

УДК 621.926.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕМЕШИВАНИЯ СУХИХ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ В ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩЕМ РОТОРНО-ЦЕНТРОБЕЖНОМ СМЕСИТЕЛЕ

канд. техн. наук, доц. А.А. ГАРАБАЖИУ

(Белорусский государственный технологический университет, Минск)

Определение оптимальных конструктивно-технологических параметров принципиально нового энергосберегающего роторно-центробежного смесителя (например, угла наклона разгонных лопаток, их профиля и т.д.) предусматривает предварительное математическое моделирование процесса перемешивания в нем сухих сыпучих материалов. Представлена математическая модель движения частиц основного компонента смеси в межлопатном пространстве ротора и в кольцевом зазоре между выходной кромкой лопаток и стенкой цилиндрической обечайки смесителя. Адекватность разработанной математической модели подтверждена при помощи аэродинамического расчета смесителя в программной среде COSMOS Flo Works.

Введение. В настоящее время процесс приготовления однородных по составу смесей порошкообразных и зернистых материалов применяется во многих отраслях промышленности (химической, фармацевтической, пищевой, строительной, комбикормовой и т. д.). В технологических процессах таких производств смесительные аппараты занимают одно из наиболее ответственных мест. Во многих случаях процесс смешения является подчиненным, но, тем не менее, имеет большое значение для основных технологических процессов и, в конечном счете, часто определяющим качество готовой продукции. На современном этапе интенсификация процессов перемешивания сухих сыпучих материалов при снижении их энергоемкости является актуальной задачей для большинства вышеперечисленных производств Республики Беларусь. В большинстве случаев данная задача решается путем реконструкции или модернизации существующего смесительного оборудования или же путем создания и внедрения новых высокоэффективных энергосберегающих машин и аппаратов.

На основании всестороннего анализа современной научно-технической и патентной литературы на кафедре «Машины и аппараты химических и силикатных производств» Белорусского государственного технологического университета была разработана новая энергосберегающая конструкция роторно-центробежного смесителя для перемешивания сухих сыпучих материалов. Описание конструкции и принципа действия данного аппарата было подробно изложено в работах [1; 2]. Для определения оптимальных конструктивно-технологических параметров роторно-центробежного смесителя (например, угла наклона лопаток, их профиля и т.д.) необходимо провести математическое моделирование процесса перемешивания сухих сыпучих материалов в данном аппарате. При этом большой практический интерес представляет характер движения частиц основного компонента смеси в межлопатном пространстве ротора и в кольцевом зазоре между выходной кромкой лопаток и стенкой цилиндрической обечайки смесителя.

Расчет оптимального характера движения одиночной частицы материала в межлопатном пространстве смесителя

Рассмотрим движение одиночной частицы материала по наклонной разгонной лопатке смесителя [3]. Для этого воспользуемся схемой, представленной на рисунке 1.

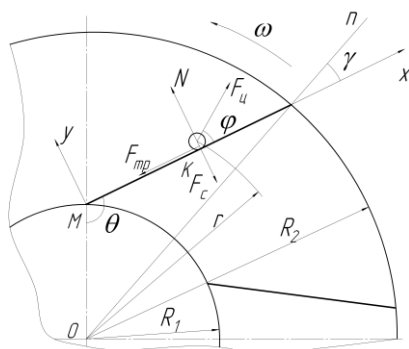


Рис. 1. Движение частицы по наклонной лопатке смесителя

Пусть частица находится в произвольной точке (К) на поверхности лопатки (см. рис. 1). На нее действуют: центробежная сила инерции F_u , кориолисова сила инерции F_c , сила трения частицы о поверх-

ность лопатки F_{mp} и реакция опорной поверхности N . С учетом сил, действующих на движущуюся частицу, были приняты следующие допущения. Пренебрегали силой аэродинамического сопротивления вследствие ее малой величины по сравнению с массовыми силами. Так как величина силы тяжести при рабочих частотах вращения ротора смесителя на порядок меньше величины инерционных сил, то силу трения частицы о диск ротора также не учитывали.

С учетом сказанного выше система уравнений движения частицы по наклонной лопатке будет представлена в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_u \cdot \cos \varphi - F_{mp}; \\ m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_u \cdot \sin \varphi + N - F_c, \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где y – текущая ордината частицы, м; r – текущий радиус движения частицы материала, м.

