

УДК 621.37.037

МЕТОДЫ СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

М.С. АЛЕКСЕЕВ

(Представлено: канд. техн. наук, доц. В.Ф. ЯНУШКЕВИЧ)

Представлены результаты теоретического анализа сверхразрешения источников излучения с помощью антенной решетки с использованием метода «максимального правдоподобия с одним источником сигнала». Приведены результаты исследования для одного источника. Проанализированы функции углового разрешения объекта. Результаты исследования могут быть использованы в радиопеленгации и радиолокации.

Ключевые слова: антенная решетка, источники, отношение средней мощности

Рассмотрим простейший случай одного источника, угловое положение которого задается углом φ , а амплитуда падающей плоской волны равна a . Мы ставим задачу определить направление прихода сигнала и его амплитуду с помощью антенной решетки (АР). Предположим, что имеется линейная АР из N элементов, расположенных произвольным образом вдоль оси x , как показано на рисунке 1.

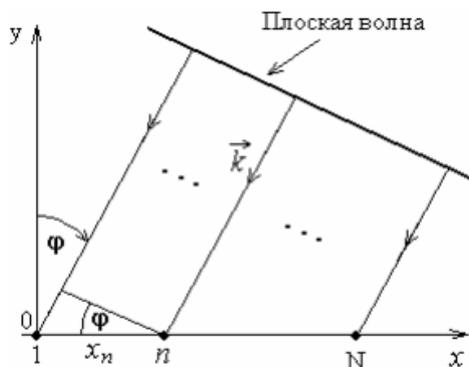


Рисунок 1. – Линейная АР в выбранной системе координат

Смесь полезного сигнала и шума в векторной форме запишем в виде:

$$Z = aS(\varphi) + X \quad (1)$$

Где вектор сигнала S имеет компоненты:

$$S_n(\varphi) = \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda} x_n \sin \varphi \right]; n = (1 \div N) \quad (2)$$

Будем считать, что сигнал является регулярным и регистрируется решеткой на фоне собственного шума с корреляционной матрицы (КМ) $M = \sigma^2 E$.

Многомерную функцию плотности вероятности собственного шума запишем в виде:

$$p(X) = \frac{1}{\pi^N \sigma^2 2N} \exp \left(-\frac{|X|^2}{\sigma^2} \right). \quad (3)$$

Вектор Z смеси полезного сигнала и шума является случайным. Его функцию плотности вероятности найдем из (1) и (3). В результате будем иметь, что

$$p(Z, \varphi, a) = \frac{1}{\pi^N \sigma^2 2N} \exp \left(-\frac{|Z - aS(\varphi)|^2}{\sigma^2} \right). \quad (4)$$

Допустим, в результате приема сигналы получена некоторая реализация вектора Z . Тогда, подставляя Z в формулу (4), получим функцию, которая зависит от угла φ и амплитуды a . Эту функцию называют

функцией правдоподобия. Исследуя функцию правдоподобия в зависимости от φ и a , найдем такие значения этих переменных, при которых функция правдоподобия достигает своего максимального значения. Полученные значения переменных называются оценками максимального правдоподобия. Нетрудно видеть, что функция правдоподобия (4) достигает максимума, когда функция

$$g(\varphi, a) = |Z - aS(\varphi)|^2 \quad (5)$$

имеет минимальное значение.

Метод оценивания параметров путем минимизации (5), называется методом наименьших квадратов. В данном случае метод наименьших квадратов и метод максимального правдоподобия дают один и тот же результат. Векторы Z и S являются векторами N - мерного пространства. Вектор Z фиксирован и не меняет своего положения. Наоборот, вектор S изменяет свое положение, когда мы подставляем различные значения неизвестного угла φ . На рисунке 2 показаны векторы Z и S . Кроме того, там представлены компоненты вектора Z , одна из которых параллельна вектору S , а другая ортогональна ему.

