

УДК 517.983+517.444

**ОДИН СЛУЧАЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ  
ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  
ДРОБНОГО ПОРЯДКА**

А. А. КУРОХТИНА

(Представлено: канд. физ.-мат. наук, доц. О. В. СКОРОМНИК)

В работе приведена постановка одной конкретной задачи типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка, получена формула ее решения и изучен вопрос единственности решения.

**Ключевые слова:** дробный интеграл, дробная производная, задача типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка, функция Миттаг – Леффлера.

Работа посвящена решению одного частного случая задачи типа Коши для неоднородного дифференциального уравнения вида:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) = \lambda y(x) + h(x), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (1)$$

с условиями

$$\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} y(x) \Big|_{x=0} = b, \quad (2)$$

когда  $h(x) = e^x$ . Здесь  $y(x)$  – искомая функция,  $b$  – постоянная величина,  $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} = D_{0+}^\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , – оператор левосторонней дробной производной Римана – Лиувилля [1, § 2].

Нам понадобятся следующие вспомогательные сведения.

**Определение 1.** [1, §2] *Интеграл*

$$(\Gamma_{a+}^\alpha \varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a, \quad (3)$$

где  $\alpha > 0$ , называется левосторонним дробным интегралом Римана – Лиувилля дробного порядка  $\alpha$ .

**Определение 2.** [1, §2] Для функции  $f(x)$ , заданной на отрезке  $(a, b)$ , выражение

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}, \quad (4)$$

называется левосторонней дробной производной Римана – Лиувилля порядка  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Будем использовать следующее обозначение:

$$I_{a+}^\alpha f = \begin{cases} \Gamma_{a+}^\alpha f, & \alpha > 0, \\ D_{a+}^{-\alpha} f, & \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Обозначим через  $R_1$  следующее множество точек  $(x, y)$  из области  $D$ , лежащей в  $R \times R$ :

$$R_1 = \left\{ (x, y) \in D : 0 < x \leq h, \left| x^{1-\alpha} y(x) - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \right| \leq a \right\}, \quad a > \frac{hb}{\Gamma(\alpha)},$$

где  $a, h, b$  — некоторые постоянные.

Следующая теорема дает условия существования и единственности решения задачи Коши (1) – (2).

**Теорема 1.** [1, Теорема 42.1] Пусть  $f(x, y)$  – вещественнозначная, непрерывная в области  $D$  функция, удовлетворяющая по  $y$  условию Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq A|y_1 - y_2|$$

и ограничению  $\sup_{(x, y) \in D} |f(x, y)| = b < \infty$ . Тогда решение задачи Коши (1) – (2) в области  $R_1 \subset D$  существует и единственно.

Известно, что при  $0 < \alpha < 1$  [1, формула 2.61]

$$I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha-1}, \quad (5)$$

где  $f_{1-\alpha}(x) = I_{a+}^{1-\alpha} f$ .

Функцией Миттаг – Леффлера называется целая функция, определяемая рядом (см., например, [1, формулы 1.90 и 1.91; 2; 3]):

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0;$$

также функцией Миттаг – Леффлера называют сумму более общего ряда

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (6)$$

Нам понадобится также соотношение [1, формула (1.92)]

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(t^{\alpha} z) dt = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1. \quad (7)$$

Решим следующую задачу типа Коши:

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} y(x) = \lambda y(x) + e^x, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (8)$$

$$\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} y(x) \Big|_{x=0} = b. \quad (9)$$

Интегрируем уравнение (8), имеем

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} y(x) = \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} (\lambda y(x) + e^x),$$

где  $\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} = I_{0+}^{\alpha}$  – оператор дробного интеграла вида (3). Получаем, согласно свойству (5) и условию (9):

$$y(x) = b \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (\lambda y(t) + e^t) dt. \quad (10)$$

Таким образом показали, что задача Коши (8) – (9) приводится к уравнению (10). Покажем теперь, наоборот, что если непрерывная функция  $\varphi(x) = \lambda y(x) + e^x$  удовлетворяет уравнению (10), то она удовлетворяет и системе уравнений (8) – (9). Для этого применяем к равенству (10) оператор  $\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} = D_{0+}^{\alpha}$  дробной производной вида (4), имеем:

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} y(x) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} x^{\alpha-1} + \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} (\lambda y(x) + e^x),$$

откуда  $\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} y(x) = \lambda y(x) + e^x$ .

Условие (9) получается, если к (10) применить оператор  $\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} = D_{0+}^{\alpha-1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} y(x) &= \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} x^{\alpha-1} + \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} (\lambda y(x) + e^x) = b + \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^x (\lambda y(t) + e^t) dt, \\ \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} y(x) &= b + \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^x (\lambda y(t) + e^t) dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Если в (11) положить  $x = 0$ , то получим равенство (9).

Итак, приходим к выводу, что уравнение (10) в указанном смысле равносильно уравнению (8) с начальным условием (9).

Далее методом последовательных приближений, опираясь на результаты теоремы 1, последовательно находим

$$y_0(x) = b \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}, \quad y_m(x) = b \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} (\lambda y_{m-1}(t) + e^t) dt, \quad m = 1, 2, \dots$$

или

$$y_m(x) = b \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} y_{m-1}(t) dt + \frac{e^x}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} e^{-(x-t)} dt, \quad m = 1, 2, \dots,$$

или

$$y_m(x) = b \sum_{j=1}^{m+1} \lambda^{j-1} \frac{x^{\alpha j-1}}{\Gamma(\alpha j)} + \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^{j-1} e^x}{\Gamma(\alpha j)} \int_0^x (x-t)^{\alpha j-1} e^{-(x-t)} dt. \quad (12)$$

В равенстве (12) переходим к пределу при  $m \rightarrow \infty$  и используем (6), имеем:

$$y(x) = b \sum_{k=1}^n x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha) + e^x \int_0^x e^{-(x-t)} (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^\alpha] dt. \quad (13)$$

Далее, для интеграла в левой части (13) применяем формулу (7) и получаем следующее окончательное представление решения задачи Коши (8) – (9):

$$y(x) = b x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha) - \frac{1}{1-\lambda} e^x, \quad |\lambda| < 1.$$

На основании теоремы 1 оно единственно.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн.: Наука и техника, 1987. – 688с.
2. Paneva-Konovska J. From Bessel to multi-index Mittag-Leffler functions : enumerable families, series in them and convergence – World Scientific Publishing Europe Ltd., 2017. – 229 p.
3. Gorenflo R., Kilbas A.A, Mainardi F., Rogosin S. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. registered company Springer-Verlag GmbH, DE part of Springer Nature, 2020. – 548 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-61550-8>