При этом $F_u = m \cdot \omega^2 \cdot r$, Н; $F_{mp} = f \cdot N$, Н; $F_c = 2\omega(dx/dt)$, Н.

Величина угла φ определяется по геометрическим соотношениям при известных углах γ и θ (см. рис. 1), характеризующих наклон лопатки относительно радиального направления.

Так как частица движется вдоль лопатки, то $m \cdot (d^2 y / dt^2) = 0$. Следовательно, опорная реакция лопатки согласно второму выражению системы уравнений (1) будет равна

$$N = 2m\omega \frac{dx}{dt} - m\omega^2 \cdot R_1 \cdot \sin \theta, \quad (2)$$

где R_1 – внутренний радиус ротора по концам лопаток, м; $R_1 = 0,12$ м.

С учетом выражения (1) уравнение движения частицы примет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \omega^2 \sqrt{R_1^2 \cdot \cos^2 \theta + x^2 - 2R_1 \cdot x \cos \theta} - f \left(2\omega \frac{dx}{dt} - \omega^2 R_1 \cdot \sin \theta \right), \quad (3)$$

где $dx/dt = V_r$ – радиальная скорость движения частицы материала в межлопастном пространстве смесителя; t – время движения частицы материала в межлопастном пространстве, с; θ – угол наклона лопатки (см. рис. 1); f – коэффициент трения материала частицы о стенку смесителя.

Тангенциальная скорость (V_τ) движения частицы материала в межлопастном пространстве смесителя определяется по формуле

$$V_\tau = r \cdot \omega. \quad (4)$$

Тогда абсолютная скорость (V_a) движения частицы материала в межлопастном пространстве смесителя и на выходе из него будет равна

$$V_a = \sqrt{V_\tau^2 + V_r^2}. \quad (5)$$

Чтобы частицы материала приближались к стенке цилиндрической обечайки смесителя по касательной траектории, угол γ (см. рис. 1) должен быть минимальным.

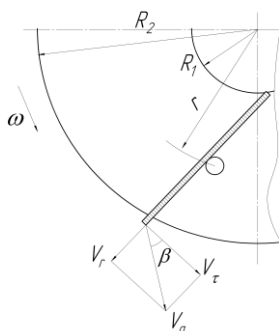


Рис. 2. Треугольник скоростей движущейся частицы материала при ее вылете из ротора смесителя

Треугольник скоростей движущейся частицы материала при ее вылете из ротора смесителя представлен на рисунке 2.

Направление вектора полной скорости движения частицы материала на выходе из ротора смесителя определяется углом вылета β [4]:

$$\beta = \arctg \frac{V_r}{V_\tau}. \quad (6)$$

Расчет тангенциальной, радиальной и абсолютной скоростей движения одиночной частицы материала в межлопастном пространстве и угла вылета β осуществлялся численными методами при помощи ЭВМ.

Результаты расчета представлены на рисунке 3, из которого видно, что с увеличением текущего радиуса лопатки скорость движения частицы материала также возрастает.

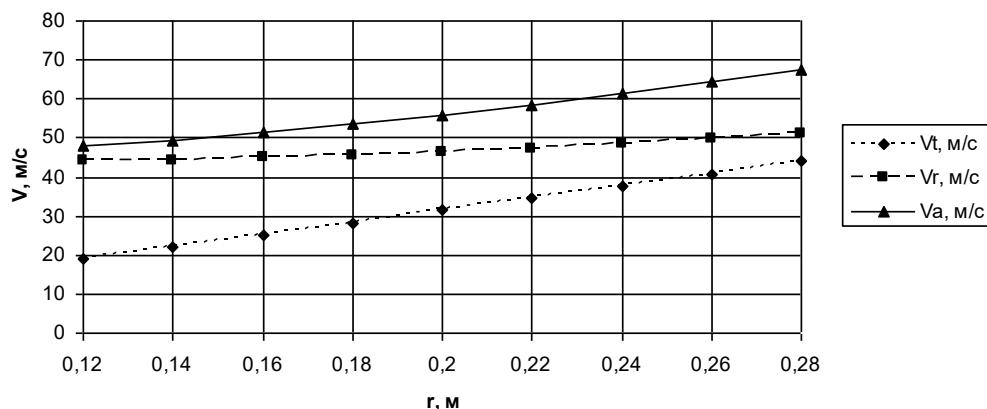


Рис. 3. Зависимость тангенциальной, радиальной и абсолютной скоростей движения частицы материала в межлопастном пространстве смесителя от текущего радиуса лопатки (при $n = 1500$ об/мин)

Расчет скорости движения одиночной частицы материала в кольцевом зазоре между выходной кромкой лопаток и цилиндрической стенкой смесителя

Треугольники скоростей воздушного потока и одиночной частицы материала, движущихся в кольцевом зазоре, представлены на рисунке 4.

