

УДК 624.072

К ВОПРОСУ О ПРИМЕНЕНИИ ФУНКЦИИ ГРИНА К РАСЧЕТУ ОДНОПРОЛЕТНЫХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

Н.С. ЧЕКУНОВ, Н.В. ЧЕКУНОВА

(Представлено: канд. техн. наук, доц. Л.С. Турищев)

Рассматривается получение функций Грина изгибающих моментов и поперечных сил для консольной и простой балок. Показано применение полученных функций Грина для определения соответствующих им внутренних усилий от действия систем сосредоточенных сил, распределенных нагрузок и внешних моментов.

При плоском изгибе однопролетных статически определимых балок в их сечениях от действия нагрузки возникают внутренние усилия – изгибающие моменты и поперечные силы. Определение внутренних усилий принято делать на основании уравнений равновесия твердого тела. Альтернативным вариантом является использование функции Грина. Имя функции связано с английским математиком Джорджем Грином, который применил её в 1828 г. в работе «Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism», ставшей основой для дальнейшего развития теории функций Грина. В строительной механике эту функцию также называют функцией влияния [1].

Применительно к статическим расчетам балок функция Грина является откликом балки на точечное воздействие и характеризует величину внутреннего усилия, возникающего в любом сечении балки при произвольном расположении на ней безразмерной единичной силы. Эта функция является функцией двух независимых переменных и описывает аналитическую зависимость внутреннего усилия в любом сечении балки от произвольного положения безразмерной единичной силы. Поэтому если эта функция известна, а балка считается линейно деформируемой системой, то соответствующее внутреннее усилие в балке можно найти без составления и решения уравнений равновесия.

Рассмотрим нахождение функций Грина изгибающих моментов и поперечных сил для двух видов однопролетных статически определимых балок – консольная и простая балки. Для этого будем использовать метод сечений и определять возникающие в произвольном сечении балок внутренние усилия от действия произвольно расположенной на них безразмерной единичной силы. Полученные в результате этого аналитические выражения и будут являться функциями Грина соответствующих внутренних усилий.

Для нахождения функций Грина внутренних усилий консольной балки определим изгибающий момент и поперечную силу в произвольном сечении, описываемом переменной величиной z , при произвольном расположении на балке безразмерной единичной силы, описываемой переменной величиной x (рисунок 1).

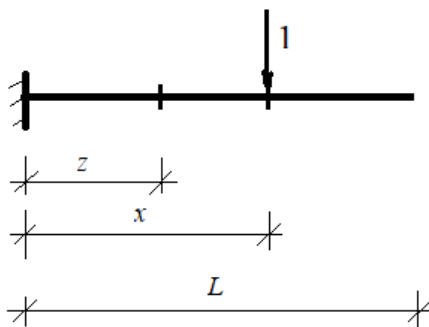


Рисунок 1. – К нахождению функций Грина внутренних усилий консольной балки

Тогда функции Грина внутренних усилий консольной балки имеют вид:

– функция Грина для изгибающего момента $G_M(x, z) = \begin{cases} (z-x) & x \geq z \\ 0 & x < z \end{cases}$ и её частная производная по независимой переменной x $G'_M(x, z) = \begin{cases} -1 & x \geq z \\ 0 & x < z \end{cases}$;

– функция Грина для поперечной силы $G_Q(x, z) = \begin{cases} 1 & z \leq x \\ 0 & z > x \end{cases}$.

Если в полученной функции Грина для изгибающего момента положить переменную x равной некоторой константе c , то независимой переменной будет z . Тогда функция Грина будет описывать единичную эпюру изгибающих моментов консольной балки при действии единичной силы в сечении $x = c$.

Если в полученной функции Грина для изгибающего момента приложить переменную z равную некоторой константе c , то независимой переменной будет x . В этом случае функция Грина будет описывать линию влияния изгибающих моментов консольной балки в сечении $z = c$.

