

УДК 624.04

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ИЗГИБА СЖАТО-ИЗОГНУТОГО СТЕРЖНЯ
С УЧЕТОМ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ МАТЕРИАЛА

Н.А. ВОЙТЕШОНОК, Е.К. КУКОР

(Представлено: канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ)

Сделано обобщение дифференциального уравнения оси сжато-изогнутого стержня для случая, когда конструкционный материал балки характеризуется различными модулями упругости при растяжении и сжатии. Используя метод начальных параметров, получены обобщенные формулы для определения параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) в произвольном сечении стержня.

Рассмотрим прямолинейный гибкий стержень, нагруженный постоянной продольной силой и поперечной нагрузкой, показанной на рисунке 1.

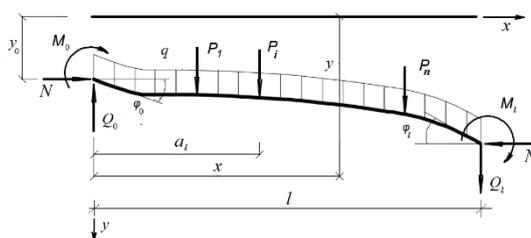


Рисунок 1. – Сжато-изогнутый стержень

Под действием приложенной нагрузки стержень претерпевает деформации сжатия с изгибом. Напряженно-деформированное состояние (НДС) стержня в начале координат характеризуется величинами

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad M(0) = M_0, \quad Q(0) = Q_0,$$

которые являются, соответственно, прогибом, углом поворота, изгибающим моментом и поперечной силой в левом сечении стержня и называются начальными параметрами.

Принимается, что стержень выполнен из разномодульного материала. Поперечное сечение стержня симметричное произвольной формы (рис. 2)

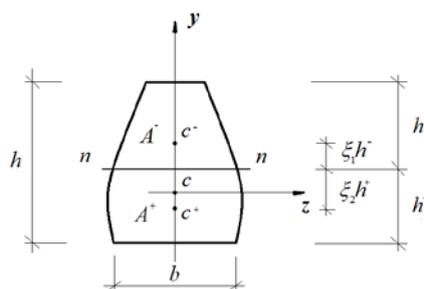


Рисунок 2. – Симметричное поперечное сечение стержня

где A^- – площадь сжатой части сечения с центром тяжести в точке c^- ; A^+ – площадь растянутой части сечения с центром тяжести в точке c^+ . Общая площадь поперечного сечения $A = A^- + A^+$.

Для описания прогибов сжато-изогнутого стержня, выполненного из разномодульного материала, используем приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси такого стержня [1]

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{D(x)}, \quad (1)$$

где $M(x)$ - изгибающий момент в произвольном сечении; $D(x)$ – изгибная жесткость поперечного сечения стержня с учетом разномодульности материала.

Входящий в уравнение (1) изгибающий момент $M(x)$, для рассматриваемой схемы нагружения стержня описывается выражением

$$M(x) = M_0 + Q_0x + N[y(x) - y_0] - \sum P_i(x - a_i) - \frac{qx^2}{2}. \quad (2)$$

При определении момента по формуле (2) в некотором сечении под знаком суммы необходимо учитывать только те силы, которые находятся левее этого сечения.

Входящая в уравнение (1) величина $D(x)$, характеризует изгибную жесткость поперечного сечения с учетом влияния разномодульности конструкционного материала. Эта величина связана с обычной изгибной жесткостью поперечного сечения EI_z соотношением [2]

$$D = \frac{EI_z}{\zeta} \quad (3)$$

где ζ – коэффициент влияния разномодульности конструкционного материала на изгибную жесткость поперечного сечения. Для симметричного поперечного сечения произвольной формы он описывается выражением

$$\zeta = \frac{I_z}{I^+(x) + \mu I^-(x)}.$$

где $I^-(x)$ и $I^+(x)$ характеризуют моменты инерции, соответственно, сжатой и растянутой частей поперечного сечения относительно нейтральной оси; $\mu = \frac{E^-}{E^+}$ – коэффициент разномодульности конструкционного материала, характеризующий соотношение его модулей упругости при сжатии E^- и растяжении E^+ .

С учетом (2), (3) уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \zeta \frac{N}{EI_z} y = -\frac{\zeta}{EI_z} \left[M_0 + Q_0x - Ny_0 - \sum P_i(x - a_i) - \frac{qx^2}{2} \right]. \quad (4)$$

Полученное уравнение (4) описывает изогнутую ось гибкого сжато-изогнутого стержня с учетом разномодульности его материала и является обыкновенным неоднородным дифференциальным уравнением 2 порядка с постоянными коэффициентами. При значении $\zeta = 1$ уравнение (4) принимает вид, когда расчет сжато-изогнутого стержня ведется без учета разномодульности материала.