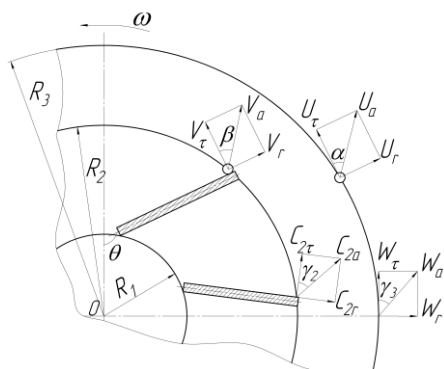


Рис. 4. Треугольники скоростей воздушного потока и одиночной частицы материала, движущихся в кольцевом зазоре ротора смесителя

Расчет ведется по методике [4].

Тангенциальная скорость воздуха ($C_{2\tau}$) на выходе из ротора смесителя направлена перпендикулярно радиусу вращения колеса и определяется по формуле

$$C_{2\tau} = R_2 \cdot \omega, \quad (7)$$

где R_2 – наружный радиус лопаток роторного колеса, м; $R_2 = 0,28$ м.

Радиальная скорость воздуха (C_{2r}) на выходе из ротора смесителя направлена по радиусу колеса от центра, а ее значение определяется по формуле

$$C_{2r} = \frac{G_{\theta}}{(2\pi R_2 - zs) \cdot h}. \quad (8)$$

Абсолютная скорость воздуха (C_{2a}) на выходе из ротора смесителя равна

$$C_{2a} = \sqrt{C_{2\tau}^2 + C_{2r}^2}. \quad (9)$$

Направление вектора абсолютной скорости воздушного потока (C_{2a}) на выходе его из ротора смесителя определяется углом γ_2 (см. рис. 4)

$$\gamma_2 = \arctg \frac{C_{2r}}{C_{2\tau}}. \quad (10)$$

Расчет абсолютной скорости воздушного потока на выходе из ротора смесителя и угла γ_2 осуществлялся при помощи ЭВМ.

Рассмотрим теперь движение воздушного потока в кольцевом зазоре роторно-центробежного смесителя. Движение воздушного потока в кольцевом зазоре смесителя носит сложный неустановившийся характер и может считаться турбулентным. Как известно, характерной особенностью турбулентного движения потока является неупорядоченное изменение скорости в каждой его точке по значению и направлению. Поэтому воспользуемся средним значением радиальной и тангенциальной скоростей движения воздушного потока (W_r^{cp}) и (W_τ^{cp}).

Тангенциальная скорость движения воздушного потока (W_τ) в кольцевом зазоре с учетом постоянства момента скорости (поскольку влияние сил трения о стенки не учитывается) определяется по формуле

$$W_\tau = C_{2\tau} \frac{R_2}{R}, \quad (11)$$

где R – текущий радиус движения частицы материала и воздушного потока в кольцевом зазоре смесителя ($R = R_2 \dots R_3$), м; R_3 – радиус цилиндрической обечайки смесителя, м; $R_3 = 0,3$ м.

С учетом выражения (7) уравнение (11) примет вид:

$$W_\tau = \omega \frac{R_2^2}{R}. \quad (12)$$

Радиальная скорость движения воздуха (W_r) в кольцевом зазоре определяется из условия неразрывности воздушного потока на выходе из ротора смесителя:

$$W_r = C_{2r} \frac{R_2}{R}, \quad (13)$$

или

$$W_r = \frac{G_B \cdot R_2}{(2\pi \cdot R_2 - z \cdot s) \cdot h \cdot R}. \quad (14)$$

Полная скорость воздушного потока (W_a) определяется по формуле

$$W_a = C_{2a} \frac{R_2}{R}. \quad (15)$$

Направление вектора абсолютной скорости воздушного потока (W_a) при его движении в кольцевом зазоре смесителя определяется углом γ_3 (см. рис. 4):

$$\gamma_3 = \arctg \frac{W_r}{W_\tau}. \quad (16)$$

Средние значения радиальной и тангенциальной скоростей движения воздушного потока (W_r^{cp}) и (W_τ^{cp}) при его движении в кольцевом зазоре можно вычислить как среднее арифметическое по формуле

$$W_{\tau(r)}^{cp} = \frac{\sum_{i=1}^m W_{\tau(r_i)}}{m}, \quad (17)$$

где m – количество численных значений тангенциальной и радиальной скорости воздуха при различных значениях текущего радиуса R .