Для нахождения функций Грина внутренних усилий простой балки определим изгибающий момент и поперечную силу в произвольном сечении, описываемом переменной величиной z , при произвольном расположении на балке безразмерной единичной силы, описываемой переменной величиной x (рис.2).

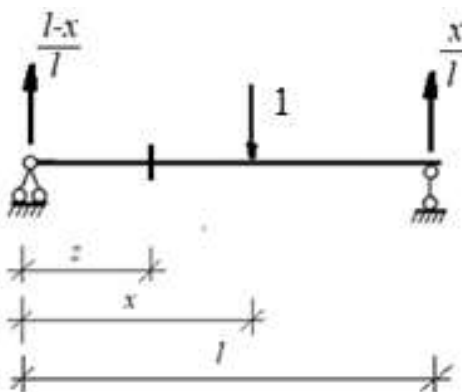


Рисунок 2. – К нахождению функций Грина внутренних усилий простой балки

Тогда функции Грина внутренних усилий простой балки имеют вид:

– функция Грина для изгибающего момента $G_M(x, z) = \frac{(l-x)}{l} z$ $z \leq x$
и её частная производная $\frac{x}{l}(z-x)$ $z > x$

по независимой переменной x $G'_m(x, z) = \frac{-\frac{z}{l}}{z-2x}$ $x \geq z$
 $\frac{z}{l}$ $x < z$

– функция Грина для поперечной силы $G_Q(x, z) = \frac{l-x}{l}$ $z \leq x$
 $-\frac{x}{l}$ $z > x$

Рассмотрим применение полученных функций Грина для определения внутренних усилий в соответствующих им балках для следующих схем нагружения:

- система сосредоточенных сил P_k ($k = 1, \dots, n$), приложенных в заданных сечениях a_k ($k = 1, \dots, n$);
- система распределенных нагрузок с постоянными интенсивностями q_k ($k = 1, \dots, n$), приложенных на участках с заданными координатами начала и конца каждого участка a_k, b_k ($k = 1, \dots, n$);
- система внешних моментов M_k ($k = 1, \dots, n$), приложенных в заданных сечениях a_k ($k = 1, \dots, n$).

Аналитические выражения, описывающие внутренние усилия (изгибающие моменты и поперечные силы) при действии системы сосредоточенных сил имеют вид

$$M(z) = \sum_k G_M(a_k, z) P_k;$$

$$Q(z) = \sum_k G_Q(a_k, z) P_k.$$

Аналитические выражения, описывающие внутренние усилия (изгибающие моменты и поперечные силы) при действии системы распределенных нагрузок с постоянными интенсивностями имеют вид

$$M(z) = \sum_k q_k \int_{a_k}^{b_k} G_M(a_k, z) dx;$$

$$Q(z) = \sum_k q_k \int_{a_k}^{b_k} G_Q(a_k, z) dx.$$

Аналитическое выражение, описывающее изгибающие моменты при действии системы внешних моментов имеет вид

$$M(z) = \sum_k G'_M(a_k, z) M_k.$$

Полученные формулы позволяют для рассмотренных балок заменить применяемый в строительной механике метод нахождения внутренних усилий в стержневых системах с помощью линий влияния [2; 3] на их аналитическое нахождение. В случае совместного действия всех рассмотренных видов нагружения внутренние усилия, согласно принципу суперпозиции, находятся сложением их частей, найденных от каждого вида нагружения отдельно.

Таким образом, громоздкую задачу определения внутренних усилий в балках с произвольной нагрузкой с помощью составления и решения уравнений равновесия можно заменить на их вычисление с помощью конечных формул, основанных на использовании функций Грина соответствующих внутренних усилий, характеризующих отклики балок на единичное воздействие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович И.М. Строительная механика. Ч.1. Статически определимые системы: учебник / И.М. Рабинович; Гос. изд. стр. лит. – Москва, Ленинград, 1950. – 387 с.
2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: учебник / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – СПб.: Изд. «Лань», 2010. – 656 с.
3. Турищев Л.С. Строительная механика: УМК / Л.С. Турищев. – Новополюк: ПГУ, 2008. – 223 с.