнение (1) и, считая поочередно функции u и v неизменными, дважды применяется формула Галеркина. После всех преобразований получаются два обыкновенных однородных дифференциальных уравнения 4-го порядка:

$$u^{IV} + 2A_\mu u'' + \left(B_\mu - \frac{1}{a^4} k^4 \right) u = 0; \tag{6}$$

$$v^{IV} + 2A_\lambda v'' + \left(B_\lambda - \frac{1}{a^4} k^4 \right) v = 0. \tag{7}$$

Решение уравнений (6) и (7) ищется в виде

$$u(x) = a_1 ch\lambda_1 x + a_2 sh\lambda_1 x + a_3 ch\lambda_2 x + a_4 sh\lambda_2 x; \tag{8}$$

$$v(y) = b_1 ch\mu_1 y + b_2 sh\mu_1 y + b_3 ch\mu_2 y + b_4 sh\mu_2 y, \tag{9}$$

где

$$a_i,\ b_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

есть произвольные постоянные, определяемые из граничных условий (3).

Таким образом, каждая из функций u и v удовлетворяет граничным условиям только на двух противоположных сторонах.

Выражения (8) и (9) с учетом полученных значений a_i, b_i принимают представленный ниже вид.

Симметричные функции u_m и v_n ($m, n = 2, 4, 6 \ldots$):

$$u_m = \frac{ch\bar{\lambda}_1 \xi}{ch\bar{\lambda}_1/2} - \gamma_\lambda \frac{ch\bar{\lambda}_2 \xi}{ch\bar{\lambda}_2/2}; \tag{10}$$

$$v_n = \frac{ch\bar{\mu}_1 \eta}{ch\bar{\mu}_1/2} - \gamma_\mu \frac{ch\bar{\mu}_2 \eta}{ch\bar{\mu}_2/2}, \tag{11}$$

где

$$\gamma_\lambda = \frac{2\bar{\lambda}_1^2 - \nu\left(\bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2\right)}{2\bar{\lambda}_2^2 - \nu\left(\bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2\right)};$$

$$\gamma_\mu = \frac{2\bar{\mu}_1^2 - \nu\left(\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_2^2\right)}{2\bar{\mu}_2^2 - \nu\left(\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_2^2\right)};$$

$$\bar{\lambda}_1 = \lambda_1 a; \quad \bar{\lambda}_2 = \lambda_2 a;$$

$$\bar{\mu}_1 = \mu_1 b; \quad \bar{\mu}_2 = \mu_2 b;$$

$$\xi = \frac{x}{a}; \quad \eta = \frac{y}{b}.$$

Входящие в выражения (10) и (11) аргументы λ_i и μ_i (i = 1, 2) определяются из аргументных уравнений:

$$th\frac{\bar{\lambda}_1}{2}=\frac{\bar{\lambda}_2}{\bar{\lambda}_1}\gamma_\lambda^2+th\frac{\bar{\lambda}_2}{2}; \tag{12}$$

$$th\frac{\bar{\mu}_1}{2}=\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_1}\gamma_\mu^2+th\frac{\bar{\mu}_2}{2}. \tag{13}$$

Антисимметричные функции u_m и v_n (m, n = 1, 3, 5 …):

$$u_m=\frac{sh\bar{\lambda}_1\xi}{sh\bar{\lambda}_1/2}-\gamma_\lambda\frac{sh\bar{\lambda}_2\xi}{sh\bar{\lambda}_2/2}; \tag{14}$$

$$v_n=\frac{sh\bar{\mu}_1\eta}{sh\bar{\mu}_1/2}-\gamma_\mu\frac{sh\bar{\mu}_2\eta}{sh\bar{\mu}_2/2}. \tag{15}$$

Соответствующие им аргументные уравнения имеют следующий вид:

$$cth\frac{\bar{\lambda}_1}{2}=\frac{\bar{\lambda}_2}{\bar{\lambda}_1}\gamma_\lambda^2+cth\frac{\bar{\lambda}_2}{2}; \tag{16}$$

$$cth\frac{\bar{\mu}_1}{2}=\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_1}\gamma_\mu^2+cth\frac{\bar{\mu}_2}{2}. \tag{17}$$

В формулах (10), (11), (14), (16) m и n обозначают число узловых точек. При заданных m и n решение аргументных уравнений (12), (13), (16) и (17) осуществляется следующим образом. Первоначальные значения аргументов $\bar{\lambda}_2$, $\bar{\mu}_2$ задаются произвольно из интервалов

$$(m-0,5)\pi<\bar{\lambda}_2<m\pi; \tag{18}$$

$$(n-0,5)\pi<\bar{\mu}_2<n\pi. \tag{19}$$

Значения соответствующих аргументов $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\mu}_1$ определяются решением уравнений (12), (13) при (m, n = 2, 4, 6 …) и решением уравнений (16), (17) при (m, n = 1, 3, 5 …).

