

УДК 624.04

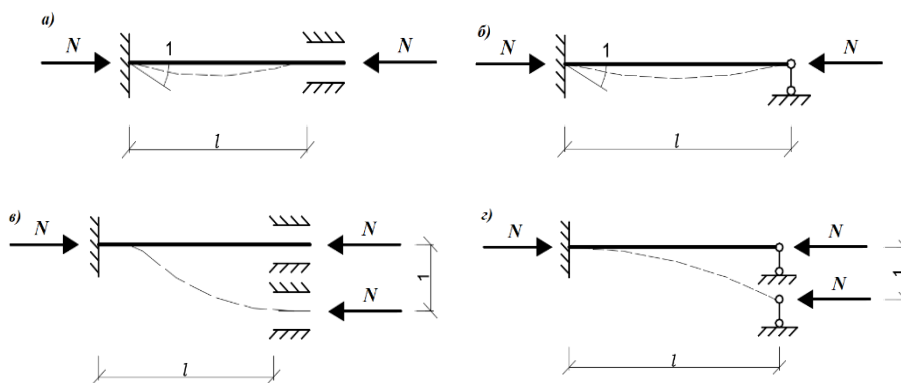
**ЕДИНИЧНЫЕ ПАРАМЕТРЫ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СЖАТО-ИЗОГНУТЫХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ МАТЕРИАЛА**

**Н.А. ВОЙТЕШОНОК, Е.К. КУКОР**

(Представлено: канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ)

Получены аналитические выражения для единичных перемещений и внутренних усилий с учетом разномодульности конструкционного материала для двух схем опирания сжато-изогнутых стержней. Рассмотрена зависимость обобщенных функций метода перемещений для таких стержней от коэффициента влияния разномодульности конструкционного материала на изгибную жесткость стержней. Показано, что учет разномодульности материала может существенно влиять на значения единичных параметров напряженно-деформированного состояния сжато-изогнутых стержней.

Рассматриваются стержни с двумя схемами опирания – защемленные двумя концами и одним защемленным, а вторым шарнирно опертым концом, в которых при действии постоянной сжимающей силы  $N$  происходят перемещения опорных закреплений – поворот неподвижной защемляющей опоры на угол равный единице или линейное единичное смещение шарнирно подвижной опоры (рис. 1)



**Рисунок 1. – Схемы сжато-изогнутых стержней**

Начальные параметры рассматриваемых сжато-изогнутых стержней характеризуются следующими величинами:

– сжатый стержень с двумя защемленными концами при единичном повороте неподвижной защемляющей опоры (рис. 1, а)

$$y_0 = 0, y'_0 = 1, M_0 \neq 0, Q_0 \neq 0, \tag{1}$$

– сжатый стержень с одним защемленным и вторым шарнирно опертым концом при единичном повороте неподвижной защемляющей опоры (рис. 1, б)

$$y_0 = 0, y'_0 = 1, M_0 \neq 0, Q_0 \neq 0, \tag{2}$$

– сжатый стержень с двумя защемленными концами при единичном линейном смещении подвижной защемляющей опоры (рис. 1. в)

$$y_0 = 0, y'_0 = 0, M_0 \neq 0, Q_0 \neq 0, \tag{3}$$

– сжатый стержень с одним защемленным и вторым шарнирно опертым концом при единичном линейном смещении шарнирно подвижной опоры (рис. 1, з)

$$y_0 = 0, y'_0 = 0, M_0 \neq 0, Q_0 \neq 0, \tag{4}$$

С учетом величин начальных параметров формулы для прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил сжато-изогнутого стержня примут вид:

– для сжато-изогнутых стержней, показанных на рисунок 1, а, б

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{\sin \sqrt{\zeta} nx}{\sqrt{\zeta} n} + \frac{M_0}{n^2 EI_z} (\cos \sqrt{\zeta} nx - 1) + \frac{Q_0}{n^3 EI_z} \left( \frac{\sin \sqrt{\zeta} nx}{\sqrt{\zeta}} - nx \right) \\
y'(x) &= \cos \sqrt{\zeta} nx - \frac{M_0}{n EI_z} \sqrt{\zeta} \sin \sqrt{\zeta} nx + \frac{Q_0}{n^2 EI_z} (\cos \sqrt{\zeta} nx - 1) \\
M(x) &= \frac{EI_z}{\sqrt{\zeta}} n \sin \sqrt{\zeta} nx + M_0 \cos \sqrt{\zeta} nx + Q_0 \frac{\sin \sqrt{\zeta} nx}{n \zeta} \\
Q(x) &= EI_z n^2 \cos \sqrt{\zeta} nx - M_0 \sqrt{\zeta} n \sin \sqrt{\zeta} nx + Q_0 \frac{\cos \sqrt{\zeta} nx}{\sqrt{\zeta}}
\end{aligned} \tag{5}$$