Расчет абсолютной скорости воздушного потока в кольцевом зазоре и угла γ_3 осуществлялся при помощи ЭВМ.

Рассмотрим теперь движение одиночной частицы материала в кольцевом зазоре роторно-центробежного смесителя [5].

На одиночную частицу материала (рис. 5), движущуюся во взвешенном состоянии в кольцевом зазоре смесителя, действует целый комплекс внешних сил. В первую очередь это такие силы, как: движущ-

щая сила инерции (F_u), сила аэродинамического сопротивления воздуха (F_e), сила Магнуса, подъемная сила, сила Архимеда, сила турбулентного массопереноса.

Кроме вышеперечисленных сил определенное влияние оказывают также сила тяжести (G), электростатические силы, силы молекулярного взаимодействия. Тогда в общем виде уравнение движения частицы материала в кольцевом зазоре смесителя может быть представлено следующим образом:

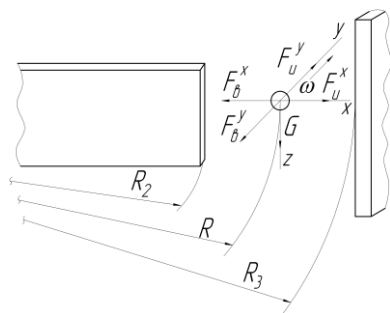


Рис. 5. Силы, действующие на одиночную частицу при ее движении в кольцевом зазоре ротора смесителя

$$m \frac{d\bar{U}}{d\tau} = \sum_{i=1}^q \bar{F}_i, \quad (18)$$

где $\bar{U}$ – вектор скорости движения частицы в кольцевом зазоре, м/с; τ – время движения частицы в кольцевом зазоре от внешней кромки рабочих лопастей до стенки цилиндрической обечайки смесителя, с; q – количество внешних сил, действующих на частицу материала при ее движении в кольцевом зазоре, шт.

Основное влияние на движение частицы материала в зазоре оказывает сила аэродинамического сопротивления воздуха (F_e), определяемая по формуле

$$\bar{F}_e = \frac{1}{8} \cdot k_\phi \cdot c \cdot \rho_e \cdot \pi \cdot d^2 \cdot |\bar{W} - \bar{U}| \cdot (\bar{W} - \bar{U}), \quad (19)$$

где $\bar{W}$ – вектор скорости движения воздушного потока в кольцевом зазоре, м/с.

Коэффициент аэродинамического сопротивления (c) определяем по формуле

$$c = \frac{24}{Re} + \frac{4}{\sqrt[3]{Re}} = \frac{24}{Re} \cdot (10,17 \cdot Re^{2/3}). \quad (20)$$

Критерий Рейнольдса (Re) в данном случае определяется как

$$Re = \frac{d \cdot |\bar{W} - \bar{U}|}{\nu_e} \cdot (\bar{W} - \bar{U}). \quad (21)$$

Ввиду того, что диаметр (d) частиц исходного материала достаточно мал ($d < 5 \cdot 10^{-3}$ м), а $\rho_e \ll \rho_m$, силой тяжести (G) и силой Архимеда при рассмотрении движения частицы в воздушном потоке можно пренебречь.

Для частиц материала диаметром $d = 10^{-4} \dots 10^{-2}$ м сила Магнуса и подъемная сила на несколько порядков меньше силы (F_e), поэтому данными силами можно также пренебречь.

Электростатическую силу, силу турбулентного массопереноса и силу молекулярного взаимодействия наиболее целесообразно учитывать для частиц материала, движущихся в воздушном потоке, диаметром $d < 10^{-6}$ м.

