УДК 51:62(035.3)

ПОЛУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ИЗ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОСТИ ЭНТРОПИИ

Ю. А. ЛЕВША
(Представлено: д-р техн. наук, проф. С. Г. ЕХИЛЕВСКИЙ)

С помощью второго начала термодинамики (законы возрастания энтропии) установлен вид и смысл параметров наиболее популярных в статистике законов распределения непрерывных случайных величин, описывающих равновесные состояния в окружающем нас материальном мире.

Согласно [1] мера неопределенности исхода опыта по измерению непрерывной случайной величины x (энтропия):

$$S = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ln f(x)\,dx, \tag{1}$$

где f(x) – дифференциальная функция распределения.

В связи с законом возрастания энтропии (см. 2-ое начало термодинамики) [2] выясним какая f(x) обеспечивает экстремум функционала (1). Так как f(x) – плотность вероятности, максимум S будет искать при дополнительных условиях:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = m, \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx = \sigma^2, \tag{4}$$

где (2) - условие нормировки, (3) и (4) - требования конечности матожидания и дисперсии.

Домножим (2) – (4) соответственно на α, β, γ и прибавим к (1):

$$S + \alpha + \beta m + \gamma\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, f(x))\,dx, \tag{5}$$

где

$$F(x, f) = -f\ln f + \alpha f + \beta x f + \gamma (x-m)^2 f. \tag{6}$$

Так как слева в (5) все (кроме S) есть константа, то экстремальность интеграла справа в (5) будет означать условный экстремум S. Чтобы интеграл (5) был максимальным, нужно каждому x поставить такое значение f(x), чтобы функция F(x, f) была максимальной. Из необходимого условия экстремума:

$$F'_f = -\ln f - 1 + \alpha + \beta x + \gamma (x-m)^2 = 0, \tag{7}$$

найдем

$$f = c * e^{\beta x + \gamma (x-m)^2} = f(x). \tag{8}$$

Подставив (8) в (2) – (4), получим, что $\beta = 0$ и выразим $c = e^{\alpha-1}$ и γ через m и σ. Если (2) умножим на m и вычтем из (3), получим, что:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-m) f(x)\,dx = 0,$$

то есть имеет место свойство

$$f(m-x) = f(m+x).$$

Согласно (8) это означает, что $\beta = 0$. В результате, после замены $\xi = \frac{(x-m)}{\sigma}$, равенство (4) с учетом (8) примет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 c\,\sigma\, e^{\xi^2 \gamma \sigma^2}\,d\xi = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2}\,d\xi. \tag{9}$$

Чтобы убедиться в справедливости (9), рассмотрим зависящую от параметра α интеграл

$$J(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2/2}\, dx$$

Для вычисления $J(1)^2$ перейдем в полярную систему координат:

$$J(1)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2/2}\, \rho\, d\rho = 1 * \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = 1$$

То есть $J(1) = 1$. При этом $J(\alpha) = {}^{1}/_{\sqrt{\alpha}}$, после чего дифференцированием $J(\alpha)$ по параметру получим:

$$J(\alpha)' = -{}^{\alpha^{-3/2}}/_{2} = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-\alpha x^2/2}\, dx$$

или, полагая в последнем равенстве $\alpha = 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-x^2/2}\, dx = 1$$

Аналогично, вычислив производную n-го порядка $J(\alpha)^{(n)}$, можно получить:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}\, e^{-x^2/2}\, dx = 1 * 3 * \ldots * (2n-1), \tag{10}$$

С учетом изложенного (см. (9))

$$\gamma = -{}^{1}/_{2\sigma^2},\ c = {}^{1}/_{\sqrt{2\pi}\sigma},$$

то есть

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \tag{11}$$

В отличие от стандартного подхода [1], нормальное распределение (11) возникло не по определению, а в следствие закона возрастания энтропии. При этом смысл параметров m, σ не нужно устанавливать отдельно. Он понятен из соотношений (3) и (4).

Если случайная величина положительно определена, из конечности матожидания следует конечность дисперсии, так как слева от m интервал конечен (x > 0), а справа – бесконечен. Бесконечность дисперсии означала бы бесконечное смещение m вправо по числовой оси. Поэтому от условия (4) следует отказаться, а соотношения (2), (3), (8) примут вид:

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx = 1, \tag{2'}$$

$$\int_0^{\infty} x\, f(x)\, dx = m, \tag{3'}$$

$$f(x) = c\, e^{\beta x}. \tag{8'}$$

Соответственно подставив (8’) в (2’), выразим c через β:

$$1 = \int_0^{\infty} c\, e^{\beta x} dx = \frac{c}{\beta} e^{\beta x}\Big|_0^{\infty} \Rightarrow \beta < 0; \quad 1 = -\frac{c}{\beta} \Rightarrow f(x) = c\, e^{-cx}.$$

Подставив последнее выражение в (3’), найдем c и завершим получение экспоненциального распределения:

$$c \int_0^{\infty} \underset{u}{x}\, \underbrace{e^{-cx} dx}_{du} = \left| \begin{matrix} du = dx \\ V = -\frac{1}{c} e^{-cx} \end{matrix} \right| = c \left[-\frac{x}{c}\, e^{-cx} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{c} \int_0^{\infty} e^{-cx} dx = \right.$$
$$= -\frac{1}{c} e^{-cx} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{c} = m \Rightarrow f(x) = \frac{1}{m} e^{-\frac{x}{m}}. \tag{12}$$

Если возможные значения случайной величины принадлежат отрезку [a, b], ее матожидание не может не быть конечным. Отбросив в этом случае условие (3’), получим

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1, \tag{2''}$$

$$f(x) = c, \tag{8''}$$

откуда

$$c = \frac{1}{b-a},$$

т.е. максимуму энтропии на отрезке отвечает равномерное распределение

$$f(x) = \frac{1}{b-a}. \tag{13}$$

Полученные распределения давно открыты и изучены, так как повсеместно распространены в окружающем нас мире, в соответствии с законом возрастания энтропии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман, И. И. Теория вероятностей и математическая статистика / И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. – 1979 г. – 408 с.
2. Курс физики / Б. М. Яворский [и др.]. - М. : Высш. шк., 1965. – Т. 1 – 376 с.