– для сжато-изогнутых стержней, показанных на рисунке 1, *в*, *з*

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{M_0}{n^2 EI_z} (\cos \sqrt{\zeta} nx - 1) + \frac{Q_0}{n^3 EI_z} \left( \frac{\sin \sqrt{\zeta} nx}{\sqrt{\zeta}} - nx \right) \\
y'(x) &= -\frac{M_0}{n EI_z} \sqrt{\zeta} \sin \sqrt{\zeta} nx + \frac{Q_0}{n^2 EI_z} (\cos \sqrt{\zeta} nx - 1) \\
M(x) &= M_0 \cos \sqrt{\zeta} nx + Q_0 \frac{\sin \sqrt{\zeta} nx}{n \zeta} \\
Q(x) &= -M_0 \sqrt{\zeta} n \sin \sqrt{\zeta} nx + Q_0 \frac{\cos \sqrt{\zeta} nx}{\sqrt{\zeta}}
\end{aligned} \tag{6}$$

Для определения оставшихся начальных параметров  $M_0, Q_0$ , которыми являются единичные внутренние усилия в сечениях на левом конце стержней, используем граничные условия на правом конце стержней. Эти условия имеют вид:

– сжато-изогнутый стержень (рис.1, *а*)

$$y(l) = 0; y'(l) = 0; \tag{7}$$

– сжато-изогнутый стержень (рис.1, *б*)

$$y(l) = 0; M(l) = 0; \tag{8}$$

– сжато-изогнутый стержень (рис.1, *в*)

$$y(l) = 1; y'(l) = 0; \tag{9}$$

– сжато-изогнутый стержень (рис.1, *з*)

$$y(l) = 1; M(l) = 0; \tag{10}$$

Подчиняя выражения (5), (6) соответствующим граничным условиям (7) – (8), решая для каждого случая систему двух линейных неоднородных алгебраических уравнения и вводя обозначение  $\nu = nl$ , получим следующие выражения для внутренних усилий в сечениях на левом конце стержней:

– для сжато-изогнутого стержня, показанного на рисунке 1, *а*

$$M_0 = \frac{4EI}{l} \varphi_2(\zeta \nu); Q_0 = -\frac{6EI}{l^2} \varphi_4(\zeta \nu), \tag{11}$$

– для сжато-изогнутого стержня, показанного на рисунке 1, *б*

$$M_0 = \frac{3EI}{l} \varphi_1(\zeta \nu); Q_0 = -\frac{3EI}{l^2} \varphi_1(\zeta \nu), \tag{12}$$

– для сжато-изогнутого стержня, показанного на рисунке 1, *в*

$$M_0 = -\frac{6EI}{l^2} \varphi_4(\zeta \nu); Q_0 = \frac{12EI}{l^3} \eta_2(\zeta \nu), \tag{13}$$

– для сжато-изогнутого стержня, показанного на рисунке 1, *з*

$$M_0 = -\frac{3EI}{l^2} \varphi_1(\zeta v); \quad Q_0 = \frac{3EI}{l^3} \eta_1(\zeta v), \quad (14)$$

где  $\varphi_1(\zeta v), \varphi_2(\zeta v), \varphi_3(\zeta v), \varphi_4(\zeta v), \eta_1(\zeta v), \eta_2(\zeta v)$  – обобщенные функции метода перемещений для сжато изогнутых стержней. Эти функции имеют вид

$$\varphi_1(\zeta v) = \frac{v^2 \operatorname{tg} \sqrt{\zeta} v}{3(\operatorname{tg} \sqrt{\zeta} v - \sqrt{\zeta} v)}; \quad \varphi_2(\zeta v) = \frac{v}{4 \operatorname{tg} \sqrt{\zeta} v} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{\zeta} v - \sqrt{\zeta} v}{2 \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\zeta} v}{2} - \sqrt{\zeta} v}; \quad \varphi_3(\zeta v) = \frac{v}{4 \sin \sqrt{\zeta} v} \frac{\sqrt{\zeta} v - \sin \sqrt{\zeta} v}{\operatorname{tg} \frac{\sqrt{\zeta} v}{2} - \frac{\sqrt{\zeta} v}{2}};$$

$$\varphi_4(\zeta v) = \varphi_1\left(\zeta \frac{v}{2}\right); \quad \eta_1(\zeta v) = \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} \sqrt{\zeta} v - \sqrt{\zeta} v)}; \quad \eta_2(\zeta v) = \eta_1\left(\zeta \frac{v}{2}\right)$$

