

УДК 51:62(035.3)

**ТРАНСФОРМАЦИЯ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ  
В РАВНОМЕРНОЕ ПРИ ЗАМЕНЕ БЕСКОНЕЧНОГО ПРОМЕЖУТКА  
ЕЕ ВОЗМОЖНЫХ ЗНАЧЕНИЙ КОНЕЧНЫМ**

Ю. А. ЛЕВША

(Представлено: д-р техн. наук, проф. С. Г. ЕХИЛЕВСКИЙ)

На примере процесса растворения чернильной капли в заполненной водой трубке отслежена трансформация нормального закона распределения случайной координаты чернильной молекулы в равномерное по мере роста энтропии, связанного с увеличением среднеквадратичного разброса координат молекул чернил, обусловленного их броуновским движением.

Нормальный, экспоненциальный и равномерный законы распределения случайных величин формируются в результате растворения капли чернил в бесконечной, полубесконечной (начальное положение капли у ее края) и конечной трубке с водой [1]. При этом, под  $f(x)$  следует понимать отношение числа чернильных молекул на участке  $(x, x + dx)$  к их общему числу в трубке.

Очевидно, растворение означает рост  $S$  в результате броуновского движения молекул, что согласуется с законом возрастания энтропии  $S$ . Чтобы убедиться в этом непосредственно, вычислим  $S$  нормально распределенной величины.

$$S = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \right) dx = \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x) dx,$$

где  $m$  - математическое ожидание случайной координаты чернильной молекулы  $x$ .

С учетом того, что для  $f(x)$  выполняется условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \quad (1)$$

а также определения среднеквадратического отклонения случайной величины  $x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x) dx = \sigma^2, \quad (2)$$

получим результат

$$S = \ln \sigma + \ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Согласно (3) обусловленный броуновским движением молекул рост сигмы приводит к увеличению энтропии процесса [2].

Свернув координатную плоскость  $OXY$  с нарисованной на ней Гауссовой кривой в цилиндр радиуса  $r$  и образующей, параллельной оси  $OY$ , можно непосредственно проследить как нормальное распределение по мере увеличения  $\sigma$  (обусловленного ростом  $S$ ) трансформируется в равномерное.

Пусть  $m = 0$ . Считая поворот на угол  $2\pi$  возвратом в исходную точку и, применив теорему сложения вероятностей, получим

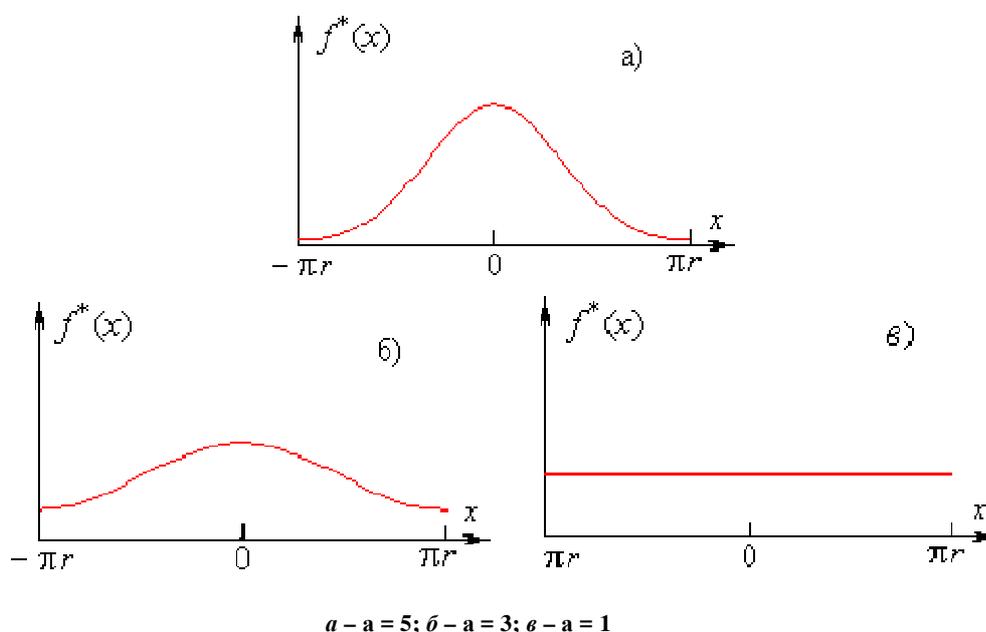
$$f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+2\pi k)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\pi r \leq x \leq \pi r), \quad (4)$$

где длина интервала равна длине окружности.

Вначале, когда чернильные молекулы локализованы не далеко от места падения капли чернил ( $\sigma \ll \pi r$ ), в соответствии с правилом трех сигм, в сумме (4) можно пренебречь слагаемыми со всеми номерами, кроме  $k = 0$ , и  $f^*(x)$  на отрезке  $[-\pi r, \pi r]$  будет аппроксимироваться нормальным законом.

Затем, по мере растворения чернил, начнет выполняться неравенство  $\sigma \geq \pi r$ . Т.е. разброс случайной величины станет сравнимым с длиной отрезка, на котором определена  $f^*(x)$ . Это не позволяет при составлении прогноза одно возможное значение  $x$  предпочесть другому. Т.е.  $f^*(x)$  в такой ситуации должна описывать равномерное распределение.

Меняя отношение  $\alpha = \pi r / \sigma$  от бесконечности до нуля, с помощью формулы (4) можно непосредственно проследить трансформацию нормального распределения в равномерное. В частности, графики  $f^*(x)$  (рисунок 1 а, б, в), построенные в среде пакета MathCAD [3] для  $\alpha = 5, 3, 1$ , полностью подтверждают предсказанную эволюцию функции распределения случайной координаты чернильной молекулы в свернутой в кольцо трубке конечной длины. При этом  $x = 0$  соответствует начальному положению чернильной капли.



**Рисунок 1. – Эволюция нормального распределения в равномерное**

Чтобы обозначить масштаб осей ординат, заметим, что высота первого максимума почти как у нормального закона и, в соответствии с изложенным, примерно равна  $5 / \sqrt{2\pi\pi r}$ . При этом площади под всеми графиками одинаковы и равны единице независимо от величины  $r$ . По этой причине высота прямой на рисунке в равна  $1/2\pi r \ll 5 / \sqrt{2\pi\pi r}$ .

В заключение заметим, что в силу симметрии задачи ( $m = 0$ , ибо чернильная капля в начале процесса растворения локализована в середине трубки), полученные результаты никак не изменятся, если рассматривать отрезок прямой трубки с начальным положением чернильной капли в ее центре. При этом слагаемые с  $k \neq 0$  в (4) появятся вследствие отражения диффундирующих молекул чернил от торцов трубки.

Рассмотренная задача является непосредственной иллюстрацией того, что при математическом моделировании процессов молекулярной природы (в том числе и решении соответствующих уравнений математической физики) целесообразно использовать мощный дополнительный ресурс в виде основных положений и методов теории вероятностей и математической статистики.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Левша Ю. А. Получение законов распределения случайных величин из условия экстремальности энтропии / Сборник трудов молодых специалистов ПГУ
2. Пытьев, Ю. П. Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков / Ю. П. Пытьев, И. А. Шишмарев. – М. : Изд-во Московского ун-та, 1983 г. – 252 с.
3. Аладьев, В.З. Вычислительные задачи на персональном компьютере / В.З. Аладьев, Н.А. Гершгорн. - Киев: Техника, 1991 г. - 248 с.