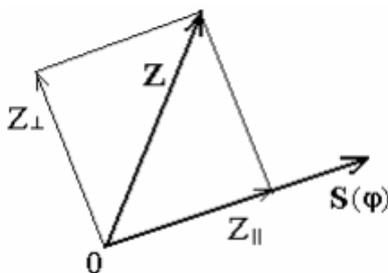


Рисунок 2. – Пример расположения векторов Z и S в N -мерном пространстве.

Теперь формулу (5) можно записать по-другому, а именно:

$$g(\varphi, a) = |Z_{11} - aS(\varphi)|^2 + |Z_{\perp}|^2. \quad (6)$$

Первое слагаемое всегда можно свести к нулю, выбирая подходящим образом амплитуду a . Второе слагаемое минимизируется только за счет выбора угла φ . Поэтому сначала следует минимизировать второе слагаемое, найти оценку угла φ , а затем, приравняв к нулю первое слагаемое, можно найти оценку амплитуды a .

Введем в рассмотрение матрицы проектирования. Пусть в пространстве размерности N заданы два произвольных вектора Z и S . Тогда матрицы проектирования имеют следующий вид:

$$P = \frac{SS^H}{S^H S}; E - P = E - \frac{SS^H}{S^H S}. \quad (7)$$

Матрица P проектирует любой вектор Z N -мерного пространства на вектор S . Вторая матрица порождает компонент вектора Z , ортогональный вектору S . Матрицы проектирования обладают следующими свойствами:

$$P^2 = P; (E - P)^2 = (E - P); P(E - P) = [0]. \quad (8)$$

Применяя матрицы проектирования к вектору Z , получим компоненты этого вектора в виде:

$$Z_{11} = PZ = \frac{S^H Z}{S^H S} S; Z_{\perp} = (E - P)Z = Z - Z_{11}. \quad (9)$$

Теперь, используя формулы (8) и (9), легко выразить каждое из слагаемых, входящих в (6), следующим образом:

$$|Z_{11} - aS(\varphi)|^2 = \left| \frac{S^H(\varphi)Z}{S^H(\varphi)S(\varphi)} - a \right|^2 |S(\varphi)|^2, \quad (10)$$

$$|Z_{\perp}|^2 = |Z|^2 - |Z_{11}|^2 = |Z|^2 - \frac{|S^H(\varphi)Z|^2}{S^H(\varphi)S(\varphi)}. \quad (11)$$

Выражение (11) имеет минимум тогда, когда второе слагаемое имеет максимум, так как первое слагаемое фиксировано. Для дальнейшего анализа удобно ввести нормированный весовой вектор. Тогда второе слагаемое в (11) будет иметь вид:

$$\frac{|S^H(\varphi)Z|^2}{S^H(\varphi)S(\varphi)} = |W^H(\varphi)Z|^2. \quad (12)$$

Обработка сигнала (12) с весовым вектором обеспечивает максимальное отношение средней мощности (ОСШ) на выходе, если параметры сигнала и весового вектора совпадают. В данном случае обработка является согласованной с плоской волной сигнала.

Допустим, что истинные значения искомым параметров будут: $\varphi = \varphi_0$ и $a = a_0$. Тогда вектор принятого сигнала (1) равен

$$Z = a_0 S(\varphi_0) + X. \quad (13)$$

Если пренебречь влиянием шума и учесть, что $S^H(\varphi)S(\varphi) = |S(\varphi)|^2 = N$, то из (13) и (12) получим следующий результат

$$\frac{|S^H(\varphi)Z|^2}{S^H(\varphi)S(\varphi)} = \frac{|a_0|^2}{N} |S^H(\varphi)S(\varphi)|^2 = \frac{|a_0|^2}{N} \left| \sum_{n=1}^N \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda} x_n (\sin \varphi_0 - \sin \varphi) \right] \right|^2. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что выражение (14) достигает максимума при $\varphi = \varphi_0$. Если АР эквидистантная, то $x_n = d(n-1)$, и формула (14) может быть преобразована, в результате получим, что

$$\frac{|S^H(\varphi)Z|^2}{S^H(\varphi)S(\varphi)} = |a_0|^2 |F(\varphi, \varphi_0)|^2. \quad (15)$$