Введя обозначение $n = \sqrt{\frac{N}{EI_z}}$, получим общее решение уравнения (4) в виде

$$y(x) = C_1 \cos \sqrt{\zeta} nx + C_2 \sin \sqrt{\zeta} nx + y^*(x). \quad (5)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные; $\cos \sqrt{\zeta} nx, \sin \sqrt{\zeta} nx$ – частные решения однородного уравнения, полученного из уравнения (4); $y^*(x)$ - частное решение неоднородного уравнения (4), которое имеет вид

$$y^*(x) = y_0 - \frac{M_0 + Q_0x}{n^2 EI_z} + \frac{\sum P_i}{n^3 EI_z} \left[\sqrt{\zeta} n(x - a_i) - \sin \sqrt{\zeta} n(x - a_i) \right] - \frac{q}{n^4 EI_z} \left[\left(1 - \frac{\zeta n^2 x^2}{2} \right) - \cos \sqrt{\zeta} nx \right]$$

Произвольные C_1, C_2 определяются из граничных условий на левом конце стержня

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= y'_0 \end{aligned}$$

Используя эти условия, найдем

$$C_1 = \frac{M_0}{n^2 EI_z}, \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{\zeta} n} \left(\varphi_0 + \frac{Q_0}{n^2 EI_z} \right) \quad (6)$$

Подставляя (6) в общее решение (5), получим формулу для прогибов сжато-изогнутого стержня

$$y(x) = y_0 + y_0' \frac{\sin \sqrt{\zeta} nx}{\sqrt{\zeta} n} + \frac{M_0}{n^2 EI_z} (\cos \sqrt{\zeta} nx - 1) + \frac{Q_0}{n^3 EI_z} \left(\frac{\sin \sqrt{\zeta} nx}{\sqrt{\zeta}} - nx \right) + y_p(x). \quad (7)$$

Дифференцируя последовательно (7), получим формулы для углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил сжато-изогнутого стержня

$$\begin{aligned} y'(x) &= y_0' \cos \sqrt{\zeta} nx - \frac{M_0}{nEI_z} \sqrt{\zeta} \sin \sqrt{\zeta} nx + \frac{Q_0}{n^2 EI_z} (\cos \sqrt{\zeta} nx - 1) + y_p'(x) \\ M(x) &= y_0' \frac{EI_z}{\sqrt{\zeta}} n \sin \sqrt{\zeta} nx + M_0 \cos \sqrt{\zeta} nx + Q_0 \frac{\sin \sqrt{\zeta} nx}{n\zeta} + M_p(x) \\ Q(x) &= y_0' EI_z n^2 \cos \sqrt{\zeta} nx - M_0 \sqrt{\zeta} n \sin \sqrt{\zeta} nx + Q_0 \frac{\cos \sqrt{\zeta} nx}{\sqrt{\zeta}} + Q_p(x) \end{aligned} \quad (8)$$

В формулах (7), (8), позволяющие находить параметры НДС в произвольном сечении сжато-изогнутого стержня с учетом влияния разномодульности конструкционного материала, величины $y_p(x)$, $y_p'(x)$, $M_p(x)$, $Q_p(x)$ характеризуют влияние пролетной нагрузки на соответствующий параметр НДС и для нагрузки, показанной на рис.1, определяются по следующим формулам

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{n^3 EI_z} \sum_i P_i [\sqrt{\zeta} n(x - a_i) - \sin \sqrt{\zeta} n(x - a_i)] - \frac{q}{n^4 EI_z} \left[\left(1 - \frac{\zeta n^2 x^2}{2} \right) - \cos \sqrt{\zeta} nx \right] \\ y_p'(x) &= \frac{\sqrt{\zeta}}{n^2 EI_z} \sum_i P_i [1 - \cos \sqrt{\zeta} n(x - a_i)] + \frac{q}{n^3 EI_z} [\zeta nx - \sin \sqrt{\zeta} nx] \\ M_p(x) &= -\frac{1}{n} \sum_i P_i \sin \sqrt{\zeta} n(x - a_i) - \frac{q}{\zeta n^2} [\zeta - \sqrt{\zeta} \cos \sqrt{\zeta} nx] \\ Q_p(x) &= -\zeta \sum_i P_i \cos \sqrt{\zeta} n(x - a_i) - \frac{q}{n} \sin \sqrt{\zeta} nx \end{aligned}$$

Полученные дифференциальное уравнение (4) и формулы (7), (8) позволяют получать решения конкретных задач расчета сжато-изогнутых стержней с учетом разномодульности материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян, С.А. Разномодульная теория упругости / С.А. Амбарцумян. – М.: Физматгиз, 1982. – 317 с.
2. Турищев, Л.С. К вопросу о расчете стержневых конструкций с учетом влияния разномодульности материала / Л.С. Турищев // Вестник ПГУ. Серия В. Промышленность. Прикладные науки. – 2010. – № 2. – С. 63–67.