Таким образом, ограничившись учетом только движущей силы инерции (F_u) и силы аэродинамического сопротивления воздуха (F_e), после проекции их на горизонтальную плоскость XY (см. рис. 5) получим следующую систему дифференциальных уравнений движения одиночной частицы материала в кольцевом зазоре в цилиндрической системе координат:

$$\begin{cases} m \cdot \left(\frac{dU_r}{d\tau} - \frac{U_\phi^2}{R} \right) = F_e^x; \\ m \cdot \left(\frac{dU_\phi}{d\tau} - \frac{U_r \cdot U_\phi}{R} \right) = F_e^y; \\ \frac{dR}{d\tau} = U_r; \\ \frac{d\phi}{d\tau} = U_\phi. \end{cases} \quad (22)$$

Подставляя в систему дифференциальных уравнений (22) выражения (19) – (21) и выполнив соответствующие преобразования, окончательно получим:

$$\begin{cases} \frac{dU_r}{d\tau} = 18 \frac{k}{d^2} \cdot \frac{\rho_g}{\rho_m} (W_r^{cp} - U_r) \cdot \left[1 + 0,17 \cdot \left(\frac{d |W_r^{cp} - U_r|}{v_g} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \cdot v_g + \frac{U_r^2}{R}; \\ \frac{dU_\tau}{d\tau} = 18 \frac{k}{d^2} \cdot \frac{\rho_g}{\rho_m} (W_\tau^{cp} - U_\tau) \cdot \left[1 + 0,17 \cdot \left(\frac{d |W_\tau^{cp} - U_\tau|}{v_g} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \cdot v_g + \frac{U_\tau \cdot U_r}{R}; \\ \frac{dR}{d\tau} = U_r; \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{U_\tau}{R}, \end{cases} \quad (23)$$

где U_r (U_τ) – относительная (переносная) скорость движения частицы материала в кольцевом зазоре смесителя, м/с; W_τ^{cp} (W_τ^{cp}) – среднее значение относительной (переносной) скорости движения воздушного потока в кольцевом зазоре мельницы, м/с; R – текущий радиус движения частицы в кольцевом зазоре ($R = R_2 \dots R_3$), м; φ – угол поворота рабочего колеса, рад.

Получить аналитическое решение системы дифференциальных уравнений (23) с учетом формул (12), (14) и (17) не представляется возможным. Поэтому расчет системы уравнений (23) осуществлялся с использованием ЭВМ. При этом за начальные условия принимаем следующие: $\tau = 0$; $\varphi = 0$; $R = R_2$; $U_r = V_r$ и $U_\tau = V_\tau$. При этом абсолютная скорость движения одиночной частицы материала (U_a) в кольцевом зазоре определяется по формуле

$$U_a = \sqrt{U_\tau^2 + U_r^2}. \quad (24)$$

Тангенциальная (U_τ) и радиальная (U_r) скорости движения частицы материала в кольцевом зазоре определяются из системы уравнений (23).

Направление вектора абсолютной скорости движения одиночной частицы материала в кольцевом зазоре смесителя определяется углом атаки α (см. рис. 4):

$$\alpha = \arctg \frac{U_r}{U_\tau}. \quad (25)$$

Расчет тангенциальной, радиальной и абсолютной скоростей движения частицы материала в кольцевом зазоре и угла атаки α осуществлялся численными методами с использованием ЭВМ.

Результаты расчета представлены на рисунках 6 – 9.

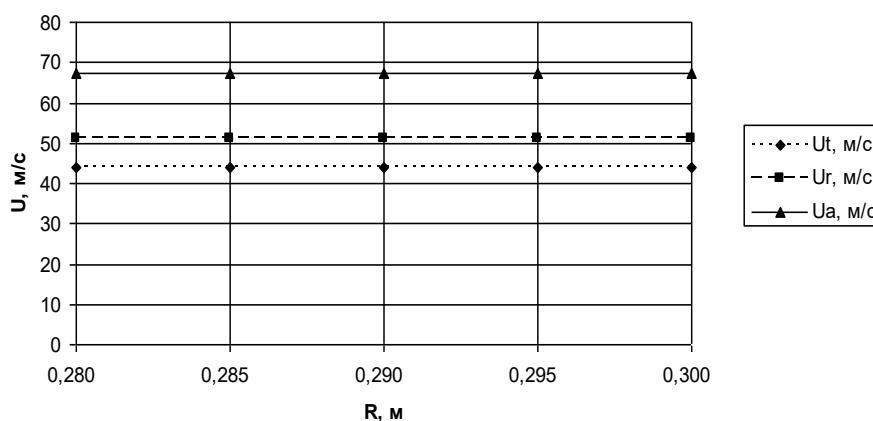


Рис. 6. Зависимость тангенциальной, радиальной и абсолютной скоростей движения частицы материала в кольцевом зазоре смесителя от текущего радиуса зазора

