

УДК 624.072

**ВЛИЯНИЕ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ МАТЕРИАЛА НА ПАРАМЕТРЫ  
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ДВУХШАРНИРНОЙ АРКИ****Е.А. ХЛЕБКОВИЧ***(Представлено канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ)*

*Изучается влияние разномодульности конструкционного материала на параметры напряженно-деформированного состояния двухшарнирной арки. Для описания зависимости между напряжениями и деформациями материала арки используется билинейная диаграмма. Получены аналитические выражения для внутренних усилий и нормальных напряжений двухшарнирной арки с учетом влияния разномодульности материала. Численная оценка влияния разномодульности конструкционного материала на параметры напряженно-деформированного состояния арки осуществляется в среде MathCAD.*

В линейной теории расчета стержневых конструкций конструкционный материал, как правило, считается однородным изотропным упругим телом, поведение которого описывается модулем упругости  $E$ , одинаковым при растяжении и сжатии.

Однако, как показывают экспериментальные исследования [1; 2], модули упругости при растяжении  $E^+$  и сжатии  $E^-$  для ряда современных конструкционных материалов существенно различаются. Более того, явление разномодульности в той или иной степени присуще практически всем традиционным конструкционным материалам.

Так, согласно [3] разномодульность установлена для многочисленных сталей и сплавов. Для них коэффициент разномодульности ( $E^+ / E^-$ ) меньше единицы и изменяется в пределах от 0,75 до 0,97.

Существенно разномодульным материалом являются бетоны [4]. Так, коэффициент разномодульности тяжелых бетонов больше единицы и изменяется в пределах от 1,07 до 1,82. В то же время коэффициент разномодульности легких бетонов может быть как больше, так и меньше единицы.

Исходя из экспериментальных данных, полученных для различных материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию, была построена феноменологическая теория [5], описывающая поведение разномодульного материала и предлагающая общие методы решения задач теории упругости из такого материала. Согласно этой теории диаграмма «напряжение – деформация» для материалов с разными модулями упругости при растяжении и сжатии представляется в виде билинейной диаграммы с разрывом значения угла наклона касательной в точке  $O$  (рисунок 1).

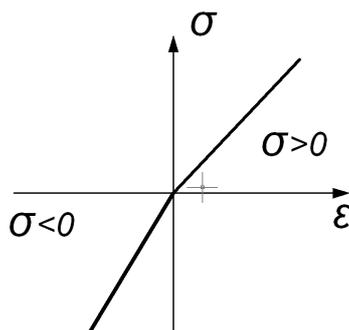


Рисунок 1. – Диаграмма «напряжение – деформация»

Разномодульность конструкционного материала в этом случае характеризуется соотношением модулей упругости

$$\mu = \frac{E^-}{E^+}.$$

В представляемой работе изучается влияние разномодульности материала на внутренние усилия и нормальные напряжения двухшарнирной арки.

Рассматривается арка кругового очертания с постоянным по длине пролета прямоугольным поперечным сечением, нагруженная по длине всего пролета равномерно распределенной нагрузкой (рисунок 2).

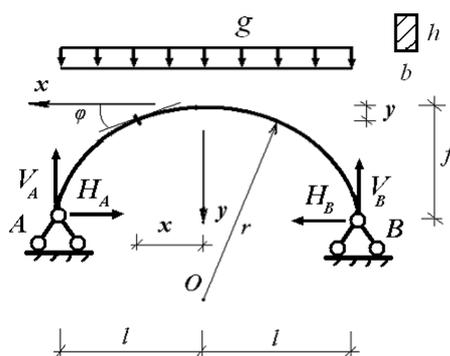


Рисунок 2. – Двухшарнирная арка

Вводятся следующие параметры геометрии арки:

$$\alpha = \frac{f}{l}, \lambda = \frac{l}{h}.$$

Первый параметр характеризует степень пологости очертания оси арки, а второй – массивность тела арки. С учетом введенных параметров закон очертания оси арки имеет вид:

$$y'(\xi, \alpha) = \frac{1}{\alpha\beta(\alpha)} \left( 1 - \sqrt{1 - \beta^2(\alpha)\xi^2} \right),$$

где  $y' = \frac{y}{f}, \xi = \frac{x}{l}, \beta(\alpha) = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}$ .