Последующее решение задачи заключается в поэтапном «исправлении» полученных функций u и v последовательным подчинением их дополнительным граничным условиям:

$$\psi_1=F_\lambda+\frac{(1-\nu)}{\varepsilon^2}\left(A_\lambda+G_\lambda\right)\left(A_\mu-G_\mu\right)=0; \tag{20}$$

$$\psi_2=F_\mu+\frac{(1-\nu)}{\varepsilon^2}\left(A_\mu+G_\mu\right)\left(A_\lambda-G_\lambda\right)=0, \tag{21}$$

где

$$F_\lambda=\left.\frac{u'''u-u''u'}{\int u^2dx}\right|_{-0,5a}^{+0,5a};$$

$$F_\mu=\left.\frac{v'''v-v''v'}{\int v^2dx}\right|_{-0,5b}^{+0,5b};$$

$$G_\lambda=-A_\lambda+\left.\frac{u'u}{\int u^2dx}\right|_{-0,5a}^{+0,5a};$$

$$G_\mu=-A_\mu+\left.\frac{v'v}{\int v^2dx}\right|_{-0,5b}^{+0,5b}.$$

Граничные условия (20), (21) выражают собой равенство нулю полной работы внутренних сил на каждой грани пластинки.

Сохраняя неизменными параметры $\overline{\lambda}_1,\ \overline{\lambda}_2,$ согласно выражениям (13), (17), (19) вычисляем параметры $\overline{\mu}_1,\ \overline{\mu}_2,$ удовлетворяющие условию (20). Тем самым подбирается соответствующая функция *v*, удовлетворяющая первому дополнительному граничному условию.

Сохраняя неизменными вычисленные параметры $\overline{\mu}_1,\ \overline{\mu}_2,$ согласно выражениям (12), (16), (18) определяем параметры, удовлетворяющие условию (21). Тем самым подбирается соответствующая функция *u*, удовлетворяющая второму дополнительному граничному условию.

Дальше вычислительная процедура повторяется до получения решения требуемой точности. Достоинством метода является то, что при решении инженерных задач он позволяет с удовлетворительной точностью ограничиться одним шагом.

Однако при численной реализации метода Эдмана согласно описанному алгоритму выявляются скрытые особенности, не исследованные автором [1]. Их суть заключается в следующем.

При решении аргументного уравнения (12), соответствующего четным номерам *m*, относительно $\overline{\lambda}_1$ в зависимости от значений $\overline{\lambda}_2$ могут возникать три качественно различные ситуации. Внутри интервала (18) существует особое значение $\overline{\lambda}_2,$ которое назовем критическим и обозначим $\overline{\lambda}_{2кр}$.

Если $\overline{\lambda}_2$ принадлежит интервалу

$$(m-0,5)\pi < \overline{\lambda}_2 < \overline{\lambda}_{2кр},$$

уравнение (12) имеет три корня $\overline{\lambda}_1^1,\ \overline{\lambda}_1^2,\ \overline{\lambda}_1^3.$

Если $\overline{\lambda}_2$ принимает значение

$$\overline{\lambda}_2 = \overline{\lambda}_{2кр},$$

уравнение (12) имеет два корня, и один из них кратный.

Если $\overline{\lambda}_2$ принадлежит интервалу

$$\overline{\lambda}_{2кр} < \overline{\lambda}_2 < m\pi,$$

уравнение (12) имеет один корень $\overline{\lambda}_1^1.$

Во всех трех случаях первый корень не удовлетворяет физическому смыслу задачи.

При решении аргументного уравнения (16), соответствующего нечетным номерам *m*, относительно $\overline{\lambda}_1$ в зависимости от значений $\overline{\lambda}_2$ могут возникать следующие качественно различные ситуации.