Как видно из рисунка 6, с увеличением текущего радиуса кольцевого зазора скорость движения частицы материала изменяется незначительно, что можно объяснить небольшой величиной самого кольцевого зазора ($R = 0,02$ м) и высокой скоростью движения частицы материала.

На рисунке 7 изображена зависимость абсолютной скорости движения частицы материала от текущего радиуса смесителя при различных частотах вращения ротора. Как показали результаты расчетов, с ростом частоты вращения ротора смесителя скорость движения частицы материала в рабочей камере также возрастает.

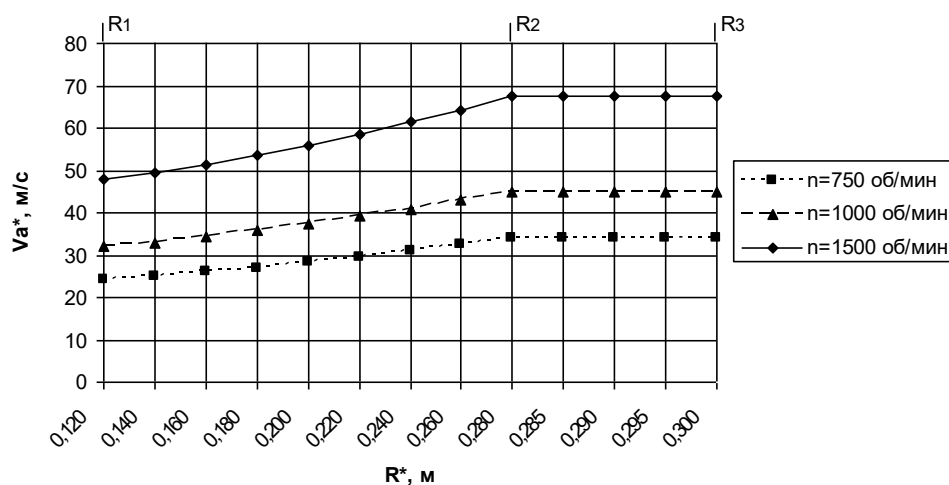


Рис. 7. Зависимость абсолютной скорости движения частицы материала в межлопастном пространстве и в кольцевом зазоре смесителя от его текущего радиуса

На рисунке 8 представлена траектория движения частицы материала в кольцевом зазоре смесителя при различных частотах вращения ротора.

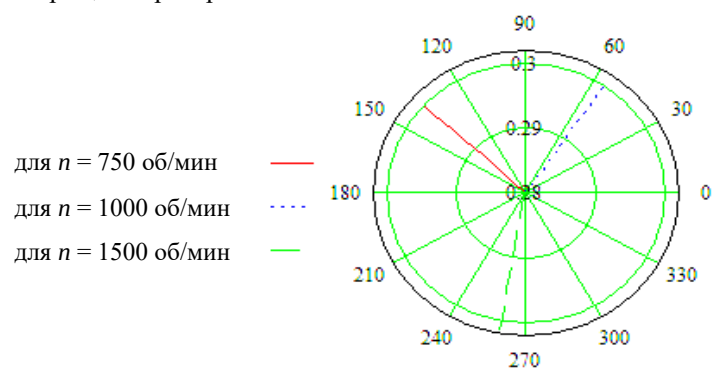


Рис. 8. Траектория движения частицы материала в кольцевом зазоре смесителя

Согласно рисунку 9, с увеличением угла наклона разгонной лопатки смесителя угол атаки частицы материала уменьшается. Как показали теоретические исследования, характер данной кривой никак не зависит от частоты вращения ротора смесителя. Минимальный угол атаки частицы материала наблюдается при угле наклона лопаток 182°.