Полученные функции характеризуют влияние продольной силы на внутренние усилия стержней с учетом разномодульности материала. При значении  $\zeta = 1$  функции принимают вид, когда расчет сжато-изогнутых стержней ведется без учета разномодульности материала [1].

Используя полученные выражения функций исследуем их зависимость от коэффициента влияния разномодульности материала на изгибную жесткость стержней. Примем согласно [2] интервал изменения коэффициента  $0.6 \leq \zeta \leq 1.7$ . Значения  $\zeta < 1$  соответствуют разномодульным конструкционным материалам с коэффициентом  $\mu > 1$ , а значения  $\zeta > 1$  – с коэффициентом  $\mu < 1$ .

На рисунке 2 приведены графики зависимости начальных значений функций от коэффициента влияния в указанном интервале изменения

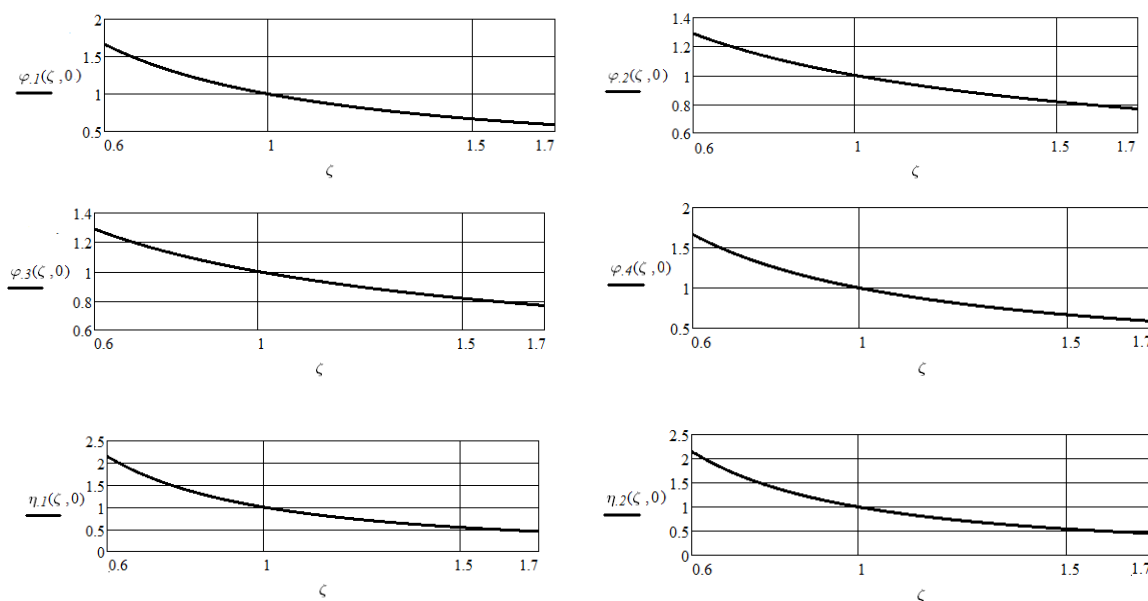


Рисунок 2. – Графики зависимости начальных значений функций метода перемещений

Из полученных графиков видно, что учет разномодульности материала может существенно влиять на значения функций метода перемещений, а, следовательно, на величины единичных параметров напряженно-деформированного состояния сжато-изогнутых стержней. Поэтому при определении единичных перемещений и внутренних усилий в сжато-изогнутых стержнях необходимо учитывать разномодульность конструкционного материала.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Раевский, А.Н. Основы расчета сооружений на устойчивость / А.Н. Раевский. – М. : Высшая школа, 1962. –160 с.
2. Турищев, Л.С. К вопросу о расчете стержневых конструкций с учетом влияния разномодульности материала / Л.С. Турищев // Вестник ПГУ. Серия В. Промышленность. Прикладные науки. – 2010. – № 2. – С. 63–67.