Расчет арки осуществляется методом сил с использованием основной системы в виде трехшарнирной арки. Каноническое уравнение метода сил имеет вид

$$\delta_{11}(\alpha, \lambda, \mu) X_1 + \Delta_{1p}(\alpha, \lambda, \mu) = 0. \tag{1}$$

Основным неизвестным в уравнении (1) является изгибающий момент в замковом сечении арки.

Входящие в (1) коэффициент и свободный член вычисляются по формуле Максвелла – Мора, которая для разномодульного материала в случае учета изгибных и продольных деформаций имеет вид [6]:

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \frac{m_i M}{D} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i N}{E^- A} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i M}{E^+ A} ds, \tag{2}$$

где  $D$  – изгибная жесткость поперечного сечения для разномодульного материала или приведенная изгибная жесткость. Для симметричного поперечного сечения произвольной формы приведенная изгибная жесткость определяется по формуле

$$D = E^- I^- + E^+ I^+.$$

Здесь величины  $I^-$  и  $I^+$  характеризуют моменты инерции соответственно сжатой и растянутой частей поперечного сечения относительно нейтральной оси.

Тогда формулы для вычисления коэффициента и свободного члена уравнения (1) с учетом (2) имеют вид:

- коэффициент канонического уравнения

$$\delta_{11}(\alpha, \lambda, \mu) = I_{11M}(\alpha) + \frac{\zeta(\mu)}{12\alpha^2\lambda^2} I_{11N}(\alpha),$$

где  $I_{11M}(\alpha) = \int_{-1}^1 \frac{m_1'(\xi, \alpha)^2}{\cos(\xi, \alpha)} d\xi, I_{11N}(\alpha) = \int_{-1}^1 \frac{n_1'(\xi, \alpha)^2}{\cos(\xi, \alpha)} d\xi, \zeta(\mu) = \frac{(1 + \sqrt{\mu})^2}{4\mu};$

- свободный член канонического уравнения

$$\Delta_{1P}(\alpha, \lambda, \mu) = I_{1PM}(\alpha) + \frac{\mu \zeta(\mu)}{12\alpha\lambda^2} I_{1PN}(\alpha)$$

где

$$I_{1PM}(\alpha) = \int_{-1}^1 \frac{m'_1(\xi, \alpha) M'_p(\xi, \alpha)}{\cos(\xi, \alpha)} d\xi,$$

$$I_{1PN}(\alpha) = \int_{-1}^1 \frac{n'_1(\xi, \alpha) N'_p(\xi, \alpha)}{\cos(\xi, \alpha)} d\xi.$$

Внутренние усилия, связанные с вычислением коэффициента и свободного члена, в безразмерной форме имеют вид:

- в единичном состоянии

$$m'_1(\xi, \alpha) = 1 - y'(\xi, \alpha)$$

$$n'_1(\xi, \alpha) = \sqrt{1 - \beta^2(\alpha)} \xi^2,$$

где  $m'_1 = m_1$   $n'_1 = n_1 f$ ;

- в грузовом состоянии

$$M'_p(\xi, \alpha) = (1 - \xi) - \frac{(1 - \xi)^2}{2} - \frac{1}{2}(1 - y'(\xi, \alpha))$$

$$N'_p(\xi, \alpha) = -\beta(\alpha) \xi^2 - \frac{1}{2\alpha} \sqrt{1 - \beta^2(\alpha)} \xi^2$$

Здесь  $M'_p = \frac{M_p}{gl^2}$   $N'_p = \frac{N_p}{gl}$ .