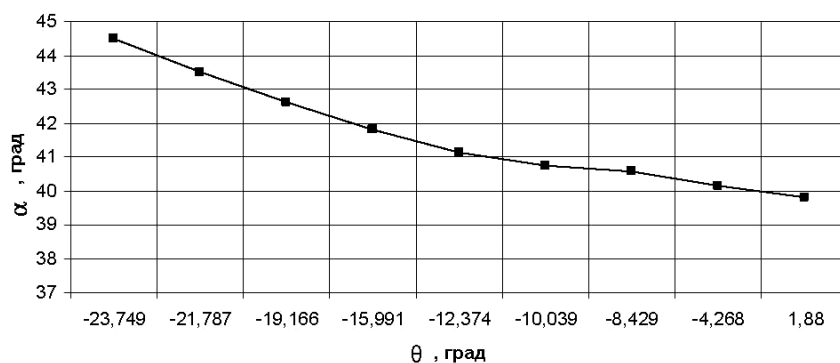


Рис. 9. Зависимость угла атаки от угла наклона разгонной лопатки смесителя

Аэродинамический расчет смесителя в программной среде COSMOS Flo Works

Для проверки адекватности разработанной выше математической модели в среде программного продукта Solid Works была разработана трехмерная твердотельная модель в роторно-центробежном смесителе [1; 2] и при помощи модуля COSMOS Flo Works проведен комплексный аэродинамический анализ процесса перемешивания сухих сыпучих материалов в данном аппарате.

Основные результаты аэродинамического расчета смесителя в программной среде COSMOS Flo Works представлены на рисунках 10 – 12. Расхождение результатов аэродинамического расчета смесителя с приведенными на рисунках 3, 6 – 9 составило 3...5 %.

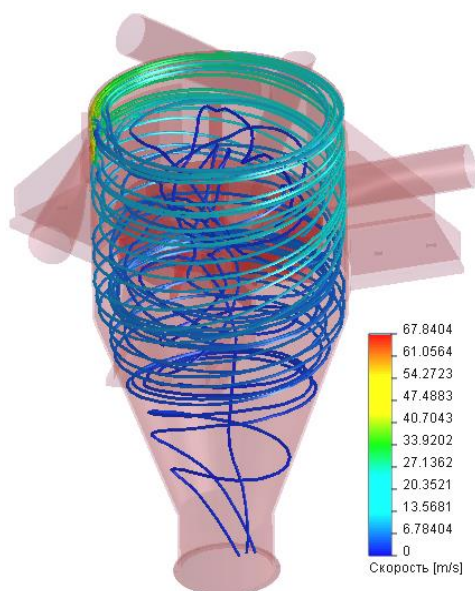


Рис. 10. Схема движения потока материала через тангенциальный патрубок смесителя при $n = 1500$ об/мин

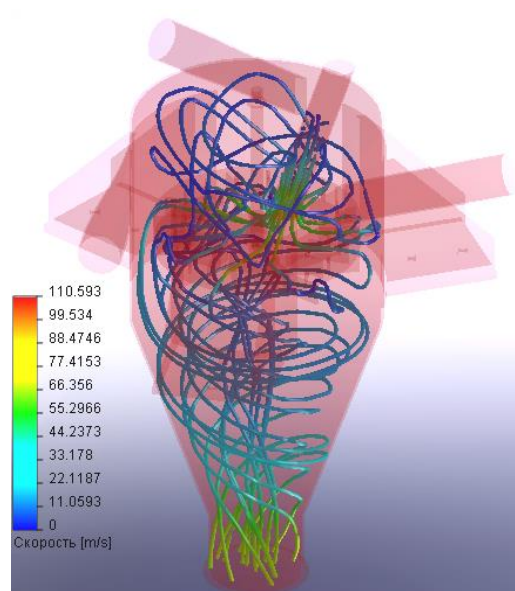


Рис. 11. Схема движения потока материала через центральный патрубок смесителя при $n = 1500$ об/мин