Если $\overline{\lambda}_2$ принадлежит интервалу

$$(m-0,5)\pi < \overline{\lambda}_2 < \overline{\lambda}_{2кр},$$

уравнение (16) имеет три корня $\overline{\lambda}_1^1,\ \overline{\lambda}_1^2.$

Если $\overline{\lambda}_2$ принимает значение

$$\overline{\lambda}_2 = \overline{\lambda}_{2кр},$$

уравнение (16) имеет один кратный корень.

Если $\overline{\lambda}_2$ принадлежит интервалу

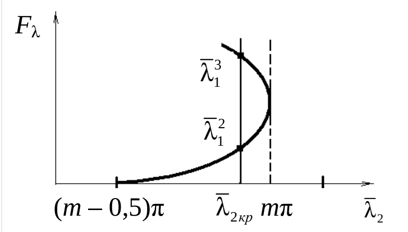
$$\overline{\lambda}_{2кр} < \overline{\lambda}_2 < m\pi,$$

уравнение (16) не имеет корней.

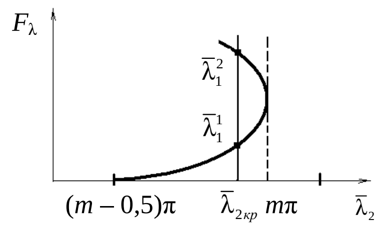
Выявленные особенности относительно числа решений аргументных уравнений (12), (16) необходимо учитывать при удовлетворении приближенному граничному условию (20). При значениях $\overline{\lambda}_2,$ принадлежащих интервалу (18), в граничном условии (20) первое слагаемое положительное, а второе – отрицательное. Поэтому удовлетворение условия (20) возможно, если равны модули этих слагаемых.

При вычислении значений функции F_{λ}, являющейся первым слагаемым в левой части условия (20), необходимо учитывать, что эта функция двузначная и имеет вертикальную касательную, если $\overline{\lambda}_2 = \overline{\lambda}_{2кр}$, о чем свидетельствует рисунок 1.

Для четных номеров *m* при вычислении значений функции F_λ, принадлежащих нижней ветви, берется второй корень аргументного уравнения (12), а при вычислении значений, принадлежащих верхней ветви, – третий корень (рис. 1, *а*).



а)



б)

Рис. 1. Особенности вычисления функции F_λ

Для нечетных номеров *m* при вычислении значений функции F_λ, принадлежащих нижней ветви, берется первый корень аргументного уравнения (16), а при вычислении значений, принадлежащих верхней ветви, – второй корень (рис. 1, б). Поэтому для удовлетворения граничному условию (20) с учетом особенностей поведения функции F_λ первоначально аргумент $\bar{\lambda}_2$ нужно увеличивать до значения $\bar{\lambda}_{2кр}$, а затем уменьшать (рис. 2).

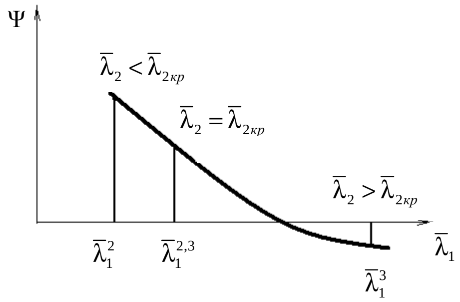


Рис. 2. Особенности вычисления функции Ψ

Таким образом, все вышеизложенное в отношении аргументов $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$ и граничного условия (20) справедливо для аргументов $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$ и граничного условия (21).

ЛИТЕРАТУРА

1. Odman, S.T.A. Studies of Coundary value problems / S.T.A. Odman. Part II. Characteristic functions of rectangular plates. Sv. forsk. inst. for com. ach.b Bet. – Stockholm, 1955. – 283 p.

Поступила 18.12.2014

THE QUESTION OF CALCULATING EIGENFREQUENCIES AND MODES OF FREE RECTANGULAR PLATES

L. TURISHCHEV

The problem of determining the natural frequencies and natural modes of free oscillations of the free rectangular isotropic plate is one of the difficult tasks and has both theoretical and practical importance. Mathematically, the problem is to find the eigenvalues and eigenfunctions of the free oscillations of the plate, whose decision shall be subject only to the dynamic boundary conditions. Having widespread variational methods allow for this to determine practically only the lowest natural frequencies and the corresponding own forms of free oscillations. In this connection it is interesting to Edman method, which allows for this problem is relatively easy to calculate the eigenvalues and eigenfunctions of any room. However, in the method of Edman found hidden features not examined by the author of the method. The article presents the results of a study of these issues and discuss ways to incorporate them into the numerical implementation of the method.