Функция $|F(\varphi, \varphi_0)|^2$ представляет собой отклик нашего “прибора” (антенной решетки) на плоскую волну единичной амплитуды. Ее можно назвать аппаратной функцией. Функция $|F(\varphi, \varphi_0)|^2$ совпадает с ДН АР по мощности. Иногда метод оценивания угла прихода (12) называют методом сканирования лучом антенны.

Если сигнал отсутствует и вместо смеси Z в (12) входит только шум X , то средняя мощность шума на выходе равна σ^2 .

Теперь будем полагать, что сигнал принимается на фоне шума. Тогда выход измерительной системы (12) представляет собой случайную функцию угловой переменной φ . Найдем среднее и среднеквадратическое отклонение этой функции. Для этого (13) подставим в (12) и найдем статистическое среднее. В результате получим, что

$$\langle |W^H(\varphi)Z|^2 \rangle = |a_0|^2 |F(\varphi, \varphi_0)|^2 + \sigma^2. \quad (16)$$

Функция, рассчитанная для эквидистантной АР по формуле (16), представлена на рисунке 3 ($\varphi_0 = 0$) при ОСШ = 10. Параметры $N=16$, $d/\lambda=0.5$. Мы наблюдаем, что максимум отклика совпадает с направлением на источник сигнала.

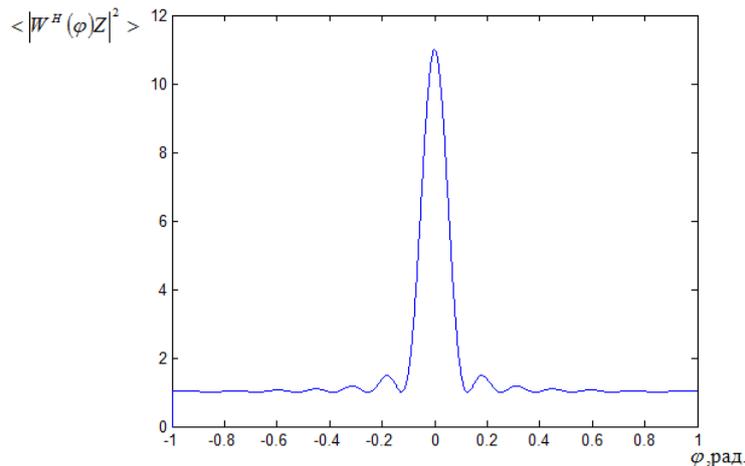


Рисунок 3. – Зависимость $\langle |W^H(\varphi)Z|^2 \rangle = \psi(\varphi)$ при ОСШ=10

Приведен анализ метода максимального правдоподобия для получения сверхразрешения. Результаты исследования показали максимум отклика совпадает с направлением источника сигнала, что может быть использована в радиопеленгации и радиолокации для построения методов цифровой обработки и получения высокого качества радиолокационных сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. - М. : Радио и связь, 1989. – 656 с.
2. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980. 400 с.
3. Журавлев А.К., Лукошкин А.П., Поддубный С.С. Обработка сигналов в адаптивных антенных решетках. – Л. : Изд-во Лен. универ., 1983. – 240 с.
4. Караваев В.В., Сазонов В.В. Статистическая теория пассивной локации. М.: Радио и связь, 1987. 240 с.
5. Ширман Я.Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. – М. : Радио и связь, 1981. – 416 с.
6. Монзинго Р.А., Миллер Т.У. Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию. Пер. с англ. – М. : Радио и связь, 1986. – 448 с.
7. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. Пер. с англ. – М. : Радио и связь, 1989. – 440 с.