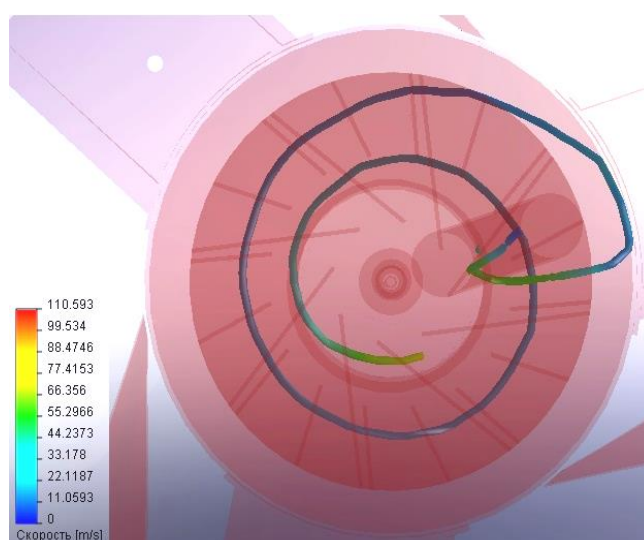


Рис. 12. Траектория движения одиночной частицы материала в межлопастном пространстве ротора и в кольцевом зазоре между лопатками и корпусом смесителя при $n = 1500$ об/мин

Таким образом, разработанная выше математическая модель является вполне пригодной для оценки характера протекания процесса перемешивания сухих сыпучих материалов в роторно-центробежном смесителе [1; 2] и инженерного расчета его оптимальных конструктивно-технологических параметров.

Заключение. Результаты комплексного математического моделирования процесса перемешивания сухих сыпучих материалов в роторно-центробежном смесителе свидетельствуют о следующем:

- 1) получено уравнение движения частицы основного компонента смеси в межлопастном пространстве ротора (см. выражение (3));
- 2) получена система дифференциальных уравнений движения частицы основного компонента смеси в кольцевом зазоре между выходной кромкой лопаток и стенкой цилиндрической обечайки аппарата (см. выражение (23));
- 3) выявлен характер движения частицы основного компонента смеси в межлопастном пространстве ротора и в кольцевом зазоре между выходной кромкой лопаток и стенкой цилиндрической обечайки аппарата (см. рис. 3, 6, 7);
- 4) определена траектория движения частицы основного компонента смеси в кольцевом зазоре между выходной кромкой лопаток и стенкой цилиндрической обечайки аппарата (см. рисунки 8);
- 5) определена оптимальная величина угла наклона лопаток ($\theta = 182^\circ$), при которой угол атаки (α) частиц основного компонента смеси относительно стенки цилиндрической обечайки аппарата будет минимальным (см. рисунок 9);
- 6) подтверждена адекватность разработанной математической модели при помощи аэродинамического расчета смесителя в программной среде COSMOS Flo Works.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гарабажиу, А.А. Разработка новой энергосберегающей конструкции роторно-центробежного смесителя для перемешивания сухих сыпучих материалов / А.А. Гарабажиу // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия В. Промышленность. Прикладные науки. – 2010. – № 8. – С. 60 – 70.
2. Роторно-центробежный смеситель: пат. 14933 ВУ, С1 МПК В 01F 3/18, В 01F 7/26 / А.А. Гарабажиу, Э.И. Левданский; – заявл. 09.01.09; опубл. 30.08.10 // Изобретения. – 2010. – № 38.
3. Левданский, Э.И. Некоторые пути совершенствования процесса измельчения в мельницах ударно-метательного типа / Э.И. Левданский, Д.И. Чиркун, П.С. Гребенчук // Строительная наука и техника. – 2008. – № 2. – С. 99 – 102.
4. Гарабажиу, А.А. Математическое моделирование процессов измельчения и классификации сыпучих материалов в роторно-центробежной мельнице / А.А. Гарабажиу // Химическая промышленность. – 2003. – Т. 80. – № 6. – С. 21 – 25.
5. Гарабажиу, А.А. Разработка и исследование вихревой мельницы с непрерывной проточной классификацией готового продукта: дис. ... канд. техн. наук: 15.07.08 / А.А. Гарабажиу. – Минск, 2000. – 206 с.

Поступила 12.01.2012

MATHEMATICAL MODELLING OF THE PROCESS OF MIXING OF DRY BULK MATERIALS IN A ROTARY POWER MIXER

A. GARABAZHIU

The determination of optimal technological parameters of constructive-innovative energy-saving Rotary centrifugal mixer (for example, the angle of the blades of stages, their profile, etc.) provides preliminary mathematical modelling of the process of mixing the dry bulk materials. A mathematical model of the movement of particles pillar mixture in mezlopastnom area of the rotor and ring gap between the output edge of the blades and the wall of the cylindrical mixer pallet collars is provided. The adequacy of the designed mathematical model is proved by using aerodynamic calculation of the mixer in software environment COSMOS Flo Works.