С учетом формул для вычисления коэффициента и свободного члена замковый параметры НДС двухшарнирной арки в безразмерной форме описываются следующими функциональными зависимостями:

- изгибающий момент в замковом сечении арки

$$X_1(\alpha, \lambda, \mu) = -\frac{\Delta_{1P}(\alpha, \lambda, \mu)}{\delta_{11}(\alpha, \lambda, \mu)}; \quad (3)$$

- внутренние усилия в произвольном сечении арки

$$M'(\xi, \alpha, \lambda, \mu) = M'_p(\xi, \alpha) + m'_1(\xi, \alpha) X_1(\alpha, \lambda, \mu)$$

$$Q'(\xi, \alpha, \lambda, \mu) = Q'_p(\xi, \alpha) + q'_1(\xi, \alpha) X_1(\alpha, \lambda, \mu) \quad (4)$$

$$N'(\xi, \alpha, \lambda, \mu) = N'_p(\xi, \alpha) + n'_1(\xi, \alpha) X_1(\alpha, \lambda, \mu).$$

где  $M' = \frac{M}{gl^2}$   $Q' = \frac{Q}{gl}$   $N' = \frac{N}{gl}$ ;

- нормальные напряжения соответственно в верхнем и нижнем волокнах произвольного сечения

$$\sigma'_o(\xi, \alpha, \lambda, \mu) = N'(\xi, \alpha, \lambda, \mu) - \sqrt{3\lambda} M'(\xi, \alpha, \lambda, \mu) \quad (5)$$

$$\sigma'_n(\xi, \alpha, \lambda, \mu) = N'(\xi, \alpha, \lambda, \mu) + \sqrt{3\lambda} M'(\xi, \alpha, \lambda, \mu),$$

где  $\sigma'_o = \frac{\sigma_o A}{gl}$   $\sigma'_n = \frac{\sigma_n A}{gl}$ .

Полученные функциональные зависимости (3)–(5) позволяют оценить влияние разномодульности материала на внутренние усилия и нормальные напряжения двухшарнирной арки в зависимости от ее параметров  $\alpha$  и  $\lambda$ .

На рисунке 3 приведены эпюры изгибающих моментов двухшарнирной арки.

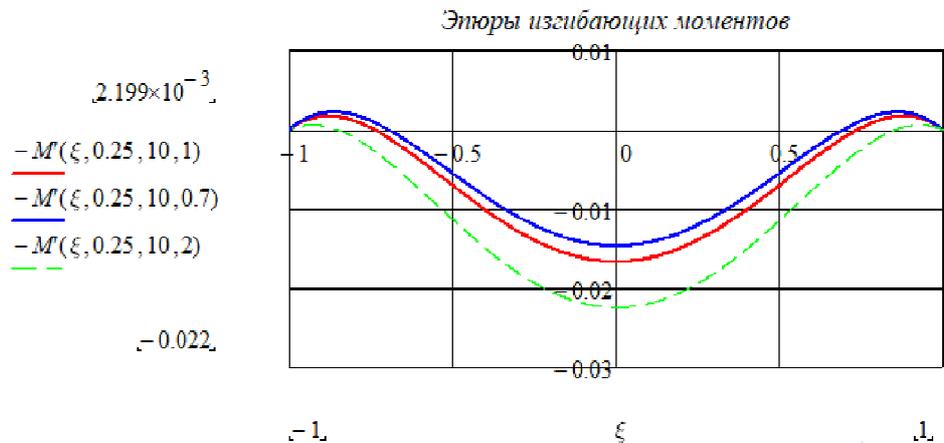


Рисунок 3. – Эпюры изгибающих моментов

Из приведенных эпюр видно, что изгибающие моменты арки, найденные с учетом разномодульности материала, отличаются от моментов, найденных без такого учета, и существенно зависят от величины коэффициента разномодульности  $\mu$ :

- при значениях коэффициента разномодульности меньше единицы изгибающие моменты уменьшаются. Так, например, уменьшение момента в замке арки составляет 12%;
- при значениях коэффициента разномодульности больше единицы изгибающие моменты увеличиваются. Так, увеличение момента в замке арки составляет 34,5%.

Указанные изменения значительно зависят от параметров геометрии арки  $\alpha$  и  $\lambda$ .

На рисунке 4 приведены зависимости величин нормальных напряжений в крайних волокнах замкового сечения арки от параметра гибкости с учетом разномодульности материала.

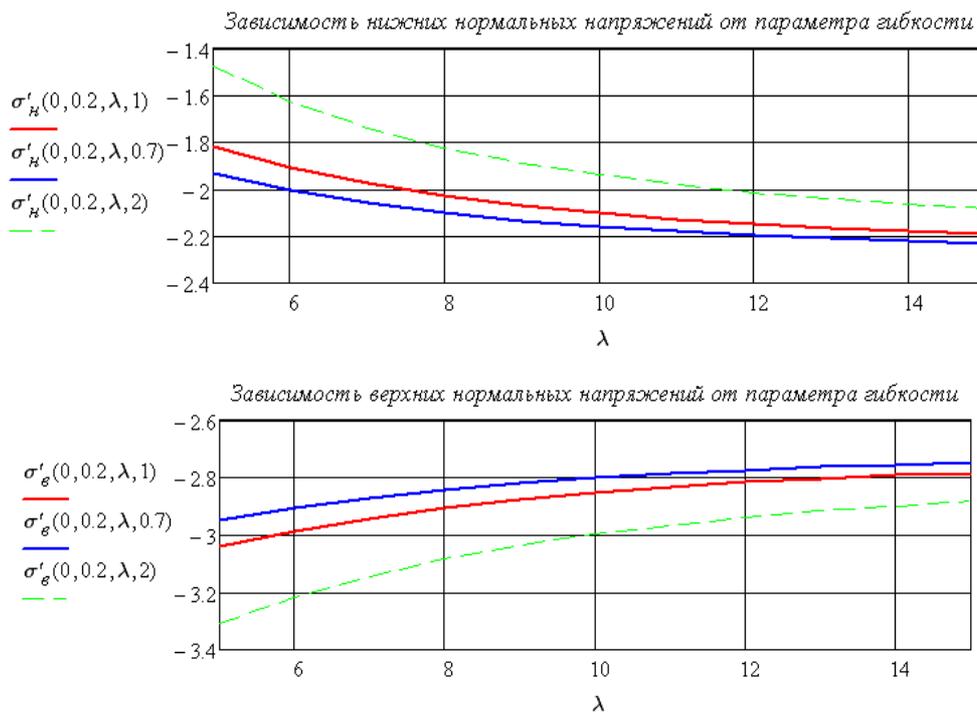


Рисунок 4. – Зависимости нормальных напряжений от параметра гибкости с учетом разномодульности материала

Из приведенных графиков видно, что учет разномодульности материала оказывает заметное влияние на перераспределение нормальных напряжений в замковом сечении.

При значениях коэффициента разномодульности меньше единицы модуль нормальных напряжений увеличивается в нижних волокнах и уменьшается в верхних волокнах.

При значениях коэффициента разномодульности больше единицы, наоборот, модуль нормальных напряжений уменьшается в нижних волокнах и увеличивается в верхних волокнах. Указанные изменения могут составлять более 10%.

Таким образом, неучет влияния разномодульности материала при расчете двухшарнирной арки может приводить к ошибкам при определении параметров НДС, связанных с назначением размеров поперечных сечений арки и обеспечением ее несущей способности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Земляков, И.П. О различии модулей упругости полиамидов при различных видах деформации / И.П. Земляков // Механика полимеров. – 1965. – № 4.
2. Гольдман, А.Я. Исследование механических свойств тканевых стеклопластиков при растяжении и сжатии нормально к плоскости армирования / А.Я. Гольдман, Н.Ф. Савельева, В.И. Смирнова // Механика полимеров. – 1968. – № 5.
3. Иванов, Г.П. Исследование несовершенной упругости металлов : автореф. дис. ... канд. техн. наук / Г.П. Иванов. – Минск, 1973.
4. Авхимков, А.П. Об уравнениях обобщенного закона упругости материалов, разнсопротивляющихся растяжению и сжатию и некоторых их приложениях : автореф. дис. ... канд. техн. наук / А.П. Авхимков. – М., 1975.
5. Амбарцумян, С.А. Разномодульная теория упругости / С.А. Амбарцумян. – М. : Наука, 1982.
6. Турищев, Л.С. К расчету стержневых конструкций с учетом влияния разномодульности материала / Л.С. Турищев // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия В, Промышленность. Прикладные науки. – 2011. – № 11.